Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

Una introducción al modelo lorentziano del espacio hiperbólico n-dimensional.

TESIS

que para obtener el título de

MATEMÁTICO

presenta

Diego Francisco Pérez Sánchez

Director del trabajo:

Dr. Antonio Lascurain Orive

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Una introducción al modelo lorentziano del espacio hiperbólico n-dimensional.

Diego Francisco Pérez Sánchez

4 de octubre de 2018

Introducción

El n-espacio Lorentziano es una estructura de gran relevancia en la física contemporanea; el 4-espacio Lorentziano, sirve como modelo para el espacio-tiempo en la teoría de la relatividad especial, éste fue propuesto por Minkowsky [4]. Penrose [5] discute la relación entre el grupo de Lorentz y la teoría de la relatividad. Esta geometría del espacio Lorentziano de dimensión 4 fue presentada por Poincaré [6] como modelo para el espacio-tiempo en su estudio acerca de la dinámica del electrón.

El modelo del hiperboloide surge de manera *bona fide* en el espacio lorentziano como los vectores tiempo de norma i, es decir, los de curvatura -1. Thurston presenta sin pruebas algunos resultados de este importante modelo del espacio hiperbólico n-dimensional en sus notas [8]. Posteriormente, Levy [9] expone una parte de estas notas. Todos esos trabajos son una herramienta para presentar sus resultados de hiperbolización de las 3-variedades, lo cual coadyuvó a que obtuviera la medalla Fields.

La geometría rígida, que se enriquece al relacionar distintos modelos del espacio hiperbólico n-dimensional, se vuelve una útil herramienta para entender las posibles formas del espacio tridimensional en que vivimos, variedades que en la mayoría de los casos son hiperbólicas [1].

En esta tesis, basada principalmente en el libro de Ratcliffe [7] se presenta en primera instancia el espacio Lorentziano como $\mathbb{R}^{n+1}$ particionado en tres subespacios definitorios: tiempo, luz y espacio. Esto mediante la forma bilineal $x \circ y = -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Se introducen las transformaciones de Lorentz y se prueba que una función es de Lorentz si y sólo si es lineal y manda los vectores canónicos en una base (Teorema 2.2.1). Se caracteriza a las matrices lorentzianas usando la matriz

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

mostrando que sus columnas y renglones son Lorentz ortonormales entre sí

(Teorema 2.2.3). Se observa que un vector ortogonal a un vector tiempo es un vector espacio (Teorema 2.2.4) y se demuestra que la acción del grupo positivo de Lorentz es transitiva en los subespacios vectoriales de tipo tiempo de la misma dimensión (Teorema 2.2.5).

Se define el ángulo tiempo lorentziano entre dos vectores tiempo x, y por medio de la identidad $x \circ y = \|x\| \, \|y\| \cosh \eta(x, y)$ (Definición 13) y se define la distancia en términos de éste, gracias a lo cual, se puede obtener una fórmula simple para la distancia hiperbólica: $\cosh d_H(x, y) = -x \circ y$. Definiendo el producto cruz lorentziano se obtienen propiedades análogas a las del producto cruz euclidiano, lo que permite probar que la fórmula presentada define una métrica. El punto no trivial es la desigualdad del triángulo (Teorema 3.2.1); en esta prueba se usa la transitividad de los subespacios tiempo. Se prueba también que toda isometría hiperbólica está determinada por una transformación de Lorentz (Teorema 3.2.2). Uno de los teoremas mas importantes de esta tesis describe a las geodésicas en términos de parametrizaciones por hipérbolas generadas por coordenadas -*ad hoc*- al espacio hiperbólico (y parejas de vectores Lorentz ortonormales), es decir, en términos de senos y cosenos hiperbólicos haciendo uso de las ecuaciones diferenciales (Teorema 3.3.2).

Al final de esta tesis se prueban cuatro interesantes teoremas que relacionan la métrica hiperbólica con el ámbito del espacio de Lorentz. Uno de ellos establece que si dos vectores espacio generan un espacio de tipo tiempo, entonces sus complementos Lorentz ortonormales en el hiperboloide son ajenos, y existe una geodésica Lorentz ortogonal común a ambos (teorema 4.1.3). Un resultado afín a este teorema, muestra *a grosso modo* que la distancia hiperbólica entre estos dos hiperplanos hiperbólicos está dada por el ángulo tiempo Lorentziano. Otro teorema muestra que el cono de luz representa en cierta forma, el plano al infinito (Teorema 4.1.5). Un último teorema describe los espacios tiempo generados por un vector espacio y uno tiempo mostrando que la distancia entre uno de ellos y el complemento del otro, se puede poner en términos del producto lorentziano (Teorema 4.1.8.)

Existe otro enfoque para este modelo que llega a ser más accesible, el cual consiste en partir del modelo del semiplano superior y el modelo de la bola, para transitar al modelo del hiperboloide; haciendo esto, se pueden probar varios resultados que se encuentran en esta tesis (véase [2] capítulo 3), sin embargo, este planteamiento pierde el ámbito lorentzaino y por lo tanto, muchas de sus propiedades más importantes.

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

1.1. El Producto Cruz

Se utilizarán algunos resultados sobre el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ también conocido como **el producto cruz**.

Definición 1 *Sean* $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. *El producto cruz de* x *y* y *se define como*

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

El producto cruz tiene algunas propiedades geométricas muy interesantes. El siguiente teorema muestra algunas de éstas que nos serán de gran utilidad más adelante.

Teorema 1.1.1 *Si* x, y, z, w *son vectores en* $\mathbb{R}^3$ *entonces:*

i) $x \times y = -y \times x$,

ii) $(x \times y) \cdot z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$,

iii) $(x \times y) \cdot z = x \cdot (y \times z)$,

iv) $(x \times y) \times z = (x \cdot z)y - (y \cdot z)x$,

v) $(x \times y) \cdot (z \times w) = \begin{vmatrix} x \cdot z & x \cdot w \\ y \cdot z & y \cdot w \end{vmatrix}$.

Demostración.

i) $x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$
$= -(y_2x_3 - y_3x_2, y_3x_1 - y_1x_3, y_1x_2 - y_2x_1) = -y \times x$

ii) $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = z_1(x_2y_3 - x_3y_2) - z_2(x_1y_3 - x_3y_1) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$
$$= (z_1, z_2, z_3) \cdot (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) = z \cdot (x \times y)$$

iii) Usando la propiedad *ii)* tenemos
$$(x \times y) \cdot z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (y \times z) \cdot x.$$

iv) $(x \times y) \times z = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \times (z_1, z_2, z_3)$.

Se calcula únicamente la primera entrada de este vector, las otras dos se siguen de forma análoga:

$$(x_3y_1 - x_1y_3)z_3 - (x_1y_2 - x_2y_1)z_2 = x_3y_1z_3 - x_1y_3z_3 - x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2$$
$$= (x_3z_3 + x_2z_2)y_1 - (y_3z_3 + y_2z_2)x_1 + x_1y_1z_1 - x_1y_1z_1 = (x \cdot z)y_1 - (y \cdot z)x_1.$$

v) $(x \times y) \cdot (z \times w) = ((x \times y) \times z) \cdot w = ((x \cdot z)y - (y \cdot z)x) \cdot w$
$$(x \cdot z)(y \cdot w) - (z \cdot y)(x \cdot w) = \begin{vmatrix} x \cdot z & x \cdot w \\ y \cdot z & y \cdot w \end{vmatrix}.$$

□

En los cursos elementales de geometría analítica se prueba que el producto cruz de dos vectores es un vector simultáneamente ortogonal a ambos y que su norma es igual a la magnitud del área del paralelogramo generado por ellos. En efecto, si $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \sin\theta$$

donde θ es el ángulo formado por los vectores x y y tomado en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

1.2. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

En esta sección, estudiaremos las soluciones a las ecuaciones del tipo

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

donde a_1 y a_2 son constantes. Al ser un tema que se incluye en los cursos obligatorios, no se prueban los resultados, éstos se pueden consultar, por ejemplo, en [3].

Comenzaremos planteando soluciones del tipo $\phi(x) = e^{rx}$. Se tiene que para toda x y para toda r,

$$L(e^{rx}) = (r^2 + a_1 r + a_2)e^{rx}.$$

A la funcion polinomial $p(r) = r^2 + a_1 r + a_2$, le llamaremos polinomio característico asociado a ϕ. Se sigue de manera inmediata el siguiente teorema, ya que en el caso de raíces dobles, éstas son también raíces de la derivada del polinomio característico.

Teorema 1.2.1 *Sean a_1 y a_2 constantes, y consideremos la ecuación*

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Si r_1 y r_2 son dos raíces diferentes del polinomio característico

$$p(r) = r^2 + a_1 r + a_2,$$

entonces las funciones

$$\phi_1(x) = e^{r_1 x}, \quad \phi_2(x) = e^{r_2 x},$$

son soluciones de la ecuación $L(y) = 0$. Si r_1 es una raíz doble de p, entonces las funciones

$$\phi_1(x) = e^{r_1 x}, \quad \phi_2(x) = xe^{r_1 x},$$

son soluciones de $L(y) = 0$.

En virtud del Teorema Fundamental del Álgebra y del Teorema 1.2.1, las soluciones de $L(y) = 0$ siempre existen. Nos interesa conocer las soluciones a la ecuación, dadas ciertas condiciones iniciales, esto es, para algún número real x_0 y α y β dos constantes dadas, buscamos una función y que satisfaga las condiciones:

$$L(y) = 0 \quad y(x_0) = \alpha \quad y'(x_0) = \beta$$

El siguiente resultado, cuya prueba se puede consultar en [3], pp. 71-72, muestra que esto se puede lograr.

Teorema 1.2.2 *Para cualquier x_0 real y las condiciones inicales α, β, existe una solución ϕ de la ecuación con las condiciones iniciales*

$$\phi(x_0) = \alpha \quad \phi'(x_0) = \beta.$$

Además, éstas soluciones son únicas, como lo muestra el siguiente teorema. Una prueba se puede consultar en [3], pp. 72-75.

Teorema 1.2.3 *Sean α, β, dos constantes cualesquiera, y sea x_0 un número real cualquiera. En cualquier intervalo I que contenga a x_0 existe a lo más una solución ϕ de la ecuación diferencial con condiciones iniciales*

$$L(y) = 0 \quad y(x_0) = \alpha \quad y'(x_0) = \beta.$$

Más aún, cualquier solución se puede obtener usando las soluciones del Teorema 1.2.1

Teorema 1.2.4 *Sean ϕ_1, ϕ_2, las dos soluciones de la ecuación $L(y) = 0$, dadas en el Teorema 1.2.1. Si c_1, c_2 son constantes cualesquiera. la función $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ es solución de la ecuación $L(y) = 0$.*

Recíprocamente, si ϕ es una solución cualquiera de la ecuación, existen constantes c_1, c_2 tales que $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.

Este Teorema muestra que todas las soluciones de la ecuación $L(y) = 0$ se pueden ver como conbinación lineal de dos soluciones particulares. Este resultado se puede extender un poco más, para lo cuál necesitamos la siguiente definición:

Definición 2 *Se dice que dos funciones ϕ_1, ϕ_2 definidas en un intervalo I son linealmente dependientes en I, si existen dos constantes c_1, c_2, no ambas nulas para las cuales se cumple la igualdad*

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = 0,$$

para toda x en I. Por otra parte, se dice que las funciones ϕ_1, ϕ_2 son linealmente independientes en I si no son linealmente dependientes ahí, es decir, si las únicas constantes c_1 y c_2 que satisfacen $c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x) = 0$ para toda x en I son $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$.

Empleando este concepto, se puede demostrar que dos soluciones linealmente independientes de $L(y) = 0$ determinan a todas las demás soluciones. Esto lo garantiza el siguiente Teorema, el cuál nos servirá más adelante.

Teorema 1.2.5 *Sean ϕ_1, ϕ_2 dos soluciones de la ecuación $L(y) = 0$ linealmente independientes en un intervalo I. Entonces cualquier solución ϕ de $L(y) = 0$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de ϕ_1 y ϕ_2.*

La importancia de este Teorema, radica en que las soluciones de la ecuación $L(y) = 0$ se pueden escribir en términos de dos soluciones linealmente independientes y no exclusivamente las dadas por el Teorema 1.2.1.

Capítulo 2

El n-espacio Lorentziano

2.1. El producto Lorentziano

Para comenzar el estudio de la geometría hiperbólica utilizando el modelo del hiperboloide, vamos a introducir un nuevo producto interior en $\mathbb{R}^n$ llamado **el producto interior Lorentziano**, el cual, nos llevará a un nuevo concepto de distancia; en particular, será posible tener distancias imaginarias.

Definición 3 *Sean x y y dos vectores en $\mathbb{R}^n$ (con $n > 1$). El* ***Producto interior Lorentziano*** *de x y y se define como:*

$$x \circ y = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Para verificar que éste es, en efecto, un producto interior, tenemos que ver que es una forma bilineal simétrica; la simetría se sigue inmediatamente de la definición, por lo que basta con verificar la linealidad en una entrada. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(x + tz) \circ y &= -(x_1 + tz_1) y_1 + \sum_{i=2}^{n} (x_i + tz_i) y_i \\
&= -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i + t \Big(-z_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} z_i y_i \Big) \\
&= x \circ y + t\,(z \circ y),
\end{aligned}$$

y por lo tanto es bilineal. Sin embargo, este producto no es definido positivo, ya que si, por ejemplo, consideramos el vector $(1, 0, \ldots, 0)$, podemos ver que el producto Lorentziano de éste consigo mismo es -1.

Al espacio $\mathbb{R}^n$ junto con el producto interior Lorentziano, se le llama **el n-espacio Lorentziano** y se denota por $\mathbb{R}^{1,n-1}$.

El producto Lorentziano puede ser naturalmente reemplazado por el producto

$$< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$$

al cual es equivalente. El espacio generado por este nuevo producto también es llamado **n-espacio Lorentziano**, pero se denota por $\mathbb{R}^{n-1,1}$. Como un ejemplo útil de este espacio, en la Teoría de la Relatividad Especial, se utiliza $\mathbb{R}^{3,1}$ como un modelo del espacio-tiempo; las primeras tres coordenadas de un vector $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ en $\mathbb{R}^{3,1}$ son las coordenadas del espacio y la última, del tiempo. En adelante trabajaremos únicamente en $\mathbb{R}^{1,n-1}$, pero por simplicidad usaremos la notación de $\mathbb{R}^n$.

Definición 4 *La norma Lorentziana de un vector en $\mathbb{R}^n$ se define como el número complejo $\|x\| = \sqrt{x \circ x}$.*

Para evitar ambigüedad en la definición anterior, vamos a establecer que $\|x\|$ es un número positivo, cero o un imaginario *positivo*. Evidentemente la norma Lorentziana no es, en sentido estricto, una norma, pero usaremos la palabra *norma* indistintamente.

Si $\|x\|$ es un número imaginario, denotaremos a su módulo por $|\|x\||$

Definición 5 *La distancia Lorentziana entre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define como el número complejo $d_L(x, y) = \|x - y\|$.*

Del mismo modo que antes, esta distancia puede ser un número positivo, cero o un imaginario *positivo*.

Definición 6 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$,*

i) Si $\|x\| = 0$ diremos que x es un vector de tipo luz o un vector luz. Diremos además que un vector de tipo luz es positivo (respectivamente negativo) (respectivamente cero), si $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$) ($x_1 = 0$).

ii) Si $\|x\| > 0$ diremos que x es un vector de tipo espacio o un vector espacio.

iii) Si $\|x\|$ es un número imaginario diremos que x es un vector de tipo tiempo o un vector tiempo. También diremos que un vector de tipo tiempo es positivo (resp. negativo), si $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$).

El conjunto de todos los vectores tipo luz de $\mathbb{R}^n$ es el hipercono definido por la ecuación

$$x_1^2 = x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

este hipercono es llamado el **cono luz de** $\mathbb{R}^n$.

Notemos que x es un vector de tipo espacio si y sólo si satisface la desigualdad

$$x_1^2 < x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

y es de tipo tiempo si y sólo si satisface la desigualdad

$$x_1^2 > x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Una manera sencilla de visualizar estas familias de vectores, es pensando en un reloj de arena infinito; el cono luz es el cristal del reloj, el tiempo es lo que se encuentra en el *interior* del cono (positivo hacia arriba y negativo hacia abajo, como el futuro y el pasado), y afuera se encuentra el espacio.

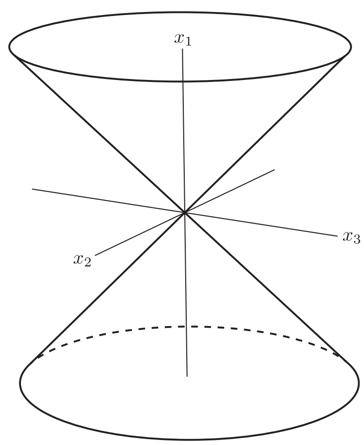

Figura 2.1: Cono luz de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos vectores tiempo positivos (negativos) y sea $t > 0$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) tx es un vector tiempo positivo (negativo).

ii) $x + y$ es un vector tiempo positivo (negativo).

Demostración. La prueba de *i)* es inmediata por la bilinealidad del producto Lorentziano, ya que

$$\|tx\|^2 = t^2 \|x\|^2 < 0;$$

además, como x es positivo y $t > 0$, entonces $tx_1 > 0$ por lo que tx también es positivo (respectivamente si x es negativo).

Para probar *ii)* debemos mostrar que $(x_1 + y_1)^2 > \sum_{i=2}^{n}(x_i + y_i)^2$

$$\begin{aligned}
(x_1 + y_1)^2 &= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 \\
&> \sum_{i=2}^{n} x_i^2 + 2\left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=2}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=2}^{n} y_i^2 \\
&\geq \sum_{i=2}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=2}^{n} x_iy_i + \sum_{i=2}^{n} y_i^2 \\
&= \sum_{i=2}^{n}(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) = \sum_{i=2}^{n}(x_i + y_i)^2
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.1.2 *El conjunto de todos los vectores tiempo positivos (resp. negativos) es convexo.*

Demostración. Si x, y son vectores tiempo positivos, los puntos en el segmento determinado por ellos son de la forma

$$(1 - t)x + ty, \qquad t \in (0, 1),$$

y por el teorema anterior, tales puntos son vectores tiempo positivos.

□

2.2. Las transformaciones de Lorentz

Definición 7 *Una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ es llamada Lorentz ortonormal si $v_1 \circ v_1 = -1$ y $v_i \circ v_j = \delta_{ij}$ en otro caso*[1].

[1]La delta de Kronecker δ_{ij} se define como 1 si $i = j$ y como 0 si $i \neq j$.

Se puede observar que una condición necesaria (aunque no suficiente) para que una base de $\mathbb{R}^n$ sea Lorentz ortonormal es que el primer vector sea de tipo tiempo y los restantes de tipo espacio. La base canónica de $\mathbb{R}^n, \{e_1, \ldots, e_n\}$ es un ejemplo de base Lorentz ortonormal.

Definición 8 *Una transformación de Lorentz es una función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$\phi(x) \circ \phi(y) = x \circ y.$$

Teorema 2.2.1 *Una función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación de Lorentz si y sólo si es lineal y $\{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$ es una base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Supongamos que ϕ es una transformación de Lorentz. Entonces

$$\forall i, j = 1, \ldots, n \quad \phi(e_i) \circ \phi(e_j) = e_i \circ e_j.$$

Para ver que $\{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$ es base de $\mathbb{R}^n$, basta con demostrar que es un conjunto linealmente independiente. Supongamos que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(e_i) = 0.$$

Para $j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(e_i) \right) \circ \phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\phi(e_i) \circ \phi(e_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i \circ e_j) = \lambda_j (e_j \circ e_j) \end{aligned}$$

y como $e_j \circ e_j \neq 0$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, n\}$, se sigue que $\lambda_j = 0$ y por lo tanto $\{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$ es linealmente independiente.

Probamos ahora que ϕ es lineal. Sea $x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, podemos escribir a $\phi(x)$ como combinación lineal de la base inducida por ϕ, esto es

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi(e_i)$$

para algunos $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Como $\{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$ es una base Lorentz ortonormal, para $j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos

$$\phi(x) \circ \phi(e_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \phi(e_i) \right) \circ \phi(e_j) = c_j(e_j \circ e_j).$$

Por otro lado

$$\phi(x) \circ \phi(e_j) = x \circ e_j.$$

Para $j = 1$ se tiene que $-x_1 = x \circ e_1 = c_1(e_1 \circ e_1) = -c_1$. Para $j > 1$ se tiene que $x_j = x \circ e_j = c_j(e_j \circ e_j) = c_j$.

De este modo

$$\phi \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i)$$

y por lo tanto ϕ es lineal.

Recíprocamente, supongamos que ϕ es lineal y que $\{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$ es una base Lorentz ortonormal. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \phi(x) \circ \phi(y) = \phi \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) \circ \phi \left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i) \right) \circ \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \phi(e_i) \right) \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\phi(e_i) \circ \phi(e_j)) &= -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x \circ y. \end{aligned}$$

□

Este teorema tiene varias consecuencias inmediatas, una de ellas es que, al ser lineales, las transformaciones de Lorentz preservan la forma cuadrática

$$q(x) = -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Esto ocurre porque tales transformaciones satisfacen lo siguiente

$$\|A(x)\|^2 = A(x) \circ A(x) = x \circ x = \|x\|^2,$$

y por lo tanto preservan la norma lorentziana.

Otra consecuencia es que las transformaciones de Lorentz son biyectivas ya que son transformaciones lineales que mandan bases en bases. Se puede ver que las transformaciones de Lorentz forman un grupo con la composición; si ϕ_1 y ϕ_2 son de Lorentz entonces

$$\phi_1(\phi_2(x)) \circ \phi_1(\phi_2(y)) = \phi_2(x) \circ \phi_2(y) = x \circ y,$$

por lo que su composición es de Lorentz. Además si ϕ es de Lorentz ϕ^{-1} es de Lorentz puesto que

$$\phi^{-1}(x) \circ \phi^{-1}(y) = \phi(\phi^{-1}(x)) \circ \phi(\phi^{-1}(y)) = x \circ y,$$

y claramente la identidad preserva el producto lorentziano. En adelante denotaremos por $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ al conjunto de matrices reales de $n \times n$.

Definición 9 *Sea $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$. Decimos que A es una matriz lorentziana si su transformación lineal asociada es de Lorentz.*

Es claro que las matrices lorentzianas forman un grupo con la multiplicación de matrices, naturalmente isomorfo al grupo de transformaciones de Lorentz. A este grupo lo denotaremos por $O(1, n-1)$. Consideremos ahora la matriz

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Lema 2.2.2 *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \circ y = x \cdot J(y)$.*

Demostración. Si $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\begin{aligned} x \cdot J(y) &= (x_1, \dots, x_n) \cdot (-y_1, \dots, y_n) \\ &= -x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = x \circ y \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.3 *Sea $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *A es una matriz lorentziana.*

ii) *Las columnas de A forman una base Lorentz ortonormal.*

iii) $A^tJA = J$.

iv) $A^{-1} = JA^tJ$.

v) $AJA^t = J$.

vi) *Los renglones de A forman una base Lorentz ortonormal.*

Demostración. La equivalencia entre *i*) y *ii*) se sigue del Teorema 2.2.1 ya que la imagen de la base canónica son las columnas de A. La equivalencia entre *iii*) y *iv*) es inmediata ya que $A^tJA = J$ si y sólo si

$$(JA^tJ)A = J(A^tJA) = J^2 = Id,$$

es decir, $A^{-1} = JA^tJ$. Análogamente, se obtiene la equivalencia entre *iv*) y *v*).

Para ver la equivalencia entre *ii*) y *iii*) notemos que el Lema 2.2.2 implica que si $a_1, \ldots, a_n$ son los vectores columna de A, entonces la entrada ij de la matriz A^tJA es $a_i \cdot J(a_j) = a_i \circ a_j$. Así, $\{a_i, \ldots, a_n\}$ es una base Lorentz ortonormal si y sólo si la entrada ij de la matriz A^tJA es -1 si $i = j = 1$ y δ_{ij} en otro caso, es decir, $A^tJA = J$. La equivalencia entre *v*) y *vi*) es análoga considerando que los renglones de A son las columnas de A^t.

□

Si A es una matriz lorentziana, por el Teorema anterior se tiene que

$$det(A^tJA) = det(J) = -1$$

lo cual implica que

$$det(A)^2 = 1$$

y por lo tanto $det(A) = 1$ o $det(A) = -1$. Denotamos por $SO(1, n-1)$ al conjunto de las matrices lorentzianas con determinante 1. Es claro que $SO(1, n-1)$ es un subgrupo de $O(1, n-1)$ de índice 2. Este conjunto es llamado **el grupo especial de Lorentz.**

Recordemos del Corolario 2.1.2 que el conjunto de los vectores tiempo tiene exactamente dos componentes conexas, la positiva y la negativa. Como las transformaciones de Lorentz son lineales, en particular son continuas y por lo tanto, una transformación de Lorentz necesariamente preserva a tales conjuntos o los intercambia. Este hecho también se puede probar algebráicamente:

Consideremos una matriz lorentziana $A = (a_{ij})$. Como las matrices lorentzianas preservan la norma lorentziana, también preservan el tipo de vector, así que $A(e_1)$ es un vector tiempo cuyo signo queda únicamente definido por el signo de la entrada a_{11}. Consideremos otro vector tiempo positivo arbitrario x. El signo de $A(x)$ queda definido por el signo de su primera entrada la cual es el producto punto entre el primer renglón de A y x, a saber, si A_1 es el primer renglón de la matriz A, entonces

$$A_1 \cdot x = (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \cdot (x_1, \ldots x_n) = a_{11}x_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_i.$$

Por el Teorema 2.2.3, A_1 es un vector tiempo y x también lo es puesto que así lo elegimos. Tenemos entonces que

$$|a_{11}x_1| > \left(\sum_{i=2}^{n} a_{1i}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \geq \left|\sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_i\right|,$$

de manera que el signo de $A_1 \cdot x$ (y por lo tanto el de $A(x)$) queda determinado por el signo de $a_{11}x_1$, el cuál, al ser x_1 un número positivo, coincide con el de a_{11} que es el mismo que el de $A(e_1)$. De este modo probamos que A, o bien preserva al conjunto de vectores tiempo positivos, o bien lo intercambia con el de vectores tiempo negativos.

Denotaremos por $PO(1, n-1)$ al conjunto de matrices lorentzianas que preservan a los vectores tiempo positivos. Observemos que $PO(1, n-1)$ es un subgrupo de $O(1, n-1)$ de índice 2. Consideremos finalmente a las matrices de $SO(1, n-1)$ que preservan a los vectores tiempo positivos. Denotaremos a este conjunto por $PSO(1, n-1)$; este conjunto forma un subgrupo de $SO(1, n-1)$ de índice 2 y es llamado **el grupo especial positivo de Lorentz**.

Definición 10 *Decimos que dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ son Lorentz ortogonales si $x \circ y = 0$*

A pesar de que la definición de *ortogonalidad* en el n-espacio lorentziano sea tan similar a la de *ortogonalidad euclidiana*, es natural pensar que son conceptos muy diferentes, en especial si notamos que cualquier vector de tipo luz es ortogonal a sí mismo. El siguiente teorema nos ayuda a visualizar un caso particular de ortogonalidad en este espacio.

Teorema 2.2.4 *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ vectores Lorentz ortogonales, si x es de tipo tiempo, entonces y es de tipo espacio.*

Demostración. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de tipo tiempo, esto es

$$x_1^2 > \sum_{i=2}^{n} x_i^2.$$

Supongamos que $y = (y_1, \ldots, y_n)$ no es de tipo espacio, es decir

$$y_1^2 \geq \sum_{i=2}^{n} y_i^2.$$

Se tiene entonces que

$$|x_1 y_1| > \left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=2}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sum_{i=2}^{n} x_i y_i,$$

y así, x y y no pueden ser Lorentz ortogonales puesto que

$$x \circ y = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i \neq 0$$

□

El recíproco de este teorema, en general no es válido. Para ver esto, consideremos en $\mathbb{R}^3$ a los vectores $(0,0,1)$ y $(0,1,0)$. Es fácil ver que son Lorentz ortogonales aunque ambos sean de tipo espacio. A continuación clasificamos a los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ de acuerdo al tipo de vectores que contienen.

Definición 11 *Sea V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Decimos que:*

i) V es de tipo tiempo si tiene al menos un vector tiempo.

ii) V es de tipo luz si tiene al menos un vector luz distinto de cero y no tiene vectores tiempo.

iii) V es de tipo espacio en otro caso.

Teorema 2.2.5 *Dado $m \in \mathbb{N}, m \leq n$, la acción natural de $PO(1, n-1)$ en el conjunto de subespacios de tipo tiempo de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m es transitiva.*

Demostración. Sea V un subespacio vectorial de tipo tiempo de dimensión m de $\mathbb{R}^n$.

Si identificamos a $\mathbb{R}^m$ con el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores $e_1, \ldots, e_m$, basta probar que existe $A \in PO(1, n-1)$ tal que $A(\mathbb{R}^m) = V$.

Elegimos una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que u_1 es un vector tiempo positivo en V y $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de V. Sea $w_1 = u_1/|\|u_1\||$. Tenemos que

$$w_1 \circ w_1 = (u_1 \circ u_1)/|\|u_1\||^2 = -1,$$

por lo que w_1 es un vector tiempo.

Tomamos ahora $v_2 = u_2 + (u_2 \circ w_1)w_1$. Notemos que v_2 es distinto de cero, ya que es combinación lineal de dos vectores linealmente independientes donde uno de los escalares es 1. Podemos observar que

$$w_1 \circ v_2 = w_1 \circ u_2 + (u_2 \circ w_1)(w_1 \circ w_1) = w_1 \circ u_2 + (u_2 \circ w_1)(-1) = 0,$$

de manera que w_1 y v_2 son Lorentz ortogonales y por el Teorema 2.2.4, v_2 es tipo espacio. Consideremos $w_2 = v_2/\left\|v_2\right\|$.

Recursivamente, si $2 < i \leq n$, definimos los vectores

$$v_i = u_i + (u_i \circ w_1)w_1 - (u_i \circ w_2)w_2 - \cdots - (u_i \circ w_{i-1})w_{i-1}$$

y

$$w_i = v_i/\left\|v_i\right\|$$

que están bien definidos, puesto que v_i es distinto de cero por el mismo argumento que v_2 lo es. Se afirma que $\{w_1, \ldots w_n\}$ es una base Lorentz ortonormal.

Hemos visto ya que $w_1 \circ w_1 = -1$. Supongamos que $\forall j \in \{2, \ldots, i-1\}$ ya se ha probado que $w_1 \circ w_j = 0$. Probaremos que $w_1 \circ v_i = 0$, de donde se obtiene inmediatamente que $w_1 \circ w_i = 0$.

$$w_1 \circ v_i = w_1 \circ u_i + (u_i \circ w_1)(w_1 \circ w_1) - (u_i \circ w_2)(w_1 \circ w_2) - \cdots - (u_i \circ w_{i-1})(w_1 \circ w_{i-1})$$

$$= w_1 \circ u_i + (u_i \circ w_1)(-1) = 0.$$

De este modo se tiene que si $2 \leq i \leq n$, entonces v_i es de tipo espacio y por lo tanto $w_i \circ w_i = 1$. Sólo queda demostrar que si $1 < i, j \leq n$ con $i \neq j$, entonces $v_i \circ v_j = 0$ y en consecuencia $w_i \circ w_j = 0$. Esto se probará de manera inductiva, pero antes observaremos lo siguiente: si $k \in \{2, \ldots, n\}$

$$v_k \circ w_k = v_k \circ \frac{v_k}{\left\|v_k\right\|} = \frac{\left\|v_k\right\|^2}{\left\|v_k\right\|} = \left\|v_k\right\|.$$

Evaluaremos, como base de inducción, el caso en el que $i = 2, j = 3$.

$$\begin{aligned} v_2 \circ v_3 &= v_2 \circ u_3 + (u_3 \circ w_1)(v_2 \circ w_1) - (u_3 \circ w_2)(v_2 \circ w_2) \\ &= v_2 \circ u_3 - \|v_2\| (u_3 \circ w_2) = v_2 \circ u_3 - u_3 \circ \|v_2\| w_2 \\ &= v_2 \circ u_3 - u_3 \circ v_2 = 0 \end{aligned}$$

Como hipótesis de inducción, suponemos que dada $j \leq n$ se tiene lo siguiente: $\forall i, k < j, i \neq k, v_i \circ v_k = 0$. Vamos a probar que $\forall i < j, v_i \circ v_j = 0$.

$$v_i \circ v_j = v_i \circ u_j + (u_j \circ w_1)(v_i \circ w_1) - (u_j \circ w_2)(v_i \circ w_2) - \cdots - (u_j \circ w_{j-1})(v_i \circ w_{j-1})$$

$$= v_i \circ u_j - (u_j \circ w_i)(v_i \circ w_i) = v_i \circ u_j - \|v_i\| (u_j \circ w_i)$$

$$= v_i \circ u_j - u_j \circ v_i = 0.$$

En conclusión, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base Lorentz ortonormal de $\mathbb{R}^n$ tal que $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es base de V. Por el Teorema 2.2.3, la matriz A cuyas columnas son $\{w_1, \ldots, w_n\}$ induce una transformación de Lorentz que además es positiva puesto que $A(e_1) = u_1$ y que cumple que $A(\mathbb{R}^m) =< w_1, \ldots, w_m >= V$, de donde se sigue el Teorema.

□

El teorema anterior es de gran importancia y en adelante se utilizará en múltiples ocasiones, ya que va a simplificar bastante las pruebas de muchos resultados posteriores.

Definición 12 *Dado V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, definimos el complemento Lorentziano de V como*

$$V^L = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall y \in V, x \circ y = 0\}.$$

Es claro, por el Lema 2.2.2, que $V^L = J(V^\perp)$. También es claro que $(V^L)^L = V$ ya que $x \in V$, si y sólo si $\forall y \in V^L, x \circ y = 0$, es decir, $x \in (V^L)^L$.

Teorema 2.2.6 *Dado V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) V es un subespacio de tipo tiempo.

ii) V^L es un subespacio de tipo espacio.

iii) $V^\perp$ es un subespacio de tipo espacio.

Demostración. Por el Teorema 2.2.4, es inmediato que i) implica ii). Para ver la equivalencia entre ii) y iii), notemos que $V^L = J(V^\perp)$.

Sea $x \in V^L$. Por el Lema 2.2.2, tenemos que para cualquier vector $y \in V$ se cumple lo siguiente:

$$0 = y \circ x = y \cdot J(x),$$

de manera que $J(x) \in V^\perp$ y por lo tanto $x = J(J(x)) \in J(V^\perp)$. Como J es una transformación de Lorentz, se sigue la equivalencia. Sólo queda probar que ii) implica i).

Supongamos que V^L es de tipo espacio pero V no es de tipo tiempo. Si V fuera de tipo luz, tendría un vector luz en él, que por definición es Lorentz ortogonal a sí mismo, de modo que V^L también sería de tipo luz. Así, la única posibilidad que queda es que V fuera de tipo espacio.

Consideremos $\{u_1, \ldots u_m\}$ una base de V. Como V es un subespacio de tipo espacio, los vectores de su base son de tipo espacio. Sea $w_1 = u_1/\|u_1\|$ y recursivamente, si $1 < i \leq m$, definimos

$$v_i = u_i - (u_i \circ w_1)w_1 - (u_i \circ w_2)w_2 - \cdots - (u_i \circ w_{i-1})w_{i-1}$$

y

$$w_i = v_i/\|v_i\|.$$

Así, siguiendo una prueba análoga a la del teorema anterior, tenemos que si $1 < j < k \leq m$, entonces

$$v_j \circ v_k = v_j \circ (u_k - (u_k \circ w_1)w_1 - (u_k \circ w_2)w_2 - \cdots - (u_k \circ w_{k-1})w_{k-1})$$

$$= v_j \circ u_k - (u_k \circ w_1)(v_j \circ w_1) - \cdots - (u_k \circ w_j)(v_j \circ w_j) - \cdots - (u_k \circ w_{k-1})(v_j \circ w_{k-1})$$

$$= v_j \circ u_k - \|v_j\|(u_k \circ w_j) = v_j \circ u_k - u_k \circ v_j = 0$$

de manera que $\{w_1, \ldots w_m\}$ es una base para V formada por vectores unitarios y Lorentz ortogonales dos a dos.

Como V^L también es un subespacio de tipo espacio, tenemos de forma análoga, una base $\{w_{m+1}, \ldots w_n\}$ para V^L formada por vectores unitarios y Lorentz ortogonales dos a dos. Uniendo ambos conjuntos, tenemos una base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ Lorentz ortogonal de $\mathbb{R}^n$ que no tiene vectores tiempo, lo cual contradice el hecho de que, por definición toda base Lorentz ortonormal tiene exactamente un vector tiempo. Por lo tanto, no es posible que V sea de tipo espacio y se concluye que es de tipo tiempo.

$\square$

Teorema 2.2.7 *Sean x, y vectores tiempo positivos (negativos) en $\mathbb{R}^n$. Entonces $x \circ y \leq \|x\| \|y\|$, donde la igualdad se da si y sólo si x y y son linealmente dependientes.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x = x_1 e_1$ ya que, de otro modo, por el Teorema 2.2.5 existe $A \in PO(1, n-1)$ tal que $Ax = te_1$ y como A es una matriz lorentziana, se tiene que $Ax \circ Ay = x \circ y$. Calculamos el valor de $\|x\|^2 \|y\|^2$:

$$\|x\|^2 \|y\|^2 = -x_1^2 \left(-y_1^2 + \sum_{i=2}^{n} y_i^2 \right) = x_1^2 y_1^2 - x_1^2 \sum_{i=2}^{n} y_i^2 \leq x_1^2 y_1^2 = (x \circ y)^2,$$

donde la igualdad se da si y sólo si $\sum_{i=2}^{n} y_i^2 = 0$, esto es, $y = y_1 e_1$, es decir, x y y son linealmente dependientes.

Ahora, como x y y tienen *el mismo signo*, $x \circ y = -x_1 y_1 < 0$. Asimismo, $\|x\| \|y\| < 0$ al ser un producto de números imaginarios puros.

Por lo tanto, se tiene que $x \circ y \leq \|x\| \|y\| < 0$

□

El teorema anterior implica que dados x, y vectores tiempo positivos en $\mathbb{R}^n$, existe un único número real $\alpha \geq 1$ tal que $x \circ y = \alpha \|x\| \|y\|$. Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición 13 *Dados dos vectores tiempo positivos (negativos) x, y, el* ***ángulo tiempo lorentziano*** *entre ellos se define como el único número real no negativo $\eta(x, y)$ tal que*

$$x \circ y = \|x\| \|y\| cosh(\eta(x, y)).$$

Nótese que $\eta(x, y) = 0$ si y sólo si x y y son múltiplos escalares positivos el uno del otro.

Capítulo 3

El n-espacio hiperbólico

Una esfera de radio r en $\mathbb{R}^{n+1}$ (que funciona como un modelo para la geometría esférica n-dimensional), es una *hipersuperficie* de curvatura constante positiva. La dualidad que existe entre la geometría esférica y la hiperbólica, nos sugiere que el modelo para ésta última debe tener curvatura constante negativa, más aún, tiene sentido considerar una esfera de *radio imaginario* y como las magnitudes imaginarias son posibles en el (n+1)-Espacio Lorentziano, tomaremos como modelo la esfera con la unidad imaginaria como radio, es decir,

$$F^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = -1 \right\}.$$

El primer problema al que nos enfrentamos es que el conjunto F^n es disconexo; F^n es el hiperboloide de dos mantos definido por la ecuación

$$x_1^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i^2 = 1,$$

de modo que se pueden clasificar a los vectores de F^n en dos subconjuntos: el de los vectores $x \in F^n$ que cumplen $x_1 > 0$ y los que cumplen $x_1 < 0$. Llamaremos a estos subconjuntos **el manto positivo y el manto negativo** de F^n, respectivamente.

Para solucionar este problema, vamos a identificar a cada vector de F^n con su antípoda para obtener un espacio conexo. De manera equivalente, podemos simplemente descartar el manto negativo de F^n. En ambos casos, el espacio resultante es lo que definimos como **el modelo del hiperboloide del n-espacio hiperbólico** y lo denotamos por $\mathbb{H}^n$.

Definición 14 *Sean $x, y \in \mathbb{H}^n$. Definimos la distancia hiperbólica entre x y y como el número real*

$$d_H(x, y) = \eta(x, y).$$

Notemos que, como $x \circ y = \|x\| \, \|y\| \, cosh(\eta(x, y))$ y $\|x\| = i = \|y\|$, tenemos la igualdad

$$cosh(d_H(x, y)) = -x \circ y \tag{3.1}$$

Se probará que la distancia hiperbólica es, en efecto, una métrica en $\mathbb{H}^n$, pero primero necesitaremos algunos resultados preliminares acerca del producto cruz en $\mathbb{R}^3$.

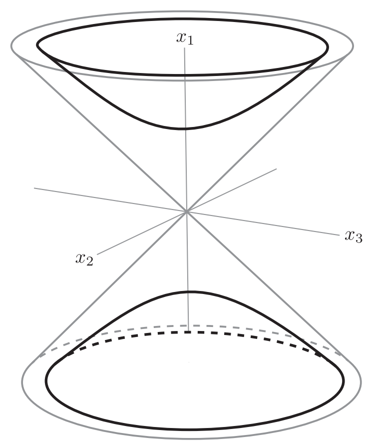

Figura 3.1: Modelo del Hiperboloide F^n.

3.1. El Producto Cruz Lorentziano

Definición 15 *Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ y sea*

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El producto cruz Lorentziano de x y y se define como

$$x \otimes y = J(x \times y),$$

donde $x \times y$ denota al producto cruz usual.

Usando el lema 2.2.2, se tiene que

$$x \circ (x \otimes y) = x \circ J(x \times y) = x \cdot (x \times y) = 0,$$

por lo que $x \otimes y$ es un vector Lorentz ortogonal a x. Similarmente $x \otimes y$ es Lorentz ortogonal a y.

Lema 3.1.1 *Si x, y son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces $x \otimes y = J(y) \times J(x)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} x \otimes y = J(x \times y) &= J(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= (x_3y_2 - x_2y_3, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= (-y_1, y_2, y_3) \times (-x_1, x_2, x_3) = J(y) \times J(x) \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.2 *Si $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$, entonces*

i) $x \otimes y = -y \otimes x$,

ii) $(x \otimes y) \circ z = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$,

iii) $(x \otimes y) \circ z = x \circ (y \otimes z)$,

iv) $x \otimes (y \otimes z) = (x \circ y)z - (z \circ x)y$,

v) $(x \otimes y) \circ (z \otimes w) = \begin{bmatrix} x \circ w & x \circ z \\ y \circ w & y \circ z \end{bmatrix}$.

Demostración. En esta prueba se utilizan el Teorema 1.1.1, y los Lemas 2.2.2 y 3.1.1 en múltiples ocasiones.

i) $x \otimes y = J(x \times y) = J(-y \times x) = -J(y \times x) = -y \otimes x$.

ii) $(x \otimes y) \circ z = J(x \times y) \circ z = (x \times y) \cdot z$.

iii) Usando *ii)* se sigue que

$(x \otimes y) \circ z = (x \times y) \cdot z = x \cdot (y \times z) = x \circ (y \otimes z)$

iv) $x \otimes (y \otimes z) = J(y \otimes z) \times J(x)$.
$= (y \times z) \times J(x) = (y \cdot J(x))z - (z \cdot J(x))y = (y \circ x)z - (z \circ x)y.$

v) Como J es una matriz lorentziana, preserva el producto lorentziano y se tiene que

$$(x \otimes y) \circ (z \otimes w) = J(x \times y) \circ J(z \times w)$$
$$= (x \times y) \circ (z \times w) = (x \times y) \cdot J(z \times w) = (x \times y) \cdot (J(w) \times J(z))$$
$$= \begin{bmatrix} x \cdot J(w) & x \cdot J(z) \\ y \cdot J(w) & y \cdot J(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \circ w & x \circ z \\ y \circ w & y \circ z \end{bmatrix}.$$

□

Corolario 3.1.3 *Si $x, y \in \mathbb{R}^3$ son vectores tiempo positivos (o negativos), entonces $x \otimes y$ es de tipo espacio y además $\|x \otimes y\| = -\|x\|\,\|y\| \sinh(\eta(x,y))$.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.4, es inmediato que $x \otimes y$ es de tipo espacio, lo que es equivalente a decir que $\|x \otimes y\| > 0$.

Se sigue del Teorema 3.1.2, inciso *v)* lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|x \otimes y\|^2 &= (x \otimes y) \circ (x \otimes y) = (x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 \cosh^2(\eta(x,y)) - \|x\|^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 (\cosh^2(\eta(x,y)) - 1) \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 \sinh^2(\eta(x,y)). \end{aligned}$$

Finalmente, como x y y son de tipo tiempo, se tiene que $\|x\|\,\|y\| < 0$ y se sigue el resultado.

□

Corolario 3.1.4 *Si $x, y \in \mathbb{R}^3$ son de tipo espacio, entonces:*

i) $|x \circ y| < \|x\|\,\|y\|$ *si y sólo si* $x \otimes y$ *es de tipo tiempo.*

ii) $|x \circ y| = \|x\|\,\|y\|$ *si y sólo si* $x \otimes y$ *es de tipo luz.*

iii) $|x \circ y| > \|x\|\,\|y\|$ *si y sólo si* $x \otimes y$ *es de tipo espacio.*

Demostración. Por Teorema 3.1.2 tenemos que

$$\|x \otimes y\|^2 = (x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 .$$

y como x y y son de tipo espacio, $\|x\| \|y\| > 0$. Así, se tienen los siguientes casos:
Si $x \otimes y$ es de tipo tiempo, entonces $(x \circ y)^2 < \|x\|^2 \|y\|^2$.
Si $x \otimes y$ es de tipo luz, entonces $(x \circ y)^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$.
Si $x \otimes y$ es de tipo espacio, entonces $(x \circ y)^2 > \|x\|^2 \|y\|^2$.

□

3.2. La métrica hiperbólica

Teorema 3.2.1 *La función distancia hiperbólica d_H es una métrica para $\mathbb{H}^n$*

Demostración. Es inmediato de la definición que d_H es simétrica y no-negativa. También es no degenerada ya que si $x, y \in \mathbb{H}^n$ son tales que $d_H(x, y) = 0$, entonces $x \circ y = \|x\| \|y\|$ y por el Teorema 2.2.7, x y y son linealmente dependientes. Además, dado que ambos pertenecen a $\mathbb{H}^n$, se sigue que $x = y$. Sólo resta probar la desigualdad del triángulo. Sean $x, y, z \in \mathbb{H}^n$.

Sabemos que las transformaciones positivas de Lorentz actúan sobre $\mathbb{H}^n$ y es obvio que éstas preservan la distancia hiperbólica. Tenemos pues, que los vectores x, y, z generan un espacio vectorial de dimensión menor o igual a 3 y por el Teorema 2.2.5, podemos suponer que x, y, z pertencen al subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ generado por los vectores e_1, e_2, e_3 que es, en esencia $\mathbb{R}^3$; podemos equipar a este subespacio con el producto cruz lorentziano definido de la siguiente manera:

$$x \otimes y = (\widehat{x}, 0, \dots, 0) \otimes (\widehat{y}, 0 \dots, 0) = (\widehat{x} \otimes \widehat{y}, 0, \dots, 0),$$

donde $\widehat{x}$ y $\widehat{y}$ denotan a las primeras tres entradas de los vectores x y y, respectivamente. Se puede verificar que este producto satisface todas las propiedades que se han visto a lo largo de esta sección.

Por el Corolario 3.1.3, tenemos que

$$\|x \otimes y\| = \sinh \eta(x, y) \quad y \quad \|y \otimes z\| = \sinh \eta(y, z),$$

y también se tiene que

$$x \circ y = -\cosh \eta(x, y) \quad y \quad y \circ z = -\cosh \eta(y, z).$$

Por el Teorema 3.1.2, y es Lorentz ortogonal a los vectores espacio $x \otimes y$ y $y \otimes z$, por lo cual, el vector $(x \otimes y) \otimes (y \otimes z)$ es linealmente dependiente a y. Esto implica que $(x \otimes y) \otimes (y \otimes z)$ es de tipo tiempo o cero. Por el Corolario 3.1.4, se tiene entonces que

$$|(x \otimes y) \circ (y \otimes z)| \leq \|x \otimes y\| \, \|y \otimes z\| \, .$$

En suma, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\cosh(\eta(x,y) + \eta(y,z)) &= \cosh \eta(x,y) \cosh \eta(y,z) + \sinh \eta(x,y) \sinh \eta(y,z) \\
&= (x \circ y)(y \circ z) + \|x \otimes y\| \, \|y \otimes z\| \\
&\geqslant (x \circ y)(y \circ z) + (x \otimes y) \circ (y \otimes z) \\
&= (x \circ y)(y \circ z) + ((x \circ z)(y \circ y) - (x \circ y)(y \circ z)) \\
&= -x \circ z = \cosh \eta(x,z).
\end{aligned}$$

Finalmente, como la función cosh es inyectiva y creciente en el intervalo $[0, \infty)$, se sigue que $\eta(x,z) \leqslant \eta(x,y) + \eta(y,z)$.

□

Vale la pena resaltar en esta prueba, que para $x, y, z \in \mathbb{H}^n$, la igualdad

$$\eta(x,z) = \eta(x,y) + \eta(y,z)$$

se da si y sólo si $(x \otimes y) \circ (y \otimes z) = \|x \otimes y\| \, \|y \otimes z\|$, lo cual ocurre únicamente en el caso en el que

$$(x \otimes y) \otimes (y \otimes z) = 0. \tag{3.2}$$

Este hecho nos será de utilidad más adelante.

La métrica d_H es llamada **la métrica hiperbólica**. El espacio métrico conformado por $\mathbb{H}^n$ y su métrica hiperbólica es llamado **el n-espacio Hiperbólico**.

Una isometría del espacio hiperbólico (es decir, una tranformación de $\mathbb{H}^n$ en $\mathbb{H}^n$ que preserva la distancia hiperbólica) es llamada una **isometría hiperbólica**. El siguiente teorema, caracteriza a todas las isometrías hiperbólicas.

Teorema 3.2.2 *Cada transformación positiva de Lorentz de $\mathbb{R}^{n+1}$ se restringe a una isometría de $\mathbb{H}^n$ y cada isometría de $\mathbb{H}^n$ se extiende a una única transformación positiva de Lorentz de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración. Recordemos de la fórmula (3.1) que la distancia hiperbólica entre dos puntos en $\mathbb{H}^n$ se puede obtener mediante la igualdad

$$\cosh(d_H(x,y)) = -x \circ y$$

de donde es claro que una función $\phi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ es una isometría si y sólo si preserva el producto lorentziano en $\mathbb{H}^n$. Así, se tiene que las transformaciones positivas de Lorentz se restringen a isometrías de $\mathbb{H}^n$.

Supongamos ahora que $\phi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ es una isometría hiperbólica y sean $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+1}$ las funciones coordenadas de ϕ, es decir

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_{n+1}(x)).$$

Probaremos la existencia de la extensión de ϕ en $PO(1,n)$. Para esto, vamos a suponer en primer lugar que ϕ fija al vector e_1. Observemos lo siguiente:

$$\phi_1(x) = -\phi(x) \circ e_1 = -\phi(x) \circ \phi(e_1) = -x \circ e_1 = x_1.$$

Sea $p : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$ la proyección dada por $p(x) = \overline{x}$, donde $\overline{x} = (x_2, \ldots, x_{n+1})$. Se tiene que p es una biyección y su inversa está dada por

$$p^{-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 1}, u_1, \ldots, u_n \right).$$

Definimos $\overline{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$\overline{\phi}(u) = (\phi_2(p^{-1}(u), \ldots, \phi_{n+1}(p^{-1}(u))).$$

Dicho de otro modo, para $u \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\overline{\phi}(u) = p\,\phi\,p^{-1}(u)$, lo cual significa que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{H}^n \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\overline{\phi}"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Así, dado $x \in \mathbb{H}^n$, tenemos lo siguiente:

$$\overline{\phi}(\overline{x}) = \overline{\phi}(p(x)) = p(\phi(x)) = \overline{\phi(x)}.$$

Ahora, puesto que ϕ es una isometría, por la observación previa se tiene que preserva el producto lorentziano en $\mathbb{H}^n$, de modo que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{H}^n$

$$\begin{aligned}
\phi(x) \circ \phi(y) &= x \circ y \\
-\phi_1(x)\phi_1(y) + \overline{\phi(x)} \cdot \overline{\phi(y)} &= -x_1 y_1 + \overline{x} \cdot \overline{y} \\
-x_1 y_1 + \overline{\phi}(\overline{x}) \cdot \overline{\phi}(\overline{y}) &= -x_1 y_1 + \overline{x} \cdot \overline{y} \\
\overline{\phi}(\overline{x}) \cdot \overline{\phi}(\overline{y}) &= \overline{x} \cdot \overline{y}
\end{aligned}$$

Gracias a la biyectividad de la función p, podemos concluir que para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\overline{\phi}(u) \cdot \overline{\phi}(v) = u \cdot v$, es decir $\overline{\phi}$ es una transformación ortogonal, por lo cual existe una matriz ortogonal de $n \times n$ asociada a la transformación $\overline{\phi}$, a la que llamaremos A. Sea $\overline{A}$ la siguiente matriz

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $\overline{A}$ es una matriz positiva de Lorentz; además, para $x \in \mathbb{H}^n$

$$\overline{A}(x) = (x_1, A(\overline{x})) = (\phi_1(x), \overline{\phi}(\overline{x})) = \left(\phi_1(x), \overline{\phi(x)}\right) = \phi(x)$$

y por lo tanto $\overline{A} \in PO(1, n)$ es una extensión de ϕ.

Probaremos ahora el caso general; supongamos que ϕ es una isometría hiperbólica arbitraria. Por el Teorema 2.2.5 existe $B \in PO(1, n)$ tal que $B\phi(e_1) = e_1$. Por lo visto en el caso anterior, $B\phi$ se extiende a una transformación positiva de Lorentz a la que llamaremos $\widehat{B}$. Como $B^{-1} \in PO(1, n)$ se tiene que $B^{-1}\widehat{B} \in PO(1, n)$. Si $x \in \mathbb{H}^n$, entonces

$$B^{-1}\widehat{B}(x) = B^{-1}(B\phi(x)) = B^{-1}B(\phi(x)) = \phi(x),$$

es decir, $B^{-1}\widehat{B}$ es una extensión de ϕ en $PO(1, n)$.

Sólo resta probar la unicidad de la extensión. Supongamos que C y D son extensiones de ϕ en $PO(1, n)$. La transformación CD^{-1} fija puntualmente a $\mathbb{H}^n$, de modo que si denotamos por $Fix(CD^{-1})$ al conjunto de puntos fijos de CD^{-1}, entonces $\mathbb{H}^n \subseteq Fix(CD^{-1})$. Se sabe que $Fix(CD^{-1})$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ (es el subespacio asociado al valor propio 1), sin embargo, el único subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ en el que está contenido $\mathbb{H}^n$ es el espacio total, por lo cual $Fix(CD^{-1}) = \mathbb{R}^{n+1}$ y así $C = D$.

$\square$

La última afirmación de esta prueba, aunque es intuitivamente clara, no se ha probado formalmente, por lo que a continuación se muestra una justificación para este hecho.

Consideremos a la siguiente familia de vectores de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ v_2 &= (2, \sqrt{3}, 0, 0, \ldots, 0), \\ v_3 &= (2, 0, \sqrt{3}, 0, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ v_n &= (2, 0, \ldots, 0, \sqrt{3}, 0), \\ v_{n+1} &= (2, 0, \ldots, 0, 0, \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Todos estos vectores se encuentran en $\mathbb{H}^n$ y claramente son linealmente independientes por lo que si un subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^{n+1}$ contiene a $\mathbb{H}^n$, entonces $\dim(V) \geq n + 1$ y por lo tanto $V = \mathbb{R}^{n+1}$.

Corolario 3.2.3 *El grupo de isometrías hiperbólicas que denotamos por $I(\mathbb{H}^n)$ es isomorfo al grupo positivo de Lorentz $PO(1, n)$.*

3.3. Geodésicas hiperbólicas

En esta sección, vamos a estudiar a las geodésicas de $\mathbb{H}^n$. Comenzaremos dando algunas definiciones generales para espacios métricos arbitrarios.

Definición 16 *Sea, (X, δ) un espacio métrico.*

i) *Una curva en X es una función continua $\gamma : [a, b] \to X$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.*

ii) *Un arco geodésico en X es una curva $\alpha : [a, b] \to X$ que preserva distancias, es decir, $\forall s, t \in [a, b], \quad \delta(\alpha(s), \alpha(t)) = |s - t|$.*

iii) *Una línea geodésica en X es una función $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ que preserva distancias localmente.*

A continuación definiremos el concepto de *línea* en el espacio hiperbólico. El objetivo de esta sección es mostrar que estas *líneas* son las geodésicas de $\mathbb{H}^n$.

Definición 17 *Una línea hiperbólica es la intersección de $\mathbb{H}^n$ con un subespacio vectorial de tipo tiempo de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensión 2.*

Sabemos, por el Teorema 2.2.7, que cualesquiera dos vectores distintos $x, y \in \mathbb{H}^n$ son linealmente independientes (de otro modo, por la definición de distancia hiperbólica, x y y serían iguales). Por lo tanto generan un subespacio vectorial de dimensión 2. Así, la línea hiperbólica $L(x, y) = \mathbb{H}^n \cap < x, y >$ es la única que pasa por x y y.

Definición 18 *Tres puntos $x, y, z \in \mathbb{H}^n$ son hiperbólicamente colineales si pertenecen a una misma línea hiperbólica.*

Lema 3.3.1 *Sean $x, y, z \in \mathbb{H}^n$ tales que*

$$\eta(x, z) = \eta(x, y) + \eta(y, z).$$

Entonces x, y, z son hiperbólicamente colineales.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.2.5, podemos suponer que x, y, z se encuentran en el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ generado por e_1, e_2, e_3. Nos encontramos pues, en las mismas condiciones de la prueba del teorema 3.2.1. De la observación (3.2) y del teorema 3.1.2, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= (x \otimes y) \otimes (y \otimes z) \\ &= ((x \otimes y) \circ y)z - (z \circ (x \otimes y))y \\ &= -(z \circ (x \otimes y))y. \end{aligned}$$

Como y es de tipo tiempo, es distinto de cero, de modo que $z \circ (x \otimes y) = 0$, lo cual implica, por el Teorema 3.1.2, inciso ii), que x, y, z son linealmente dependientes, por lo que se encuentran en un mismo subespacio de dimensión 2 y por lo tanto en una misma línea hiperbólica.

$\square$

Definición 19 *Dos vectores x, y de $\mathbb{R}^{n+1}$ son llamados Lorentz ortonormales si $\|x\|^2 = -1$, $x \circ y = 0$ y $\|y\|^2 = 1$.*

Teorema 3.3.2 *Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{H}^n$ una curva. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) La curva α es un arco geodésico.

ii) Existen vectores $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ Lorentz ortonormales tales que

$$\alpha(t) = (\cosh(t-a))x + (\sinh(t-a))y.$$

iii) La curva α satisface la ecuación diferencial $\alpha'' - \alpha = 0$.

Demostración. En primer lugar, notemos que cada una de las tres afirmaciones se satisface para una curva α si y sólo si se satisface para su imagen bajo una transformación positiva de Lorentz. Para justificar esta afirmación, sea $A \in PO(1, n)$:

i) Si α es un arco geodésico, $A\alpha$ también lo es ya que A preserva la distancia hiperbólica.

ii) Si $\alpha(t) = (\cosh(t-a))x + (\sinh(t-a))y$, con x, y vectores Lorentz ortonormales, entonces

$$A(\alpha(t)) = (\cosh(t-a))A(x) + (\sinh(t-a))A(y),$$

y $A(x), A(y)$ son también Lorentz ortonormales.

iii) Como A es lineal, $(A\alpha)' = A\alpha'$ y entonces $\alpha'' - \alpha = 0$ si y sólo si $(A\alpha)'' - A\alpha = 0$.

Por lo tanto, podemos transformar libremente a la curva α mediante transformaciones de Lorentz. Probaremos primero que *i)* implica *ii)*.

Supongamos que α es un arco geodésico. Para $t \in [a, b]$ arbitrario, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \eta(\alpha(a), \alpha(b)) &= b - a \\ &= (t-a) + (b-t) \\ &= \eta(\alpha(a), \alpha(t)) + \eta(\alpha(t), \alpha(b)). \end{aligned}$$

Por el Lema 3.3.1, $\alpha(a), \alpha(t)$ y $\alpha(b)$ son hiperbólicamente colineales. Consecuentemente, la imagen de α está contenida en una línea hiperbólica L de

$\mathbb{H}^n$. Por el Teorema 2.2.5, podemos suponer que $L = \mathbb{H}^n \cap < e_1, e_2 >$. De este modo, α es de la forma

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0, \ldots, 0).$$

donde $-(\alpha_1(t))^2 + (\alpha_2(t))^2 = -1$ para toda t en el intervalo $[a, b]$; en particular, para $t = a$ existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_1(a) = \cosh(s), \quad \alpha_2(a) = \sinh(s).$$

Consideremos la transformación en $PO(1, n)$ dada por la matriz

$$A_s = \begin{pmatrix} \cosh(s) & -\sinh(s) & 0 & \ldots & 0 \\ -\sinh(s) & \cosh(s) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

La imagen de $\alpha(a)$ bajo esta transformación es el vector e_1 por lo que podemos además suponer que $\alpha(a) = e_1$. Ahora, para $t \in [a, b]$ se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= e_1 \cdot \alpha(t) \\ &= -\alpha(a) \circ \alpha(t) \\ &= \cosh \eta(\alpha(a), \alpha(t)) \\ &= \cosh(t - a). \end{aligned}$$

Dado que $-(\alpha_1(t))^2 + (\alpha_2(t))^2 = -1$, entonces $\alpha_2(t) = \pm \sinh(t - a)$. Como α es continua, tenemos que, o bien

$$\forall t \in [a, b], \quad \alpha_2(t) = \sinh(t - a),$$

o bien

$$\forall t \in [a, b], \quad \alpha_2(t) = -\sinh(t - a).$$

En el segundo caso, podemos aplicar la reflexión

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

y regresar al primer caso. Así, la curva α es de la forma

$$\alpha(t) = (\cosh(t-a))e_1 + (\sinh(t-a))e_2,$$

lo que muestra que *i*) implica *ii*).

Probamos, ahora, que *ii)* implica *i)*. Supongamos que existen $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ Lorentz ortonormales tales que

$$\alpha(t) = (\cosh(t-a))x + (\sinh(t-a))y.$$

Sean $s, t \in [a, b]$ con $s \leq t$. Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\cosh \eta(\alpha(s), \alpha(t)) &= -\alpha(s) \circ \alpha(t) \\ &= \cosh(s-a)\cosh(t-a) - \sinh(s-a)\sinh(t-a) \\ &= \cosh((t-a)-(s-a)) \\ &= \cosh(t-s)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\eta(\alpha(s), \alpha(t)) = t - s$, es decir, α es un arco geodésico, lo cual prueba que *ii*) implica *i*).

Claramente *ii*) implica *iii*), por lo que sólo queda probar que *iii)* implica *ii)*. Supongamos que α satisface *iii*). Observemos que

$$\cosh(t-a) \quad \text{y} \quad \sinh(t-a)$$

son soluciones particulares para $\alpha'' - \alpha = 0$, que además, son linealmente independientes, ya que, si se tienen constantes c_1 y c_2 tales que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad c_1 \cosh(t-a) + c_2 \sinh(t-a),$$

evaluando en $t = a$, obtenemos que $c_1 = 0$ y por consecuencia, $c_2 = 0$.

La ecuación dada por *iii*) es una ecuación diferencial lineal de grado 2. Por el Teorema 1.2.5, sabemos que todas sus soluciones son combinación lineal de

$$\cosh(t-a) \quad \text{y} \quad \sinh(t-a).$$

En consecuencia, existen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$ vectores constantes tales que

$$\alpha(t) = \cosh(t-a)v_1 + \sinh(t-a)v_2.$$

Evaluando α y α' en $t = a$, tenemos

$$\alpha(a) = \cosh(0)v_1 + \sinh(0)v_2 = v_1,$$

$$\alpha'(a) = \sinh(0)v_1 + \cosh(0)v_2 = v_2,$$

lo cual implica que

$$\alpha(t) = \cosh(t-a)\alpha(a) + \sinh(t-a)\alpha'(a).$$

Para probar que se satisface la condición ii), sólo queda probar que $\alpha(a)$ y $\alpha'(a)$ son Lorentz ortonormales. Como $\alpha(a) \in \mathbb{H}^n$, se tiene que $\|\alpha(a)\|^2 = -1$. Además, para cada t, tenemos la igualdad $\alpha(t) \circ \alpha(t) = -1$; derivando con respecto de t, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\alpha(t) \circ \alpha(t)) &= 0 \\
\frac{d}{dt}(\alpha(t) \cdot J(\alpha(t))) &= 0 \\
\alpha'(t) \cdot J(\alpha(t)) + \alpha(t) \cdot J(\alpha'(t)) &= 0 \\
\alpha'(t) \circ \alpha(t) + \alpha(t) \circ \alpha'(t) &= 0 \\
2\alpha(t) \circ \alpha'(t) &= 0,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que $\alpha(t) \circ \alpha'(t) = 0$. Finalmente, tenemos que

$$\|\alpha(t)\|^2 = -\cosh^2(t-a) + \sinh^2(t-a)\,\|\alpha'(a)\|$$

y como $\|\alpha(t)\|^2 = -1$, concluimos que

$$\cosh^2(t-a) - 1 = \sinh^2(t-a)\,\|\alpha'(a)\|$$

$$\sinh^2(t-a) = \sinh^2(t-a)\,\|\alpha'(a)\|$$

y por lo tanto $\|\alpha'(a)\| = 1$.

$\square$

Teorema 3.3.3 *Una función $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ es una línea geodésica si y sólo si existen vectores Lorentz ortonormales $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que*

$$\lambda(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)y.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existen $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ Lorentz ortonormales tales que $\lambda(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)y$; entonces, λ satisface la ecuación diferencial $\lambda'' - \lambda = 0$. Así, por el Teorema 3.3.2, la restricción de λ a cualquier intervalo cerrado es un arco geodésico y por lo tanto λ es una línea geodésica.

Recíprocamente, supongamos que λ es una línea geodésica. Por el Teorema 3.3.2, λ satisface la ecuación diferencial $\lambda'' - \lambda = 0$. Siguiendo una prueba análoga a la del Teorema 3.3.2, podemos obtener que

$$\lambda(t) = (\cosh t)\lambda(0) + (\sinh t)\lambda'(0),$$

y los mismos argumentos muestran que $\lambda(0), \lambda'(0)$ son Lorentz ortonormales.

$\square$

Corolario 3.3.4 *Las geodésicas de $\mathbb{H}^n$ son las líneas hiperbólicas.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.3, si λ es una línea geodésica, entonces existen $x, y \in \mathbb{R}^n$ Lorentz ortonormales tales que $\lambda(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)y$, lo cuál implica que

$$L = \lambda(\mathbb{R}) \subseteq < x, y > \cap\, \mathbb{H}^n.$$

Sea $u \in < x, y > \cap\, \mathbb{H}^n$, esto es, existen $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $u = px + qy$ y $\|u\|^2 = -1$. Tenemos, entonces, lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|px + qy\|^2 &= -1 \\ \|px\|^2 + 2pq(x \cdot y) + \|qy\|^2 &= -1 \\ -p^2 + q^2 &= -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = \cosh t, q = \sinh t$ lo cual significa que $\lambda(t) = u$ y entonces, $u \in L$. De este modo, $L =< x, y > \cap\, \mathbb{H}^n$, es decir, L es una línea hiperbólica.

Supongamos ahora que L es una línea hiperbólica de $\mathbb{H}^n$. Por el Teorema 2.2.5, podemos suponer que $L \subseteq < e_1, e_2 >$. Definimos $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ dada por

$$\lambda(t) = (\cosh t)e_1 + (\sinh t)e_2.$$

Es claro que $\lambda(\mathbb{R}) = L$ y por el Teorema 3.3.3, L es una línea geodésica.

$\square$

Podemos concluir entonces, que si $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ es una línea geodésica, entonces $L = \lambda(\mathbb{R})$ es una línea hiperbólica y que además ésta se encuentra dada por $L =< \lambda(0), \lambda'(0) > \cap\, \mathbb{H}^n$.

Capítulo 4

Planos y ángulos

Definición 20 *Para $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, un m-plano hiperbólico de $\mathbb{H}^n$ es la intersección de $\mathbb{H}^n$ con un subespacio vectorial de tipo tiempo de dimensión $m+1$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

De acuerdo con esta definición, las líneas hiperbólicas de $\mathbb{H}^n$ son precisamente los 1-planos hiperbólicos.

4.1. Hiperplanos

Definición 21 *A un $(n-1)$-plano hiperbólico de $\mathbb{H}^n$ le llamaremos* ***hiperplano de*** *$\mathbb{H}^n$.*

Consideremos un vector $x \in \mathbb{R}^n$ de tipo espacio. El complemento lorentziano del subespacio vectorial $< x >$, generado por x, es un subespacio de tipo tiempo de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se tiene, pues, que $P =< x >^L \cap \mathbb{H}^n$ es un hiperplano. P es llamado el hiperplano de $\mathbb{H}^n$ Lorentz ortogonal a x.

Teorema 4.1.1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ vectores de tipo espacio linealmente independientes. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Los vectores x y y satisfacen la ecuación $|x \circ y| < \|x\| \, \|y\|$.

ii) El subespacio vectorial V generado por x y y es de tipo espacio.

iii) Los hiperplanos P y Q de $\mathbb{H}^n$ Lorentz ortogonales a x y y, respectivamente, tienen intersección no vacía.

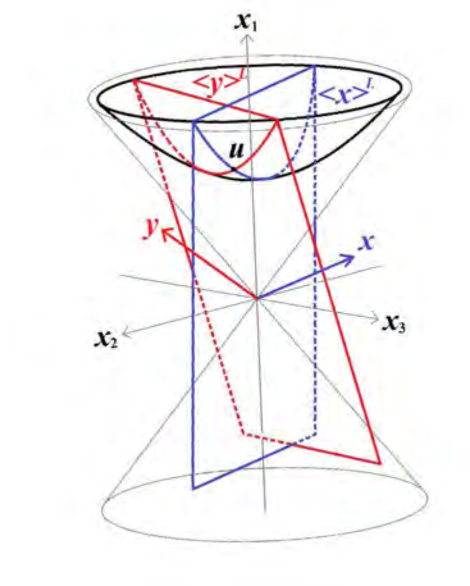

Figura 4.1: Hiperplanos de $\mathbb{H}^n$ con intersección no vacía.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos primero, que i) implica ii). Para $s, t \in \mathbb{R} - \{0\}$, basta demostrar que $\|sx + ty\|^2 > 0$.

Notemos que si $|x \circ y| < \|x\| \, \|y\|$, entonces también $|sx \circ ty| < \|sx\| \, \|ty\|$, lo cual implica que $-\|sx\| \, \|ty\| < sx \circ ty$. Tenemos, entonces:

$$\begin{aligned} \|sx + ty\|^2 &= \|sx\|^2 + 2(sx \circ ty) + \|ty\|^2 \\ &> \|sx\|^2 - 2\|sx\| \, \|ty\| + \|ty\|^2 \\ &= (\|sx\| - \|ty\|)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Para mostrar que ii) implica i), basta con notar que el producto lorentiziano, restringido a V, es positivo definido y por lo tanto, satisface la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Para ver que ii) implica iii), observemos que $V^L =< x >^L \cap < y >^L$. En virtud del Teorema 2.2.6, se tiene que V^L es de tipo tiempo, es decir, existe $u \in < x >^L \cap < y >^L$ de tipo tiempo. Podemos suponer que u es un vector tiempo positivo, de manera que $\frac{u}{|||u|||}$ es un vector en $\mathbb{H}^n$ y por lo tanto $\frac{u}{|||u|||} \in P \cap Q$ (véase Figura 4.1).

Finalmente, si se cumple $iii)$, existe $u \in P \cap Q =< x >^L \cap < y >^L \cap \mathbb{H}^n$. En particular, esto significa que $u \in V^L$ y es de tipo tiempo. Así, V^L es de tipo tiempo y por el Teorema 2.2.6, V es de tipo espacio.

$\square$

Sean x y y vectores espacio que generan un subespacio vectorial de tipo espacio. Por el Teorema 4.1.1, tenemos que

$$|x \circ y| \leq \|x\| \, \|y\| \, ;$$

por la bilinealidad del producto lorentziano se tiene que si x y y son linealmente dependientes se da la igualdad; además, si $|x \circ y| = \|x\| \, \|y\|$, los vectores x y y satisfacen la afirmación $ii)$ del Teorema 4.1.1, pero no la $i)$ por lo que son linealmente dependientes, es decir, la igualdad anterior se da si y sólo si los vectores x y y son linealmente dependientes. De este modo, existe un único número β en el intervalo $[-1, 1]$ tal que $x \circ y = \|x\| \, \|y\| \, \beta$. Definimos así lo siguiente:

Definición 22 *Dados dos vectores x, y de tipo espacio en $\mathbb{R}^{n+1}$ que generan un subespacio vectorial de tipo espacio, definimos el* ***ángulo espacio Lorentziano*** *entre ellos como el único número $\eta(x, y)$ en el intervalo $[0, \pi]$ tal que*

$$x \circ y = \|x\| \, \|y\| \cos \eta(x, y).$$

Notemos que $\eta(x, y) = 0$ si y sólo si x y y son linealmente dependientes y apuntan en la misma dirección, $\eta(x, y) = \pi/2$ si y sólo si x y y son Lorentz ortogonales y $\eta(x, y) = \pi$ si y sólo si x y y son linealmente dependientes y apuntan en dirección opuesta.

Consideremos ahora dos líneas hiperbólicas λ y μ tales que $\lambda(0) = \mu(0)$. Se tiene que $\lambda'(0)$ y $\mu'(0)$ son simultaneamente ortogonales a $\lambda(0) = \mu(0)$, es decir, los hiperplanos Lorentz ortogonales a $\lambda'(0)$ y $\mu'(0)$ tienen intersección no vacía y por el Teorema 4.1.1, $\lambda'(0)$ y $\mu'(0)$ generan un subespacio vectorial de tipo espacio. Basándonos en este hecho, definimos lo siguiente:

Definición 23 *Dadas dos líneas hiperbólicas λ y μ, tales que $\lambda(0) = \mu(0)$ se define el ángulo hiperbólico entre ellas como $\eta(\lambda'(0), \mu'(0))$.*

Con la herramienta del ángulo espacio lorentziano, podemos también definir el concepto de ortogonalidad entre líneas e hiperplanos hiperbólicos.

Definición 24 *Sean P un hiperplano de $\mathbb{H}^n$ y $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ una línea geodésica tal que $\lambda(0) \in P$. Decimos que la línea hiperbólica $L = \lambda(\mathbb{R})$ es Lorentz ortogonal a P si P es el hiperplano Lorentz ortogonal a $\lambda'(0)$.*

Lema 4.1.2 *Dados dos vectores x, y en $\mathbb{R}^{n+1}$, se tiene que todos los vectores de $V =< x, y >$, excepto los múltiplos de x, son múltiplos de un vector de la forma $tx + y$, para algún número real t.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$, de manera que el vector $u = \alpha x + \beta y$ no es múltiplo de x. Como $\beta \neq 0$, podemos tomar $s = \beta$ y $t = \frac{\alpha}{\beta}$; así, podemos reescribir a u como $u = s(tx + y)$.

□

Teorema 4.1.3 *Sean x, y vectores de tipo espacio linealmente independientes en $\mathbb{R}^{n+1}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *Los vectores x y y satisfacen la desigualdad $|x \circ y| > \|x\| \|y\|$.*

ii) *El subespacio vectorial $V =< x, y >$ es de tipo tiempo.*

iii) *Los hiperplanos P y Q Lorentz ortogonales a x y y, respectivamente, son ajenos y tienen una línea hiperbólica Lorentz ortogonal en común.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a probar la equivalencia entre *i*) y *ii*). Consideremos la familia de vectores de la forma $tx + y$ para $t \in \mathbb{R}$. La norma lorentziana de tales vectores se encuentra determinada por la expresión

$$\|tx + y\|^2 = t^2 \|x\|^2 + 2(x \circ y)t + \|y\|^2 , \tag{4.1}$$

que es un polinomio de segundo grado con coeficientes reales en la variable t. Por el lema 4.1.2, la condición *ii*) es equivalente a que este polinomio tome valores negativos.

Notemos que en $t = 0$ el polinomio toma el valor $\|y\|^2 > 0$, es decir, toma al menos un valor positivo, por lo que una condición necesaria y suficiente para que tome valores negativos es que tenga dos raíces reales diferentes, lo cual equivale a que su discriminante sea positivo. Calculamos, pues, su discriminante:

$$(2(x \circ y))^2 - 4(\|x\|^2)(\|y\|^2) = 4\left((x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2\right) .$$

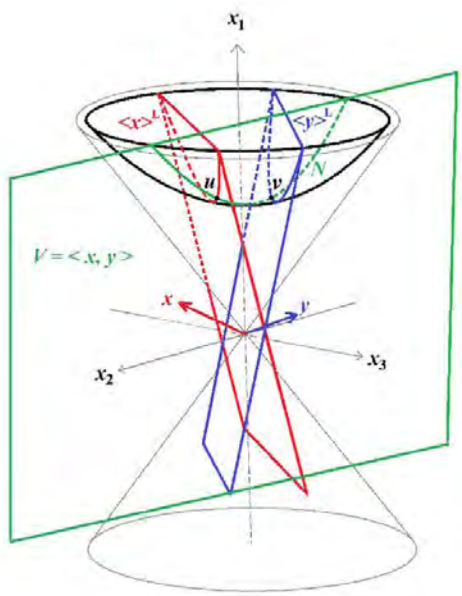

Figura 4.2: Hiperplanos ajenos de $\mathbb{H}^n$.

Como x y y son de tipo espacio, es claro que la expresión anterior es positiva si y sólo si $|x \circ y| > \|x\|\,\|y\|$, es decir, se satisface la condición i), lo que demuestra la equivalencia.

Probamos ahora que i) y ii) implican iii). Tenemos que $P =< x >^L \cap \mathbb{H}^n$ y $Q =< y >^L \cap \mathbb{H}^n$. Como V es de tipo tiempo, por el Teorema 2.2.6, V^L es de tipo espacio y puesto que $V^L =< x >^L \cap < y >^L$, no puede haber vectores de $\mathbb{H}^n$ en $< x >^L \cap < y >^L$ y por lo tanto $P \cap Q = \emptyset$

Tomamos ahora, $N = V \cap \mathbb{H}^n$, que es una línea hiperbólica ya que V es un subespacio vectorial de dimensión 2 (véase Figura 4.2). Vamos a demostrar que N es Lorentz ortogonal a P. Para esto, notemos que hay un único vector u_0 de la forma $tx + y$ que es Lorentz ortogonal a x; esto se sigue de que la ecuación en la variable t,

$$(tx + y) \circ x = 0$$

tiene como unica solución al valor

$$t_0 = -\frac{x \circ y}{\|x\|^2}.$$

La norma de $u_0 = t_0x + y$ se puede calcular mediante la expresión (4.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\|u_0\|^2 = \|t_0x + y\|^2 &= \frac{(x \circ y)^2}{\|x\|^2} - 2\frac{(x \circ y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 \\ &= -\frac{(x \circ y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2\end{aligned}$$

Por la condición $i)$ se tiene que $\|x\|^2 \|y\|^2 < (x \circ y)^2$, por lo que podemos afirmar que $\|t_0x + y\|^2 < 0$, es decir, que u_0 es un vector tipo tiempo. Concluimos, entonces, que $N \cap P = V \cap < x >^L \cap \mathbb{H}^n$ consta únicamente del vector

$$u = \frac{u_0}{\pm|\|u_0\||} = \frac{-\frac{x \circ y}{\|x\|^2}x + y}{\pm\sqrt{\frac{(x \circ y)^2}{\|x\|^2} - \|y\|^2}} = \frac{-\frac{x \circ y}{\|x\|}x + \|x\| \, y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}},$$

donde el signo del denominador se elige de modo que u sea un vector tiempo positivo. Análogamente, se afirma que $N \cap Q$ tiene un único punto al que llamaremos v (véase Figura 4.2).

Sea $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ una línea geodésica tal que $\lambda(\mathbb{R}) = N$ y $\lambda(0) = u$. De acuerdo con la última observación de la sección anterior, sabemos que la línea hiperbólica $N = V \cap \mathbb{H}^n$ está dada por $< \lambda(0), \lambda'(0) > \cap \mathbb{H}^n$, lo cual implica que $\lambda'(0) \in V$.

Dado que, por construcción $\lambda'(0)$ y x son Lorentz ortogonales a u en el subespacio V y éste es de dimensión 2, se tiene que $\lambda'(0)$ es un múltiplo escalar de x y por lo tanto, N es Lorentz ortogonal a P. Análogamente N es Lorentz ortogonal a Q.

Finalmente, demostramos que $iii)$ implica $ii)$. Sea N la línea hiperbólica Lorentz ortogonal a P y Q. Existe un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^{n+1}$ de tipo tiempo de dimensión 2 tal que $N = W \cap \mathbb{H}^n$. Como N es Lorentz ortogonal a $P =< x >^L \cap \mathbb{H}^n$, por definición, existe $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ una línea geodésica tal que $\lambda(\mathbb{R}) = N$, $\lambda(0) \in P$ y P es el hiperplano Lorentz ortogonal a $\lambda'(0)$. Se tiene entonces, que $P =< \lambda'(0) >^L \cap \mathbb{H}^n$ Esto implica que $< x >^L = < \lambda'(0) >^L$ y por lo tanto $\lambda'(0)$ es un múltiplo escalar de x de donde se sigue que $x \in W$. Análogamente $y \in W$. De este modo $V = W$, lo que significa que V es un subespacio vectorial de tipo tiempo.

□

La prueba de este teorema muestra, además, que si P y Q son dos hiperplanos disjuntos de $\mathbb{H}^n$ con una línea hiperbólica Lorentz ortogonal en común N, entonces N es única; más aún, si x y y son vectores espacio Lorentz ortogonales a P y Q, respectivamente, entonces x y y son vectores tangentes a N.

Sean x, y vectores tipo espacio en $\mathbb{R}^{n+1}$ que generan un subespacio vectorial de tipo tiempo. Por el Teorema 4.1.3, se tiene que $|x \circ y| > \|x\| \, \|y\|$, y como ambas son cantidades positivas, existe un único número real γ en el intervalo $(1, \infty)$ tal que $|x \circ y| = \|x\| \, \|y\| \, \gamma$. Definimos, entonces lo siguiente.

Definición 25 *Dados x, y dos vectores de tipo espacio en $\mathbb{R}^{n+1}$ que generan un subespacio vectorial de tipo tiempo, definimos el ángulo tiempo Lorentziano entre ellos como el único número real positivo $\eta(x, y)$ tal que*

$$|x \circ y| = \|x\| \, \|y\| \cosh \eta(x, y).$$

El siguiente teorema nos brinda una interesante interpretación geométrica del ángulo tiempo Lorentziano relacionada con la métrica hiperbólica.

Teorema 4.1.4 *Sean x y y vectores tipo espacio en $\mathbb{R}^{n+1}$ que generan un subespacio vectorial de tipo tiempo, y sean P y Q sus respectivos hiperplanos Lorentz ortogonales. Entonces $\eta(x, y)$ es igual a la distancia hiperbólica entre los hiperplanos P y Q medida a lo largo de la línea hiperbólica N Lorentz ortogonal a ambos. Más aún, $x \circ y < 0$ si y sólo si x y y son vectores tangentes a N que apuntan en direcciones opuestas.*

Demostración. De la prueba del Teorema 4.1.3 tenemos que $P \cap N$ consta únicamente del punto

$$u = \frac{-\frac{x \circ y}{\|x\|} x + \|x\| \, y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2}}$$

y análogamente, $Q \cap N$ es el punto

$$v = \frac{-\frac{x \circ y}{\|y\|} y + \|y\| \, x}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2}}.$$

De acuerdo a la identidad (3.1), tenemos lo siguiente:

$$\cosh d_H(u, v) = -u \circ v$$

$$= -\left(\frac{-\frac{x\circ y}{\|x\|}x + \|x\|\, y}{\pm\sqrt{(x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2}}\right) \circ \left(\frac{-\frac{x\circ y}{\|y\|}y + \|y\|\, x}{\pm\sqrt{(x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2}}\right)$$

$$= \frac{-\frac{(x\circ y)^2}{\|x\|\|y\|}(x\circ y) + \|x\|\,\|y\|\,(x\circ y) + \|x\|\,\|y\|\,(x\circ y) - \|x\|\,\|y\|\,(x\circ y)}{\pm\left((x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\right)}$$

$$= \frac{-\frac{(x\circ y)^3}{\|x\|\|y\|} + \|x\|\,\|y\|\,(x\circ y)}{\pm\left((x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\right)}$$

$$= \frac{-\frac{(x\circ y)}{\|x\|\|y\|}\left((x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\right)}{\pm\left((x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\right)}$$

$$= \frac{-(x\circ y)}{\pm\,\|x\|\,\|y\|} \tag{4.2}$$

Notemos que esta cantidad es positiva, ya que $\cosh d_H(u,v) > 1$; además, por definición, $\cosh\eta(x,y) = \frac{|x\circ y|}{\|x\|\|y\|}$, por lo que $\cosh d_H(u,v) = \cosh\eta(x,y)$ y puesto que la función cosh es inyectiva en el intervalo $(0,\infty)$, tenemos que $d_H(u,v) = \eta(x,y)$.

El cálculo anterior y la prueba del Teorema 4.1.3 nos muestran que los vectores

$$u_0 = -\frac{x\circ y}{\|x\|^2}x + y$$

y

$$v_0 = -\frac{x\circ y}{\|y\|^2}y + x,$$

son vectores tiempo *del mismo signo* si y sólo si el signo del denominador de (4.2) es positivo y como la expresión (4.2) es positiva, esto ocurre si y sólo si $x\circ y < 0$.

Sabemos que u y v se encuentran el el subespacio vectorial V generado por x y y que es de dimension 2. Notemos que x y y apuntan en direcciones opuestas de N si y sólo si la curva N se encuentra en el cuadrante de V entre x y y o entre $-x$ y $-y$; esto ocurre si y sólo si los coeficientes de las combinaciones lineales de u_0 y v_0 en términos de x y y son ambos positivos (o negativos), lo que es equivalente a que se cumplan las desigualdades

$$-\frac{x\circ y}{\|x\|^2} > 0, \quad -\frac{x\circ y}{\|y\|^2} > 0,$$

lo cual sucede únicamente si $-x \circ y > 0$, es decir, x y y apuntan en direcciones opuestas de N si y sólo si $x \circ y < 0$.

$\square$

Definición 26 *Sean P y Q dos hiperplanos de $\mathbb{H}^n$ y sean x, y vectores espacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ tales que P y Q son sus respectivos hiperplanos Lorentz ortogonales. Decimos que P y Q se cortan en el infinito si $< x >^L \cap < y >^L$ es un subespacio vectorial de tipo luz.*

Si P y Q son dos hiperplanos que se cortan en el infinito, entonces son disjuntos, pero puestos en perspectiva desde el origen, aparentan intersectarse en un punto ideal.

Teorema 4.1.5 *Sean x y y vectores tipo espacio en $\mathbb{R}^{n+1}$ linealmente independientes. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Los vectores x y y satisfacen la ecuación $|x \circ y| = \|x\| \, \|y\|$.

ii) El subespacio vectorial V generado por x y y es de tipo luz.

iii) Los hiperplanos P y Q Lorentz ortogonales a x y y, repectivamente, se cortan en el infinito.

Demostración. La equivalencia entre $i)$ y $ii)$ es inmediata por los Teoremas 4.1.1 y 4.1.3.

La equivalencia entre $ii)$ y $iii)$ se sigue de que $V^L =< x >^L \cap < y >^L$ y del hecho de que V es de tipo luz si y sólo si V^L también lo es.

$\square$

Observemos que si x y y son vectores tipo espacio tales que $V =< x, y >$ es un subespacio vectorial de tipo tiempo, entonces V interseca al cono luz en un subespacio vectorial de tipo luz de dimensión 1; esto debido a que si hubiera dos vectores de tipo luz linealmente independientes en la intersección, el segmento determinado por ellos estaría formado por vectores tiempo y V sería de tipo tiempo.

Teorema 4.1.6 *Sean x, y vectores tipo espacio linealmente independientes que generan un subespacio vectorial V de tipo luz. Entonces $x \circ y < 0$ si y sólo si x y y están a lados opuestos del subespacio de tipo luz de dimensión 1 de V.*

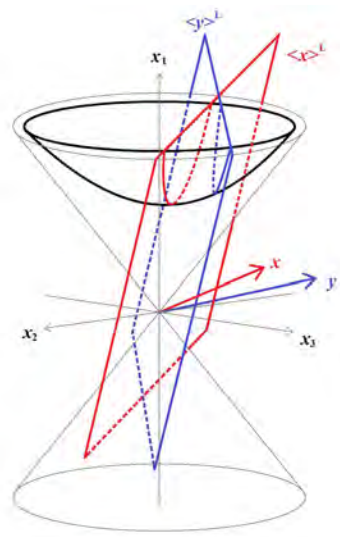

Figura 4.3: Hiperplanos de $\mathbb{H}^n$ que se cortan en el infinito.

Demostración. Por el Lema 4.1.2, los vectores luz de V son los múltiplos de los vectores que satisfacen la ecuación

$$\|tx + y\| = 0,$$

en la variable t, la cual es equivalente a la ecuación

$$t^2 \|x\|^2 + 2(x \circ y)t + \|y\|^2 = 0,$$

cuyas soluciones están dadas por

$$t = \frac{-2(x \circ y) \pm \sqrt{4(x \circ y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2}}{2\|x\|^2}.$$

Por el Teorema 4.1.5 se tiene que $4(x \circ y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 = 0$ y por lo tanto la única solución es

$$t = \frac{-x \circ y}{\|x\|^2}.$$

El vector $\frac{-x \circ y}{\|x\|^2} x + y$ se encuentra en el cuadrante de V entre x y y si y sólo si el coeficiente $\frac{-x \circ y}{\|x\|^2}$ es positivo, es decir si $-x \circ y > 0$. Así, x y y están a lados opuestos del subespacio de tipo luz de dimensión 1 de V si y sólo si $x \circ y < 0$.

□

Teorema 4.1.7 *Sea $y \in \mathbb{H}^n$ y P un hiperplano de $\mathbb{H}^n$. Existe una única línea hiperbólica N que pasa por y y que es Lorentz ortogonal a P.*

Demostración. Sea x un vector tipo espacio Lorentz ortogonal a P y de norma lorentziana 1.

Consideremos el subespacio vectorial $V =< x, y >$ y la línea hiperbólica $N = V \cap \mathbb{H}^n$. La ecuación

$$(tx + y) \circ x = 0$$

tiene como única solución al valor $t = -x \circ y$, de modo que $u_0 = (-x \circ y)x + y$ es un vector de V que es Lorentz ortogonal a x. La norma lorentziana de u_0 está dada por

$$\begin{aligned} \|u_0\|^2 &= \|(-x \circ y)x + y\|^2 \\ &= (x \circ y)^2 \|x\|^2 - 2(x \circ y)(x \circ y) + \|y\|^2 \\ &= (x \circ y)^2 - 2(x \circ y)^2 - 1 \\ &= -(x \circ y)^2 - 1 < 0, \end{aligned}$$

por lo cual, u_0 es de tipo tiempo. Así, el vector tiempo positivo

$$u = \frac{(-x \circ y)x + y}{\pm\sqrt{(x \circ y) + 1}}$$

es el único punto en la intersección de N y P.

Sea $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ una línea geodésica tal que $\lambda(\mathbb{R}) = N$ y $\lambda(0) = u$. Se tiene que $\lambda(0)$ y $\lambda'(0)$ se encuentran en V ya que $N = V \cap \mathbb{H}^n$. Tenemos pues, que $\lambda'(0)$ y x son Lorentz ortogonales a $\lambda(0) = u$ en el subespacio V que es de dimensión 2, de manera que $\lambda'(0) = \pm x$ y por lo tanto P es el hiperplano Lorentz ortogonal a $\lambda'(0)$, es decir, N es Lorentz ortogonal a P.

Supongamos ahora que N es una línea hiperbólica que pasa por y y es Lorentz ortogonal a P. Sea $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ una línea geodésica tal que $\lambda(\mathbb{R}) = N$ y $\lambda(0)$ está en P. Entonces $\lambda'(0)$ es Lorentz ortogonal a P. Se tiene entonces que $\lambda'(0) = \pm x$. Sea W el subespacio vectorial de tipo tiempo de dimensión 2 tal que $N = W \cap \mathbb{H}^n$. Como x y y están en W, se tiene que $V = W$, y por lo tanto N es única.

□

Consideremos ahora dos vectores x, y de $\mathbb{R}^{n+1}$, el primero de ellos de tipo espacio y el segundo de tipo tiempo, al cual suponemos positivo. Se tiene que la expresión $\|x\| \, |||y|||$ es no negativa, de manera que existe un único número real positivo δ tal que $|x \circ y| = \|x\| \, |||y|||\delta$. Definimos, así lo siguiente.

Definición 27 *Sean x un vector tipo espacio y y un vector tiempo positivo en $\mathbb{R}^{n+1}$. Definimos el ángulo tiempo entre x y y como el número $\eta(x,y)$ que satisface*

$$|x \circ y| = \|x\| \, |||y||| \sinh \eta(x,y).$$

Teorema 4.1.8 *Sea x un vector de tipo espacio y y un vector de tipo tiempo positivo de $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea P el hiperplano de $\mathbb{H}^n$ Lorentz ortogonal a x. Entonces $\eta(x,y)$ es la distancia hiperbólica de $y/|||y|||$ a P medida a lo largo de la línea hiperbólica N que pasa por $y/|||y|||$ y es Lorentz ortogonal a P. Más aún, $x \circ y < 0$ si y sólo si x y y se encuentran a lados opuestos del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ al que subyace P.*

DEMOSTRACIÓN. De manera similar a lo hecho en la prueba del Teorema 4.1.3, buscamos un vector en $V =< x, y >$ que sea Lorentz ortogonal a x; por el Lema 4.1.2, esto equivale a resolver la ecuación

$$(tx + y) \circ x = 0$$

cuya única solución es

$$t_0 = -\frac{x \circ y}{\|x\|^2}.$$

Así, el vector

$$u_0 = -\frac{x \circ y}{\|x\|^2} x + y$$

se encuentra en $V \cap < x >^L$. Tenemos, entonces que

$$\|u_0\|^2 = \|t_0 x + y\|^2 = -\frac{(x \circ y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 < 0$$

ya que y es de tipo tiempo y por lo tanto $\|y\|^2 < 0$. Así, el único vector en $P \cap N$ es

$$u = \frac{-\frac{x \circ y}{\|x\|} x + \|x\| \, y}{\pm\sqrt{(x \circ y)^2 - \|x\|^2 \, \|y\|^2}}.$$

Sea $v = y/|||y|||$. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\cosh d_H(u,v) &= -u \circ v \\
&= \left(\frac{-\frac{x\circ y}{\|x\|}x + \|x\|\, y}{\pm\sqrt{(x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2}} \right) \circ \frac{y}{|||y|||} \\
&= \frac{-\frac{(x\circ y)^2}{\|x\|} + \|x\|\,\|y\|^2}{\pm|||y|||\sqrt{(x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2}} \\
&= \frac{(x\circ y)^2 + \|x\|^2\,\|y\|^2}{\pm\,\|x\|\,|||y|||\sqrt{(x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2}} \\
&= \frac{(x\circ y)^2 - \|x\|^2\,|||y|||^2}{\pm\,\|x\|\,|||y|||\sqrt{(x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2}} \\
&= \frac{\sqrt{(x\circ y)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2}}{\pm\,\|x\|\,|||y|||} > 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\cosh^2 \eta(x,y) = \sinh^2 \eta(x,y) + 1,$$

pero, por definición,

$$\sinh \eta(x,y) = \frac{|x\circ y|}{\|x\|\,|||y|||},$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\cosh \eta(x,y) &= \sqrt{\left(\frac{|x\circ y|}{\|x\|\,|||y|||}\right)^2 + 1} \\
&= \sqrt{\frac{|x\circ y|^2 + \|x\|^2\,|||y|||^2}{\|x\|^2\,|||y|||^2}} \\
&= \frac{\sqrt{|x\circ y|^2 + \|x\|^2\,|||y|||^2}}{\|x\|\,|||y|||} \\
&= \frac{\sqrt{|x\circ y|^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2}}{\|x\|\,|||y|||} > 0.
\end{aligned}$$

Este último cálculo muestra que necesariamente el signo del denominador de u es positivo y que, de hecho, $\cosh d_H(u,v) = \cosh \eta(x,y)$, por lo que $d_H(u,v) = \eta(x,y)$

Además, es claro que el vector u_0 se encuentra en el cuadrante del subespacio $V = < x, y >$ delimitado por x y por y si y sólo si el coeficiente $\frac{-x \circ y}{\|x\|^2}$ es positivo, de donde se tiene que x y y se encuentran a lados opuestos de P si y sólo si $x \circ y < 0$

$\square$

Bibliografía

[1] ADAMS C. WHAT IS ... a Hyperbolic 3-Manifold, *Notices of the AMS* vol. 65, número 5 (mayo 2018), 544-546.

[2] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups,* Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.

[3] CODDINGTON, *Una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*

[4] MINKOWSKY, H., Das Relativitätsprinzip, *Ann,Physik,* 47 (1915), 927-938.

[5] PENROSE, R., The Geometry of the Universe, In: *Mathematics Today, Twelve Informal Essays,* edited by L.A Steen , Springer verlag, New York (1978), 83-125.,

[6] POINCARÉ, H., Sur la dynamique de l'électron, *Rend. Circ. Mat. Palermo,* 21 (1906), 129-176.

[7] RATCLIFFE, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds,* Graduate Texts in Mathematics.

[8] THURSTON, W. P J., *The Geometry and Topology of Three Manifolds,* lecture notes, Princeton Univ,. Princeton , NJ (1979).

[9] THURSTON, W. P J., *Three Dimensional Geometry and Topology, vol I,* edited by Silvio Levy, Princeton Mathemathical Series, 35, Princeton University Press, 1997.