UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA
EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

El papel de los conocimientos previos en el aprendizaje de las matemáticas en el bachillerato: el caso del triángulo

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN DOCENCIA PARA LA
EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
(MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

SILVIA PATRICIA ROMERO HIDALGO

TUTORA:

DRA. MARÍA DEL PILAR SEGARRA ALBERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad de México Septiembre, 2018

A mi familia

A Carlos, por su compañía y apoyo

A Silvia y Sandra, por darle sentido a mi vida.

AGRADECIMIENTOS

A la vida, por este breve espacio de conciencia

A la Facultad de Ciencias de la UNAM

A todos los docentes que han contribuido a mi formación.

A Pilar Segarra, por su amistad y por la dirección de este trabajo

A los sinodales, por sus comentarios

A Luis Ángel Vázquez y Maura Patricia Miranda, por facilitarme los grupos de CCH

A Helena Lluis, por su amistad y apoyo en la edición de este trabajo

A mi familia, por su presencia

A mis amigos

I. RESUMEN

El objetivo del trabajo es determinar si los estudiantes llegan al bachillerato con los conocimientos previos que requieren, para luego ofrecer una propuesta de intervención remedial en caso de que estos conocimientos no sean adecuados o suficientes. Se diseñó una secuencia didáctica de enfoque constructivista en dos versiones, para subsanar la carencia de conocimientos previos. Una de las versiones toma en cuenta la tecnología mediante el uso del programa GeoGebra, mientras que en la otra las actividades se realizan con regla y compás en papel. De manera complementaria, se busca identificar cuál de las dos versiones reporta más beneficios para los alumnos.

La propuesta toma en cuenta la Teoría de conocimientos previos y aprendizaje significativo de Ausubel, y aborda los contenidos de geometría euclidiana básica necesarios para continuar con los estudios del bachillerato. La secuencia contempla diversas actividades como son la exploración, la argumentación, la experimentación y la generalización. La muestra se integró por dos grupos de los primeros semestres de CCH Sur.

Los resultados confirman que una gran proporción de los estudiantes no llegan al bachillerato con los conocimientos previos necesarios para emprender el estudio en matemáticas en este nivel, y que la implementación de una secuencia remedial, al inicio del curso, especialmente si incluye el uso de la tecnología, puede facilitar el paso de los estudiantes por este nivel educativo.

ABSTRACT

The objective of this work is to evaluate if students reach high school with the previous knowledge required and includes a proposal for remedial intervention when this knowledge turns out to be not adequate or enough. To overcome the lack of prior knowledge, a didactic sequence with a constructivist approach was designed in two versions, one of which makes use of technology through the work in the program GeoGebra, while the other one carries out the activities using ruler and geometric compass. As a complement, the present work seeks to identify which of the two versions reports the greater benefit for the students.

The proposal considers the Theory by Ausubel and addresses the mandatory contents of basic Euclidean Geometry to continue high school. The sequence includes various activities like exploration, argumentation, experimentation and generalization. The sample was integrated by two groups of the first semester of CCH Sur.

The results confirm that a large proportion of students do not reach high school with the previous knowledge required. Implementing a remedial sequence at the beginning of the course, especially if it makes use of technology, can facilitate the transit of students through this educational level.

II. ÍNDICE

III. INTRODUCCIÓN

¿CUÁNTOS TRIÁNGULOS?

La filosofía está escrita en ese inmenso libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el Universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrita. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto."

Galileo Galilei

Los contenidos de matemáticas en el bachillerato se construyen sobre ciertos cimientos, pero ¿llegan los estudiantes a este nivel educativo con las bases necesarias para comprender los contenidos que se espera que aprendan? En el transcurso de los estudios realizados en la educación básica es posible aprobar algunas disciplinas sin contar con un buen aprendizaje de lo abordado en la misma disciplina en años anteriores, sin embargo, esto no sucede en las matemáticas.

Los conocimientos matemáticos requieren de una buena comprensión de los contenidos estudiados en años precedentes, situación que se agudiza en el bachillerato, pues es en la primaria y secundaria donde se ponen los cimientos de lo que se abordará después. Por ejemplo; ¿cómo se puede esperar que los alumnos trabajen los contenidos de trigonometría si en sus estudios no aprendieron a reconocen las características del triángulo rectángulo?, ¿cómo se espera que encuentren los elementos de una elipse si no recuerdan el teorema de Pitágoras? ¿cómo esperamos abordar el concepto de semejanza si no saben que son rectas perpendiculares y tienen una vaga idea de lo que son rectas paralelas?

Independientemente del subsistema en el que se curse el bachillerato, las matemáticas tienen mayor carga horaria por disciplina. El mapa curricular de cualquier subsistema de educación media superior teje en los primeros años contenidos de álgebra, geometría, trigonometría y geometría analítica, los cuales suponen el manejo de conceptos que se deberían haber aprendido en años anteriores y son la base del desarrollo de los contenidos matemáticos de esta etapa.

Con este trabajo se pretende abordar tres situaciones problemáticas, primero, determinar si los alumnos de recién ingreso al bachillerato cuentan con los conocimientos previos que se requieren para estudiar los contenidos de geometría euclidiana en este nivel; segundo, valorar si la implementación de una secuencia didáctica con un enfoque constructivista puede facilitar el tránsito de los estudiantes por este nivel y homogenizar los conocimientos previos de un grupo al inicio del curso; y tercero, distinguir si una secuencia con apoyo de tecnología puede tener mayor impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

Actualmente se busca poner al estudiante en el centro del aprendizaje, se aspira a que se involucre y que participe activamente en la clase. Los adolescentes están inmersos en un mundo donde la tecnología tiene un papel fundamental. En la tesis se presentan dos propuestas de una misma secuencia didáctica, en una de ellas varias de las actividades se realizan en el programa GeoGebra, en la otra el trabajo se realiza con regla y compás en papel.

Con estas ofertas se pretende mostrar que las acciones que lograrán mover al estudiante al lugar deseado deben acercarse a la realidad y al mundo que están viviendo los jóvenes.

IV. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En 2012 se reformó el artículo 3º de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos con la inclusión en el trayecto de formación obligatoria la Enseñanza Media Superior (EMS).

En "Directrices para mejorar la permanencia escolar en la educación media superior" (INEE, 2017) se afirma que el 9% de la población de nuestro país son jóvenes entre los 15 y los 19 años; de ellos, el 70% ingresa al bachillerato y únicamente el 49% de la población total de jóvenes termina en tiempo y forma estos estudios. La tasa de abandono escolar en esta etapa oscila entre 13.3% y 15.5%, y son muchas las causas de la deserción, que incluyen aspectos socio económicos, como son que más del 30% de los jóvenes no cuentan con dinero suficiente para útiles y pasajes, porcentaje que aumenta hasta el 46% en la población de menor ingreso. (SEP y COPEEMS, 2012). Otra tercera parte de los jóvenes que abandonan sus estudios lo hacen por causas relacionadas con procesos escolares, entre los que se encuentran: la no aprobación de materias o problemas para entender a sus profesores. (SEP y COMPEEMS, 2012).

Por otro lado, estudios internacionales han destacado como una de las causas principales de abandono escolar la falta de interés de los adolescentes por el estudio. En el informe "¿Por qué los adolescentes dejan la escuela?" realizado por el Sistema de Información de Tendencias Educativas en América Latina (SITEAL, 2013), se afirma que la primera causa de abandono escolar es la falta de interés, y puntualiza que cuando un adolescente manifiesta "la escuela no es para mí" está diciendo que la promesa que ofrece el estudio no es suficiente para integrarla en su vida presente y mucho menos en su futuro. Esta falta de interés en el estudio se agudiza en lo que se refiere a las matemáticas.

V. LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS

En matemáticas, el problema real al hablar no es que el lenguaje sea preciso, el problema es que el lenguaje sea claro.

Richard Feynman (1918-1988)

Las matemáticas son una expresión de la mente humana, y sus elementos básicos son la lógica, el análisis y la generalización. Se estructuran como un sistema consistente de conclusiones deducidas lógicamente a partir de definiciones y postulados, conocido como el método axiomático deductivo.

El método axiomático deductivo se originó en Grecia y su primer trabajo se cristalizó en "Los Elementos" de Euclides, obra que recupera los saberes de la época y los estructura en un esquema de este tipo. A partir de 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes, Euclides desarrolla las proposiciones de lo que conocemos como geometría euclidiana, misma que constituye la base de las matemáticas que se abordan en la educación básica. Su obra inicia con la definición de los elementos con lo que va a trabajar, con la probable idea de evitar la subjetividad de algún concepto. En nuestra época, cabe preguntarnos, ¿hasta qué grado es necesario conocer la definición de los conceptos? ¿entienden todos los alumnos lo mismo cuando se habla de un "triángulo rectángulo"? o vale la pena detenernos a conocer las ideas previas que tienen los estudiantes de los conocimientos que deben haber aprendido, antes de iniciar un ciclo escolar.

El método axiomático deductivo se introduce en el último año de la secundaria o a al inicio del bachillerato, método que los alumnos no comprenden y al que muchas veces los maestros le dan la vuelta. Un paso incipiente en el trabajo con este método, que podría abonar al éxito del proceso de enseñanza - aprendizaje, sería trabajar la argumentación desde los primeros años de la educación.

VI. SOBRE LA PRECISIÓN DEL LENGUAJE EN MATEMÁTICAS.

Como punto de partida para la reflexión, se exponen los resultados obtenidos en un examen diagnóstico aplicado a 31 **profesores de secundaria** públicas **que imparten matemáticas**. La pregunta solicita a los maestros escribir la definición de un triángulo. A continuación, se transcriben las respuestas obtenidas.

¿Qué es un triángulo?

1. Sus ángulos internos forman 180º. (*)
2. El que tiene tres ángulos. (*)
3. Es una figura geométrica que cuenta siempre con tres lados. (+)
4. Es una figura geométrica que tiene tres ángulos. (*)
5. Cuerpo geométrico que consta de 3 lados ya sean iguales o diferentes de tamaño. (+)
6. Figura geométrica de tres lados. (+)
7. Es una figura geométrica que tiene un ángulo diferente y dos ángulos iguales. (*)
8. Figura de tres lados los cuales en su interior forman ángulos distintos de acuerdo con el tipo.
9. Figura geométrica que tiene tres lados. (+)
10. Figura plana que consta de tres lados y tres ángulos interiores que suman 180º. (#)
11. Tres lados colindando formando ángulos entre sí. (#)
12. *Figura plana cerrada que tiene tres lados.*
13. Figura geométrica de tres lados. (+)
14. Porción del plano definida por tres rectas que se cortan entre sí. (+)
15. F*igura cerrada de tres lados que tiene tres ángulos y tres vértices.*

16. Una poligonal cerrada con tres ángulos internos y tres ángulos externos.

17. Tiene tres lados, ángulos, vértices y se forma con tres líneas rectas.

18. Figura geométrica que tiene tres vértices que forman tres ángulos. (#)

19. Es una figura geométrica formada por tres lados. (+)

20. Figura geométrica que tiene tres aristas. (#)

21. Figura geométrica formada por tres líneas no paralelas que forman tres vértices. (#)

22. Tres lados pueden ser iguales o diferentes cuyas sumas de ángulos es 180º.

23. Figura geométrica plana que tiene tres lados y tres ángulos y es cerrada.

24. Polígono que consta de tres lados, tres ángulos.

25. Figura plana de tres ángulos y tres vértices. (#)

26. Figura geométrica de tres lados y tres ángulos. (#)

27. Está compuesto por tres lados; cateto adyacente, cateto opuesto e hipotenusa. (^)

28. Polígono de tres lados.

29. Figura plana delimitada por tres lados y que cuenta con tres ángulos. (#)

30. Es un cuerpo o figura geométrica formada por tres vértices y la suma de sus ángulos interiores suman 180º. (^)

31. Polígono de tres lados con tres ángulos interiores.

Observaciones

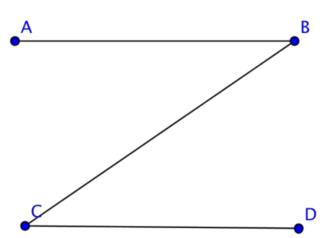
1. El currículo de educación básica (2011) está estructurado en torno a tres ejes, uno de los cuales es "Forma, espacio y medida", en el cual se aborda lo referente a triángulos de la siguiente manera:

Nivel educativo	Grado	Aprendizaje esperado
Preescolar	2	Reconocer figuras
Primaria	2	Identificación de las características de las figuras por número y forma de lados
Primaria	4	Clasificación de triángulos
Primaria	5	Trazo de las alturas de un triángulo
Secundaria	1	Trazo de alturas mediante el juego de geometría
Secundaria	2	Relación de la medida de los ángulos interiores de un triángulo
Secundaria	3	Análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en la construcción de un triángulo

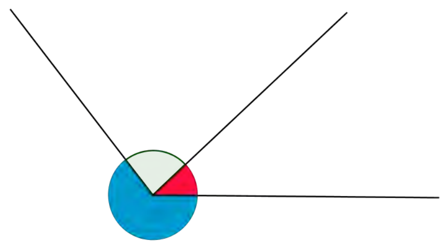
2. De las respuestas obtenidas se observa lo siguiente:

✓ Resalta que poco más de 80% de los docentes dieron respuestas que incluyen errores conceptuales, (respuestas marcadas con ^) o imprecisiones que conllevan a los mismos.

✓ El 22.58% (respuestas marcadas con +) hacen referencia únicamente a la condición de tener tres lados. Definición que acepta como triángulo la siguiente figura, misma que podría estar formadas por tres lados curvos:



- ✓ El 38.70% (respuestas marcadas con * o #) hacen referencia a la condición de formar tres ángulos o a tener tres lados y tres ángulos. Estas definiciones aceptan figuras como la que se muestra a continuación:



- ✓ Solo el 19.35% dio respuestas adecuadas. Cabe mencionar que no todos utilizaron las mismas palabras.

3. En los primeros años de la educación básica no se discuten conceptos, se aprenden por observación o por la manipulación de objetos. Se asume que los alumnos entienden un concepto, aunque no lo sepan definir. Sin embargo, es de esperarse que los maestros puedan dar una definición que cumpla con los elementos mínimos para identificar a un objeto, más aún, cuando se habla de conceptos con los que se trabajan en el aula desde los primeros años de las educación básica.

Dado que el concepto de triángulo se aborda desde preescolar hasta el bachillerato, es necesario buscar la forma de garantizar que los conceptos abordados en cualquier año escolar hayan sido comprendidos cabalmente por los estudiantes.

VII. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

"La enseñanza de las matemáticas ha degenerado, con frecuencia en un entrenamiento hueco de resolución de problemas, que pueden desarrollar una habilidad formal, pero no conducen, a una comprensión real, ni a una mayor independencia intelectual." (Courant and Robbins, 1941: Preface to the first edition) (Traducción de la autora)

Estos días se escucha hablar frecuentemente sobre la Reforma Educativa como una propuesta nueva y diferente de lo que se ha venido haciendo en las escuelas en nuestro país. Es sencillo dudar de la verdad de esta afirmación, ya que las reformas educativas en México son el resultado de un proyecto político y no de una necesidad educativa. Los cambios de currículo y su enfoque van de la mano de las reformas, las cuales se han modificado en el último cuarto del siglo pasado, en 1993, así como en 2006, 2011 y finalmente en 2017.

A pesar de que cada reforma plantea nuevas propuestas, nuevos enfoques, hay algo que tienen en común todas ellas y es el énfasis en la **resolución de problemas**.

Desde 1994, en el libro para el maestro de la Secretaría de Educación Pública, se menciona que "Un problema debe dar a los alumnos la oportunidad de explorar las relaciones entre nociones conocidas y utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos conocimientos, los cuales a su vez servirán para resolver nuevos problemas. Esta es esencialmente la naturaleza de la actividad matemática."

A pesar de la insistencia de la SEP de incluir el enfoque de resolución de problemas, se presenta como referencia para esta reflexión los resultados obtenidos en una de las preguntas de un examen diagnóstico aplicado a 17 maestros de **escuelas oficiales de nivel primaria**.

Pregunta

Determina el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 1, 2, y 10.

Respuestas

El problema se resolvió de manera inmediata, obteniéndose las siguientes respuestas:

- En 10 respuesta se afirma que el perímetro es 13
- 7 respuestas enuncian que no se puede formar el triángulo.

Comentarios

El siguiente apartado se desarrolló con base en los contenidos abordados en el curso "Improving Teaching Methods in Science and Mathematicas in Primary School" en Japón 2010 y en el curso de "Hermenéutica" en la maestría MADEMS.

1. Resalta que el 58.82% de los maestros sumaron sin titubear las "supuestas" longitudes de los lados del triángulo.

2. Situarse frente a un problema plantea varias preguntas interpretativas: ¿qué pregunta el problema?, ¿con qué información se cuenta?, ¿qué elementos se pueden usar?

3. Sobre la resolución de problemas:
   - ✓ ¿A qué se refiere la resolución de problemas? Un problema se define por la relación que tiene con el alumno que lo enfrenta, no en cuanto sus propiedades intrínsecas.
   - ✓ Un problema pone al alumno en una situación nueva, ante la cual no dispone de procedimientos inmediatos para su solución.
   - ✓ Existen diferentes tipos de problemas; aquellos que tienen una sola solución, pero varios caminos para llegar a la misma, otros con varias soluciones correctas y diversos caminos para encontrarlas.

4. La resolución de problemas puede ser considerada un acto univocista porque requiere encontrar "la solución", sin embargo, en su resolución se tiende al camino equivocista porque hay varios caminos para determinarla.

5. Muchos alumnos perciben la resolución de problemas como un ejercicio univocista; es muy común escucharlos decir que obtuvieron una calificación no aprobatoria porque “no resolvieron un problema de la manera idéntica a como lo resolvió el maestro en clase”.

6. Mediante la resolución de problemas se desarrollan habilidades y destrezas que ayudan a la comprensión de los contenidos involucrados en el mismo y no a la aplicación mecánica de procedimientos.

VIII: EVALUACIONES NACIONALES E INTERNACIONALES

Los resultados de las pruebas nacionales e internacionales dan cuenta del deficiente manejo de los contenidos del programa de Matemáticas que tienen los alumnos, en particular a lo referente al eje “Forma, Espacio y Medida” que se abordan en este trabajo.

PRUEBAS NACIONALES: EXCALE

EXCALE, **“**Examen de Calidad y el Logro Educativo”, es una prueba de aprendizaje de gran escala que evalúa lo que los estudiantes mexicanos aprenden del currículo nacional. La prueba aborda gran parte de los contenidos curriculares y las habilidades de español y matemáticas requeridas por disciplina y grado escolar. Se evalúa el último grado de cada nivel educativo desde preescolar hasta secundaria y se aplica a una muestra significativa de alumnos de escuelas públicas y privadas.

Los niveles de logro de lo que los estudiantes saben y pueden hacer del currículo nacional se dividen en cuatro categorías, como sigue:

Niveles de logro	Competencias académicas
Por debajo de básico	Indica carencias importantes en el dominio curricular de los conocimientos, habilidades y destrezas escolares, lo cual expresa una limitación para progresar satisfactoriamente en la materia.
Básico	Indica un dominio suficiente o elemental de los conocimientos, habilidades y destrezas para poder progresar satisfactoriamente en la materia.
Medio	Indica un dominio adecuado de los conocimientos, habilidades y destrezas que indican un buen aprovechamiento de lo previsto en el currículo.
Avanzado	Indica un dominio óptimo de conocimientos, habilidades y destrezas, lo que se traduce en un aprovechamiento máximo de lo previsto en el currículo.

Una tercera parte del total de los reactivos de matemáticas evalúan el eje de geometría. Algunos ejemplos de los reactivos que evalúan de forma específica los contenidos que se abordan en este trabajo son:

I. **Identificar las instrucciones para la construcción de triángulos equiláteros.**

Reactivo: ¿Cuál de las siguientes series de instrucciones conduce a la construcción de un triángulo equilátero?

Porcentaje de alumnos que contestó adecuadamente el reactivo: **32.7**%

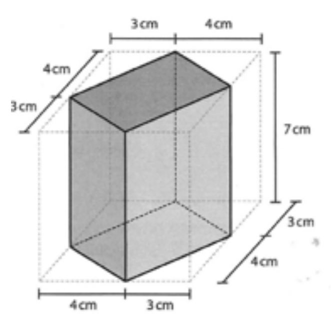
II. **Reconocer las relaciones entre las medidas de los lados con las que se puede construir un triángulo.**

Reactivo: ¿Con cuáles de las siguientes ternas de segmentos es posible construir un triángulo?

Porcentaje de alumnos que contestó adecuadamente el reactivo: **27.5**%

III. **Calcular el volumen de un prisma.**

Reactivo: Con los datos que aparecen en la figura calcula el volumen del sólido sombreado.



Porcentaje de alumnos que contestó adecuadamente el reactivo: **27.1**%

PLANEA EMS 2017

La prueba PLANEA evalúa los aprendizajes fundamentales de los alumnos que terminan la Educación Media Superior, su propósito es determinar en qué medida los alumnos logran el dominio de los aprendizajes al término de un nivel educativo. PLANEA evalúa dos campos de formación, lenguaje y comunicación y matemáticas. Los resultados se agrupan en 4 niveles de logro, que en el caso del eje "Forma, espacio y medida" son los siguientes:

Nivel I	Los estudiantes tienen dificultades para aplicar las propiedades de las figuras geométricas para resolver problemas.
Nivel II	Resuelven problemas que implican el cálculo de ángulos en intersección de rectas por medio de la aplicación directa de una sola propiedad.
Nivel III	Resuelven problemas que implican el cálculo de ángulos en intersección de rectas por medio de la aplicación de más de una propiedad. Determinan por qué dos triángulos son semejantes.
Nivel IV	Resuelven problemas aplicando el teorema de Pitágoras para calcular uno de los catetos o determinar si un triángulo es triángulo rectángulo.

Los resultados obtenidos en PLANEA EMS 2017 en matemáticas son:

Nivel de logro	Porcentaje de alumnos por nivel
I	66.2%
II	23.3%
III	8.0%
IV	2.5%

En las consideraciones finales del documento PLANEA, “Resultados nacionales 2017” (INEE, PLANEA EMS, 2017), se menciona que los resultados son reflejo de muchos factores que incluyen actividades escolares, condiciones educativas y el contexto socioeconómico de los estudiantes, pero también está vinculado con los resultados de los niveles educativos previos.

En los resultados se aprecia que más de la mitad de los estudiantes de educación media superior no han consolidado los aprendizajes clave que se evaluaron en la prueba.

El INEE apunta que "el déficit académico que se arrastra de niveles educativos anteriores impacta en el mayor abandono escolar durante el primer periodo de EMS". La tasa de abandono escolar durante el primer año en el ciclo 2014-2015 fue de 25%, mientras que en el segundo grado fue de 11.7% y tercer grado 0.2% (INEE, 2017).

PRUEBAS INTERNACIONALES: PISA

PISA (*Programe for International Student Assessment*) es una evaluación internacional que mide el desempeño en lectura, matemáticas y ciencias en jóvenes de quince años de los 35 países agrupados en la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

PISA se aplica cada tres años y su diseño está enfocado en evaluar las **competencias** de los estudiantes, no en la verificación del aprendizaje de contenidos. La definición de competencia propuesta por el INEE es “un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos no cognitivos, como motivación, valores y emociones, que son adquiridos y desarrollados por los individuos a lo largo de su vida y son indispensables para participar eficazmente en diferentes contextos sociales" (OCDE: 2006).

En el caso particular de las matemáticas se refiere a la capacidad de aplicar el razonamiento matemático en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

La evaluación de PISA establece seis niveles:

Nivel 6	• **Capacidad para conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y en la elaboración de modelos para resolver problemas complejos** • **Relacionar diferentes fuentes de información** • **Demostrar pensamiento y razonamiento avanzado** • **Aplicar conocimientos y destrezas en matemáticas para enfrentar situaciones novedosas** • **Formular y comunicar acciones y reflexiones con precisión**
Nivel 5	• Desarrollar y trabajar con modelos para situaciones complejas • Seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas complejos relacionados con estos modelos • Trabajar de manera estratégica al usar ampliamente habilidades de razonamiento bien desarrolladas, representaciones de asociación y caracterizaciones simbólicas y formales
Nivel 4	• Trabajar efectivamente con modelos explícitos para situaciones complejas concretas • Seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo símbolos, asociándolos directamente a situaciones del mundo real • Usar habilidades bien desarrolladas y razonar flexiblemente con cierta comprensión en estos contextos • Construir y comunicar explicaciones y argumentos
Nivel 3	• Ejecutar procedimientos descritos claramente, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales • Interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas • Generar comunicaciones breves para reportar sus interpretaciones
Nivel 2	• Interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren de inferencias directas • Extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un solo tipo de representación • Hacer interpretaciones literales de los resultados
Nivel 1	• Contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante esté presente y las preguntas estén claramente definidas. Son capaces de identificar información y desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explicitas. • Realizar acciones obvias y seguirlas inmediatamente a partir de un estímulo
Por debajo del nivel 1	• Se trata de estudiantes que no son capaces de realizar las tareas de matemáticas más elementales que pide PISA.

El puntaje obtenido en matemáticas por los estudiantes mexicanos en la primera aplicación en el año 2000 fue de 387 puntos, valor que bajó a 385 puntos en la siguiente aplicación y ha mejorado desde entonces cinco puntos en cada aplicación. Esta mejoría es relativa, ya que en 2015 el 57% de los estudiantes en México no alcanzaron el Nivel 2 de matemáticas, lo cual significa que, al enfrentar un problema, más de la mitad de los alumnos mexicanos son capaces, únicamente, de realizar operaciones aritméticas en las cuales las instrucciones les son dadas y no pueden identificar cómo, es que una situación real simple puede ser representada matemáticamente. El 10.7% de estudiantes la OCDE se ubican en el nivel más alto (6), mientras que en México solo el 0.3% de los estudiantes alcanza este nivel (PISA 2015)

Las evaluaciones presentadas muestran que algo no se está haciendo bien. ¿Dónde radica el problema? En la labor docente con niños, adolescentes, jóvenes universitarios, maestros y adultos, es frecuente escuchar el discurso de "yo no soy bueno para las matemáticas" o "no entiendo nada, es como si me hablaran en chino". Y en efecto, haciendo una anlogía, si un alumno mexicano entrará a una clase de chino, muy probablemente no entendería nada, a menos que tuviera las bases que le permitieran hacerlo. Esto mismo pasa en la clase de matemáticas.

De acuerdo a los resultados de las evaluaciones presentadas, gran parte de los estudiante mexicanos se encuentran en los niveles de logro más bajos, estos resultados se dan cuando la comprensión es a través de la memorización de fórmulas o la repetición mecánica de procedimientos, ejemplos o pseudoproblemas. Al parecer, en la escuela se vive un cierto engaño, ya que muchos alumnos "pasan de año", sin haber aprendido lo que les correspondía en el grado anterior. Esta situación se agudiza en la suma de cada ciclo escolar.

Este trabajo ofrece una alternativa que permite abordar algunos contenidos que son fundamentos para el aprendizaje de la geometría en el bachillerato, de esta forma se espera que los alumnos no sientan que “les hablamos en chino”. Las matemáticas, son un gozo, pero, para disfrutarlas, primero hay que entenderlas.

IX. MARCO TEÓRICO

LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS

"*La adquisición de un cuerpo de conocimientos claro, estable y organizado de parte del educando es la variable independiente más significativa que influye sobre su capacidad para adquirir nuevos conocimientos en el mismo campo."*

David P. Ausubel

¿Qué son los conocimientos previos? En palabras de la autora, son las ideas, conocimientos o creencias que tienen los estudiantes sobre un determinado tema. En teoría, estos conocimientos debieron haberse construido en años anteriores, ya que representan los fundamentos de los nuevos conocimientos.

Uno de los principales estudiosos sobre el papel que tienen los conocimientos previos fue David Ausubel, psicólogo y psiquiatra estadounidense, quien se preguntó sobre la manera en que se aprende y el proceso mediante el cual lo aprendido se integra a la estructura cognitiva; él afirmó que el aprendizaje de un concepto se da cuando lo que se va a aprender se puede relacionar con las ideas o conocimientos que ya tenga el alumno.

Si el maestro indaga el conjunto de ideas y conocimientos que posee el alumno, puede utilizar esta información para orientar su labor educativa de la mejor manera. El interés de determinar los conocimientos previos que poseen los alumnos es conocer de qué manera influyen éstos en el aprendizaje de contenidos que se proponen en el aula y planear desde ellos la enseñanza.

Para Ausbel (1976):

> "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, diría lo siguiente: el factor aislado más importante que influye el aprendizaje es aquello que el aprendiz ya sabe. Averígüese esto y enséñesele en consecuencia".

La teoría de Ausubel propone el concepto de *aprendizaje significativo* y afirma que el aprendizaje es significativo cuando el conocimiento nuevo se relaciona con ideas o conceptos que ya están establecidos en la estructura cognitiva del alumno, y una condición para que esto suceda es que las ideas o conceptos que tiene el estudiante deben estar claras y ser accesibles. Ausubel llama "subsunores" a los conceptos importantes que existen en la estructura cognitiva de un individuo. Cuando los subsunores son inadecuados o inexistentes, el aprendizaje únicamente se puede dar de manera mecánica. El aprendizaje mecánico es una especie de vacío cognitivo.

El psicólogo español Cesar Coll afirma sobre los conocimientos previos que:

> "Cuando un alumno se enfrenta a nuevo contenido a aprender, lo hace armado con una serie de conceptos, concepciones, representaciones y conocimientos, adquiridos en el transcurso de sus experiencias previas, que utiliza como instrumento de lectura e interpretación y que determina en buena parte que información seleccionará, cómo la organizará y qué tipos de relaciones establecerá entre ellas." (Coll 1990).

Los "conocimientos previos" que se activan cuando se aborda un nuevo conocimiento no son únicamente los relacionados de manera directa; tienen orígenes muy variados que incluyen la experiencia cotidiana. Para ejemplificar, expongo el caso de Manrique (pseudónimo utilizado para proteger la identidad de un adolescente privado de libertad por conflictos con la ley) con quien se trabajó en la preparación de un examen para ingresar al bachillerato en 2016, ante la posibilidad de recibir una beca para cursarlo a distancia en una institución privada, A las preguntas: ¿qué es un triángulo? ¿qué es un círculo? y ¿qué es un cuadrado?, Manrique respondió, "no sé"; sin embargo, al cuestionarlo sobre la idea que tiene de triángulo afirma, "bueno, sí sé, pero no lo sé decir" y dibuja con el dedo un triángulo en el aire.

Al preguntarle: “si fuera ciega, ¿cómo lo explicarías?” a lo que responde: "es como un ‘dorito’"; un círculo es una pelota y un cuadrado algo que tiene que ver con partes iguales y con base por altura.

Cuando los conocimientos previos son inexistentes, pobres, desorganizados o erróneos, es necesario proveerlos o reforzarlos antes de iniciar el estudio de un tema; esto puede darse por medio de un repaso, una tarea, o, en el caso de este trabajo, mediante la implementación de una secuencia didáctica que aborde los contenidos específicos con los que se debe contar al iniciar algún estudio.

Las consecuencias de iniciar un aprendizaje sin los conocimientos previos necesarios es que los alumnos reducen el aprendizaje a la repetición mecánica de un procedimiento o, incluso, a la memorización de éste.

ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA

Una de las definiciones más completas de constructivismo es postulada por Mario Carretero (1993):

> "Básicamente, puede decirse que es la idea que mantiene que el individuo tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos no es mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción? Fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que le rodea.
>
> Dicho proceso de construcción depende de dos aspectos fundamentales:
>
> - De los conocimientos previos o representaciones que se tenga de la nueva información o de la actividad o tarea a resolver.
> - De la actividad externa e interna que el aprendiz realice al respecto."

El principio esencial en este enfoque es que la actividad constructiva del alumno concreta los aprendizajes escolares. Coll lo bautiza como la <u>idea fuerza constructivista;</u> esta idea, afirma Coll, "conduce a concebir el aprendizaje escolar como un proceso de construcción de conocimientos a partir de los conocimientos y las experiencias previas y la enseñanza como una ayuda a este proceso de construcción." (Coll, 1996)

Para que el aprendizaje se dé en el marco de una concepción constructivista, es necesario que el alumno se haya involucrado en las actividades diseñadas y planificadas, previamente por el maestro con el propósito de "aprender a aprender", lo que significa desarrollar en el alumno la capacidad de lograr aprendizajes significativos por sí mismo.

Un alumno ha aprendido un contenido cuando le ha atribuido un significado, es decir, que consiguió relacionarlo con lo que ya sabe o construyó una representación mental del mismo, o bien es capaz de explicarlo con sus propias palabras mediante una teoría o un modelo mental. En el constructivismo el alumno no es un receptor, sino un sujeto que participa activamente en la construcción de su propio conocimiento.

METODOLOGÍA INDAGATORIA

La metodología indagatoria es un paradigma de enseñanza de las ciencias y las matemáticas centrada en el alumno en la cual el estudiante es invitado a trabajar de manera similar a como lo hacen los científicos.

Linn et al (2004) lo definen como: “La indagación es el proceso intencional de enfrentarse a un problema, planear una investigación, realizar experimentos, discernir entre alternativas, elaborar conjeturas, buscar información, construir modelos, debatir entre pares y proponer argumentos coherentes".

El papel del alumno y el docente en esta metodología se presenta en la siguiente tabla.

ALUMNO	DOCENTE
• **Observa fenómenos** • **Elabora preguntas** • **Realiza experimentación** • **Controla variables** • **Traza diagramas** • **Busca patrones** • **Hace conjeturas y generalizaciones**	• Elabora preguntas que guían la observación para detonar el proceso • Parte de las ideas previas de los estudiantes • No da explicaciones • No utiliza ejemplos demostrativos • Evade los ejercicios repetitivos • Fomenta la colaboración entre los estudiantes

La propuesta inicial fue de Dewey (1926, 1933, 1938) y Barrows. Dewey, filósofo y educador estadounidense, destacó que los niños tienen una actitud innata de curiosidad e imaginación y un gusto por la experimentación que es muy cercano a la actitud de los científicos. Su propuesta en educación es afín al aprendizaje con base en la resolución de problemas y/o trabajo por proyectos, y desarrolla gran interés en los estudiantes.

Por su parte, Barrows (2006), impulsó que los estudiantes formulen sus propias preguntas, prioricen la evidencia y propongan explicaciones, establezcan la o las conexiones entre su propuesta y el conocimiento científico, y comuniquen y argumenten sus explicaciones. En la actualidad, algunas líneas de investigación educativa señalan la importancia del papel del profesor como detonador de los procesos cognitivos.

Esta metodología inició en el área de ciencias dada su cercanía a la experimentación, después se incorporó al trabajo en matemáticas. Una posible explicación a esto es que, si bien las matemáticas trabajan con el método deductivo, sus conceptos pueden ser obtenidos (al menos en la educación básica y media superior) mediante la experimentación. El enfoque indagatorio en la enseñanza de las matemáticas tiene una gran importancia, puesto que el conocimiento matemático se desarrolla a través de la resolución de problemas que surgen de diversos campos.

La indagación promueve en los estudiantes: la modelación, la exploración, la experimentación y la elaboración de conjeturas, explicaciones, argumentaciones, demostraciones, definiciones y representaciones, así como la comunicación de los hallazgos. Con todo ello se espera que los estudiantes adquieran un conocimiento robusto, que desarrollen la creatividad, el razonamiento crítico y una cierta autonomía en el aprendizaje.

NATIVOS DIGITALES

El término “nativos digitales” fue acuñado por Marc Presnky (2001) y se refiere a la generación de jóvenes que ha nacido y crecido usando computadoras, teléfonos celulares y manejando aplicaciones con gran versatilidad. Estos chicos han incorporado la tecnología a su vida como algo natural, no temen investigar qué ofrece una plataforma o una aplicación nueva, y se mueven con mucha confianza ante la nueva oferta. Prensky sostiene que el cerebro de estos jóvenes se ha desarrollado a una velocidad diferente porque están acostumbrados a que las cosas sucedan rápido y se muestran impacientes si es de otra forma.

Dado lo anterior, en las aulas de clase conviven actualmente dos poblaciones ajenas: por un lado, los estudiantes nativos digitales, y por otra sus maestros, que son inmigrantes digitales.

Para Prensky, los nativos digitales tienen las siguientes características:

- Procesan la información de forma ágil e inmediata.
- Se sienten atraídos por multitareas y procesos paralelos.
- Prefieren los gráficos a los textos.
- Funcionan mejor y rinden más cuando trabajan en la red.
- Prefieren instruirse de forma lúdica a embarcarse en el rigor del trabajo tradicional.

Por su parte, los maestros, inmigrantes digitales, por lo general enseñan de la misma forma en la que ellos aprendieron, no tienen la velocidad, ni la capacidad de sus alumnos en el manejo de temas tecnológicos y se resisten a pensar que le enseñanza pueda ser diferente.

Entre los nativos y los inmigrantes digítales hay un problema de comunicación, hablan lenguajes diferentes. Como el mundo se mueve en el lenguaje de los nativos digitales, les corresponde a los adultos acercarse al lenguaje de los jóvenes y diseñar una forma alternativa de abordar los contenidos que se enseñan en clase. Prensky lo sintetiza en una frase “buscar una nueva manera con que aprender las viejas materias”.

LA EVALUACIÓN

La evaluación tiene un papel fundamental en todo proceso de aprendizaje-enseñanza, y desde el enfoque constructivista contempla la valoración de los aprendizajes de los alumnos, las actividades de enseñanza que realiza el docente y su relación con dichos aprendizajes. (Coll y Martín, 1996).

El propósito de la evaluación en la propuesta didáctica que se presenta en este trabajo es determinar los conocimientos previos que tienen los alumnos al ingresar al bachillerato y compararlos contra lo que se construyó después de la implementación de la secuencia para conocer en qué grado se otorgaron interpretaciones significativas a los contenidos abordados y si se realizaron asociaciones entre conceptos. Por interpretaciones significativas entendemos el grado de amplitud y nivel de complejidad con que se han elaborado los significados construidos. (Coll y Martín, 1993). Para Ausubel esto quiere decir el grado de vinculación o interconexión semántica existente entre los esquemas previos y los contenidos por aprender. (Ausubel, 2002; Ausuble, Novak y Hanesian, 1983).

La evaluación propuesta contempla diferentes aspectos: la determinación de los conocimientos previos de los estudiantes y la eficacia de la secuencia, que se mide mediante la aplicación de un examen diagnóstico al inicio y al final del trabajo, y cuyos resultados sirven de comparativo. Con el mapa conceptual se evalúa la integración de los contenidos. Las actitudes se evaluaron con los instrumentos de Autoevaluación y Evaluación Alumno-Tutor.

Instrumentos de evaluación

Los instrumentos de evaluación que se aplican en la secuencia son los siguientes:

Examen diagnóstico. El examen diagnóstico se realiza antes de la intervención educativa con el propósito de valorar los conocimientos previos que tienen los alumnos y que se consideran como fundamento de los nuevos conocimientos en beneficio del logro de aprendizajes significativos (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983),

Si al aplicar un examen diagnóstico, un número considerable de alumnos de un grupo demuestra no tener los elementos para construir los conocimientos que debe aprender, el maestro tiene la posibilidad de adecuar el programa a esta situación o preparar un curso preliminar que garantice que existan las bases para continuar con los estudios, como es el caso de este trabajo.

La evaluación diagnóstica puede ser de dos tipos: inicial y puntual (Rosales, 1991). La evaluación diagnóstica puntual se aplicó por segunda ocasión como un medio para comparar la eficacia de la secuencia implementada.

Autoevaluación del alumno. En el marco del enfoque constructivista de enseñanza, si el alumno tiene un papel activo en todo el proceso de construcción de significado, también debe tener una participación en su propia evaluación como un medio de autorregulación y autoconocimiento de su particular forma de aprender. Para Mauri, Valls y Barberá (2002), "la capacitación del alumno como un aprendiz competente se puede lograr también por su implicación en una determinada práctica de evaluación".

Evaluación Alumno-Tutor. La evaluación formadora propone el traspaso de la responsabilidad de la evaluación y del aprendizaje a los alumnos por medio de diversas estrategias (Marchesi y Martín, 1998; Quinquerer, 1999). Es importante involucrar a los estudiantes en la evaluación del proceso de enseñanza, y esto incluye la práctica de evaluar la función del maestro o tutor; esta acción permitirá al tutor conocer información sobre la eficacia del material y de su intervención en clase y actuar en consecuencia.

Rúbricas. Son un conjunto de indicadores que describen, por medio de criterios de evaluación, el grado en el que un alumno realiza un proceso o un producto. (Ahumada, 2003). Las rúbricas también sirven a los alumnos como guía de supervisión del progreso de su aprendizaje, pues describen lo que debe ser aprendido.

Mapas Conceptuales. Es una estructura que organiza conceptos en jerarquías con diversos niveles de generalidad. Para integrar un mapa conceptual como evaluación, Novak y Gowin (1998) proponen analizar la calidad de la organización jerárquica, la pertinencia de las relaciones y su nivel de integración.

Para el trabajo propuesto, el mapa conceptual servirá como evidencia del manejo que los alumnos tienen de los conceptos abordados y de la forma en que los integraron.

X. DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

¿POR QUÉ LA GEOMETRÍA?

"No entre aquí el que no sepa geometría."

Platón

Desde pequeños tenemos contacto con conceptos de geometría, reconocemos figuras y patrones, y clasificamos a las figuras por su forma, por su número de lados o por su tamaño. De las matemáticas, la geometría representa el ámbito donde nuestro cerebro hace las primeras abstracciones.

Se eligió la geometría plana como base de esta propuesta por estar incluida en los programas de estudio desde los primeros años de la escuela y porque representa una oportunidad para desarrollar habilidades de pensamiento, de argumentación y de resolución de problemas; sin embargo, en muchas ocasiones, su enseñanza se reduce a aprender nombres de figuras y a memorizar fórmulas para hacer cálculos de sus perímetros y áreas de forma mecánica, sin tener claro qué representan estos conceptos.

La geometría euclidiana es un eje que cruza el currículo desde preescolar hasta bachillerato, tiene relación con otras disciplinas y ofrece la posibilidad de comprender la importancia de la argumentación y del método deductivo con el que se desarrollan las matemáticas, y nos permite trabajar por medio de la indagación, es decir, acceder a las matemáticas de forma experimental.

En el presente trabajo se analizan los conocimientos previos de los estudiantes al llegar al bachillerato, contenidos que son necesarios para continuar con el estudio del eje de geometría. Este trabajo se aplicó a dos grupos de alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la UNAM.

El CCH inició operaciones 1971 y su misión es

> "Formar sujetos poseedores de conocimientos sistemáticos en las principales áreas del saber, de una conciencia creciente de cómo aprender, de relaciones interdisciplinarias en el abordaje de sus estudios, de una capacitación general para aplicar sus conocimientos, formas de pensar y de proceder en la solución de problemas prácticos. Con todo ello, tendrán las bases para abordar con éxito sus estudios superiores y ejercer una actitud permanente de formación autónoma." Recuperado de (https://www.CCH.unam.mx/misionyfilosofia)

El Plan de estudios vigente conserva las orientaciones y principios pedagógicos desde su origen, que son:

- Aprender a aprender
- Aprender a ser
- Aprender a hacer

Dicho plan de estudio agrupa el conocimiento en cuatro áreas: Matemáticas, Ciencias Experimentales, Histórico-Social y Taller de Lenguaje y Comunicación.

En matemáticas,

> "Se enseña a los alumnos a percibir esta disciplina como ciencia en constante desarrollo, lo cual les permitirá la resolución de problemas. Se origina en las necesidades de conocer y descubrir el entorno físico y social, así como desarrollar el rigor, la exactitud y formalización para manejarlo".

Los aprendizajes de Matemáticas en el Plan de Estudios 2016 del CCH, vigentes en el desarrollo del presente trabajo, están divididos en cuatro ejes: Álgebra, Geometría Euclidiana, Geometría Analítica y Funciones. Los contenidos que se abordan en la presente secuencia están contemplados en los siguientes cursos:

Curso	Unidad	Nombre	Objetivos
Matemáticas II	3	Elementos básicos de geometría plana	➢ Se promueve la exploración, observación de patrones, elaboración de conjeturas y la construcción de argumentos.
Matemáticas II	4	Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras	➢ Se introduce el razonamiento deductivo y la comprensión del porqué de las demostraciones. ➢ Resalta la diferencia entre una comprobación y una demostración. ➢ Propicia que el alumno valide resultados mediante la argumentación.

Los aprendizajes específicos de los Planes y Programas del CCH que se trabajan en la secuencia presentada son:

- Conoce el origen de la Geometría Euclidiana y su sistematización.
- Describe y reconoce los elementos básicos de una figura geométrica, los expresa de forma verbal y escrita.
- Comprende mediante la construcción, los conceptos: segmentos de recta, punto medio, líneas paralelas, líneas perpendiculares.

- Clasifica los ángulos por medida y su relación con otros.
- Aplica los conceptos en la resolución de problemas.
- Clasifica los triángulos según sus lados y ángulos.
- Explica en qué casos es posible construir un triángulo a partir de tres segmentos dados.
- Muestra y justifica las propiedades entre los ángulos de un triángulo.
- Reconoce y justifica el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.
- Hacer uso de software para una mejor comprensión de los temas.

METODOLOGÍA

DISEÑO

La propuesta presentada surge a partir de la experiencia desarrollada en el trabajo con docentes durante más de tres lustros en la práctica profesional y se ofrece como una posible solución a la problemática planteada en este trabajo, para lo cual se diseñó una secuencia didáctica de enfoque constructivista integrada por ocho actividades para ser implementada en ocho horas de clase en modalidad presencial, con dos ofertas, una que incorpora en algunas actividades la tecnología mediante el uso el programa GeoGebra, en la otra todas las actividades se realizan con lápiz en papel. .

Las estrategias de enseñanza empleadas en la secuencia son variadas, entre las que se cuentan, *actividades focales introductorias* con la intención de atraer la atención de los estudiantes o ponerlos en un conflicto cognitivo, *discusiones guiadas* en la que se invita a los alumnos a exponer lo que saben de un tema o proponer un procedimiento para que con esa información se detecten *concepciones previas erróneas* o *analogías*. Las actividades de la secuencia buscan promover la reflexión, el análisis, la interacción entre pares y la autonomía. La secuencia contempla actividades individuales, de pareja y por equipos. De manera complementaria, se espera que la aplicación de la secuencia promueva la homologación de los conocimientos de los todos los alumnos de un grupo.

El diseño de la secuencia es acorde a la Misión y Filosofía del CCH.

La secuencia se trabajó en cuatro sesiones de dos horas cada una con la siguiente distribución de actividades.

Actividad	**¿Cuántos triángulos?**	**Sesión**
1	Trazo de triángulos	1
2	Desigualdad del triángulo	2
3	Aplicación de la desigualdad del triángulo	2
4	Rompecabezas triangular	3
5	Comprobar vs demostrar	3
6	Trayectorias mínimas	3
7	Teorema de Pitágoras	4
8	El recíproco de Pitágoras	4

POBLACIÓN

La secuencia se implementó en dos grupos de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Sur, con las siguientes condiciones:

GRUPO	130A	249B
ASIGNATURA	Matemáticas I	Matemáticas II
SEMESTRE	Primero	Segundo
TURNO	Matutino	Vespertino
HORARIO	martes y jueves 7:00 a 9:00 horas	martes y jueves 15.00 a 17:00 horas
FECHA DE APLICACIÓN	Septiembre 2017	Marzo 2018
NÚMERO DE ALUMNOS	27	22
PORCENTAJE DE MUJERES	44.4%	54.5%
PORCENTAJE DE HOMBRES	55.5%	45.5%

En el grupo 130A, la secuencia se implementó en un aula con mesas de trabajo para cuatro personas. El grupo 249B se trabajó en el Aula Telmex, en la cual cada estudiante contaba con una computadora. Los estudiantes estaban alineados en filas, lo cual permitía el trabajo por parejas.

MATERIALES E INSTRUMENTOS

En la secuencia se utilizaron los siguientes materiales e instrumentos:

Materiales impresos y concretos

- ¿Cuántos triángulos? (Anexo 1)
- ¿Cuántos triángulos? Versión con GeoGebra (Anexo 2)
- Desarrollo plano (Anexo 3)
- Tijeras
- Reglas
- Compás
- Hojas de colores
- Hojas de cuadros grandes
- Cinta adhesiva
- Bolsa con palitos de madera diseñada específicamente para la enseñanza de la "Desigualdad del triángulo". La bolsa contiene 12 barritas de madera de las siguientes longitudes:

Número de barritas	**Longitud**
3	8 cm
3	5 cm
3	4 cm
3	3 cm

- Plumones de colores

Todo el material utilizado en la implementación de la secuencia fue provisto por la autora.

Instrumentos de evaluación

1. Examen diagnóstico que evalúa los conocimientos previos, el manejo de la desigualdad del triángulo y el Teorema de Pitágoras (Anexo 3)
2. Cuestionario de Autoevaluación (Anexo 4)
3. Cuestionario Alumno-Tutor (Anexo 5)
4. Rúbrica del Mapa Conceptual (Anexo 6)
5. Rúbrica para la Evaluación del Examen Diagnóstico (Anexo 7)

PLANEACIÓN DE LAS SESIONES

I. Plan de acción

Los contenidos abordados en estas cuatro sesiones corresponden al eje de geometría euclidiana, en particular, atienden el estudio de los triángulos a través de un enfoque que permita a los alumnos construir conocimiento a partir de la manipulación de material concreto, de la exploración y la experimentación en casos concretos, para después favorecer su involucramiento en la generalización de resultados.

En la primera sesión se utiliza la construcción de triángulos como un medio para explorar diversas propiedades, entre ellas se identifica su clasificación con base en la longitud de los lados (triángulos equiláteros, isósceles y escalenos) y se enfatizan las características de los triángulos rectángulos.

En la segunda sesión se profundiza el estudio de los triángulos a través de reconocer las triadas de segmentos de recta de diversas longitudes que pueden conformar un triángulo, para llegar a la desigualdad del triángulo como el criterio fundamental para resolver esta cuestión, a la vez que se explora su aplicación.

La tercera sesión se centra en reconocer que la demostración es un aspecto fundamental del trabajo de las matemáticas y que en este nivel apoya el desarrollo de argumentos matemáticos. Se demuestran algunos teoremas que involucran ángulos y vértices de los triángulos mediante actividades diversas y se introduce el teorema de Pitágoras mediante un problema.

En la cuarta sesión se aborda el teorema de Pitágoras y su demostración, para lo cual se llevan a cabo varias actividades que dan cuenta de su importancia en la geometría, presentando también el antecedente histórico. Por último, se estudia el recíproco del mismo teorema.

II. Planeaciones

A continuación, se presentan las planeaciones detalladas de cada una de las sesiones.

PRIMERA SESIÓN
TIEMPO: Dos horas
OBJETIVO GENERAL **Que el alumno:** • **Identifique la argumentación como herramienta fundamental en el campo de las matemáticas.**
OBJETIVOS PARTICULARES **Que el alumno:** • **Ejercite la argumentación.** • **Identifique la importancia de la precisión del lenguaje matemático.** • **Distinga la diferencia entre recta y segmento de recta.** • **Reconozca rectas paralelas y perpendiculares.** • **Clasifique los triángulos de acuerdo con la longitud de sus lados.** • **Clasifique los triángulos de acuerdo con sus ángulos.** • **Ejecute la construcción de triángulos con regla y compás.** • **Identifique las propiedades de los puntos de una circunferencia.** • **Distinga entre comprobación y demostración.**
ACTIVIDADES
El profesor: **1. Inicia con la presentación de los participantes y la aplicación de la dinámica “rompehielos” de grupo.** **2. Aplica el examen diagnóstico por primera vez.** **3. Introduce la sesión mediante una plática sobre la historia de las matemáticas y su forma de trabajo.** **4. Distribuye una copia del material impreso** **5. Presenta, discute, retroalimenta, modera y asesora las actividades.**

Actividades específicas que se realizan con lápiz, papel y juego de geometría	*Actividades específicas mediante el uso de la herramienta GeoGebra*
El profesor: **6. Presenta el material para las actividades.**	El profesor: **6.** Presenta el programa GeoGebra y las actividades a realizar.
El alumno: **A. Traza con regla y compás un triángulo equilátero sin instrucciones.** **B. Traza un triángulo equilátero siguiendo instrucciones dadas.** **C. Argumenta la validez del procedimiento.** **D. Redacta un procedimiento para trazar un triángulo isósceles.** **E. Comprueba el procedimiento propuesto mediante el trazo de un triángulo isósceles.** **F. Traza un triángulo escaleno.** **G. Traza un triángulo rectángulo.** **H. Justifica el trazo del ángulo recto.**	El alumno: A. Explora las herramientas de GeoGebra. B. Traza una recta y un segmento de recta y describe su diferencia. C. Traza un triángulo equilátero sin instrucciones. D. Traza un triángulo equilátero siguiendo instrucciones dadas. E. Argumenta la validez del procedimiento. F. Traza un triángulo equilátero con la tecla de “Polígono regular”. G. Redacta un procedimiento para trazar un triángulo isósceles H. Comprueba el procedimiento propuesto mediante el trazo de un triángulo isósceles. I. Traza un triángulo escaleno. J. Traza un triángulo rectángulo. K. Justifica el trazo del ángulo recto. L. Explora y describe la diferencia entre rectas paralelas y perpendiculares.
MATERIALES	
En papel	*En GeoGebra*

• **Actividad 1 del Anexo 1** • **Regla** • **Compás** • **Escuadras** • **Hojas blancas**	• Actividad 1 del Anexo 2 • Computadora con el programa GeoGebra por estudiante • Cañón
EVALUACIÓN • **Primera aplicación del examen diagnóstico (este examen no cuenta para la calificación).**	

SEGUNDA SESIÓN
TIEMPO: Dos horas
OBJETIVO GENERAL **Que el alumno:** • **Identifique la argumentación como herramienta fundamental en el campo de las matemáticas** • **Analice la relación entre la longitud de los lados de un triángulo**
OBJETIVOS PARTICULARES **Que el alumno:** • **Ejercite la argumentación.** • **Reconozca la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo.** • **Integre las longitudes de los lados de un triángulo en una desigualdad.** • **Distinga las características que deben cumplir tres segmentos que puedan formar un triángulo.** • **Aplique la desigualdad del triángulo en la resolución de problemas.**
ACTIVIDADES
El profesor: 1. **Inicia la sesión con la recapitulación de lo abordado en la primera sesión.** 2. **Distribuye una copia por persona del material impreso y un kit de palitos de madera para el trabajo de la segunda actividad, que se realiza por parejas.** 3. **Presenta las actividades.** **El alumno:** **A.** **Estima el número de triángulos diferentes que se pueden construir con el material del kit con palitos de madera.** **B.** **Sin manipular el material, determina el número de triángulos equiláteros que se pueden construir y argumenta la respuesta.** **C.** **Sin manipular el material, determina el número de triángulos isósceles que se pueden construir y enuncia cada uno de ellos.**

D. Construye con el material de la bolsa los triángulos propuestos e indica aquellos que no se puedan construir. **E. Sin manipular el material y conociendo las longitudes de los palitos de madera de la bolsa, determina el número de triángulos escalenos.** **F. Deduce el teorema de la Desigualdad del triángulo.**	
Actividades específicas que se realizan con lápiz, papel y juego de geometría	*Actividades específicas mediante el uso de la herramienta GeoGebra*
El profesor: 4. **Distribuye el material impreso, presenta la tercera actividad, y guía y modera el trabajo.** **El alumno resuelve lo siguiente:** **G. Dada la longitud de dos segmentos, determina la longitud máxima y mínima de un tercer segmento con el que se pueda formar un triángulo.** **H. Dados dos segmentos de longitud a, b, determina la longitud de un tercer segmento, con el cual sea posible formar un triángulo.** **I. Dibuja un triángulo de perímetro 12.** **J. Dibuja un triángulo de perímetro 12 que tenga un lado de 6 unidades.**	El profesor: 4. Distribuye el material impreso, presenta la tercera actividad que se realiza en GeoGebra, y guía y modera el trabajo. El alumno **resuelve lo siguiente:** G. Dada la longitud de dos segmentos, determina la longitud máxima y mínima de un tercer segmento con el que se pueda formar un triángulo. H. Dados dos segmentos de longitud a, b, determina la longitud de un tercer segmento, con el cual sea posible formar un triángulo. I. Dibuja un triángulo de perímetro 12. J. Dibuja un triángulo de perímetro 12 que tenga un lado de 6 unidades.
MATERIALES	
En papel	*En GeoGebra*

• **Actividad 2 y 3 del Anexo 1** • **Regla** • **Compás** • **Juego de palitos de madera por parejas**	• Actividad 2 y 3 del Anexo 1, versión con GeoGebra. • Computadora con el programa GeoGebra • Cañón

TERCERA SESIÓN
TIEMPO: Dos horas
OBJETIVO GENERAL **Que el alumno:** • **Identifique la argumentación como herramienta fundamental en el campo de las matemáticas** • **Reconozca el método axiomático deductivo y su importancia**
OBJETIVOS PARTICULARES **Que el alumno:** • **Ejercite la argumentación.** • **Distinga entre comprobación y demostración.** • **Reconozca la relación entre ángulos opuestos por el vértice entre dos rectas que se cortan.** • **Demuestre el Teorema: "Ángulos opuestos por el vértice son iguales".** • **Distinga los ángulos interiores de un triángulo.** • **Demuestre el Teorema: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º."** • **Diseñe posibles trayectorias para llegar de un vértice de un paralelepípedo a otro vértice que se encuentre diagonalmente opuesto.**
ACTIVIDADES
El profesor: 1. **Inicia la sesión recapitulando lo abordado en la sesión anterior.** 2. **Distribuye el material impreso y concreto para el rompecabezas triangular y presenta las actividades.** 3. **Cuando corresponde en la sesión, da una breve charla acerca de historia de resultados matemáticos.** **El alumno:** A. **Calcula el área de un triángulo dado.** B. **Calca el triángulo en una hoja y lo recorta por las líneas marcadas.**

<table>
<tr><td colspan="2">

C. **Reacomoda las piezas del triángulo recortado sobre el triángulo dibujado.**
D. **Calcula el área de segundo arreglo.**
E. **Propone una explicación de la diferencia en las respuestas.**
F. **Reflexiona sobre la naturaleza del conocimiento matemático a partir de una charla histórica.**

</td></tr>
<tr><td>

Actividades específicas que se realizan con lápiz, papel y juego de geometría

</td><td>

Actividades específicas mediante el uso de la herramienta GeoGebra

</td></tr>
<tr><td>

El profesor:
4. Distribuye el material impreso de la Actividad 5 y modera las actividades.
5. Presenta las demostraciones correspondientes.

El alumno:
G. **En una hoja, traza dos rectas que se corten.**
H. **Establece la relación entre los ángulos que se forman entre las rectas trazadas.**
I. **Define ángulos opuestos por el vértice.**
J. **Escribe la demostración del teorema que dice que "Ángulos opuestos por el vértice son iguales".**
K. **Traza un triángulo cualquiera en una hoja de papel y señala los ángulos**

</td><td>

El profesor:
4. Distribuye el material de la actividad 5 que se realiza en una hoja de GeoGebra y modera las actividades.
5. Presenta las demostraciones correspondientes.
El alumno:
G. Traza dos rectas que se corten en una hoja de Geogebra.
H. Establece la relación entre los ángulos que se forman entre las rectas trazadas.
I. Define ángulos opuestos por el vértice.
J. Escribe la demostración del teorema que dice que "Ángulos opuestos por el vértice son iguales".
K. En otra hoja de GeoGebra, traza un triángulo cualquiera y señala los ángulos interiores.

</td></tr>
</table>

interiores. **L. Mediante doblado de papel, realiza la demostración del teorema que dice que "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.**	L. Mediante trazos en esa hoja de GeoGebra, replica la demostración del teorema que dice que "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.

El profesor:

6. Presenta las siguientes actividades:

a) Distribuye el desarrollo plano de un paralelepípedo y solicita su construcción.

c) Presenta el problema de la hormiga y la mosca.

d) Solicita se elaboren diferentes trayectorias para que la hormiga llegue de un vértice de la caja a otro que sea diagonalmente opuesto.

e) Promueve la comparación de las trayectorias de la hormiga con la trayectoria de la mosca.

El alumno:

M. Construye el paralelepípedo.
N. Diseña diferentes trayectorias para el problema de la hormiga y la mosca.
O. Calcula la longitud de cada una de las trayectorias.
P. Determina la trayectoria menor al comparar longitudes.

MATERIALES

En papel	*En GeoGebra*
• **Actividad 4, 5 y 6 del Anexo 1**	• Actividad 4, 5 y 6 del Anexo 1
• **Regla**	• Tijeras
• **Compás**	• Plumones de colores
• **Escuadras**	• Cinta adhesiva

• **Tijeras** • **Cinta adhesiva** • **Plumones de colores** • **Hojas blancas**	• Computadora con el programa GeoGebra • Cañón

CUARTA SESIÓN
TIEMPO: Dos horas
OBJETIVO GENERAL **Que el estudiante:** • **Identifique la argumentación como herramienta fundamental en el campo de las matemáticas.** • **Implemente el método axiomático deductivo.**
OBJETIVOS PARTICULARES **Que el estudiante:** • **Ejercite la argumentación.** • **Distinga entre comprobación y demostración.** • **Reconozca la relación aritmética entre los lados de un triángulo rectángulo** • **Demuestre el teorema de Pitágoras.** • **Interprete la relación aritmética del teorema de Pitágoras como una propiedad geométrica.** • **Identifique el reciproco del Teorema de Pitágoras.**
ACTIVIDADES **El profesor:** 1. **Inicia la sesión a partir de las cajas construidas en la tercera sesión y presenta las actividades.** 2. **Retoma el problema de la hormiga y la mosca como punto de partida para abordar el Teorema de Pitágoras.** 3. **Presenta el teorema de Pitágoras y establece las condiciones de los triángulos en los cuales se puede aplicar.** 4. **Platica la historia del Teorema de Pitágoras y por qué lleva ese nombre. (5 min)** 5. **Guía la demostración del Teorema de Pitágoras.** **El alumno:** A. **Retoma el problema de la hormiga y la mosca y diseña tres diferentes**

<table>
<tr><td colspan="2">

trayectorias para el recorrido de la hormiga.

B. **Calcula las longitudes de las trayectorias de la hormiga y la mosca.**

C. **Compara las trayectorias y selecciona la más pequeña.**

D. **Traza un triángulo rectángulo y verifica que se satisface la relación aritmética del Teorema de Pitágoras entre las longitudes de los lados del triángulo.**

E. **Demuestra, de forma individual, el teorema de Pitágoras.**

</td></tr>
<tr><td>

Actividades específicas que se realizan con lápiz, papel y juego de geometría

El profesor:

6. Presenta en el pizarrón una interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras.

El alumno:

F. Verifica la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras. Para ello:

i. Traza un triángulo rectángulo y construye cuadrados sobre los lados.

ii. **Verifica que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es la misma que el área del cuadrado construidos sobre la hipotenusa.**

</td><td>

Actividades específicas mediante el uso de la herramienta GeoGebra

El profesor:

6. Presenta una interpretación geométrica del Teorema de Pitágoras.

El alumno:

F. Verifica la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, para ello:

i. En una hoja de GeoGebra traza un triángulo rectángulo y construye cuadrados sobre los lados.

ii. Verifica que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es la misma que el área del cuadrado construidos sobre la hipotenusa.

</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

El profesor:

7. **Pregunta: ¿si tres números satisfacen la relación aritmética del teorema, pueden estos números ser los lados de un triángulo rectángulo?, ¿por qué?, y modera las argumentaciones de los alumnos.**
8. **Define el recíproco del teorema de Pitágoras.**
9. **Presenta un video de YouTube (**https://youtu.be/aL9Q0fyTKxA**) que muestra una posible representación de los números que hay en la tablilla Plimpton 322.**

MATERIALES

En papel	*En GeoGebra*
• **Actividad 7 y 8 del Anexo 1** • **Hojas de color** • **Hojas blancas** • **Tijeras** • **Pegamento**	• Actividad 7 y 8 del Anexo 1, versión con GeoGebra. • Computadora con el programa GeoGebra • Hojas de color • Hojas blancas • Tijeras • Pegamento

EVALUACIÓN

- **Aplicación de la Evaluación Alumno – Tutor**
- **Aplicación de la Evaluación Autoevaluación**
- **Segunda aplicación del examen diagnóstico (este examen no cuenta para la calificación).**
- **Mapa conceptual**
- **Rúbrica del mapa conceptual**

CRONOGRAMA

Se presenta a continuación el cronograma de las actividades por sesión y grupo.

SESIÓN	ACTIVIDAD	TIEMPO (minutos)
1	Presentación	10
1	Examen Diagnóstico	10
1	Introducción y distribución de material	10
1	Actividad 1 Trazo de triángulos	90
2	Recapitulación y distribución de material	15
2	Actividad 2 Desigualdad del triángulo	60
2	Actividad 3 Aplicación de la desigualdad del triángulo	45
3	Recapitulación y distribución de material	15
3	Actividad 4 Rompecabezas triangular	30
3	Actividad 5 Comprobar y demostrar	60
3	Actividad 5 Trayectorias mínimas	15
4	Recapitulación y distribución de material	15
4	Actividad 6 Trayectorias mínimas	15
4	Actividad 7 Teorema de Pitágoras	45
4	Actividad 8 Recíproco del Teorema de Pitágoras	20
4	Evaluación	15

XI. IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

INFORME DE ACTIVIDADES

MEMORIA PORMENORIZADA DE LA APLICACIÓN DE LA SECUENCIA AL GRUPO 130A DEL CCH SUR

GRUPO: 130A

ASIGNATURA: Matemáticas I

SEMESTRE ESCOLAR: Primero

TURNO: Matutino

FECHA APLICACIÓN: septiembre 2017

NÚMERO DE ALUMNOS: 27

DISTRIBUCIÓN GÉNERO: 44.4% mujeres, 55.5% hombres

Grupo 130A del CCH Sur

PRIMERA SESIÓN

La primera sesión se planeó con tiempo y por desgracia coincidió con el regreso a clases después de la interrupción de actividades debido al sismo del 19 de septiembre de 2017, así que los alumnos llegaron al salón de clases con una sensación de incertidumbre. El inicio se retrasó para esperar a los estudiantes que venían retrasados porque había problemas con el transporte. A la primera sesión se presentaron 23 de los 27 inscritos en el grupo.

Para empezar, se presentó el profesor ante el grupo e implementó una actividad rompehielos en la cual se les pregunta qué carrera querían estudiar, y en lugar de llamarlos por su nombre se les llamaba por la profesión que habían mencionado; para ellos fue una sorpresa descubrir lo que habían dicho algunos de sus compañeros. Fue interesante saber que todos los estudiantes tenían la expectativa de llegar a la Universidad.

Después de la presentación, los alumnos resolvieron el examen diagnóstico. La sesión empezó con una plenaria donde se retomó en el pizarrón la pregunta de qué es un triángulo, misma que estaba incluida en el examen diagnóstico, y las respuestas fueron como se esperaba: “figura de tres lados”, “figura de tres lados y ángulos”, etc. Al cuestionarlos sobre qué otra cosa deberíamos decir para ser más precisos con el lenguaje, se mostraron sorprendidos cuando uno de los alumnos mencionó que se necesitaba pedir que fuera una figura cerrada.

Las actividades de la secuencia se realizaron de la siguiente manera:

a) Solicitar a los alumnos que tracen un triángulo equilátero con regla y compás con un procedimiento que conozcan o recuerden.

b) Proporcionar la instrucción para trazar un triángulo equilátero con regla y compás, implementar el procedimiento en el trazo de un segundo triángulo equilátero

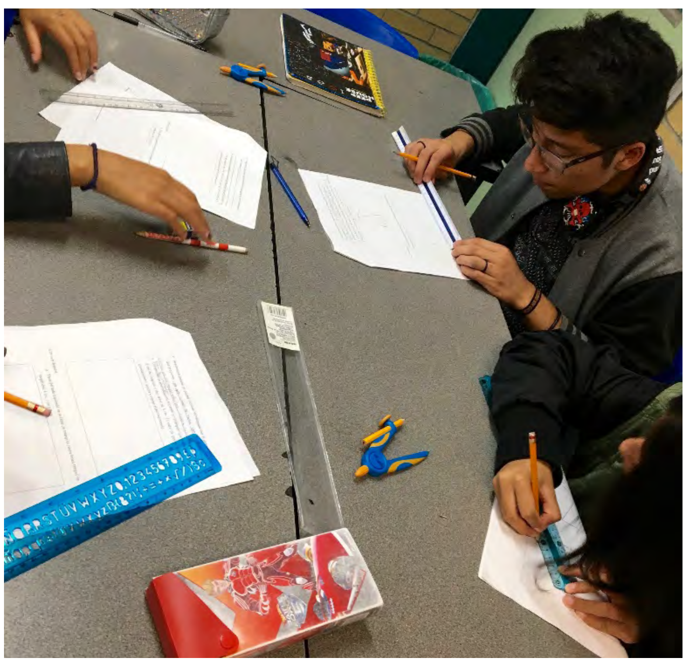
c) Solicitar a los alumnos que redacten un procedimiento para trazar un triángulo isósceles y que argumenten por qué funciona el procedimiento.

d) Poner a prueba el procedimiento propuesto trazando un triángulo isósceles. Pedir a los alumnos que comparen su trabajo con el de sus compañeros y que corrijan si es necesario.

e) Trazar un triángulo escaleno.

f) Trazar un triángulo rectángulo y describir la manera en que se trazó el ángulo recto.

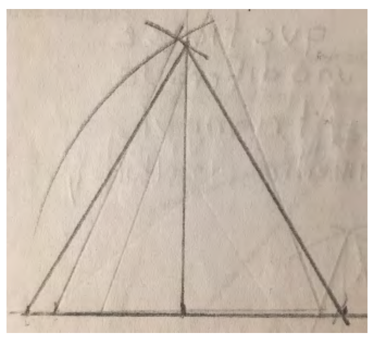
g) Retomar la discusión en grupo.



Alumnos del grupo 130A. Trabajando en el trazo de triángulos

Es notable que los alumnos no recuerdan los nombres de la clasificación de los triángulos, pero saben que hay triángulos que tienen todos sus lados iguales. A los triángulos con dos lados iguales un alumno lo llegó a llamar triángulo “de pino”, también recuerdan que hay triángulos de lados diferentes.

De la realización de las actividades en el grupo, el 34.78% de los alumnos trazó el primer triángulo equilátero con un procedimiento correcto, los demás utilizaron procedimientos informales incorrectos, como ejemplo, se presenta uno muy socorrido por los estudiantes que se bautizará como "método de tanteo" y consiste en trazar un segmento de base, marcar el punto medio (o algo parecido) y subir una línea desde ese punto de igual longitud que la que trazaron de base y unir el extremo superior del segmento a los de la base. No hubo ningún cuestionamiento acerca de que si el punto marcado era efectivamente el punto medio ni sobre la relación entre los dos segmentos trazados.

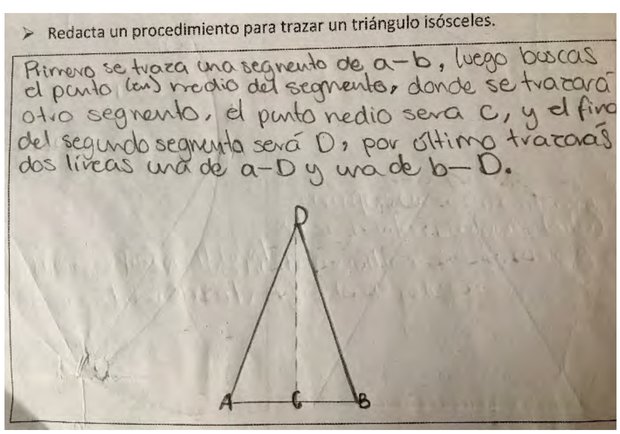


Ejemplo de triángulo equilátero trazado con procedimientos propios por un alumno en el grupo 130A

Todos los estudiantes fueron capaces de trazar el triángulo equilátero después de que se les presentó el procedimiento con regla y compás, pero no supieron argumentar por qué este procedimiento garantiza que el triángulo es equilátero. Para resolver esta situación, se dibuja una especie de elipse en el pizarrón y se les dice que eso era un círculo, lo cual todos negaron, pero no sabían explicar por qué no es así; la respuesta era "no se ve redondo". Alguien mencionó que las distancias no eran iguales, ¿qué distancias?, se les pregunta, a lo que el estudiante responde, “las recta trazadas del centro al círculo son iguales”. Se aclaró que el radio de la circunferencia es constante y se trabajó la diferencia entre el concepto de segmento de recta y recta. A partir de estas aclaraciones quedó clara la razón por la cual se puede garantizar que el triángulo trazado con regla y compás es equilátero.

La siguiente actividad consistió en proponer un procedimiento para trazar un triángulo isósceles, justificar la validez de su procedimiento y comprobarlo trazando un triángulo. Los alumnos no se percataron de que podían utilizar el procedimiento que aprendieron para trazar un triángulo equilátero con regla y compás, y resultó que el 87% del grupo utilizó en el trazo nuevamente métodos de tanteo y solo el 13% de los alumnos aplicó el procedimiento aprendido.

Se hizo un primer cierre para recapitular los procedimientos abordados en los trazos en preparación para el trazo del triángulo escaleno. Este trazo mejoró, ya que el 56.52% de los alumnos del grupo lo hizo adecuadamente, el 43.47% lo trazó de manera incorrecta y dos alumnos del grupo no hicieron ningún trazo y anotaron en la hoja de las actividades, “no lo pude trazar”



Procedimiento propuesto para trazar un triángulo isósceles por un alumno del grupo 130 A.

Después, se solicita a los alumnos definir qué es un triángulo rectángulo y trazar uno. De las respuestas, destaca que el 34.78% de los alumnos no tiene claro este concepto, y dan definiciones con errores conceptuales. Del resto, el 30.43% dijo que es "el que, poniendo otro triángulo, se forma un rectángulo" y aunque la definición no es precisa, se infiere que se refieren a ángulos rectos. Cuando en plenaria se cuestionó qué es un triángulo rectángulo, dieron respuestas diversas y erróneas como "un triángulo 30, 60 y 90", o "aquel cuyos sus ángulos suman 180 grados".

Se aclaró la definición de triángulo rectángulo y se les pregunta si es posible trazar un triángulo isósceles que fuera rectángulo; la respuesta fue que no. De repente “matemático” (el alumno que piensa estudiar la carrera de matemáticas en la Universidad) levantó la mano y dijo: “¿y si trazo un cuadrado y dibujo su diagonal me queda un triángulo rectángulo que tiene dos lados iguales? El resto del grupo lo entendió hasta después de que la propuesta se dibujó en el pizarrón.

El trazo de triángulos rectángulo fue al tanteo o de longitudes diferentes, asumiendo que con ello garantizaban que el triángulo era rectángulo. El 45.45% del grupo no supo explicar cómo había trazado el ángulo recto o dio respuestas imprecisas y/o con errores de concepto, por ejemplo, "por la unión de dos líneas rectas que forman cuatro lados del mismo tamaño", "puse dos líneas rectas y después otra", "utilice dos rectas perpendiculares que no eran diagonales", trace una línea de 3 cm e hice 2 líneas de la misma medida". Dos alumnos no contestaron la pregunta y otro más respondió "no sé".

Se le hace ver al grupo que, ya que todos van a estudiar una carrera universitaria, de lo que se trata en este nivel medio superior es aprender a elaborar conjeturas, a validarlas y a dar argumentos sólidos que las respalden. Así como lo va a hacer la alumna “criminalista” en su trabajo.

SEGUNDA SESIÓN

La sesión inició con una recapitulación de lo trabajado en la sesión anterior con el propósito de que los alumnos que no asistieron a la primera pudieran incorporarse al trabajo y no se sintieran en desventaja. Después de repartir el material concreto e impreso, se inició el trabajo con la Actividad 2. La primera pregunta consistía en ***estimar*** *el número de triángulos diferentes que se pueden formar con los palitos de madera del kit.*, en el entendido de que la pregunta no se refiere a construirlos al mismo tiempo. Las estimaciones del grupo fueron: 4, 6, 10, 12, 16, 36, 44, 48.

Kit de palitos de madera que se utiliza en la Actividad 2

Después se respondió la pregunta inicial mediante actividades estructuradas en tres partes:

a) Primero, se les solicita a los alumnos que determinen, **sin manipular el material de la bolsa**, el número de triángulos equiláteros que se pueden construir con el juego de palitos. Hubo consenso en que solo se podían construir cuatro triángulos y los alumnos fueron capaces de enunciar un argumento adecuado que justificara su respuesta.

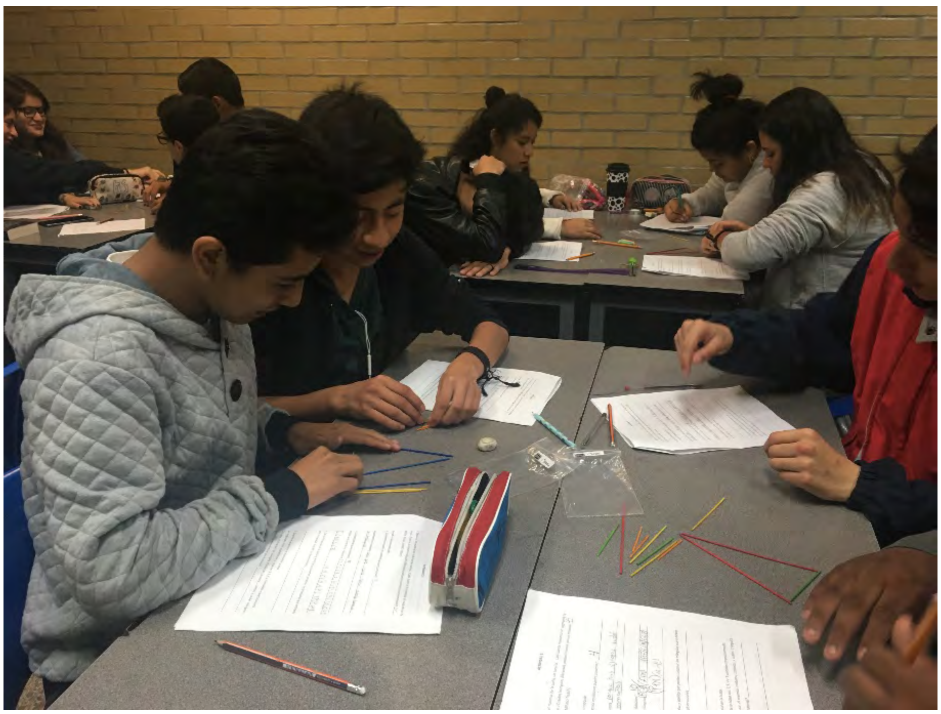
b) **Sin manipular el material**, se les preguntó cuántos triángulos isósceles se pueden construir, y las respuestas fueron:

Número de triángulos isósceles	Porcentaje
9	9.09%
10	54.54%
11	22.72%
12	4.54%
Sin respuesta	9.09%

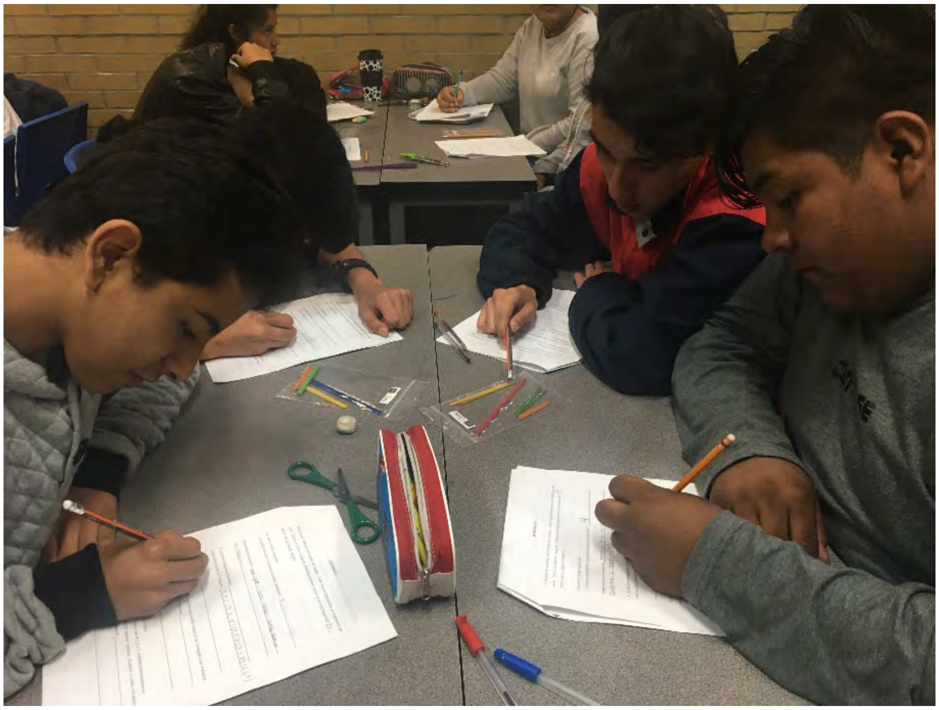
Después, se les solicitó hacer una lista de cada uno de los triángulos que podían construir, para referirse a ellos se propusieron ternas con la notación; F(familiar), G(grande), M(mediano) y P(pequeño). Los estudiantes enunciaron de manera extensa las ternas y **comprobaron manipulando el material de la bolsa** la posibilidad de construcción de los triángulos. A partir de la actividad, los estudiantes corregían su respuesta cuando procedía. Los comentarios de los estudiantes fueron: “Vimos y comprobamos que hubo triángulos que no se pudieron formar: MMF y PPF”, “Había triángulos que no se podían cerrar por lo que no se consideran polígonos”, “no se pudieron construir algunos triángulos, pero los propuestos por nosotros sí”.

c) A continuación, se les pidió que regresaran el material a la bolsa y se anotó en el pizarrón la longitud de los segmentos que la integran, se les preguntó por el número de triángulos escalenos que se podían formar con ellos. La pregunta se debía responder **sin sacar el material de la bolsa**. Los alumnos escribieron sus propuestas y el 90% contestó correctamente.

d) Como cierre de la actividad, se les preguntó a los alumnos: “¿qué condición deben cumplir los segmentos para que con ellos se puedan formar un triángulo?” En las respuestas se observa que fueron capaces de inferir la Desigualdad del Triángulo.

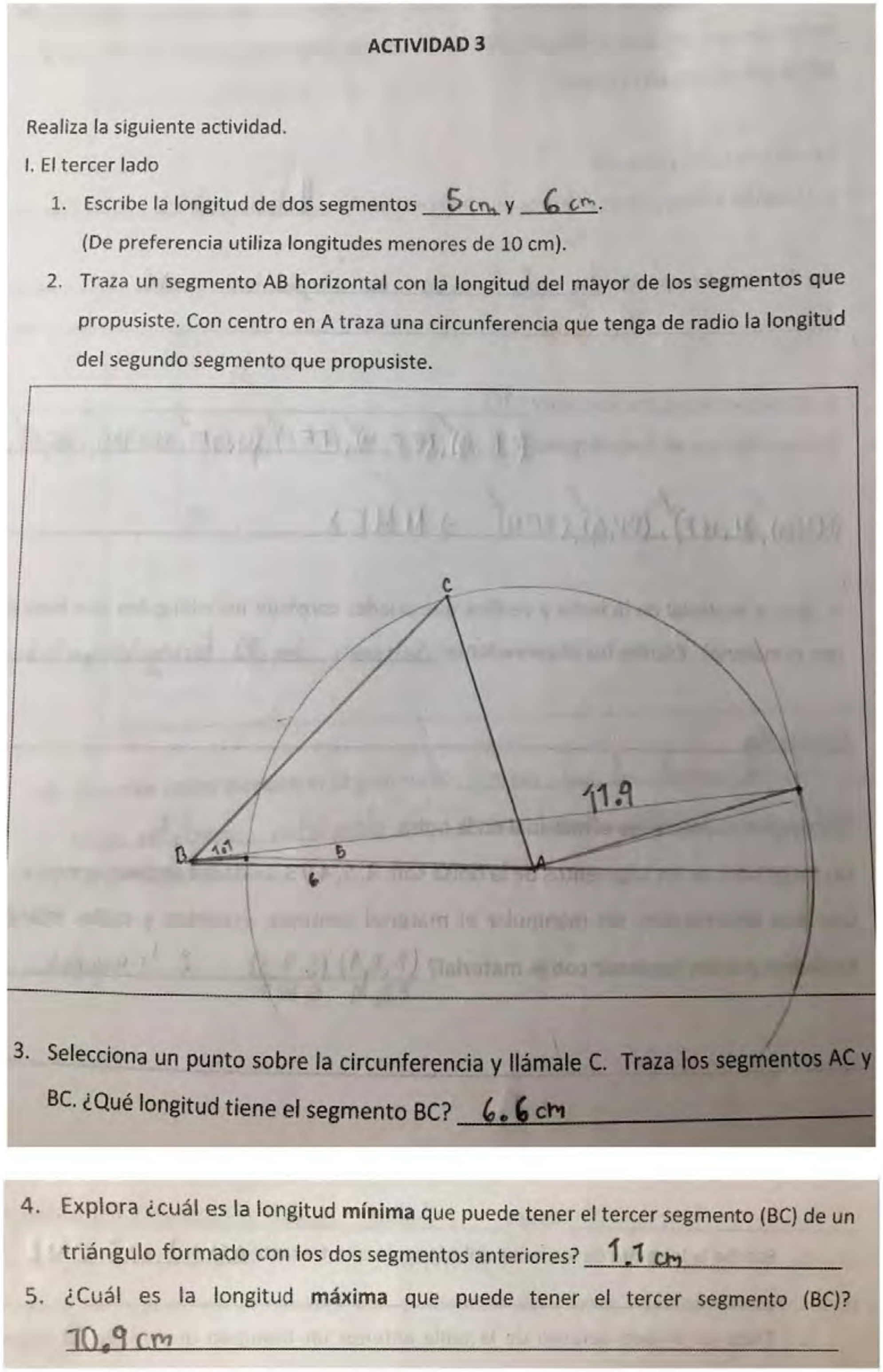


Alumnos del grupo 130A trabajando en la sesión de la Desigualdad del triángulo



Alumnos del grupo 130A trabajando en la sesión de la Desigualdad del triángulo

En la segunda parte de esta sesión se les solicitó a los alumnos proponer la longitud de dos segmentos, y determinar con ellos la longitud máxima y mínima de un tercer segmento con el que se puede construir un triángulo. En las respuestas que dieron se detecta una ventana de oportunidad para abordar contenidos previos que los alumnos necesitan al llegar al bachillerato, esto consiste en el concepto que tienen los alumnos de los números reales. Se presenta como ejemplo el trabajo de un alumno que propone los segmentos 5 y 6 como la longitud de dos de los lados de un triángulo, y como los valores mínimo y máximo del tercer segmento 1.1 y 10.9. En la discusión se apreció que los alumnos consideraban que el 1.1 era el "siguiente número después del 1 y el 10.9 el número anterior al 11, situación que era ideal para discutir o reforzar el concepto de números reales y su densidad, pero como el tiempo de la sesión está acotado no fue posible aprovechar esta oportunidad. En los trabajos se aprecia un avance en el manejo de los trazos.



ACTIVIDAD 3

Realiza la siguiente actividad.

I. El tercer lado

1. Escribe la longitud de dos segmentos 5 cm y 6 cm.
   (De preferencia utiliza longitudes menores de 10 cm).
2. Traza un segmento AB horizontal con la longitud del mayor de los segmentos que propusiste. Con centro en A traza una circunferencia que tenga de radio la longitud del segundo segmento que propusiste.

3. Selecciona un punto sobre la circunferencia y llámale C. Traza los segmentos AC y BC. ¿Qué longitud tiene el segmento BC? 6.6 cm
4. Explora ¿cuál es la longitud **mínima** que puede tener el tercer segmento (BC) de un triángulo formado con los dos segmentos anteriores? 1.1 cm
5. ¿Cuál es la longitud **máxima** que puede tener el tercer segmento (BC)? 10.9 cm

Trabajo de un alumno en la búsqueda de los valores mínimo y máximo del tercer lado de un triángulo, dada la longitud de dos lados de éste

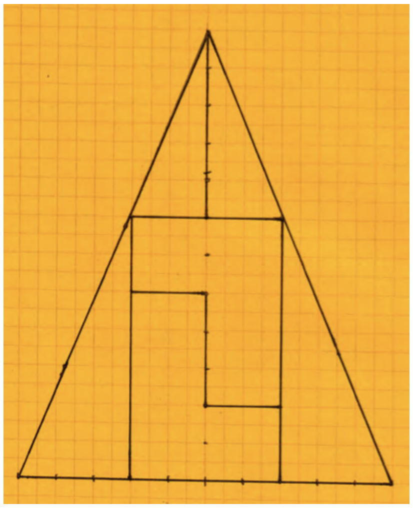
La última parte de la actividad 3 sirve para valorar si los estudiantes integraron a su estructura cognitiva la Desigualdad del Triángulo que ya habían enunciado. Se les solicitó el trazo de dos triángulos, ambos de 12 cm de perímetro, donde uno de ellos tenga un lado de 6 cm de longitud.

Con el antecedente de haber deducido la desigualdad del triángulo en la primera parte de la sesión, el 35% de los estudiantes del grupo contesto que no era posible hacer esa construcción; el 45% propuso como lados para el triángulo que tiene un lado de 6 cm alguno de los siguientes triángulos: (6,3,3), (6,4,2), (6,5,1); el 20% del grupo mencionó al triángulo (6,4,3) como respuesta, propuesta que no satisface el perímetro solicitado.

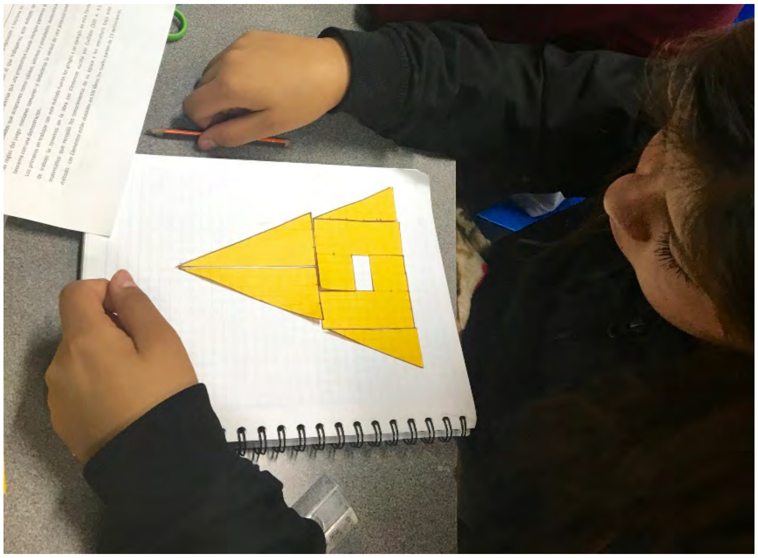
Los estudiantes son inquietos y platican cuando se están dando instrucciones o cuando se está trabajando en el cierre de una actividad, por lo que al final de la sesión se les preguntó qué les parecía la propuesta de trabajar con base en actividades y que ellos fueran los constructores de su propio conocimiento. Todos se manifestaron a favor de trabajar con esta metodología y en contra de una forma tradicional, sin embargo, como adolescentes que son, aprovechan cualquier momento para platicar y comentar las cosas entre ellos.

TERCERA SESIÓN

La sesión inició con la recapitulación de lo abordado en las sesiones anteriores, después continuó con la actividad 4, en la cual se repartió a los estudiantes el Rompecabezas Triangular y se les invitó a recortar el triángulo, partirlo en las piezas indicadas y reacomodarlo en la misma superficie. El propósito de esta actividad es promover la reflexión de por qué sabemos que nuestros conocimientos son válidos. Los estudiantes debían de determinar el área de un triángulo, recortar las piezas que lo formaban y reacomodarlas, después de lo cual el área del triángulo parecería haber disminuido en dos unidades.



Rompecabezas triangular



Rompecabezas triangular modificado por una alumna del grupo 130 A.

La primera observación es que muchos estudiantes no recordaban qué era el área, ni cómo calcularla.

A continuación, se transcriben algunas de las definiciones de área propuestas:

- Área interna del triángulo
- Es la operación de lo interno del triángulo.
- Superficie interna
- La cantidad que ocupa dentro de su perímetro.
- Es el espacio delimitado por el polígono.
- Es la superficie que delimita por los vértices que forma un polígono de tres lados.
- Es el espacio de adentro delimitado por los lados.
- Superficie de una figura, limitada por sus aristas de cada lado; se mide en metros cuadrados.
- Es el ~~espacio~~ superficie delimitado por vértices y aristas.
- Es la parte que ocupa todo el centro de la figura. Sumando todos sus lados.
- El espacio que abarca una figura geométrica
- Es lo que hay dentro de él.
- Es la base comprendida dentro del triángulo.
- Es la medida de la superficie que tiene la figura
- Es lo que mide por dentro.
- Es la superficie que esta por dentro de una figura.
- Es el espacio plano que ocupa un triángulo.
- Es el espacio que ocupa un triángulo.

Del total de los alumnos, sólo el 9.09% escribió una definición adecuada de área y el 18.18% no la respondió.

Llama la atención que, para determinar el área del triángulo, algunos alumnos multiplicaban la longitud de la base por la longitud de uno de los lados y lo divídian entre 2, otros sumaban la longitud de los lados. Se discutieron los conceptos en plenaria y al final los que estaban mal corrigieron su respuesta.

¿Qué explicación le dan los estudiantes al conflicto que surge con la actividad del rompecabezas triangular? ¿Cómo justificar que en una superficie puede ser cubierta por 4 piezas o acomodarlas de forma que sólo se cubra parcialmente?

A pesar de que se solicitaba realizar esta actividad por equipos, los alumnos trabajaban de manera individual y les costó trabajo proponer una explicación; algunas de las respuestas fueron:

- Porque el rompecabezas nuevo tiene 2 figuras irregulares y 4 regulares.
- Se tiene 4 polígonos regulares y 2 irregulares, lo que al momento de acomodar de otra forma no queda.
- Por la forma de las figuras, no permiten cerrarlo.
- Porque el perímetro crece, pero muy leve.
- Al acomodar de diferente forma, reducimos el área que ocupan las figuras mientras el perímetro es el mismo.
- Tal vez al acomodar la figura de distinta manera puede disminuir su área
- Los triángulos pequeños no son los suficientemente grandes para ocupar el área de los grandes.
- Que las figuras del triángulo se pueden modificar, pero no es la misma medida ya que el área cambia.

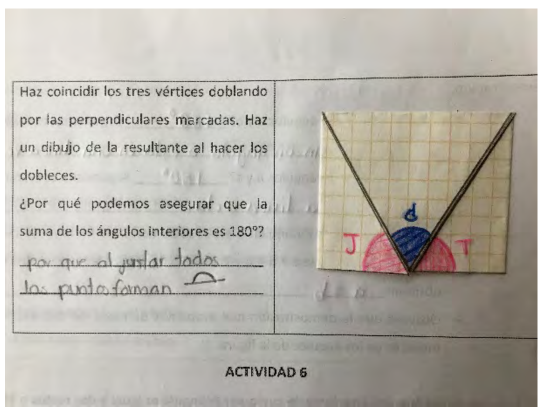
En plenaria se relacionó la actividad con el sismo que se acababa de vivir en la Ciudad de México. Se les preguntó ¿cuál es la razón por la que había temblado?, un alumno dijo que por la Placa de Cocos. Se le replica al alumno: ¿cómo sabemos que existe la Placa de Cocos, si nadie la ha visto como tal? Se les platicó que la ciencia es una forma de explicarnos el mundo y que tiene un método de trabajo que está asentado en argumentos lógicos.

Con el trabajo realizado en las sesiones anteriores, se logró contar con la atención total de los alumnos. Se comentó sobre la forma de trabajo en matemáticas y que está había iniciado con la cultura griega hace más de 2000 años y se presentó el trabajo de Euclides. Como ejemplo de la forma de trabajo en matemáticas se les demostró en el pizarrón que los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Los estudiantes se mostraron asombrados y fue muy gratificante ver sus caras al entender la demostración.

Para la siguiente actividad se escribieron las siguientes ternas en el pizarrón; (10, 10, 10), (10, 12, 14), (14, 14, 10) y se les solicitó que, por equipos de tres personas, trazaran los tres triángulos, y se les preguntó: ¿qué sabían de los ángulos interiores de ellos? La mayoría del grupo recitó que "la suma de los ángulos interiores es 180º". Se les preguntó: ¿por qué sabemos que esto es cierto?, "porque lo podemos medir" contesto un alumno, ¿en cuántos triángulos se tendría que medir para garantizar que esta propiedad se cumple siempre? Se discutió la necesidad de hacer la demostración.

Para demostrar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º, se trabajó con los triángulos trazados y, después de recortarlos, se les pidió que pusieran un nombre a cada ángulo dentro del triángulo (pregunta que para los maestros o matemáticos tiene un sentido especifico; para los alumnos como jóvenes que son, representó la oportunidad para un chascarrillo), y propusieron que los nombres fueran; Pedro, Juan y Daniel, por lo cual los ángulos de cada triángulo se nombraron como ***p, j, d***.

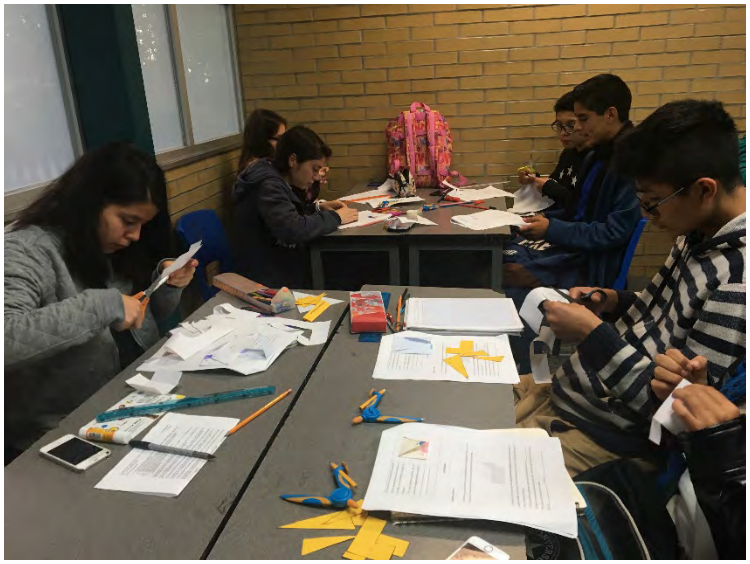
Las actividades para hacer la demostración por medio de doblado de papel se guiaron frente al grupo, los alumnos también contaban con la instrucción escrita de la Actividad 5 en el material impreso. A continuación, se presenta el trabajo de uno de los alumnos.



Trabajo de uno de los alumnos del grupo 130A en la demostración de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual 180º.

Como cierre de la actividad, se planteó una analogía del método de trabajo de los matemáticos con la construcción de un edificio: los cimientos son los axiomas y los muros las proposiciones o teoremas.

La sesión concluyó con la Actividad 6, que consistió en construir una caja de base rectangular sin tapa. Las medidas de la caja son conocidas y el problema era determinar la longitud de la trayectoria que sigue una hormiga y una mosca para desplazarse de un vértice de la caja a otro que se encuentra diagonalmente opuesto. La instrucción del material escrito era construir el desarrollo plano de la caja, sin embargo, al ver que el tiempo invertido en la sesión había sido mayor al planeado, se proporcionó a los alumnos el desarrollo plano de la caja, para reducir el tiempo en el armado y avanzar en la sesión. Los alumnos construyeron las cajas y tuvieron poco tiempo para buscar las trayectorias solicitadas en el problema.



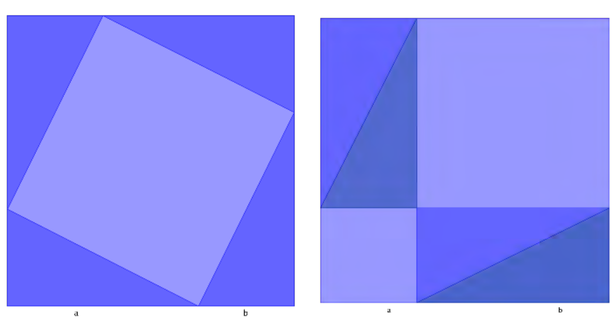
Alumnos del grupo 130A construyendo la caja con el desarrollo plano para el problema de la hormiga y la mosca.

CUARTA SESIÓN

A esta sesión asistieron todos los estudiantes del grupo. Se inició con la recapitulación de los conceptos importantes abordados en las sesiones anteriores. Después se repartió el material escrito y las cajas construidas en la tercera sesión. Se solicitó a los alumnos encontrar tres trayectorias diferentes que podría recorrer la hormiga para llegar de un vértice a otro diagonalmente opuesto y determinar sus longitudes, con el propósito de seleccionar la menor de ellas y compararla con la longitud de la trayectoria que realizaría una mosca por vía aérea. Las trayectorias propuestas por los alumnos consistían en recorrer las aristas de la caja de diversas formas o en cruzar la base de la caja por la diagonal. A partir de este problema se abordó el Teorema de Pitágoras. Primero se les pidió a los alumnos que escribieran: ¿qué dice el Teorema de Pitágoras? El 41.66% de las respuestas incluyeron errores conceptuales, como son, "la suma de a + b = c", "cateto opuesto + cateto adyacente da igual a la hipotenusa", "$CO^2 + CA^2 = HIP$", "la suma de las potencias de a + b es igual a c". El 29.16 % de los alumnos reconoce que el teorema se aplica únicamente a triángulos rectángulos.

Después se discutió en plenaria el teorema y su aplicación, y se procedió a hacer una demostración de tipo geométrico que tiene como base la comparación del área de dos cuadrados con las siguientes actividades:

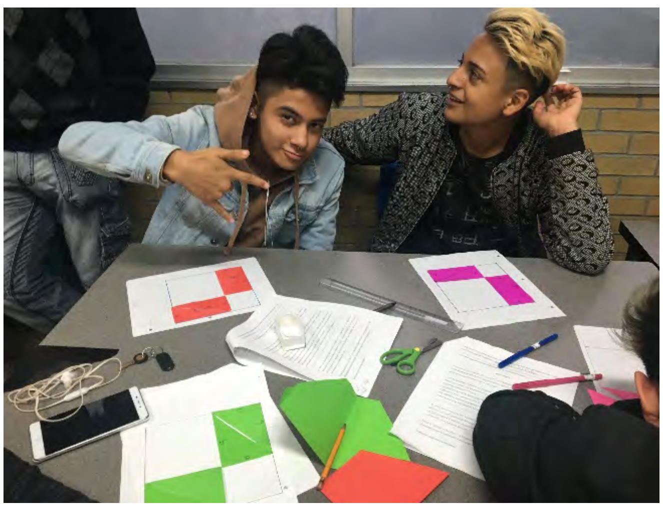
a) Recortar un triángulo rectángulo y hacer siete copias iguales al primer triángulo.
b) Llamar *a* y *b* a los catetos del triángulo y trazar un cuadrado de lado *(a+b).*
c) Acomodar cuatro de los triángulos sobre el cuadrado de lado *(a+b)* de manera que en la figura haya cuatro triángulos y un cuadrado.
d) Trazar un segundo cuadrado de lado *(a+b)* y reacomodar el rompecabezas de manera que en el mismo cuadrado haya cuatro triángulos y dos cuadrados, como se muestra en la ilustración.
e) Escribir y comparar las áreas del cuadrado.



Demostración geométrica del teorema de Pitágoras trabajada en el aula

Fue muy satisfactorio ver que los alumnos trabajaban con interés y cuando había pausas para discutir la actividad en grupo, todos ponían atención. La actividad se trabajó con papel de colores y cada alumno escogió el color de su preferencia, lo cual sirvió de aliciente para el trabajo.

Como cierre de esta parte, se presentó en el pizarrón el desarrollo plano de las cajas que los alumnos habían construido; al verlo los alumnos fueron capaces de dibujar la menor trayectoria de la hormiga y calcular su longitud con el Teorema de Pitágoras. Los alumnos se mostraron asombrados de que no hubieran podido determinar la trayectoria menor de otra forma.



Alumnos del grupo 130A trabajando en la demostración del Teorema de Pitágoras.

Alumnos del grupo 130A trabajando en la demostración del Teorema de Pitágoras.

En la última actividad se partió de la pregunta: “si tres números a, b, c satisfacen la condición algebraica $a^2 + b^2 = c^2$, ¿pueden estos tres números ser las longitudes de los lados de un triángulo? La mayoría del grupo respondió afirmativamente, después se preguntó: “¿qué tipo de triángulo es?” La mayoría del grupo se manifestó en el sentido de que no se podía saber. Se les presentó el recíproco del Teorema de Pitágoras. Los alumnos nunca habían escuchado hablar del tema. Después, se les presentó la tablilla Plimpton 322 y se reprodujo un video de YouTube (https://youtu.be/aL9Q0fyTKxA) que ilustra una hipótesis de lo que podrían representan los números escritos en ella.

Para finalizar la sesión, se solicitó elaborar un mapa conceptual, primero se les preguntó a los alumnos que elementos debería tener un mapa, entre los que mencionaron están: conceptos, relaciones, líneas, jerarquías, se aclaró que son recursos gráficos que representan la relación y jerarquía de conceptos y proposiciones de un tema y se repartió su rúbrica (Anexo 6). Después se aplicó el instrumento de Autoevaluación, el instrumento de Evaluación Alumno-Tutor y, por último, se aplicó por segunda ocasión el examen diagnóstico. El examen ya resuelto se les intercambió por una golosina. Muchos de los alumnos se despidieron con afecto al salir del salón.

MEMORIA PORMENORIZADA DE LA APLICACIÓN DE LA SECUENCIA AL GRUPO 249B DEL CCH SUR

GRUPO: 249B

ASIGNATURA: Matemáticas II

SEMESTRE ESCOLAR: segundo

TURNO: vespertino

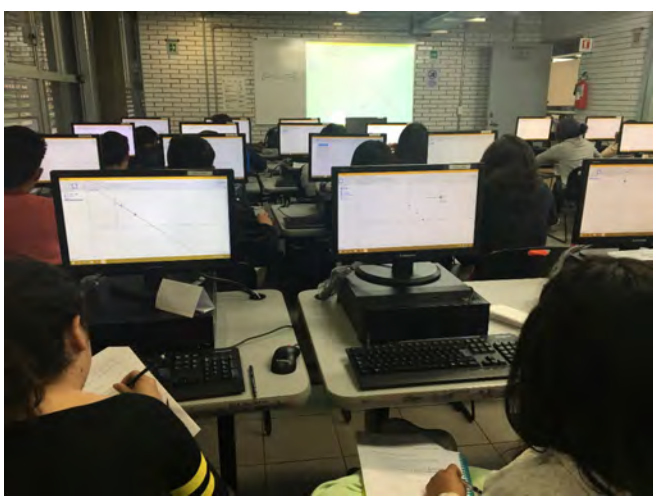
FECHA APLICACIÓN: marzo de 2018

NÚMERO DE ALUMNOS: 22

DISTRIBUCIÓN DE GÉNERO: 54.5% mujeres, 45.5% hombres

PRIMERA SESIÓN

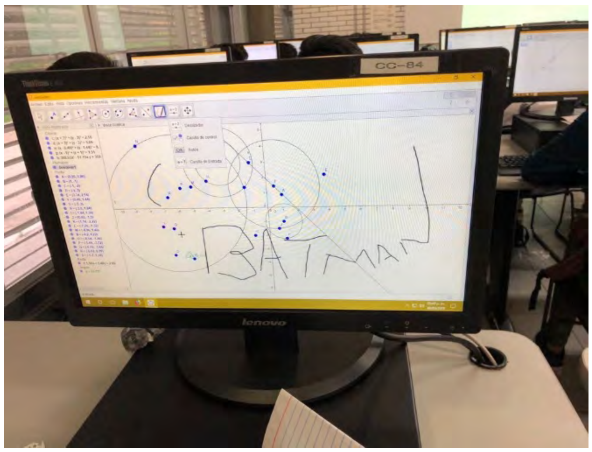
A la clase asistieron los 22 alumnos inscritos en el grupo y todos se presentaron muy puntuales. Para la práctica se apartó el "Aula Telmex", que se encuentra en excelente estado y está equipada con computadoras actualizadas que tenían ya cargado el programa de GeoGebra, lo cual permitió que cada estudiante contara con una computadora.



Alumnos del grupo 249B trabajando en el aula de Telmex

La sesión inició con la presentación del profesor y la de los estudiantes, la cual estuvo a cargo de la maestra titular del grupo, quien pasó lista a los alumnos, mencionando su nombre, ellos respondían diciendo su apellido y colocaban un gafete con su nombre delante de ellos, después se aplicó el examen diagnóstico por primera vez.

Se presentó el programa GeoGebra a los alumnos y se les pidió que exploraran los botones de herramientas y sus funciones; varios alumnos aprovecharon para hacer dibujos creativos.

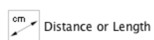


Dibujo de un alumno del grupo 249B explorando botones de GeoGebra.

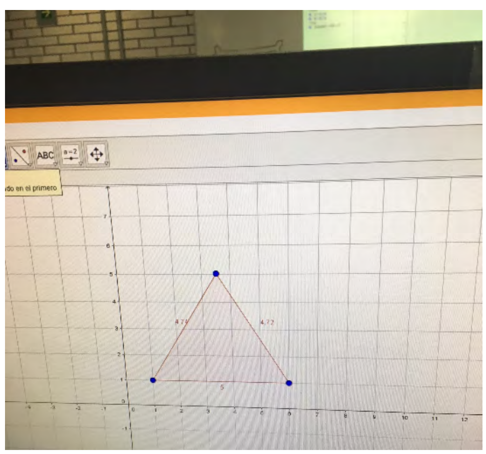
Después se realizaron las siguientes actividades en una **hoja del programa GeoGebra**:

1. Explorar los botones de recta y segmento de recta, y describir la diferencia.
2. Trazar un triángulo equilátero con procedimientos propios.
3. Trazar un triángulo equilátero con herramientas de regla y compás.
4. Justificar las propiedades de la circunferencia que sustentan los trazos del triángulo.
5. Trazar un triángulo equilátero utilizando el botón de “polígono regular”.
6. Redactar un procedimiento para trazar un triángulo isósceles.
7. Justificar procedimiento propuesto.

8. Comprobar el procedimiento trazando un triángulo isósceles.
9. Trazar un triángulo escaleno.
10. Definir un triángulo rectángulo.
11. Trazar un triángulo rectángulo y escribir longitud de los lados.
12. Describir el procedimiento utilizado para trazar el ángulo recto.

Desde el inicio, los alumnos se mostraron interesados en el programa de GeoGebra. En las actividades, el 90.9% de los alumnos trazó el triángulo equilátero solicitado con procedimientos propios de manera incorrecta; el método más recurrente entre los estudiantes consistió en buscar por tanteo que los tres lados del triángulo fueran iguales y verificar después la longitud de los segmentos utilizando para ello el botón 

.



Triángulo rectángulo trazado por tanteo.

Una pequeña pare del grupo, el 9.09%, trazó el triángulo equilátero con la herramienta de "polígonos regulares".

Enseguida, se presentó al grupo el procedimiento para trazar un triángulo equilátero con regla y compás y se discutieron en plenaria las propiedades de los puntos de una circunferencia que garantizan que el triángulo trazado con este procedimiento tiene los tres lados iguales.

En la siguiente actividad se solicitó a los alumnos escribir un procedimiento para trazar un triángulo isósceles e implementarlo en el trazo de un triángulo de esta característica. Se esperaba que los estudiantes recuperaran el procedimiento presentado con regla y compás para triángulos equiláteros, pero solo el 18.18% de los alumnos lo aplicó, el resto utilizó nuevamente el método de tanteo. Se hizo un cierre parcial en el que se reflexionó sobre el trabajo realizado con triángulos equiláteros e isósceles, en preparación de la siguiente actividad que consistía en trazar un triángulo escaleno, en esta ocasión todos los alumnos utilizaron arcos de circunferencia en el trazo.

Posteriormente se solicitó a los alumnos que escribieran una definición de triángulo rectángulo, que trazaran uno, que determinaran la longitud de sus lados y que explicaran la forma en cómo lo habían trazado. Algunas de las definiciones de triángulo rectángulo provistas por los alumnos se agruparon de la siguiente manera:

Porcentaje de alumnos	Respuesta
36.36%	Tiene lados son diferentes
13.63%	Tiene lados iguales
13.63%	Tienen un ángulo de 90º
13.63%	No contestó

Algunas otras respuestas que se presentaron fueron: "un triángulo con la mitad de la medida de un rectángulo", "es la mitad de un rectángulo cortado en diagonal". De las respuestas obtenidas, se reconoce que el concepto de triángulo rectángulo no es claro para muchos estudiantes.

Si el concepto de triángulo rectángulo no es correcto, el trazo de éstos no estará bien. El 100% de los "triángulos rectángulos" trazados por los alumnos fueron incorrectos. De manera semejante los estudiantes no reconocen lo que son rectas perpendiculares y no relacionan el concepto de perpendicularidad entre rectas con el ángulo que se forman entre ellas.

La actitud de los estudiantes fue respetuosa, se mostraron trabajadores y participativos en las sesiones, y además, con el programa de GeoGebra los alumnos se mantuvieron muy atentos. Se nota claramente que son una generación con habilidades digitales adquiridas desde pequeños, es decir que son “nativos digitales”.

Alumnos del grupo 249B trabajando concentrados en la sesión.

Alumnos del grupo 249B trabajando concentrados en la sesión.

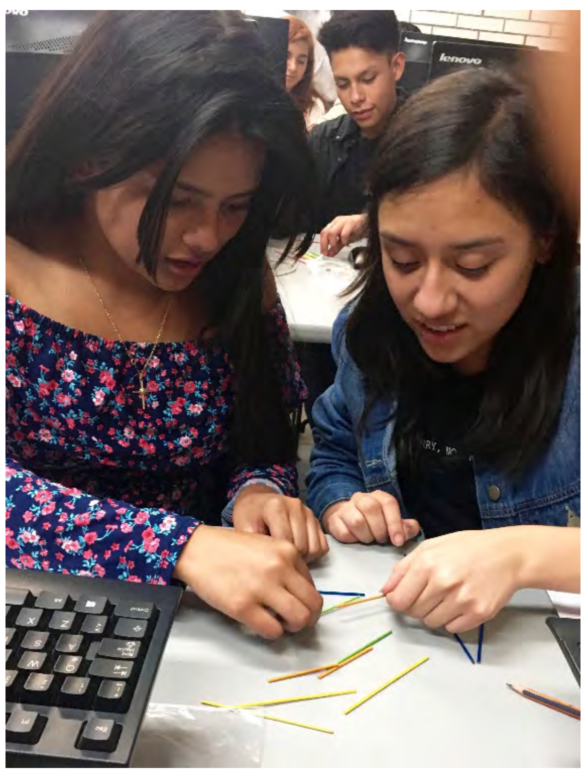
A partir del trabajo realizado por los alumnos, se aclaró en plenaria el concepto de triángulo rectángulo y el concepto de perpendicularidad. Como cierre de la sesión se les preguntó a los alumnos: "¿existe un triángulo isósceles qué también sea rectángulo? Muchos alumnos contestaron que no era posible, pero después de discutirlo por equipos terminaron diciendo que sí. Como el tiempo de la sesión ya se había consumido, no fue posible, pero hubiese sido deseable, pedirles que diseñaran un procedimiento para trazar un triángulo isósceles que también fuera rectángulo, usando regla y compás. Esta idea dejó sentir la necesidad de abordar el trazo de rectas paralelas y perpendiculares con estos instrumentos.

SEGUNDA SESIÓN

La sesión inició con la recapitulación de los conceptos abordados en la primera sesión, se revisó el concepto de triángulo y la clasificación de los triángulos de acuerdo con la longitud de sus lados. Se puso especial atención en los triángulos rectángulos, ya que sólo el 13% había escrito una definición correcta de los mismos en la sesión anterior, y se hizo énfasis en los conceptos de rectas paralelas y perpendiculares.

Después, se repartió el material impreso y se entregó, por pareja, una bolsa de palitos de madera para la Actividad 2. La secuencia del trabajo realizado se describe a continuación:

1. La primera pregunta consistió en ***estimar*** *el número de triángulos que se pueden formar con los segmentos del kit de palitos de madera.* Las estimaciones del grupo fueron: 4, 16, 20 y 36.



Alumnos del grupo 249B trabajando en la Desigualdad del triángulo.

2. Se solicitó a los alumnos determinar el número de triángulos equiláteros que se pueden construir con el material y justificar la respuesta. El 100% de los alumnos respondió que podía construir cuatro triángulos, y todos fueron capaces de enunciar un argumento adecuado, que se resume como: "hay tres barritas de cada color y son cuatro colores diferentes".

3. Sin manipular el material, se les pide a los alumnos precisar cuántos y cuáles triángulos isósceles se pueden construir con las barritas de madera de la bolsa. Las respuestas fueron:

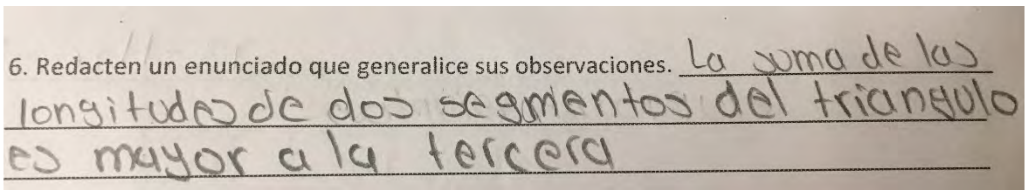
Número de triángulos isósceles	Porcentaje
10	36.36%
11	22.72%
12	27.27%%
16	9.09%%
No contestó	4.54%

Para determinar la respuesta correcta, se acordó enunciar cada triángulo utilizando ternas con la notación E(Extragrande), G(grande), M(mediano) y P(pequeño). Después de escribir cada triángulo los estudiantes comprobaron, manipulando el material, la posibilidad de construcción de los mismos. Con la actividad y la discusión entre ellos, los estudiantes se dieron cuenta que algunos triángulos que habían enunciado no se podían construir. Al final regresaron el material a la bolsa.

4. A continuación, se anotó en el pizarrón la longitud de los segmentos que integran la bolsa de palitos de madera: 3, 4, 5 y 8 y se pidió enunciar los triángulos escalenos que se podían formar con el material. Se solicitó responder la pregunta sin sacar los palitos de la bolsa. El 63.63% de

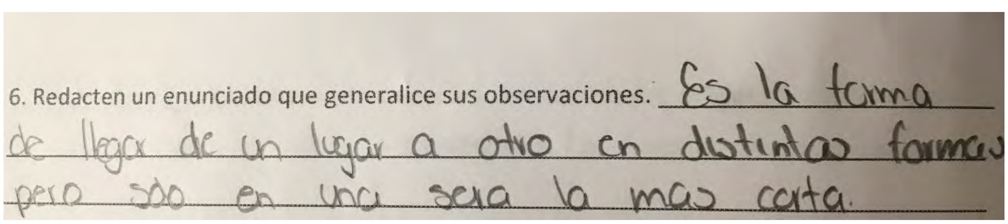
los alumnos determinó correctamente los triángulos escalenos, el 13.63% respondió que dos triángulos, pero no dijo cuáles.

5. A partir de la pregunta: “¿qué condición deben cumplir tres segmentos para que se puedan formar con ellos un triángulo?” los alumnos dedujeron la relación entre los lados, conocida como la Desigualdad del Triángulo, sin embargo, solo el 19.05% la enunció correctamente.


6. Redacten un enunciado que generalice sus observaciones. La suma de las longitudes de dos segmentos del triangulo es mayor a la tercera

Generalización de la desigualdad del triángulo

En grupo se discutió la relación entre la desigualdad del triángulo y las diferentes posibles trayectorias que hay entre dos puntos. Se aclaró que la trayectoria mínima entre dos puntos es la longitud de la línea recta que los une.


6. Redacten un enunciado que generalice sus observaciones. Es la forma de llegar de un lugar a otro en distintas formas pero solo en una sera la mas corta.

Redacción de un alumno de las trayectorias entre dos puntos.

La siguiente actividad se realizó en una pantalla de GeoGebra, y consistió en proponer la longitud de dos segmentos y determinar el valor mínimo y máximo de un tercer segmento con el que pueda formar un triángulo. A diferencia de lo que paso en la sesión con regla y compás, las respuestas de los alumnos estuvieron limitadas por los números que podían manipular en la computadora, la cual no siempre es muy precisa: por ejemplo, si propusieron 10 y 12 como longitud de los lados de un triángulo, el mínimo y el máximo para el tercer lado fueron 2.09 y 21.84 respectivamente. Aún con esta limitación el 40.90% de los alumnos hicieron los trazos correctamente.

A continuación, se les pidió hacer la generalización del procedimiento, es decir, que dados dos segmentos a y b, determinar la longitud máxima y mínima del segmento c con el cual se puede formar el triángulo ABC. La pregunta sólo fue respondida por 2 de los 22 alumnos, y de forma imprecisa; las respuestas fueron: "es menor a la suma y menor a la resta" y " mayor a la suma y mayor a la resta".

Como cierre de la sesión se resolvió la última parte de la tercera actividad, donde se solicitó a los alumnos proponer la longitud de los lados de un triángulo que tenga 12 unidades de perímetro. El 95.45% propuso longitudes que satisfacen la desigualdad del triángulo, sin embargo, a la pregunta: “¿puede un triángulo de 12 cm de perímetro tener un lado de 6 de longitud?” sólo el 42.85% respondió que no era posible, lo cual indica que la Desigualdad del Triángulo quedó clara para una parte importante del grupo.

Los estudiantes se mostraron muy interesados en la sesión, sin embargo, se tomaron más tiempo del planeado explorando las herramientas de GeoGebra, y, si algo no les sale, cierran el trabajo, abren una nueva pantalla y empiezan de nuevo.

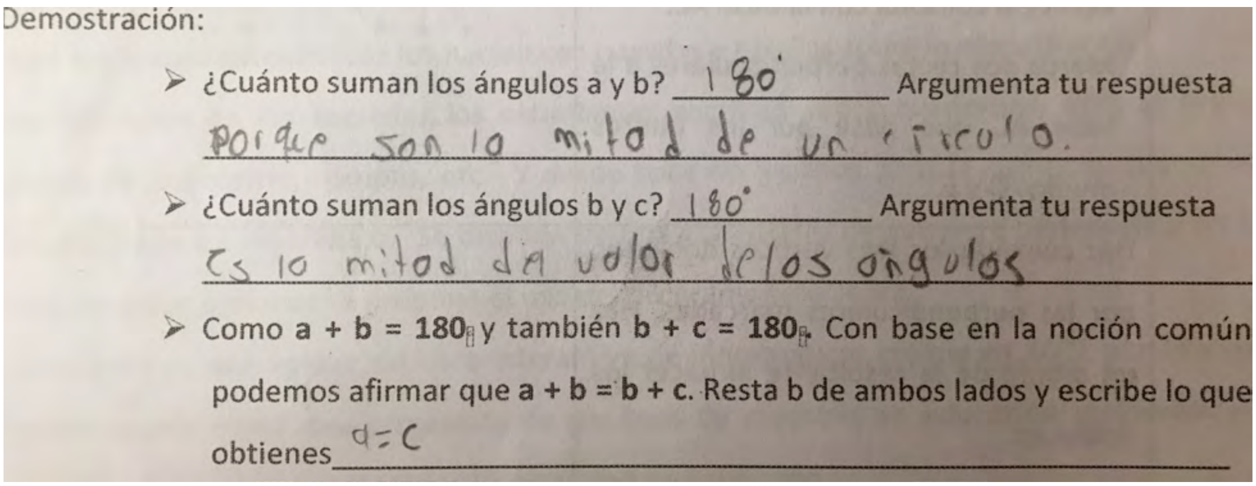
TERCERA SESIÓN

La clase inició con la recapitulación de lo abordado en las sesiones anteriores, en particular de la Desigualdad del Triángulo y las posibles trayectorias que puede haber entre dos puntos.

A continuación, se les preguntó a los alumnos: ¿qué es el área de un triángulo y cómo se calcula? Adelantando la respuesta, se escribió en el pizarrón la fórmula $\frac{bh}{2}$. El grupo se quedó en silencio y nadie se atrevió a contradecir lo que estaba escrito, hasta que una alumna dijo: "yo me acordaba que era entre dos, no entre tres", a lo cual se respondió: "es tres porque son tres lados", después de lo cual asintió la mayoría. Cuestione a la alumna que preguntó por qué podría ser entre dos y no entre tres, y respondió, “no sé, pero algo así me acuerdo”. En plenaria reflexionamos sobre el “por qué” sabemos que una fórmula o un resultado es correcto. Se les platicó sobre la historia de las matemáticas, en especial de las culturas; griegas, egipcia y babilonia, y sobre la manera en que se transmitía el conocimiento matemático antes de los griegos, y cómo cambio esta situación a partir de ellos.

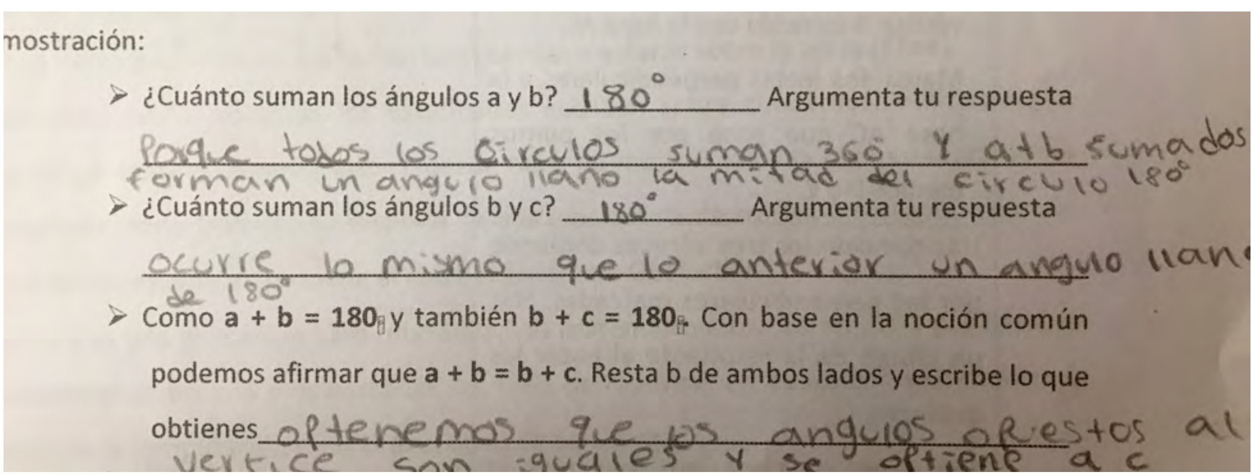
Después se trabajó la Actividad 5, en la cual los alumnos trazaron dos rectas que se cortan en un punto, y se les preguntó sobre la relación que hay entre los ángulos que se forman entre ellas. Algunos alumnos recordaban de memoria que "ángulos opuestos por el vértice son iguales". Retomando la discusión anterior, se les preguntó: ¿cómo sabemos que son iguales? Un alumno mencionó que podía medir los ángulos; con este argumento se discutió que comprobar que los ángulos opuestos por el vértice eran iguales en el caso de las rectas que trazaron sólo aseguraba que el enunciado era cierto en un caso particular, y lo que se requiere es afirmarlo en general, y que para esto se necesita una demostración.

Dado que hacer una demostración es un tema nuevo para los estudiantes, se procedió a hacer la demostración en el pizarrón, después de lo cual los estudiantes debían completar las instrucciones en el cuaderno de actividades. Algunos escribieron argumentos incorrectos en su demostración. Las respuestas de los alumnos representaron una oportunidad para recuperar aprendizajes y aclarar errores conceptuales que se arrastran hasta el momento. Se presentan aquí ejemplos de las respuestas de los alumnos.



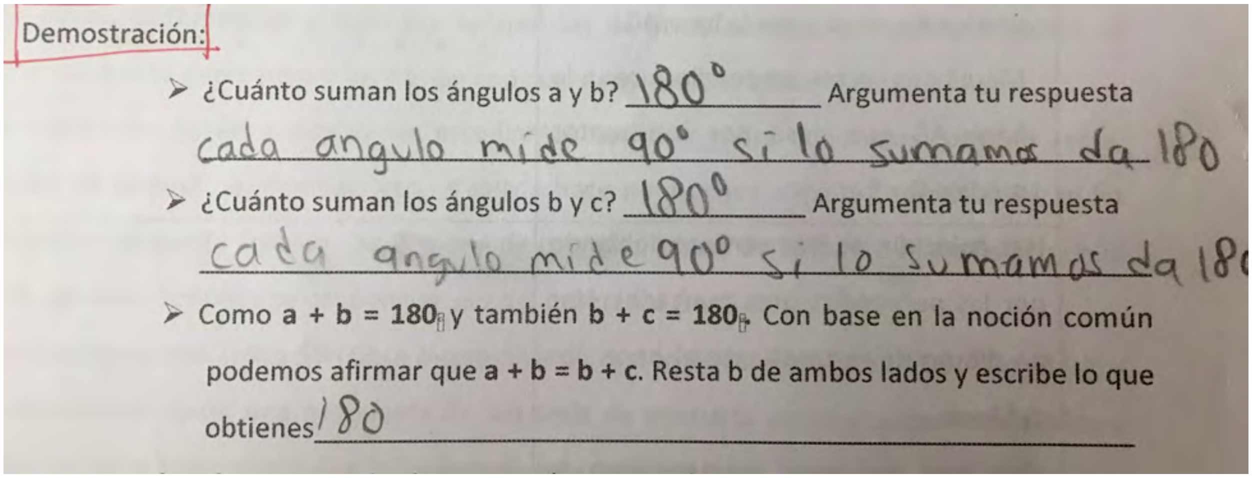
Demostración:

- ¿Cuánto suman los ángulos a y b? 180° Argumenta tu respuesta
  Porque son la mitad de un circulo.
- ¿Cuánto suman los ángulos b y c? 180° Argumenta tu respuesta
  Es la mitad de valor de los angulos
- Como **a + b = 180** y también **b + c = 180**. Con base en la noción común podemos afirmar que **a + b = b + c**. Resta b de ambos lados y escribe lo que obtienes a=c



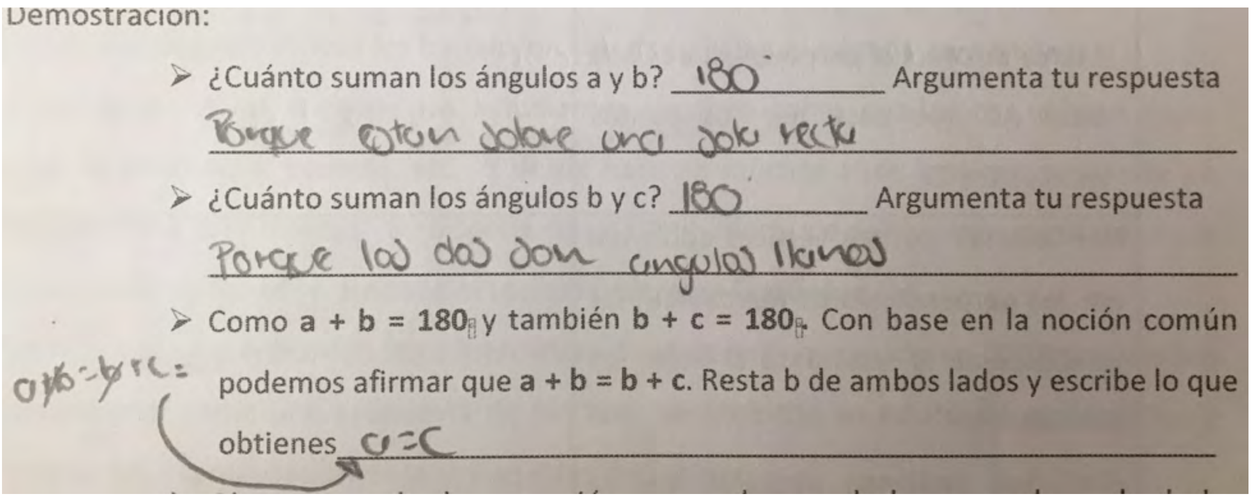
mostración:

- ¿Cuánto suman los ángulos a y b? 180° Argumenta tu respuesta
  Porque todos los circulos suman 360 y a+b sumados forman un angulo llano la mitad del circulo 180°
- ¿Cuánto suman los ángulos b y c? 180° Argumenta tu respuesta
  ocurre lo mismo que lo anterior un angulo llano de 180°
- Como **a + b = 180** y también **b + c = 180**. Con base en la noción común podemos afirmar que **a + b = b + c**. Resta b de ambos lados y escribe lo que obtienes optenemos que los angulos opuestos al vertice son iguales y se optiene a c



Demostración:

- ¿Cuánto suman los ángulos a y b? 180° Argumenta tu respuesta
  cada angulo mide 90° si lo sumamos da 180
- ¿Cuánto suman los ángulos b y c? 180° Argumenta tu respuesta
  cada angulo mide 90° si lo sumamos da 18
- Como **a + b = 180** y también **b + c = 180**. Con base en la noción común podemos afirmar que **a + b = b + c**. Resta b de ambos lados y escribe lo que obtienes 180

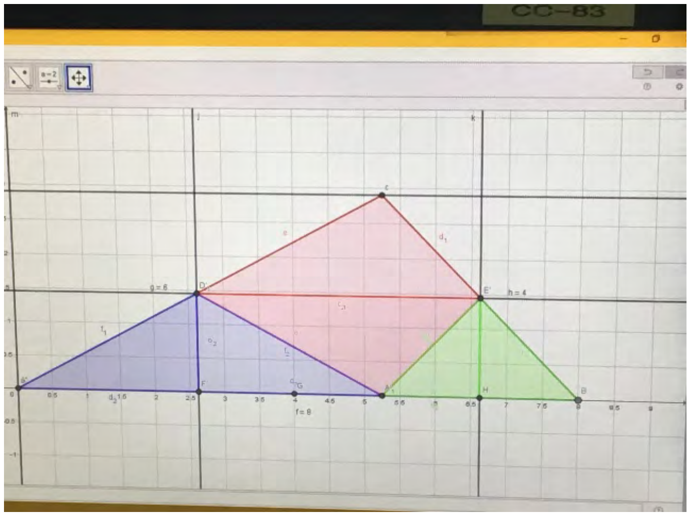


Demostración:

- ¿Cuánto suman los ángulos a y b? 180 Argumenta tu respuesta
  Porque estan sobre una sola recta
- ¿Cuánto suman los ángulos b y c? 180 Argumenta tu respuesta
  Porque los dos son angulos llanos
- Como **a + b = 180** y también **b + c = 180**. Con base en la noción común podemos afirmar que **a + b = b + c**. Resta b de ambos lados y escribe lo que obtienes a=c

a+b-b+c=

La siguiente actividad consistió en demostrar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°. Esta demostración se hizo en una pantalla de GeoGebra, las instrucciones se presentaron frente al grupo y los alumnos realizaron el procedimiento de manera individual. Al final se mostraron sorprendidos con sus trazos. Sacaron fotografías de sus trabajos y quedaron de enviarlos por correo.

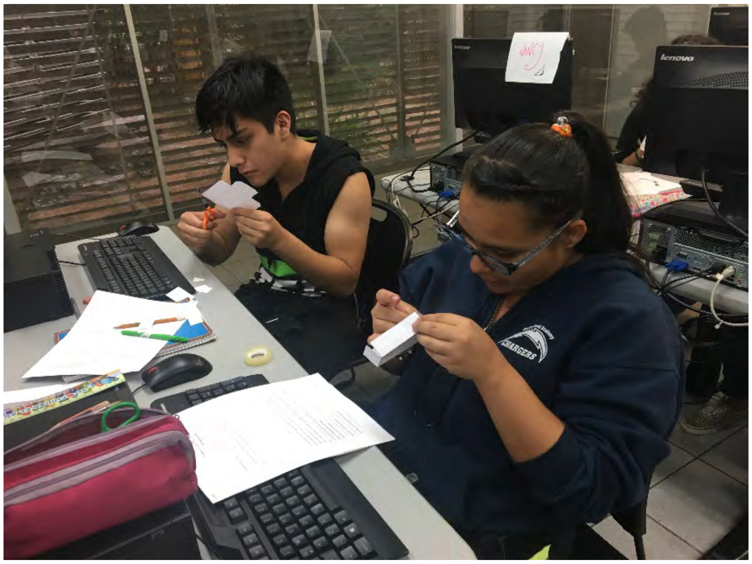


Ejemplo del trabajo de un alumno del grupo 249B

Alumnos del grupo 249B trabajando en la demostración de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

El cierre del trabajo con el método axiomático deductivo fue a través de una analogía con la construcción de vivienda, ya que 28.57% de los estudiantes del grupo planean estudiar la carrera de arquitectura. Los cimientos son los axiomas, los teoremas los muros. No podríamos construir muros sin cimientos.

Por último, y para adelantar el trabajo de la última sesión, se entregó a los alumnos el desarrollo plano de la caja con la que se trabajaría en la Actividad 6, pidiéndoles que imaginaran que eran hormigas y que su misión era llegar de un vértice a otro diagonalmente opuesto. Se les preguntó: ¿qué camino seguirían si quisieran llegar lo más pronto posible a su destino? Además, se les requirió trazar tres posibles trayectorias que seguiría la hormiga y que calcularan la distancia que recorrería en cada una. Los alumnos construyeron la caja y se acordó que compararían la longitud de las trayectorias con la realizada por una mosca.

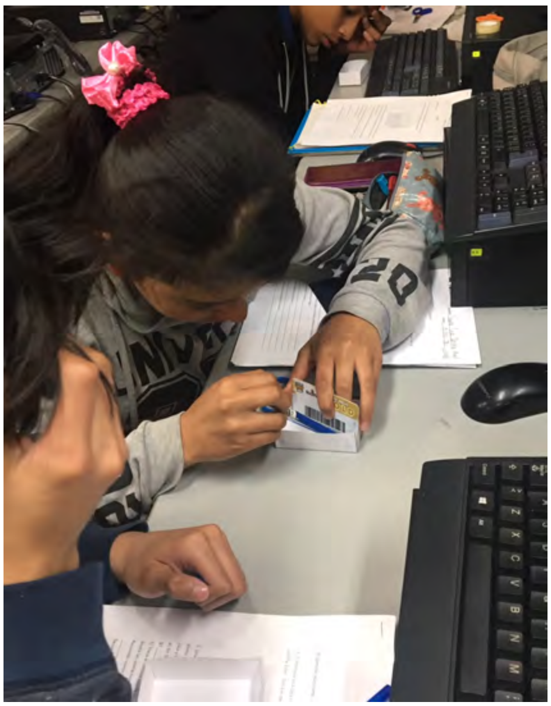


Alumnos del grupo 249B construyendo la caja para el problema de la mosca y hormiga.

Los alumnos se mostraron muy participativos en la clase. El grupo 249B es un buen grupo, los chicos fueron respetuosos y disfrutaron el que las actividades fueran variadas.

CUARTA SESIÓN

La sesión inició con la recapitulación del método axiomático deductivo y la diferencia entre comprobar y demostrar que se había trabajado en la clase anterior; después se retomó la discusión del problema de la hormiga y la mosca. Tres alumnos habían pensado en la respuesta, y los tres se concretaron en calcular la diagonal de la base de la caja. Por parejas, diseñaron posibles trayectorias y las longitudes de los recorridos de la hormiga. Se pegó en el pizarrón el desarrollo plano de la caja y los alumnos reconocieron la trayectoria menor y calcularon su longitud.



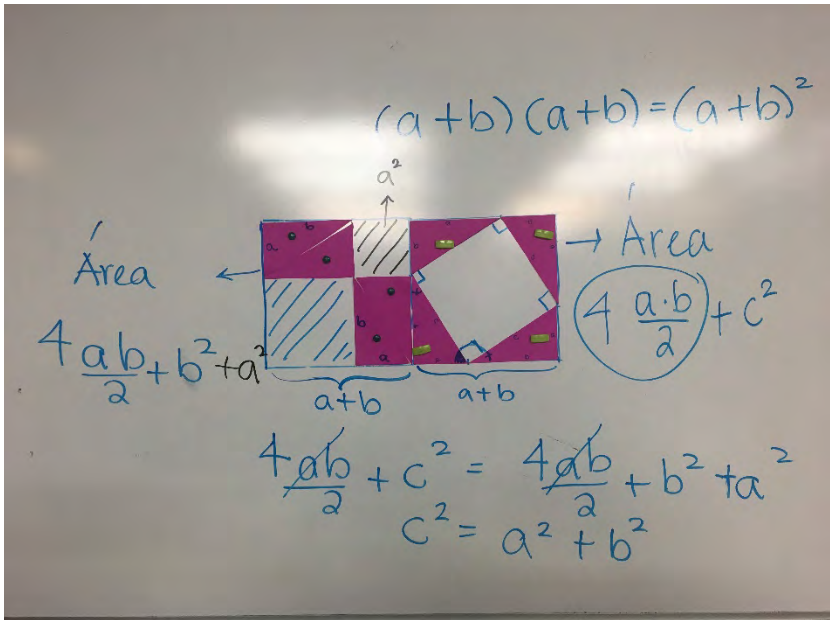
Alumnos del grupo 249B trabajando en el problema de la hormiga y la mosca.

Se cuestionó el procedimiento utilizado; algunos alumnos respondieron que aplicaron el Teorema de Pitágoras. Se dibujó un triángulo obtusángulo en el pizarrón y se les preguntó qué dice el Teorema de Pitágoras y cómo se aplica en este caso. Se escribió la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$

en el pizarrón, y se les preguntó qué significan las literales a, b y c. El consenso fue que a y b son las longitudes de los lados más pequeños y únicamente se trataba de sustituir los valores en la fórmula. La mayoría de los alumnos no tenían claro que el teorema de Pitágoras se aplica únicamente a triángulos rectángulos.

Se discutió el enunciado del Teorema de Pitágoras y se revisó su aplicación. Se les relató la historia del teorema y la necesidad de hacer su demostración. En la clase se procedió a hacer una demostración no formal, de tipo geométrico que se basa en la comparación de áreas, recurriendo a símbolos algebraicos por comodidad en la exposición. Cada alumno trabajó su propia propuesta.

Alumnos del grupo 249B trabajando en la demostración del Teorema de Pitágoras.



La demostración del Teorema de Pitágoras realizada en el pizarrón.

Después de la demostración, verificaron en una hoja de GeoGebra la interpretación geométrica del teorema.

Por último, se les preguntó a los estudiantes: “si tres números satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, ¿pueden estos números representar los lados de un triángulo?, ¿qué tipo de triángulo será?” Todos los estudiantes respondieron que sí, nadie pensó en la posibilidad de que no lo fueran, pero no supieron que tipo de triángulo era. Se presentó el reciproco del Teorema de Pitágoras y se les platicó sobre la tablilla Plimpton 322. Se reprodujo un video de YouTube que expone una hipótesis de lo que podrían representar los números en ella. Los alumnos se mostraron sorprendidos de este nuevo enfoque del Teorema de Pitágoras.

Para terminar la clase, se solicitó a los alumnos elaborar de tarea un mapa conceptual con las ideas trabajadas durante las sesiones y se les proporcionó la rúbrica correspondiente. Se aplicó el examen diagnóstico por segunda ocasión, así como los instrumentos de Autoevaluación y Evaluación Alumno-Tutor. Los alumnos se fueron contentos al final de la clase. En esta sesión los alumnos estaban más inquietos que en las otras clases, hacían bromas, pero trabajaban y se involucraban con las actividades.

XII. RESULTADOS

EXAMEN DIAGNÓSTICO EN EL GRUPO 130A DE CCH SUR

Como se comentó anteriormente, el examen diagnóstico se aplicó en ambos grupos al inicio y al final de la secuencia y se calificó con base en la Rúbrica (Anexo 7) elaborada para ello.

Las calificaciones por pregunta de la primera y la segunda aplicación del examen diagnóstico en el grupo 130A se presentan en la siguiente tabla.

Pregunta	**Promedio calificación en la primera aplicación del examen diagnóstico**	**Promedio calificación en la segunda aplicación del examen diagnóstico**	**Porcentaje de incremento en la calificación.**
1	0.49	0.89	40.2%
2	0.14	0.29	15.2%
3A	0.18	0.21	2.1%
3B	0.17	0.30	13.0%
4	0.18	0.37	12.95%
5	0.09	0.17	8.7%
6	0.5	0.64	14.1%
7	0.12	.34	21.7%
8	0.09	0.17	8.7%
9	0.24	0.54	30.4%

El promedio de la calificación obtenida en la primera aplicación del examen diagnóstico en el grupo 130A fue de 2.34, en la segunda aplicación el promedio subió a 4.09. El aumento fue de 1.75 puntos.

IB. EXAMEN DIAGNÓSTICO EN EL GRUPO 249B CCH SUR

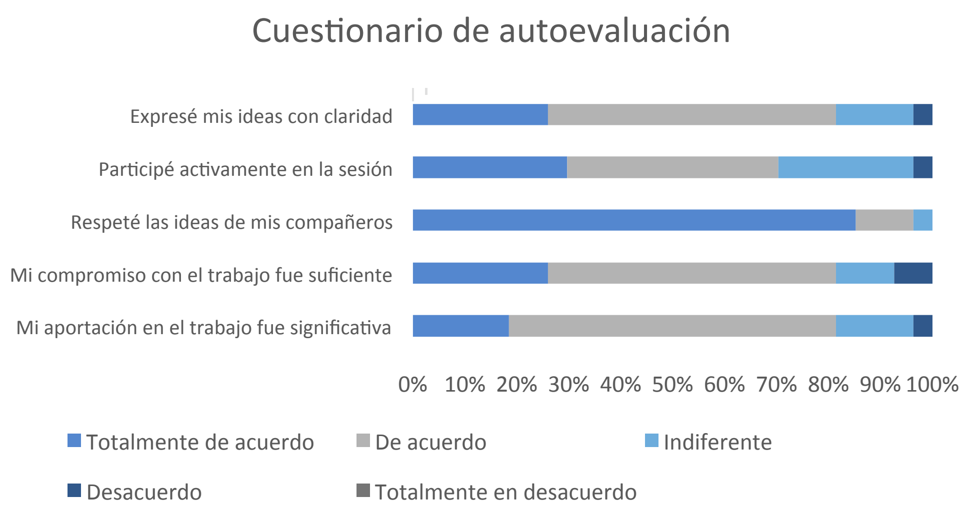
Las calificaciones por pregunta en la primera y la segunda aplicación del examen diagnóstico en el grupo 249B se presentan en la siguiente tabla.

Pregunta	Promedio calificación en la primera aplicación del examen diagnóstico	Promedio calificación en la segunda aplicación del examen diagnóstico	Porcentaje de incremento en la calificación.
1	0.53	0.85	32.0%
2	0.18	0.66	48.0%
3A	0.19	0.38	19.0%
3 B	0.13	0.34	21.0%
4	0.14	0.57	43.0%
5	0.05	0.18	14.0%
6	0.66	0.91	25.0%
7	0.01	0.30	28.0%
8	0.00	0.08	8.0%
9	0.34	0.76	42.0%

El promedio de la calificación obtenida en la primera aplicación del examen diagnóstico fue de 2.4, en la segunda aplicación fue de 5.58. El aumento de la calificación entre ambas aplicaciones fue de 3.1 puntos.

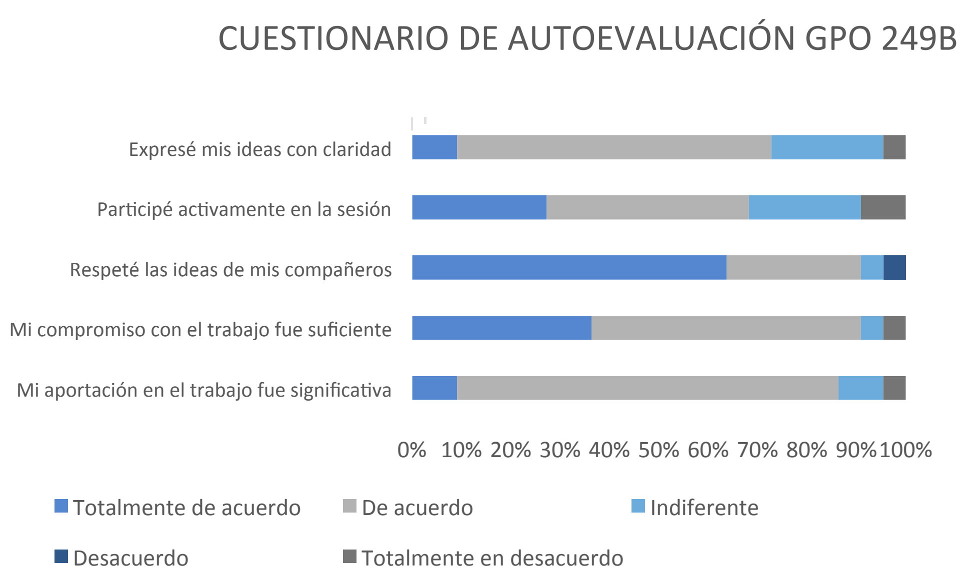
IIA. CUESTIONARIOS DE AUTOEVALUACIÓN DEL GRUPO 130A

Los resultados del Cuestionario de Autoevaluación se presentan en la siguiente gráfica.



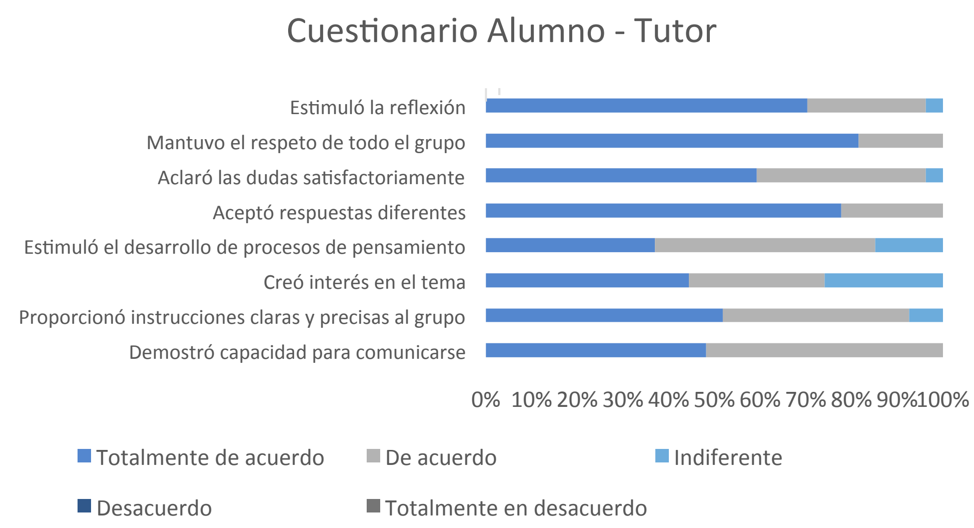
IIB. CUESTIONARIOS DE AUTOEVALUACIÓN DEL GRUPO 249B

Los resultados del Cuestionario de Autoevaluación se presentan en la siguiente gráfica.



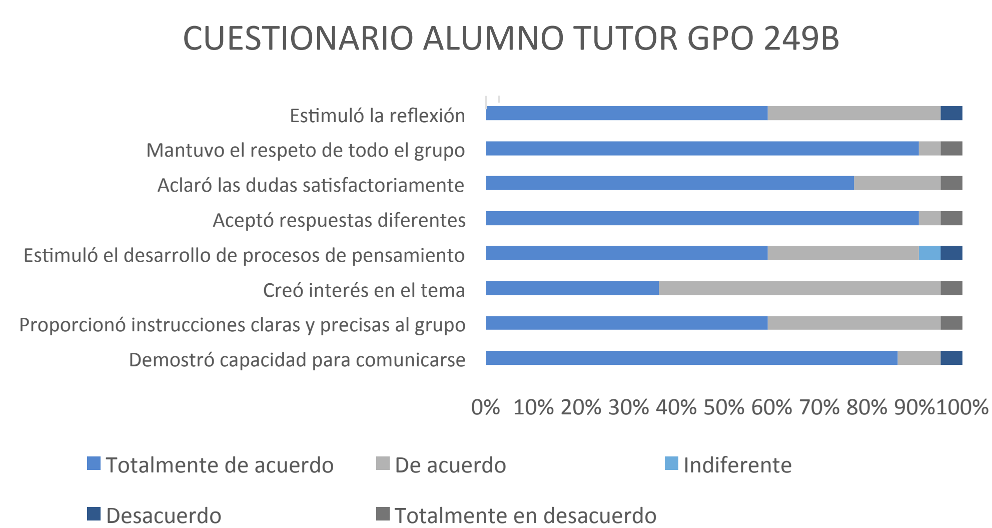
IIIA. EVALUACIÓN ALUMNO -TUTOR EN EL GRUPO 130A

Los resultados del Cuestionario Alumno – Tutor se presentan en la siguiente gráfica.:



IIIB. EVALUACIÓN ALUMNO- TUTOR EN EL GRUPO 249B

Los resultados del Cuestionario Alumno – Tutor se presentan en la siguiente gráfica:

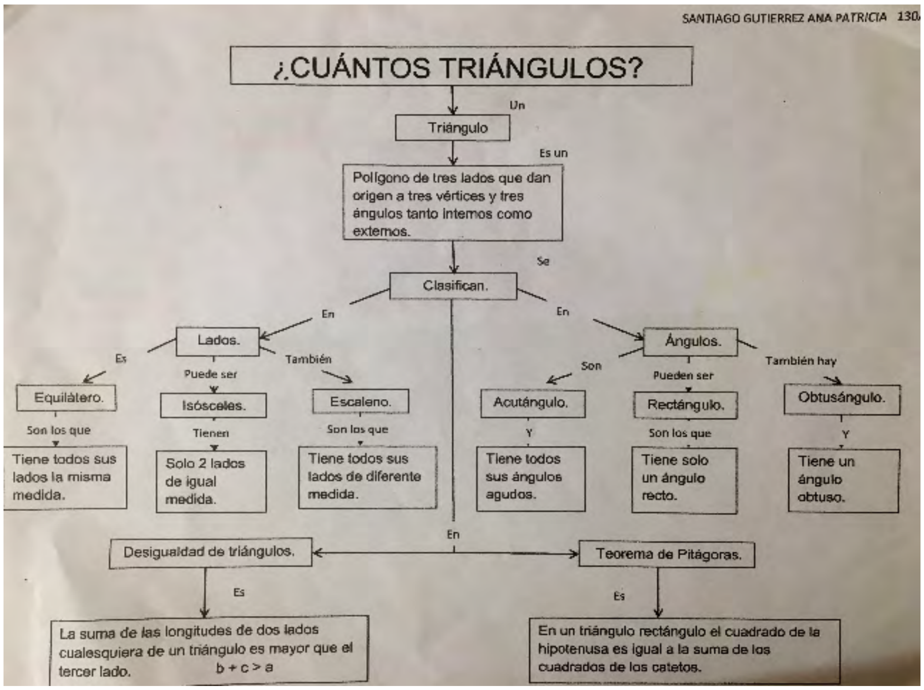


IIID EVALUACIÓN DE MAPAS CONCEPTUALES

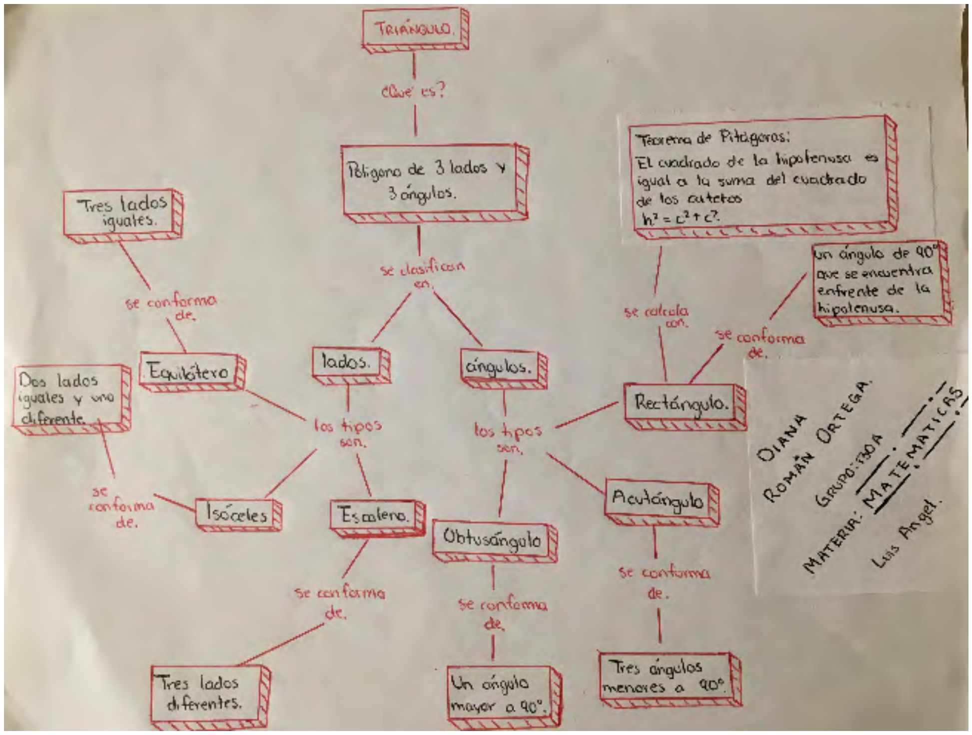
Los mapas conceptuales se evaluaron de acuerdo con la rúbrica que se les proporcionó a los alumnos en el momento en que se estableció el trabajo. El promedio de la calificación obtenida en el mapa conceptual por el grupo 130A fue de 7.035 puntos y la moda fue 8. En el grupo 249B el promedio fue de 6.0 y la moda de las calificaciones fue 8. Una posible diferencia de las calificaciones es que en el grupo 130A la entrega de mapas conceptuales contaría para la calificación, mientras que en el grupo 249B no contaría.

En ambos grupos, las mejores notas por pregunta fueron las referentes a la definición del triángulo y a su clasificación, mientras que las de menor clasificación fueron las que evaluaron los niveles en los mapas y los conectores. Otra constante fue que los mapas de ambos grupos incluían errores ortográficos.

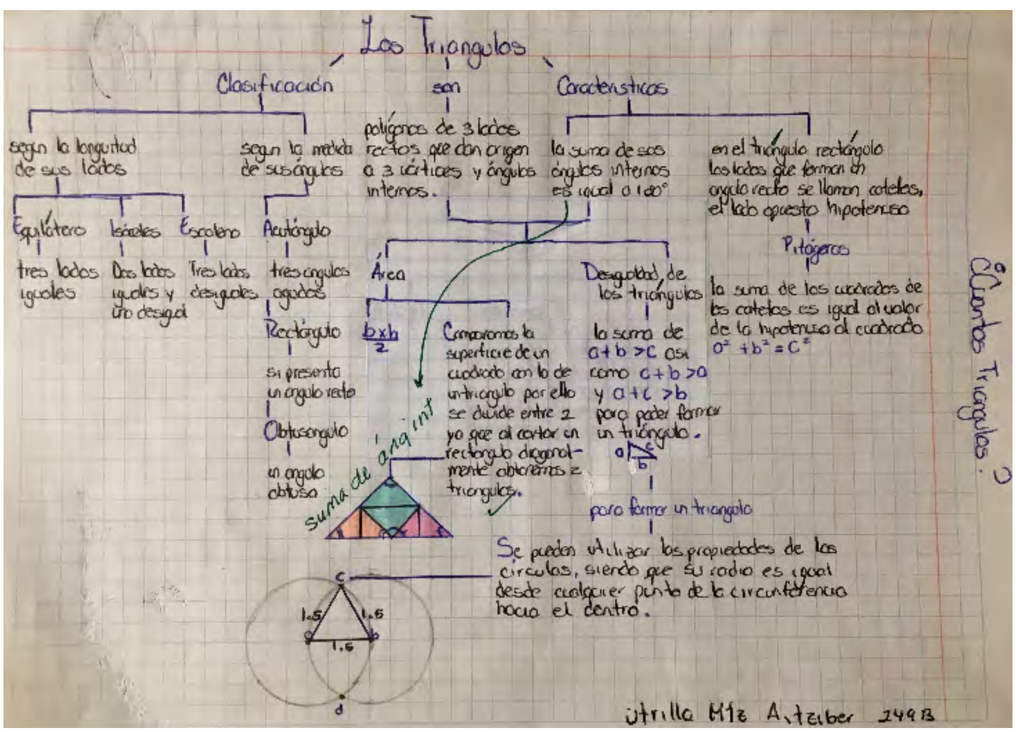
A continuación, se presentan ejemplos de mapas conceptuales entregados por los dos grupos.



Mapa conceptual entregado por alumno del grupo 130A.



Mapa conceptual entregado por alumno del grupo 130 A, en el trabajo se observa una buena integración de los conceptos abordados en la sesión, sin embargo, se omitió la Desigualdad del Triángulo.



Mapa conceptual entregado por alumno del grupo 249B. En el trabajo se observa que el alumno integró diversos conceptos abordados en la secuencia. Incluye la demostración de que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º, pero lo relaciona con el área del triángulo.

XIII.ANÁLISIS COMPARATIVO DEL TRABAJO REALIZADO EN LOS GRUPOS DE CCH 130A Y 249B

1. El horario de la implementación de las secuencias no favoreció al grupo 130A debido a que el transporte en la CDMX es complicado, más aún en los primeros días de regreso después del sismo, por lo que no todos los alumnos llegaban temprano a clase; algunos de ellos comentaron que tenían que salir de sus casas a las 4:30 am para poder llegar a tiempo; esto es un factor limitante. Además, salen de sus casas sin desayunar y a las 7:00 am ya tienen hambre, lo que implica que frecuentemente ingieren alimentos durante la clase.
2. Las sesiones se desarrollaron de manera paralela en ambos grupos, la diferencia fue que en el grupo 130A los alumnos realizaron las actividades con regla y compás en su cuaderno, y en el grupo 249B trabajaron cuatro de las ocho actividades propuestas en la secuencia con apoyo de la tecnología, mediante el programa GeoGebra.
3. En la primera actividad, se solicitó a los alumnos trazar un triángulo equilátero con procedimientos propios. En el grupo 130A, el 68.18% de los alumnos utilizó el método de tanteo, y en el grupo 249B, el 90.0% de los alumnos utilizó el mismo procedimiento en una hoja de GeoGebra. El método de tanteo consistió en trazar un segmento como base, localizar el punto medio y subir una recta cuya longitud fuera la que se esperaba tuviera el triángulo en cada lado y por último, unir el extremo superior de la recta con los extremos de la base. La recta trazada desde el punto medio en algunos casos era perpendicular y en otros no.
4. Después de presentar a los alumnos en ambos grupos el procedimiento para trazar un triángulo equilátero con regla y compás en el cuaderno, o en una hoja de GeoGebra, y

justificar el procedimiento con las propiedades de los puntos de la circunferencia, se les solicitó que redactaran un procedimiento para trazar un triángulo isósceles y que comprobaran el procedimiento con el trazo de un triángulo isósceles. Se esperaba que los alumnos hicieran la transferencia del procedimiento presentado con regla y compás, a la actividad solicitada, pero no fue así. Los dos grupos respondieron de manera similar y los alumnos mantuvieron en gran parte las propuestas de los trazos originales. En el grupo 130A, el 56.5% de los alumnos trazó el triángulo isósceles con el método de tanteo, y en el grupo 249B, el porcentaje fue de 81.82%. Esta observación llevó a hacer un cierre parcial de la actividad, donde se explicó la estrategia.

5. Se les pidió luego trazar un triángulo escaleno; es en este momento que se detecta una diferencia importante, ya que el 56.52% de los alumnos del grupo 130A trazó el triángulo utilizando arcos de circunferencia, contrasta con el 100% de los alumnos del grupo 249B que también utilizaron arcos de circunferencia.

6. Las respuestas a la pregunta: “¿qué es un triángulo rectángulo?” y “traza uno a continuación” puso en evidencia un problema en ambos grupos. Una parte importante de los alumnos no tiene claro qué es un triángulo rectángulo y no supieron describir el procedimiento que utilizaron para trazar el ángulo recto que se requería en el trazo del triángulo rectángulo. En el grupo 130A, el 63.63% de los alumnos definieron de manera incorrecta el triángulo rectángulo. En el grupo 249B, el porcentaje que escribió definiciones imprecisas fue del 66.66%.

7. Si las definiciones de triángulo rectángulo son incorrectas, no podemos esperar que los trazos lo sean. En el grupo 130A, el 45.45% de los triángulos trazados no tenían un ángulo recto, y en el grupo 249B ninguno de los triángulos trazados era rectángulo.

8. De los resultados obtenidos en la aplicación del examen diagnóstico, se observa que los estudiantes tienen idea de lo que son rectas paralelas, aunque sus definiciones sean incorrectas o imprecisas, pero no comprenden el concepto de rectas perpendiculares. Las rectas perpendiculares representan para muchos simplemente rectas que se cortan y no reconocen que entre ellas hay un ángulo recto. En las definiciones de rectas paralelas provistas en la primera aplicación del examen diagnóstico, ambos grupos obtuvieron casi la misma calificación, pero en la segunda aplicación del mismo examen se observa un incremento que es mayor en el grupo 249B. El promedio de las calificaciones obtenidas por grupo en lo que se refiere a estos conceptos fueron:

Grupo	**Pregunta**	**Primera aplicación**	**Segunda aplicación**	**Incremento**
130A	Rectas paralelas	0.18	0.21	0.03
249B	Rectas paralelas	0.19	0.38	0.19
130A	Rectas perpendiculares	0.17	0.18	0.01
249B	Rectas perpendiculares	0.13	0.34	0.21

El incremento en la calificación del grupo 249B que utilizó el programa de GeoGebra fue mayor.

9. En lo referente al Teorema de Pitágoras, en la primera aplicación del examen diagnóstico el 68.18% de los alumnos del grupo 130A lo enunció de manera incorrecta, y el 27.28% sólo recuerda la fórmula. En el grupo 249B, el 77.27% de los estudiantes lo recuerda de manera incorrecta. Estos porcentajes mejoran en la segunda aplicación del examen en ambos grupos. El incremento en las calificaciones del grupo 130A fue de 0.3 y en el grupo 249B fue de 0.42. En la segunda aplicación del examen, algunos alumnos del grupo 249B dibujaron la interpretación geométrica del mismo, lo cual indica que recordaban la actividad hecha en clase. Esto sugiere que el trabajo realizado en GeoGebra apoyó el aprendizaje visual.

10. Por los resultados obtenidos en la pregunta 8 del examen diagnóstico, y por el desarrollo de la sesión, se aprecia que los alumnos nunca habían escuchado hablar del recíproco del Teorema de Pitágoras. El tiempo dedicado a este tema en la sesión fue insuficiente, debido a que por una parte, no se valoró que representaba un contenido totalmente nuevo y requería más tiempo para su estudio, y por otra parte no era posible extender el tiempo dedicado a la secuencia puesto que esto comprometería el cumplimiento del programa que tenían que cumplir los estudiantes.

11. La actividad referente a la desigualdad del triángulo se desarrolló de manera semejante en los dos grupos. En la parte final de la actividad, después de que los alumnos enunciaron la desigualdad, se les solicitó determinar la longitud de los lados de un triángulo de perímetro 12 que tenga, además, un lado de longitud 6. En el grupo 130 A, el 35% de los alumnos respondió que no era posible construir ese triángulo, mientras que en el grupo 249B el porcentaje fue de 42.85%. Una posible explicación a este incremento es que los alumnos del grupo 249B utilizaron GeoGebra en la primera sesión, lo que favoreció la comprensión de los conocimientos base.

12. Las preguntas con menor incremento en el grupo 130A fueron 3I, 3II y 8, y 3I, 5 y 8 en el grupo 249B. La pregunta 8 tiene, en ambos grupos, el porcentaje de menor incremento. Esta pregunta involucra la resolución de problemas y el manejo del reciproco del teorema de Pitágoras.

13. Una de las diferencias más notables en el desarrollo de las sesiones fue la atención y concentración de los alumnos del grupo 249B (el grupo que utilizó tecnología). En el grupo 130A, fue necesario hacer en la segunda sesión, una reflexión sobre el método de trabajo implementado en la secuencia, resaltando la diferencia del utilizado en una clase tradicional, con el propósito de que los estudiantes no se distrajeran en el trabajo. En el grupo 249B no fue necesario solicitar que se callaran o pusieran atención en ningún momento.

14. Los alumnos de ambos grupos se sorprendieron al entender las demostraciones y se emocionaban cuando podían resolver algo. Como profesor, es muy satisfactorio ver las caras de los alumnos cuando sucede esta magia.

15. La Autoevaluación de los alumnos indica que en la implementación de la secuencia se generó un ambiente de respeto en el grupo. Casi el 60% de los alumnos del grupo 249B expresan que tuvieron un gran compromiso con el trabajo realizado, lo cual fue evidente en el desarrollo de las sesiones, en comparación con el 26% de los alumnos del grupo 130A que se manifiestó con el mismo compromiso.

16. En lo referente a la evaluación Alumno-Tutor se observa que un alto porcentaje de alumnos de cada grupo están "Totalmente de acuerdo" en que el tutor "Mantuvo el respeto de todo el grupo" y "Aceptó respuestas diferentes"; cabe notar que ambos porcentajes son más altos en el grupo 249B. En el mismo grupo, el 86% de los alumnos manifiestaron que el tutor "Demostró capacidad de comunicación", lo cual puede estar relacionado con que este grupo trabajó con el programa GeoGebra, lo cual facilitó la comunicación entre las partes.

17. El manejo del tiempo se planeó de igual forma para ambas secuencias, pero no resultó suficiente. En particular, el grupo 249B invirtió más tiempo en las actividades que realizaron con GeoGebra, razón por la cual se omitió la Actividad 4 en esta versión. Es necesario tomar en cuenta que la aplicación de la secuencia generó discontinuidad en el programa que debían cubrir los alumnos en cada grupo, por lo cual fue imposible tomar más tiempo del planeado para el desarrollo este trabajo.

18. Para mejorar la secuencia propuesta se sugiere que su implementación coincida con el momento en el que se abordan en el Plan y Programa de estudios, los contenidos correspondientes a los temas que concierne a este trabajo.

19. La secuencia se enfocó en la discusión y la generación de conocimientos previos y el tiempo dedicado a la resolución de problemas no fue suficiente en ambos grupos.

LA GANANCIA EN EL CONOCIMIENTO

Para determinar si incluir la tecnología en las actividades de la secuencia reportó ventaja sobre no hacerlo, se recurrirá a la ganancia de conocimientos. Para medir la ganancia en el conocimiento de los alumnos después de la aplicación de las secuencias utilizaremos la medida de Hake (Hake, 1998), la cual sirve para medir y comparar la ganancia conceptual en un curso por medio de la aplicación de un instrumento al inicio y al final de éste. En el trabajo presentado, se aplicó un examen diagnóstico al inicio de la primera sesión, y, para garantizar que las repuestas fueran lo más honestas posibles, no se dio crédito del resultado para la calificación. La segunda aplicación del mismo examen se realizó al final de la secuencia y en ambas aplicaciones el tiempo provisto para el examen fue el mismo.

Hake sugiere que, al comparar el resultado de la aplicación de un instrumento de manera previa y posterior a la implementación de una secuencia, que reporta cambios tan pequeños que parecen insignificantes, se mida mediante la ganancia (G) en la comprensión de un contenido con la fórmula propuesta por Hake: $G = \frac{\%Pf - \%Pi}{100 - \%Pi}$ donde Pf es el promedio final de la clase y Pi es el promedio inicial de la clase. Esta fórmula representa una manera óptima para comparar los resultados. La fórmula es una razón que compara el incremento neto de las calificaciones entre el máximo incremento posible, es decir, compara lo que se mejoró en una segunda aplicación de un instrumento contra todo lo que se podría mejorar. "G" es un número en el intervalo [0,1]; si G < 0. 3 se considera una ganancia baja, si $0.3 \leq G < 0.7$, la ganancia es media, y si $G \leq 0.7$, la ganancia es alta.

La ganancia obtenida de acuerdo con la medida de Hake en la aplicación de la secuencia en el grupo 130A, que no utilizó tecnología, fue de 0.228, valor que sitúa la ganancia en el rango bajo y que contrasta con la ganancia en el grupo 249B que si utilizó la tecnología cuyo valor fue de 0.4229, y que se inscribe en el rango de ganancia media y representa el doble de la obtenida por el grupo 130A.

La ganancia por pregunta de acuerdo con la medida de Hake en cada grupo es la siguiente:

Pregunta	**Grupo 130A**	**Grupo 249B**
1	0.784	0.681
2	0.174	0.585
3A	0.037	0.235
3B	0.157	0.241
4	0.232	0.500
5	0.088	0.137
6	0.280	0.735
7	0.250	0.293
8	0.088	0.08
9	0.395	0.636

Color	**Ganancia**
	baja
	media
	alta

Se observa que todas las preguntas tienen una ganancia positiva en ambos grupos. En el rango de ganancia media se ubican el 10% de las respuesta en el grupo 130A y 40% en el grupo 249B. Resalta que las preguntas 4 y 6 del grupo 249B indican una ganancia significativa; estas preguntas corresponden a la Desigualdad del Triángulo.

¿Fue el uso de la tecnología lo que genero la ventaja en la ganancia del conocimiento en el grupo 249 B? Para responder está pregunta, se analizan dos factores que podrían haber influido en la diferencia de la ganancia obtenida en cada grupo. El primero es la madurez de los estudiantes, como se había mencionado, en el momento de la aplicación de la secuencia, en ninguno de los dos grupo se habían abordado los contenidos que se trabajan. El grupo 130A era un grupo de alumnos de primer ingreso al bachillerato, mientras que el grupo 249B era un grupo que cursaba el segundo semestre, es decir, llevaba un semestre de ventaja, esto podría indicar que estaban mejor adaptados a la escuela y tenían más experiencia en el manejo del trabajo.

El segundo factor se relaciona con el diseño de las actividades de cada propuesta. El grupo 249B, que obtuvo una mayor ganancia, utilizó el programa de GeoGebra y, como se mencionó en la memoria correspondiente, fue notable el grado en el que se involucraron los alumnos y la concentración que tenían al realizar las actividades. Es probable que el uso de la tecnología le dio más sentido a lo estudiado, por ser una forma más cercana al mundo en el que se desarrollan los jóvenes.

Para justificar que fue el uso de la tecnología quien aportó más elementos a la ganancia, se presenta la siguiente información. La secuencia *¿Cuántos triángulos?* sin uso de la tecnología fue implementada con un grupo de estudiantes de la carrera de Biología del primer semestre de la Facultad de Ciencias que cursaban la materia de Física. La secuencia apoyó el aprendizaje de conocimiento previos sobre triángulos que se requieren para abordar el tema de óptica. La secuencia se trabajó con 19 alumnos en el mes de agosto de 2017, a los cuales se les dio el mismo tratamiento que al grupo 130A. El promedio del grupo de la Facultad de Ciencias en la primera aplicación del examen diagnóstico fue de 3.02 y en la segunda aplicación el promedio subió a 5.5. Este grupo formado por alumnos universitarios cuenta con tres años más de formación, lo que sugiere una madurez mayor; sin embargo, la ganancia en el conocimiento, de acuerdo con la medida de Hake, fue de G = 0.35 en este grupo, valor que no alcanza al obtenido por el grupo que utilizó la tecnología en el bachillerato. Esta información muestra que el uso de la tecnología para el aprendizaje tuvo un impacto mayor en los conocimientos comparada con los años de formación académica.

APRENDIZAJES DESARROLLADOS CON GEOGEBRA

El trabajo con el programa GeoGebra apoyó el proceso de enseñanza-aprendizaje en la secuencia, ya que permitió a los estudiantes visualizar objetos y explorar con ellos diferentes propiedades. Se presentan a continuación ejemplos de aprendizajes que se desarrollaron con las actividades realizadas en la secuencia con el grupo 249B.

- En la Actividad 1, los alumnos exploraron las herramientas de GeoGebra, lo que **favoreció la autonomía del estudiante** y en la primera actividad que consistió en trazar una recta y un segmento de recta, y a partir de ello describir las diferencias, se observa que los conceptos de recta y segmento de recta son familiares para los estudiantes, sin embargo, no tienen clara la diferencia entre ellos. Trazar los elementos solicitados permitió a los alumnos **aclarar** estos **conceptos**.
- En la actividad 3, consistente en determinar la longitud máxima y mínima de un tercer segmento con el que se puede formar un triángulo dados dos segmentos fijos, permitió a los alumnos, visualizar todas las posibilidades para el tercer segmento, lo cual **reforzó** la **comprensión** de la Desigualdad del triángulo.
- La instrucción de trazar un triángulo rectángulo en una hoja de GeoGebra ayudo a los alumnos a **identificar** que el **concepto** que tenían de rectas perpendiculares estaba **equivocado**.
- Construir la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras apoyo la **integración** de **nuevos conocimientos** y nuevas forma de entender un mismo tema.

XIV. CONCLUSIONES

Se propusieron tres objetivos del presente trabajo: el primero fue determinar si los contenidos previos con que llegan los estudiantes al bachillerato son adecuados, el segundo consistió en diseñar una secuencia remedial en dos versiones que subsanen las carencias y en el tercero se plantea distinguir cuál de las dos versiones, la que toma en cuenta la tecnología o la que no, tiene un mejor impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

A partir del trabajo realizado y los resultados de las evaluaciones, se concluye:

1. La calificación promedio en la primera aplicación del examen diagnóstico fue semejante en ambos grupos, 2.34 en el grupo 130A y 2.4 en el grupo 249 B. Estas notas indican que los estudiantes no llegan al bachillerato con los conocimientos previos que necesitan, lo cual es congruente con lo que reportan las evaluaciones nacionales e internacionales presentadas en la primera parte de este trabajo.

2. Es fundamental para un correcto aprendizaje, que los estudiantes cuenten con los conocimientos previos que necesitan, en particular en lo que se refiere al triángulo. Para ejemplificar, considérese los conceptos de triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras, conceptos que en teoría se abordaron en secundaria y que por los resultados del examen diagnóstico se afirma que no son claros para los estudiantes. Estos conceptos sirven como base para anclar los siguiente temas que corresponden al curso de Matemáticas III:

- Línea recta: pendiente de una recta, paralelismo y perpendicularidad de rectas. Ecuación de la línea recta dados dos puntos.

- Rectas notables de un triángulo.
- Construcción de la fórmula para determinar la longitud de un segmento o la distancia entre dos puntos.
- Trigonometría: razones trigonométricas, solución de triángulos rectángulos.
- Cónicas, determinación de elementos de la elipse, hipérbola o parábola.
- Propiedades de la tangente de una circunferencia.

3. Cualquier individuo debe tener acceso a la Educación Media Superior. Hay evidencias de que un joven que ingresa y concluye este nivel educativo, además de desarrollar diversas habilidades, tiene, de acuerdo con la CEPAL (2007), un mejor ingreso económico. Aunque en teoría hay una amplia oferta educativa, no todos los jóvenes tienen acceso al bachillerato, y si llegan, no todos lo concluyen, por lo que es imperante tomar medidas que garanticen que cualquier adolescente que ingrese al bachillerato, lo va a concluir. Estas medidas podrían empezar con la revisión de los contenidos previos de los alumnos al empezar el bachillerato para subsanar aquellos que falten, mediante la implementación de secuencias, como la presentada en este trabajo.

4. Las evaluaciones de la implementación de la secuencia muestran una ventaja en el aprendizaje de los estudiantes del grupo 249B que utilizaron GeoGebra. Las actividades realizadas en este programa ofrecieron formas de aprender más cercanas al uso que hacen los estudiantes de la tecnología, lo cual apoyó que los conceptos trabajados se aprendieran de forma significativa.

5. A partir de los resultados obtenidos se sugiere diseñar secuencias que aborden contenidos previos y contemplen herramientas tecnológicas de otros temas que se detectaron como ventanas

de oportunidad durante el desarrollo del presente trabajo, como son: Densidad de los números Reales, Números Racionales y sus operaciones, Expresiones Algebraicas, Medición y Probabilidad.

6. La diferencia en la ganancia de conocimientos en la implementación de las secuencias propuestas en este trabajo, ratifica la postura de que utilizar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas tiene un mejor impacto en el aprendizaje de los alumnos.

> "La educación no es preparación para la vida, la educación es la vida misma." J Dewey (1938).

> "Conocimiento, en el sentido de información, significa el capital de trabajo, los recursos indispensables para seguir preguntando, para descubrir o aprender, más cosas. Frecuentemente se lo trata como un fin en sí mismo, y entonces el objetivo se transforma en amontonarlo o mostrarlo cuando se lo requiere. Este conocimiento, estático y de frío almacenamiento, es perjudicial para el desarrollo educativo. No sólo hace que las oportunidades para pensar sean desaprovechadas, sino que saturan el pensamiento... Los alumnos que han llenado sus mentes con toda clase de material al cual nunca le han dado uso intelectual, de seguro estarán obstaculizados cuando traten de pensar. Ellos no tienen práctica en seleccionar que es apropiado, y ningún criterio que seguir, todo está en el mismo muerto y estático nivel. " John Dewey (1926)

REFLEXIÓN DOCENTE

En secundaria y bachillerato desarrollé un gusto y pasión por las matemáticas, tenía gran habilidad para resolver problemas y cuando algo no te cuesta trabajo es fácil que te acerques a ello. Estudié la carrera de Matemáticas en la Facultad de Ciencias y en mi paso por la licenciatura cursé varios Seminarios de Enseñanza de las Matemáticas, lo que significó el primer contacto con la didáctica de esta disciplina.

En la vida nos construimos a partir de lo que hacemos y cada paso en mi desarrollo profesional me ha acercado a la docencia. He participado como evaluadora de libros de texto para la SEP, como autora de materiales, como docente de estudiantes de secundaria, bachillerato, licenciatura, maestros en formación y maestros en servicio y he tenido la fortuna de apoyar a adolescentes en conflicto con la ley privados de libertad en sus estudios, y de todos mis alumnos he aprendido algo.

El trabajo con docentes me ha sensibilizado sobre la situación que viven, los problemas que enfrentan y la preparación que tienen. En la realización de este trabajo me quedó claro que los docentes de bachillerato, además de dominar los contenidos que imparte, deben ser sensibles a la edad de los alumnos, ya que no todos llegan al aula de clase en las mismas condiciones cada día. Si los alumnos se sienten escuchados y tomados en cuenta mejoran su actitud.

En muchos alumnos he observado frecuentemente la aversión que tienen hacia las matemáticas, que llega a grado tal, que mucho jóvenes al llegar a la universidad eligen la carrera que van a estudiar con el criterio de "que no tenga nada que ver con matemáticas", sin darse cuenta de que cualquier disciplina se relacionará con las matemáticas tarde o temprano. Otra arista de este problema la constituye los estudiantes que aprueban ciclos escolares, aprendiendo de memoria, cosas que no entienden, ya sea por la forma en cómo les enseñaron o porque no tienen las bases (entiéndase conocimientos previos) suficientes para comprender un tema.

Esta problemática despertó en mí el interés por hacer una aportación que sea capaz de modificar la situación descrita y la necesidad de fortalecer mi práctica docente, por lo que me inscribí a MADEMS. Esta maestría ha sido un complemento en mi formación, cursar las materias del campo disciplinar fue un gozo y las materias del tronco común entre las que se encuentran: ABP, Hermenéutica y Desarrollo del Adolescente ampliaron mi horizonte.

Por último, considero que la educación nos provee de herramientas para tomar mejores decisiones en la vida, nos hace menos egoístas y más conscientes de nuestra responsabilidad en el mundo. Espero que el presente trabajo sea útil para docentes y estudiantes de bachillerato.

"Enseñar es aprender dos veces."
Joseph Joubert

"La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar al mundo".
Nelson Mandela

XV. ANEXOS

ANEXO 1

NOMBRE______________________________________**GRUPO** _______________________

ACTIVIDAD 1

¿Cuántos triángulos?

Los documentos matemáticos más antiguos que se conservan están asentados sobre tablas de arcilla. Muchos de los conocimientos matemáticos son herencia de la cultura griega, sin embargo, no conservamos trabajos matemáticos originales de ellos, por los materiales que utilizaban o por la destrucción de sus bibliotecas, sin embargo, conocemos el trabajo de varios matemáticos por referencias de otros autores. Sabemos que sus estudios geométricos los hacían con cuerdas y estacas sobre la arena (Kline, 1972).

Actualmente escribimos sobre cuadernos, utilizamos reglas, juegos de geometría, compases, etc. y en el siglo XXI se ha incorporado la computadora a este trabajo.

1. Realiza lo que se pide.

   a) Traza del lado izquierdo de la tabla un triángulo equilátero que tenga 6 cm de lado.

b) Lleva a cabo el siguiente procedimiento del lado derecho:

- Traza un segmento AB de 6 cm de longitud.
- Con centro en el punto A traza una circunferencia que tenga radio igual a la longitud de AB.
- Con centro en B traza una segunda circunferencia que tenga radio igual a la longitud de AB.
- Determina la intersección de las circunferencias y llama C a uno de los puntos.
- Traza los segmentos AC y BC.
- ¿Qué tipo de triangulo es ABC? ______________________________________
- Escribe un argumento que justifique tu respuesta.

____

____

____

2. Trazo de triángulos isósceles

a) Redacta un procedimiento para trazar un triángulo isósceles.

b) Argumenta por qué es posible construir el triángulo con el procedimiento que propones.

____

____

c) Comprueba tu procedimiento trazando un triángulo que tenga un lado de 3 cm de longitud y dos lados de 5 cm. En caso de que no funcione tu procedimiento, analiza y corrige el planteamiento.

3. Otros triángulos

a) Traza un triángulo cuyos lados tengan de longitudes; 4 cm, 5 cm y 8 cm

b) ¿Cómo se llama el triángulo que trazaste? ________________________________

c) Responde: ¿qué es un triángulo rectángulo? y traza uno a continuación.

____

____

d) Describe cómo trazaste el ángulo recto.

____

____

____

____

____

____

ACTIVIDAD 2

Realicen la siguiente actividad por parejas:

1. Observen el material de la bolsa sin tocarla. Cada barrita representa un segmento de recta. Hagan una estimación: ¿cuántos triángulos diferentes pueden construir con ese material? ____

NOTA*: NO AL MISMO TIEMPO*

2. Sin abrir la bolsa, respondan.

a) ¿Cuántos triángulos equiláteros pueden construir? ____________________________

b) Argumenten su respuesta

____

____

____

c) ¿Cuántos triángulos isósceles? ____

Indiquen cada uno de los triángulos ____

____

3. Saquen el material de la bolsa y verifiquen que pueden construir los triángulos que indicaron con el material. Escriban sus observaciones

____

____

____

____

4. Guarden nuevamente el material en la bolsa. Las longitudes de los segmentos de la bolsa son: 8, 5, 4 y 3 unidades, respectivamente.

a) Con esta información, y sin manipular el material contesten, ¿cuántos y cuáles triángulos escalenos se pueden construir con el material? ________________________

5. Redacten un enunciado que generalice sus observaciones.

____

____

____

ACTIVIDAD 3

Realiza la siguiente actividad.

I. El tercer lado

1. Escribe la longitud de dos segmentos ___________ y ___________.

   NOTA: utiliza de preferencia longitudes menores de 10 cm).

2. Traza un segmento AB horizontal con la longitud del mayor de los segmentos que propusiste. Con centro en A, traza una circunferencia que tenga de radio la longitud del segundo segmento que propusiste.

3. Selecciona un punto sobre la circunferencia y llámale C. Traza los segmentos AC y BC. ¿Qué longitud tiene el segmento BC? ____

4. Explora y anota cuál es la longitud **mínima** que puede tener el tercer segmento (BC) de un triángulo formado con los dos segmentos anteriores

   ____

5. ¿Cuál es la longitud **máxima** que puede tener el tercer segmento (BC)? _________________

II. Completa los siguientes enunciados generales:

1. Dados dos segmentos de longitud a y b., la longitud máxima del segmento c con el cual se pueda formar el triángulo ABC es ____

2. La longitud mínima del segmento c con el cual se pueda formar el triángulo ABC es

____

III. Dibuja en el lado izquierdo de la tabla un triángulo que tenga como perímetro 12 cm.

6. Escribe la longitud de los lados del triángulo que trazaste_____________________________

   ____

7. Traza un triángulo que tenga el mismo perímetro y que uno de sus lados mida 6 unidades de longitud en el lado derecho de la tabla anterior. Escribe las longitudes de sus lados

   ____

8. Redacta tus observaciones ____

____

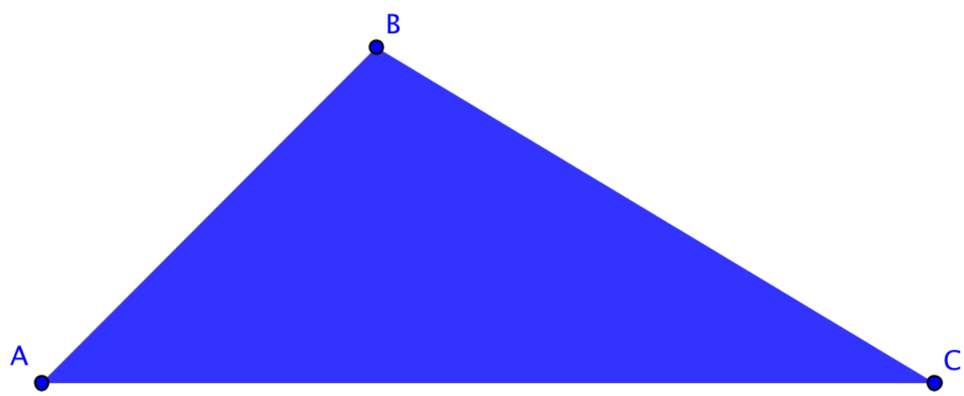
____

____

9. ¿Cuál es la máxima longitud de uno de los lados de un triángulo que tenga de perímetro 12 cm? ____

Lo que hemos abordado en la sesión se conoce como **"La desigualdad del triángulo"** y dice que:

> **"En cualquier triángulo ABC, la longitud de un lado del triángulo es siempre menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados."**



AB+BC>AC
BC+CA>AB
CA+AB>BC

Una consecuencia de la desigualdad del triángulo es que **"el camino más corto entre dos puntos en el plano es una línea recta"**. Este concepto se aplica en otras disciplinas, para los físicos que estudian el movimiento les interesa saber, por ejemplo, si un objeto se desplaza de una posición a otra. ¿Qué distancia hay entre las posiciones? ¿Cuánto tiempo invierte en el desplazamiento? ¿A qué velocidad se mueve? A la ruta o camino que realiza el objeto se le denomina *trayectoria* y a la longitud de la trayectoria se le denomina *distancia*. La longitud de la trayectoria es mínima cuando el recorrido de un punto a otro es en línea recta.

ACTIVIDAD 4

Realicen las siguientes actividades por parejas con el *Rompecabezas triangular*:

1. ¿Qué es el área de un triángulo y cómo la calculan? ________________________________
   ____
2. Determinen el área del triángulo del rompecabezas ________________________________
3. Calquen el contorno del triángulo en una hoja de papel.
4. Recorten las seis piezas que forman el rompecabezas.
5. Sobre la figura que, calcada, armen el triángulo con las piezas que recortaron de manera que inviertan el lugar que ocupan los triángulos, los mayores arriba y los menores abajo.
6. Describan qué sucede con el nuevo acomodo ______________________________________
   ____
7. ¿Cuál es el área del triángulo con la nueva figura? __________________________________
8. Discutan con sus compañeros de equipo una posible explicación y escríbanla a continuación:
   ____
   ____
   ____
   ____

Cuando los matemáticos afirmamos que un resultado, proposición o teorema se cumple, lo hacemos confiando en el método con el que trabajamos; este método se llama **axiomático deductivo**. Para afirmar que una proposición sucede siempre, partimos de una serie de enunciados que aceptamos como válidos: axiomas y postulados, luego determinamos las reglas del juego -nociones comunes- y deducimos la verdad de una proposiciones o teorema con una **demostración**.

Los primeros en trabajar con este método fueron los griegos, y un ejemplo de esta forma de trabajo la tenemos en la obra *Los Elementos* escrita por Euclides (300 a. n. e.), matemático que recopiló los conocimientos de su época y los estructuró bajo este método. *Los Elementos* están divididos en XIII libros; en ellos parte de 23 definiciones, 5 nociones comunes y 5 postulados; con ellos Euclides deduce 465 **proposiciones** o **teoremas**.

ACTIVIDAD 5

Comprobar vs demostrar

En esta sesión trabajaremos algunos aspectos relativos a ángulos, primero haremos dos demostraciones, una con doblado de papel y otra más formal.

1. Ángulos opuestos por el vértice

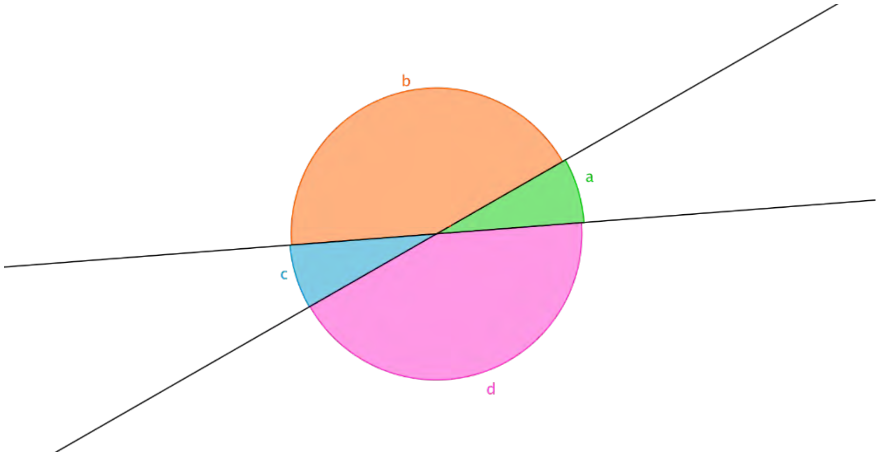
a) Traza dos rectas que se corten.

b) ¿Cuántos ángulos se forman entre ellas? ____________________________________

c) Hay alguna relación entre estos ángulos ____________________________________

2. En la siguiente ilustración hay cuatro ángulos de nombres: a, b, c, d, marcados de diferente color. Los ángulos "a y c" o "b y d" se llaman opuestos por el vértice.

"Los ángulos opuestos por el vértice son iguales"



Demostración:

- ¿Cuánto suman los ángulos a y b? ______________ Argumenta tu respuesta

  ____

- ¿Cuánto suman los ángulos b y c? _____________ Argumenta tu respuesta

  ____

- Como **a + b = 180**° y también **b + c = 180°.** Con base en la noción común podemos afirmar que **a + b = b + c**.

  Resta b de ambos lados y escribe lo que obtienes}

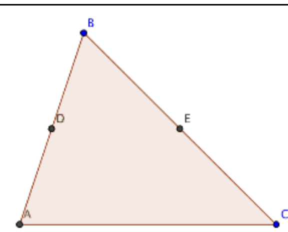
  ____

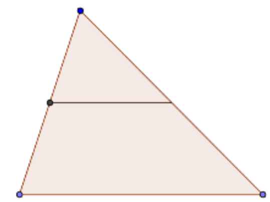
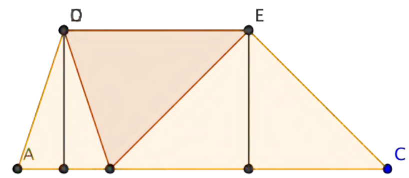
- Observa que la demostración que acabamos de hacer no depende de las medidas de los ángulos de la figura.

3. **La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a dos rectos o 180°**

La siguiente demostración se realizará con doblado de papel.

- Empieza por trazar un triángulo cualquiera en una hoja de papel y recórtalo.

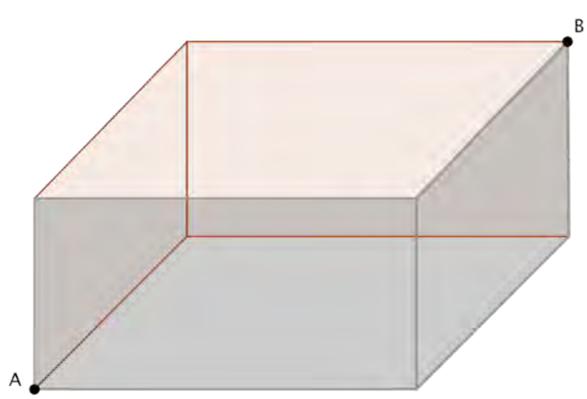
Marca cada ángulo con diferente color. De ambos lados del triángulo. Marca los puntos medios de cada lado doblando el papel (D y E).	

Marca una recta paralela a la base (AC) que pase por D y E.	
Dobla el triángulo por la recta paralela que marcaste, de manera que el vértice B coincida con la base AC. Marca dos rectas perpendiculares a la base AC que pasen por los puntos medios D y E respectivamente.	
Haz coincidir los tres vértices doblando por las perpendiculares marcadas. Haz un dibujo de la resultante al hacer los dobleces. ¿Por qué podemos asegurar que la suma de los ángulos interiores es 180°? ____________________ ____________________ ____________________	

ACTIVIDAD 6

Trayectorias mínimas

1. Construye una caja sin tapa que tenga como base un rectángulo de 7 por 4 cm y de altura 3 cm. Traza el desarrollo plano de la caja, ármalo y pégalo con cinta adhesiva.



2. Una mosca y una hormiga están paradas **al mismo tiempo en el interior de la caja** en el punto marcado con la letra A, ambas se desplazan al punto B, la hormiga camina por la caja y la otra va por el aire.

   a) Sin hacer cálculos responde, ¿quién recorre una distancia menor? ___________________

   b) Marca el camino que realiza cada una de ellas.

   c) Determina la longitud de los recorridos de cada una. Escríbelos a continuación:

   Mosca __________________________Hormiga _______________________________________

3. Para determinar ambas longitudes debemos aplicar el Teorema de Pitágoras. ¿Qué dice el Teorema de Pitágoras?

   ____

   ____

   ____

4. ¿Se puede aplicar el teorema de Pitágoras a cualquier triángulo? ________________________

5. Justifica tu respuesta ____

   ____

   ____

ACTIVIDAD 7

El teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras dice que en todo triángulo con un ángulo recto (triángulo rectángulo) se satisface que: *"La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa",* es decir, $(AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2$

1. En la Actividad 1 trazaron un triángulo rectángulo. Llamen *a* y *b* a los catetos y *c* a la hipotenusa. Midan las longitudes de los lados del triángulo que trazaron y verifiquen que satisfacen la relación: $a^2 + b^2 = c^2$.

2. Supongamos que en el grupo tenemos 25 triángulos rectángulos con lados de diferentes longitudes y todos satisfacen que $a^2 + b^2 = c^2$; ¿es esto suficiente garantía para saber que esta relación se cumple en cualquier triángulo rectángulo? ____________________________

3. ¿Cómo sabemos que el teorema es válido en todos los triángulos rectángulos? ____

____

____

El libro *Los Elementos de Euclides* presenta en la proposición 47 del *Libro I* una demostración del teorema de Pitágoras. Existen una gran diversidad de demostraciones de este teorema y, aunque algunos autores afirman que Pitágoras fue el primero en demostrarlo, no lo sabemos de cierto.

En su libro *La Proposición Pitagórica*", Elisha S. Loomis hace una recopilación de 367 diferentes demostraciones del Teorema de Pitágoras. Veamos un ejemplo.

4. Realiza las siguientes actividades:

a) Toma una hoja de papel y traza un triángulo cualquiera en una de las esquinas de una hoja. Dobla la hoja en cuatro partes y corta cuatro triángulos iguales al que trazaste.

b) ¿Tienen los cuatro triángulos algún ángulo recto? Argumenta tu respuesta.

____

____

____

c) Llama *a, b* a los catetos y *c* la hipotenusa. Usaremos las mismas letras para referirnos a los segmentos y a sus longitudes.

d) En una hoja, traza un segmento de recta que tenga de longitud ($a+b$) y a partir de él construye un cuadrado de lado ($a+b$).

e) Coloca los cuatro triángulos que recortaste sobre el cuadrado de manera que el interior este formado por los cuatro triángulos que recortaste y un cuadrado.

f) ¿Qué argumento garantiza que la figura interior es un cuadrado?

____

____

____

g) Escribe el área del cuadrado de lado (*a+b*) en términos del área de los triángulos y el área del cuadrado ____

____

____

h) Modifica el arreglo de manera que en el cuadrado de lado (*a+b*) se complete con cuatro triángulos y dos cuadrados. Justifica que los cuadriláteros son cuadrados

i) Escribe el área del cuadrado de lado (*a+b*) en términos del área de los triángulos y del área de los dos cuadrados ____

____

j) Iguala las expresiones que obtuviste en los incisos anteriores y reduce los términos que sea posible ____

____

k) ¿Depende el resultado obtenido de las medidas del triángulo? ¿Por qué? ___________

____

____

____

ACTIVIDAD 8

El recíproco del Teorema de Pitágoras

La importancia del Teorema de Pitágoras reside en que asocia dos áreas de las matemáticas: la geométrica y la aritmética. El teorema afirma que si se satisface una relación geométrica –dado un triángulo rectángulo– entonces se cumple una relación aritmética –que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa–.

Esta relación también se da a la inversa y se conoce como el *Recíproco del Teorema de Pitágoras* que afirma que si tenemos tres números que satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces estos números representan la longitud de tres segmentos con los cuales se puede construir un triángulo que tiene un ángulo recto.

Otra perspectiva, llamaremos ternas a un conjunto de tres números a, b, c y los denotaremos como (a, b, c). Podemos interpretar las longitudes de los lados de un triángulo como una terna. Al principio de la sesión comenzaste trabajando con ternas (8, 8, 8) o bien (7, 5, 3).

Decimos que (a, b, c) es una terna pitagórica si los números que la forman satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Las ternas pitagóricas se conocían mil años antes de que Pitágoras naciera.

La siguiente ilustración muestra la tablilla conocida como Plimpton 322, esta tablilla, que tiene 3 770 años de antigüedad, y que es del tamaño de un borrador de pizarrón, fue utilizada por los babilonios para hacer cálculos que se requerían en la construcción de templos o palacios.

La tablilla está llena de inscripciones que representan números colocados en 4 columnas y 15 renglones. Los números de la tabla representan triángulos rectángulos.

- Observa el siguiente video: <https://youtu.be/aL9Q0fyTKxA>

ACTIVIDAD FINAL

Elabora un mapa conceptual con las ideas trabajadas en la secuencia.

ANEXO 2

NOMBRE_______________________________________GRUPO ________________________

ACTIVIDAD 1

¿Cuántos triángulos?

Los documentos matemáticos más antiguos que se conservan están asentados sobre tablas de arcilla. Muchos de los conocimientos matemáticos son herencia de la cultura griega y no conservamos trabajos matemáticos originales de esa época, ya sea por los materiales que utilizaban o por la destrucción de sus bibliotecas, sin embargo, conocemos su trabajo por referencias de otros autores, por ejemplo, sabemos que los trazos geométricos los hacían con cuerdas y estacas sobre la arena (Kline, 1972).

Actualmente en las escuelas los estudiantes escriben en cuadernos, utilizan regla, juego de geometría, compás, etc. Y desde hace no muchos años, la computadora se ha incorporado a este trabajo con una gran oferta de software matemático. En estas sesiones utilizaremos el programa GeoGebra.

GeoGebra es una aplicación libre interactiva de matemáticas creada en 2001 por Markus Hohenwarter como una propuesta de sus tesis de maestría en educación matemática y ciencias de la computación en la Universidad de Salzburgo.

Para empezar, es importante descargar el programa en la computadora, para ello ingresa a la página <www.GeoGebra.org/>; en ella se puede descargar el programa, los manuales, los tutoriales y los materiales desarrollados con el programa para el aula.

Una vez descargado, pulsa en el logo de GeoGebra para iniciar; al hacerlo se despliega la interfaz del programa. En la parte superior de la página se observa la barra de herramientas con diversos botones, empieza por familiarízate con ellos.

Las herramientas están organizadas en pestañas que manejan objetos que comparten elementos comunes.

Realiza las siguientes actividades y responde las preguntas:

1. Describe el procedimiento que utilizaste para realizar las siguientes actividades.
   a) Traza un segmento de recta que pase por dos puntos.
   b) Traza una recta que pase por otros dos puntos.
   c) Escribe la diferencia entre segmento de recta y una recta. ______________________

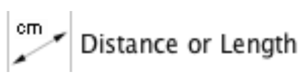
      ____

      ____

2. Trazo de triángulos equiláteros.
   a) En una hoja de GeoGebra:
      - Traza un triángulo equilátero cuyos lados midan 5 unidades. Describe el procedimiento que utilizaste. ____

        ____

        ____

      - Utiliza la tecla 

 para comprobar que el triángulo es equilátero.
   b) Abre una nueva hoja de GeoGebra y realiza los siguientes trazos.
      - Traza un segmento AB de 5 unidades de longitud.
      - Traza una circunferencia que tenga centro en el punto A y radio igual a la longitud de AB.
      - Traza una segunda circunferencia que tenga centro en el punto B y radio igual a la longitud de AB.
      - Responde, ¿por qué utilizamos circunferencias en los trazos? _________________

        ____

        ____

      - Determina la intersección de las circunferencias. Llama C a uno de los puntos de intersección.
      - Traza los segmentos AC y BC.

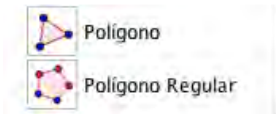
- ¿Qué tipo de triangulo es ABC? ______________________________________
- Argumenta tu respuesta. ______________________________________

  ____

  ____

  ____

c) Explora cómo trazar un triángulo equilátero con la tecla "Polígono regular"



y traza el triángulo equilátero de 5 cm con ella.

3. Trazo de triángulos isósceles.

a) Redacta un procedimiento para trazar un triángulo isósceles.

____

____

____

____

b) Argumenta por qué es posible construir el triángulo isósceles con el procedimiento que propones. ______________________________________

____

____

c) Comprueba tu procedimiento trazando un triángulo que tenga un lado de 3 unidades de longitud y dos lados de 5 unidades cada uno. En caso de que no funcione tu procedimiento, analiza y corrige el planteamiento.

4. Otros triángulos

a) Traza un triángulo cuyos lados tengan de longitudes; 4, 5 y 8.

b) ¿cómo se llama el triángulo que trazaste? ______________________________

c) Escribe una definición de triángulo rectángulo. ____________________________

____

____

d) Abre una hoja nueva de GeoGebra, **sin cuadrícula, ni ejes**. Traza un triángulo rectángulo y escribe a continuación la longitud de sus segmentos. __________, __________ y __________.

e) Describe cómo trazaste el ángulo recto ____

____

____

____

5. Responde las siguientes preguntas, justifica tu respuesta.

a) ¿Existe un triángulo isósceles que también sea rectángulo? ¿Por qué?

____

____

____

____

b) ¿Existe un triángulo rectángulo que también sea equilátero? ¿Por qué?

____

____

____

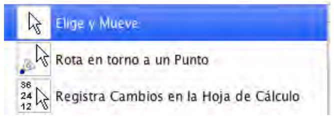
____

6. GeoGebra incluye un botón diseñado para determinar el área de una figura. Traza un triángulo y explora su funcionamiento.

a) Realiza el siguiente procedimiento en una nueva hoja de GeoGebra:

- Traza un segmento AB.
- Toma un punto C fuera del segmento AB.
- Con el botón “polígono” traza el triángulo ABC.
- Determina el área del triángulo.
- Traza una recta paralela al segmento AB que pase por C.

- Selecciona “Elige y mueve” y desplaza el punto C sobre la recta paralela. /



b) ¿Qué pasa con el área del triángulo? ____

c) Por parejas, escriban una explicación de sus respuestas. ________________________

____

____

____

ACTIVIDAD 2

Realicen la siguiente actividad por parejas:

1. Observen el material de la bolsa sin tocarla. Cada barrita representa un segmento de recta. Hagan una estimación: ¿cuántos triángulos diferentes pueden construir con ese material?

____

NOTA*: NO AL MISMO TIEMPO*

2. Sin abrir la bolsa, respondan.

a) ¿Cuántos triángulos equiláteros pueden construir? _______________________________

b) Argumenten su respuesta

____

____

____

c) ¿Cuántos triángulos isósceles? ____

d) Indiquen cada uno de los triángulos ____

____

____

____

3. Saquen el material de la bolsa y verifiquen que pueden construir los triángulos que indicaron con el material. Escriban sus observaciones

____

____

____

____

4. Guarden nuevamente el material en la bolsa. Las longitudes de los segmentos de la bolsa son: 8, 5, 4 y 3 unidades, respectivamente.

   a) Con esta información, y sin manipular el material contesten, ¿cuántos y cuáles triángulos escalenos se pueden construir con el material? ___________________________

5. Redacten un enunciado que generalice sus observaciones.

____

____

____

ACTIVIDAD 3

Realiza la siguiente actividad en una página de GeoGebra.

I. El tercer lado

1. Escribe la longitud de dos segmentos ____________ y ____________.

   NOTA: utiliza de preferencia longitudes menores de 10 cm).

2. Traza un segmento AB horizontal con la longitud del mayor de los segmentos que propusiste. Con centro en A, traza una circunferencia que tenga de radio la longitud del segundo segmento que propusiste.

3. Selecciona un punto sobre la circunferencia y llámale C. Traza los segmentos AC y BC. ¿Qué longitud tiene el segmento BC? ____

4. Explora y anota cuál es la longitud **mínima** que puede tener el tercer segmento (BC) de un triángulo formado con los dos segmentos anteriores _________________________________

5. ¿Cuál es la longitud **máxima** que puede tener el tercer segmento (BC)? ________________

II. Completa los siguientes enunciados generales:

1. Dados dos segmentos de longitud a y b., la longitud máxima del segmento c con el cual se pueda formar el triángulo ABC es ____

2. La longitud mínima del segmento c con el cual se pueda formar el triángulo ABC es

____

III. Dibuja un triángulo que tenga como perímetro 12 unidades.

1. Escribe la longitud de sus lados: __________, ___________, ___________

2. Traza otro triángulo que tenga el mismo perímetro y que uno de sus lados mida 6 unidades de longitud.

3. Redacta tus observaciones. ____

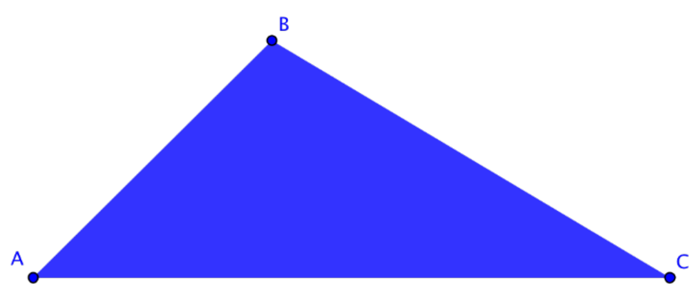
____

4. ¿Cuál es la máxima longitud de uno de los lados del triángulo de perímetro 12?

5. Es verdadera o falsa la siguiente afirmación: "Cualquier lado de un triángulo es menor que la mitad de su perímetro".

LA DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO

En cualquier triángulo ABC sucede que la longitud de un lado del triángulo es siempre menor que la suma de los otros dos lados.



AB+BC>AC
BC+CA>AB
CA+AB>BC

Una consecuencia de la desigualdad del triángulo es que **"el camino más corto entre dos puntos en el plano es una línea recta"**. Este concepto se aplica en otras disciplinas, para los físicos que estudian el movimiento les interesa saber, por ejemplo, si un objeto se desplaza de una posición a otra. ¿Qué distancia hay entre las posiciones? ¿Cuánto tiempo invierte en el desplazamiento? ¿A qué velocidad se mueve? A la ruta o camino que realiza el objeto se le denomina *trayectoria* y a la longitud de la trayectoria se le denomina *distancia*. La longitud de la trayectoria es mínima cuando el recorrido de un punto a otro es en línea recta.

ACTIVIDAD 4

Realicen las siguientes actividades por parejas con el *Rompecabezas triangular*:

1. ¿Qué es el área de un triángulo y cómo la calculan? ________________________________

   ____

2. Determinen el área del triángulo del rompecabezas ________________________________
3. Calquen el contorno del triángulo en una hoja de papel.
4. Recorten las seis piezas que forman el rompecabezas.
5. Sobre la figura que, calcada, armen el triángulo con las piezas que recortaron de manera que inviertan el lugar que ocupan los triángulos, los mayores arriba y los menores abajo.
6. Describan qué sucede con el nuevo acomodo ______________________________________

   ____

7. ¿Cuál es el área del triángulo con la nueva figura? ________________________________
8. Discutan con sus compañeros de equipo una posible explicación y escríbanla a continuación:

   ____

   ____

   ____

   ____

Cuando los matemáticos afirmamos que un resultado, proposición o teorema se cumple, lo hacemos confiando en el método con el que trabajamos, este método se llama axiomático deductivo. Para afirmar que una proposición sucede siempre partimos de una serie de enunciados que aceptamos como válidos; axiomas y postulados, determinamos las reglas del juego -nociones comunes- y deducimos la verdad de una proposiciones o teorema con una demostración.

Los primeros en trabajar con este método fueron los griegos y un ejemplo de esta forma de trabajo la tenemos en la obra *Los Elementos* escrita por Euclides (300 a. e.), matemático que recopiló los conocimientos de su época y los estructuró bajo este método. *Los Elementos* están divididos en XIII libros los cuales parten de 2 tres definiciones, 5 nociones comunes y 5 postulados, con ellos Euclides deduce 465 proposiciones o teoremas.

ACTIVIDAD 5

Comprobar vs demostrar

En esta actividad trabajaremos algunos aspectos relativos a ángulos, primero haremos dos demostraciones, una con doblado de papel y otra más formal.

4. Ángulos opuestos por el vértice

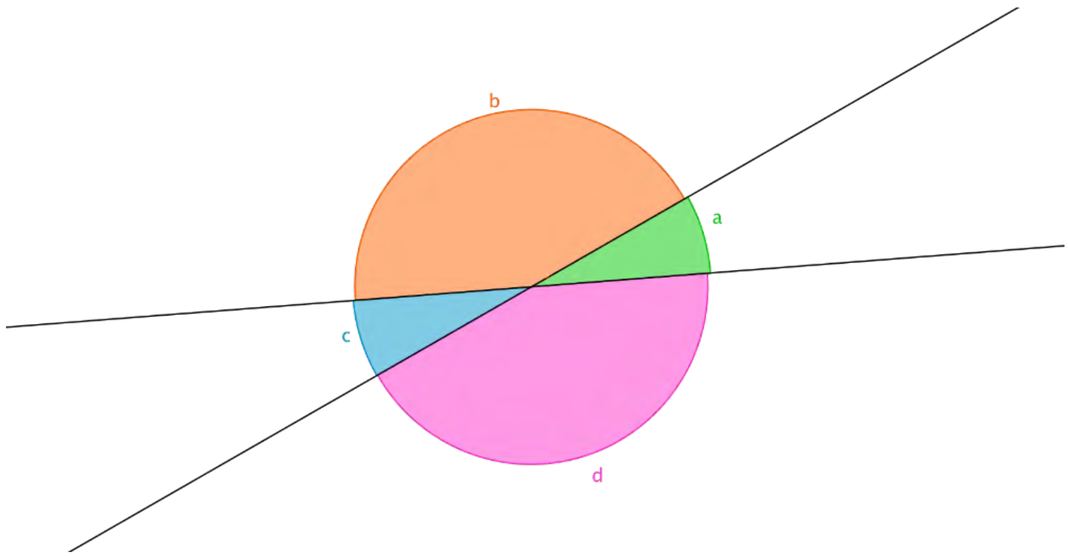
a) Traza dos rectas que se corten.

b) ¿Cuántos ángulos se forman entre ellas? ______________________________________

c) Hay alguna relación entre estos ángulos _______________________________________

5. En la siguiente ilustración hay cuatro ángulos de nombres: a, b, c, d, marcados de diferente color. Los ángulos "a y c" o "b y d" se llaman opuestos por el vértice.

"Los ángulos opuestos por el vértice son iguales"



Demostración:

a) ¿Cuánto suman los ángulos a y b? _____________ Argumenta tu respuesta

____

b) ¿Cuánto suman los ángulos b y c? ____________ Argumenta tu respuesta

____

c) Como **a + b = 180**° y también **b + c = 180°.** Con base en la noción común podemos afirmar que **a + b = b + c**.

Resta b de ambos lados y escribe lo que obtienes

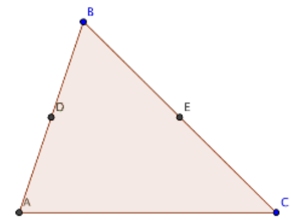
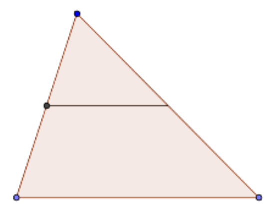
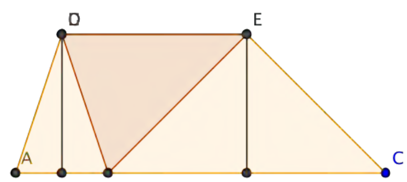
____

d) Observa que la demostración que acabamos de hacer no depende de las medidas de los ángulos de la figura.

6. **La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a dos rectos o 180°**

La siguiente demostración se realizará con doblado de papel.

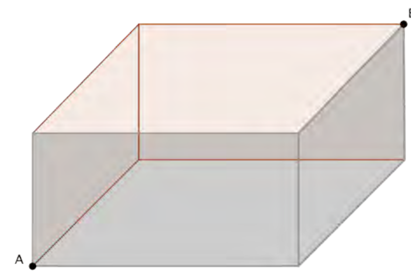
a) Empieza por trazar un triángulo cualquiera en una hoja de papel y recórtalo.

Marca cada ángulo con diferente color. De ambos lados del triángulo. Marca los puntos medios de cada lado doblando el papel (D y E).	
Marca una recta paralela a la base (AC) que pase por D y E.	
Dobla el triángulo por la recta paralela que marcaste, de manera que el vértice B coincida con la base AC. Marca dos rectas perpendiculares a la base AC que pasen por los puntos medios D y E respectivamente.	
Haz coincidir los tres vértices doblando por las perpendiculares marcadas. Haz un dibujo de la resultante al hacer los dobleces. ¿Por qué podemos asegurar que la suma de los ángulos interiores es 180°? ____________________ ____________________ ____________________	

ACTIVIDAD 6

Trayectorias mínimas

1. Construye una caja sin tapa que tenga como base un rectángulo de 7 cm por 4 cm y de altura 3 cm. Traza el desarrollo plano de la caja, ármalo y pégalo con cinta adhesiva.



2. Una mosca y una hormiga están paradas **al mismo tiempo en el interior de la caja** en el punto marcado con la letra A, ambas se desplazan al punto B, la hormiga camina por la caja y la otra va por el aire.

   a) Sin hacer cálculos responde, ¿quién recorre una distancia menor? ____________________

   b) Marca el camino que realiza cada una de ellas.

   c) Determina la longitud de los recorridos de cada una. Escríbelos a continuación:

   Mosca ______________________________Hormiga __________________________________

3. Para determinar ambas longitudes debemos aplicar el Teorema de Pitágoras. ¿Qué dice el Teorema de Pitágoras?

   ____

   ____

   ____

4. ¿Se puede aplicar el teorema de Pitágoras a cualquier triángulo? ____

5. Justifica tu respuesta ____

   ____

   ____

ACTIVIDAD 7

El teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras dice que en todo triángulo con un ángulo recto (triángulo rectángulo) se satisface que: *"La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa",* es decir, $(AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2$

Supongamos que en el grupo tenemos 25 triángulos con lados de diferentes longitudes y todos satisfacen que $a^2 + b^2 = c^2$, ¿es esto suficiente garantía para saber que esta relación se satisface en cualquier otro triángulo rectángulo?, ¿cómo sabemos que el teorema es válido en todos los triángulos rectángulos?

Cuando los matemáticos afirmamos que un resultado se cumple siempre, lo hacemos con base en el método con el que trabajamos, este método se llama axiomático deductivo. Partimos de una serie de enunciado "axiomas" que suponemos son verdaderos y mediante argumentos lógicos deducimos la verdad del resultado.

Los primeros en trabajar con este método fueron los griegos y un ejemplo de esta forma de trabajo la tenemos en la obra "Los Elementos" de Euclides. Euclides sabemos que recopilo los conocimientos de su época y los estructuro bajo este método.

Existen una gran diversidad de demostraciones de este teorema y aunque algunos autores afirman que Pitágoras fue el primero en demostrarlo no lo sabemos de cierto. En el libro "La Proposición Pitagórica" Loomis reunió 367 diferentes demostraciones del Teorema de Pitágoras.

1. Veamos un ejemplo de una demostración. Realiza las siguientes actividades:

   a) Traza un triángulo rectángulo cualquiera en una hoja. Calca y recorta 8 triángulos idénticos al que propusiste.

   b) Escribe en cada triángulo los nombres de ***a, b*** a los catetos y ***c*** la hipotenusa. Usaremos las mismas letras para referirnos a los segmentos y a sus longitudes.

   c) En una hoja traza un segmento de recta que tenga de longitud $(a+b)$ y a partir de él construye un cuadrado de lado $(a+b)$.

   d) Coloca cuatro de los triángulos que recortaste sobre el cuadrado de manera que el interior este formado por los cuatro triángulos y un cuadrado.

   e) Escribe un argumento que justifique que el interior de la figura es un cuadrado.

   ____

   ____

   ____

f) Escribe el área del cuadrado de lado (*a+b*) en términos del área de los triángulos y el área del cuadrado ____

g) Traza otro cuadrado de lado *(a+b)* y determina un arreglo de los triángulos diferente al primero de manera que se formen cuatro triángulos y dos cuadrados. ¿Qué justifica que los cuadriláteros son cuadrados? ____

____

____

h) Escribe el área del cuadrado de lado *(a+b)* en términos del área de los triángulos y del área de los dos cuadrados ____

i) Iguala las expresiones que obtuviste en los incisos f) y h), y reduce los términos que sea posible ____

j) Escribe tus observaciones ____

____

____

Observa que el resultado obtenido no depende de las medidas del triángulo que hayas propuesto.

Una interpretación geométrica

El teorema de Pitágoras se puede interpretar geométricamente como: “La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa”. Compruébalo con la siguiente actividad.

2. En una hoja de GeoGebra, traza un triángulo rectángulo cualquiera.

a) Construye cuadrados a partir de los catetos y la hipotenusa, determina el área de cada uno y verifica que se cumple el teorema de Pitágoras.

b) ¿Crees que la interpretación geométrica sólo aplica para el área de cuadrados?

____

____

c) Modifica el dibujo cambiando los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo por pentágonos regulares. Determina el área de cada uno y verifica si se satisface la interpretación sugerida.

d) Cambia los pentágonos regulares por media circunferencia y verifica lo mismo.

e) Explora qué otras figuras puedes sustituir en lugar de los cuadrados de manera que satisfagan el teorema de Pitágoras.

3. Escribe el resultado general que comprobaste.

____

____

ACTIVIDAD 8

El recíproco del Teorema de Pitágoras

La importancia del Teorema de Pitágoras reside en que asocia dos áreas de las matemáticas: la geométrica y la aritmética. El teorema afirma que si se satisface una relación geométrica –dado un triángulo rectángulo– entonces se cumple una relación aritmética –que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa–.

Esta relación también se da a la inversa y se conoce como el *Recíproco del Teorema de Pitágoras* que afirma que si tenemos tres números que satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces estos números representan la longitud de tres segmentos con los cuales se puede construir un triángulo que tiene un ángulo recto.

Otra perspectiva, llamaremos ternas a un conjunto de tres números a, b, c y los denotaremos como (a, b, c). Podemos interpretar las longitudes de los lados de un triángulo como una terna. Al principio de la sesión comenzaste trabajando con ternas (8, 8, 8) o bien (7, 5, 3).

Decimos que (a, b, c) es una terna pitagórica si los números que la forman satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Las ternas pitagóricas se conocían mil años antes de que Pitágoras naciera.

La siguiente ilustración muestra la tablilla conocida como Plimpton 322, esta tablilla, que tiene 3 770 años de antigüedad, y que es del tamaño de un borrador de pizarrón, fue utilizada por los babilonios para hacer cálculos que se requerían en la construcción de templos o palacios.

La tablilla está llena de inscripciones que representan números colocados en 4 columnas y 15 renglones. Los números de la tabla representan triángulos rectángulos.

- Observa el siguiente video: <https://youtu.be/aL9Q0fyTKxA>

ACTIVIDAD FINAL

Elabora un mapa conceptual con las ideas trabajadas en la secuencia.

ANEXO 3

Examen diagnóstico

Nombre del estudiante: ____ Fecha: ________________

Objetivo: identificar las ideas previas del estudiante.

Instrucciones: Responde los siguientes reactivos. Argumenta tu respuesta.

1. ¿Qué es un triángulo? ____

   ____

2. ¿Cuál es la diferencia entre un segmento y una recta? _________________________

   ____

3. Completa la tabla:

Rectas	**Definición**
Paralelas	
Perpendiculares	

4. Si partimos una tira de espagueti crudo en tres partes, ¿podemos siempre construir un triángulo con ellos? ____
5. Determina el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 2, 4 y 10 cm.

6. El perímetro de un triángulo es de 24 cm. Determina la longitud de los lados de dos triángulos que tengan ese perímetro.

Triángulo 1: ____

Triángulo 2: ____

7. Un triángulo rectángulo tiene un cateto que mide 5 cm y la hipotenusa 12 cm. ¿Cuál es el perímetro y el área del triángulo?

8. Un triángulo cuyos lados miden 5, 8 y 9, ¿es un triángulo rectángulo?

9. ¿Qué dice el Teorema de Pitágoras? ____

   ____

ANEXO 4

Cuestionario de autoevaluación.

Nombre del estudiante: ____

Fecha: _______________________ Tiempo aproximado: 5 minutos

Objetivo: El estudiante evaluará su desempeño respecto al trabajo colaborativo, respeto y compromiso.

Dicho instrumento se aplicará a los estudiantes del grupo de 130A de alumnos del CCH Sur.

Instrucciones: Llena con bolígrafo la siguiente tabla de acuerdo con las categorías que contiene para la secuencia "¿Cuántos triángulos?". En cada categoría, marca con una X la casilla con las iniciales que consideres adecuadas en cuanto a tu participación, en donde:

TA - Totalmente de acuerdo
DA - De acuerdo
I - Indiferente
D - Desacuerdo
TD - Totalmente en desacuerdo

Categoría	TA	DA	I	D	TD
Mi aportación en el trabajo fue significativa.					
Mi compromiso con el trabajo fue suficiente.					
Respeté las ideas de mis compañeros.					
Participé activamente en la solución del caso.					
Expresé mis ideas con claridad.					

ANEXO 5

Cuestionario Alumno – Tutor

Nombre del estudiante: ___________________________________ Salón: ______

Fecha: ______________________ Tiempo aproximado: 5 minutos

Objetivo: El estudiante evaluará el desempeño de las funciones del tutor.

Dicho instrumento se aplicará a los estudiantes del grupo 130A de alumnos del CCH Sur.

Instrucciones: Llena con bolígrafo la siguiente tabla de acuerdo con las categorías que contiene para la secuencia "¿Cuántos triángulos?". En cada categoría, marca con una X la casilla con las iniciales que consideres adecuadas en cuanto al desempeño del tutor, en donde:

TA - Totalmente de acuerdo
DA - De acuerdo
I - Indiferente
D - Desacuerdo
TD - Totalmente en desacuerdo

Categoría	**TA**	**DA**	**I**	**D**	**TD**
Demostró capacidad para comunicarse.					
Proporcionó instrucciones claras y precisas para el grupo.					
Creó interés en el estudio del tema.					
Estimuló el desarrollo de procesos de pensamiento.					
Aceptó respuestas diferentes.					
Aclaró las dudas satisfactoriamente.					
Mantuvo el respeto de todo el grupo.					
Estimuló la reflexión.					

ANEXO 6

Rúbrica del Mapa Conceptual

Indicaciones generales:

- La siguiente rúbrica la usará, como guía, tanto el tutor como los estudiantes.
- El tutor se basará en ella para evaluar el mapa conceptual que elaborarán los estudiantes del grupo 130A de alumnos del CCH Sur.
- Los alumnos se guiarán en ella para la elaboración del mapa conceptual.

Instrucciones para los estudiantes:

- Elabora un Mapa Conceptual con los conceptos que estudiaste en la secuencia "¿Cuántos triángulos?".
- Usa la siguiente rúbrica para la elaboración del mapa.

Descripción de la rúbrica:

La rúbrica contiene 10 categorías (primera columna).

Cada categoría se puede evaluar con la puntuación que se indica en la parte superior de cada columna.

Puntuación:

La calificación del mapa conceptual se emitirá con base en lo siguiente:

Se asignará una puntuación a cada categoría dependiendo del contenido del mapa y lo descrito en cada columna. La puntuación final del mapa se obtendrá sumando los puntos asignados en cada categoría y se obtendrá la calificación respecto a la siguiente tabla:

Suma	10	11 a 16	17 a 22	2 tres a 28	29 a 34	35 a 40
Calificación	5	6	7	8	9	10

CATEGORIA	4	3	2	1
Ortografía/Puntuación	El mapa no contiene errores de ortografía o puntuación.	El mapa tiene menos de tres errores de ortografía o puntuación.	El mapa tiene entre 4 y 8 errores de ortografía o puntuación.	El mapa tiene mas de 9 errores de ortografía o puntuación.
Uso de gramática	Usa correctamente las reglas gramaticales.	Tiene uno o dos errores gramaticales.	Tiene tres o cuatro errores gramaticales.	Tiene cinco o más errores gramaticales
Conectores del mapa	Todos los conceptos están unidos con coherencia.	Tiene uno o dos errores en las uniones o coherencia de conceptos.	Tiene tres o cuatro errores en las uniones o coherencia de conceptos.	Tiene cinco o más errores en las uniones o coherencia de conceptos.
Niveles del mapa	Usa adecuadamente y con coherencia los niveles.	Usa niveles, pero no todos son adecuados o coherentes.	Usa niveles sin coherencia.	No contienen niveles.
Definición del triángulo	Escribe la definición correcta.	Reconoce que es una figura de tres lados rectos.	Reconoce que es una figura de tres lados.	No incluye definición.
Clasificación de los triángulos	Distingue que los triángulos se clasifican por lados y por ángulos.	Incluye la clasificación de los triángulos por lados.	Sólo incluye la clasificación de los triángulos por ángulos.	No incluye ninguna clasificación.
Tipos de triángulos y nombres según sus lados	Escribe correctamente los nombres y la definición de los tres tipos de triángulos.	Escribe correctamente los nombres y la definición de dos tipos de triángulo.	Escribe correctamente el nombre y la definición de un tipo de triángulo.	No escribe ni los nombres ni las características de los tres tipos de triángulos.
Tipos de triángulos y nombres según sus ángulos	Escribe correctamente los nombres y la definición de los tres tipos de triángulos.	Escribe correctamente los nombres y la definición de dos tipos de triángulo.	Escribe correctamente el nombre y la definición de un tipo de triángulo.	No escribe ni los nombres ni las características de los tres tipos de triángulos.
Desigualdad del triángulo	Enuncia clara y correctamente la relación entre los tres lados de cualquier triángulo.	Enuncia la relación únicamente para dos lados del triángulo.	Enuncia la relación incorrectamente.	No la enuncia.
Teorema de Pitágoras	Enuncia clara y correctamente el Teorema y lo relaciona de forma adecuada con los triángulos rectángulos	Enuncia el Teorema correctamente pero no lo relaciona con los triángulos rectángulos.	Enuncia únicamente la relación algebraica.	No lo enuncia

ANEXO 7

RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN DE EXAMEN DIAGNOSTICO

PREGUNTA 1

¿Qué es un triángulo?	
PUNTAJE	RESPUESTA
0	No hay respuesta o la respuesta tiene errores conceptuales, como: • Figura geométrica que se caracteriza por tener tres aristas • Figura geométrica con punta con tres lados iguales La respuesta demuestra la incapacidad de poner en palabras la definición solicitada.
1/2	La respuesta enuncia elementos que no son suficientes como: • Figura plana de tres lados (o segmentos de recta) • Figura de tres lados que tiene ángulos • Polígono regular de tres lados
1	La respuesta enuncia una definición con elementos suficientes para definir un triángulo, como: • Polígono de tres lados. • Figura cerrada formada de tres líneas rectas • Figura de tres lados, tres ángulos y tres vértices

PREGUNTA 2

¿Cuál es la diferencia entre un segmento de recta y una recta?	
PUNTAJE	RESPUESTA
0	No hay respuesta o la respuesta tiene errores conceptuales
1/4	La respuesta expone una idea mal expresada: el segmento es una parte de una recta (lo cual podría representar una semirrecta)
1/2	Responde parcialmente la pregunta, describe que es una recta, pero no qué es un segmento o viceversa.
1	Enuncia de manera correcta ambos conceptos y sus diferencias.

PREGUNTA 3

Escribe en la tabla la definición de rectas paralelas y perpendiculares	
PUNTAJE	RESPUESTA
0	No hay respuesta o la respuesta es incorrecta
1/6 cada definición	La respuesta contiene pocos elementos que no son suficientes, como: <u>Paralelas</u> • van juntas • nunca chocan • dos líneas iguales

	<u>Perpendiculares</u> • líneas rectas que chocan y se juntan líneas que se cruzan en un punto
1/ tres cada definición	La respuesta muestra que el estudiante tiene idea del concepto, pero no lo sabe expresar, como, por ejemplo: <u>Paralelas</u> • nunca se cruzan, pero siempre van juntas • dos líneas rectas que jamás se cruzan <u>Perpendiculares</u> • dos líneas que se cruzan entre ellas en forma de cruz
1	Enuncia de manera correcta ambos conceptos.

PREGUNTA 4

Si partimos una tira de espagueti crudo en tres partes, ¿podemos siempre construir un triángulo con ellas?	
PUNTAJE	RESPUESTA
0	Responde afirmativamente
1/2	Responde negativamente con un argumento erróneo.
1	Responde negativamente

PREGUNTA 5

Determina el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 2, 4 y 10 cm.	
PUNTAJE	RESPUESTA
0	Sin respuesta o la respuesta es 16 o escribe la fórmula del perímetro de un triángulo
1	La respuesta es NO o alguna explicación como: no cierra o no se pueden juntar los lados.

PREGUNTA 6

El perímetro de un triángulo es 24 cm. Determina la longitud de los lados de dos triángulos que tengan ese perímetro.	
PUNTAJE	RESPUESTA
0	Sin respuesta o se proponen soluciones incorrectas
1/2	Escribir dos soluciones, una de las cuales es incorrecta.
1	Escribir dos soluciones correctas

PREGUNTA 7

Un triángulo rectángulo tiene un cateto que mide 5 cm y su hipotenusa mide 12 cm. ¿Cuál es el perímetro y el área del triángulo?	
PUNTAJE	RESPUESTA
0	Sin respuesta o se la respuesta consiste en un número erróneo.
1/4	En la respuesta el estudiante evidencia mediante un dibujo que se trata de un triángulo rectángulo y que debe aplicar el Teorema de Pitágoras, pero lo hace de manera incorrecta
1/2	En la respuesta es evidente mediante un dibujo que se trata de un triángulo rectángulo y aplica el Teorema de Pitágoras correctamente
3/4	En la respuesta es evidente mediante un dibujo que se trata de un triángulo rectángulo, aplica el Teorema de Pitágoras correctamente y determina el perímetro del triángulo, pero no el área
1	En la respuesta es evidente mediante un dibujo que se trata de un triángulo rectángulo y aplica el Teorema de Pitágoras correctamente. Determina el perímetro y área correctamente.

PREGUNTA 8

Un triángulo cuyos lados miden 5, 8 y 9 cm, ¿es un triángulo rectángulo?	
PUNTAJE	RESPUESTA
0	Sin respuesta o responde afirmativamente
1/2	Responde No sin argumentos o con argumentos incorrectos
1	Responde No y da un argumento valido

PREGUNTA 9

¿Qué dice el Teorema de Pitágoras?	
PUNTAJE	RESPUESTA
0	Sin respuesta o la respuesta es incorrecta
1/2	Escribe un enunciado que relaciona catetos e hipotenusa, pero de forma imprecisa o escribe la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$
1	Escribe el Teorema y la fórmula de manera correcta

XVI. BIBLIOGRAFÍA

1. Ausubel, D. (1976) *Psicología Educativa.* México, Trillas
2. Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, H. (1983) *Psicología educativa, Un punto de vista cognoscitivo.* México, Trillas
3. Barajas, A. (2009) *Su oratoria, sus matemáticas y sus enseñanzas.* México, UNAM
4. Barriga, F., Hernández, G. (2010) *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* México, McGraw-Hill
5. Barriga, R. (ed) (2011) *Entre paradojas: A 50 años de los libros de texto gratuitos.* México, D.F. El Colegio de México
6. Barrow, L. (2006) *A brief history of Inquiry: From Dewey to Standards, journal of Science Teacher Education.*
7. Barojas, J. (comp) (2006) *Antologías Madems. interpretación y Conocimiento. Vol 1.* México, UNAM.
8. Beuchot, M. (1997) *Tratado de Herméneutica Analógica,* México, UNAM
9. Coll, C y Monereo, C. (2011) *Psciología de educación virtual.* España, Ediciones Morata
10. Coll, C. (Comp.) (1986) *Psicología genética y aprendizajes escolares.* México, Siglo XXI Editores
11. Dewey, J. (1938) *Logic: The theory of Inquiry*. New York: Holt
12. Dewey, J. (1933) *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process.* Boston, Heath
13. Dewey, J. (1926) *Democracy and education.* New York, Macmillan.
14. Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. *Programa de Estudio, Área de Matemáticas, matemáticas I-IV.* 2016, CCH
15. INEE (2018) *Condiciones básicas para la enseñanza y el aprendizaje en los planteles de educación media superior en México.* México: INEE
16. INEE (2017). *Directrices para mejorar la permanencia escolar en la educación Media Superior*. México: autor.
17. INEE (2014). *Las tareas de matemáticas en PISA 2012*. México: INEE
18. INEE (2017) *PLANEA. Resultados Nacionales 2017. Educación Media Superior*. CDMX
19. INEE (2008). *PISA en el Aula: Matemáticas.* México: INEE
20. Joubert, J. (2009) *Pensamientos.* Barcelona, Península.
21. Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y., Miyakawa, T. (ED) (2007) *Japanese Lesson Study in Mathematics.* Singapore, World Scientific Publishing Co.
22. Kline, M., (1972) *Mathematical thought from ancient to modern times*. US, Oxford University Press
23. Llewellyn, D. (2013) *Teaching High School Science through Inquiry and Argumentation.* USA, Corwin
24. López, J. "*La importancia de los conocimientos previos para el aprendizaje de nuevos contenidos".* Innovación y experiencias educativas, Revista Digital. 16 marzo 2009
25. Marchesi, A., Martín, E. (1998). *Calidad de la Enseñanza en tiempos de cambio.* Madrid: Alizanza.
26. Mauri, T., Valls, E. y Barberá, E. (2002) *Aprender a construir conocimientos. Cuaderno de Pedagogía, 318.*

27. Novak, J. (1977) *A Theory of education.* USA, Cornell University
28. Prensky, M. *Enseñar a nativos digitales*. SM, 2013, México
29. Quinquerer, D. (1999) *Modelos y enfoques sobre la evaluación: el modelo educativo.* Aula de Innovación Educativa, 80
30. Wentwort, G.y Smith, D.E. (1973) *Geometría plana y del espacio*. Nueva York: Ginn y compañía.
31. Zorrilla, J. (s.f.) *Desarrollo de habilidades verbales y matemáticas I*. México, Ago editorial
32. Zorrilla, J. (2008) *Desarrollo de habilidades verbales y matemáticas II*. México, Ago editorial

Artículos electrónicos

1. American Psychological Association. (2010). Publication manual of the American Psychological Association (6ta ed.). Washington, DC: Autor.
2. COPEEMS (2017). Consejo para la evaluación del tipo Medio Superior. Recuperado de http://copeems.mx/planteles-miembros-del-sub.
3. Hake, R., *"Interactive-engagement vs traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test deta for introductory physics courses", (1998)* Recuperado en línea de <http://physics.indiana.edu/ sdi/>
4. Hake, R., *"interactive-engagement methods in introductory mechanics courses"*. Recuperado en línea de <http://www.physics.indiana.edu/ sdi/> Presentado (1998) Physics *Education Research Supplement to AJP(*PERS).
5. Mansfield, D., Wildberger, N. (2017) *Written in stone: the world's first trigonometry revealed in an ancient Babylonian tablet.* Recuperado de: https://theconversation.com/written-in-stone-the-worlds-first-trigonometry-revealed-in-an-ancient-babylonian-tablet-81472
6. El programa PISA de la OCDE. ¿Qué es y para qué sirve? Recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/
7. OCDE (2006) *Assesing Scientific, Reading and Mathematical Literacy*. Pisa para docentes.
8. Schmelkes, C. y Elizondo, N. (2012). Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación (tesis) (3a Ed.). México, Oxford University Press.
9. https://www.cch.unam.mx/misionyfilosofia
10. https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/History.html
11. SEP (2012). *Reporte de la Encuesta Nacional sobre Deserción en la Educación Media Superior.* México. Recuperado de: http://www.decidetusestudios.sep.gob.mx/recursos/docs/Reporte-EncuestaNacionalDesercionEMS.pdf
12. SITEAL (2013) ¿Por qué los adolescentes dejan la escuela? Recuperado de www.siteal.iipe.unesco.org/sites/default/files/siteal_2013_03_13_dd_28_0.pdf