UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Otros tipos de anillos cuasi-Frobenius

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Tania Gabriela Pérez Quijano

TUTOR

Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., 2018

1. Datos del alumno
Pérez
Quijano
Tania Gabriela
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
310256722

2. Datos del tutor
Dr
Vilchis
Montalvo
Iván Fernando

3. Datos del sinodal 1
Dr
Ríos
Montes
José

4. Datos del sinodal 2
Dr
Alvarado
García
Alejandro

5. Datos del sinodal 3

Dr
Cejudo
Castilla
César

6. Datos del sinodal 4
M en C
García
López
Alma Violeta

7. Datos del trabajo escrito
Otros tipos de anillos cuasi-Frobenius
58 p
2018

A Rosita de mar,
por haberme dado tanto
y porque su dulzura nunca exigió nada.

Agradecimientos

Gracias a mi madre, Ana, quien siempre estuvo dotada con el poder de persuadirme a conocer nuevos paisajes, por su talante de guardian silencioso, y por su gracia para conversar.

Gracias a mi padre, Antonio, por pintarme los paisajes, por su don de faro incesante, por las largas conversaciones y porque en cada melodía me pone el ejemplo.
No tengo con qué pagarles todo su esfuerzo. Gracias por la libertad, la confianza y el apoyo. Son unos padres magníficos y unas extraordinarias personas, y tienen todo mi respeto, admiración y cariño. Gracias a ambos porque, por alguna misteriosa razón, siempre han pensado y esperado lo mejor de mí.

En Fernando, hay dos cosas aun más grandes que su avidez de aprender, y estas son, su admirable habilidad y su gran disposición para compartir lo que sabe. Le agradezco por haberme enseñado la inmensurable belleza que posee el Álgebra, por mostrarme la poesía recóndita que hay a la zaga de la definición más técnica, por presentarme la elegancia inscrita en los argumentos más rigurosos, y explicarme el verdadero calibre de los razonamientos más elementales. También le agradezco que cada vez que sentí que el barco se hundía, él me rebatió cada uno de los argumentos que le expuse para no seguir tocando. Gracias por creer tanto en mí, gracias por tu buen humor, gracias por tantas risas, gracias por todas las veces que desatendiste el concubio y te quedaste conmigo a pasar el conticinio, la intempesta y el alba, literal y metafóricamente. Agradezco que aparecieras frente a mí, por ser un excelente profesor y una maravillosa persona.

Gracias a Leo, mi infalible compañero desde que colgaba como un koala o un saco, de mi cuello, porque con su gracia y brillantez me ha enseñado mucho más de lo que él imagina, por ejemplo, que a veces es mejor no seguir las reglas; ¿qué más se le puede pedir a un hermano?... De tus abundantes virtudes me

nutro. Gracias, sin ti, nada sería igual.

Gracias a Jessy, mi gemela, que me esperaba, en las buenas y en las malas, con una cerveza y el corazón en la mano. Y a Jessy, mi yunta, que lleva más de quince años regalándome grandes momentos, su ayuda y sus consejos . Gracias a todos mis amigos de dentro y fuera de la Facultad, por caminar y compartir conmigo. Aunque aquí omita sus nombres, sus recuerdos permanecen. Gracias por el regalo del tesoro de su amistad.

Gracias al señor Fernando y a la señora Mónica por todo su cariño, paciencia y apoyo incondicional. Ojalá siga encontrando a personas tan nobles como ustedes en mi vida.

Gracias a José Ríos y a Violeta García por su apoyo. A César Cejudo por su apoyo y todos sus consejos. Y le agradezco profundamente a Alejandro Alvarado, quien siempre estuvo dispuesto a brindarme su ayuda con una sonrisa en el rostro.

También quiero expresar mi sentimiento de agradecimiento a todos mis profesores de todos los lugares y todos los tiempos, sobre todo aquellos que encuentran en la educación una forma de combate.

Gracias a la comunidad de la Facultad de Ciencias que contribuye a que estudiar en ella sea una formidable experiencia en el sentido académico, así como en el personal.

"Los límites de mi lenguaje son los límites de mi mundo".

– L. Wittgenstein.

Introducción

Entre finales del siglo XIX y principios del XX, G. Frobenius llevó a cabo un trabajo fundamental acerca de Álgebras de dimensión finita. Sus estudios fueron retomados en la década de los treinta, principalmente por T. Nakayama, en sus investigaciones sobre, las que llamó, Álgebras de Frobenius. Fue él mismo quien, en 1941, introdujo el concepto de anillo cuasi Frobenius (QF, por sus siglas en inglés), como una generalización de los anillos de Frobenius, una importante extensión de las Álgebras de Frobenius. Es un hecho que estos anillos han resultado ser objetos notorios de la teoría, por ello, desde su introducción, han sido ampliamente estudiados, por esta razón, actualmente se conocen diversos ejemplos de ellos, que se encuentran diseminados a lo largo de la literatura, así como numerosas caracterizaciones suyas. Por ejemplo, en 1951, M. Ikeda los caracterizó como anillos artinianos derechos e izquierdos y autoinyectivos derechos e izquierdos. Más tarde, se demostró que es suficiente con que el anillo sea artiniano y autoinyectivo, por un solo lado (no necesariamente el mismo). Esta última, es una de las caracterizaciones más conocidas de anillos cuasi Frobenius pero, desde luego, existen otras de gran relevancia e interés. Por ejemplo, en 1967, Faith y Walker demostraron en [19], que un anillo R es cuasi Frobenius, precisamente, cuando todo R-módulo proyectivo es inyectivo o, equivalentemente, todo R-módulo inyectivo es proyectivo. La belleza y fuerza de este teorema descansan, en buena medida, en el hecho de que los conceptos de inyectividad y proyectividad son destacados en la teoría de módulos, y comprenderlos ha resultado ser muy valioso para el estudio de los anillos. Por eso, resulta natural que en la literatura se hayan generalizado estos conceptos dando lugar a distintas nociones, algunas más empleadas que otras. Por ejemplo, en 1961, Johnson y Wong en [42], generalizaron el concepto de módulo inyectivo, definiendo módulo cuasi inyectivo. Posteriormente, en 1967, en [42], Wu y Jans generalizaron el concepto de módulo proyectivo y definieron módulo cuasi proyectivo. En este contexto, resultaba natural preguntarse, ¿cómo tendría que ser un anillo R para que todo R-módulo cuasi inyectivo sea cuasi proyectivo, o bien, para que todo R-módulo cuasi proyectivo sea cuasi inyectivo? Esta pregunta fue parcialmente contestada por K. Fuller, quien en 1969 demostró, en [20], que todo R-módulo cuasi proyectivo es cuasi inyectivo si y solamente si R es artiniano de ideales principales. Más tarde, K. Byrd demostró en [12], en el año de 1970, que todo R-módulo cuasi inyectivo es cuasi proyectivo, precisamente, cuando R es artiniano de ideales principales, contestanto del todo a la pregunta. En la primera parte de esta tesis demostramos este resultado empleando técnicas distintas a las usadas en estos trabajos, y exponemos la teoría necesaria para alcanzar este fin, como algunos teoremas clásicos de módulos cuasi inyectivos y cuasi proyectivos. En 1967, Singh y Jain, en [26], definen el concepto de módulo seudo inyectivo y, más tarde, definen también el de módulo seudo proyectivo, siendo estos generalizaciones de los módulos cuasi inyectivos y cuasi proyectivos respectivamente. Siguiendo con la línea de estudio del anterior trabajo, nosotros nos hicimos la pregunta, ¿cómo tiene que ser un anillo R para que todo R-módulo seudo inyectivo sea seudo proyectivo, y para que todo R-módulo seudo proyectivo sea seudo inyectivo? En la segunda parte de este trabajo se demuestra que esto ocurre cuando R es artiniano de ideales principales. En este mismo apartado exponemos la teoría que necesitamos para llegar a esa conclusión.

Como es de esperar, haremos uso de diversos resultados propios de la teoría de anillos y módulos, respecto a ellos podemos afirmar con entera seguridad, que cualquiera que no este aquí enunciado, se puede encontrar desarrollado con el más alto rigor en muchas de las valiosas obras dedicadas a esta teoría, y es por ello que consideramos acertado referir al lector a algunos de estos textos en vez de sumar otros resultados a este trabajo, pues, sin duda, en dichos ejemplares el lector podrá encontrar cualquier tema que demande su interés y que no se haya aquí tratado; bástenos citar [3], [29], [33] y [35] como preciados ejemplos.

En lo sucesivo, trabajaremos con anillos asociativos con elemento unitario. Además, a no ser que se indique lo contrario, todos los R-módulos aquí mencionados se considerarán R-módulos izquierdos. Como es usual, si M es un módulo, que N sea un submódulo esencial en M, lo denotaremos por $N \leq_{es} M$, y que N sea un submódulo superfluo de M, por $N \ll M$. Por su parte, $E(M)$ denotará a la cápsula inyectiva de M, mientras que $N \leq_{\oplus} M$ expresará que N es sumando directo de M. Por último, si R es un anillo, entonces $J(R)$ denotará a su radical de Jacobson.

Índice general

Capítulo 1

Módulos cuasi inyectivos y cuasi proyectivos.

Este trabajo comenzó con un par de preguntas: ¿cómo tiene que ser un anillo R para que todo R-módulo cuasi inyectivo sea cuasi proyectivo?, o bien, ¿como tiene que ser para que todo R-módulo cuasi proyectivo sea cuasi inyectivo? El objetivo de este primer capítulo es dar respuesta a dichas cuestiones. Desde luego, para alcanzar este fin, necesitaremos primero introducir algunos conceptos y desarrollar varios resultados acerca de estos módulos. Las primeras dos secciones del capítulo serán el escenario donde se construirá esta teoría previa. En efecto, en ellas estudiaremos ciertas propiedades de estos módulos y algunos teoremas que a ellos atañen, preparando así el terreno para la tercer sección, en la que consumaremos el capítulo respondiendo a estas preguntas. Aunque el estudio de estos módulos es muy vasto, pues estos objetos recorren diversas líneas de investigación, solo la teoría que se desarrollará a lo largo del capítulo ya da muestra de que tienen cualidades que hacen de su estudio un asunto muy interesante y valioso. Confiamos que así sea.

1.1. Módulos cuasi inyectivos.

Es un hecho que el concepto de inyectividad es crucial para diversos contextos del Álgebra, en particular para la teoría de módulos. Este se manifiesta muy a menudo en dicha teoría, dando vida a muchos de sus teoremas clásicos. Es por ello que tal noción ha sido ampliamente estudiada, originando así, nuevos tipos de inyectividad, cada uno de ellos colmado de una extensa teoría propia. Este es el caso de los módulos cuasi inyectivos pues, en efecto, la teoría que de ellos emerge es muy vasta. Respecto a este punto, es importante precisar que el objetivo de este trabajo no es realizar un estudio completo sobre estos objetos, ni siquiera estudiar cualquier cualidad suya, por el contrario, solo consideramos aquellas que nos permitieron avanzar en el camino hacia nuestra meta. De hecho, esta sección se construyó demostrando únicamente los resultados de este carácter; aquellos que necesitamos para aproximarnos al teorema principal del capítulo (Teorema 1.50). Así que muchas de las propiedades conocidas de los módulos cuasi inyectivos no fueron aquí plasmadas, pero sí las suficientes para que el lector tenga un panorama sobre ellos y pueda comparar su comportamiento respecto a los módulos inyectivos, pues en ocasiones pueden ser muy similares y otras veces asombran sus diferencias. Veámoslo.

Definición 1.1. *Sean M y N dos módulos. Decimos que M es inyectivo si para todo submódulo $L \leq N$ se tiene que, cualquier morfismo $f : L \to M$, se puede extender a un morfismo $g : N \to M$. Es decir, para todo morfismo $f : L \to M$ existe un morfismo $g : N \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

.

Definición 1.2. *Decimos que un módulo M es cuasi inyectivo si para todo submódulo $N \leq M$, se verifica que, cualquier morfismo $f : N \to M$, se puede extender a un endomorfismo de M. Es decir, para cualquier morfismo $f : N \to M$, existe un endomorfismo $g : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Claramente todo módulo inyectivo es cuasi inyectivo y, por el Lema de Baer [29, Teorema 5.7.1], R es inyectivo como R-módulo izquierdo si y solo si es cuasi inyectivo. Sin embargo, no todo módulo cuasi inyectivo es inyectivo, como veremos más adelante, en el Ejemplo 1.4.

Ejemplo 1.3. *Todo módulo semisimple es cuasi inyectivo.*

Demostración. Sean M un módulo semisimple, $N \leq M$ un submódulo y $f : N \to M$ un morfismo. Como M es semisimple, entonces $N \leq_\oplus M$. Así que, podemos considerar un submódulo $L \leq M$ tal que $N \oplus L = M$. Ahora, definamos el endomorfismo $g : M \to M$ por $g = f\pi_N$, donde $\pi_N : M \twoheadrightarrow N$ es la proyección. De este modo, si $n \in N$ e $i : N \hookrightarrow M$ es la inclusión, entonces

$$g(i(n)) = g(n) = f\pi_N(n) = f(\pi_N(n)) = f(n).$$

Es decir, g hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, two heads, "\pi_N"] \\
M & N. \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, M es cuasi inyectivo. $\square$

Una consecuencia inmediata del ejemplo anterior es que todo módulo simple es cuasi inyectivo.

Para el siguiente ejemplo, es conveniente recordar que, si G es un grupo abeliano, decimos que G es divisible si para todo $x \in G$ con $x \neq 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $y \in G$ tal que $ny = x$. También tengamos presente que los grupos abelianos divisibles son, precisamente, los $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos [29, Teorema 5.5.1]. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es un grupo abeliano divisible y es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

Ejemplo 1.4. *El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_p$ es cuasi inyectivo, pero no inyectivo, para todo $p \in \mathbb{N}$ primo.*

Demostración. El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_p$ con $p \in \mathbb{N}$ primo, es simple y, en consecuencia, es cuasi inyectivo. Por otro lado, ningún grupo abeliano finito y distinto de cero puede ser divisible, como veremos posteriormente (en 1.7). Por lo tanto, $\mathbb{Z}_p$ no es inyectivo. □

Es bien conocido que la suma directa de dos módulos M y N es inyectiva si y solo si M y N lo son [33, Proposición 3.4]. Esto no se verifica para los módulos cuasi inyectivos, aunque una implicación sí se cumple, como veremos a continuación.

Proposición 1.5. *Sumandos directos de módulos cuasi inyectivo son cuasi inyectivos.*

Demostración. Supongamos que M es un módulo cuasi inyectivo, $N \leq_{\oplus} M$ un sumando directo y $L \leq M$ un submódulo tal que $N \oplus L = M$. Consideremos un submódulo $K \leq N$ y un morfismo $f : K \to N$. Además, designemos por $i : K \hookrightarrow N$ y $j : N \hookrightarrow M$ a las inclusiones correspondientes. En este caso, por ser M cuasi inyectivo, existe un endomorfismo

$g : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[r, hook, "j"] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& N \arrow[r, hook, "j"] & M &
\end{tikzcd}$$

Así que $g(k) = f(k) \in N$, para toda $k \in K$. Por lo tanto, si $g|_N : N \to M$ es la restricción de g en N, entonces, para cada $k \in K$, ocurre que $g\,|_N(k) = g(k) = f(k)$. Luego podemos considerar al endomorfismo $h : N \to N$ definido por $h = \pi_N g\,|_N$ donde $\pi_N : M \twoheadrightarrow N$ es la proyección, y entonces, para toda $k \in K$, se cumple que

$$h(k) = \pi_N g\,|_N(k) = g\,|_N\,(k) = g(k) = f(k).$$

Es decir, h hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dl, "h"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& N \arrow[r, hook, "j"] & M &
\end{tikzcd}$$

En cuyo caso, N es cuasi inyectivo. $\square$

Como se sugirió antes, la suma directa de dos módulos cuasi inyectivos, no necesariamente resulta ser cuasi inyectiva. Más adelante veremos un ejemplo de este hecho, pero antes introduciremos algunos resultados clásicos de teoría de grupos que nos servirán para este fin.

Lema 1.6. *Sean G y H grupos abelianos y $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Si G es divisible, entonces $f(G)$ es divisible.*

Demostración. Sean $y \in f(G)$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $x \in G$ tal que $f(x) = y$. Además, como G es divisible, existe $z \in G$ tal que $nz = x$, de modo que, $y = f(nz) = nf(z)$. Esto significa, que $f(G)$ es divisible. $\square$

Lema 1.7. *Todo grupo abeliano divisible no trivial es infinito.*

Demostración. Sea G un grupo abeliano divisible no trivial. Supongamos que G es finito de orden $n \in \mathbb{N}$, y consideremos $0 \neq x \in G$. Ahora, como G es divisible, entonces existe $y \in G$ tal que $ny = x$, sin embargo, esto no puede ocurrir pues n es el orden del grupo, es decir, $ng = 0$, para toda $g \in G$. Esta contradicción demuestra que G es infinito. $\square$

Proposición 1.8. *Si $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_p$ con $p \in \mathbb{N}$ primo, es un morfismo de grupos, entonces f es el morfismo cero.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_p$ un morfismo de grupos. Vamos a suponer que f es distinto al morfismo cero. En tal caso, como $\mathbb{Q}$ es divisible, por el Lema 1.6, se tiene que $f(\mathbb{Q})$ es divisible. Además, como f no es el morfismo cero, entonces $f(\mathbb{Q}) \neq \{0\}$, así que, debido al Lema 1.7, resulta que $f(\mathbb{Q})$ es infinito. Pero $f(\mathbb{Q}) \leq \mathbb{Z}_p$ siendo $\mathbb{Z}_p$ finito, lo que es una contradicción. Se sigue que f es el morfismo cero. $\square$

Ejemplo 1.9. *El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ con $p \in \mathbb{N}$ primo, no es cuasi inyectivo.*

Demostración. Como $\mathbb{Q}$ es divisible, entonces es inyectivo. Además, $\mathbb{Z}_p$ es simple. Resulta entonces que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}_p$ son $\mathbb{Z}$-módulos cuasi inyectivos. Ahora, consideremos la inclusión $j : \{0\} \oplus \mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$, y el morfismo $h : \mathbb{Z} \oplus \{\overline{0}\} \to \{0\} \oplus \mathbb{Z}_p$ tal que $h((z, \overline{0})) = (0, \overline{z})$, para cada $z \in \mathbb{Z}$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \oplus \{\overline{0}\} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p \\
\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p &
\end{tikzcd}$$

donde $i : \mathbb{Z} \oplus \{\overline{0}\} \hookrightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ es la inclusión y $f : \mathbb{Z} \oplus \{\overline{0}\} \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ es el morfismo definido por $f = jh$. Veremos que el morfismo f no se puede extender a un endomorfismo de $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$, y con ello quedará demostrado que $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ no es cuasi inyectivo. Supongamos lo contrario, es decir, que existe un endomorfismo $g : \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_p$ tal que $gi = f$. Notemos que g no puede ser el morfismo cero, pues si tomamos $z_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $p \nmid z_0$, entonces $(z_0, \overline{0}) \in \mathbb{Q} \oplus \{\overline{0}\}$, luego

$$g((z_0, \overline{0})) = gi((z_0, \overline{0})) = f((z_0, \overline{0})) = (0, \overline{z_0}) \neq \overline{0}.$$

Ahora, consideremos la inclusión $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ y la proyección $\pi : Q \oplus \mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$, y definamos el morfismo $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_p$ por $\varphi = \pi g \iota$. Observemos que

$$\varphi(z_0) = \pi(g(\iota(z_0))) = \pi(g((z_0, \overline{0}))) = \pi((0, \overline{z_0})) = \overline{z_0} \neq \overline{0}.$$

Así que, φ es distinto al morfismo cero, lo que contradice la Proposición 1.8. Esto demuestra que $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ no es cuasi inyectivo. □

Del resultado anterior, se concluye que la suma directa de dos módulos cuasi inyectivos no es cuasi inyectiva en general, aunque posteriormente veremos un criterio que nos permitirá saber cuándo esto sí ocurre. Primero necesitamos introducir una definición.

Definición 1.10. *Sea R un anillo. Si ocurre que todo R-módulo izquierdo cuasi inyectivo es inyectivo, diremos que R es un anillo CI («**c**uasi inyectivo ⇒ **i**nyectivo»). Estos anillos son mejor conocidos en la literatura como anillos QI (“**q**uasi injective ⇒ **i**njective”), por la forma inglesa.*

Teorema 1.11. *Son equivalentes, para un anillo R, las siguientes condiciones:*

i) *R es CI,*

ii) *La suma directa de cualesquiera dos R-módulos cuasi inyectivos es cuasi inyectiva.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Sean M y N dos R-módulos cuasi inyectivos. Por hipótesis, M y N resultan ser inyectivos, por lo que $M \oplus N$ es inyectivo y, en consecuencia, es cuasi inyectivo.

$ii) \Rightarrow i)$ Sean M un R-módulo cuasi inyectivo y $E(M)$ su cápsula inyectiva. Entonces, por hipótesis, $M \oplus E(M)$ es cuasi inyectivo. Por otra parte, consideremos las inclusiones respectivas $i : M \hookrightarrow E(M)$, $j_1 : M \hookrightarrow M \oplus E(M)$ y $j_2 : E(M) \hookrightarrow M \oplus E(M)$. Además, tomemos $\pi_1 : M \oplus E(M) \twoheadrightarrow M$ el epimorfismo tal que $\pi_1 j_1 = Id_M$. Dado que $M \oplus E(M)$ es cuasi inyectivo, existe $g \in End(M \oplus E(M))$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "j_1"'] & E(M) \arrow[r, hook, "j_2"] & M \oplus E(M) \arrow[dll, dashed, "g"] \\
& M \oplus E(M) & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, definamos el morfismo $f : E(M) \to M$ por $f = \pi_1 g j_2$. Entonces

$$fi = (\pi_1 g j_2)i = \pi_1(g j_2 i) = \pi_1 j_1 = Id_M.$$

De modo que, f se escinde. Esto implica que M es un sumando directo de $E(M)$ y, en consecuencia, M es inyectivo. Por lo tanto, R es CI. $\square$

Definición 1.12. *Sea R un anillo. Decimos que R es V-anillo izquierdo si todo R-módulo simple izquierdo es inyectivo.*

El siguiente teorema es un resultado clásico de la teoría de módulos que el lector podrá consultar en [33, Teorema 3.75].

Teorema 1.13. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

i) R es un V-anillo izquierdo,

ii) $Rad(M) = \{0\}$ para todo R-módulo M.

Corolario 1.14. *Sea R un anillo. Si R es CI, entonces R es neteriano izquierdo y V-anillo izquierdo.*

Demostración. Si S es un R-módulo simple, entonces es cuasi inyectivo, luego, por hipótesis, es inyectivo. Por consiguiente, R es un V-anillo. Por otro lado, sea $M = \oplus_{i\in I} E(S_i)$ donde I es un conjunto y S_i es simple para toda $i \in I$. Dado que R es un V-anillo, entonces $E(S_i) = S_i$, para todo $i \in I$, por ello $M = \oplus_{i\in I} S_i$. Por lo tanto, M es semisimple, lo que implica, que es cuasi inyectivo y, en consecuencia, M es inyectivo. Luego, por [29, Teorema 6.5.1], R es neteriano izquierdo. □

Proposición 1.15. *Sea R un anillo. Si M es un R-módulo cuasi inyectivo y existe un submódulo $N \leq M$ tal que $N \cong R$, entonces M es inyectivo.*

Demostración. Sean $I \leq R$ un ideal izquierdo y $f : I \to M$ un morfismo. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que R es un submódulo de M. Dicho esto, consideremos las inclusiones $i : I \hookrightarrow R$ y $j : R \hookrightarrow M$. Luego, como M es cuasi inyectivo, existe un endomorfismo $g : M \to M$ tal que $gji = f$. Entonces, si tomamos $g|_R : R \to M$ la restricción de g en R, resulta que $g|_R$ hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dl, "g|_R"'] & M \arrow[dll, dashed, "g"] \\
 & M & &
\end{tikzcd}$$

Lo que equivale, por el Lema de Baer, a que M sea inyectivo. □

Nos estamos aproximando a un teorema que caracteriza a una cierta clase de anillos; la de los semisimples, usando el concepto de módulo cuasi inyectivo, pero antes nos debemos detener para recordar un par de definiciones clásicas de teoría de anillos.

Definición 1.16. *Decimos que un anillo R es autoinyectivo izquierdo si es inyectivo como R-módulo izquierdo ($_RR$ es inyectivo).*

Definición 1.17. *Sea R un anillo. Decimos que R es cuasi Frobenius si es neteriano izquierdo y autoinyectivo izquierdo.*

Es bien sabido que esta definición es equivalente a que el anillo R sea neteriano derecho y autoinyectivo derecho, así como que R sea artiniano izquierdo y autoinyectivo izquierdo, o bien, que R sea artiniano derecho y autoinyectivo derecho. Por lo tanto, coloquialmente hablando, diriamos que ser un anillo QF «no tiene lado».

Teorema 1.18. *Para un anillo R, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *R es semisimple,*

ii) *R es autoinyectivo y CI,*

iii) *Todo R-módulo es cuasi inyectivo,*

iv) *Todo R-módulo finitamente generado es cuasi inyectivo,*

v) *Todo R-módulo generado por dos elementos es cuasi inyectivo.*

Demostración. $i) \Rightarrow iii)$ Es claro, pues si asumimos que R es semisimple, entonces todo R-módulo es inyectivo y, por lo tanto, cuasi inyectivo.

$iii) \Rightarrow iv)$ Es claro.

$iv) \Rightarrow v)$ Es claro.

$v) \Rightarrow i)$ Consideremos un R-módulo cíclico M. De la hipótesis resulta que $_RR \oplus M$ es cuasi inyectivo. Así que, por la Proposición 1.15, tenemos que M es inyectivo. Lo anterior demuestra que todo R-módulo cíclico es inyectivo, lo que implica, que R es semisimple. Ver [33, Corolario 6.47].

iii) $\Rightarrow$ *ii)* Por hipótesis, ${}_RR$ es cuasi inyectivo, así que, por el Lema de Baer, R es autoinyectivo. Además, la hipótesis implica que $M \oplus N$ es cuasi inyectivo para cualesquiera R-módulos M y N, particularmente si M y N son cuasi inyectivos. De modo que R es CI, según el Teorema 1.11.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Por el Corolario 1.14, resulta que R es un V-anillo neteriano izquierdo. En virtud de ello, R es autoinyectivo izquierdo y neteriano izquierdo o, en otras palabras, R es cuasi Frobenius. Se sigue que R es artiniano [29, Proposición 13.2.3]. Pero además, como R es V-anillo, entonces $J(R) = \{0\}$ y, esto implica, que R es semisimple. $\square$

El siguiente es un resultado clásico de teoría de módulos que más adelante emplearemos en varios momentos.

Lema 1.19. *Sea R un anillo e $I \leq R$ un ideal bilateral. Entonces M es un R/I-módulo si y solo si M es un R-módulo tal que $IM = \{0\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si M es un R/I-módulo, entonces M es un R-módulo con el producto $\cdot : R \times M \to M$ dado por $r \cdot m = (r + I)m$. Así que, si $r \in I$ y $m \in M$, entonces $r \cdot m = (r + I)m = (0 + I)m = 0$. Se sigue que $IM = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Definamos el producto $\cdot : R/I \times M \to M$ por $(r + I) \cdot m = rm$, para cualesquiera $r \in R$ y $m \in M$. Veamos que este producto está bien definido. Para ello, consideremos $r, r' \in R$ tales que $r + I = r' + I$. Entonces $rm = (r + I) \cdot m = (r' + I) \cdot m = r'm$, para toda $m \in M$. De modo que, $(r - r') \in I$, luego $(r - r') \cdot m = 0$, para toda $m \in M$. Así que, $rm = r'm$, para toda $m \in M$. Por lo tanto, el producto está bien definido y, en consecuencia, M es un R/I-módulo. $\square$

Lema 1.20. *Sean R un anillo e $I \leq R$ un ideal bilateral. Si M es un R/I-módulo inyectivo, entonces M es un R-módulo cuasi inyectivo.*

Demostración. Sean $N \leq M$ un submódulo y $f : N \to M$ un R-morfismo. Como $IN \leq IM = \{0\}$, entonces $IN = \{0\}$. Luego, por el Lema 1.19, N es un R/I-módulo. Pero, además, f es un R/I-morfismo; en efecto, si $r \in R$ y $n \in N$, entonces

$$f((r+I)n) = f(rn) = rf(n) = (r+I)f(n).$$

Además, M es un R/I-módulo inyectivo, así que existe un R/I-endomorfismo $g : M \to M$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_{R/I}N \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & {}_{R/I}M \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& {}_{R/I}M &
\end{tikzcd}$$

Pero g es, a su vez, un R-morfismo, ya que

$$g(rm) = g((r+I)m) = (r+I)g(m) = rg(m).$$

De tal suerte que, f se puede extender como R-morfismo a un R-endomorfismo de M, a saber, g. Esto evidencia que M es un R-módulo cuasi inyectivo. □

Lema 1.21. *Sea R un anillo e $I \leq R$ un ideal bilateral. Entonces M es un R/I-módulo cuasi inyectivo si y solo si M es un R-módulo cuasi inyectivo tal que $IM = \{0\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Esta demostración es semejante a la del Lema 1.20.

($\Leftarrow$) Sean $N \leq M$ un R/I-submódulo y $f : M \to M$ un R/I-morfismo. Notemos que, por el Lema 1.19, N es un R-módulo tal que $IN = \{0\}$. Notemos también que f es un R-morfismo ya que, para cada $n \in N$ y $r \in R$, ocurre que

$$f(rn) = f((r+I)n) = (r+I)f(n) = rf(n).$$

Así pues, como M es un R-módulo cuasi inyectivo, entonces existe un R-endomorfismo $g : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Sin embargo, como $IM = \{0\}$ por hipótesis, entonces M es un R/I-módulo, en vista del Lema 1.19. Además, g es también un R/I-morfismo, pues

$$g((r+I)n) = g(rn) = rg(n) = (r+I)g(n).$$

Es decir, f se extiende como R/I-morfismo mediante el R/I-endomorfismo g. Concluimos que M es un R/I-módulo cuasi inyectivo. $\square$

A continuación veremos una interesante caracterización de módulos cuasi inyectivos en términos de su cápsula inyectiva. Para esto, es oportuno recordar que, si M es un módulo y $N \leq M$ un submódulo, decimos que N es fuertemente invariante en M si para todo $f \in End(M)$, se verifica que $f(N) \subseteq N$.

Teorema 1.22. *Sea M un módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) M es cuasi inyectivo,

ii) M es fuertemente invariante en $E(M)$.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Sean $f \in End(E(M))$ y $N \leq M$ el submódulo definido por $N = \{x \in M \mid f(x) \in M\}$. Consideremos $f|_N : N \to E(M)$ la restricción de f en N. Tengamos en cuenta que $f(N) \leq M$, por esta razón, podemos pensar a $f\,|_N$ como un morfismo de N a M. Ahora, tomemos $i : N \hookrightarrow M$ y $j : M \hookrightarrow E(M)$ las inclusiones concernientes.

Como M es cuasi inyectivo, entonces existe un endomorfismo $g : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f|_N"'] & M \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dl, dashed, "g"] & E(M) \arrow[ddll, "f"] \\
& M \arrow[d, hook, "j"'] & & \\
& E(M) & &
\end{tikzcd}$$

Además, si $y \in M \cap (f\mid_M - g)(M)$, entonces $f(m) = y + g(m) \in M$, para algún $m \in M$. Luego $m \in N$ y, por tanto, $f(m) = g(m)$. Así que $y = 0$. Esto demuestra que $M \cap (f\mid_M - g)(M)) = \{0\}$ y, como M es esencial en $E(M)$, se tiene que, $f(M) = g(M) \subseteq M$.

ii) $\Rightarrow$ *i*) Sean $N \leq M$ un submódulo y $h : N \to M$ un morfismo. Consideremos $i : N \hookrightarrow M$ y $j : M \hookrightarrow E(M)$ las inclusiones correspondientes. Luego, como $E(M)$ es inyectivo, entonces existe un endomorfismo $g : E(M) \to E(M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[r, hook, "j"] & E(M) \arrow[ddll, dashed, "g"] \\
& M \arrow[d, hook, "j"'] & & \\
& E(M) & &
\end{tikzcd}$$

Podemos considerar $g|_M : M \to E(M)$ la restricción de g en M. Notemos que $g|_M(M) \subseteq (M)$, es decir $g|_M \in End(M)$. Este endomorfismo hace que conmute el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dl, "g|_M"] & E(M) \arrow[ddll, dashed, "g"] \\
& M \arrow[d, hook, "j"'] & & \\
& E(M) & &
\end{tikzcd}$$

Lo que demuestra, que M es cuasi inyectivo. $\square$

Teorema 1.23. *Si M es un módulo cuasi inyectivo, entonces $M^{(n)}$ es cuasi inyectivo, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $f : E(M^{(n)}) \to E(M^{(n)})$ un endomorfismo. Consideremos $i_k : E(M) \hookrightarrow E(M^{(n)})$ la k-ésima inclusión y $\pi_k : E(M^{(n)}) \twoheadrightarrow E(M)$ la k-ésima proyección. Naturalmente

$$\sum_{j=1}^{n} i_j \pi_j = Id_{E(M^{(n)})}.$$

Así que, si $m \in M^{(n)}$, entonces

$$\pi_k f(m) = \pi_k f \left(\sum_{j=1}^{n} i_j \pi_j(m) \right) = \sum_{j=1}^{n} (\pi_k f i_j)(\pi_j(m)).$$

Ahora, notemos que $\pi_k f i_j \in End(E(M))$ y que $\pi_j(m) \in M$, para toda $j \in \{1, ..., n\}$. Así que, $(\pi_k f i_j)(\pi_j(m)) \in M$, para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Luego $f(m) \in M^{(n)}$. Esto demuestra que $f(M^{(n)}) \subseteq M^{(n)}$. Entonces, por el Teorema 1.22, se obtiene que $M^{(n)}$ es cuasi inyectivo, para toda $n \in \mathbb{N}$. $\square$

El Teorema 1.22, motiva la noción de «cápsula cuasi inyectiva», la cual se define de manera natural como sigue:

Definición 1.24. *Sea M un módulo. Definimos la cápsula cuasi inyectiva de M como el mínimo módulo cuasi inyectivo que contiene a M. Denotamos a la cápsula cuasi inyectiva de M por $Q(M)$.*

Proposición 1.25. *Todo módulo tiene cápsula cuasi inyectiva.*

Demostración. Sea M un módulo. Consideremos el módulo

$$\Gamma = \sum \{f(M) \leq E(M) \mid f \in End(E(M))\}.$$

Primero notemos que M es un submódulo de Γ pues $Id_M \in End(M)$, además, $Id_M(M) = M$, es decir que

$$M = Id_M(M) \leq \sum \{f(M) \mid f \in End(E(M))\} = \Gamma.$$

Ahora veamos que Γ es cuasi inyectivo. Como $M \leq_{es} E(M)$ y $M \leq \Gamma \leq E(M)$, entonces $\Gamma \leq_{es} E(M)$. Se sigue que $E(\Gamma) = E(M)$. Por otro lado, si $f \in End(E(\Gamma)) = End(E(M))$, entonces

$$\begin{aligned} f(\Gamma) &= f\left(\sum \{g(M) \mid g \in End(E(M))\}\right) \\ &= \sum \{fg(M) \mid g \in End(E(M))\} \\ &\leq \Gamma. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Γ es fuertemente invariante en $E(\Gamma)$. Vale decir, que Γ es cuasi inyectivo. Finalmente, verifiquemos que Γ es el menor cuasi inyectivo que contiene a M. Para ello, consideremos un módulo cuasi inyectivo N tal que $N \supseteq M$. Entonces $E(M) \leq E(N)$. Pero $E(N)$ es inyectivo, luego existe $g \in End(E(N))$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E(M) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & E(N) \arrow[d, dashed, "g"] \\ E(M) \arrow[r, hook, "i"] & E(N). \end{tikzcd}$$

De modo que $f(M) = g(M)$. Pero N es cuasi inyectivo, esto es, N es fuertemente invariante en su cápsula inyectiva. Por lo tanto, para g se verifica que $g(N) \subseteq N$. Resumidamente, para cada $f \in End(E(M))$ existe $g \in End(E(M))$ tal que

$$f(M) = g(M) \subseteq g(N) \subseteq N.$$

En consecuencia, $\Gamma = \sum\{f(M) \mid f \in End(E(M))\} \leq N$. De todo lo anterior podemos concluir que $\Gamma = Q(M)$.

$\square$

Ejemplo 1.26. *Consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^k}$ donde $k, p \in \mathbb{N}$ y p es primo. Notemos que cualquier submódulo propio de $E(M) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ que contenga a M, es de la forma $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^i}$ con $k \leq i \in \mathbb{N}$. Además, por un argumento similar al que se empleó en la demostración de la Proposición 1.9, se verifica que $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^i}$ no es cuasi inyectivo para ningún $i \in \mathbb{N}$. Por esto y porque $Q(M) \leq E(M)$, podemos afirmar que $Q(M) = E(M)$.*

Ejemplo 1.27. *Consideremos los $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$. Notemos que $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \subseteq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ y que $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ es cuasi inyectivo, por ser $\mathbb{Z}_4$ cuasi inyectivo. Sin embargo, $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ no es cuasi inyectivo. Ciertamente, el morfismo $f : \{\overline{0}, \overline{2}\} \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ tal que $f(\overline{2}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{1})$, no se puede extender a un endomorfismo de $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$. En caso contrario, existiría un endomorfismo g de $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ tal que $f = gi$, con $i : \{\overline{0}, \overline{2}\} \oplus \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ la inclusión. Luego podríamos definir el morfismo $h : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ por $h = \pi g j$, donde $j : \mathbb{Z}_4 \hookrightarrow \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ es la inclusión y $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ es la proyección. Entonces ocurriría que $h(\overline{2}) = \pi g j(\overline{2}) = \pi g((\overline{2}, \overline{0})) = \pi(\overline{0}, \overline{1}) = \overline{1}$. Pero esto no puede cumplirse, pues ningún morfismo $\varphi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ es tal que $\varphi(\overline{2}) = \overline{1}$. Esto demuestra que $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ no es cuasi inyectivo. Luego podemos concluir que $Q(\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$.*

1.2. Módulos cuasi proyectivos.

Es turno de los módulos cuasi proyectivos. En esta sección haremos un análisis similar al que hicimos en la sección anterior con los módulos cuasi inyectivos, es decir, estudiaremos los módulos cuasi proyectivos considerando los resultados que necesitamos para la tercer sección. Como veremos más adelante, los módulos cuasi proyectivos tienen propiedades interesantes heredadas de los módulos proyectivos, pero a veces revelan sus diferencias de formas muy atractivas.

Definición 1.28. *Decimos que un módulo M es proyectivo si para cualesquiera módulos N y L, y para todo epimorfismo $q : L \twoheadrightarrow N$, se verifica que cualquier morfismo $f : M \to N$ se puede levantar a un morfismo $g : M \to L$. Es decir, para cualquier morfismo $f : M \to N$, existe un morfismo $g : M \to L$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ L \arrow[r, two heads, "q"] & N \end{tikzcd}$$

Definición 1.29. *Decimos que un módulo M es cuasi proyectivo si para todo módulo N y para todo epimorfismo $q : M \twoheadrightarrow N$, se tiene que cualquier morfismo $f : M \to N$ se puede levantar a un endomorfismo de M. Es decir, para cualquier morfismo $f : M \to N$, existe un endomorfismo $g : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "q"] & N \end{tikzcd}$$

Es claro que todo módulo proyectivo es cuasi proyectivo. También los módulos semisimples y, por lo tanto, los módulos simples, son cuasi proyectivos. A continuación vamos a estudiar un resultado que nos va ayudar a demostrar este hecho.

Lema 1.30. *Sean M y N módulos, y $f : M \to N$ un morfismo. Si $Núc(f) \leq_{\oplus} M$, entonces existe un morfismo $h : Im(f) \to M$ tal que $fh = Id_{Im(f)}$.*

Demostración. Sea $L \leq M$ un submódulo tal que $Núc(f) \oplus L = M$. Consideremos $f|_L : L \to N$ la restricción de f en L. Luego, si $m \in M$ siendo $m = n + l$ con $n \in Núc(f)$ y $l \in L$, entonces

$$f(m) = f(n) + f(l) = 0 + f(l) = f|_L(l).$$

Por lo tanto, $f|_L$ es un morfismo de L en $Im(f)$. Más aun, $f|_L$ es un epimorfismo. Pero además, $Núc(f|_L) = Núc(f) \cap L = \{0\}$, es decir, $f|_L$ es un monomorfismo. O sea que $f|_L$ es un isomorfismo. Luego podemos considerar el morfismo $h : Im(f) \to M$ con $h = f|_L{}^{-1}$. Y en definitiva, $fh = Id_{Im(f)}$. □

Ejemplo 1.31. *Todo módulo semisimple es cuasi proyectivo.*

Demostración. Supongamos que M es un módulo semisimple, N un módulo, $f : M \to N$ un morfismo y $q : M \twoheadrightarrow N$ un epimorfismo. Como M es semisimple, entonces $Núc(q) \leq_{\oplus} M$. Luego, por el Lema 1.30, existe un morfismo $h : Im(q) \to M$ tal que $qh = Id_{Im(q)}$. Pero q es un epimorfismo, así que, $Im(q) = N$. Describimos la situación con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "h"'] & M \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "q"] & N \end{tikzcd}$$

Ahora, si definimos el endomorfismo $g : M \to M$ por $g = hf$, tenemos que

$$qg = q(hf) = (qh)f = (Id_N)f = f.$$

Es decir, g hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "q"] & N \end{tikzcd}$$

Esto demuestra que M es cuasi proyectivo. $\square$

Habíamos mencionado que los módulos proyectivos son cuasi proyectivos, no obstante, no todos los módulos cuasi proyectivos son proyectivos, como lo establece el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.32. *El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_2$ es cuasi proyectivo pero no proyectivo.*

Demostración. Como $\mathbb{Z}_2$ es un $\mathbb{Z}$-módulo simple, efectivamente, es un $\mathbb{Z}$-módulo cuasi proyectivo. Por otro lado, supongamos que $\mathbb{Z}_2$ es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo y consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_4$ y el epimorfismo $q : \mathbb{Z}_4 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $q(\overline{0}) = q(\overline{2}) = \overline{0}$ y $q(\overline{1}) = q(\overline{3}) = \overline{1}$. Notemos que q es el único epimorfismo de $\mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_2$. Luego, por hipótesis, existe un morfismo $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}_2 \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "Id_{\mathbb{Z}_2}"] \\ \mathbb{Z}_4 \arrow[r, two heads, "q"] & \mathbb{Z}_2 \end{tikzcd}$$

Así que $qf = Id_{\mathbb{Z}_2}$. Sin embargo, $\overline{1} \in \mathbb{Z}_4$ es un elemento de orden 2, luego $f(\overline{1}) \in \mathbb{Z}_4$ es de orden 2, pero el único elemento de orden 2 en $\mathbb{Z}_4$, es $\overline{2}$, por lo tanto, $f(\overline{1}) = \overline{2} = \overline{0}$. Entonces,

$$\overline{1} = Id_{\mathbb{Z}_2}(\overline{1}) = qf(\overline{1}) = q(f(\overline{1})) = q(\overline{2}) = \overline{0},$$

pero esto es una contradicción, en atención a la cual se concluye que $\mathbb{Z}_2$ no es proyectivo. $\square$

Proposición 1.33. *Sumandos directos de módulos cuasi proyectivos son cuasi proyectivos.*

Demostración. Consideremos un módulo cuasi proyectivo M y un sumando directo $N \leq_{\oplus} M$. Además, sean L un módulo, $q : N \twoheadrightarrow L$ un epimorfismo y $f : N \to L$ un morfismo. Adicionalmente, consideremos el morfismo $f\pi_N : M \to L$ y el epimorfismo $q\pi_N : M \twoheadrightarrow L$, donde $\pi_N : M \twoheadrightarrow N$ es la proyección. Luego, como M es cuasi proyectivo y $q\pi_N$ es un epimorfismo, entonces existe un endomorfismo $g : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[d, two heads, "\pi_N"] \arrow[dll, dashed, "g"'] \\
 & & N \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, two heads, "\pi_N"] & N \arrow[r, two heads, "q"] & L
\end{tikzcd}$$

Ahora, podemos considerar al endomorfismo $h : N \to N$ definido por $h = \pi_N g\mid_N$ y entonces, para toda $n \in N$, se cumple que

$$\begin{aligned}
qh(n) &= q(\pi_N g\mid_N)(n) \\
&= q\pi_N(g\mid_N (n)) \\
&= q\pi_N(g(n)) \\
&= (q\pi_N g)(n) \\
&= f\pi_N(n) \\
&= f(n).
\end{aligned}$$

Es decir, h hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] \\
N \arrow[r, two heads, "q"] & L
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente, N es cuasi proyectivo. $\square$

Teorema 1.34. *Si R es un anillo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *R es semisimple,*

ii) *$R \oplus S$ es cuasi proyectivo para todo R-módulo simple S,*

iii) *La suma directa de cualesquiera dos R-módulos cuasi proyectivos es cuasi proyectiva,*

iv) *La suma directa de cualesquiera dos R-módulos cuasi proyectivos finitamente generados es cuasi proyectiva.*

Demostración. $i) \Rightarrow iii)$ Toda vez que R es semisimple, sucede que todo R-módulo es proyectivo y, por tanto, cuasi proyectivo.
$iii) \Rightarrow iv)$ Es claro.
$iv) \Rightarrow ii)$ Se sigue del hecho de que R y S son R-módulos cuasi proyectivos finitamente generados.
$ii) \Rightarrow i)$ Sea S un módulo simple, mientras que $\pi_1 : R \oplus S \twoheadrightarrow R$ y $\pi_2 : R \oplus S \twoheadrightarrow S$ son las proyecciones correspondientes. Consideremos un epimorfismo $q : R \twoheadrightarrow S$ que existe por ser S simple, y a $i_2 : S \hookrightarrow R \oplus S$ la inclusión respectiva. Luego, como $R \oplus S$ es cuasi proyectivo, entonces existe un endomorfismo $g : R \oplus S \to R \oplus S$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & R \oplus S \arrow[d, two heads, "\pi_2"] \arrow[dll, dashed, "g"'] \\ R \oplus S \arrow[r, two heads, "\pi_1"] & R \arrow[r, two heads, "q"] & S \end{tikzcd}$$

Ahora, definamos el morfismo $f : S \to R$ por $f = \pi_1 g i_2$. Entonces

$$qf = q(\pi_1 g i_2) = (q\pi_1 g)i_2 = \pi_2 i_2 = Id_S.$$

Es decir, el morfismo f se escinde y, por lo tanto, S es un sumando directo de R. Se concluye que todo R-módulo simple es proyectivo y, esto implica, que R es semisimple. Ver [41, 20.7]. $\square$

Definición 1.35. *Sean M y N módulos. Decimos que un módulo P es proyectivo respecto a M si para todo epimorfismo $q : M \twoheadrightarrow N$ y para todo morfismo $f : P \to N$, existe un morfismo $g : P \to M$ tal que $qg = f$.*

Teorema 1.36. *Sean R un anillo y $\mathscr{C} \subseteq R-Mod$ una clase de módulos tal que, para todo $M \in R-Mod$, existen un módulo $C \in \mathscr{C}$ y un monomorfismo $f : M \rightarrowtail C$. Si un R-módulo P es proyectivo respecto a la clase $\mathscr{C}$, es decir, P es proyectivo respecto a C para todo $C \in \mathscr{C}$, entonces P es proyectivo.*

Demostración. Sea $N \leq M$ un submódulo, $f : P \to M/N$ un morfismo y $\rho : M \twoheadrightarrow M/N$ el epimorfismo natural. Notemos que para demostrar que P es proyectivo, basta con completar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "\rho"] & M/N \end{tikzcd}$$

Para eso, consideremos $C \in \mathscr{C}$ tal que $M \cong M'$, para algún $M' \leq C$. Entonces podemos afirmar, sin pérdida de generalidad, que $M/N \leq C/N$. Entonces, como P es proyectivo con respecto a la clase $\mathscr{C}$, existe un morfismo $g : P \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, dashed, "g"'] \\ & M/N \arrow[d, hook, "i"] \\ C \arrow[r, two heads, "\pi"] & C/N \end{tikzcd}$$

donde $i : M/N \hookrightarrow C/N$ es la inclusión y $\pi : C \twoheadrightarrow C/N$ es el epimorfismo natural. Por otro lado, sea $x \in P$ y asumamos que $f(x) = c + N$ con $c \in M$. Siendo así, tenemos que

$$g(x) + N = \pi(g(x)) = (\pi g)(x) = (if)(x) = i(f(x)) = f(x) = c + N.$$

Por lo tanto, $(g(x) - c) \in N$. Pero $c \in M$, luego $((g(x) - c) + c) \in M$, es decir, $g(x) \in M$. De modo que $g(P) \leq M$. Ahora, consideremos $g|^M : P \to M$ el morfismo g correstringido a M y $\pi|_M : M \twoheadrightarrow M/N$ el epimorfismo π restringido a M. Notemos que $\pi|_M$ coincide con el epimorfismo natural ρ. Entonces, para toda $p \in P$, se verifica que

$$\pi|_M(g|^M)(p) = \pi|_M(g(p)) = \pi(g(p)) = if(p) = f(p).$$

Es decir, $\rho(g|^M) = \pi|_M(g|^M) = f$. Por lo tanto, $g|^M$ hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g|^M"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "\rho"'] & M/N \end{tikzcd}$$

Y en consecuencia, P es proyectivo. $\square$

Corolario 1.37. *Sea M un módulo. Si M es proyectivo respecto a la clase de los módulos inyectivos, entonces M es proyectivo.*

Teorema 1.38. *Sea M un módulo. Si $N \oplus M$ es cuasi proyectivo para todo módulo inyectivo N, entonces M es proyectivo.*

Demostración. Por el Corolario 1.37, para demostrar que M es proyectivo, basta con completar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, two heads, "\pi"] & N/K. \end{tikzcd}$$

donde N es un módulo inyectivo, $K \leq N$ es un submódulo y $\pi : N \twoheadrightarrow N/K$ es el epimorfismo natural. Para ello, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & N \oplus M \arrow[d, "\overline{f}"] \\ N \oplus M \arrow[r, two heads, "\overline{\pi}"] & \frac{N\oplus M}{K\oplus\{0\}}. \end{tikzcd}$$

donde $\overline{\pi} : N \oplus M \twoheadrightarrow (N \oplus M)/(K \oplus \{0\})$ es el epimorfismo natural y $\overline{f} : N \oplus M \to (N \oplus M)/(K \oplus \{0\})$ es el morfismo definido por $\overline{f}((n,m)) = (x,0) + K \oplus \{0\}$, para todo $(n,m) \in N \oplus M$, con $x \in N$ tal que $f(m) = x + K$. En este caso, como $N \oplus M$ es cuasi inyectivo, entonces existe un endomorfismo $\overline{h} : N \oplus M \to N \oplus M$ tal que $\overline{\pi}\overline{h} = \overline{f}$. Así que, si $(0,m) \in N \oplus M$, $x \in N$ y $f(m) = \pi(x)$, entonces $\overline{\pi}\overline{h} = ((0,m)) = \overline{f}((0,m)) = (x,0)+K\oplus\{0\}$, es decir, $\overline{h}((0,m))+K\oplus\{0\} = (x,0)+K\oplus\{0\}$, entonces $\overline{h}((0,m)) - (x,0) \in K \oplus \{0\}$. Luego, si asumimos que $\overline{h}((0,m)) = (n'm')$, entonces $n' - x \in K$. Así que, si $\pi_N : N \oplus M \twoheadrightarrow N$ es la proyección en N, se tiene que

$$\pi(\pi_N\overline{h})((0,m)) = \pi(n') = n' + K = x + K = \pi(x) = f(m).$$

Por lo tanto, si $h : M \to N$ es el morfismo definido por $h = \pi_N\overline{h}i_2$, donde $i_2 : M \hookrightarrow N \oplus M$ es la inclusión, entonces $\pi h = f$. Es decir, h hace conmutar el primer digrama, o sea

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, two heads, "\pi"'] & N/K. \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, M es proyectivo.

$\square$

Lema 1.39. *Sean R un anillo y M un R-módulo. Si $M^{(X)}$ es cuasi proyectivo para todo conjunto X, y M contiene un submódulo isomorfo a ${}_RR$, entonces M es proyectivo.*

Demostración. Sean N y E dos R-módulos con E inyectivo. Además, sean $f : M \to N$ y $q : E \twoheadrightarrow N$ un morfismo y un epimorfismo respectivamente. A efectos de demostrar que M es proyectivo, debemos completar el siguiente digrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, two heads, "q"] & N \end{tikzcd}$$

Por hipótesis, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $R \leq M$ y, por lo tanto, que $R^{(X)} \leq M^{(X)}$, para todo conjunto X. En cuyo caso, podemos considerar la inclusión $i : R^{(X)} \hookrightarrow M^{(X)}$, para todo conjunto X. Además, notemos que existe un epimorfismo $\rho : R^{(X)} \to E$, para algún conjunto X. Así que, en consecuencia de que E es inyectivo, tenemos que existe un morfismo $g : M^{(X)} \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R^{(X)} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, two heads, "\rho"'] & M^{(X)} \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Tenemos que $gi = \rho$, pero ρ es un epimorfismo, luego g es un epimorfismo. Ahora, como $M^{(X)}$ es cuasi proyectivo, entonces existe un endomorfismo $\overline{h} : M^{(X)} \to M^{(X)}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & M^{(X)} \arrow[d, two heads, "\pi_k"] \arrow[dddll, dashed, "\overline{h}"'] \\ & & M \arrow[dd, "f"] \\ & & \\ M^{(X)} \arrow[r, two heads, "g"'] & E \arrow[r, two heads, "q"'] & N \end{tikzcd} .$$

donde $\pi_k : M^{(X)} \to M$ es la k-ésima proyección. Por otro lado, consideremos $\iota_k : M \hookrightarrow M^{(X)}$ la k-ésima inclusión y definamos el morfismo $h : M \to E$ por $h = g\overline{h}\iota_k$. Entonces, si $m \in M$, tenemos que

$$\begin{aligned} qh(m) &= q(g\overline{h}\iota_k)(m) \\ &= (qg\overline{h})\iota_k(m) \\ &= (f\pi_k)\iota_k(m) \\ &= f(\pi_k\iota_k)(m) \\ &= f(1d_M(m)) \\ &= f(m). \end{aligned}$$

Es decir, h hace conmutar el primer diagrama, esto es,

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, two heads, "q"'] & N \end{tikzcd}$$

conmuta. Luego, por el Corolario 1.37, M es proyectivo. $\square$

Lema 1.40. *Sean R un anillo e $I \leq R$ un ideal bilateral. Si M es un R/I-módulo proyectivo, entonces M es un R-módulo cuasi proyectivo.*

Demostración. Sean N un R-módulo, $f : M \to N$ un R-morfismo y $q : M \twoheadrightarrow N$ un R-epimorfismo. Notemos que N es un R/I-módulo, en virtud de Lema 1.19, ya que, $IN = Iq(M) = q(IM) = q(\{0\}) = \{0\}$. Además, f es un R/I-morfismo pues, para cualesquiera $r \in R$ y $m \in M$, se tiene que $f((r+I)m) = f(rm) = rf(m) = (r+I)f(m)$. Luego, como M es un R/I-módulo proyectivo, entonces existe un R/I-morfismo $g : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & {}_{R/I}M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ {}_{R/I}M \arrow[r, two heads, "q"] & {}_{R/I}N. \end{tikzcd}$$

Pero g es, a su vez, un R-morfismo. En efecto, si $r \in R$ y $m \in M$, entonces $g(rm) = g((r+I)m) = (r+I)g(m) = rg(m)$. De modo que, f se puede levantar como R-morfismo con un R-endomorfismo de M, a saber g. Luego M es un R-módulo cuasi proyectivo. $\square$

Lema 1.41. *Sea R un anillo e $I \leq R$ un ideal bilateral. Entonces M es un R/I-módulo cuasi proyectivo si y solo si M es un R-módulo cuasi proyectivo tal que $IM = \{0\}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Nótese que la demostración es análoga a la del Lema 1.40.

($\Leftarrow$) Sean N un R/I-módulo, $f : M \to N$ un R/I-morfismo y $q : M \twoheadrightarrow N$ un R/I-epimorfismo. Notemos que, por el Lema 1.19, M es un R/I-módulo y N es un R-módulo tal que $IN = \{0\}$. Además, f es un R-morfismo pues, para cualesquiera $m \in M$ y $r \in R$, se tiene que $f(rm) = f((r+I)m) = (r+I)f(m) = rf(m)$. Luego, como M es un R-módulo cuasi proyectivo, entonces existe un R-endomorfismo $g : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ M \arrow[r, two heads, "q"] & N \end{tikzcd}$$

Pero g es, al mismo tiempo, un R/I-morfismo pues, si $r \in R$ y $m \in M$, entonces $g((r+I)m) = g(rm) = rg(m) = (r+I)g(m)$. De hecho, g como R/I-morfismo, levanta al R/I-morfismo f. Consecuentemente, M es un R/I-módulo cuasi proyectivo. $\square$

Proposición 1.42. *Si P es un módulo proyectivo y $T \leq P$ un submódulo fuertemente invariante en P, entonces P/T es cuasi proyectivo.*

Demostración. Sean N un módulo, $h : P/T \to N$ un morfismo y $q : P/T \twoheadrightarrow N$ un epimorfismo. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow T \overset{i}{\hookrightarrow} P \overset{p}{\twoheadrightarrow} P/T \longrightarrow 0.$$

Notemos que, por ser P proyectivo, existe un endomorfismo $f : P \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T \arrow[r, hook, "i"] & P \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dl, dashed, "f"'] & P/T \arrow[d, "h"] \\
& P \arrow[r, two heads, "p"'] & P/T \arrow[r, two heads, "q"'] & N
\end{tikzcd}$$

Además, dado que $f(T) \leq T$, tenemos que $p(f(T)) \leq p(T) = \{0\}$. Así que, $pf(T) = \{0\}$, luego $pfi(T) = \{0\}$. Por otra parte, observemos que, por la propiedad universal del conúcleo, existe un endomorfismo $g : P/T \to P/T$ tal que $gp = pf$. Entonces se verifica que

$$hp = qpf = q(pf) = q(gp) = (qg)p.$$

Por lo tanto, $h = qg$. Es decir, g hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& P/T \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] \\
P/T \arrow[r, two heads, "q"'] & N
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, P/T es cuasi proyectivo. $\square$

Recordemos que si M y N son módulos y $q : M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo, decimos que q es superfluo si $N\acute{u}c(q) \ll M$. Además, una pareja (P, q) donde P es un módulo proyectivo y $q : P \twoheadrightarrow M$ es un epimorfismo superfluo, recibe el nombre de cubierta proyectiva de M. A propósito de esto, Wu y Jans definieron de forma análoga este concepto para los módulos cuasi proyectivos, de la siguiente manera: si M es un módulo, una cubierta cuasi proyectiva de M es una pareja (Q, q), donde Q es un módulo cuasi proyectivo, $q : Q \twoheadrightarrow M$ es un epimorfismo superfluo y para todo $\{0\} \neq T \subseteq N\acute{u}c(q)$, se verifica que Q/T no es cuasi proyectivo.

Proposición 1.43. *Sea M un módulo cuasi proyectivo. Si $P \overset{q}{\twoheadrightarrow} M$ es una cubierta proyectiva de M, entonces $Núc(q)$ es fuertemente invariante en P.*

Demostración. Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Núc(q) \overset{i}{\hookrightarrow} P \overset{q}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow 0,$$

y un morfismo $f \in End(P)$. Vamos a demostrar que $f(Núc(q)) \subseteq Núc(q)$. Para ello, consideremos el módulo $T = Núc(q) + f(Núc(q))$, y notemos que $f(Núc(q)) \subseteq T$, así que, podemos definir el morfismo $\overline{f} : P/Núc(q) \to P/T$ tal que $\overline{f}(x + Núc(q)) = f(x) + T$ con $x \in P$. También podemos definir el morfismo $g : P/T \to M/q(T)$ por $g(x + T) = q(x) + q(T)$. Además, observemos que $M \cong P/Núc(q)$ y denotemos por φ al isomorfismo entre M y $P/Núc(q)$. Adicionalmente, definamos el morfismo $h : P/T \to M/q(T)$ por $h = g\overline{f}\varphi$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/q(T) \end{tikzcd}$$

donde $\pi : M \twoheadrightarrow M/q(T)$ es el epimorfismo natural. Luego, como M es cuasi inyectivo, entonces existe un endomorfismo $\mu : M \to M$ que hace conmutar el diagrama anterior, esto es, $\pi\mu = h$. Y como P es proyectivo, entonces existe un endomorfismo $\rho : P \to P$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, two heads, "q"] \arrow[ddl, dashed, "\rho"'] \\ & M \arrow[d, dashed, "\mu"] \\ P \arrow[r, two heads, "q"] & M \end{tikzcd}$$

Por otra parte, si $X = \{y \in P \mid f(y) - \rho(p) \in N\acute{u}c(q), \text{ para algún } p \in P\}$, entonces afirmamos que $X + N\acute{u}c(q) = P$. En efecto, podemos considerar los diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, dashed, "\rho"'] & M \arrow[d, dashed, "\mu"] \arrow[dr, "h"] & \\ P \arrow[r, two heads, "q"] & M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/q(T) \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dr, "h"] & \\ P \arrow[r, two heads, "q"] & M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/q(T). \end{tikzcd}$$

El segundo de estos diagramas conmuta porque, si tomamos un $x \in P$, entonces, por un lado, $\pi q f(x) = q(f(x)) + q(T)$, y por otro, $hq(x) = ((g\overline{f}\varphi)q)(x)$, pero el Primer Teorema de Isomorfismo nos asegura que $\varphi(q(x)) = x + N\acute{u}c(q)$, luego

$$\begin{aligned} (g\overline{f}\varphi q)(x) &= (g\overline{f})(\varphi q(x)) \\ &= g\overline{f}(x + N\acute{u}c(q)) \\ &= g(f(x) + T) \\ &= q(f(x)) + q(T) \\ &= \pi q f(x). \end{aligned}$$

Así que, efectivamente, el diagrama conmuta. Entonces, para cada $p \in P$, se verifica que $(\pi q(f - \rho))(p) = 0$, por lo tanto, $(q(f - \rho))(p) \in N\acute{u}c(\pi) = q(T)$. Esto demuestra que $q(f - \rho)(P) \subseteq q(T)$ y, por tanto, $(f - \rho)(P) \subseteq T + N\acute{u}c(q) = T$. Así que, para todo $p \in P$, se cumple que $f(p) - \rho(p) = n_1 + f(n_2)$, para algunos $n_1, n_2 \in N\acute{u}c(q)$. De modo que, $p - n_2 \in X$, lo que confirma que $X + N\acute{u}c(q) = P$, como habíamos afirmado. Pero además, $N\acute{u}c(q) \ll P$, entonces lo que realmente tenemos es que $X = P$. Por otra parte, $q(\rho(N\acute{u}c(q))) = \mu q(N\acute{u}c(q)) = \{0\}$ y, en consecuencia, $\rho(N\acute{u}c(q)) \subseteq N\acute{u}c(q)$. Finalmente, tomemos un elemento $x \in f(N\acute{u}c(q))$. Entonces existe $y \in N\acute{u}c(q) \subseteq P$ tal que $x = f(y)$, pero $P = X$, luego $f(y) - \rho(y) \in N\acute{u}c(q)$ y, además, $\rho(y) \in \rho(N\acute{u}c(q)) \subseteq N\acute{u}c(q)$. Así que, $x = f(y) = (f(y) - \rho(y)) + \rho(y) \in N\acute{u}c(q)$. Se concluye que $f(N\acute{u}c(q)) \subseteq N\acute{u}c(q)$.

□

Corolario 1.44. *Sea M un módulo. Si M es cuasi proyectivo y tiene cubierta proyectiva, entonces $M^{(I)}$ es cuasi proyectivo para todo conjunto I.*

Demostración. Sea $0 \longrightarrow N\acute{u}c(q) \hookrightarrow P \xrightarrow{q} M$ una cubierta proyectiva para M. Entonces $0 \longrightarrow N\acute{u}c(q)^{(I)} \xhookrightarrow{\iota} P^{(I)} \xrightarrow{q^{(I)}} M^{(I)}$ es una cubierta proyectiva de $M^{(I)}$. Por la Proposición 1.42, basta demostrar que $f(N\acute{u}c(q)^{(I)}) \subseteq (N\acute{u}c(q)^{(I)})$, para todo $f \in End(P^{(I)})$. Para esto, tomemos $x \in (N\acute{u}c(q))^{(I)}$ donde $x = x_{i_1} + ... + x_{i_n}$ con $x_{i_j} \in N\acute{u}c(q)$. Luego, si $\iota_k : P \hookrightarrow P^{(I)}$ es la k-ésima inclusión, entonces $x = \iota_1(x_{i_1}) + ... + \iota_n(x_{i_n})$, por lo tanto, $f(x) = f(x_{i_1}) + ... + f(x_{i_n}) = f\iota_1(x_{i_1}) + ... + f\iota_n(x_{i_n})$ y, en consecuencia, $\pi_j f(x) = \pi_j f\iota_1(x_{i_1}) + ... + \pi_j f\iota_n(x_{i_n})$ donde $\pi_j : P^{(I)} \twoheadrightarrow P$ es la j-ésima proyección. Pero $\pi_j f\iota_k \in End(P)$, así que, la Proposición 1.43 nos asegura que $\pi_j f\iota_k(x_{i_k}) \in N\acute{u}c(q)$, para toda $k \in \{1, ..., n\}$. Se sigue que $(\pi_j f\iota)(x) \in N\acute{u}c(q)$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$, luego $f(x) \in (N\acute{u}c(q))^{(I)}$. Esto demuestra que $f(N\acute{u}c(q)^{(I)}) \subseteq N\acute{u}c(q)^{(I)}$ y, por esta razón, $M^{(I)}$ es cuasi proyectivo. □

1.3. Anillos artinianos de ideales principales I.

Un conocido teorema de Faith y Walker, nos asegura que los anillos para los cuales todo módulo inyectivo es proyectivo y todo módulo proyectivo es inyectivo, son los anillos cuasi Frobenius, mejor conocidos en la literatura como anillos QF por sus siglas en inglés. Una generalización clásica de esta clase de anillos, es la de los artinianos de ideales principales. Esto, debido a que una importante caracterización de estos últimos, declara que un anillo R es artiniano de ideales principales si y solo si el cociente R/I es cuasi Frobenius, para todo $I \leq R$ ideal bilateral. Con esta relación tan estrecha entre ambos tipos de anillos, era previsible que contaran con propiedades análogas. Efectivamente, el Teorema 1.50, resultado principal de esta sección, da muestra de que los anillos para los que todo módulo cuasi inyectivo es cuasi proyectivo y todo módulo cuasi proyectivo es cuasi inyectivo, resultan ser, precisamente, los anillos artinianos de ideales principales. Dicho sea de paso, a esta analogía le debe su título esta tesis. Por último, esta sección incluye algunos resultados para los que no incluimos su demostración, sin embargo dichos teoremas son ya clásicos de la teoría de anillos y módulos, razón por la que el lector podrá encontrar más detalles sobre ellos en algunos textos, por ejemplo [18] y [29].

Definición 1.45. *Sea R un anillo. Decimos que R es artiniano de ideales principales si es artiniano derecho e izquierdo y de ideales principales derechos e izquierdos.*

Teorema 1.46. *Si R es un anillo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) R es artiniano de ideales principales,

ii) R/I es cuasi Frobenius, para todo $I \leq R$ ideal bilateral.

Demostración. Ver [18, Proposición 25.4.6 B]. □

Teorema 1.47 (Faith-Walker)**.** *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) R es cuasi Frobenius,

ii) Todo R-módulo inyectivo es proyectivo,

iii) Todo R-módulo proyectivo es inyectivo.

Demostración. El lector la puede encontrar en [29, Teorema 13.6.1]. □

Definición 1.48. *Si R es un anillo, decimos que un R-módulo M es fiel si para cada $r \in R \setminus \{0\}$ existe un $m \in M$ con $rm \neq 0$.*

Teorema 1.49. *Sea R un anillo artiniano. Si M es un R-módulo fiel, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M^{(n)}$ tiene un submódulo isomorfo a ${}_RR$.*

Demostración. Asumamos que M es un módulo fiel. Consideremos

$$J = \bigcap \{Núc(f) \mid f \in Hom_R({}_RR, M)\}.$$

Entonces $J \leq R$ es un ideal izquierdo. Por otro lado, si $0 \neq r_0 \in R$, como M es fiel, entonces existe $m_0 \in M$ tal que $r_0 m_0 \neq 0$. Luego, si $f : R \to M$ es un morfismo tal que, para cada $r \in R$, se tiene que $f(r) = rm_0$, entonces $r_0 \notin Núc(f)$ y, por lo tanto, $r_0 \notin J$. Esto demuestra que $J = \{0\}$. Por otra parte, como R es artiniano, entonces es finitamente cogenerado y, en consecuencia, existen $f_i \in Hom_R({}_RR, M)$ con $i \in \{1, ..., n\}$ y $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} Núc\ (f_i) = \{0\}.$$

Así que, podemos considerar el morfismo $g : R \to M^{(n)}$ definido por $g(r) = (f_1(r), ..., f_n(r))$ para cada $r \in R$. Luego

$$Núc(g) = \bigcap_{i=1}^{n} Núc\ (f_i) = \{0\}.$$

Esto equivale a decir que g es un monomorfismo, y de este hecho se sigue que R es isomorfo a un submódulo de $M^{(n)}$. □

Recordemos que si R es un anillo y M es un R-módulo, el anulador de M, denotado por $(0{:}M)$, se define como sigue:

$$(0{:}M) = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ para toda } m \in M\}.$$

Notemos que si M es un R-módulo fiel, entonces $(0{:}M) = \{0\}$. Además, el anulador de cualquier R-módulo M es, claramente, un ideal bilateral de R.

Teorema 1.50. *Sea R un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) R es artiniano de ideales principales,

ii) Todo R-módulo cuasi inyectivo es cuasi proyectivo,

iii) Todo R-módulo cuasi proyectivo es cuasi inyectivo.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii) Consideremos un R-módulo cuasi inyectivo M y al anillo $R/(0{:}M)$. Notemos que, en consecuencia del Lema 1.19, M es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo. Además, M es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo fiel ya que

$$(0{:}M_{\frac{R}{(0:M)}}) = (0{:}M) = \{0_{\frac{R}{(0:M)}}\}.$$

Entonces, por el Teorema 1.49, $\frac{R}{(0:M)} \leq M^{(n)}$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Así que, debido al Teorema 1.23, se tiene que $M^{(n)}$ es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo cuasi inyectivo. Luego, por la Proposición 1.15, M es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo inyectivo. Pero de la hipótesis se obtiene que $\frac{R}{(0:M)}$ es un anillo cuasi Frobenius, por lo tanto, M es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo proyectivo. Siendo así, se sigue del Lema 1.40, que M es un R-módulo cuasi proyectivo.

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $I \leq R$ un ideal bilateral. Primero observemos que si todo R-módulo cuasi inyectivo es un R-módulo cuasi proyectivo, entonces todo R/I-módulo cuasi inyectivo es un R/I-módulo cuasi proyectivo. En efecto, si M es un R/I-módulo cuasi inyectivo, entonces, por el Lema 1.21, M es un R-módulo cuasi inyectivo tal que $IM = \{0\}$. Luego, por hipótesis, M es un R-módulo cuasi proyectivo, pero además es tal que $IM = \{0\}$. Esto, según el Lema 1.41, significa precisamente, que M es un R/I-módulo cuasi proyectivo, como habíamos afirmado. Por otro lado, sean $I \leq R$ un ideal bilateral y M un R/I-módulo inyectivo. Entonces $M \oplus M$ es un R/I-módulo inyectivo y, en consecuencia, es un R/I-módulo cuasi inyectivo. Así que, debido a la hipótesis junto con la observación anterior, resulta que $M \oplus M$ es un R/I-módulo cuasi proyectivo, pero esto implica, en vista del Teorema 1.38, que M es un R/I-módulo proyectivo. Hemos demostrado que todo R/I-módulo inyectivo es un R/I-módulo proyectivo o, dicho de otro modo, R/I es un anillo cuasi Frobenius. Esto equivale a decir, que R es un anillo artiniano de ideales principales.

i) $\Rightarrow$ *iii)* Sea M un R-módulo cuasi proyectivo. Del Lema 1.41, resulta que M es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo cuasi proyectivo. Luego, como R es un anillo artiniano y M es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo fiel, se sigue de la Proposición 1.49, que $\frac{R}{(0:M)} \leq M^{(n)}$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Además, como R es artiniano, entonces es perfecto izquierdo y, por tanto, M tiene cubierta proyectiva. Esto implica, de acuerdo con el Corolario 1.44, que $M^{(n)}$ es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo cuasi proyectivo. Del mismo modo, $M^{(n)}$ tiene cubierta proyectiva, así que, una vez más por el Corolario 1.44, $(M^{(n)})^{(X)}$ es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo cuasi proyectivo, para cualquier conjunto X. Luego, por el Lema 1.39, se tiene que $M^{(n)}$ es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo proyectivo. Pero $\frac{R}{(0:M)}$ es un anillo cuasi Frobenius por hipótesis, de modo que $M^{(n)}$ es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo inyectivo, luego M es un $\frac{R}{(0:M)}$-módulo inyectivo, lo que implica, conforme al Lema 1.41, que M es un R-módulo cuasi inyectivo.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Observemos que, si todo R-módulo cuasi proyectivo es un R-módulo cuasi inyectivo, entonces todo R/I-módulo cuasi proyectivo es un R/I-módulo cuasi inyectivo. Efectivamente, si M es un R/I-módulo cuasi proyectivo, por el Lema 1.40, tenemos que M es un R-módulo cuasi proyectivo tal que $IM = \{0\}$. Luego, por hipótesis, M es un R-módulo cuasi inyectivo, pero además es tal que $IM = \{0\}$. Esto significa, en vista del Lema 1.21, que M es un R/I-módulo cuasi inyectivo, que es lo que queríamos verificar. Dicho esto, sean $I \leq R$ un ideal bilateral y M un R/I-módulo proyectivo. Como M es proyectivo, entonces es sumando directo de un R/I-módulo libre F. Además, por ser F un R/I-módulo libre, entonces es un R/I-módulo proyectivo y, por lo tanto, es un R/I-módulo cuasi proyectivo. Se sigue de la hipótesis junto con la observación precedente, que F es un R/I-módulo cuasi inyectivo. Pero, que F sea libre, también implica que existe un submódulo $N \leq F$ tal que $N \cong R/I$, lo que conlleva, a juzgar por la Proposición 1.15, que F es un R/I-módulo inyectivo. Lacónicamente; cualquier sumando directo de F es inyectivo, en particular M es un R/I-módulo inyectivo. En conclusión, R/I es un anillo cuasi Frobenius, o en otras palabras, R es artiniano de ideales principales.

$\square$

Capítulo 2

Módulos seudo inyectivos y seudo proyectivos.

Como su nombre sugiere, en este capítulo vamos a discutir la seudo inyectividad y la seudo proyectividad. Estas nociones forman parte de una de las diferentes líneas de estudio que surgen a partir de los módulos que estudiamos en el capítulo anterior. Son, de hecho, generalizaciones suyas. Por eso resulta natural hacerse la misma pregunta que protagonizó nuestro anterior apartado, pero esta vez cambiando la palabra «cuasi» por la palabra «seudo». Nosotros contestamos cómo tiene que ser un anillo R si ocurre que todo R-módulo seudo inyectivo es seudo proyectivo, y si todo R-módulo seudo proyectivo es seudo inyectivo, y esta es la motivación del capítulo. Para ese fin, seguiremos un proceso similar al que usamos en el capítulo previo, este es, las primeras dos secciones serán dedicadas al estudio de algunas propiedades y teoremas sobre módulos seudo inyectivos y seudo proyectivos, y esta teoría la emplearemos en la tercera sección, en la que expondremos, valiéndonos del trabajo anterior, tal resultado.

2.1. Módulos seudo inyectivos.

En esta sección exploraremos la seudo inyectividad; estudiaremos determinadas propiedades de los módulos seudo inyectivos, algunas de ellas análogas a las que tratamos en el capítulo anterior para los módulos cuasi inyectivos, y otras que relacionan uno y otro concepto. Proporcionaremos un criterio para conocer en qué caso un módulo cuasi inyectivo es a su vez seudo inyectivo. Además, caracterizaremos a los anillos semisimples usando el concepto de seudo inyectividad. Como mencionamos antes, estos resultados los aprovecharemos más adelante, en la tercer sección.

Definición 2.1. *Decimos que un módulo M es seudo inyectivo si para todo submódulo $N \leq M$, se tiene que cualquier monomorfismo $f : N \rightarrowtail M$ se puede extender a un endomorfismo de M. Es decir, para cualquier monomorfismo $f : N \rightarrowtail M$, existe un endomorfismo $g : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, tail, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Claramente, todo módulo inyectivo y todo módulo cuasi inyectivo es seudo inyectivo y, en consecuencia, cualquier módulo semisimple también lo es. Sin embargo, no todo módulo seudo inyectivo es cuasi inyectivo, a continuación mostraremos un ejemplo que evidencia este hecho.

Ejemplo 2.2. *Sea M un módulo cuya retícula de submódulos es como la* *siguiente:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& M \arrow[d, dash] & \\
& N_1 \oplus N_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
N_1 \arrow[dr, dash] & & N_2 \arrow[dl, dash] \\
& \{0\} &
\end{tikzcd}$$

de tal modo que $N_1 \ncong N_2$. *Entonces se tiene que:*

i) M *no es cuasi inyectivo.*

ii) Si $End(N_k) \cong \mathbb{Z}_2$ *con* $k \in \{1, 2\}$, *entonces* M *es seudo inyectivo.*

Demostración. Para demostrar $i)$, primero notemos que si $f \in End(M)$ y f no es el morfismo cero, entonces ocurre, ya sea, que f es un automorfismo de M, o bien, que $Núc(f) = N_1 \oplus N_2$. En efecto; si se cumpliera que $Núc(f) \neq N_1 \oplus N_2$, entonces podríamos suponer que $Núc(f) = N_1$, luego, por el Primer Teorema de Isomorfismo, tendríamos que $M/N_1 \cong f(M)$, pero esto no ocurre, pues si dos módulos son isomorfos, entonces sus retículas de submódulos también son isomorfas, sin embargo, la retícula de submódulos de M/N_1:

$$\begin{tikzcd}
\frac{M}{N_1} \arrow[d, dash] \\
\frac{N_1 \oplus N_2}{N_1} \arrow[d, dash] \\
\{0\}
\end{tikzcd}$$

de hecho, no es isomorfa a la retícula de submódulos de ningún submódulo de M, en particular de $f(M)$. Por lo tanto, $Núc(f) \neq N_1$. De forma análoga se deduce que $Núc(f) \neq N_2$. Por otro lado, si asumimos que

$Núc(f) = \{0\}$, desde luego, resulta que f es un monomorfismo, pero más aún, se obtiene que $M \cong f(M)$ y, en consecuencia, la retícula de submódulos de M es isomorfa a la retícula de submódulos de $f(M)$ y de esto se sigue que $M = f(M)$. Así que f es, de hecho, un automorfismo de M. Ahora, supongamos que M es cuasi inyectivo y consideremos $f \in End(M)$. Además, tomemos $\iota_1 : N_1 \oplus N_2 \hookrightarrow M$ y $\pi_1 : N_1 \oplus N_2 \twoheadrightarrow N_1$ la inclusión y la proyección respectivamente. Tenemos una situación como la que se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_1 \oplus N_2 \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, two heads, "\pi_1"] & M \\
& N_1 \arrow[d, hook, "i_1"'] & \\
& M &
\end{tikzcd}$$

donde $i_1 : N_1 \hookrightarrow M$ es la inclusión. Luego, por hipótesis debe existir un endomorfismo $g : M \to M$ tal que $g\iota_1 = i_1\pi_1$. Pero del argumento anterior se sigue que, o bien, g es un automorfismo, o bien, que $Núc(g) = N_1 \oplus N_2$. No obstante, si g es un automorfismo, entonces $i_1\pi_1$ es un monomorfismo, luego π_1 es monomorfismo, lo que es una contradicción. Y si $Núc(g) = N_1 \oplus N_2$, entonces $g = \overline{0}$ y, por lo tanto, $i_1\pi_1 = \overline{0}$, pero esto no es posible ya que $N_1 \neq \{0\}$. Estas contradicciones demuestran que el morfismo $i_1\pi_1$ no se puede extender a un endomorfismo de M y, en consecuencia, M no es cuasi inyectivo.

Ahora vamos a demostrar *ii*), así que asumamos que $End(N_k) \cong \mathbb{Z}_2$ con $k \in \{1, 2\}$. Como $N_1 \ncong N_2$, del argumento anterior se deduce que cualquier monomorfismo de N_1, N_2 o $N_1 \oplus N_2$ a M, debe ser la inclusión y, por lo tanto, puede extenderse al morfismo identidad de M. Esto demuestra que M es seudo inyectivo.

$\square$

Proposición 2.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un módulo M.*

i) M *es cuasi inyectivo,*

ii) $M \oplus M$ *es seudo inyectivo.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Si M es cuasi inyectivo, por el Teorema 1.23, se tiene que $M \oplus M$ es cuasi inyectivo y, por lo tanto, es seudo inyectivo.

$ii) \Rightarrow i)$ Sean $N \leq M$ un submódulo y $f : N \to M$ un morfismo. Definimos el morfismo $g : N \to M \oplus M$ por $g(n) = (f(n), n)$, para cada $n \in N$. Notemos que g es un monomorfismo. Así, como $M \oplus M$ es seudo inyectivo, entonces existe un endomorfismo $h : M \oplus M \to M \oplus M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, tail, "g"'] & M \arrow[r, hook, "\iota"] & M \oplus M \arrow[dll, dashed, "h"] \\
& M \oplus M & &
\end{tikzcd}$$

donde $i : N \hookrightarrow M$ e $\iota : M \hookrightarrow M \oplus M$ son las inclusiones correspondientes. Ahora, consideremos a $h \mid_M : M \to M \oplus M$ la restricción de h a M, y a $\pi_1 : M \oplus M \twoheadrightarrow M$ la proyección en la primera componente. Notemos que $g = h \mid_M i$. Así que, si definimos el endomorfismo $\varphi : M \to M$ por $\varphi = \pi_1 h \mid_M$ y tomamos $n \in N$, entonces se verifica que

$$\varphi i(n) = (\pi_1 h \mid_M) i(n) = \pi_1 (h \mid_M i)(n) = \pi_1(g(n)) = f(n).$$

Es decir, φ hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "\varphi"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Lo que demuestra, que M es cuasi inyectivo. $\square$

Corolario 2.4. *Si la suma directa de cualesquier dos módulos seudo inyectivos es seudo inyectiva, entonces todo módulo seudo inyectivo es cuasi inyectivo.*

Demostración. Si asumimos que M es un módulo seudo inyectivo, por hipótesis resulta que $M \oplus M$ es seudo inyectivo, lo que implica, a la luz de la Proposición 2.3, que M es cuasi inyectivo. □

Corolario 2.5. *Sea R un anillo. Si la suma directa de cualesquier dos R-módulos seudo inyectivo es seudo inyectiva, entonces R es CI.*

Demostración. Sean M y N un par de R-módulos cuasi inyectivos. Entonces ambos son R-módulos seudo inyectivos. Así que, por hipótesis, $M \oplus N$ es seudo inyectivo. Luego, por el Corolario 2.4 , $M \oplus N$ es cuasi inyectivo. Se concluye, en vista de la Proposición 1.11, que R es CI. □

Definición 2.6. *Decimos que un anillo R es SI si todo R-módulo seudo inyectivo es inyectivo.*

Observemos que, de los Corolarios 2.4 y 2.5, podemos deducir que, si R es un anillo SI, entonces R es CI.

Proposición 2.7. *Si R es un anillo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *R es SI,*

ii) *La suma directa de cualesquier dos R-módulos seudo inyectivos es seudo inyectiva.*

Demostración. $i \Rightarrow ii)$ Sean M y N un par de R-módulos seudo inyectivos. De la hipótesis resulta que M y N son inyectivos y, por ello, $M \oplus N$ es inyectivo, lo que a su vez implica, que $M \oplus N$ es seudo inyectivo.

ii) $\Rightarrow$ *i*) Sea M un R-módulo seudo inyectivo. De la hipótesis a la par del Corolario 2.5, se obtiene que R es CI, luego M es inyectivo. Por lo tanto, R es SI.

□

Teorema 2.8. *Sea R un anillo. Las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

i) R es semisimple,

ii) R es seudo inyectivo y SI,

iii) Todo R-módulo es seudo inyectivo,

iv) Todo R-módulo finitamente generado es seudo inyectivo,

v) Todo R-módulo generado por cuatro elementos es seudo inyectivo.

Demostración. *i*) $\Rightarrow$ *ii*) Si asumimos que R es semisimple, entonces todo R-módulo es inyectivo, en particular los módulos seudo inyectivos.

ii) $\Rightarrow$ *iii*) Como R es seudo inyectivo y SI, entonces es inyectivo, es decir, R es autoinyectivo. Además, como R es SI, entonces R es CI. Luego, por el Teorema 1.18, R es semisimple, pero esto implica, que todo R-módulo es inyectivo y, por lo tanto, seudo inyectivo.

iii) $\Rightarrow$ *i*) Sea M un R-módulo. De la hipótesis se obtiene que $M \oplus M$ es seudo inyectivo. Luego, la Proposición 2.3, nos garantiza que M es un R-módulo cuasi inyectivo, lo que implica que R es semisimple, conforme al Corolario 1.18.

iii) $\Rightarrow$ *iv*) Es claro.

iv) $\Rightarrow$ *v*) Es claro.

v) $\Rightarrow$ *i*) Sea M un R-módulo cíclico. De la hipótesis se obtiene que $(R \oplus M) \oplus (R \oplus M)$ es seudo inyectivo. Luego, la Proposición 2.3 nos garantiza que $R \oplus M$ es cuasi inyectivo, así que, por la Proposición 1.15, podemos inferir que $R \oplus M$ es inyectivo. Resulta entonces que M es inyectivo. De modo que, todo R-módulo cíclico es inyectivo o, equivalentemente R es semisimple, [33, Corolario 6.47]. $\square$

Lema 2.9. *Sea R un anillo e $I \leq R$ un ideal bilateral. Si M es un R/I-módulo inyectivo, entonces M es un R-módulo seudo inyectivo.*

Demostración. Si M es un R/I-módulo inyectivo, por el Lema 1.20, resulta que M es un R-módulo cuasi inyectivo y, en consecuencia, M es un R-módulo seudo inyectivo. $\square$

Lema 2.10. *Sean R un anillo e $I \leq R$ un ideal bilateral. Entonces M es un R/I-módulo seudo inyectivo si y solo si M es un R-módulo seudo inyectivo tal que $IM = \{0\}$.*

Demostración. La demostración es análoga a la del Lema 1.21. $\square$

2.2. Módulos seudo proyectivos.

Este breve apartado emana, principalmente, de la necesidad de demostrar uno de los resultados que alberga (Teorema 2.13), para demostrar el segundo de los dos teoremas que figuran, en su totalidad, a la próxima sección. Ese resultado, que es dual a uno de la sección anterior (Teorema 2.3), fue esencial para tal demostración. También incluimos algunas propiedades referentes a los módulos seudo proyectivos.

Definición 2.11. *Decimos que un módulo M es seudo proyectivo si para todo módulo N y para todo epimorfismo $q : M \twoheadrightarrow N$, se verifica que cualquier epimorfismo $p : M \twoheadrightarrow N$ se puede levantar a un endomorfismo de M. Es decir, para cualquier epimorfismo $p : M \twoheadrightarrow N$, existe un* *endomorfismo $f : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, two heads, "p"] \\ M \arrow[r, two heads, "q"'] & N \end{tikzcd}$$

Claramente, todo módulo proyectivo es seudo proyectivo. Por lo tanto, también los módulos cuasi proyectivos son seudo proyectivos. Sin embargo, no todo módulo seudo proyectivo es cuasi proyectivo como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.12. *Sea M un módulo cuya retícula de submódulos es como la siguiente:*

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ N_1 \arrow[dr] & & N_2 \arrow[dl] \\ & N_1 \cap N_2 \arrow[d] & \\ & \{0\} & \end{tikzcd}$$

con $M/N_1 \ncong M/N_2$. Entonces se verifica que:

i) M no es cuasi proyectivo,

ii) Si $End(M/N_i) \cong \mathbb{Z}_2$ con $i \in \{1,2\}$, entonces M es seudo proyectivo.

Demostración. Primero notemos que los únicos dos submódulos de longitud 2 de M, son tales que su retícula de submódulos es una cadena. Además, el único módulo cociente de M de longitud 2, es la suma directa de dos módulos simples no isomorfos. Por lo tanto, cada endomorfismo f de M distinto de cero que no sea un automorfismo, tiene la propiedad de que $f(M) = N_1 \cap N_2$. Por otro lado, sean $\pi : M \twoheadrightarrow M/(N_1 \cap N_2)$ el epimorfismo natural y $f : M \to M/(N_1 \cap N_2)$ el morfismo definido por $f(n_1 + n_2) = n_1 + N_1 \cap N_2$, para toda $n_1 \in N_1$ y $n_2 \in N_2$. Notemos que $f(M) = N_1/N_1 \cap N_2$. Observemos también, que ningún endomorfismo $g : M \to M$ es tal que $\pi g = f$, de lo contrario, $N_1/(N_1 \cap N_2) = f(M) = \pi(g(M)) = \pi(N_1 \cap N_2) = \{0\}$ y entonces, $N_1 \leq N_2$, lo que es una contradicción. Como ningún endomorfismo de M levanta a f, entonces M no es cuasi proyectivo.

Para demostrar *ii*), asumamos que $End(M/N_i) \cong \mathbb{Z}_2$ con $i \in \{1, 2\}$ y consideremos un epimorfismo $q : M \twoheadrightarrow M/N_1$. Como N_1 y N_2 son los únicos submódulos de M de longitud 2 y $M/N_1 \ncong M/N_2$, entonces $Núc(q) = N_1$. Notemos que esta observación, junto con la hipótesis, implican que q es el epimorfismo natural. Por lo tanto, $q = \pi$ se levanta con el morfismo identidad Id_M. Lo mismo se cumple para todo epimorfismo $q : M \twoheadrightarrow M/N_2$. Así que, cualquier epimorfismo de M a M/N_i con $i \in \{1, 2\}$, se levanta. Falta verificar esta propiedad para los epimorfismos de M a $M/N_1 \cap N_2$. Para ello, supongamos que $\rho : M \twoheadrightarrow M/(N_1 \cap N_2)$ es un epimorfismo. Como $N_1 \cap N_2$ es el único submódulo simple de M y $M/Núc(\rho) \cong M/(N_1 \cap N_2)$, entonces $Núc(\rho) \cong (N_1 \cap N_2)$. Además, notemos que $(M/N_1) \oplus (M/N_2) = M/(N_1 \cap N_2)$, luego $End(M/N_1 \oplus M/N_2) = End(M/(N_1 \cap N_2))$, pero como M/N_1 y M/N_2 son módulos simples, entonces $End(M/N_1 \oplus M/N_2) \cong End(M/N_1) \oplus End(M/N_2)$, y este isomorfismo induce el isomorfismo del que se obtiene que $End(M/(N_1 \cap N_2)) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Esto implica que ρ es el epimorfismo natural $\pi : M \twoheadrightarrow M/(N_1 \cap N_2)$. Por lo tanto, ρ se levanta con el morfismo identidad Id_M de M. Se concluye que M es seudo proyectivo. □

Teorema 2.13. *Sea M un módulo. Si $M \oplus M$ es seudo proyectivo, entonces M es cuasi proyectivo.*

Demostración. Sean $N \leq M$ un submódulo, $f : M \to M/N$ un morfismo y $\overline{\pi} : M \twoheadrightarrow M/N$ el epimorfismo natural. Definimos la función $g : M \oplus$

$M \to M/N$ por $g((m_1, m_2)) = \overline{\pi}(m_1) + f(m_2)$ con $m_1, m_2 \in M$. Notemos que g es un morfismo, ya que si $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned} rg((m_1, m_2)) &= r(\overline{\pi}(m_1) + f(m_2)) \\ &= r\overline{\pi}(m_1) + rf(m_2) \\ &= \overline{\pi}(rm_1) + f(rm_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= g((rm_1, rm_2)) \\ &= g((r(m_1, m_2)). \end{aligned}$$

Además, si consideramos dos elementos $m, m' \in M \oplus M$ con $m = (m_1, m_2)$ y $m' = (m'_1, m'_2)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} g(m + m') &= g((m_1, m_2) + (m'_1, m'_2)) \\ &= g((m_1 + m'_1, m_2 + m'_2) \\ &= \overline{\pi}(m_1 + m'_1) + f(m_2 + m'_2) \\ &= (\overline{\pi}(m_1) + \overline{\pi}(m'_1)) + (f(m_2) + f(m'_2)) \\ &= (\overline{\pi}(m_1) + f(m_2)) + (\overline{\pi}(m'_1) + f(m'_2)) \\ &= g((m_1, m_2)) + g((m'_1, m'_2)) \\ &= g(m) + g(m'). \end{aligned}$$

Y esto demuestra que g es un morfismo. Pero más aún, g es un epimorfismo, pues si $m + N \in M/N$, entonces podemos considerar $(m, 0) \in M \oplus M$, luego $g(m, 0) = \overline{\pi}(m) + f(0) = m + N$. Entonces, como $M \oplus M$ es seudo proyectivo, existe un endomorfismo $\overline{h} : M \oplus M \to M \oplus M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & M \oplus M \arrow[d, "g"] \arrow[dll, dashed, "\overline{h}"'] \\ M \oplus M \arrow[r, two heads, "\pi_1"] & M \arrow[r, two heads, "\overline{\pi}"] & M/N \end{tikzcd}$$

donde $\pi_1 : M \oplus M \twoheadrightarrow M$ es la proyección. En otros términos, tenemos que $\overline{\pi}\pi_1\overline{h} = g$. Por otra parte, consideremos $i_2 : M \hookrightarrow M \oplus M$ la inclusión en la segunda componente, y sea $h : M \to M$ el endomorfismo definido por $h = \pi_1\overline{h}i_1$. Luego, si $m \in M$, se verifica que

$$\begin{aligned}
(\overline{\pi}h)(m) &= (\overline{\pi}(\pi_1\overline{h}i_2)(m) \\
&= (\overline{\pi}(\pi_1\overline{h}))((0, m)) \\
&= (\overline{\pi}\pi_1\overline{h}))((0, m)) \\
&= g(0, m) \\
&= \overline{\pi}(0) + f(m) \\
&= f(m).
\end{aligned}$$

En otras palabras, h hace que el diagrama siguiente conmute:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, two heads, "\overline{\pi}"] & M/N
\end{tikzcd}$$

De esto se sigue que M es cuasi proyectivo. $\square$

Teorema 2.14. *Si R es un anillo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) R es semisimple,

ii) $R \oplus S$ es seudo proyectivo, para todo R-módulo simple S,

iii) La suma directa de cualesquier dos R-módulos seudo proyectivos es seudo proyectiva,

iv) La suma directa de cualesquier dos R-módulos seudo proyectivos finitamente generados es seudo proyectiva.

Demostración. La demostración es semejante a la del Teorema 1.34. $\square$

Definición 2.15. *Sea M un módulo. Decimos que M es hueco si todo submódulo propio de M es superfluo en M.*

Lema 2.16. *Sea M un módulo y $N \leq M$ un submódulo. Si M es hueco, entonces M/N es hueco.*

Demostración. Sea $L/N \lneq M/N$ un submódulo propio. Supongamos que $L/N + K/N = M/N$, para algún $K \leq N$, lo que implica que $L + K = M$. Además, como M es hueco y $L \lneq M$ es propio, entonces $L \ll M$. Así que $M = K$, luego $K/N = M/N$. Por lo tanto, $L/N \ll M/N$ y, más aun, M/N es hueco. □

A continuación estudiaremos un criterio para conocer un caso en que un módulo seudo proyectivo es cuasi proyectivo.

Proposición 2.17. *Sea M un módulo hueco. Si M es seudo proyectivo, entonces es cuasi proyectivo.*

Demostración. Sean $N \leq M$ un submódulo, $f : M \to M/N$ un morfismo y $\pi : M \twoheadrightarrow M/N$ el epimorfismo natural. Notemos que, si ocurriera que $f(M) = M/N$, sería porque f es un epimorfismo, luego, de la hipótesis resultaría que f se podría levantar a un endomorfismo $g : M \to M$ tal que $\pi g = f$, con lo que podríamos concluir que M es cuasi proyectivo. Dicho esto, supongamos que $f(M) < M/N$ y definamos el morfismo $\varphi : M \to M/N$ por $\varphi = \pi - f$, es decir, $\varphi(M) = \pi(M) - f(M)$, o bien, $\varphi(M) + f(M) = \pi(M)$. Pero π es un epimorfismo, así que $\pi(M) = M/N$, de modo que, $\varphi(M) + f(M) = M/N$. Además, como M es hueco y cocientes de módulos huecos son huecos, resulta que M/N es hueco y, por lo tanto, $\varphi(M) = M/N$, entonces φ es un epimorfismo, y esto implica, por ser M seudo inyectivo, que existe un endomorfismo $g : M \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/N \end{tikzcd}$$

Ahora, consideremos el endomorfismo $Id_M - g : M \to M$ y un elemento $m \in M$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \pi(Id_M - g)(m) &= \pi(m - g(m)) \\ &= \pi(m) - \pi g(m) \\ &= \pi(m) - \varphi(m) \\ &= \pi(m) - (\pi(m) - f(m)) \\ &= f(m). \end{aligned}$$

Es decir, $Id_M - g$ hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "Id_M - g"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/N \end{tikzcd}$$

Lo que desmuestra que, en efecto, M es cuasi proyectivo. □

Lema 2.18. *Sea R un anillo e $I \leq R$ un ideal bilateral. Si M es un R/I-módulo proyectivo, entonces M es un R-módulo seudo proyectivo.*

Demostración. Si M en un R/I-módulo proyectivo, entonces M es un R-módulo cuasi proyectivo, de acuerdo con el Lema 1.40, y esto a su vez implica, que M es un R-módulo seudo proyectivo. □

Lema 2.19. *Sea R un anillo e $I \leq R$ un ideal bilateral. Entonces M es un R/I-módulo seudo proyectivo si y solo si M es un R-módulo seudo proyectivo tal que $IM = \{0\}$.*

Demostración. La demostración es análoga a la del Lema 1.41. □

2.3. Anillos artinianos de ideales principales II.

Estimamos que esta sección, en la que presentamos dos teoremas, unifica el trabajo realizado a lo largo de la tesis. Luego de concluir que la propiedad de que todo R-módulo cuasi inyectivo sea cuasi proyectivo, así como la propiedad de que todo R-módulo cuasi proyectivo sea cuasi inyectivo, identifican a los anillos artinianos de ideales principales, resultó natural preguntarnos si estos mismos anillos verifican dichas propiedades para el caso de la seudo inyectividad y la seudo proyectividad. Nosotros conseguimos demostrar que un anillo que cuente con estas cualidades, necesariamente pertenece a esa clase de anillos. Sin embargo, no logramos corroborar la equivalencia. Si bien, conjeturamos que no se verifica, no hemos obtenido un contraejemplo que de valor a esta hipótesis.

Teorema 2.20. *Sea R un anillo. Si todo R-módulo seudo inyectivo es seudo proyectivo, entonces R es artiniano de ideales principales.*

Demostración. Sea $I \leq R$ un ideal bilateral. Es conveniente observar que si todo R-módulo seudo inyectivo es un R-módulo seudo proyectivo, entonces todo R/I-módulo seudo inyectivo es un R/I-módulo seudo proyectivo. Efectivamente, si M es un R/I-módulo seudo inyectivo, el Lema 2.10 nos asegura que M es un R-módulo seudo inyectivo tal que $IM = \{0\}$. Luego, de la hipótesis se obtiene que M es un R-módulo seudo proyectivo, pero además, M es tal que $IM = \{0\}$, es decir, M es un R/I-módulo seudo proyectivo. Dicho esto, sea M un R/I-módulo inyectivo. Entonces $(M \oplus M)^{(2)}$ es inyectivo y, por lo tanto, $(M \oplus M)^{(2)}$ es un R/I-módulo seudo inyectivo. Luego, de la hipótesis junto con la observación previa, se sigue que $(M \oplus M)^{(2)}$ es un R/I-módulo seudo proyectivo. Esto implica, en virtud del Teorema 2.13, que $M \oplus M$ es un R/I-módulo cuasi proyectivo. En este caso, el Teorema 1.38 nos garantiza que M es un R/I-módulo proyectivo. Concluimos que R/I es un anillo cuasi Frobenius o, lo que es equivalente, R es artiniano de ideales principales. $\square$

Teorema 2.21. *Sea R un anillo. Si todo R-módulo seudo proyectivo es seudo inyectivo, entonces R es artiniano de ideales principales.*

Demostración. Sea $I \leq R$ un ideal bilateral. Observemos que, si todo R-módulo seudo proyectivo es un R-módulo seudo inyectivo, entonces todo R/I-módulo seudo proyectivo es un R/I-módulo seudo inyectivo. Desde luego, si M es un R/I-módulo seudo proyectivo, el Lema 2.19 nos indica que M es un R-módulo seudo proyectivo tal que $IM = \{0\}$. Luego, por hipótesis, M es un R-módulo seudo inyectivo, y además es tal que $IM = \{0\}$. Esto equivale, a la luz del Lema 2.10, a que M es un R/I-módulo seudo inyectivo. Por otra parte, sea F un R/I-módulo libre, entonces F es proyectivo, y por tanto, $F \oplus F$ es proyectivo, tenemos entonces que $F \oplus F$ es un R/I-módulo seudo proyectivo. Luego, de la hipótesis, a la par de la observación anterior, resulta que $F \oplus F$ es un R/I-módulo seudo inyectivo, lo que implica, en vista del Teorema 2.3, que F es un R/I-módulo cuasi inyectivo. Además, por ser F un R/I-módulo libre, existe un submódulo $N \leq F$ tal que $N \cong R/I$, pero entonces F es un R/I-módulo inyectivo, de acuerdo con la Proposición 1.15. Resulta que R/I es un anillo cuasi Frobenius, para todo $I \leq R$ ideal bilateral o, dicho de otro modo, R es un anillo artiniano de ideales principales. $\square$

Bibliografía

[1] Al-Ahmadi, A., Er, N., Jain, S. *Modules which are invariant under monomorphisms of their injective hulls*, J Aust. Math. Soc. **79**(3) (2005), 349–360.

[2] An, L., Tai, D. *Characterized rings by pseudo-injective modules*, VNU J. Sci. Math. Physics **24**(2)(2008), 67–71.

[3] Anderson F. W., Fuller K. R. *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag, 1974.

[4] Armendariz, E. *Quasi-injective modules and stable torsion classes*, Pacific J. Math. **31**(2) (1969), 277–280.

[5] Asensio, P., Keskin, D., Kalebogãz, B., Srivastava, A. *Modules which are coinvariant under automorphisms of their projective covers*, J. Algebra **466** (2016), 147-152.

[6] Baba, Y. *Injectivity of quasi-projective modules, projectivity of quasi-injective modules, and projective cover of injective modules*, J. Algebra **155**(2) (1993), 415–434.

[7] Beachy, J. *A generalization of injectivity*, Pacific J. Math. **41**(2) (1972), 313–327.

[8] Bharadwaj, P., Jaiswal, R. *On pseudo-projective and essentially pseudo-injective modules* **6**(9) (2011), 415–422.

[9] Bican, L., Jambor, P., Kepka, T., Němec, P. *Pseudoprojective modules*, Math Slovaca. **29**(2) (1979), 106–115.

[10] Byrd, K. A. *Rings whose quasi-injective modules are injective*, Proc. Amer. Math. Soc. **33**(2) (1972), 235–240.

[11] Byrd, K. A. *Some characterizations of uniserial rings*, Math. Ann. **186** (1970), 163–170.

[12] Byrd, K. A. *When are quasi-injectives injective?*, Canad. Math. Bull. **15**(4) (1972), 599–600.

[13] Dinh, H. Q. *A note on pseudo-injective modules*, Comm. Algebra **33**(2) (2005) 361–369.

[14] Dinh, H. Q., Holston C., Huynh V. *Quasi-projective modules over prime hereditary noetherian V-rings are projective or injective*, J. A lgebra **360** (2012), 87–91.

[15] Dauns, J. *Generalized monoform and quasi-injective modules*, Pacific J. Math. **66**(1) (1976), 49–65.

[16] Dauns J., Zhou Y. *QI-modules*, Modules and Comodules. Trends in Mathematics, (2008), 173–183.

[17] Er, N., Singh, S., Srivastava, A. *Rings and modules which are stable under automorphism of their injective hulls*, **379** (2013), 223-229.

[18] Faith, C. *Algebra II Ring Theory*, Grundlehren der Matematischen Wissenschaften 191, Springer-Verlag, (1976).

[19] Faith, C., Walker E. A. *Direct-sum representations of injective modules*, J. Algebra **5**(3) (1967), 203 – 221.

[20] Fuller, K. *On direct representations of quasi-injectives and quasi-projectives*, Arch. Math. **20**(5) (1969), 495–502.

[21] Golan, J. S. *Characterization of rings using quasiprojective modules*, Israel J. Math. **8**(1) (1970), 34–38.

[22] Golan, J. S. *Characterization of rings using quasiprojective modules II*, Proc. Amer. Math. Soc. **28**(2) (1971) 337–343.

[23] Golan, J. S. *Characterization of rings using quasiprojective modules III*, Proc. Amer. Math. Soc. **31**(2) (1972) 401–408.

[24] Harada, M. *Note on quasi-injective modules*, Osaka J. Math. **2**(2) (1965), 351–356.

[25] Jain, S., Lṕez-Permouth, S., Singh, S. *On a class of QI-rings*, Glasgow Math. J. **34**(1) (1992), 75-81.

[26] Jain, S., Singh, S. *On pseudo injective modules and self pseudo injective rings*, J. Math. Sci. **2**(1) (1967), 23-31.

[27] Jain, S., Singh, S. *Quasi-injective and pseudo-injective modules*, Canad. Math. Bull. **18**(3) (1975), 359–366.

[28] Johnson R.E., Wong E.T. *Quasi-Injective modules and irreducible rings*, J. London Math. Soc. **36**(1) (1961), 260–268.

[29] Kasch, F. *Modules and Rings*, Academic Press (1982).

[30] Keskin, D., Kuratomi, Y. *On epi-projective modules*, East-West J. Math. **10**(1) (2008), 27–35.

[31] Koehler, A. *Quasi-projective covers and direct sums*, Proc. Amer. Math. Soc. **24**(4) (1970), 655–658.

[32] Koehler, A. *Quasi-projective and quasi-injective modules*, Pacific J. Math. **36**(3) (1971), 713–720.

[33] Lam, T. Y. *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, 1999.

[34] Morita, K. *On S-rings in the sense of F. Kasch*, Nagoya Math. J. **27**(2) (1966), 687-695.

[35] Nicholson, W., Yousif, M. *Quasi-Frobenius Rings*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press. (2003).

[36] Pandeya, B. M., Tiwary, A. K. *Pseudo projective and pseudo injective*, Indian J. Pure Appl. Math. **9**(9) (1978), 941–949.

[37] Singh, S., Srivastava, A. *Dual automorphism-invariant modules*, J. Algebra **371** (2012), 262–275.

[38] Teply, M. L. *Pseudo-injective modules which are not quasi-injective*, Proc. Amer. Math. Soc. **49**(2) (1975), 305–310.

[39] Tuganbaev, A. A. *Automorphism-invariant modules*, J. Math. Sci. **206**(6) (2015), 694–698.

[40] Tuganbaev, A. A. *Automorphism-invariant non-singular rings and modules*, J. Algebra **485** (2017), 247–253.

[41] Wisbauer, R. *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers (1991).

[42] Wu, L. E. T., Jans, J. P. *On quasi projectives*, Illinois J. Math. **11**(3) (1967), 439–448.