UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tiempos de explosión en dos ecuaciones parciales semilineales perturbadas por ruido blanco

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

MANUEL ALEJANDRO GARCÍA ACOSTA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ ALFREDO LÓPEZ MIMBELA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Índice general

Introducción

Una *advertencia* antes de comenzar: escribo la primera parte de esta introducción suponiendo que el lector de esta tesis es, como yo, un alumno de pregrado y no necesariamente está especializado en el tema. Esto con el fin de presentar de forma más sencilla -espero- esta tesis.

En las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) existen ecuaciones que “explotan” en tiempo finito, es decir, la solución tiene un valor acotado sobre un intervalo de tiempo finito $[0, T)$ antes de que tienda a infinito mientras más cerca se esté del tiempo de explosión T. Por poner un ejemplo simple, consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2, \\ x(0) &= 1. \end{aligned} \tag{0.1}$$

La solución a esta ecuación es

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Conforme nos acercamos a 1 en el tiempo, el denominador va acercándose a 0. Cuando llegamos a 1 la solución toma un valor infinito, i.e., ha “explotado” y el tiempo de explosión es $T = 1$. Este tipo de comportamiento está presente también en las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) -y en otro tipo de ecuaciones con un componente aleatorio de las cuáles hablaremos más adelante-. Por ahora nos centramos en el caso determinístico; Fujita [12] estudió la existencia de soluciones globales y locales de un tipo particular de problemas de valores iniciales con condiciones de Dirichlet en la frontera. Considérese la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u(x,t) + G(u(x,t)), && t > 0, x \in \Omega, \\ u(0,x) &= f(x), && x \in \Omega, \\ u(t,x) &= 0, && t \geq 0, x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{0.2}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un dominio (un conjunto acotado, abierto y conexo), $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua. Fujita demostró que, en el caso especial en que

$$G(x) = x^{1+\beta}, \quad x \geq 0, \beta > 0,$$

la solución a (0.2) explota en tiempo finito si se cumple la condición

$$\int_D f(x)\psi(x)dx > \lambda_1^{1/\beta}. \tag{0.3}$$

En la ecuación anterior, $\lambda_1 > 0$ es el primer eigenvalor del problema de Dirichlet del laplaciano en Ω:

$$\begin{aligned} \Delta\phi + \lambda\phi = 0, &\quad x \in D, \\ \phi(x) = 0, &\quad x \in \delta D. \end{aligned}$$

$\psi(x)$ es la eigenfunción correspondiente a λ_1 normalizada por $||\psi||_{L^1} = 1$.

Para algunos lectores quizá parezca que las únicas investigaciones que se pudieran hacer sobre este tipo de ecuaciones “explosivas” se llevan a cabo en el terreno de las EDO o las EDP. Sin embargo, consideremos por un momento la posibilidad de que en nuestro problema haya un componente azaroso. Justamente este trabajo considera un problema inspirado en los resultados arriba mencionados, con el añadido del antes mencionado factor aleatorio (al que llamaremos un ruido multiplicativo) que depende únicamente del tiempo. Entonces nuestra ecuación es del tipo

$$du(t,x) = [\Delta u(t,x) + G(u(t,x))]dt + \kappa u(t,x)dW(t). \tag{0.4}$$

Aunado a que, quizá la notación parezca distinta a la que se suele ver en la teoría de las EDO y las EDP, es notorio que ahora tenemos un coeficiente extra $W(t)$. Ya se ha dicho que W depende del tiempo y, lo más natural sería pensarla como una función continua de t ... bueno, no precisamente. $W(t)$ es lo que se conoce como un proceso estocástico (para el caso que nos ocupa, resulta ser el movimiento browniano) y (0.4) se conoce como una ecuación diferencial parcial estocástica [sic].

Es conveniente hacer aquí una pausa. En el supuesto de que gran parte de los lectores que lleguen a revisar este manuscrito están en el nivel de estudios de pregrado en ciencias, hago el siguiente comentario. Para elaborar este escrito me fue necesario adquirir ciertas bases en cálculo estocástico y un poco de teoría de semigrupos de operadores lineales acotados (análisis funcional). Considero que este material es muy interesante pues engloba dos de las materias que me fueron más atrayentes en mi carrera universitaria: los procesos estocásticos y las ecuaciones diferenciales parciales.

Dicho esto, esclarecemos que las ecuaciones que abordamos en la presente tesis también "explotan". ¿Por qué deberían interesarnos ecuaciones de este estilo? Más allá de que por sí mismas son interesantes como objetos matemáticos hay otro punto a destacar; este tipo de ecuaciones se usan también en modelación de sistemas en el *mundo real* (por ejemplo, en finanzas). Por lo tanto, si se modela un problema nos interesa saber si este tiene solución y bajo qué circunstancias ésta deja de existir.

Procedamos ahora, de manera más formal, a la presentación del estudio que nos ocupa. En este texto tratamos una ecuación diferencial estocástica semilineal en dos versiones (afectada por uno y dos ruidos aleatorios). Los resultados principales de esta tesis son los siguientes: Para la primera versión de nuestra ecuación se obtienen una cota superior y una inferior del tiempo de explosión. Además de esto, se establecen algunas condiciones bajo las cuales puede existir una solución global. Para la segunda versión únicamente se obtiene una cota superior para el tiempo de explosión. Finalmente, se realiza una comparación entre las estimaciones que ofrecen ambas cotas superiores sobre la probabilidad de explosión en tiempo finito de la ecuación. Cabe destacar que tomamos como base los artículos de Dozzi, Mimbela [8] y Niu, Xie [24]. El primer artículo estudia la versión de un sólo ruido, mientras que el segundo se ocupa del caso con dos ruidos independientes.

La estructura del documento es la siguiente: en el capítulo 1 damos algunas de las definiciones y resultados en procesos estocásticos, cálculo estocástico y análisis funcional de los que nos servimos para obtener nuestros resultados. A continuación, en el capítulo 2 realizamos el estudio de una ecuación diferencial estocástica semilineal con un ruido (2.1). Observamos que su solución puede explotar y procedemos a obtener una cota superior y una inferior para su tiempo de explosión. Para finalizar, en el capítulo 3 nos ocupamos de la versión con dos ruidos, véase la ecuación (3.1), y obtenemos una cota superior para el tiempo de explosión. Establecido este resultado hacemos una comparación entre las probabilidades de explosión en tiempo finito para la ecuación en sus dos versiones.

Los resultados aquí presentados son válidos para dominios espaciales más generales. Por simplicidad se ha optado por tomar dominios relativamente sencillos, con los cuáles se ha enfrentado cualquier estudiante de la carrera de matemáticas, a saber , las bolas abiertas en el espacio euclidiano. En nuestro desarrollo salta a la vista que las ecuaciones y las condiciones que se establecen para estas son bastante específicas. Una tendencia de las matemáticas es realizar generalizaciones cuando esto es asequible, ¿entonces por qué se hizo esto? La razón es que tales características permiten calcular de forma explícita diversas cantidades en nuestros resultados, y cuando se habla de *aplicaciones*, no se puede desestimar la capacidad de poder computar directamente algunos números -con el perdón de Stanisław Ulam-.

En el desarrollo de este escrito he tratado de mostrar con más detalle las demostraciones de los resultados que se obtienen en los artículos [8] y [24], en particular en la última sección del capítulo 2 donde se da una demostración de resultados para los cuales en el material original sólo se da un esbozo de la demostración.

Capítulo 1

Preliminares

Para la lectura de este escrito damos algunas de las definiciones y resultados necesarios para entenderlo. No obstante, no es la intención incluir todo el material previo pues al hacerlo el trabajo se volvería muy extenso y la revisión del mismo sería por demás tediosa y agotadora para el lector. Por la razón anterior hemos omitido cierto material conjeturando que el lector tiene algunos conocimientos previos en análisis matemático, ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) y probabilidad. En esta sección de preliminares abordamos temas de procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales estocásticas y análisis funcional. Al principio de cada sección se citan los textos de los cuales se obtuvieron los resultados dados; estos mismos textos se sugieren como libros de consulta para los temas aquí vistos.

1.1. Procesos estocásticos

Imaginemos un proceso que evoluciona conforme transcurre el tiempo; supongamos además que los cambios en este sistema a lo largo del tiempo no se dan de una forma determinística sino por medio del azar. Ahora bien, para un tiempo fijo t podemos considerar que dicho procedimiento exhibe el comportamiento propio de una variable aleatoria; ésta es la idea intuitiva de un proceso estocástico. La teoría sobre estos procesos tiene numerosas aplicaciones en distintos ámbitos, desde la física hasta la economía. A continuación damos algunas nociones sobre procesos estocásticos tomando como referencias los textos Karlin[15], Karatzas [14], Ross [30], Tudor [34] y Zhao [4].

Definición 1.1. *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T, llamado espacio parametral, donde las variables están definidas en un mismo espacio de probabilidad y toman valores en un espacio medible S llamado espacio de estados.*

Notación. Un proceso estocástico se puede pensar como una función de dos variables $(t,\omega) \to X(t,\omega)$ por la noción de que X_t es una variable aleatoria. Sin embargo, usando la definición anterior lo consideramos como una familia de variables aleatorias $\{X_t, t \geq 0\}$ donde una variable aleatoria esta determinada para cada $t \geq 0$ y se ha tomado $T = \mathbb{R}^+$. Así las cosas, fijando t tenemos la variable aleatoria $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$. Por simplicidad usamos la notación $X(t)$ para referirnos a un proceso estocástico.

Notación. Denotamos $\mathbb{R}^+$ como el conjunto de los números reales no negativos.

Definición 1.2. *Para $\omega \in \Omega$ fijo, la función $X_t(\omega)$ con $t \geq 0$ se llama la trayectoria o realización del proceso X asociado a ω.*

Definición 1.3. *Un movimiento browniano estándar unidimensional de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $\{B(t), t \geq 0\}$ con valores en $\mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *$B(0) = 0$ c.s.*
2. *Las trayectorias son continuas.*
3. *Incrementos independientes: Para cualesquiera tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, las variables $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ son independientes.*
4. *Incrementos estacionarios: Para cualesquiera tiempos $0 \leq s < t$ y $0 \leq h$, la variable incremento $B(t+h) - B(s+h)$ tiene distribución $N(0, \sigma^2(t-s))$.*

Notación. Usamos el acrónimo *c.s.* para la frase "casi seguramente".

Definición 1.4. *Sean $B_1(t), \ldots, B_d(t)$ movimientos brownianos estándar unidimensionales e independientes. El movimiento browniano d-dimensional es el proceso*

$$B(t) = (B_1(t), \ldots, B_d(t)), \qquad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Definición 1.5. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una filtración es una familia de sub-σ-álgebras $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ de $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t$ cuando $0 \leq s \leq t$. La filtración natural o canónica de un proceso a tiempo continuo $\{X(t) : t \geq 0\}$ definido en dicho espacio de probabilidad es la filtración dada por $\mathscr{F}_t = \sigma(X(s) : 0 \leq s \leq t)$. A esta filtración se le denomina la historia del proceso al tiempo t.*

Notación. Un espacio de probabilidad dotado de una filtración se dice un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Definición 1.6. *El proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ se dice medible si para cada $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, el conjunto $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \in A\}$ pertenece a la σ-álgebra producto $\mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$; en otras palabras, si el mapeo*

$$X_t(\omega) : ([0,\infty) \times \Omega, \mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) \tag{1.2}$$

es medible.

Definición 1.7. *Decimos que el proceso* $\{X(t), t \geq 0\}$ *es adaptado a la filtración* $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}$ *si para cada* $t \geq 0$ *la variable aleatoria* $X(t)$ *es* $\mathscr{F}_t$*-medible.*

Definición 1.8. *Una variable aleatoria* τ *con valores en* $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ *es un tiempo de paro respecto de una filtración* $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}$ *si para cada* $t \geq 0$ *se cumple que* $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$.

Definición 1.9. *Sea* $B(t)$ *un movimiento browniano d-dimensional y sea* $E \subset \mathbb{R}^d$. *Definimos el tiempo de primer arribo a* E *como*

$$\tau_E = \begin{cases} \text{ínf}\{t \geq 0 : B(t) \in E\} & \text{si } B(t) \in E \text{ para algún } t \geq 0 \\ \infty & \text{e.o.c.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Notación. Usamos el acrónimo *e.o.c* para la frase "en otro caso".

Definición 1.10. *Sea* $B(t)$ *un movimiento browniano d-dimensional y* $D \subset \mathbb{R}^d$, *si definimos el proceso*

$$B(t) = \begin{cases} B(t) & \text{si } t < \tau_{D^c} \\ \partial & \text{si } t \geq \tau_{D^c}, \end{cases} \tag{1.4}$$

donde τ_{D^c} *es el tiempo de primer arribo al complemento de* D *en* $\mathbb{R}^d$ *y* $\partial \in \mathbb{R}^d$ *es un punto en el que fijamos el movimiento browniano (llamado punto cementerio) al momento que se llega por primera vez a* $\mathbb{R}^d \setminus D$. *A este movimiento browniano se le llama movimiento browniano detenido (o matado) en el complemento de* D.

Definición 1.11. *Un proceso estocástico* $\{X(t), t \geq 0\}$ *con valores reales es una martingala respecto de una filtración* $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}$ *si se cumplen las condiciones*

1. $X(t)$ *es* $\mathscr{F}_t$*-adaptado para cada* $t \geq 0$.
2. *Para cada* $t \geq 0$, $\mathbb{E}(|X(t)|) < \infty$.
3. *Para* $s < t$ *se tiene*
$$\mathbb{E}(X(t)|\mathscr{F}_s) = X(s).$$

Si se cumplen las primeras dos condiciones de la definición 1.11 y en lugar de la tercera se cumple $X(s) \leq \mathbb{E}(X(t)|\mathscr{F}_s)$ el proceso se llama una submartingala, si en cambio se cumple $X(s) \geq \mathbb{E}(X(t)|\mathscr{F}_s)$ el proceso será una supermartingala.

Definición 1.12. *Decimos que un proceso estocástico* $\{X(t), t \geq 0\}$ *es uniformemente integrable si*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \geq 0} \left\{ \mathbb{E}|X(t)| \mathbb{1}_{\{|X(t)| > n\}} \right\} = 0. \tag{1.5}$$

Observación 1.1. *Se puede considerar también que un proceso sea cuadrado integrable en un intervalo finito* $[0, T]$, *en cuyo caso el supremo en* t *se toma sobre el intervalo* $[0, T]$.

Definición 1.13. *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad filtrado y* $X(t)$ *un proceso* $\mathscr{F}_t$*-adaptado. Decimos que* $X(t)$ *es una martingala local si se cumplen*

1. *Existe una sucesión* $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de tiempos de paro tal que*
$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty \quad c.s.$$
2. *Para cada* n *el proceso* $X(t \wedge \tau_n)$ *es una martingala uniformemente integrable.*

Definición 1.14. *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad filtrado. Decimos que* $\{X(t), t \geq 0\}$ *es una semimartingala si admite la representación*

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t), \quad 0 \leq t < \infty, \tag{1.6}$$

donde $M(t)$ *es una martingala local y* $A(t)$ *un proceso* $\mathscr{F}_t$*-adaptado de variación finita.*

1.2. Cálculo estocástico

El cálculo estocástico versa sobre la construcción de herramientas análogas a las del cálculo diferencial e integral que permiten "operar" con los procesos estocásticos, siendo por supuesto la integral estocástica una de sus herramientas principales. La construcción de esta integral se da, en un principio, para un tipo básico de procesos (llamados "procesos simples"); posteriormente se amplían estos resultados para definir dicha integral para procesos más generales (como lo son los procesos de Itô). Para más referencia sobre cálculo estocástico véanse Durret [10], Karatzas [14], Klebaner [16] y Le Gall [18]. A continuación damos algunas nociones sobre cálculo estocástico.

Observación 1.2. *Para la construcción de la integral estocástica, existen las vertientes de Itô y de Stratonovich. La segunda está construida de tal forma que algunos resultados, como la fórmula de integración por partes y la regla de la cadena, son los mismos que en el cálculo tradicional. Sin embargo, en la teoría es más común utilizar la integral dada por Itô. Ambas construcciones guardan una relación que posibilita transitar entre ambas definiciones. Véanse [14] secc. 3.2.D, Klebaner [16] secc. 5.9 y Øksendal [25] secc. 3.3.*

Definición 1.15. *Un proceso simple no aleatorio* $\{X(t), t \geq 0\}$ *es un proceso para el cual existen tiempos* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ *y constantes* $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$*, tales que*
$$X(t) = c_0 \mathbb{1}_{\{t=0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbb{1}_{\{t\in(t_i,t_{i+1}]\}}, \tag{1.1}$$
donde $T \in [0, \infty)$.

Definición 1.16. *La integral de Itô de un proceso simple no aleatorio respecto de un movimiento browniano $B(t)$ está definida como la suma*

$$\int_0^T X(t)dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(B(t_{i+1}) - B(t_i)), \tag{1.2}$$

donde $T \in [0, \infty)$.

Proposición 1.1. *La integral de Itô de un proceso simple no aleatorio es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza*

$$Var\left(\int_0^T X(t)dB(t)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2(t_{i+1} - t_i). \tag{1.3}$$

Para ser capaces de integrar procesos aleatorios debemos de permitir que las constantes c_i en (1.1) sean aleatorias, esto es, reemplazándolas por variables aleatorias ξ_i.

Definición 1.17. *Decimos que el proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ es progresivamente medible con respecto a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ si para cada $t \geq 0$ y $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, el conjunto $\{(s, \omega) : 0 \leq s \leq t, \omega \in \Omega, X(t, \omega) \in E\}$ pertenece a la σ-álgebra producto $\mathscr{B}([0, t]) \otimes \mathscr{F}_t$, es decir, el mapeo $X(s, \omega) : ([0, t] \times \Omega, \mathscr{B}([0, t]) \otimes \mathscr{F}_t) \to (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ es medible para cada $t \geq 0$.*

Los resultados para integrales estocásticas requieren que el proceso integrado sea justamente un proceso progresivamente medible; sin embargo, existe un resultado para un tipo especial de procesos $\mathscr{F}_t$-adaptados que implica que estos resultan ser progresivamente medibles (véanse Karatzas [14] secc. 1.1, Tudor [34] secc 1.2 y Le Gall [18] secc 3.1).

Proposición 1.2. *Si el proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ está adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ y todas sus trayectorias son continuas por la derecha (o por la izquierda), entonces el proceso $X(t)$ es progresivamente medible.*

Una de las propiedades del movimiento browniano estándar es que todas sus trayectorias son continuas. Así, este proceso resulta ser progresivamente medible con respecto a su filtración natural. Como consecuencia, los resultados correspondientes a la integral estocástica se cumplirán para este proceso.

Definición 1.18. *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Decimos que un proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso adaptado simple respecto de la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ si existen tiempos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T \in [0, \infty)$ y variables aleatorias*

$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, tales que ξ_0 es constante, las ξ_i son $\mathscr{F}_{t_i}$-medibles y $\mathbb{E}(\xi_i^2) < \infty$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tales que

$$X(t) = \xi_0 \mathbb{1}_{\{t=0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbb{1}_{\{t \in (t_i, t_{i+1}]\}}. \tag{1.4}$$

Para estos procesos definimos la integral de Itô de la siguiente manera:

Definición 1.19. *La integral de un proceso adaptado simple se define como la suma*

$$\int_0^T X(t) dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)), \tag{1.5}$$

donde $T \in [0, \infty)$.

La integral de Itô para procesos simples tiene algunas propiedades similares a las integrales de Riemman-Stieljes y Lebesgue.

Teorema 1.1. *Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos procesos adaptados simples, entonces la integral de Itô cumple lo siguiente:*

1. *Linealidad. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces*

$$\int_0^T [\alpha X(t) + \beta Y(t)] dB(t) = \alpha \int_0^T X(t) dB(t) + \beta \int_0^T Y(t) dB(t). \tag{1.6}$$

2. *Para la función indicadora $\mathbb{1}_{\{t \in I\}}$ se cumple*

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbb{1}_{\{t \in (a,b]\}} dB(t) &= B(b) - B(a), \quad 0 \leq a \leq b \leq T, \\ \int_0^T X(t) \mathbb{1}_{\{t \in (a,b]\}} dB(t) &= \int_a^b X(t) dB(t), \quad 0 \leq a \leq b \leq T. \end{aligned} \tag{1.7}$$

3. *Propiedad de media cero.*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t) dB(t) \right) = 0. \tag{1.8}$$

4. *Isometría.*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(t) dB(t) \right)^2 \right] = \int_0^T \mathbb{E}\left(X(t)^2 \right) dt. \tag{1.9}$$

Hasta este punto hemos definido la integral de Itô para procesos simples; sin embargo, es de nuestro interés definir esta integral para procesos más generales. Afortunadamente podemos aproximar los procesos progresivamente medibles mediante sucesiones de procesos simples y, más aún, la integral de estos últimos mediante la sucesión de integrales de los procesos simples; para esta parte véanse Karatzas [14] secc. 3.2.A y Le Gall [18] secc. 5.1.4.

Teorema 1.2. *Sea $X(t)$ un proceso progresivamente medible tal que con probabilidad 1 se cumple $\int_0^T X(t)^2 dt < \infty$. Entonces su integral de Itô está definida y tiene las propiedades (1.11) y (1.12); si adicionalmente el proceso cumple*

$$\int_0^T \mathbb{E}\left(X(t)^2\right) dt < \infty, \tag{1.10}$$

su integral también cumple las propiedades (1.13) y (1.14).

1. *Linealidad. Sea $Y(t)$ un proceso progresivamente medible tal que su integral de Itô esta definida y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_0^T [\alpha X(t) + \beta Y(t)] dB(t) = \alpha \int_0^T X(t) dB(t) + \beta \int_0^T Y(t) dB(t). \tag{1.11}$$

2. *Para la función indicadora $\mathbb{1}_{\{t \in I\}}$ se cumple*

$$\int_0^T X(t) \mathbb{1}_{\{t \in (a,b]\}} dB(t) = \int_a^b X(t) dB(t), \qquad 0 \leq a \leq b \leq T. \tag{1.12}$$

3. *Propiedad de media cero.*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t) dB(t)\right) = 0. \tag{1.13}$$

4. *Isometría.*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(t) dB(t)\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left(X(t)^2\right) dt. \tag{1.14}$$

Hagamos una observación importante; consideremos un proceso $X(t)$ cuya integral en $[0, T]$ está definida, i.e., $\int_0^T X(s) dB(s)$ existe. Si hacemos $Y(t) = \int_0^t X(s) dB(s)$ para $0 \leq t \leq T$ entonces tenemos que $\{Y(t), t \geq 0\}$ es un proceso estocástico y, más aún, $Y(t)$ tiene media cero por (1.13) y varianza dada por (1.14).

Como consecuencia importante de los teoremas anteriores tenemos los siguiente corolarios:

Corolario 1.1. *Si $X(t)$ es un proceso continuo adaptado entonces su integral de Itô*

$$\int_0^T X(t)dB(t), \quad 0 \leq T < \infty, \tag{1.15}$$

está definida.

Corolario 1.2. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces la integral*

$$\int_0^T f(B(t))dB(t), \quad 0 \leq T < \infty, \tag{1.16}$$

está definida.

Otro resultado importante es el de la esperanza del producto de dos integrales estocásticas.

Teorema 1.3. *Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos procesos progresivamente medibles tales que*

$$\int_0^T \mathbb{E}\left(X(t)^2\right) dt < \infty, \quad \int_0^T \mathbb{E}\left(Y(t)^2\right) dt < \infty. \tag{1.17}$$

Entonces

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)dB(t) \int_0^T Y(t)dB(t)\right) = \int_0^T \mathbb{E}\left(X(t)Y(t)\right) dt. \tag{1.18}$$

Como ya se ha dicho, la integral de Itô es un proceso estocástico y como tal posee propiedades interesantes, como es el ser una martingala y el hecho de que siempre existe una versión de ésta que es continua por la derecha, véanse Karatzas [14] secc. 1.3 y Tudor [34] secc.4.1.1; de aquí en adelante asumimos que estamos trabajando con la versión continua de dicha integral.

Definición 1.20. *Una martingala $X(t)$ es cuadrado integrable en $[0,T]$ si su segundo momento es acotado, i.e.,*

$$\mathbb{E}(X(t)^2) < \infty, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.19}$$

Si la desigualdad anterior se cumple para todo $t \geq 0$ simplemente decimos que el proceso es una martingala cuadrado integrable.

Teorema 1.4. *Sea $X(t)$ un proceso progresivamente medible tal que $\int_0^T \mathbb{E}\left(X(s)^2\right) ds < \infty$. Entonces el proceso*

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{1.20}$$

es una martingala continua cuadrado integrable con media cero.

Corolario 1.3. *Para cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada, la integral $\int_0^t f(B(s))dB(s)$ es una martingala cuadrado integrable.*

Observación 1.3. *Es importante destacar que la integral estocástica se define como un límite en L^2, véanse Karatzas [14] secc. 3.2-3.2.B y Øksendal [25] secc. 3.1-3.2.*

1.2.1. Variación cuadrática

Un elemento esencial en el cálculo estocástico del movimiento browniano es la variación cuadrática, la cual emerge en repetidas ocasiones y está inmersa en varios de los resultados más importantes del cálculo estocástico. Por poner algunos ejemplos, la variación cuadrática hace su aparición en las fórmulas análogas a la regla del producto y la integración por partes.

Definición 1.21. *La variación cuadrática de un proceso estocástico* $\{X(t), t \geq 0\}$ *está definida como*

$$[X]\,(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)\right)^2, \tag{1.21}$$

donde para cada $n, \{t_i^n\}_{i=0}^{p_n}$ *es una partición de* $[0,t]$ *y el límite es en probabilidad, tomado sobre las particiones que cumplen* $\delta_n = \max_{0\leq i\leq n}\{t_{i+1}^n - t_i^n\}$ *con*

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0. \tag{1.22}$$

Teorema 1.5. *La variación cuadrática del movimiento browniano sobre* $[0,t]$ *está dada por*

$$[B](t) = t. \tag{1.23}$$

Teorema 1.6. *Si* g *es una función continua de variable real y de variación finita, entonces su variación cuadrática es cero.*

Teorema 1.7. *La variación cuadrática de la integral de Itô,* $\int_0^t X(s)dB(s)$*, está dada por*

$$\left[\int_0^{\cdot} X(s)dB(s)\right](t) = \int_0^t X(s)^2 ds. \tag{1.24}$$

De los dos teoremas anteriores, se sigue que si una integral estocástica tiene variación cuadrática positiva, entonces tiene variación infinita en el intervalo $[0,t]$.

Definición 1.22. *La covarianza cuadrática de dos procesos* $X(t), Y(t)$ *se define como*

$$[X,Y](t) = \frac{1}{2}\left[[X+Y]\,(t) - [X]\,(t) - [Y]\,(t)\right]. \tag{1.25}$$

Proposición 1.3. *Sean* $X(t), Y(t)$ *dos procesos, entonces su covarianza cuadrática tiene las siguientes propiedades*

1. *Es bilineal.*

2. *Es simétrica.*

3. *Si* $\{t_i^n\}_{i=0}^{p_n}$ *es una partición de* $[0,t]$ *para cada* n *y éstas cumplen*

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0, \tag{1.26}$$

para $\delta_n = \max_{0\leq i\leq n}\{t_{i+1}^n - t_i^n\}$, *entonces*

$$[X,Y](t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)\right]\left[Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)\right], \tag{1.27}$$

donde el límite es en probabilidad.

Corolario 1.4. *Sean* $X_1(t), X_2(t)$ *dos procesos con integrales estocásticas* $Y_1(t), Y_2(t)$ *respecto del mismo browniano, entonces su covarianza cuadrática cumple*

$$[Y_1, Y_2](t) = \int_0^t X_1(s)X_2(s)ds. \tag{1.28}$$

Notación. La covarianza cuadrática $[X,X](t)$ es, por definición, la varianza cuadrática $[X](t)$.

Definición 1.23. *Un proceso de la forma*

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s), \qquad 0\leq t\leq T, \tag{1.29}$$

se denomina un proceso de Itô, donde $Y(0)$ *es* $\mathscr{F}_0$*-medible y los procesos* $\mu(t)$ *y* $\sigma(t)$ *son* $\mathscr{F}_t$*-adaptados y tales que* $\int_0^T |\mu(t)|\,dt < \infty$ *y* $\int_0^T \sigma(t)^2 dt < \infty$. *Así definido, decimos que el proceso* $Y(t)$ *tiene el diferencial estocástico*

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \qquad 0\leq t\leq T. \tag{1.30}$$

Proposición 1.4. *Sea* $Y(t)$ *un proceso de Itô. Entonces su variación cuadrática esta dada por*

$$[Y](t) = \left[\int_0^{\cdot} \sigma(s)dB(s)\right](t) = \int_0^t \sigma(s)^2 ds. \tag{1.31}$$

En la proposición anterior recordemos que, por las propiedades de las integrales, el proceso $\{Y(t), 0\leq t\leq T\}$ es una función aleatoria continua, $\int_0^T \mu(s)ds$ es una función continua de t y es de variación finita y la integral de Itô $\int_0^T \sigma(s)dB(s)$ es continua.

Teorema 1.8. *Si* $X(t)$ *y* $Y(t)$ *son dos procesos de Itô y* $X(t)$ *es de variación finita, entonces su covarianza cuadrática es cero*

$$[X,Y](t) = 0. \tag{1.32}$$

Notación. Para la manipulación de los diferenciales estocásticos, vamos a usar la siguiente notación:

$$dY(t)dX(t) = d[X,Y](t). \tag{1.33}$$

Dos de los diferenciales que usaremos más seguido son dt y $dB(t)$; usando esta notación y los teoremas 1.6, 1.5 y 1.8 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} dB(t)dt &= d[B,t](t) = 0, \\ (dt)^2 &= d[t,t](t) = 0, \\ (dB(t))^2 &= d[B,B](t) = dt. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Una extensión natural de las integrales con respecto al movimiento browniano es la integral respecto de procesos de Itô.

Definición 1.24. *Sea $Y(t)$ un proceso de Itô que satisface*

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{1.35}$$

y $H(t)$ es $\mathscr{F}_t$-adaptado y satisface $\int_0^t H(s)^2\sigma(s)^2 ds < \infty$, $\int_0^t |H(s)\mu(s)|\, ds < \infty$. Se define la integral la integral del proceso $H(t)$ como

$$Z(t) = \int_0^t H(s)dY(s) = \int_0^t H(s)\mu(s)ds + \int_0^t H(s)\sigma(s)dB(s), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.36}$$

1.2.2. Fórmula de Itô

La fórmula de Itô es uno de los resultados centrales del cálculo estocástico, pues permite caracterizar procesos y, más aún, funcionales de procesos estocásticos

Teorema 1.9. *Sea $X(t)$ un proceso de Itô con diferencial*

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.37}$$

Si $f \in C^2$, entonces el proceso $f(X(t))$ admite la representación

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\sigma(s)^2 ds, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.38}$$

Por los resultados discutidos con anterioridad, sabemos que un movimiento browniano es un proceso de Itô

$$B(t) = \int_0^t dB(t). \tag{1.39}$$

Así las cosas, se sigue la fórmula de Itô para funciones del browniano.

Teorema 1.10. *Si $B(t)$ es un movimiento browniano en $[0, T]$ y $f \in C^2(\mathbb{R})$, entonces se cumple*

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.40}$$

Observación 1.4. *De forma más general, la fórmula de Itô nos indica que si $X(t)$ es una semimartingala continua y f es una función dos veces continuamente diferenciable entonces $f(X(t))$ es una semimartingala. Ahora bien, dado que $B(t)$ es una semimartingala entonces $f(B(t))$ es también una semimartingala si $f \in C^2$. Véanse Klebaner [16] capítulo 8 y Karatzas [14] secc. 3.3.A.*

Definición 1.25. *Sean $X(t)$, $Y(t)$ dos semimartingalas continuas. La fórmula de integración por partes (estocástica) esta dada por*

$$X(t)Y(t) = \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + [X, Y](t). \tag{1.41}$$

Usando la notación definida con anterioridad, si

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu_X(t)dt + \sigma_X dB(t), \\ dY(t) &= \mu_Y(t)dt + \sigma_Y dB(t), \end{aligned} \tag{1.42}$$

podemos obtener la covarianza cuadrática de los procesos X y Y por medio del producto de sus diferenciales

$$\begin{aligned} d[X, Y](t) &= dX(t)dY(t) \\ &= [\mu_X(t)dt + \sigma_X dB(t)]\,[\mu_Y(t)dt + \sigma_Y dB(t)] \\ &= \mu_X(t)\mu_Y(t)(dt)^2 + \mu_X(t)\sigma_Y(t)dtdB(t) + \sigma_X(t)\mu_Y(t)dtdB(t) + \sigma_X(t)\sigma_Y(t)(dB(t))^2 \\ &= \sigma_X(t)\sigma_Y(t)dt. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Esto nos lleva a la fórmula de diferencial de un producto.

Teorema 1.11. *Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos procesos de Itô con diferenciales*

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu_X(t)dt + \sigma_X dB(t), \\ dY(t) &= \mu_Y(t)dt + \sigma_Y dB(t), \end{aligned} \tag{1.44}$$

entonces se cumple

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + \sigma_X(t)\sigma_Y(t)dt. \tag{1.45}$$

Nótese que si uno de los procesos es continuo y el otro es de variación finita, entonces el término de la covarianza es cero. En tal caso, se tendría la regla usual del diferencial de un producto.

Teorema 1.12. *Si $f(x,y)$ es de clase C^2 y $X(t)$, $Y(t)$ son dos procesos de Itô, entonces se cumple*

$$\begin{aligned} f(X(t),Y(t)) = f(X(0),Y(0)) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X(s),Y(s))dX(s) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X(s),Y(s))dY(s) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(s),Y(s))d[X](s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X(s),Y(s))d[Y](s) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X(s),Y(s))d[X,Y](s), \qquad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Cabe destacar que la fórmula de diferencial de un producto (estocástico) se puede obtener mediante el teorema 1.12. De este teorema también obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.5. *Sea $f(x,y)$ de clase C^2, entonces*

$$\begin{aligned} f(B(t),t) = f(B(0),0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B(s),s)dB(s) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(B(s),s)ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B(s),s)ds, \qquad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{1.47}$$

1.2.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Las ecuaciones diferenciales ordinarias permiten modelar el comportamiento de un sistema, comúnmente tomando como parámetro el tiempo. ¿Qué pasaría si a este sistema se le añade una perturbación aleatoria, la cual, para los fines de esta tesis, será el ruido blanco? El resultado es una ecuación diferencial estocástica. De forma similar a su contraparte determinística, las ecuaciones diferenciales estocásticas tienen diversas aplicaciones entre las que destaca -además de las clásicas en física y biología- la modelación en matemáticas financieras. Para este tema véanse Durrett [10], Karatzas [14], Klebaner [16], Le Gall [18] y Øksendal [25].

Definición 1.26. *El ruido blanco se define informalmente como*

$$\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt}. \tag{1.48}$$

Observación 1.5. *Hay que hacer notar que el movimiento browniano no es diferenciable en ningún punto, pero se tiene la convención de concebir al ruido blanco como la derivada temporal del movimiento browniano.*

Como su nombre lo indica, las ecuaciones diferenciales estocásticas surgen cuando una ecuación diferencial parcial involucra una perturbación por un ruido aleatorio. El tipo de ecuaciones estocásticas que emplearemos en esta tesis se define a continuación.

Definición 1.27. *Sea* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad filtrado y un movimiento browniano definido en él. Entonces una ecuación de la forma*

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t), \tag{1.49}$$

se conoce como una ecuación diferencial estocástica (EDE).

Definición 1.28. *Un proceso* $X(t)$ *se llama una solución fuerte de la ecuación* (1.49) *si se satisface*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s)ds + \int_0^t \sigma(X(s), s)dB(s), \quad 0 \leq t < \infty. \tag{1.50}$$

Definición 1.29. *Decimos que* (1.49) *tiene una solución débil si existe un espacio de probabilidad filtrado* $(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{F}}, \{\hat{\mathscr{F}}_t\}_{t\geq 0}, \hat{\mathbb{P}})$ *un movimiento browniano* $\hat{B}(t)$ *definido en él y un proceso* $\hat{X}(t)$ $\hat{\mathscr{F}}_t$*-adaptado tal que*

$$\hat{X}(t) = \hat{X}(0) + \int_0^t \mu(\hat{X}(s), s)ds + \int_0^t \sigma(\hat{X}(s), s)d\hat{B}(s), \quad t \geq 0. \tag{1.51}$$

Observación 1.6. *Es importante mencionar que en el caso de las EDE, sólo se conocen las soluciones para casos específicos, como las ecuaciones lineales. En otros tantos, como las ecuaciones que tratamos en este trabajo, no se conoce la solución explícita.*

Observación 1.7. *En la teoría de ecuaciones diferenciales parciales existe también el concepto de solución débil; este tipo de solución será el que usaremos en este trabajo.*

Observación 1.8. *Análogamente a las ecuaciones diferenciales deterministas, existen resultados sobre existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales estocásticas. En los capítulos siguientes se dan las referencias correspondientes.*

1.3. Análisis funcional

El análisis funcional versa sobre el estudio de espacios de funciones. Uno de sus conceptos cobra especial relevancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas: los semigrupos de operadores. Estos dan paso para la construcción de un tipo especial de solución, la solución “mild”. Para más referencia véanse Kreyzsig [17] y Pazy [27]. A continuación damos algunas nociones sobre análisis funcional.

Definición 1.30. *Sean* V *y* U *espacios normados y* $T : V \to U$ *un operador lineal. El operador* T *se dice acotado si existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$||T(x)|| \leq c||x|| \quad \textit{para todo } x \in V. \tag{1.1}$$

Definición 1.31. *Sea V un espacio de Banach. Una familia uniparamétrica $\{T(t), t \in [0,\infty)\}$ de operadores lineales acotados $T(t) : V \to V$ es un semigrupo de operadores lineales acotados en V si*

1. *$T(0) = I$, siendo I el operador identidad en V.*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s)$ para cualesquiera $t, s \geq 0$.*

Definición 1.32. *Sea $\{T(t), t \in [0,\infty)\}$ un semigrupo de operadores en un espacio de Banach V. Definimos al generador infinitesimal A del semigrupo como*

$$Af = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)f - f}{t}, \quad f \in Dom(A) \tag{1.2}$$

donde f pertenece a $Dom(A)$ cuando el límite existe.

Definición 1.33. *Sea $\{T(t), t \in [0,\infty)\}$ un semigrupo de operadores lineales acotados en un espacio de Banach V. Decimos que este semigrupo es fuertemente continuo si*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)f = f \quad \text{para cada } f \in V. \tag{1.3}$$

Notación. Un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados se denota como un semigrupo C_0.

Definición 1.34. *Sea T un operador lineal acotado, definimos su norma como*

$$||T|| = \sup_{x \in Dom(T)} \left\{ \frac{||T(x)||}{||x||} \right\} \quad \text{con } ||x|| \neq 0. \tag{1.4}$$

Teorema 1.13. *Si $\{T(t), t \in [0,\infty)\}$ es un semigrupo C_0, entonces existen constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que*

$$||T(t)|| \leq Me^{\omega t} \qquad 0 \leq t < \infty. \tag{1.5}$$

Definición 1.35. *Sea $\{T(t), t \in [0,\infty)\}$ un semigrupo C_0. Decimos que $T(t)$ es un semigrupo de contracciones si se cumple*

$$||T(t)|| \leq 1 \qquad \text{para } 0 \leq t < \infty. \tag{1.6}$$

Definición 1.36. *Sea A el generador infinitesimal de $\{T(t), t \in [0,\infty)\}$ un semigrupo C_0 definido en un espacio de Banach V. Además sean $f \in V$ y $H : \mathbb{R}^+ \times [0,T] \to V$, $H \in L^1$. Entonces la función u dada por*

$$u(t) = T(t)f + \int_0^t T(t-s)H(u,s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.7}$$

se llama la solución mild (moderada) del problema

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t) + H(u,t), \qquad t > 0, \\ u(0) &= f. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Observación 1.9. *El espacio de Banach en el que trabajamos es L^2.*

Observación 1.10. *A lo largo de este trabajo, al momento de presentar las ecuaciones que son de nuestro interés presentamos además las nociones de solución débil y mild para las mismas.*

1.4. Funcional de Dufresne

Un funcional muy particular que resulta esencial en la prueba de varios de nuestros resultados es el funcional exponencial de un movimiento browniano con "drift" constante. Este funcional fue estudiado por Dufresne, quién pudo determinar su distribución (véase [9] proposición 4.4.4). Sus resultados han sido retomados en Matsumoto, Yor [21] teorema 6.2 y Yor [36] corolario 4.2.2. En seguida enunciamos un resultado sobre este funcional, que nos será de gran utilidad en capítulos ulteriores.

Sea $\mu \in \mathbb{R}$, tenemos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} B_t^{(\mu)} &:= B(t) + \mu t, \\ A_t^{(\mu)} &:= \int_0^t exp\{2B_s^{(\mu)}\}ds = \int_0^t exp\{2[B(s) + \mu s]\}ds. \end{aligned}$$

El funcional que es de nuestro interés es, en particular,

$$\int_0^\infty exp\{2[B(s) - \mu t]\}ds = \int_0^\infty exp\{2B_s^{(-\mu)}\}ds = A_\infty^{(-\mu)}.$$

Teorema 1.14. *Sea $\mu > 0$, entonces el funcional $A_\infty^{(-\mu)}$ se tiene la misma ley que*

$$\frac{1}{2X_\mu}$$

donde X_μ es una v.a. con distribución Gamma $\Gamma(\mu, 1)$.

Notación. Usamos el acrónimo *v.a.* para la frase "variable aleatoria".

Capítulo 2

Una ecuación afectada por un ruido unidimensional

En este capítulo introducimos una ecuación diferencial parcial estocástica (2.1) afectada por un ruido blanco unidimensional; por la complejidad inherente al estudio de las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas no podemos ofrecer una forma explícita de su solución $u(t, x)$. No obstante, se pueden realizar aproximaciones respecto del tiempo de explosión -esto es, sobre la posibilidad de explosión de la solución- y, más aún, sobre la existencia de una solución global (i.e., que está definida para todo tiempo t entre 0 e infinito). Para lograr este objetivo nos auxiliamos de una ecuación diferencial parcial aleatoria (2.1) cuya solución -$v(t, x)$- esta relacionada con $u(t, x)$.

En la sección 2.1 se plantea el problema (2.1) junto con los conceptos de solución mild y solución débil para este tipo de ecuaciones, conceptos que resultan vitales para los cálculos de nuestras estimaciones. A continuación, en la sección 2.2, presentamos un resultado que establece una relación entre una solución débil de (2.1) y una solución débil de (2.1) al demostrar que a partir de una solución de la primera se puede construir una solución de la segunda.

Posteriormente, en la sección 2.3, obtenemos una cota superior para el tiempo de explosión $u(t, x)$. Esto es posible gracias a que de la solución débil de (2.1) se obtiene una ecuación diferencial cuya solución tiene un tiempo de explosión que acota superiormente al de la solución de (2.1). Más aún, gracias a los resultados sobre el funcional de Dufresne (abarcados en la sección 1.4) es factible determinar la probabilidad de que la cota (que es un tiempo aleatorio) sea finita o infinita. Como consecuencia de esto se obtiene una cota para la probabilidad de explosión en tiempo finito de $u(t, x)$.

En la sección 2.4 se obtienen condiciones suficientes para que $v(t, x)$ sea una solución global de (2.1) -lo que implica la existencia de una solución global para (2.1)-. En este apartado nos valemos de la solución mild de (2.1) para obtener una cota inferior del tiempo de explosión de $u(t,x)$, con lo que se obtiene otra cota para la probabilidad de explosión en tiempo finito de esta solución. Por último se derivan dos condiciones (un poco más específicas) con las que se puede garantizar la existencia de una solución global de (2.1).

Observación 2.1. *Es pertinente hacer un último recordatorio antes de empezar a abordar los problemas que nos ocupan. Aunque los resultados que presentamos a lo largo del trabajo son válidos para conjuntos más generales, vamos a realizar nuestro estudio considerando bolas abiertas en $\mathbb{R}^d$ para el caso de la variable espacial.*

2.1. Una ecuación diferencial estocástica semilineal con un ruido

Sea $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, una bola abierta. Consideramos una ecuación semilineal de la forma

$$\begin{aligned} du(t,x) &= [\Delta u(t,x) + G(u(t,x))]dt + \kappa u(t,x)dB(t), && t > 0, x \in D, \\ u(0,x) &= f(x) \geq 0, && x \in D, \\ u(t,x) &= 0, && t \geq 0, x \in \partial D, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde β y κ son constantes positivas, $\{B(t), t \geq 0\}$ es un movimiento browniano estándar unidimensional con respecto a $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad filtrado y $f : D \to \mathbb{R}^+$ es de clase C^2, $f \not\equiv 0$. Además $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es localmente Lipzchitz y satisface

$$G(z) \geq Cz^{1+\beta}, \quad z > 0, \tag{2.2}$$

donde $\beta > 0$. Como sólo suponemos que G es Lipschitz localmente, no podemos descartar la posibilidad de existencia de una solución únicamente local (lo que da paso a la explosión de la solución de (2.1) en tiempo finito).

Para nuestra desventura, no conocemos la forma exacta de la solución para la ecuación que acabamos de presentar. Pese a esto, es posible obtener información relevante con relación a esta. De esta forma conseguir estimaciones sobre la probabilidad de explosión de la solución y algunas condiciones para la existencia de una solución global para (2.1) es el objetivo del presente capítulo.

Definición 2.1. *Decimos que un tiempo aleatorio τ es un tiempo de explosión de $u(t,x)$ si las siguientes dos condiciones se cumplen:*

- *Para $t < \tau, \sup_{x\in D} \{|u(t,x)|\} < \infty$ c.s.*

- *Si $\tau < \infty$, entonces*
$$\lim_{t \to \tau^-} \sup_{x \in D} \{|u(t,x)|\} = \infty \quad c.s..$$

Intuitivamente, se puede entender que una función -en nuestro caso, la solución a la ecuación (2.1)- explota cuando su valor se vuelve infinito para algún $t > 0$. Si esto sucede, entonces se tiene que la solución a la ecuación "sobrevive" únicamente en un intervalo finito de tiempo $[0, \tau)$ antes de que su valor se vuelva infinito al irse acercando al tiempo de explosión τ. Para realizar las estimaciones sobre el tiempo de explosión de (2.1) nos auxiliamos de tiempos aleatorios que logran acotarlo.

Definición 2.2. *Un tiempo aleatorio τ se dice una cota superior(inferior) para el tiempo de explosión T si $T \leq \tau (T \geq \tau)$ c.s.*

La existencia, unicidad y continuidad en las trayectorias de soluciones globales para ecuaciones parabólicas perturbadas por un ruido blanco homogéneo en el tiempo han sido investigados por diferentes métodos (véase e.g. Bergé et al. [1] teorema 2.1 , Denis et al. [6] teorema 5, Gyöngy y Rovira [13] teorema 2.1, Mikulevicius y Pragarauskas [22] teorema 1) y diversos tipos de soluciones han sido propuestos -la última referencia versa en especial respecto de soluciones fuertes-. Se pueden encontrar resultados de existencia y unicidad de forma más general, en particular de solución débil y mild, en Chow [3] capítulo 3.

Las nociones de solución débil y solución mild de (2.1) que vamos a usar son las siguientes:

Definición 2.3. *Sea $\tau \leq \infty$ un tiempo de paro. Una familia de variables $\{u(t,x), t \geq 0, x \in D\}$ que dependen continuamente de la variable espacial y forman un proceso $\mathscr{F}_t$-adaptado es una solución débil de (2.1) en el intervalo $[0, \tau)$ cuando para cada función de prueba $\varphi \in C^2(D)$, que desaparece en la frontera ∂D se cumple*

$$\begin{aligned}\int_D u(t,x)\varphi(x)dx = \int_D f(x)\varphi(x)dx + \int_0^t \int_D [u(s,x)\Delta\varphi(x) + G(u(s,x))\varphi(x)]dxds \\ + \kappa \int_0^t \int_D u(s,x)\varphi(x)dxdB(s), \qquad 0 \leq t < \tau, \end{aligned} \tag{2.3}$$

c.s. en $\mathbb{P}$.

Observación 2.2. *Usando la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para el producto interno usual en $L^2(D)$, podemos reescribir (2.3) como*

$$\begin{aligned}\langle u(t,x),\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle + \int_0^t \langle u(s,x),\Delta\varphi\rangle ds + \int_0^t \langle G(u(s,x)),\varphi\rangle ds \\ + \kappa \int_0^t \langle u(s,x),\varphi\rangle dB(s), \qquad 0 \le t < \tau. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Observación 2.3. *La notación anterior, que usaremos para escribir las soluciones débiles, se utiliza de forma recurrente en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales.*

Definición 2.4. *Sea $\tau \le \infty$ un tiempo de paro y sea $\{S_t, t \ge 0\}$ el semigrupo d-dimensional de movimiento browniano generado por el operador laplaciano Δ con parámetro de varianza 2 que desaparece en la frontera de D. Una familia de variables $\{u(t,x), t \ge 0, x \in D\}$ que dependen continuamente de la variable espacial y forman un proceso $\mathscr{F}_t$-adaptado es una solución mild de (2.1) en el intervalo $[0,\tau)$ si se satisface*

$$u(t,x) = S_t f(x) + \int_0^t S_{t-r}(G(u(r,\cdot)))(x)dr + \kappa \int_0^t S_{t-r}(u(r,\cdot))(x)dB(r), \quad 0 \le t < \tau, \tag{2.5}$$

c.s. en $\mathbb{P}$ y c.t.p. en D.

Notación. Usamos el acrónimo *c.t.p.* para la frase "casi en todas partes".

Observación 2.4. *El semigrupo generado por el laplaciano opera de la siguiente forma*

$$S_t f(x) = \int_D p_t(x,y) f(y) dy,$$

donde $p_t(x,y)$ es una función de transición (no negativa) al tiempo t. Si D fuera todo el espacio d-dimensional $\mathbb{R}^d$, el semigrupo S_t sería el kernel(núcleo) del calor:

$$S_t f(x) = \int_D \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{\frac{||x-y||^2}{4t}} f(y) dy.$$

La positividad de la solución de (2.1) se sigue de teoremas de comparación (véase Bergé et al. [1] proposición 3.1 o Manthey y Zausinger [20] teorema 3.3.1).

2.2. Una ecuación diferencial parcial perturbada por un movimiento browniano unidimensional

En esta sección introducimos una ecuación diferencial parcial (2.1) relacionada a (2.1). En la proposición 2.1 se establece una relación entre las soluciones ($u(t,x)$, $v(t,x)$) de ambas ecuaciones. Del análisis de la ecuación (2.1) se obtienen, en las secciones posteriores, dos estimaciones para el tiempo de explosión de la solución $u(t,x)$ y algunas condiciones bajo las cuales la solución es global.

Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \Delta v(t,x) - \frac{\kappa^2}{2}v(t,x) + e^{-\kappa B(t)}G(e^{\kappa B(t)}v(t,x)), && t>0, x \in D, \\ &v(0,x) = f(x), && x \in D, \\ &v(t,x) = 0, && x \in \partial D. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observación 2.5. *Hemos de aclarar que las funciones G y f cumplen las mismas condiciones que en* (2.1). *Por esta razón es posible que la solución de* (2.1) *explote también en tiempo finito. Asimismo, la variable espacial esta definida en la misma bola abierta D que en* (2.1).

Notemos que en la ecuación anterior aparece el movimiento browniano $B(t)$, lo que podría dificultar trabajar con dicha ecuación. Sin embargo, si fijamos ω, hacemos lo mismo con la trayectoria del movimiento browniano $B(t)$ y obtenemos una ecuación aleatoria, a la que podemos dar el tratamiento que se le da a las ecuaciones diferenciales parciales. Como consecuencia de esto, resultados clásicos para ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico aplican a este problema para mostrar existencia, unicidad y positividad de la solución hasta su eventual explosión (véase Friedman [11] capítulo 7, teorema 9) y permiten realizar nuestras estimaciones.

Definición 2.5. *Sea $\tau \leq \infty$ un tiempo de paro. Una familia de variables $\{v(t,x), t \geq 0, x \in D\}$ que dependen continuamente de la variable espacial y forman un proceso $\mathscr{F}_t$-adaptado es una solución débil de* (2.1) *en el intervalo $[0,\tau)$ si para cada función de prueba $\varphi \in C^2(D)$ que cumple $\varphi(x) = 0$ para $x \in \partial D$ se satisface*

$$\begin{aligned} \langle v(t,x), \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle + \int_0^t \langle v(s,x), \Delta\varphi\rangle ds - \frac{\kappa^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x), \varphi\rangle ds \\ + \int_0^t \langle e^{-\kappa B(s)}G(e^{\kappa B(s)}v(s,x)), \varphi\rangle ds, \qquad 0 \leq t < \tau. \end{aligned} \tag{2.2}$$

En la siguiente proposición desvelamos un nexo entre las ecuaciones (2.1) y (2.1). De esta manera, a partir de una solución $u(t,x)$ de la primera podemos construir una solución $v(t,x)$ de esta última. Más aún, la relación que poseen ambas soluciones determina que tienen el mismo tiempo de explosión T. Lo antes dicho da pie a que podamos realizar estimaciones sobre el tiempo de explosión de $u(t,x)$ trabajando con $v(t,x)$.

Proposición 2.1. *Sea $u(t,x)$ una solución débil de* (2.1)*. Entonces la función definida como*

$$v(t,x) := e^{-\kappa B(t)} u(t,x), \quad t \geq 0, x \in D,$$

es solución débil de (2.1).

Demostración. Sea $u(t,x)$ una solución débil de (2.1) y sea $f(B(t)) = e^{-\kappa B(t)}$ entonces por fórmula de Itô tenemos lo siguiente

$$e^{-\kappa B(t)} = 1 - \kappa \int_0^t e^{-\kappa B(s)} dB(s) + \frac{\kappa^2}{2} \int_0^t e^{-\kappa B(s)} ds. \tag{2.3}$$

Por el resultado de Itô sabemos que $\{e^{-\kappa B(t)}, t \geq 0\}$ es una semimartingala debido a que $B(t)$ es una semimartingala y además $f(t) = e^{-\kappa t}$ es de clase C^2. Para φ fija, $\{\langle u(t,x), \varphi \rangle \mathbb{1}_{[0,\tau)}(t), t \geq 0\}$ es también una semimartingala. Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos

$$\begin{aligned}\left[e^{-\kappa B(s)} \langle u(s,x), \varphi \rangle \Big|_0^t \right] &= \int_0^t e^{-\kappa B(s)} d\langle u(s,x), \varphi \rangle + \int_0^t \langle u(s,x), \varphi \rangle d e^{-\kappa B(s)} \\ &\quad + \left[e^{-\kappa B(\cdot)}, \langle u(\cdot,x), \varphi \rangle \right](t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Notemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\langle v(t,x), \varphi \rangle &= \int_D v(t,x) \varphi(x) dx = \int_D e^{-\kappa B(t)} u(t,x) \varphi(x) dx \\ &= e^{-\kappa B(t)} \int_D u(t,x) \varphi(x) dx = e^{-\kappa B(t)} \langle u(t,x), \varphi \rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Además, tenemos que usando (2.3) y (2.4) resulta

$$\begin{aligned}\left[e^{-\kappa B(\cdot)}, \langle u(\cdot,x),\varphi\rangle\right](t) &= \left[-\kappa\int_0^{\cdot} e^{-\kappa B(t)}dB(s), \kappa\int_0^{\cdot}\langle u(s,x),\varphi\rangle dB(s)\right](t)\\ &= -\kappa^2\int_0^t e^{-\kappa B(s)}\langle u(s,x),\varphi\rangle ds.\end{aligned} \tag{2.6}$$

El resultado anterior se obtiene usando la bilinealidad de la covarianza cuadrática, el hecho de que la integral de una función de variación finita en el intervalo $(0,t)$ respecto de la medida de Lebesgue también tiene variación finita y la propiedad de que la covarianza cuadrática de una función con otra de variación finita es cero. Por (2.3) tenemos

$$de^{-\kappa B(s)} = -\kappa e^{-\kappa B(s)}dB(s) + \frac{\kappa^2}{2}e^{-\kappa B(s)}ds. \tag{2.7}$$

Por (2.4) tenemos

$$d\langle u(s,x),\varphi\rangle = [\langle u(s,x),\Delta\varphi\rangle + \langle G(u(s,x)),\varphi\rangle]ds + \kappa\langle u(s,x),\varphi\rangle dB(s). \tag{2.8}$$

De (2.4) y (2.5) se deduce

$$\begin{aligned}\langle v(t,x),\varphi\rangle &= e^{-\kappa B(t)}\langle u(t,x),\varphi\rangle\\ &= e^{-\kappa B(0)}\langle u(0,x),\varphi\rangle + \int_0^t e^{-\kappa B(s)}d\langle u(s,x),\varphi\rangle + \int_0^t\langle u(s,x),\varphi\rangle de^{-\kappa B(s)}\\ &\quad + \left[e^{-\kappa B(\cdot)},\langle u(\cdot,x),\varphi\rangle\right](t)\\ &= e^{-\kappa B(0)}\langle u(0,x),\varphi\rangle + \int_0^t\langle u(s,x),\varphi\rangle\left[-\kappa e^{-\kappa B(s)}dB(s) + \frac{\kappa^2}{2}e^{-\kappa B(s)}ds\right]\\ &\quad + \int_0^t e^{-\kappa B(s)}[[\langle u(s,x),\Delta\varphi\rangle + \langle G(u(s,x)),\varphi\rangle]ds + \kappa\langle u(s,x),\varphi\rangle dB(s)]\\ &\quad + \left[e^{-\kappa B(\cdot)},\langle u(\cdot,x),\varphi\rangle\right](t)\\ &= \langle u(0,x),\varphi\rangle + \int_0^t e^{-\kappa B(s)}[\langle u(s,x),\Delta\varphi\rangle + \langle G(u(s,x)),\varphi\rangle]ds\\ &\quad + \kappa\int_0^t e^{-\kappa B(s)}\langle u(s,x),\varphi\rangle dB(s) - \kappa\int_0^t e^{-\kappa B(s)}\langle u(s,x),\varphi\rangle dB(s)\\ &\quad + \frac{\kappa^2}{2}\int_0^t e^{-\kappa B(s)}\langle u(s,x),\varphi\rangle ds - \kappa^2\int_0^t e^{-\kappa B(s)}\langle u(s,x),\varphi\rangle ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle v(0,x),\varphi\rangle + \int_0^t e^{-\kappa B(s)}[\langle u(s,x),\Delta\varphi\rangle + \langle G(u(s,x)),\varphi\rangle]ds \\
&\quad - \frac{\kappa^2}{2}\int_0^t e^{-\kappa B(s)}\langle u(s,x),\varphi\rangle ds \\
&= \langle f,\varphi\rangle + \int_0^t \langle v(s,x),\Delta\varphi\rangle ds - \frac{\kappa^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x),\varphi\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-\kappa B(s)}\langle G(e^{\kappa B(s)}v(s,x)),\varphi\rangle ds. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Esto implica que $v(t,x)$ es una solución débil de (2.1) y es diferenciable respecto de t hasta su eventual explosión. Más aún, como el laplaciano es un operador autoadjunto y el hecho de que $\varphi(x)=0$ para $x\in\partial D$ tenemos lo siguiente

$$
\langle v(s,x),\Delta\varphi\rangle = \int_D v(s,x)\Delta\varphi(x)dx = \int_D \Delta v(s,x)\varphi(x)dx = \langle \Delta v(s,x),\varphi\rangle. \qquad (2.10)
$$

□

Observación 2.6. *La proposición 2.1 implica en particular que* (2.1) *posee una solución local fuerte pues la solución está definida en el espacio de probabilidad filtrado donde se define* $u(t,x)$.

2.3. Estimación de una cota superior del tiempo de explosión

En esta sección obtenemos una cota superior para el tiempo de explosión de $u(t,x)$. La solución de una ecuación diferencial que obtenemos a partir de la solución débil de (2.1) nos permite obtener una cota para el tiempo de explosión de $v(t,x)$. Gracias a la relación que guardan $u(t,x)$ y $v(t,x)$ tenemos una cota para el tiempo de explosión de $u(t,x)$ y a su vez una estimación para la probabilidad de que esta explote en tiempo finito.

De la condición (2.2), se sigue que $G'(z) := G(z)/C$ satisface $G'(z)\geq z^{1+\beta}$ para toda $z>0$. De ahora en adelante supondremos S.P.G que $C=1$ en (2.2). Consideremos el problema de Dirichlet sobre la bola abierta D definida en (2.1)

Notación. Usamos el acrónimo *S.P.G* para la frase “sin pérdida de generalidad”.

$$
\begin{aligned}
\Delta\phi(x)+\lambda\phi(x) &= 0, \quad x\in D,\\
\phi(x) &= 0, \quad x\in\partial D.
\end{aligned}
$$

Sea ψ la eigenfunción correspondiente al primer eigenvalor λ_1 de este problema normalizada por $\int_D \psi(x)dx = 1$. Se sabe que ψ es estrictamente positiva en D (véase Davies [5], corolario 3.3.7).

Observación 2.7. *En lo que resta del capítulo, cuando usemos el valor λ_1 nos referimos al eigenvalor que acabamos de definir.*

Proposición 2.2. *Consideremos el problema* (2.1)*. Entonces el tiempo aleatorio*

$$\tau_+ := \text{ínf}\left\{t \geq 0 \,\middle|\, \int_0^t e^{-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta s+\kappa\beta B(s)}ds \geq \frac{1}{\beta}\langle f, \psi\rangle^{-\beta}\right\}, \tag{2.1}$$

es una cota superior del tiempo de explosión T de $u(t,x)$.

Demostración. Recordemos que una solución débil de (2.1) tiene la forma (2.2). De esto se sigue

$$\langle v(t,x), \psi\rangle = \langle v(0,x), \psi\rangle + \int_0^t \left[\langle v(s,x), \Delta\psi\rangle - \frac{\kappa^2}{2}\langle v(s,x), \psi\rangle + e^{-\kappa B(s)}\langle G(e^{\kappa B(s)}v(s,x)), \psi\rangle\right] ds. \tag{2.2}$$

Como ψ es una eigenfunción con eigenvalor correspondiente λ_1 se cumple $\Delta\psi = -\lambda_1\psi$ pues $\Delta\psi + \lambda_1\psi = 0$; esto implica

$$\begin{aligned}\langle v(s,x), \Delta\psi\rangle &= \int_D v(s,x)\Delta\psi(x)dx = \int_D v(s,x)(-\lambda_1\psi)dx \\ &= -\lambda_1 \int_D v(s,x)\psi(x)dx = -\lambda_1\langle v(s,x), \psi\rangle.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Como $G(z) \geq z^{1+\beta}$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\int_D e^{-\kappa B(s)}G(e^{\kappa B(s)}v(s,x))\psi(x)dx &\geq \int_D e^{-\kappa B(s)}\left[e^{\kappa B(s)}v(s,x)\right]^{1+\beta}\psi(x)dx \\ &= \int_D e^{\beta\kappa B(s)}v(s,x)^{1+\beta}\psi(x)dx,\end{aligned} \tag{2.4}$$

además, por la desigualdad de Jensen, tenemos

$$\int_D v(s,x)^{1+\beta}\psi(x)dx \geq \left[\int_D v(s,x)\psi(x)dx\right]^{1+\beta} = \langle v(s,x),\psi\rangle^{1+\beta}, \tag{2.5}$$

donde integramos respecto de la medida $\psi(x)dx$. Por (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle v(t,x),\psi\rangle &= \langle v(t,x),\Delta\psi\rangle - \frac{\kappa^2}{2}\langle v(t,x),\psi\rangle + e^{-\kappa B(t)}\langle G(e^{\kappa B(t)}v(t,x)),\psi\rangle \\
&= -\lambda_1\langle v(t,x),\psi\rangle - \frac{\kappa^2}{2}\langle v(t,x),\psi\rangle + e^{-\kappa B(t)}\langle G(e^{\kappa B(t)}v(t,x)),\psi\rangle \\
&= -\lambda_1\langle v(t,x),\psi\rangle - \frac{\kappa^2}{2}\langle v(t,x),\psi\rangle + e^{-\kappa B(t)}\int_D G(e^{\kappa B(t)}v(t,x))\psi(x)dx \\
&\geq -\lambda_1\langle v(t,x),\psi\rangle - \frac{\kappa^2}{2}\langle v(t,x),\psi\rangle + e^{-\kappa B(t)}\int_D \left[e^{\kappa B(t)}v(s,x)\right]^{1+\beta}\psi(x)dx \\
&= -\lambda_1\langle v(t,x),\psi\rangle - \frac{\kappa^2}{2}\langle v(t,x),\psi\rangle + e^{\kappa\beta B(t)}\int_D v(s,x)^{1+\beta}\psi(x)dx \\
&\geq -\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)\langle v(t,x),\psi\rangle + e^{\beta\kappa B(t)}\langle v(t,x),\psi\rangle^{1+\beta}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

De la desigualdad anterior podemos obtener una subsolución de (2.2). Sea $I(t)$ la solución a la ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= -\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)I(t) + e^{\beta\kappa B(t)}I(t)^{1+\beta}, \quad t>0, \\
I(0) &= \langle v(0,x),\psi\rangle.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Entonces se cumple $\langle v(t,x),\psi\rangle \geq I(t)$ para toda $t \geq 0$ (véase Teschl [33] lema 1.2). Como (2.7) es una ecuación diferencial de Bernoulli (i.e., es de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$), si hacemos $a = \lambda_1 + \frac{k^2}{2}$ entonces (2.7) se convierte en

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= -aI(t) + e^{\kappa\beta B(t)}I(t)^{1+\beta}, \\
I(0) &= \langle v(0,x),\psi\rangle.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Sea $g(t) = I(t)^{-\beta}$ tenemos

$$\frac{dg}{dt} = -\beta I(t)^{-(1+\beta)}\frac{dI}{dt}. \tag{2.9}$$

De esto se sigue

$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= -aI(t) + e^{\kappa\beta B(t)} I(t)^{1+\beta} \implies \frac{dI}{dt} + aI(t) = e^{\kappa\beta B(t)} I(t)^{1+\beta} \\
\implies -\beta \frac{dI}{dt} I(t)^{-(1+\beta)} - \beta a I(t)^{-\beta} &= -\beta e^{\kappa\beta B(t)} \\
\therefore \frac{dg}{dt} - \beta a g(t) &= -\beta e^{\kappa\beta B(t)}.
\end{aligned}
$$

Se ha reducido la ecuación (2.7) a una ecuación lineal de primer orden de la forma $\frac{dg}{dt} + p(t)g = q(t)$. A continuación procedemos a resolverla por medio de factor integrante; sean

$$p(t) = -\beta a, \quad q(t) = -\beta e^{\kappa\beta B(t)};$$

de esta forma tenemos el factor integrante

$$\mu(t) = e^{-\int \beta a dt} = e^{-\beta a t}.$$

Entonces tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[e^{-\beta a t} g(t)\right] &= -\beta e^{\kappa\beta B(t)} e^{-a\beta t} \\
\implies e^{-a\beta t} g(t) - g(0) &= -\int_0^t \beta e^{\kappa\beta B(s)} e^{-a\beta s} ds \\
\implies e^{-a\beta t} g(t) &= g(0) - \beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(s)} e^{-a\beta s} ds \qquad (2.10) \\
\implies e^{-a\beta t} g(t) &= \langle v(0,x), \psi \rangle^{-\beta} - \beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(s)} e^{-a\beta s} ds \\
\therefore g(t) &= e^{a\beta t} \left[\langle v(0,x), \psi \rangle^{-\beta} - \beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(s) - a\beta s} ds \right].
\end{aligned}
$$

Nótese que $g(0) = I(0)^{-\beta} = \langle v(0,x), \psi \rangle^{-\beta}$. Por la definición de $g(t)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
I(t)^{-\beta} &= e^{a\beta t} \left[\langle v(0,x), \psi \rangle^{-\beta} - \beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(s) - a\beta s} ds \right] \\
\therefore I(t) &= e^{-at} \left[\langle f, \psi \rangle^{-\beta} - \beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(s) - a\beta s} ds \right]^{-\frac{1}{\beta}}.
\end{aligned}
$$

Esto implica que la solución de (2.7) es

$$I(t) = \frac{e^{-(\lambda_1+\kappa^2/2)t}}{\left[\langle f,\psi\rangle^{-\beta} - \beta\int_0^t e^{-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta s+\kappa\beta B(s)}ds\right]^{\frac{1}{\beta}}}, \quad t \geq 0. \tag{2.11}$$

Es importante notar que $I(t)$ puede explotar en caso de que el denominador se vuelva 0, esto pasa cuando se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle f,\psi\rangle^{-\beta} - \beta\int_0^t e^{-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta s+\kappa\beta B(s)}ds = 0 \\ \Longrightarrow \langle f,\psi\rangle^{-\beta} = \beta\int_0^t e^{-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta s+\kappa\beta B(s)}ds \\ \therefore \frac{1}{\beta}\langle f,\psi\rangle^{-\beta} = \int_0^t e^{-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta s+\kappa\beta B(s)}ds. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Podemos definir al tiempo de explosión de $I(t)$ como en (2.1). De esto se sigue que $I(t)$ esta definida en el intervalo $[0,\tau_+)$ y tiene un tiempo de explosión finito en el evento $\{\tau_+ < \infty\}$. Ahora bien, sabemos que $I(t) \leq \langle v(t,x),\psi\rangle$. Si T es el tiempo de explosión de $v(t,x)$ (que resulta ser el mismo que el de $u(t,x)$) entonces $T \leq \tau_+$ pues $v(t,x)$ explota primero que $I(t)$. Acabamos de obtener una cota superior para el tiempo de explosión de $v(t,x)$ y $u(t,x)$.

□

Observación 2.8. *Debido a que pedimos $\int_D \psi(x)dx = 1$, de explotar*

$$\langle v(t,x),\psi\rangle = \int_D v(t,x)\psi(x)dx,$$

se sigue que $v(t,x)$ es quien explota.

Veamos a continuación una estimación para la probabilidad de explosión de $v(t,x)$ en tiempo finito, i.e, $\{\tau_+ < \infty\}$.

Proposición 2.3. *La probabilidad de que la solución de* (2.1) *explote en tiempo finito está acotada inferiormente por $\int_{\frac{1}{\beta}\langle f,\psi\rangle^{-\beta}}^{\infty} h(x)dx$, donde $h(x)$ es la función de densidad de una v.a. con distribución $\Gamma\left(\frac{2\lambda_1+\kappa^2}{\kappa^2\beta}, \frac{2}{\kappa^2\beta^2}\right)$.*

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} \mu &:= -\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)\left(\frac{1}{\kappa}\right), & \hat{\beta} &:= \frac{\kappa\beta}{2}, \\ B(s)^{(\mu)} &:= \mu s + B(s), & \hat{\mu} &:= \frac{\mu}{\hat{\beta}} = -\frac{(2\lambda_1 + \kappa^2)}{\kappa^2\beta}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Usando (2.12) y (2.13) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_+ = +\infty) &= \mathbb{P}\left(\int_0^t \exp\{-(\lambda_1 + \kappa^2/2)\beta s + \kappa\beta B(s)\}ds < \frac{1}{\beta}\langle v(0,x), \psi\rangle^{-\beta}, \quad \forall t > 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty \exp\{-(\lambda_1 + \kappa^2/2)\beta s + \kappa\beta B(s)\}ds \leq \frac{1}{\beta}\langle f, \psi\rangle^{-\beta}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty \exp\{2\hat{\beta} B(s)^{(\mu)}\}ds \leq \frac{1}{\beta}\langle f, \psi\rangle^{-\beta}\right), \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde

$$\begin{aligned} 2\hat{\beta}B(s)^{(\mu)} &= 2\left(\frac{\kappa\beta}{2}\right)(\mu s + B(s)) \\ &= 2\left(\frac{\kappa\beta}{2}\right)\left[-\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)\left(\frac{1}{\kappa}\right)s + B(s)\right] \\ &= -\left(\lambda_1 + \frac{\kappa^2}{2}\right)\beta s + \kappa\beta B(s). \end{aligned}$$

Si hacemos $u = s(\hat{\beta})^2 = s\frac{\kappa^2\beta^2}{4}$ tenemos $ds = \frac{4}{\kappa^2\beta^2}du$. Notemos además que

$$\hat{\beta}B(s)^{(\mu)} = \hat{\beta}[\mu s + B(s)] = \hat{\beta}\left[\hat{\mu}\hat{\beta}\left(\frac{u}{\hat{\beta}^2}\right) + B(s)\right] = \hat{\mu}u + \hat{\beta}B(s) = \hat{\mu}u + B(u) = B(u)^{(\hat{\mu})},$$

donde $\hat{\beta}B(s)$ tiene la misma distribución que $B(s\hat{\beta}^2)$ por la propiedad de escalamiento de la distribución normal; esta última a su vez equivale a $B(u)$. Sustituyendo en (2.14) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_+ = +\infty) &= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty \exp\{2\hat{\beta}B(s)^{(\mu)}\}ds \leq \frac{1}{\beta}\langle f, \psi\rangle^{-\beta}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{4}{\kappa^2\beta^2}\int_0^\infty \exp\{2B(u)^{(\hat{\mu})}\}du \leq \frac{1}{\beta}\langle f, \psi\rangle^{-\beta}\right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ahora, si conocemos la distribución de la integral del funcional exponencial, podemos obtener la estimación deseada. Por fortuna dicha distribución es conocida, pues es el funcional de Dufresne que introdujimos en la sección 1.4. En particular, el teorema 1.14 asegura que

$$\int_0^{\infty} exp\{2B(s)^{(\hat{\mu})}\}ds \overset{ley}{=} \frac{1}{2Z_{-\hat{\mu}}},$$

en distribución, con $Z_{-\hat{\mu}}$ una variable aleatoria con distribución Gamma $\Gamma(-\hat{\mu}, 1)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_+ = +\infty) &= \mathbb{P}\left(\frac{4}{\kappa^2\beta^2}\left[\frac{1}{2Z_{-\hat{\mu}}}\right] \leq \frac{1}{\beta}\langle f, \psi\rangle^{-\beta}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{2}{\kappa^2\beta^2 Z_{-\hat{\mu}}} \leq \frac{1}{\beta}\langle f, \psi\rangle^{-\beta}\right) \\ &= \int_0^{\frac{1}{\beta}\langle f,\psi\rangle^{-\beta}} h(x)dx. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Por las propiedades de la distribución Gamma, si $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ entonces $CX \sim \Gamma(\alpha, C\beta)$ y $\frac{1}{X} \sim \Gamma(\alpha, \frac{1}{\beta})$; así tenemos que $\frac{2}{\kappa^2\beta^2 Z_{-\hat{\mu}}}$ sigue una distribución $\Gamma(-\hat{\mu}, \frac{2}{\kappa^2\beta^2})$, con $-\hat{\mu} = \frac{2\lambda_1+\kappa^2}{\kappa^2\beta}$ como en (2.13). Por (2.16) se concluye

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\tau_+ < +\infty] &= 1 - \mathbb{P}[\tau_+ = +\infty] \\ &= \int_{\frac{1}{\beta}\langle f,\psi\rangle^{-\beta}}^{\infty} h(x)dx \end{aligned} \tag{2.17}$$

□

Observación 2.9. *Si $I(t)$ explota, como $I(t) \leq \langle v(t,x), \psi\rangle$ se sigue que $v(t,x)$ -por lo tanto $u(t,x)$- ha explotado. Entonces*

$$\mathbb{P}(\tau_+ < \infty) \leq \mathbb{P}(T < \infty). \tag{2.18}$$

Se ha encontrado una cota inferior para la probabilidad de explosión en tiempo finito.

Observación 2.10. *Vale la pena mencionar que de* (2.15) *y* (2.16) *también podemos* *obtener lo siguiente*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_+ = +\infty) &= \mathbb{P}\left(\frac{2}{\kappa^2\beta^2 Z_{-\hat{\mu}}} \leq \frac{1}{\beta}\langle v(0,x),\psi\rangle^{-\beta}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(2\langle v(0,x),\psi\rangle^{\beta} \leq \beta\kappa^2 Z_{-\hat{\mu}}\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(2\langle v(0,x),\psi\rangle^{\beta} > \beta\kappa^2 Z_{-\hat{\mu}}\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\beta\kappa^2 Z_{-\hat{\mu}} \leq 2\langle v(0,x),\psi\rangle^{\beta}\right) \\
&= 1-F_X(2\langle f,\psi\rangle^{\beta}), \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

donde X es una v.a. que tiene distribución $\Gamma\left(\frac{2\lambda_1+\kappa^2}{\kappa^2\beta}, \beta\kappa^2\right)$.

Observación 2.11. *Si hacemos $\kappa = 0$ resulta que $v(t,x) = u(t,x)$ y, más aún, en* (2.14) *obtenemos que $\mathbb{P}(\tau_+ = \infty) = 0$ ó 1. Esto se debe a que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_+ = +\infty) &= \mathbb{P}\left(\int_0^{\infty} exp\{-\lambda_1\beta s\}ds \leq \frac{1}{\beta}\langle v(0,x),\psi\rangle^{-\beta}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{\lambda_1\beta}e^{-\lambda_1\beta s}\Big|_{s=0}^{\infty}\right] \leq \frac{1}{\beta}\langle u(0,x),\psi\rangle^{-\beta}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\lambda_1\beta} \leq \frac{1}{\beta}\langle f,\psi\rangle^{-\beta}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\langle u(0,x),\psi\rangle^{\beta} \leq \lambda_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\langle u(0,x),\psi\rangle \leq \lambda_1^{1/\beta}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\int_D f(x)\psi(x)dx \leq \lambda_1^{1/\beta}\right).
\end{aligned} \qquad (2.20)$$

Dependiendo si se cumple (0.3)*, esto es, $\int_D f(x)\psi(x)dx > \lambda_1^{1/\beta}$ ó $\int_D f(x)\psi(x)dx \leq \lambda_1^{1/\beta}$ la probabilidad será 1 ó 0. Esto nos remite al resultado ya mencionado de Fujita [12].*

2.4. Estimación de una cota inferior del tiempo de explosión y existencia de soluciones globales

En esta sección se determinan algunas condiciones bajo las cuales existe una solución global $v(t,x)$ de (2.1). Una de estas condiciones resulta particularmente útil pues permite determinar una cota inferior para el tiempo de explosión de $u(t,x)$. Para establecer los resultados sobre existencia de soluciones globales nos valemos de la solución mild de (2.1).

Consideremos de nueva cuenta (2.1) suponiendo que $\kappa \neq 0$ y que $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es tal que $G(0) = 0$, $G(z)/z$ es creciente y para $\Lambda > 0, \beta > 0$ fijos se cumple

$$G(z) \leq \Lambda z^{1+\beta}, \quad z > 0. \tag{2.1}$$

Definición 2.6. *Sea $\tau \leq \infty$ un tiempo de paro y sea $\{S_t, t \geq 0\}$ el semigrupo d-dimensional de movimiento browniano generado por el operador laplaciano Δ con parámetro de varianza 2 que desaparece en la frontera de D. Una familia de variables $\{v(t,x), t \geq 0, x \in D\}$ que dependen continuamente de la variable espacial y forman un proceso $\mathscr{F}_t$-adaptado es una solución mild de* (2.1) *en el intervalo $[0,\tau)$ si se satisface*

$$v(t,x) = e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r} \left(e^{-\kappa B(r)} G(e^{\kappa B(r)} v(r,\cdot)) \right)(x) dr, \quad 0 \leq t < \tau, \tag{2.2}$$

c.s. en $\mathbb{P}$ y c.t.p. en D.

Observación 2.12. *Como se mencionó en el capítulo de preliminares, tomamos $L^2(D)$ como el espacio de Banach en el cual estaremos trabajando.*

Observación 2.13. *Recordando que G es únicamente Lipschitz local, tenemos la existencia de una solución única que puede explotar en tiempo finito (véase Pazy [27], teorema 6.1.4).*

En seguida se da una condición suficiente para la existencia de una solución global de (2.1).

Teorema 2.1. *Sea $f : D \to \mathbb{R}^+$ que satisface*

$$\Lambda \beta \int_0^\infty e^{\kappa \beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr < 1. \tag{2.3}$$

Entonces (2.1) *admite una solución global v(t,x) que satisface*

$$0 \leq v(t,x) \leq \frac{e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x)}{\left(1 - \Lambda \beta \int_0^t e^{\kappa \beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right)^{\frac{1}{\beta}}}, \qquad t \geq 0. \tag{2.4}$$

Demostración. Definamos

$$N(t) := \left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \quad t \geq 0, \tag{2.5}$$

donde $N(0) = 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= -\frac{1}{\beta}\left[1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right]^{-\frac{1}{\beta}-1} \left(-\Lambda\beta e^{\kappa\beta B(t)} ||e^{-\kappa^2 t/2} S_t f||_\infty^\beta\right) \\ &= \Lambda e^{\kappa\beta B(t)} ||e^{-\kappa^2 t/2} S_t f||_\infty^\beta \left[\left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right)^{-\frac{1}{\beta}}\right]^{1+\beta} \\ &= \Lambda e^{\kappa\beta B(t)} ||e^{-\kappa^2 t/2} S_t f||_\infty^\beta N(t)^{1+\beta}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dN}{dr} dr &= \int_0^t \Lambda e^{\kappa\beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta N(r)^{1+\beta} dr \\ \Longrightarrow \ N(t) &= N(0) + \Lambda \int_0^t e^{\kappa\beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta N(r)^{1+\beta} dr \\ \therefore N(t) &= 1 + \Lambda \int_0^t e^{\kappa\beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta N(r)^{1+\beta} dr. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si $(t,x) \to V_t(x)$ es una función continua no negativa tal que $V_t(\cdot) \in C_0(D)$, $t \geq 0$ y cumple, además,

$$e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \leq V_t(x) \leq N(t) e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \qquad t \geq 0, x \in D, \tag{2.8}$$

entonces podemos definir el siguiente operador

$$R(V)(t,x) := e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r}\left(G\left(e^{\kappa B(r)} V_r(\cdot)\right)\right)(x) dr. \tag{2.9}$$

Por (2.8) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} &V_t(x) \leq N(t)e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) \\ \implies &e^{\kappa B(t)}V_t(x) \leq e^{\kappa B(t)}N(t)e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) \leq e^{\kappa B(t)}N(t)||e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x)||_\infty. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Usando el hecho de que el semigrupo S_t opera solamente sobre las funciones espaciales, el resultado (2.10) y el hecho de que $G(z)/z$ es creciente tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} R(V)(t,x) &= e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa B(r)}e^{-\kappa^2 (t-r)/2}S_{t-r}\left(G\left(e^{\kappa B(r)}V_r(\cdot)\right)\right)(x)dr \\ &= e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa^2 (t-r)/2}S_{t-r}\left(\frac{G(e^{\kappa B(r)}V_r(\cdot))}{e^{\kappa B(r)}V_r(\cdot)}V_r(\cdot)\right)(x)dr \\ &\leq e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa^2 (t-r)/2}S_{t-r}\left(\frac{G(e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty)}{e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty}V_r(\cdot)\right)(x)dr. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Por la propiedad (2.1) tenemos

$$\begin{aligned} &G(e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty) \leq \Lambda\left[e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty\right]^{1+\beta} \\ \implies &\frac{G(e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty)}{e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty}V_r(\cdot) \leq \frac{\Lambda\left[e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty\right]^{1+\beta}}{e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty}V_r(\cdot) \\ \therefore &\frac{G(e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty)}{e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty}V_r(\cdot) \leq \Lambda e^{\kappa\beta B(r)}\left[N(r)\right]^\beta||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty^\beta V_r(\cdot). \end{aligned} \tag{2.12}$$

De (2.8) se sigue

$$\Lambda e^{\kappa\beta B(r)}\left[N(r)\right]^\beta||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty^\beta V_r(\cdot) \leq \Lambda e^{\kappa\beta B(r)}\left[N(r)\right]^\beta||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty^\beta N(r)e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x); \tag{2.13}$$

juntando (2.12) y (2.13) tenemos

$$\frac{G(e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty)}{e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty}V_r(\cdot) \leq \Lambda e^{\kappa\beta B(r)}\left[N(r)\right]^{1+\beta}||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty^\beta e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x). \tag{2.14}$$

Retomando (2.11) obtenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
R(V)(t,x) &\leq e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\kappa^2(t-r)/2}S_{t-r}\left(\frac{G(e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty)}{e^{\kappa B(r)}N(r)||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty}V_r(\cdot)\right)(x)dr \\
&\leq e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\kappa^2(t-r)/2}S_{t-r}\left(\Lambda e^{\kappa\beta B(r)}\left[N(r)\right]^{1+\beta}||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty^\beta e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)\right)dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\kappa^2(t-r)/2}\Lambda e^{\kappa\beta B(r)}\left[N(r)\right]^{1+\beta}||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty^\beta S_{t-r}\left(e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)\right)dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) \\
&\quad + \Lambda\int_0^t e^{\kappa\beta B(r)}\left[N(r)\right]^{1+\beta}||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty^\beta e^{-\kappa^2 t/2}e^{\kappa^2 r/2}S_{t-r}\left(e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)\right)dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) + \Lambda\int_0^t e^{\kappa\beta B(r)}\left[N(r)\right]^{1+\beta}||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty^\beta e^{-\kappa^2 t/2}S_{t-r}\left(S_r f(x)\right)dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) + \Lambda\int_0^t e^{\kappa\beta B(r)}\left[N(r)\right]^{1+\beta}||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)||_\infty^\beta e^{-\kappa^2 t/2}S_t\left(f(x)\right)dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x)\left[1 + \Lambda\int_0^t e^{\kappa\beta B(r)}||e^{-\kappa^2 r/2}S_r f||_\infty^\beta N(r)^{1+\beta}dr\right] \\
&= e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x)N(t),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

habiendo usado (2.7) en la última igualdad. Por (2.15) se cumple lo siguiente

$$e^{\kappa^2 t/2}S_t f(x) \leq R(V)(t,x) \leq N(t)e^{\kappa^2 t/2}S_t f(x), \qquad t \geq 0, x \in D.$$

definamos

$$v_t^0(x) := e^{\kappa^2 t/2}S_t f(x) \quad \text{y} \quad v_t^{n+1}(x) = R(v^n)(t,x), \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Esto define una sucesión $\{v_t^n\}_{n=0}^{\infty}$. A continuación se demuestra que esta es una sucesión monotona creciente usando inducción.

I. Paso base

Por la definición de R(V) en (2.9) tenemos $v_t^0 \leq R(v^0) = v_t^1$.

II. Hipótesis de inducción

Supongamos que $v_t^{n-1}(x) \leq v_t^n(x)$ para $n \geq 1$ fija y para toda $t \geq 0$ y $x \in D$.

III. Paso inductivo

Como $G(z)/z$ es creciente se sigue que

$$G(e^{\kappa B(r)} v_r^{n-1}(\cdot)) = \frac{G(e^{\kappa B(r)} v_r^{n-1}(\cdot))}{e^{\kappa B(r)} v_r^{n-1}(\cdot)} e^{\kappa B(r)} v_r^{n-1}(\cdot) \leq \frac{G(e^{\kappa B(r)} v_r^{n}(\cdot))}{e^{\kappa B(r)} v_r^{n}(\cdot)} e^{\kappa B(r)} v_r^{n}(\cdot) = G(e^{\kappa B(r)} v_r^{n}(\cdot)); \tag{2.16}$$

combinando (2.16) con (2.9) nos da como resultado

$$v_t^n(x) = R(v^{n-1})(t,x) \leq R(v^n)(t,x) = v_t^{n+1}(x) \quad t \geq 0, x \in D.$$

Esto demuestra que $\{v_t^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de funciones no negativas. Notemos además que $v(t,x)$ es un punto fijo del operador $R(V)(t,x)$. Se cumple entonces

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} v_t^n(x) = v(t,x) \leq \frac{e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x)}{\left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right)^{\frac{1}{\beta}}}; \tag{2.17}$$

En virtud del Teorema de convergencia monótona, siendo la sucesión $\{v_t^n\}_{n=0}^{\infty}$ creciente y estando acotada superiormente. Para ver que $v(t,x)$ es solución global tomamos el límite cuando $t \to \infty$ y notamos que el elemento a la derecha de la desigualdad está acotado gracias a la hipótesis (2.3) y el hecho de que S_t es acotado. Así, $v(t,x)$ existe para cualquier tiempo t y es por lo tanto una solución global.

□

Corolario 2.1. *Consideremos el problema* (2.1). *Entonces el tiempo aleatorio*

$$\tau_- := \inf \left\{ t \geq 0 \middle| \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(r)} ||e^{-\kappa^2/2} S_r f||_\infty^\beta dr \geq 1 \right\}, \tag{2.18}$$

es una cota inferior del tiempo de explosión T de $u(t,x)$.

Demostración. Definiendo

$$O(t,x) = \frac{e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x)}{\left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right)^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Sea τ_- el tiempo de explosión de $O(t,x)$ y T el tiempo de explosión de $v(t,x)$. Como tenemos $v(t,x) \leq O(t,x)$ entonces $O(t,x)$ explota primero que $v(t,x)$. Esto implica que $\tau_- \leq T$. Lo que hemos obtenido ahora es una cota inferior para el tiempo de explosión de $v(t,x)$ y $u(t,x)$. □

Con los resultados que se han obtenido, hemos logrado acotar el tiempo de explosión de $u(t,x)$ tanto superior como inferiormente, de tal forma que

$$\tau_- \leq T \leq \tau_+. \tag{2.19}$$

Observación 2.14. *Notemos lo siguiente, como $v(t,x) \leq O(t,x)$, al momento que $v(t,x)$ explota entonces necesariamente $O(t,x)$ ya ha explotado. En conclusión, tenemos que*

$$\mathbb{P}(\tau_+ < \infty) \leq \mathbb{P}(T < \infty) \leq \mathbb{P}(\tau_+ < \infty). \tag{2.20}$$

Observación 2.15. *Una solución mild cumple a su vez ser una solución débil (véase Chow [3] capítulo 3). Entonces la existencia de una solución mild global de* (2.1) *implica la existencia de una solución débil global de la misma ecuación.*

En lo que queda de esta sección indagamos sobre algunas otras condiciones que permiten que (2.1) posea una solución global.

Teorema 2.2. *Supongamos que la desigualdad* (2.1) *se cumple para $z \in (0, C^*)$, $C^* > 0$. Sea $f : D \to \mathbb{R}^+$ que satisface*

$$||f||_\infty \leq C^* \hat{N}(t)^{-1}, \tag{2.21}$$

donde

$$\hat{N}(t) = \left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{-\kappa B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Entonces el Teorema 2.1 se satisface si reemplazamos $e^{\kappa\beta B(r)}$ en (2.3) *y* (2.4) *por $e^{-\kappa B(r)}$, $G(e^{\kappa B(t)} v(t,x))$ por $G(v(t,x))$ en* (2.1) *y* (2.2).

Demostración. Definamos

$$\hat{N}(t) := \left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{-\kappa B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right)^{-\frac{1}{\beta}} \quad \text{para } t \geq 0, \tag{2.22}$$

donde $\hat{N}(0) = 1$. De esto se sigue

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{N}}{dt} &= -\frac{1}{\beta}\left[1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{-\kappa B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right]^{-\frac{1}{\beta}-1} \left(-\Lambda\beta e^{-\kappa B(t)} ||e^{-\kappa^2 t/2} S_t f||_\infty^\beta\right) \\
&= \Lambda e^{-\kappa B(t)} ||e^{-\kappa^2 t/2} S_t f||_\infty^\beta \left[\left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{-\kappa B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right)^{-\frac{1}{\beta}}\right]^{1+\beta} \\
&= \Lambda e^{-\kappa B(t)} ||e^{-\kappa^2 t/2} S_t f||_\infty^\beta \hat{N}(t)^{1+\beta}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

De lo anterior se sigue que

$$\hat{N}(t) = 1 + \Lambda \int_0^t e^{-\kappa B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta \hat{N}(r)^{1+\beta} dr. \tag{2.24}$$

Si $(t, x) \to V_t(x)$ es una función continua no negativa tal que $V_t(\cdot) \in C_0(D)$, $t \geq 0$ y cumple además

$$e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \leq V_t(x) \leq \hat{N}(t) e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \quad t \geq 0, x \in D, \tag{2.25}$$

entonces podemos definir el siguiente operador

$$\hat{R}(V)(t, x) := e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r} \left(G\left(V_r(\cdot)\right)\right)(x) dr. \tag{2.26}$$

Por (2.25) tenemos lo siguiente

$$V_t(x) \leq \hat{N}(t) e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \leq \hat{N}(t) ||e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x)||_\infty. \tag{2.27}$$

De esto se sigue

$$\begin{aligned}
\hat{R}(V)(t,x) &= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r}\left(G\left(V_r(\cdot)\right)\right)(x) dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r}\left(\frac{G(V_r(\cdot))}{V_r(\cdot)} V_r(\cdot)\right)(x) dr \\
&\leq e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r}\left(\frac{G\left(\hat{N}(t)||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x)||_\infty\right)}{\hat{N}(t)||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x)||_\infty} V_r(\cdot)\right)(x) dr \\
&\leq e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r}\left(\frac{\Lambda\left[\hat{N}(t)||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x)||_\infty\right]^{1+\beta}}{\hat{N}(r)||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x)||_\infty} V_r(\cdot)\right)(x) dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r}\left(\Lambda \hat{N}(r)^\beta ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x)||_\infty^\beta V_r(\cdot)\right)(x) dr \\
&\leq e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r}\left(\Lambda \hat{N}(r)^\beta ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x)||_\infty^\beta \hat{N}(r) e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(\cdot)\right)(x) dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} \Lambda \hat{N}(r)^\beta ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x)||_\infty^\beta \hat{N}(r) e^{-\kappa^2 r/2} S_{t-r}\left(S_r f(x)\right) dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \Lambda \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 t/2} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x)||_\infty^\beta \hat{N}(r)^{1+\beta} S_t f(x) dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \Lambda \int_0^t e^{-\kappa B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x)||_\infty^\beta \hat{N}(r)^{1+\beta} dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \left[1 + \Lambda \int_0^t e^{-\kappa B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x)||_\infty^\beta \hat{N}(r)^{1+\beta} dr\right] \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \hat{N}(t). \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Entonces se cumple

$$e^{\kappa^2 t/2} S_t f(x) \leq \hat{R}(V)(t,x) \leq \hat{N}(t) e^{\kappa^2 t/2} S_t f(x), \qquad t \geq 0, x \in D.$$

Definamos

$$v_t^0(x) := e^{\kappa^2 t/2} S_t f(x) \quad \text{y} \quad v_t^{n+1}(x) := \hat{R}(v^n)(t,x) \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Esto define una sucesión $\{v_t^n\}_{n=0}^{\infty}$. A continuación se demuestra que esta es una sucesión monotona creciente usando inducción.

I. Paso base

Por la definición de $\hat{R}(V)$ en (2.26) tenemos $v_t^0 \leq \hat{R}(v^0) = v_t^1$.

II. Hipótesis de inducción

Supongamos que $v_t^{n-1}(x) \leq v_t^n(x)$ para $n \geq 1$ fija y para toda $t \geq 0$ y $x \in D$.

III. Paso inductivo

Como $G(z)/z$ es creciente se sigue que

$$G(v_r^{n-1}(x)) = \frac{G(v_r^{n-1}(x))}{v_r^{n-1}(x)} v_r^{n-1}(x) \leq \frac{G(v_r^n(x))}{v_r^n(x)} v_r^n(x) = G(v_r^n(x)). \tag{2.29}$$

Por lo tanto, tenemos como resultado

$$v_t^n(x) = \hat{R}(v^{n-1})(t,x) \leq \hat{R}(v^n)(t,x) = v_t^{n+1}(x), \quad t \geq 0, x \in D.$$

Esto demuestra que $\{v_t^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de funciones no negativas que cumple

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} v_t^n(x) = v(t,x) \leq \frac{e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x)}{\left(1 - \Lambda\beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(r)} ||e^{-\kappa^2 r/2} S_r f||_\infty^\beta dr\right)^{\frac{1}{\beta}}}; \tag{2.30}$$

por el Teorema de convergencia monótona, en virtud de que la sucesión $\{v_t^n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente y está acotada superiormente. Más aún, tenemos

$$||e^{-\kappa^2 t/2} S_t f||_\infty \leq ||e^{-\kappa^2 t/2}||_\infty ||S_t||_\infty ||f||_\infty \leq 1 \cdot 1 \cdot ||f||_\infty = ||f||_\infty, \tag{2.31}$$

pues $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones, i.e., $||S_t|| \leq 1$. Por último, recordado (2.21) y juntando (2.30) con (2.31) resulta que

$$0 \leq \hat{N}(t)||e^{-\kappa^2 t/2} S_t f||_\infty \leq \hat{N}(t)||f||_\infty \leq C^* \quad t \geq 0,\ f \not\equiv 0. \tag{2.32}$$

□

Para obtener una condición similar a (2.3) en términos del kernel de transición $\{p_t(x,y), t > 0\}$ de $\{S_t, t \geq 0\}$ y el primer eigenvalor λ_1 con su correspondiente eigenfunción ψ, nos valemos del resultado obtenido por Ouhabaz y Wang [26] teorema 1.1, aplicándolo sobre el caso particular de una bola en $\mathbb{R}^d$. Enunciamos este resultado a continuación.

Corolario 2.2. *Sea $\psi > 0$ la primera eigenfunción de Dirichlet en una bola abierta $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ y sea $p_t(x,y)$ el kernel del calor correspondiente. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\text{máx}\left\{1, \frac{1}{c} t^{-(d+2)/2}\right\} \leq e^{\lambda_1 t} \sup_{x,y \in D} \left\{\frac{p_t(x,y)}{\psi(x)\psi(y)}\right\} \leq 1 + c(1 \wedge t)^{-(d+2)/2} e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \quad t > 0, \tag{2.33}$$

donde $\lambda_2 > \lambda_1$ son los dos primeros eigenvalores de Dirichlet.

El resultado anterior es de gran utilidad al verificar la condición (2.35), semejante a (2.3), en el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Sea G que satisface* (2.1) *y sea D una bola abierta en $\mathbb{R}^d$. Si $f : D \to \mathbb{R}^+$ cumple*

$$f(y) \leq K S_\eta \psi(y), \quad y \in D, \tag{2.34}$$

y se satisface

$$\int_0^\infty e^{\kappa\beta B(r) - (\lambda_1 + \kappa^2/2)\beta r} dr < \frac{e^{\lambda_1 \beta \eta}}{\Lambda\beta \left[K(1+c)\left(\sup_{x\in D}\{\psi(x)\}\right)^2 \int_D \psi(y)dy\right]^\beta}; \tag{2.35}$$

para algunos $\eta \geq 1$ y $K > 0$ fijos, entonces la solución de (2.2) *es una solución global.*

Demostración. Sea $f(y) \geq 0$ que satisface (2.34), donde $\eta \geq 1$ y $K > 0$ también satisfacen (2.35). De (2.34) se sigue, para $t > 0$, que

$$
\begin{aligned}
S_t f(y) &\leq K S_{t+\eta}\psi(y) \\
&= K \int_D p_{t+\eta}(x,y)\psi(y)dy \\
&= K \int_D e^{\lambda_1(t+\eta)} e^{-\lambda_1(t+\eta)} \frac{p_{t+\eta}(x,y)}{\psi(x)\psi(y)} \psi(x)\psi^2(y)dy \\
&\leq K \left(\sup_{x\in D} \{\psi(x)\} \right)^2 \int_D e^{\lambda_1(t+\eta)} e^{-\lambda_1(t+\eta)} \sup_{x,y\in D} \left\{ \frac{p_{t+\eta}(x,y)}{\psi(x)\psi(y)} \right\} \psi(y)dy \\
&\leq K \left(\sup_{x\in D} \{\psi(x)\} \right)^2 \int_D \left(1 + c(1 \wedge (t+\eta))^{-(d+2)/2} e^{-(\lambda_2-\lambda_1)(t+\eta)}\right) e^{-\lambda_1(t+\eta)}\psi(y)dy \\
&= K \left(\sup_{x\in D} \{\psi(x)\} \right)^2 \int_D \left(e^{-\lambda_1(t+\eta)} + c(1 \wedge (t+\eta))^{-(d+2)/2} e^{-\lambda_2(t+\eta)}\right) \psi(y)dy \\
&\leq K \left(\sup_{x\in D} \{\psi(x)\} \right)^2 \left(e^{-\lambda_1(t+\eta)} + c e^{-\lambda_2(t+\eta)}\right) \int_D \psi(y)dy \\
&\leq K \left(\sup_{x\in D} \{\psi(x)\} \right)^2 \left(e^{-\lambda_1(t+\eta)} + c e^{-\lambda_1(t+\eta)}\right) \int_D \psi(y)dy \\
&= K \left(\sup_{x\in D} \{\psi(x)\} \right)^2 (1+c) e^{-\lambda_1(t+\eta)} \int_D \psi(y)dy \\
&= K \left(\sup_{x\in D} \{\psi(x)\} \right)^2 (1+c) e^{-\lambda_1\eta} e^{-\lambda_1 t} \int_D \psi(y)dy.
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

Renombrando

$$
\gamma := K \left(\sup_{x\in D} \{\psi(x)\} \right)^2 (1+c) e^{-\lambda_1\eta} \int_D \psi(y)dy, \tag{2.37}
$$

(2.36) se reduce a

$$
S_t f(y) \leq \gamma e^{-\lambda_1 t}. \tag{2.38}
$$

Cabe destacar que la cota que se ha obtenido es independiente de la variable espacial x. Definamos

$$
\tilde{N}(t) := \left(1 - \Lambda\beta\gamma^\beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(r) - (\lambda_1 + \kappa^2/2)\beta r} dr\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \quad t \geq 0, \tag{2.39}
$$

donde $\tilde{N}(0) = 1$. Así tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{N}}{dt} &= -\frac{1}{\beta}\left[1 - \Lambda\beta\gamma^{\beta}\int_0^t e^{\kappa\beta B(r)-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta r}dr\right]^{-\frac{1}{\beta}-1}\left(-\Lambda\beta\gamma^{\beta}e^{\kappa\beta B(t)-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta t}\right) \\
&= \Lambda\gamma^{\beta}e^{\kappa\beta B(t)-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta t}\left[\left(1 - \Lambda\beta\gamma^{\beta}\int_0^t e^{\kappa\beta B(r)-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta r}dr\right)^{-\frac{1}{\beta}}\right]^{1+\beta} \\
&= \Lambda\gamma^{\beta}e^{\kappa\beta B(t)-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta t}\tilde{N}(t)^{1+\beta}. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue

$$\tilde{N}(t) = 1 + \Lambda\gamma^{\beta}\int_0^t e^{\kappa\beta B(r)-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta r}\tilde{N}(r)^{1+\beta}dr. \qquad (2.41)$$

Si $(t, x) \to V_t(x)$ es una función continua no negativa tal que $V_t(\cdot) \in C_0(D)$, $t \geq 0$ y cumple además

$$e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) \leq V_t(x) \leq \tilde{N}(t)e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) \quad t \geq 0, x \in D, \qquad (2.42)$$

entonces definimos el operador

$$R(V)(t, x) := e^{-\kappa^2 t/2}S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa B(r)}e^{-\kappa^2(t-r)/2}S_{t-r}\left(G\left(e^{\kappa B(r)}V_r(\cdot)\right)\right)(x)dr. \qquad (2.43)$$

Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{G\left(e^{\kappa B(r)V_r(x)}\right)}{e^{\kappa B(r)}} &= \frac{G\left(e^{\kappa B(r)}V_r(x)\right)}{e^{\kappa B(r)}V_r(x)}V_r(x) \\
&\leq \frac{G\left(e^{\kappa B(r)}\tilde{N}(r)e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)\right)}{e^{\kappa B(r)}\tilde{N}(r)e^{-\kappa^2 r/2}S_r f(x)}V_r(x) \\
&\leq \frac{G\left(e^{\kappa B(r)}\tilde{N}(r)e^{-\kappa^2 r/2}\gamma e^{-\lambda_1 r}\right)}{\gamma e^{\kappa B(r)}\tilde{N}(r)e^{-\kappa^2 r/2}e^{-\lambda_1 r}}V_r(x) \\
&\leq \frac{\Lambda\left[e^{\kappa B(r)}\tilde{N}(r)\gamma e^{-(\lambda_1+\kappa^2 r/2)r}\right]^{1+\beta}}{\gamma e^{\kappa B(r)}\tilde{N}(r)e^{-(\lambda_1+\kappa^2 r/2)r}}V_r(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda\gamma^{\beta} e^{\kappa\beta B(r)} e^{-(\lambda_1+\kappa^2 r/2)\beta r} \tilde{N}(r)^{\beta} V_r(x) \\
&\leq \Lambda\gamma^{\beta} e^{\kappa\beta B(r)} e^{-(\lambda_1+\kappa^2 r/2)\beta r} \tilde{N}(r)^{\beta} \tilde{N}(r) e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x) \\
&= \Lambda\gamma^{\beta} e^{\kappa\beta B(r)} e^{-(\lambda_1+\kappa^2 r/2)\beta r} \tilde{N}(r)^{1+\beta} e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(x). \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

Usando (2.43) obtenemos

$$\begin{aligned}
R(V)(t,x) &= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa B(r)} e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r} \left(G \left(e^{\kappa B(r)} V_r(\cdot) \right) \right)(x) dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \int_0^t e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r} \left(\frac{G\left(e^{\kappa B(r)} V_r(\cdot)\right)}{e^{\kappa B(r)}} \right)(x) dr \\
&\leq e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \\
&\quad + \int_0^t e^{-\kappa^2 (t-r)/2} S_{t-r} \left(\Lambda\gamma^{\beta} e^{\kappa\beta B(r)} e^{-(\lambda_1+\kappa^2 r/2)\beta r} \tilde{N}(r)^{1+\beta} e^{-\kappa^2 r/2} S_r f(\cdot) \right)(x) dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \\
&\quad + \Lambda\gamma^{\beta} \int_0^t e^{-\kappa^2 (t-r)/2} e^{\kappa\beta B(r)} e^{-(\lambda_1+\kappa^2 r/2)\beta r} \tilde{N}(r)^{1+\beta} e^{-\kappa^2 r/2} S_{t-r} \left(S_r f(x) \right) dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) + \Lambda\gamma^{\beta} \int_0^t e^{-\kappa^2 t/2} e^{\kappa\beta B(r)} e^{-(\lambda_1+\kappa^2 r/2)\beta r} \tilde{N}(r)^{1+\beta} S_t f(x) dr \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \left[1 + \Lambda\gamma^{\beta} \int_0^t e^{\kappa\beta B(r) - (\lambda_1+\kappa^2 r/2)\beta r} \tilde{N}(r)^{1+\beta} dr \right] \\
&= e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x) \tilde{N}(t). \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple

$$e^{\kappa^2 t/2} S_t f(x) \leq R(V)(t,x) \leq \tilde{N}(t) e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x), \qquad t \geq 0, x \in D. \qquad (2.46)$$

Si definimos

$$v_t^0(x) := e^{\kappa^2 t/2} S_t f(x) \quad \text{y} \quad v_t^{n+1}(x) := R(v^n)(t,x) \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

entonces por un argumento análogo al que se usa en la demostración del teorema 2.1 sabemos que $\{v_t^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de funciones no negativas que cumple

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} v_t^n(x) = v(t,x) \leq \frac{e^{-\kappa^2 t/2} S_t f(x)}{\left(1 - \Lambda\beta\gamma^\beta \int_0^t e^{\kappa\beta B(r)-(\lambda_1+\kappa^2/2)\beta r} dr\right)^{\frac{1}{\beta}}} \tag{2.47}$$

□

Capítulo 3

Una ecuación afectada por un ruido bidimensional

En ocasiones los ruidos pueden tener "buena" influencia en "malos" sistemas. Por ejemplo, en Xie [35] teorema 2.4, el autor descubrió que los ruidos pueden convertir un sistema estocástico inestable en uno estable. En el capítulo 2 se obtuvieron una cota superior y una cota inferior para el tiempo de explosión de la solución $u(t,x)$ a la ecuación diferencial parcial estocástica (2.1) perturbada por un ruido blanco unidimensional. Para el presente capítulo, nos interesa saber si podemos extender el tiempo de vida de esta ecuación.

En este capítulo pretendemos considerar el impacto de agregar un ruido adicional e independiente del ya presente en (2.1) en el tiempo de explosión de su solución, ampliando los resultados del capítulo 2. En la sección 3.1 presentamos la ecuación (3.1), una generalización de (2.1) que considera un ruido generado por un proceso bidimensional y damos la definición de solución débil para este problema.

En la sección 3.2 introducimos una vez más una ecuación auxiliar (3.1) y un resultado que establece una relación -análoga a la que se describe en la sección 2.2- entre su solución $v(t,x)$ y la solución $u(t,x)$ de (3.1) pues asevera que es posible construir la primera a partir de esta última. Consecuentemente, en la sección 3.3 obtenemos una cota superior para el tiempo de explosión de $u(t,x)$ valiéndonos de un procedimiento similar al de la sección 2.3 al obtener la solución a una ecuación diferencial que se deriva de la forma débil de $v(t,x)$ y cuyo tiempo de explosión es una cota para el de $u(t,x)$.

Es importante destacar que el problema (3.1) tiene las variantes de un solo ruido ($\kappa_2 = 0$ ó $\kappa_1 = 0$) y dos ruidos ($\kappa_2 \neq 0$ y $\kappa_1 \neq 0$), en donde el primer caso nos remite a los resultados del capítulo anterior. Como es de nuestro interés saber en cuál de estas versiones la solución es más estable, es natural intentar comparar los tiempos de explosión de sus soluciones. Así pues, para finalizar, en la sección 3.4 se determinan condiciones específicas para que la explosión de la solución en tiempo finito sea más probable si se tiene un sólo ruido que si se tienen dos ruidos.

Observación 3.1. *Para los resultados de existencia y unicidad sobre soluciones, en particular débiles, para* (3.1) *y* (3.1) *nos referimos a la misma bibliografía que se menciona en el capítulo anterior, con algunas adiciones.*

3.1. Una ecuación diferencial estocástica semilineal con dos ruidos

Sea $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, una bola abierta. Consideremos la ecuación semilineal

$$\begin{aligned} du(t,x) &= [\Delta u(t,x) + G(u(t,x))]dt + \kappa_1 u(t,x)dB_1(t) + \kappa_2 u(t,x)dB_2(t), && t > 0,\ x \in D, \\ u(0,x) &= f(x) \geq 0, && x \in D, \\ u(t,x) &= 0, && t \geq 0,\ x \in \partial D, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\{(B_1(t), B_2(t)), t \geq 0\}$ es un movimiento browniano bidimensional con respecto a un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, los parámetros κ_1, κ_2 son dos números reales, el coeficiente no lineal del drift G es una función localmente Lipschitz y la condición inicial $f : D \to \mathbb{R}^+$ es $C^2(D)$ y no negativa. Además, existe $\beta > 0$ tal que

$$G(z) \geq z^{1+\beta}, \quad z \geq 0. \tag{3.2}$$

Una vez más, no conocemos la forma explícita de la solución, así que nos interesa indagar sobre el tiempo de explosión de la solución de (3.1). A lo largo de este capítulo asumimos que $\kappa_1 \neq 0$ y $\kappa_2 \neq 0$, pues los resultados que obtenemos para (3.1), donde alguna de las constantes κ_1, κ_2 es igual a 0, ya se han cubierto con anterioridad.

De forma similar que en el capítulo previo, si sólo se asume que G es Lipschitz localmente entonces existe la posibilidad de que la solución de (3.1) explote en tiempo finito (véanse Chow [2] teorema 3.1, Mueller [23] teorema 1, Mimbela y Privault [19] secciones 4 y 5). No obstante, como hemos podido comprobar, no es asunto elemental determinar su tiempo de explosión.

Definición 3.1. *Sea* $\tau \leq \infty$ *un tiempo de paro. Una familia de variables* $\{u(t,x), t \geq 0, x \in D\}$ *que dependen continuamente de la variable espacial y forman un proceso*

$\mathscr{F}_t$-adaptado es una solución débil de (3.1) en el intervalo $[0,\tau)$ si para cualquier función de prueba $\phi \in C^2(D)$ que cumple $\phi(x) = 0$ para $x \in \partial D$ se satisface

$$\begin{aligned}\int_D u(t,x)\phi(x)dx = \int_D f(x)\phi(x)dx + \int_0^t \int_D u(s,x)\Delta\phi(x)dxds + \int_0^t \int_D G(u(s,x))\phi(x)dxds \\ + \kappa_1 \int_0^t \int_D u(s,x)\phi(x)dxdB_1(s) + \kappa_2 \int_0^t \int_D u(s,x)\phi(x)dxdB_2(s),\end{aligned} \tag{3.3}$$

para $0 \le t < \tau$, c.s. en $\mathbb{P}$.

Observación 3.2. *Usando la notación $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para el producto interno usual en $L^2(D)$ podemos reescribir (3.3) como*

$$\begin{aligned}\langle u(t,x),\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle + \int_0^t \langle u(s,x),\Delta\phi\rangle ds + \int_0^t \langle G(u(s,x)),\phi\rangle ds \\ + \kappa_1 \int_0^t \langle u(s,x),\phi\rangle dB_1(s) + \kappa_2 \int_0^t \langle u(s,x),\phi\rangle dB_2(s), \qquad 0 \le t < \tau,\end{aligned} \tag{3.4}$$

c.s. en $\mathbb{P}$.

Bajo nuestras suposiciones existe una única solución débil. Más aún, para cada condición inicial $f(x) \ge 0$ c.t.p. la solución $u(t,x)$ para (3.1) es casi seguramente positiva por los resultados ya mencionados de Bergé et al. [1] y Manthey, Zausinger [20]. Véanse además Donati y Pardoux [7] teoremas 2.1 y 3.1, Shiga [31] teoremas 2.2 y 2.3 para resultados similares donde la variable espacial está en una dimensión.

3.2. Una ecuación diferencial parcial perturbada por un movimiento browniano bidimensional

En esta sección introducimos una ecuación diferencial parcial (3.1) cuya solución $v(t,x)$ guarda una relación con la solución $u(t,x)$ de (3.1). En la proposición 3.1 se determina que la solución $v(t,x)$ se puede construir a partir de $u(t,x)$. Esta relación nos permite obtener en la sección siguiente una cota superior para el tiempo de explosión de $u(t,x)$.

Consideremos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) &= \left[\Delta - \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\right] v(t,x) + e^{\{-\kappa_1 B_1(t)-\kappa_2 B_2(t)\}} G(e^{\{\kappa_1 B_1(t)+\kappa_2 B_2(t)\}} v(t,x)), \quad t>0,\ x\in D,\\
v(0,x) &= f(x), \qquad x\in D,\\
v(t,x) &= 0, \qquad x\in \partial D.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Observación 3.3. *Cabe aclarar que las funciones G y f cumplen las mismas condiciones que en* (3.1) *y la ecuación está definida en la misma bola abierta D.*

Una vez más, fijamos ω para hacer lo propio con las trayectorias del movimiento browniano bidimensional $\{(B_1(t), B_2(t)), t \geq 0\}$ y obtenemos una ecuación aleatoria, lo que nos permite realizar una aproximación sobre el tiempo de explosión de (3.1).

Definición 3.2. *Sea $\tau \leq \infty$ un tiempo de paro. Decimos que una familia de variables $\{v(t,x), t \geq 0, x \in D\}$ que dependen continuamente de la variable espacial y forman un proceso $\mathscr{F}_t$-adaptado es una solución débil para* (3.1) *en el intervalo $[0,\tau)$ si para cualquier función de prueba $\phi \in C^2(D)$ con $\phi = 0$ en ∂D se cumple*

$$\begin{aligned}
\langle v(t,x), \phi\rangle &= \langle f, \phi\rangle + \int_0^t \langle v(s,x), \Delta\phi\rangle ds - \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x),\phi\rangle ds\\
&\quad + \int_0^t \langle e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} G(e^{\{\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)\}} v(s,x)), \phi\rangle ds, \qquad 0 \leq t < \tau,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

c.s. en $\mathbb{P}$.

Observación 3.4. *Dado que impusimos las mismas condiciones que en* (3.1), *es posible también que la solución $v(t,x)$ de* (3.1) *explote en tiempo finito.*

La siguiente proposición es importante, pues establece una relación entre las soluciones de (3.1) y (3.1) ya que afirma que podemos construir una solución de la segunda a partir de una solución de la primera -de existir ésta-. Más aún, ambas soluciones poseen el mismo tiempo de explosión. Este hecho abre la posibilidad de establecer una cota superior para el tiempo de explosión de $u(t,x)$ en un resultado posterior.

Proposición 3.1. *Para cada valor inicial $f : D \to \mathbb{R}^+$, si $u(t,x)$ es una solución débil para* (3.1), *entonces*

$$v(t,x) := e^{\{-\kappa_1 B_1(t)-\kappa_2 B_2(t)\}} u(t,x), \qquad t \geq 0, x \in D, \tag{3.3}$$

es una solución débil de (3.1).

Demostración. Hagamos $f(B_1(t), B_2(t)) = e^{\{-\kappa_1 B_1(t) - \kappa_2 B_2(t)\}}$. Aplicando la fórmula de Itô para una función de dos variables tenemos

$$\begin{aligned}
e^{\{-\kappa_1 B_1(t) - \kappa_2 B_2(t)\}} &= e^{\{-\kappa_1 B_1(0) - \kappa_2 B_2(0)\}} + \frac{1}{2}\int_0^t \kappa_1\kappa_2 e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} dB_1(s) dB_2(s) \\
&\quad - \int_0^t \kappa_1 e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} dB_1(s) - \int_0^t \kappa_2 e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} dB_2(s) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \kappa_1^2 e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} [dB_1(s)]^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \kappa_2^2 e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} [dB_2(s)]^2 \\
&= 1 - \int_0^t \kappa_1 e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} dB_1(s) - \int_0^t \kappa_2 e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} dB_2(s) \\
&\quad + \frac{\kappa_1^2}{2}\int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} ds + \frac{\kappa_2^2}{2}\int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} ds \\
&= 1 - \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} [\kappa_1 dB_1(s) + \kappa_2 dB_2(s)] \\
&\quad + \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}\int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} ds. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Usando (3.4) y (3.4) tenemos lo siguiente

$$\left[\langle u(\cdot, x), \phi\rangle, e^{\{-\kappa_1 B_1(\cdot) - \kappa_2 B_2(\cdot)\}}\right](t) = -(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\int_0^t \langle u(s, x), \phi\rangle e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} ds. \qquad (3.5)$$

Este resultado se sigue de la bilinealidad de la covarianza cuadrática y los resultados de covarianza cuadrática con funciones de variación finita en el intervalo $(0, t)$, así como de la covarianza entre integrales de Itô. Recordando (3.4) sabemos que para cada función de prueba $\phi, \{\langle u(t, x), \phi\rangle, t < \tau\}$ es una semimartingala continua. Usando la fórmula de integración por partes para semimartingalas continuas junto con (3.5) tenemos

$$\begin{aligned}
e^{\{-\kappa_1 B_1(t) - \kappa_2 B_2(t)\}}\langle u(t, x), \phi\rangle &= \langle u(0, x), \phi\rangle + \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}} d\langle u(s, x), \phi\rangle \\
&\quad + \int_0^t \langle u(s, x), \phi\rangle \left[d e^{\{-\kappa_1 B_1(s) - \kappa_2 B_2(s)\}}\right] \\
&\quad + \left[\langle u(\cdot, x), \phi\rangle, e^{\{-\kappa_1 B_1(\cdot) - \kappa_2 B_2(\cdot)\}}\right](t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle u(0,x),\phi\rangle + \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} d\langle u(s,x),\phi\rangle \\
&\quad + \int_0^t \langle u(s,x),\phi\rangle \left[d e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} \right] \\
&\quad - (\kappa_1^2+\kappa_2^2) \int_0^t \langle u(s,x),\phi\rangle e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} ds. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Usando (3.4), (3.3), (3.6) y el hecho de que el producto interior en L^2 es una integral sobre la variable espacial se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle v(t,x),\phi\rangle &= \langle e^{\{-\kappa_1 B_1(t)-\kappa_2 B_2(t)\}} u(t,x),\phi\rangle \\
&= e^{\{-\kappa_1 B_1(t)-\kappa_2 B_2(t)\}} \langle u(t,x),\phi\rangle \\
&= \langle f,\phi\rangle + \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} d\langle u(s,x),\phi\rangle \\
&\quad + \int_0^t \langle u(t,x),\phi\rangle \left[d e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} \right] \\
&\quad - (\kappa_1^2+\kappa_2^2) \int_0^t \langle u(s,x),\phi\rangle e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} ds, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

donde $\langle u(0,x),\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle$ por la condición inicial de (3.1). Por (3.4) tenemos que

$$d\langle u(s,x),\phi\rangle = \langle u(s,x),\Delta\phi\rangle ds + \langle G(u(s,x)),\phi\rangle ds + \kappa_1\langle u(s,x),\phi\rangle dB_1(s) + \kappa_2\langle u(s,x),\phi\rangle dB_2(s);$$

de esto se sigue

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} d\langle u(s,x),\phi\rangle &= \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} [\langle u(s,x),\Delta\phi\rangle ds + \langle G(u(s,x)),\phi\rangle ds \\
&\quad + \kappa_1\langle u(s,x),\phi\rangle dB_1(s) + \kappa_2\langle u(s,x),\phi\rangle dB_2(s)]. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Por (3.4) tenemos que

$$d e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} = e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} \left[-\kappa_1 dB_1(s) - \kappa_2 dB_2(s) + \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2} ds \right];$$

de esto se sigue

$$\int_0^t \langle u(s,x),\phi\rangle \left[de^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}}\right] =$$

$$\int_0^t \langle u(s,x),\phi\rangle e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} \left[-\kappa_1 dB_1(s) - \kappa_2 dB_2(s) + \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2} ds\right]. \tag{3.9}$$

Sustituyendo (3.8) y (3.9) en (3.7) tenemos

$$\begin{aligned}\langle v(t,x),\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle &+ \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}}\langle u(s,x),\Delta\phi\rangle ds \\ &+ \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}}\langle G(u(s,x)),\phi\rangle ds \\ &- \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}}\langle u(s,x),\phi\rangle ds.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Recordando que por (3.3)

$$u(t,x) = v(t,x)e^{\{\kappa_1 B_1(t)+\kappa_2 B_2(t)\}}, \tag{3.11}$$

si sustituimos (3.11) en (3.10) tenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned}\langle v(t,x),\phi\rangle = \langle f,\phi\rangle &+ \int_0^t \langle v(s,x),\Delta\phi\rangle ds - \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x),\phi\rangle ds \\ &+ \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}}\langle G(e^{\{\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)\}}v(s,x)),\phi\rangle ds, \qquad 0\le t<T.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Tenemos que $v(t,x)$ es solución débil de (3.1) pues cumple (3.2), donde T es el tiempo de explosión de (3.1).

□

Observación 3.5. *Por construcción, los tiempos de explosión de $u(t,x)$ (solución de (3.1)) y $v(t,x)$ (solución de (3.1)) son el mismo.*

3.3. Estimación de otra cota superior para el tiempo de explosión

Una vez establecidos los resultados previos, buscamos establecer una cota para el tiempo de explosión de $v(t,x)$. Para conseguirlo nos valemos de la solución de una ecuación que se deduce de la solución débil de (3.1), cuyo tiempo de explosión permite establecer una cota para el tiempo de explosión de $u(t,x)$ y de la probabilidad de que esta explote en tiempo finito.

Consideremos el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0, &\quad x \in D, \\ \varphi(x) = 0, &\quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

Sea λ_1 el primer eigenvalor del operador Δ en D que satisface la condición inicial en (3.1) y sea $\psi(x)$ su eigenfunción correspondiente normalizada tal que $\int_D \psi(x)dx = 1$. Por las referencias dadas en el capítulo anterior sabemos que $\lambda_1 > 0$ y $\psi(x)$ es estrictamente positiva en D. El siguiente resultado nos permite obtener una cota superior para el tiempo de explosión de $v(t,x)$.

Observación 3.6. *En adelante, cuando usemos el valor λ_1 nos referimos al eigenvalor que acabamos de definir.*

Proposición 3.2. *Para cada condición inicial $f : D \to \mathbb{R}^+$, el tiempo aleatorio*

$$\tau_2 := \inf \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, \int_0^t exp\left\{ -\frac{1}{2}(2\lambda_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2)\beta s + \beta(\kappa_1 B_1(s) + \kappa_2 B_2(s)) \right\} ds \geq \frac{\langle f, \psi\rangle^{-\beta}}{\beta} \right\}, \tag{3.1}$$

es una cota superior del tiempo de explosión de la solución de (3.1).

Demostración. Buscamos mostrar que τ_2 es una cota superior del tiempo de explosión T de la solución $v(t,x)$ de (3.1). Como $\langle v(t,x), \Delta\psi\rangle = \langle v(t,x), -\lambda_1\psi\rangle = -\lambda_1\langle v(t,x), \psi\rangle$ pues ψ es eigenfunción con eigenvalor λ_1. Así, tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle v(t,x),\psi\rangle &= \langle f,\psi\rangle + \int_0^t \langle v(s,x),\Delta\psi\rangle ds - \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x),\psi\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t \langle e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} G(e^{\{\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)\}} v(s,x)),\psi\rangle ds \\
&= \langle f,\psi\rangle - \lambda_1 \int_0^t \langle v(s,x),\psi\rangle ds - \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x),\psi\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} \langle G(e^{\{\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)\}} v(s,x)),\psi\rangle ds \\
&= \langle f,\psi\rangle - \frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x),\psi\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} \langle G(e^{\{\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)\}} v(s,x)),\psi\rangle ds.
\end{aligned}
$$

Usando la propiedad $G(z) \geq z^{1+\beta}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle v(t,x),\psi\rangle &= \langle f,\psi\rangle - \frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x),\psi\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} \langle G(e^{\{\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)\}} v(s,x)),\psi\rangle ds \\
&\geq \langle f,\psi\rangle - \frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x),\psi\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} \langle \left[e^{\{\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)\}} v(s,x)\right]^{1+\beta},\psi\rangle ds \\
&= \langle f,\psi\rangle - \frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x),\psi\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t e^{\{-\kappa_1 B_1(s)-\kappa_2 B_2(s)\}} \left[e^{\{\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)\}}\right]^{1+\beta} \langle v(s,x)^{1+\beta},\psi\rangle ds \\
&= \langle f,\psi\rangle - \frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x),\psi\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t e^{\{\beta[\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)]\}} \langle v(s,x)^{1+\beta},\psi\rangle ds. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Recordando que $\int_D \psi(x)dx = 1$ y utilizando la desigualdad de Jensen tenemos lo siguiente

$$\langle [v(t,x)]^{1+\beta}, \psi\rangle = \int_D [v(t,x)]^{1+\beta}\psi(x)dx \geq \left[\int_D [v(t,x)]\psi(x)dx\right]^{1+\beta} = \langle v(t,x), \psi\rangle^{1+\beta}, \tag{3.3}$$

donde integramos respecto de la medida $\psi(x)dx$ para hacer uso de la desigualdad de Jensen. Por (3.2) y (3.3) resulta que

$$\begin{aligned}
\langle v(t,x), \psi\rangle &\geq \langle f, \psi\rangle - \frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x), \psi\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t e^{\{\beta[\kappa_1 B_1(s) + \kappa_2 B_2(s)]\}}\langle v(s,x)^{1+\beta}, \psi\rangle ds \\
&\geq \langle f, \psi\rangle - \frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}\int_0^t \langle v(s,x), \psi\rangle ds \\
&\quad + \int_0^t e^{\{\beta[\kappa_1 B_1(s) + \kappa_2 B_2(s)]\}}\langle v(s,x), \psi\rangle^{1+\beta} ds. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Consideremos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
&\frac{dh}{dt} = -\frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}h(t) + e^{\{\beta[\kappa_1 B_1(t) + \kappa_2 B_2(t)]\}}h(t)^{1+\beta}, \qquad t > 0, \\
&h(0) = \langle f, \psi\rangle. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Notemos que ésta es de nueva cuenta una ecuación de Bernoulli, i.e., es de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$. Sean $a = \frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}$, $\beta_1(t) = \kappa_1 B_1(t)$, $\beta_2(t) = \kappa_2 B_2(t)$ entonces (3.5) se convierte en

$$\begin{aligned}
&\frac{dh}{dt} = -ah(t) + e^{\beta[\beta_1(t) + \beta_2(t)]}h(t)^{1+\beta}, \qquad t > 0, \\
&h(0) = \langle f, \psi\rangle. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Resolviendo como una ecuación de Bernoulli hacemos

$$g(t) = h(t)^{1-(1+\beta)} = h(t)^{-\beta} \implies \frac{dg}{dt} = -\beta h(t)^{-(1+\beta)}\frac{dh}{dt}. \tag{3.7}$$

De lo anterior se sigue

$$
\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} = -ah(t) + e^{\beta[\beta_1(t)+\beta_2(t)]}h(t)^{1+\beta} &\implies \frac{dh}{dt} + ah(t) = e^{\beta[\beta_1(t)+\beta_2(t)]}h(t)^{1+\beta} \\
\implies \frac{dh}{dt}h(t)^{-(1+\beta)} + ah(t)^{-\beta} = e^{\beta[\beta_1(t)+\beta_2(t)]} &\implies -\beta h(t)^{-(1+\beta)}\frac{dh}{dt} - \beta ah(t)^{-\beta} = -\beta e^{\beta[\beta_1(t)+\beta_2(t)]} \\
\therefore \frac{dg}{dt} - \beta ag(t) = -\beta e^{\beta[\beta_1(t)+\beta_2(t)]}. & \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Hemos reducido la ecuación a una ecuación lineal de primer orden y procedemos a resolverla usando factor integrante. Identificando los factores en la ecuación lineal general de primer orden $\frac{dg}{dt} + p(t) = q(t)$ tenemos

$$p(t) = -\beta a, \quad q(t) = -\beta e^{\beta[\beta_1(t)+\beta_2(t)]}, ;$$

esto nos da el factor integrante

$$\mu(t) = e^{-\int(\beta a)dt} = e^{-\beta at}.$$

De esto se sigue

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[e^{-\beta at}g(t)\right] &= -\beta e^{\beta[\beta_1(t)+\beta_2(t)]}e^{-\beta at} \\
\implies e^{-\beta at}g(t) - g(0) &= \int_0^t -\beta e^{\beta[\beta_1(s)+\beta_2(s)]}e^{-\beta as}ds \\
\implies e^{-\beta at}g(t) &= g(0) - \int_0^t \beta e^{\beta[\beta_1(s)+\beta_2(s)]}e^{-\beta as}ds \\
\implies g(t) &= e^{\beta at}\left[g(0) - \beta\int_0^t e^{\beta[\beta_1(s)+\beta_2(s)]}e^{-\beta as}ds\right] \\
\therefore g(t) &= e^{\beta at}\left[\langle f,\psi\rangle^{-\beta} - \beta\int_0^t e^{\beta[\beta_1(s)+\beta_2(s)]}e^{-\beta as}ds\right]. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Así (3.9) es solución de (3.8). Regresando a $h(t)$ por la definición de $g(t)$ como en (3.7) tenemos

$$
\begin{aligned}
h(t)^{-\beta} &= e^{\beta a t}\left[\langle f,\psi\rangle^{-\beta} - \int_0^t \beta e^{\beta[\beta_1(s)+\beta_2(s)]} e^{-\beta a s} ds\right] \\
\implies h(t) &= e^{-at}\left[\langle f,\psi\rangle^{-\beta} - \int_0^t \beta e^{\beta[\beta_1(s)+\beta_2(s)]} e^{-\beta a s} ds\right]^{-\frac{1}{\beta}} \\
\therefore h(t) &= e^{\left\{-\left(\frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\right)t\right\}}\left[\langle f,\psi\rangle^{-\beta} - \beta\int_0^t e^{\left\{-\beta s\left(\frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\right)+\beta[\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)]\right\}} ds\right]^{-\frac{1}{\beta}}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Para que $h(t)$ explote se requiere que

$$
\begin{aligned}
\langle f,\psi\rangle^{-\beta} - \beta\int_0^t e^{\left\{-\beta s\left(\frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\right)+\beta[\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)]\right\}} ds &= 0 \\
\therefore \frac{\langle f,\psi\rangle^{-\beta}}{\beta} &= \int_0^t e^{\left\{-\beta s\left(\frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{2}\right)+\beta[\kappa_1 B_1(s)+\kappa_2 B_2(s)]\right\}} ds.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Ahora podemos definir el tiempo de explosión de $h(t)$, τ_2, como en (3.1). Así, sabemos que si $\tau_2 < \infty$ entonces $h(t)$ explota al tiempo $t = \tau_2$. Por otro lado, usamos (3.4) para ver que $h(t)$ es una subsolución de (3.1)

$$\langle v(t,x),\psi\rangle \geq h(t).$$

Si T es el tiempo de explosión de $v(t,x)$ entonces $T \leq \tau_2$ pues $v(t,x)$ explota antes que $h(t)$, es decir, antes del tiempo τ_2. □

Observación 3.7. *Debido a que pedimos $\int_D \psi(x)dx = 1$, de explotar $\langle v(t,x),\psi\rangle = \int_D v(t,x)\psi(x)dx$ se sigue que $v(t,x)$ es quien explota.*

Observación 3.8. *Dado que $v(t,x)$, $u(t,x)$ tienen el mismo tiempo de explosión por la relación (3.3) resulta que τ_2 es cota superior del tiempo de explosión de $u(t,x)$.*

Observación 3.9. *Como $(B_1(t), B_2(t))$ es un movimiento browniano bidimensional, el proceso $\kappa_1 B_1(t)+\kappa_2 B_2(t)$ es un proceso gaussiano con covarianza $(\kappa_1^2+\kappa_2^2)\min\{s,t\}$. Este resultado se obtiene usando las propiedades del movimiento browniano y el hecho de que $B_1(t), B_2(t)$ son independientes*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\kappa_1^2 B_1(t)B_1(s)] &= \kappa_1^2\mathbb{E}[B_1(t)B_1(s)] = \kappa_1^2 \operatorname{mín}\{s,t\},\\
\mathbb{E}[\kappa_2^2 B_1(t)B_1(s)] &= \kappa_2^2\mathbb{E}[B_1(t)B_1(s)] = \kappa_2^2 \operatorname{mín}\{s,t\},\\
\mathbb{E}[\kappa_1\kappa_2 B_1(t)B_2(s)] &= \kappa_1\kappa_2\mathbb{E}[B_1(t)B_2(s)] = \kappa_1\kappa_2\mathbb{E}[B_1(t)]\mathbb{E}[B_2(s)] = 0,\\
\mathbb{E}[\kappa_1\kappa_2 B_s(t)B_2(t)] &= \kappa_1\kappa_2\mathbb{E}[B_1(s)B_2(t)] = \kappa_1\kappa_2\mathbb{E}[B_1(t)]\mathbb{E}[B_2(s)] = 0,\\
\mathbb{E}[\kappa_1 B_1(t) + \kappa_2 B_2(t)] &= 0,\\
\mathbb{E}[\kappa_1 B_1(s) + \kappa_2 B_2(s)] &= 0.
\end{aligned}$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned}
&Cov(\kappa_1 B_1(t) + \kappa_2 B_2(t), \kappa_1 B_1(s) + \kappa_2 B_2(s))\\
&= \mathbb{E}[(\kappa_1 B_1(t) + \kappa_2 B_2(t))(\kappa_1 B_1(s) + \kappa_2 B_2(s))] - \mathbb{E}[(\kappa_1 B_1(t) + \kappa_2 B_2(t))]\mathbb{E}[(\kappa_1 B_1(s) + \kappa_2 B_2(s))]\\
&= (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \operatorname{mín}\{s,t\}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

A continuación damos un teorema que nos permite conocer la distribución del tiempo τ_2.

Teorema 3.1. *Para cada condición inicial $f : D \to \mathbb{R}^+$ existe $\alpha_2 > 0$ tal que*

$$\mathbb{P}(\tau_2 = \infty) = \mathbb{P}(2\langle f, \psi\rangle^{\beta} \leq \beta(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)X_{\alpha_2}), \qquad (3.13)$$

donde X_{α_2} es una v.a. con distribución $\Gamma(\alpha_2, 1)$. Más aún, se tiene

$$\alpha_2 = \frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\beta(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}. \qquad (3.14)$$

Demostración. Por la definición de τ_2 en (3.1) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_2 = \infty) &= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\left\{-\beta s\left(\frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}\right) + \beta[\kappa_1 B_1(s) + \kappa_2 B_2(s)]\right\}} ds \leq \frac{\langle f, \psi\rangle^{-\beta}}{\beta}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\left\{-\beta s\left(\frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}\right) + \beta\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}B(s)\right\}} ds \leq \frac{\langle f, \psi\rangle^{-\beta}}{\beta}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\left\{-\beta s\left(\frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{2}\right) + 2B\left(\frac{1}{4}\beta^2[\kappa_1^2 + \kappa_2^2]s\right)\right\}} ds \leq \frac{\langle f, \psi\rangle^{-\beta}}{\beta}\right), \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

donde $B(s)$ denota un movimiento browniano unidimensional que empieza en 0. Usando las propiedades de la distribución normal podemos ver que los siguientes procesos tienen la misma distribución

$$\begin{aligned}
&\beta[\kappa_1 B_1(s) + \kappa_2 B_2(s)] \sim N(0, \beta^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)s),\\
&2B\left(\frac{1}{4}\beta^2[\kappa_1^2 + \kappa_2^2]s\right) \sim N(0, \beta^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)s),\\
&\beta\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}B(s) \sim N(0, \beta^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)s).
\end{aligned}$$

De esta manera las igualdades en (3.15) resultan ciertas. Ahora bien, sea $t = \frac{1}{4}\beta^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)s$ tenemos y $ds = \frac{4}{\beta^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)}dt$. Sustituyendo en (3.15) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_2 = \infty) &= \mathbb{P}\left(\frac{4}{\beta^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}\int_0^\infty e^{\left\{-2\left(\frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)}\right)t+2B(t)\right\}}dt \leq \frac{\langle f, \psi\rangle^{-\beta}}{\beta}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{4}{\beta^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}\int_0^\infty e^{\left\{2\left(-\frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)}t+B(t)\right)\right\}}dt \leq \frac{\langle f, \psi\rangle^{-\beta}}{\beta}\right), \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

si hacemos $\alpha_2 = \frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)}$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_2 = \infty) &= \mathbb{P}\left(\frac{4}{\beta^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}\int_0^\infty e^{\{2(B(t)-\alpha_2 t)\}}dt \leq \frac{\langle f, \psi\rangle^{-\beta}}{\beta}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\{2(B(t)-\alpha_2 t)\}}dt \leq \frac{\beta(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)\langle f, \psi\rangle^{-\beta}}{4}\right); \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Como $\lambda_1 > 0, \beta > 0, \kappa_1 \neq 0$ y $\kappa_2 \neq 0$ tenemos que $\alpha_2 > 0$. Es posible entonces aplicar el teorema 1.14. Así,

$$\int_0^\infty exp\{2[B(s) - \alpha_2 t]\}dt,$$

tiene la misma ley que $\dfrac{1}{2X_{\alpha_2}}$ donde $X_{\alpha_2} \sim \Gamma(\alpha_2, 1)$. Retomando (3.17) tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_2 = \infty) &= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{\{2(B(t)-\alpha_2 t)\}} dt \leq \frac{\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)\langle f, \psi\rangle^{-\beta}}{4}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2X_{\alpha_2}} \leq \frac{\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)\langle f, \psi\rangle^{-\beta}}{4}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(2\langle f, \psi\rangle^{\beta} \leq \beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2) X_{\alpha_2}\right). \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

□

Observación 3.10. *El teorema 3.1 ofrece una estimación de la probabilidad de explosión en tiempo finito para la solución $u(t,x)$ para (3.1):*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_2 < \infty) &= 1 - \mathbb{P}(\tau_2 = \infty) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{2}{\beta^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)X_{\alpha_2}} \leq \frac{1}{\beta}\langle f, \psi\rangle^{-\beta}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(Y_2 \leq \frac{1}{\beta}\langle f, \psi\rangle^{-\beta}\right) \\
&= \int_{\frac{1}{\beta}\langle f,\psi\rangle^{-\beta}}^{\infty} f_{Y_2}(x) dx, \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

donde Y_2 sigue una distribución $\Gamma\left(\frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)}, \frac{2}{\beta^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)}\right)$. Ahora bien, si $h(t)$ explota, como $h(t) \leq \langle v(t,x), \psi\rangle$ se sigue que $v(t,x)$ -por lo tanto $u(t,x)$- ha explotado. Entonces

$$
\mathbb{P}(\tau_2 < \infty) \leq \mathbb{P}(T < \infty). \qquad (3.20)
$$

Se ha encontrado una cota inferior para la probabilidad de explosión de $u(t,x)$ en tiempo finito.

Observación 3.11. *De (3.18) tenemos lo siguiente*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_2 = \infty) &= \mathbb{P}\left(2\langle f, \psi\rangle^{\beta} \leq \beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)X_{\alpha_2}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)X_{\alpha_2} < 2\langle f, \psi\rangle^{\beta}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)X_{\alpha_2} \leq 2\langle f, \psi\rangle^{\beta}\right) \\
&= 1 - F_{X_2}\left(2\langle f, \psi\rangle^{\beta}\right),
\end{aligned} \qquad (3.21)
$$

donde X_2 es una v.a. con distribución $\Gamma\left(\frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)}, \beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)\right)$.

Observación 3.12. *El caso $\kappa_2 = 0$ ó $\kappa_1 = 0$ es un caso particular que nos remite al capítulo 2, aquí el resultado del teorema 3.1 se convierte en el resultado ya obtenido en la observación 2.10, a saber,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_1 = \infty) &= \mathbb{P}(2\langle f, \psi\rangle^{\beta} \leq \beta\kappa_1^2 X_{\alpha_1}), \qquad X_{\alpha_1} \sim \Gamma(\alpha_1, 1),\\ &= 1 - F_{X_1}\left(2\langle f, \psi\rangle^{\beta}\right), \qquad X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta\kappa_1^2),\end{aligned}$$

donde

$$\alpha_1 := \frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2}{\beta\kappa_1^2}, \tag{3.22}$$

$$\tau_1 := \text{ínf}\left\{ t \geq 0 \,\middle|\, \int_0^t e^{-(\lambda_1 + \kappa^2/2)\beta s + \kappa\beta B(s)} ds \geq \frac{1}{\beta}\langle v(0,x), \psi\rangle^{-\beta} \right\}. \tag{3.23}$$

3.4. Comparando las estimaciones de la probabilidad de explosión en tiempo finito

Para esta última sección nuestro objetivo es realizar una comparación de las estimaciones sobre la probabilidad de explosión en tiempo finito que ofrecen τ_1 y τ_2. Antes de mostrar este resultado proporcionamos el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sean las v.a. X_i con distribución correspondiente $\Gamma(\alpha_i, \beta_i)$ $i \in \{1, 2\}$, donde definimos*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2}{\beta\kappa_1^2}, & \alpha_2 &:= \frac{2\lambda_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\beta(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)},\\ \beta_1 &:= \beta\kappa_1^2, & \beta_2 &:= \beta(\kappa_1^2 + \kappa_2^2),\\ \tilde{\Gamma} &:= \frac{\Gamma(\alpha_2)\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\beta_1^{\alpha_1}}, & \tilde{\beta} &:= \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Además, sea f_{X_i} la función de densidad correspondiente a X_i. Definamos la función

$$g(x) := \frac{f_{X_1}(x)}{f_{X_2}(x)}, \qquad x > 0. \tag{3.2}$$

Entonces se tiene que $g(x)$ es creciente en $(0, 2\lambda_1)$ y decreciente en $(2\lambda_1, \infty)$.

Demostración. Sean $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta_i), i = 1, 2$ v.a. con funciones de densidad

$$f_{X_1}(x) \;= \frac{x^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)\beta_1^{\alpha_1}} e^{-\frac{x}{\beta_1}}, \quad f_{X_2}(x) \;= \frac{x^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)\beta_2^{\alpha_2}} e^{-\frac{x}{\beta_2}}.$$

Sea

$$g(x) = \frac{f_{X_1}(x)}{f_{X_2}(x)}, \qquad x > 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\dfrac{x^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)\beta_1^{\alpha_1}} e^{-\frac{x}{\beta_1}}}{\dfrac{x^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)\beta_2^{\alpha_2}} e^{-\frac{x}{\beta_2}}} = \frac{x^{\alpha_1-1} e^{-\frac{x}{\beta_1}} \Gamma(\alpha_2)\beta_2^{\alpha^2}}{x^{\alpha_2-1} e^{-\frac{x}{\beta_2}} \Gamma(\alpha_1)\beta_1^{\alpha^1}} = x^{\alpha_1-\alpha_2} e^{-\frac{x}{\beta_1}+\frac{x}{\beta_2}} \tilde{\Gamma} \\ &= x^{\alpha_1-\alpha_2} e^{\left\{-x\left(\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{\beta_2}\right)\right\}} \tilde{\Gamma} = x^{\alpha_1-\alpha_2} e^{-x\tilde{\beta}} \tilde{\Gamma}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} = \frac{1}{\beta\kappa_1^2} - \frac{1}{\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)} = \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\beta\kappa_1^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)} - \frac{\kappa_1^2}{\beta\kappa_1^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)} \\ &= \frac{\kappa_2^2}{\beta\kappa_1^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)} > 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= \frac{2\lambda_1+\kappa_1^2}{\beta\kappa_1^2} - \frac{2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\beta(\kappa_1^2+\kappa_2^2)} = \frac{(\kappa_1^2+\kappa_2^2)(2\lambda_1+\kappa_1^2)}{\beta\kappa_1^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)} - \frac{\kappa_1^2(2\lambda_1+\kappa_1^2+\kappa_2^2)}{\beta\kappa_1^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)} \\ &= \frac{2\lambda_1\kappa_2^2}{\beta\kappa_1^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)} = 2\lambda_1\left[\frac{\kappa_2^2}{\beta\kappa_1^2(\kappa_1^2+\kappa_2^2)}\right] = 2\lambda_1\tilde{\beta} > 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por (3.3), (3.4) y (3.5) resulta que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0. \tag{3.6}$$

Veamos ahora que $g(x)$ tiene un máximo en $x = 2\lambda_1$; usando el criterio de la derivada tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx} &= \frac{d}{dx}\tilde{\Gamma}x^{2\lambda_1\tilde{\beta}}e^{-\tilde{\beta}x} = 2\lambda_1\tilde{\beta}\tilde{\Gamma}x^{2\lambda_1\tilde{\beta}-1}e^{-\tilde{\beta}x} - \tilde{\beta}e^{-\tilde{\beta}x}\tilde{\Gamma}x^{2\lambda_1\tilde{\beta}} \\ &= \tilde{\beta}\tilde{\Gamma}x^{2\lambda_1\tilde{\beta}-1}e^{-\tilde{\beta}x}[2\lambda_1 - x]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Para que la derivada sea igual a 0 se tiene $x = 0$ o $x = 2\lambda_1$ pero $0 \notin Dom\{g(x)\}$ por lo que tomamos $x = 2\lambda_1$, donde $\lambda_1 > 0$ pues es un eigenvalor. Así, $g(x)$ tiene un punto crítico en $2\lambda_1$. Para comprobar que en este punto se alcanza el máximo calculamos la segunda derivada.

$$\frac{d^2}{dx^2}g(x) = -\tilde{\Gamma}\tilde{\beta}x^{2\lambda_1\tilde{\beta}-1}e^{-\tilde{\beta}x} + [2\lambda_1 - x]\frac{d}{dx}\left[\tilde{\Gamma}\tilde{\beta}x^{2\lambda_1\tilde{\beta}-1}e^{-2\tilde{\beta}x}\right], \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{dx^2}g(x)\right|_{x=2\lambda_1} &= -\tilde{\Gamma}\tilde{\beta}(2\lambda_1)^{2\lambda_1\tilde{\beta}-1}e^{-\tilde{\beta}2\lambda_1} + [2\lambda_1 - 2\lambda_1]\frac{d}{dx}\left[\tilde{\Gamma}\tilde{\beta}(2\lambda_1)^{2\lambda_1\tilde{\beta}-1}e^{-2\tilde{\beta}2\lambda_1}\right] \\ &= -\tilde{\Gamma}\tilde{\beta}(2\lambda_1)^{2\lambda_1\tilde{\beta}-1}e^{-\tilde{\beta}2\lambda_1} + 0 = -\tilde{\Gamma}\tilde{\beta}(2\lambda_1)^{2\lambda_1\tilde{\beta}-1}e^{-\tilde{\beta}2\lambda_1} < 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

de esto se sigue que $g(x)$ tiene un máximo en $x = 2\lambda_1$.

Por (3.7) tenemos los siguientes casos

Caso 1. $x \in (0, 2\lambda_1)$

Si $x \in (0, 2\lambda_1)$ entonces $2\lambda_1 - x > 0$ por lo que $g'(x) > 0$. De esto se sigue que $g(x)$ es creciente en $(0, 2\lambda_1)$.

Caso 2. $x \in (2\lambda_1, \infty)$

Si $x \in (2\lambda_1, \infty)$ entonces $2\lambda_1 - x < 0$ por lo que $g'(x) < 0$. De esto se sigue que $g(x)$ es decreciente en $(2\lambda_1, \infty)$.

□

En seguida procedemos a realizar la comparación antes mencionada. Con el siguiente teorema veremos que, de cumplirse ciertas condiciones, la ecuación (3.1) es más estable cuando se tienen los dos ruidos gaussianos.

Teorema 3.2. *Sean las v.a. X_i y las constantes $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\beta}$ definidas como en el lema 3.1. Si se cumple la condición*

$$\left[\frac{e}{2\lambda_1}\right]^{2\lambda_1\tilde{\beta}} < \tilde{\Gamma}, \tag{3.10}$$

entonces existe $x_0 > 0$ *tal que si* $2\langle f, \psi\rangle^{\beta} \geq x_0$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) > \mathbb{P}(\tau_2 < \infty). \tag{3.11}$$

Demostración. Supongamos que el máximo de $g(x)$ es mayor que 1, esto es,

$$g(2\lambda_1) = \tilde{\Gamma}(2\lambda_1)^{2\lambda_1\tilde{\beta}}e^{-\tilde{\beta}2\lambda_1} > 1 \Longleftrightarrow \tilde{\Gamma} > \frac{e^{2\lambda_1\tilde{\beta}}}{(2\lambda_1)^{2\lambda_1\tilde{\beta}}} = \left[\frac{e}{2\lambda_1}\right]^{2\lambda_1\tilde{\beta}}.$$

Por el lema 3.1, $g(x)$ es creciente en $(0, 2\lambda_1)$ y decreciente en $(2\lambda_1, \infty)$. Nótese que $g(x) > 0$ para $x > 0$ y su máximo es mayor que 1. Por Spivak [32] (teoremas 7.4 y 7.5) existen $x_1 \in (0, 2\lambda_1), x_2 \in (2\lambda_1, \infty)$ tales que $g(x_1) = g(x_2) = 1$. Además $x_1 < 2\lambda_1 < x_2$ y $x_1 \neq 2\lambda_1$, $x_2 \neq 2\lambda_1$.

Así las cosas tenemos que $g(x) < 1$ para $x \in (0, x_1)$ y también para $x \in (x_2, \infty)$. Más aún, $g(x) > 1$ en (x_1, x_2). Lo antes dicho implica lo siguiente

$$\begin{aligned}
g(x) < 1 &\implies \frac{f_{X_1}(x)}{f_{X_2}(x)} < 1 &&\implies f_{X_1}(x) < f_{X_2}(x) &&x \in (0, x_1) \cup (x_2, \infty),\\
g(x) > 1 &\implies \frac{f_{X_1}(x)}{f_{X_2}(x)} > 1 &&\implies f_{X_1}(x) > f_{X_2}(x) &&x \in (x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Sean $F_{X_1}(x)$ y $F_{X_2}(x)$ las funciones de distribución de X_1 y X_2 respectivamente, y definamos $\tilde{F}(x) := F_1(x) - F_2(x)$. Es suficiente mostrar que existe $x_0 > 0$ tal que $\tilde{F}(x) > 0$ para cualquier $x > x_0$. Notemos que $\frac{d}{dx}\tilde{F}(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Por el resultado anterior tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x) < f_{X_2}(x) &\implies f_{X_1}(x) - f_{X_2}(x) = \frac{d}{dx}\tilde{F}(x) < 0 \quad x \in (0, x_1) \cup (x_2, \infty),\\
f_{X_1}(x) > f_{X_2}(x) &\implies f_{X_1}(x) - f_{X_2}(x) = \frac{d}{dx}\tilde{F}(x) > 0 \qquad x \in (x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Entonces $\tilde{F}(x)$ es una función decreciente en el intervalo $(0, x_1) \cup (x_2, \infty)$ (tomando en cuenta que $\tilde{F}(x)$ es diferencia de funciones de distribución de probabilidad, el intervalo en el que es decreciente es $[0, x_1] \cup [x_2, \infty)$) y creciente en el intervalo (x_1, x_2). A continuación buscamos probar que $\tilde{F}(x_1) < 0$ y $\tilde{F}(x_2) > 0$.

(I) Por demostrar $\tilde{F}(x_1) < 0$.

Sabemos que si $f_{X_1}(x) < f_{X_2}(x)$ en $(0, x_1)$ entonces se sigue

$$\int_0^{x_1} f_{X_1}(x)dx < \int_0^{x_1} f_{X_2}(x)dx \implies F_{X_1}(x_1) < F_{X_2}(x_1) \implies \tilde{F}(x_1) < 0. \tag{3.14}$$

(II) Por demostrar $\tilde{F}(x_2) > 0$.

Supongamos que $\tilde{F}(x_2) \leq 0$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{F}(0) &= F_1(0) - F_2(0) = 0 - 0 = 0, \\ \lim_{x\to\infty} \tilde{F}(x) &= \lim_{x\to\infty} F_1(x) - F_2(x) = 1 - 1 = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

como $\tilde{F}(x)$ es decreciente en $[0, x_1]$ entonces para $x \in (0, x_1], \tilde{F}(x) < 0$. Ahora, si $\tilde{F}(x_2) \leq 0$, no puede ser que se cumpla $\lim_{x\to\infty} \tilde{F}(x) = 0$ pues $\tilde{F}(x)$ es decreciente en $[x_2, \infty)$. Hemos llegado a una contradicción.

Por lo anterior, se debe cumplir que $\tilde{F}(x_2) > 0$. Por Spivak [32] teorema 7.1 como $\tilde{F}(x)$ es continua en $[x_1, x_2]$ existe $x_0 \in [x_1, x_2]$ tal que $\tilde{F}(x_0) = 0$. Más aún, no puede ser x_1 ni x_2, por lo que $x_0 \in (x_1, x_2)$.

Se tiene que $x_0 > 0$; por la continuidad de $\tilde{F}(x)$, para $x > x_0$ tenemos que $\tilde{F}(x) > 0$. Para concluir, si se cumple $2\langle f, \psi\rangle^\beta \geq x_0$ entonces obtenemos el resultado deseado

$$\begin{aligned} & \tilde{F}(2\langle f, \psi\rangle^\beta) > 0 \\ \implies & F_{X_1}(2\langle f, \psi\rangle^\beta) - F_{X_2}(2\langle f, \psi\rangle^\beta) > 0 \\ \implies & F_{X_1}(2\langle f, \psi\rangle^\beta) > F_{X_2}(2\langle f, \psi\rangle^\beta) \\ & \therefore \mathbb{P}(\tau_1 < \infty) > \mathbb{P}(\tau_2 < \infty) \end{aligned}$$

□

Observación 3.13. *La relación entre τ_1 y τ_2 nos dice que si añadimos el ruido adecuado, el tiempo de vida del sistema puede ser prolongado en cierto sentido. En otras palabras, podemos saber en qué condiciones el ruido adicional $dB_2(t)$ tiene un efecto benéfico en el sistema explosivo* (3.1). *Esto es, en el sentido probabílistico, cuándo el segundo ruido retrasa el tiempo de explosión de la solución $u(t, x)$.*

Bibliografía

[1] B. Bergé, I.D. Chueshov, P. Vuillermot, On the behaviour of solutions to certain parabolic SPDE'S driven by Wiener processes, Stochastic Process. Appl. 92(2001) 237-263.

[2] P.L. Chow, Nonlinear stochastic wave equations: blow-up of second moments in L^2-norm, Ann. Appl. Probab. 19(6)(2009)2039-2046.

[3] P.L. Chow, Stochastic Partial Differential Equations, in: Advances in Applied Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 2015.

[4] K. Chung, Z. Zhao, From Brownian Motion to Schrödinger's Equation, in: A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[5] E.B. Davies, Heat Kernels and Spectral Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[6] L. Denis, A. Matoussi, L. Stoica, L^p estimates for the uniform norm of solutions of quasilinear SPDE'S, Probab. Theory Related Fields 133 (4) (2005) 437-463.

[7] C. Donati-Martin, E. Pardoux, White noise driven SPDEs with reflection, Probab. Theory Related Fields 95(1)(1993)1-24.

[8] M. Dozzi, J.A. López-Mimbela, Finite time blowup and existence of global positive solutions of a semi-linear SPDE, Stochastic Process. Appl. 120(6)(2010)767-776.

[9] D. Dufresne, The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding, Scand. Actuar. J. (1-2) (1990) 39-79.

[10] R. Durrett, Stochastic Calculus: A Practical Introduction, in: Probability and Stochastics Series, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[11] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[12] H. Fujita, On some nonexistence and nonuniqueness theorems of non linear parabolic equations, en: Nonlinear Functional Analysis, Providence, R.I.,1970, Proc. Sympos. Pure Math. 18(1) (1968) 105-113.

[13] I. Gyöngy, C. Rovira, On L^p-solutions of semilinear stochastic partial differential equations, Stochastic Process. Appl. 90(1)(2000) 93-108.

[14] I. Karatzas, S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, in: Graduate Texts in Mathematics, vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991.

[15] S. Karlin, H. Taylor, A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, New York, 1975.

[16] F.C. Klebaner, Introduction to Stochastic Calculus with Applications, second edition, Imperial College Press, London, 2005.

[17] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis With Applications, John Wiley & Sons, United States, 1978.

[18] J. Le Gall, Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus, in: Graduate Text in Mathematics, vol. 274, Springer-Verlag, Switzerland, 2016.

[19] J.A. López-Mimbela, N. Privault, Blow-up and stability of semilinear PDEs with gamma generators, J. Math. Anal. Appl. 307(1)(2005)181-205.

[20] R. Manthey, T. Zausinger, Stochastic evolution equations in $L_\rho^{2\nu}$, Stoch. Rep. 66 (1999) 37-85.

[21] H. Matsumoto, M. Yor, Exponential functionals of Brownian motion, I, Probability laws at fixed time, Probab. Surv. 2(2005)312-347.

[22] R. Mikulevicius, H. Pragarauskas, On Cauchy-Dirichlet problem for parabolic quasilinear SPDEs, Potential Anal. 25(1)(2006) 37-75.

[23] C. Mueller, The critical parameter for the heat equation with a noise term to blow-up in finite time, Ann. Probab. 28(4)(2000)1735-1746.

[24] M. Niu, B. Xie, Impacts of Gaussian noises on the blow-up times of nonlinear stochastic partial differential equations, Nonlinear Analysis: Real World Applications 13(3)(2012), 1346-1352.

[25] B. Øksendal, Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[26] E.M. Ouhabaz, F.Y. Wang, Sharp estimates for intrinsic ultracontractivity on $C^{1,\alpha}$-domains, Manuscripta Math. 122(2)(2007)229-244.

[27] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, in: Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[28] D. Revuz, M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion, third ed., in: Fundamental Principles of Mathematical Sciences, vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999,xiv+602.

[29] L. Rincón, Introducción a los Procesos Estocásticos, Facultad de Ciencias/UNAM, México, 2013.

[30] S. Ross, Stochastic Processes, John Wiley & Sons, United States, 1996.

[31] T. Shiga, Two contrasting properties of solutions for one-dimensional stochastic partial differential equations, Canad. J. Math. 46(2)(1994)415-437.

[32] M. Spivak, Cálculo infinitesimal, Reverté, España, 2012.

[33] G. Teschl, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, in: Graduate Studies in Mathematics, vol. 140, American Mathematical Society, United States, 2012.

[34] C. Tudor, Procesos Estocásticos, Sociedad Matemática Mexicana, México, 1994.

[35] B. Xie, The moment and almost surely exponential stability of stochastic heat equations, Proc. Amer. Math. Soc. 136(10)(2008)3627-3634.

[36] M. Yor, Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes, in: Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2001.