UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONDICIONES NECESARIAS PARA ENCONTRAR SOLUCIONES INVARIANTES PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS USANDO GRUPOS DE LIE.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

NOMBRE DEL TESISTA :
MIGUEL ÁNGEL GÁLVEZ CASTILLO

DIRECTOR DE TESIS:
MATEMÁTICO JOSÉ JUAN LEY MANDUJANO

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2018

Hoja de Datos del Jurado

1. **Datos del alumno**
   Apellido paterno: Gálvez
   Apellido materno: Castillo
   Nombre(s): Miguel Ángel
   Teléfono: 5532837474
   Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad o escuela: Facultad de Ciencias
   Carrera: Licenciatura en Matemáticas
   Número de cuenta: 412049732

2. **Datos del tutor**
   Grado: Matemático
   Nombre(s): José Juan
   Apellido paterno: Ley
   Apellido materno: Mandujano

3. **Datos del sinodal 1**
   Grado: Doctor
   Nombre(s): Jesús
   Apellido paterno: López
   Apellido materno: Estrada

4. **Datos del sinodal 2**
   Grado: Doctor
   Nombre(s): Renato Carlos
   Apellido paterno: Calleja
   Apellido materno: Castillo

5. **Datos del sinodal 3**
   Grado: Doctora
   Nombre(s): Catherine
   Apellido paterno: García
   Apellido materno: Reimbert

6. **Datos del sinodal 4**
   Grado: Doctor
   Nombre(s): José Lino
   Apellido paterno: Samaniego
   Apellido materno: Mendoza

7. **Datos del trabajo escrito**
   Título: CONDICIONES NECESARIAS PARA ENCONTRAR SOLUCIONES INVARIANTES PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS USANDO GRUPOS DE LIE
   Número de páginas: 81 p
   Año: 2018

Índice general

Agradecimientos **3**

Introducción **5**

Tabla de Notación **7**

1. Preliminares **9**
- 1.1. Grupos 10
- 1.2. Grupos de Transformaciones 10
- 1.3. Transformaciones Infinitesimales 13
- 1.4. Generadores Infinitesimales 16
- 1.5. Curvas y Superficies Invariantes 20
- 1.6. Funciones Invariantes 25
- 1.7. Coordenadas Canónicas 27
- 1.8. Transformaciones Extendidas 32

2. Invarianza de una EDO y aplicaciones **39**
- 2.1. Invarianza de una Ecuación Diferencial Ordinaria 39
  - 2.1.1. Transformación de Soluciones de una EDO 44
- 2.2. EDO's de Primer Orden 46
  - 2.2.1. Coordenadas Canónicas 47
  - 2.2.2. Factores Integrantes 50
- 2.3. Ecuación para los infinitesimales de una EDO 52
  - 2.3.1. EDO de primer orden 52
  - 2.3.2. EDO de n-ésimo orden 53

3. Construcción de Soluciones Invariantes **59**
- 3.1. Soluciones Invariantes 59
- 3.2. Teorema para Soluciones Invariantes 60
- 3.3. Soluciones invariantes para EDO's de primer orden 67
  - 3.3.1. Ecuación de Clairaut en Coordenadas Canónicas 75

Conclusiones **79**

Bibliografía **81**

Agradecimientos

Al profesor José Juan Ley Mandujano, director de tesis, quién con su orientación, apoyo y confianza fue posible desarrollar este trabajo.

A mis padres Alicia y Eduardo, ya que gracias a su apoyo incondicional he conseguido alcanzar este gran logro académico.

A mis hermanos y canelo, que siempre estuvieron atentos y dispuestos a colaborar en mi formación aún cuando no estuvieran cerca de manera física.

A mis compañeros y amigos más cercanos, aquéllos que me han acompañado y apoyado desde que los conocí.

A todos a quienes de una u otra forma colaboraron en mi formación académica, mil gracias.

Introducción

Normalmente, en los cursos iniciales de ecuaciones diferenciales, uno aprende una serie de técnicas que permiten resolver un grupo específico de ecuaciones diferenciales tales como las de Bernoulli, Euler, las separables, homogéneas o exactas. Estas técnicas fueron apareciendo paulatinamente hasta que aparecieron los grupos de Lie (en honor a Sophus Lie) y se demostró que todas estas técnicas eran casos particulares de un procedimiento general basado en encontrar grupos que transformaran soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales en otras soluciones del mismo sistema, es decir grupos de simetría para el sistema de ecuaciones diferenciales.

Además de conducirnos a los grupos de Lie y a los grupos de transformaciones, la teoría de Lie nos lleva a un algoritmo para encontrar soluciones explícitas a las ecuaciones diferenciales admitidas por estos grupos. Estas soluciones especiales son llamadas soluciones invariantes y constituyen prácticamente cualquier solución explícita conocida a los sistemas no lineales de EDO's y EDP's que surgen en la física y la geometría diferencial.

En el primer capítulo se desarroran los resultados necesarios para entender este tema, basándonos en las siguientes definiciones: grupos, grupos de transformaciones, transformaciones y generadores infinitesimales, curvas y superficies invariantes, funciones invariantes, coordenadas canónicas y transformaciones extendidas.

El segundo capítulo nos introduce la noción de invarianza de una EDO bajo un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico. De esta definición surge el Criterio Infinitesimal para la Invarianza, el cuál nos sirve, entre otras cosas, para encontrar los infinitesimales admitidos por una EDO. Al estudiar las EDO's de primer orden se muestra que podemos encontrar su solución general ya sea mediante el uso de coordenadas canónicas o determinando un factor integrante.

En el tercer capítulo se demuestra un teorema que prueba que no es necesario encontrar explícitamente todas las curvas de un grupo admitido por una EDO para determinar cuáles curvas invariantes son soluciones invariantes. Dicho teorema dice que las soluciones invariantes de una EDO se encuentran esencialmente resolviendo ecuaciones algebraicas obtenidas de la EDO dada y los infinitesimales del grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico.

Las soluciones invariantes son especialmente interesantes para las EDO's de primer orden, ya que si existen soluciones separatrices y/o envolventes, éstas son soluciones invariantes para todo grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico no trivial admitido por la EDO.

Se comparará la solución encontrada por métodos convencionales y la encontrada por grupos de Lie para EDO's, estableciendo una relación entre ambas. Algunos ejemplos que se analizan bajo esta idea, son la ecuación de Blasius y la ecuación de Clairaut.

En resumen, esta tesis se presentan resultados generales en la construcción algebraica y el significado geométrico de soluciones invariantes de EDO's.

Objetivos

Los objetivos de la tesis son:

1. Encontrar la transformación infinitesimal (grupo) a través de los infinitesimales del mismo. *Series de Lie o PVI planteado en el Primer Teorema Fundamental de Lie*

2. Determinar cuando un grupo es admitido por una EDO, es decir, cuando la familia de curvas solución de la EDO es invariante bajo dicho grupo. *Criterio Infinitesimal para la Invarianza de una EDO*

3. Encontrar explícitamente todos los grupos admitidos por una EDO y, recíprocamente, encontrar la EDO admitida por un grupo de transformaciones. *Criterio Infinitesimal para la Invarianza de una EDO*

4. Encontrar la solución general de una EDO de primer orden que sea invariante bajo un grupo de transformaciones. *Coordenadas Canónicas y Factor Invariante*

5. Encontrar soluciones invariantes de una EDO de manera constructiva.

6. Encontrar soluciones invariantes de una EDO sin resolver la misma EDO o alguna otra. *Teorema para Soluciones Invariantes*

7. Encontrar soluciones invariantes de una EDO de primer orden que sean separatrices y/o envolventes. *Teorema para Soluciones Invariantes*

Tabla de Notación

$\varphi : G \to H$ Homomorfismo de grupos; pág 10

$x^* = X(x; \epsilon)$ Grupo/conjunto de transformaciones uniparamétrico; pág 10

$O(\epsilon^2)$ Residuo de orden mayor a 2 de la expansión de Taylor; pág 13

$x + \epsilon\xi(x)$ Transformación infinitesimal de un grupo; pág 13

$\xi(x)$ Infinitesimal de un grupo de transformaciones; pág 13

$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ Generador infinitesimal de un grupo; pág 16

$y_i^* = Y_i(x, y, y_1, ..., y_i; \epsilon)$ K-ésima extensión del grupo; pág 35

$\eta^{(k)}(x, y, y_1, ..., y_k)$ Infinitesimal k-ésimo extendido; pág 35

$\mathbf{X}^{(k)}$ Generador infinitesimal k-ésimo extendido; pág 35

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ Operador gradiente; pág 17

$\frac{D}{Dx}$ Operador derivada total; pág 33

$y_k = y^{(k)} = \dfrac{d^k y}{dx^k}$ k-ésima derivada de y respecto de x; pág 32

$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ EDO de n-ésimo orden; pág 39

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo introduce las ideas básicas de grupos de Lie de transformaciones necesarias para el estudio de las propiedades de invarianza de las ecuaciones diferenciales.

Se demuestra el Primer Teorema Fundamental de Lie el cual nos dice que la transformación infinitesimal es indispensable para determinar el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico.

Así llegamos a que existen dos formas para encontrar de manera explícita dicho grupo desde su transformación infinitesimal:
(i) Expresando el grupo en términos de una serie de potencias, llamado *Series de Lie*, el cual es desarrollado desde el generador infinitesimal correspondiente a la transformación infinitesimal;
(ii) Resolver el problema del valor inicial presentado en el Primer Teorema Fundamental de Lie.

Si conocemos un grupo admitido por una EDO, podemos reducir un grupo uniparamétrico al grupo de traslaciones con la introducción de coordenadas canónicas. Debido a que una ecuación conserva el grupo de simetrías, es independiente de la elección de las variables.

Para encontrar el grupo admitido por una ecuación diferencial necesitaremos saber como prolongar la acción del grupo de transformaciones que actúa en el espacio de las variables independientes y dependientes para que también actue sobre las derivadas de estas. Por supuesto el siguiente paso es prolongar o extender su generador infinitesimal.

1.1. Grupos

Definicion 1.1 Un grupo (G, ϕ) es un conjunto G no vacío de elementos con una ley de composición ϕ entre elementos que satisface los siguientes axiomas:
(i) *Propiedad de cerradura*: Para cualesquiera elementos a y b de G, $\phi(a,b)$ es un elemento de G.
(ii) *Propiedad de asociatividad*: Para cualesquiera elementos a,b y c de G,
$\phi(a, \phi(b,c)) = \phi(\phi(a,b), c)$.
(iii) *Elemento identidad*: Existe un único elemento de G llamado identidad, denotado como "e", tal que para cualquier elemento a de G,
$\phi(a,e) = \phi(e,a) = a$.
(iv) *Elemento inverso*: Para cualquier elemento a de G existe un único elemento inverso a^{-1} en G tal que
$\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e$.

Definición 1.2 Sea S un subconjunto no vacío de un grupo (G, ϕ). Decimos que (S, ϕ) es un subgrupo de (G, ϕ), el cual se denota con S$\leq$G, si las siguientes dos condiciones se satisfacen.
(a) $s^{-1} \in S$ para cualquier $s \in S$.
(b) $\phi(s, t) \in S$ para cualesquiera $s, t \in S$.

Definición 1.3 Sean (G, ϕ) y (H, μ) dos grupos, decimos que un homomorfismo de grupos es una función $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$
$\varphi(\phi(g_1, g_2)) = \mu(\varphi(g_1), \varphi(g_2))$.

$\star$ **Observación** Se sigue inmediatamente de la definición que φ manda el elemento identidad de G e_G al elemento identidad de H e_H, puesto que
$\varphi(e_G) = \varphi(\phi(g, e_G)) = \varphi(\phi(e_G, g)) = \mu(\varphi(e_G), \varphi(g)) = \mu(\varphi(g), \varphi(e_G))$, y por (iii) de la Definición 1.1 tenemos que $\varphi(e_G) = e_H$.
De ésto último concluimos que
$\mu(\varphi(g), \varphi(g^{-1})) = \varphi(\phi(g, g^{-1})) = \varphi(e_G) = e_H$, y por (iv) de la Definición 1.1 tenemos que $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$.

1.2. Grupos de Transformaciones

Definición 1.4 Sea D un dominio (subconjunto abierto y conexo de un espacio vectorial) y $\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_n) \in$ D$\subset \mathbb{R}^n$. El conjunto de transformaciones

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon), \tag{1.1}$$

definido para cada $\mathbf{x}$ en D, dependiente de un parámetro $\epsilon \in$ S$\subset \mathbb{R}$, con $\phi(\epsilon, \delta)$ definiendo una ley de composición de parámetros ϵ y δ en S, forma un grupo de transformaciones en D si:
(i) Para cada parámetro ϵ en S las transformaciones son biyectivas en el conjunto D, en particular para $\mathbf{x}^* \in$D.
(ii) S con la ley de composición ϕ forma un grupo (G, ϕ).

(iii) $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ cuando $\epsilon = e$, es decir $\mathbf{X}(\mathbf{x}; e) = \mathbf{x}$.
(iv) Si $\mathbf{x}^*$=$\mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)$, $\mathbf{x}^{**}$=$\mathbf{X}(\mathbf{x}^*;\delta)$, entonces $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta))$.

Definición 1.5 Un grupo de transformaciones define un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (ϵ) que además satisface los axiomas (i)-(iv) de la Definición 1.4:
(v) ϵ es un parámetro continuo, es decir, S es un intervalo en $\mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad, $\epsilon = 0$, corresponde al elemento identidad e.
(vi) $\mathbf{X}$ es infinitamente diferenciable con respecto a $\mathbf{x}$ en D y también es una función analítica de ϵ en S.
(vii) $\phi(\epsilon, \delta)$ es una función analítica de ϵ y δ, $\epsilon \in$ S, $\delta \in$ S.

Ejemplos de grupos de Lie de transformaciones uniparamétrico

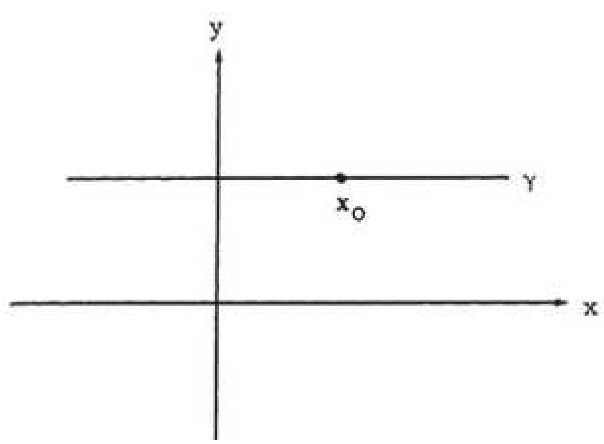
(1) *Un Grupo de Traslaciones en el Plano:*

$$\mathbf{X}(x, y; \epsilon) = (x^*, y^*) = (x + \epsilon, y),\ \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Notemos que $\mathbf{X}(x^*, y^*; \delta) = (x + \epsilon + \delta, y)$ y $\mathbf{X}(x, y; \phi(\epsilon, \delta)) = (x + \phi(\epsilon, \delta), y)$. De la propiedad (iv) de la Definición 1.4 tenemos que $\mathbf{X}(x^*, y^*; \delta) = \mathbf{X}(x, y; \phi(\epsilon, \delta))$. Por lo tanto $\phi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$.

Ahora usando la propiedad (iii) tenemos que $(x + e, y) = \mathbf{X}(x, y; e) = (x, y)$, de donde concluimos que $e = 0$.

Este grupo corresponde a movimientos paralelos al eje x. En la figura la curva γ representa los cambios de $\mathbf{x}$ sobre los elementos del grupo.



(2) *Un Grupo de Homotecias en el Plano:*

$\mathbf{X}(x,y;\epsilon) = (x^*, y^*) = (\alpha x, \alpha^2 y)$, $0 < \alpha < \infty$.

Aquí $\phi(\alpha,\beta) = \alpha\beta$ y el elemento identidad $e = 1$. Este grupo de transformaciones también puede ser reparametrizado en términos de $\epsilon = \alpha - 1$:

$\mathbf{X}(x,y;\epsilon) = (x^*, y^*) = ((1+\epsilon)x, (1+\epsilon)^2 y)$, $-1 < \epsilon < \infty$.

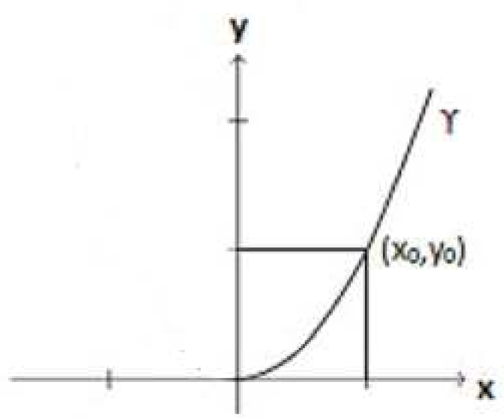
Notemos que $\mathbf{X}(x^*, y^*; \delta) = ((1+\epsilon)(1+\delta)x, (1+\epsilon)^2(1+\delta)^2 y)$ y $\mathbf{X}(x,y;\phi(\epsilon,\delta)) = ((1+\phi(\epsilon,\delta))x, (1+\phi(\epsilon,\delta))^2 y)$.

De la propiedad (iv) de la Definición 1.4 obtenemos $1 + \phi(\epsilon,\delta) = (1+\epsilon)(1+\delta) = 1 + \epsilon + \delta + \epsilon\delta$.

Por lo tanto $\phi(\epsilon,\delta) = \epsilon + \delta + \epsilon\delta$.

Ahora usando la propiedad (iii) tenemos que $((1+e)x, (1+e)^2 y) = \mathbf{X}(x,y;e) = (x,y)$, de donde concluimos que $e = 0$.

En la siguiente figura se muestran los cambios de $\mathbf{x}$ sobre los elementos del grupo, representados por la curva γ.



1.3. Transformaciones Infinitesimales

Definición 1.6 Considere un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (ϵ)

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon) \tag{1.2}$$

con identidad $\epsilon = 0$ y ley de composición ϕ. Por el teorema de Taylor podemos expandir (1.2) sobre $\epsilon = 0$, obtenemos (para alguna vecindad de $\epsilon = 0$)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* &= \mathbf{x} + \epsilon\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \epsilon}(\mathbf{x};\epsilon)\Big|_{\epsilon=0}\right) + \frac{\epsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \epsilon^2}(\mathbf{x};\epsilon)\Big|_{\epsilon=0}\right) + \dots \\ &= \mathbf{x} + \epsilon\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \epsilon}(\mathbf{x};\epsilon)\Big|_{\epsilon=0}\right) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Sea

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \epsilon}(\mathbf{x};\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} \tag{1.4}$$

La transformación $\mathbf{x} + \epsilon\xi(\mathbf{x})$ es llamada la **transformación infinitesimal** del grupo de Lie de transformaciones (1.2); las componentes de $\xi(\mathbf{x})$ son llamadas los **infinitesimales** de (1.2).

Lema 1.7

$$\mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon + \Delta\epsilon) = \mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon);\phi(\epsilon^{-1},\epsilon + \Delta\epsilon)). \tag{1.5}$$

Demostración

Usando (iv) de la Definición 1.4 y (ii), (iv), (iii) de la Definición 1.1:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon);\phi(\epsilon^{-1},\epsilon + \Delta\epsilon)) &= \mathbf{X}(\mathbf{x};\phi(\epsilon,\phi(\epsilon^{-1},\epsilon + \Delta\epsilon))) \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{x};\phi(\phi(\epsilon,\epsilon^{-1}),\epsilon + \Delta\epsilon)) \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{x};\phi(0,\epsilon + \Delta\epsilon)) \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon + \Delta\epsilon). \qquad \square\end{aligned}$$

Teorema 1.8 (*Primer Teorema Fundamental de Lie*). Existe una parametrización $\tau(\epsilon)$ tal que el grupo de Lie de transformaciones (1.2) es equivalente a la solución del problema del valor inicial para el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\tau} = \xi(\mathbf{x}^*), \tag{1.6}$$

con

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \quad \textit{cuando} \quad \tau = 0 \tag{1.7}$$

En particular

$$\tau(\epsilon) = \int_0^\epsilon \Gamma(\epsilon^\star)d\epsilon^\star \tag{1.8}$$

donde

$$\Gamma(\epsilon) = \left.\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\right|_{(a,b)=(\epsilon^{-1},\epsilon)} \tag{1.9}$$

y

$$\Gamma(0) = 1. \tag{1.10}$$

[ϵ^{-1} denota el elemento inverso de ϵ.]

Demostración

Primero mostremos que (1.2) conduce (1.6), (1.7), (1.8), (1.9). Expandiendo el lado izquierdo de (1.5) en una serie de potencias en $\Delta\epsilon$ alrededor de $\Delta\epsilon = 0$ tenemos que

$$\mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon+\Delta\epsilon) = \mathbf{x}^* + \frac{\partial\mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)}{\partial\epsilon}\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2) \tag{1.11}$$

donde $\mathbf{x}^*$ está dado por (1.2). Entonces expandiendo $\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon)$ en una serie de potencias en $\Delta\epsilon$ alrededor de $\Delta\epsilon = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon) &= \phi(\epsilon^{-1},\epsilon) + \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2)\\ &= \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2)\end{aligned}$$

donde $\Gamma(\epsilon)$ está definido por (1.9). Como consecuencia, después de expandir el lado derecho de (1.5) en una serie de potencias en $\Delta\epsilon$ alrededor de $\Delta\epsilon = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon+\Delta\epsilon) &= \mathbf{X}(\mathbf{x}^*;\phi(\epsilon^{-1},\epsilon+\Delta\epsilon))\\ &= \mathbf{X}(\mathbf{x}^*;\Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2))\\ &= \mathbf{X}(\mathbf{x}^*;0) + \Delta\epsilon\Gamma(\epsilon)\left.\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\delta}(\mathbf{x}^*;\delta)\right|_{\delta=0} + O((\Delta\epsilon)^2)\\ &= \mathbf{x}^* + \Gamma(\epsilon)\xi(\mathbf{x}^*)\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2).\end{aligned} \tag{1.12}$$

Igualando (1.11) y (1.12) vemos que $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x},\epsilon)$ satisface el problema del valor inicial para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon} = \Gamma(\epsilon)\xi(\mathbf{x}^*) \tag{1.13}$$

con

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \qquad en \qquad \epsilon = 0. \tag{1.14}$$

Si evaluamos (1.13) en $\epsilon = 0$, es decir $\left.\frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \Gamma(0)\ \xi(\mathbf{x}^*)|_{\epsilon=0}$, entonces $\xi(\mathbf{x}) = \Gamma(0)\xi(\mathbf{X}(\mathbf{x},0)) = \Gamma(0)\xi(\mathbf{x})$, por lo que se concluye que $\Gamma(0) = 1$.

La parametrización $\tau(\epsilon) = \int_0^\epsilon \Gamma(\epsilon')d\epsilon'$ nos lleva a lo siguiente

$$\begin{aligned}
\Gamma(\epsilon)\xi(\mathbf{x}^*) &= \frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon} \\
&= \frac{d\mathbf{x}^*}{d\tau}\frac{d\tau}{d\epsilon} \qquad \textit{por la regla de la cadena} \\
&= \frac{d\mathbf{x}^*}{d\tau}\frac{d}{d\epsilon}\int_0^\epsilon \Gamma(\epsilon')d\epsilon' \\
&= \frac{d\mathbf{x}^*}{d\tau}\Gamma(\epsilon) \qquad \textit{por el Teorema Fundamental del Calculo}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\dfrac{d\mathbf{x}^*}{d\tau} = \xi(\mathbf{x}^*)$, lo que nos conduce a (1.6),(1.7).

Debido a que $\frac{\partial\xi}{\partial x_i}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es continua, se sigue del teorema de existencia y unicidad para un problema de valor inicial (PVI) para un sistema ecuaciones diferenciales de primer orden, que la solución de (1.6), (1.7), y por lo tanto de (1.13), (1.14), existe y es única. Ésta solución es (1.2), completando la demostración. □

El Primer Teorema Fundamental de Lie muestra que la transformación infinitesimal contiene la información esencial para determinar un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico.

Ejemplos Ilustrativos del Primer Teorema Fundamental de Lie

(1) Grupo de Traslaciones en el Plano

Para el grupo de traslaciones

$$\begin{aligned}
x^* &= x + \epsilon, && (1.15) \\
y^* &= y, && (1.16)
\end{aligned}$$

la ley de composición es $\phi(a, b) = a + b$, y $\epsilon^{-1} = -\epsilon$. Entonces $\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b} = 1$ y por lo tanto $\Gamma(\epsilon) \equiv 1$.
Sea $\mathbf{x} = (x, y)$. Entonces el grupo (1.15),(1.16) es $\mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon) = (x + \epsilon, y)$. Por tanto $\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\epsilon}(\mathbf{x}; \epsilon) = (1, 0)$. Por ello

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\epsilon}(\mathbf{x}; \epsilon)\bigg|_{\epsilon=0} = (1, 0).$$

En consecuencia (1.6),(1.7) se convierte en

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = 1, \quad \frac{dy^*}{d\epsilon} = 0, \tag{1.17}$$

con

$$x^* = x, \quad y^* = y \quad en \quad \epsilon = 0. \tag{1.18}$$

Es fácil notar que la solución al Problema del Valor Inicial (PVI)(1.17),(1.18) es (1.15),(1.16).

(2) Grupo de Homotecias

Para el grupo de homotecias

$$\begin{aligned} x^* &= (1+\epsilon)x, & (1.19)\\ y^* &= (1+\epsilon)^2 y, \quad -1<\epsilon<\infty, & (1.20)\end{aligned}$$

la ley de composición es $\phi(a,b)=a+b+ab$, y $\epsilon^{-1}=-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. Aquí $\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}=1+a$ y por tanto

$$\Gamma(\epsilon)=\left.\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\right|_{(a,b)=(\epsilon^{-1},\epsilon)}=1+\epsilon^{-1}=\frac{1}{1+\epsilon}.$$

Sea $\mathbf{x}=(x,y)$. Entonces el grupo (1.19),(1.20) es $\mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)=((1+\epsilon)x,(1+\epsilon)^2y)$.

Por tanto $\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\epsilon}(\mathbf{x};\epsilon)=(x,2(1+\epsilon)y)$ y

$$\xi(\mathbf{x})=\left.\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\epsilon}(\mathbf{x};\epsilon)\right|_{\epsilon=0}=(x,2y).$$

Como resultado (1.6),(1.7) se convierte en

$$\frac{dx^*}{d\epsilon}=\frac{x^*}{1+\epsilon},\quad \frac{dy^*}{d\epsilon}=\frac{2y^*}{1+\epsilon}, \tag{1.21}$$

con

$$x^*=x,\quad y^*=y\quad en\quad \epsilon=0. \tag{1.22}$$

Por supuesto la solución al PVI (1.21),(1.22) es (1.19),(1.20).
En términos de la parametrización

$$\tau=\int_0^\epsilon\Gamma(\epsilon')d\epsilon'=\int_0^\epsilon\frac{1}{1+\epsilon}d\epsilon'=\log(1+\epsilon),$$

el grupo (1.19),(1.20) se convierte en

$$\begin{aligned} x^* &= e^\tau x,\\ y^* &= e^{2\tau}y, \quad -\infty<\tau<\infty,\end{aligned}$$

con la ley de composición $\phi(\tau_1,\tau_2)=\tau_1+\tau_2$.

1.4. Generadores Infinitesimales

Definición 1.9 El **generador infinitesimal** de un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico $\mathbf{x}^*=\mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)$ es el operador

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x})=\xi(\mathbf{x})\cdot\nabla=\sum_{i=1}^n\xi_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.23}$$

donde ∇ es el operador gradiente,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right); \tag{1.24}$$

para cualquier función diferenciable $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\mathbf{X}F(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) \cdot \nabla F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Notemos que $\mathbf{X}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i = \xi(\mathbf{x})$, donde los $\mathbf{e}_i$ son los vectores canónicos.

Se sigue que un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico, el cual debido al Primer Teorema Fundamental de Lie es equivalente a su transformación infinitesimal, es también equivalente a su generador infinitesimal. El siguiente teorema muestra que el uso del generador infinitesimal (1.23) nos lleva a un algoritmo para encontrar la solución explícita al Problema de Valor Inicial

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon} = \xi(\mathbf{x}^*), \tag{1.25}$$

con

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \quad en \quad \epsilon = 0. \tag{1.26}$$

Teorema 1.10 El grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)$ es equivalente a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= e^{\epsilon \mathbf{X}}\mathbf{x} = \mathbf{x} + \epsilon \mathbf{X}\mathbf{x} + \frac{\epsilon^2}{2}\mathbf{X}^2\mathbf{x} + \ldots \\ &= [1 + \epsilon \mathbf{X} + \frac{\epsilon^2}{2}\mathbf{X}^2 + \ldots]\mathbf{x} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\mathbf{X}^k\mathbf{x} \end{aligned} \tag{1.27}$$

donde el operador $\mathbf{X}$=$\mathbf{X}(\mathbf{x})$ está definido por (1.23) y el operador $\mathbf{X}^k = \mathbf{X}\mathbf{X}^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$; en particular $\mathbf{X}^k F(\mathbf{x})$ es la función obtenida al aplicar el operador $\mathbf{X}$ a la función $\mathbf{X}^{k-1}F(\mathbf{x}), k = 1, 2, \ldots$, con $\mathbf{X}^0 F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x})$.

Demostración

Sea

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

y

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}^*) \frac{\partial}{\partial x_i^*}$$

donde

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon) \qquad\qquad (*)$$

es el grupo de Lie de transformaciones $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)$. Del teorema de Taylor, expandiendo $(*)$ alrededor de $\epsilon = 0$, tenemos

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left(\left. \frac{\partial^k \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)}{\partial \epsilon^k} \right|_{\epsilon=0} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left(\left. \frac{d^k \mathbf{x}^*}{d\epsilon^k} \right|_{\epsilon=0} \right).$$

Notemos que para cualquier función diferenciable $F(\mathbf{x})$,

$$\frac{d}{d\epsilon} F(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} \frac{dx_i^*}{d\epsilon} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}^*) \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} = \mathbf{X}(\mathbf{x}^*)F(\mathbf{x}^*).$$

Por lo tanto se sigue que

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon} = \mathbf{X}(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*,$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}^*}{d\epsilon^2} = \frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon}\right) = \mathbf{X}(\mathbf{x}^*)\mathbf{X}(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* = \mathbf{X}^2(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*,$$

y en general,

$$\frac{d^k\mathbf{x}^*}{d\epsilon^k} = \mathbf{X}^k(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*, \qquad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Como consecuencia

$$\left. \frac{d^k\mathbf{x}^*}{d\epsilon^k} \right|_{\epsilon=0} = \mathbf{X}^k(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{X}^k\mathbf{x}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

lo cual nos conduce a (1.27). $\square$

Por lo tanto la expansión en series de Taylor alrededor de $\epsilon = 0$ de una función $\mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)$ la cual define un grupo de Lie de transformaciones $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)$ (con la ley de composición $\phi(a, b) = a + b$) es determinado por el coeficiente de su término $O(\epsilon)$, el cual es el infinitesimal

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \epsilon}(\mathbf{x};\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = \xi(\mathbf{x}). \tag{1.28}$$

En resumen hay dos formas para encontrar explícitamente un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (ϵ) desde su transformación infinitesimal: (i) Expresar el grupo en términos de una serie de potencias (1.27) llamada serie de Lie, la cual está desarrollada desde el generador infinitesimal (1.23) correspondiente a la transformación infinitesimal;

(ii) Resolver el problema del valor inicial (1.25,1.26). Aquí uno encuentra primero la solución general explícita del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (1.25).

Corolario 1.11 Si $F(\mathbf{x})$ es infinitamente diferenciable, entonces para un grupo de Lie de transformaciones $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)$ con generador infinitesimal $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x})\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, se cumple que:

$$F(\mathbf{x}^*) = F(e^{\epsilon\mathbf{X}}\mathbf{x}) = e^{\epsilon\mathbf{X}}F(\mathbf{x}). \tag{1.29}$$

Demostración

Del Teorema 1.10 tenemos que

$$\mathbf{x}^* = e^{\epsilon\mathbf{X}}\mathbf{x},$$

por lo que

$$F(\mathbf{x}^*) = F(e^{\epsilon\mathbf{X}}\mathbf{x}),$$

obteniendo así la primera igualdad.
Para la segunda igualdad, notemos que expandiendo $F(\mathbf{x}^*)$ sobre $\epsilon = 0$ por el Teorema de Taylor, y del Teorema 1.10 obtenemos

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}^*) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\left(\left.\frac{d^k F(\mathbf{x}^*)}{d\epsilon^k}\right|_{\epsilon=0}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}(\mathbf{X}^k F(\mathbf{x})) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\epsilon\mathbf{X})^k}{k!} F(\mathbf{x}) \\ &= e^{\epsilon\mathbf{X}}F(\mathbf{x}). \qquad \square \end{aligned}$$

Como ejemplo consideramos el grupo de rotación

$$x^* = x\cos\epsilon + y\sin\epsilon, \tag{1.30}$$
$$y^* = -x\sin\epsilon + y\cos\epsilon. \tag{1.31}$$

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = -x\sin\epsilon + y\cos\epsilon; \quad \frac{dy^*}{d\epsilon} = -x\cos\epsilon - y\sin\epsilon.$$

El infinitesimal para (1.30,1.31) es

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{x}) &= (\xi_1(x,y), \xi_2(x,y)) = (\xi(x,y), \eta(x,y)) \\ &= \left(\left.\frac{dx^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}, \left.\frac{dy^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\right) = (y, -x). \end{aligned}$$

El generador infinitesimal para (1.30,1.31) es

$$\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.32}$$

Las series de Lie correspondientes a (1.32) es

$$(x^*, y^*) = (e^{\epsilon \mathbf{X}} x, e^{\epsilon \mathbf{X}} y).$$
$$\mathbf{X}x = y; \quad \mathbf{X}^2 x = \mathbf{X}y = -x.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{4n}x &= x, \quad \mathbf{X}^{4n-1}x = -y, \quad \mathbf{X}^{4n-2}x = -x, \quad \mathbf{X}^{4n-3}x = y, \quad n = 1,2,\ldots; \\ \mathbf{X}^{4n}y &= y, \quad \mathbf{X}^{4n-1}y = x, \quad \mathbf{X}^{4n-2}y = -y, \quad \mathbf{X}^{4n-3}y = -x, \quad n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Como consecuencia

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\epsilon \mathbf{X}} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\mathbf{X}^k x \\ &= \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2!} + \frac{\epsilon^4}{4!} + \ldots\right) x + \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{3!} + \frac{\epsilon^5}{5!} + \ldots\right) y \\ &= x\cos\epsilon + y\sin\epsilon. \end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned} y^* &= e^{\epsilon \mathbf{X}} y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\mathbf{X}^k y \\ &= \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{3!} + \frac{\epsilon^5}{5!} + \ldots\right)(-x) + \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2!} + \frac{\epsilon^4}{4!} + \ldots\right) y \\ &= -x\sin\epsilon + y\cos\epsilon. \end{aligned}$$

1.5. Curvas y Superficies Invariantes

Definición 1.12 Para una superficie $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que $F(\mathbf{x})$ es una superficie invariante para un grupo de Lie de transformaciones de un parámetro $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)$ si y sólo si $F(\mathbf{x}^*) = 0$ cuando $F(\mathbf{x}) = 0$.

Definición 1.13 Para una curva $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que $F(x,y)$ es una curva invariante para un grupo de Lie de transformaciones de un parámetro

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\epsilon) = x + \epsilon\xi(x,y) + O(\epsilon^2), \\ y^* &= Y(x,y;\epsilon) = y + \epsilon\eta(x,y) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{1.33}$$

con generador infinitesimal

$$\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{1.34}$$

si y sólo si $F(x^*, y^*) = 0$ cuando $F(x, y) = 0$.

Teorema 1.14
(i) Una superficie de la forma $F(\mathbf{x}) = x_n - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0$, es una superficie invariante para $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)$ si y sólo si

$$\mathbf{X}F(\mathbf{x}) = 0 \quad \textit{cuando} \quad F(\mathbf{x}) = 0. \tag{1.35}$$

(ii) Una curva de la forma $F(x, y) = y - f(x) = 0$, es una curva invariante para (1.33) si y sólo si

$$\mathbf{X}F(x,y) = \eta(x,y) - \xi(x,y)f'(x) = 0$$

cuando $F(x, y) = y - f(x) = 0$, es decir si y sólo si

$$\eta(x, f(x)) - \xi(x, f(x))f'(x) = 0 \tag{1.36}$$

Demostración

Como $F(\mathbf{x}) = 0$ es una superficie invariante, entonces $F(\mathbf{x}^*) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{X}F(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{X}(e^{\epsilon\mathbf{X}}F(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{\epsilon\mathbf{X}}F(\mathbf{x})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x})e^{\epsilon\mathbf{X}}\frac{\partial}{\partial x_i}F(\mathbf{x}) = e^{\epsilon\mathbf{X}}\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}F(\mathbf{x}) \\
&= (e^{\epsilon\mathbf{X}})(\mathbf{X}F(\mathbf{x})).
\end{aligned}$$

entonces $\mathbf{X}F(\mathbf{x}) = 0$.
De manera recíproca si $\mathbf{X}F(\mathbf{x}) = 0$, entonces $\mathbf{X}^n F(\mathbf{x}) = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}^*) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\mathbf{X}^k F(\mathbf{x}) \\
&= F(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\mathbf{X}^k F(\mathbf{x}) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $F(\mathbf{x}^*) = 0$
Así $F(\mathbf{x}) = 0$ es una superficie invariante. $\square$

Como ejemplo consideremos el grupo de homotecias

$$x^* = e^{\epsilon} x, \tag{1.37}$$
$$y^* = e^{\epsilon} y. \tag{1.38}$$

De aquí tenemos que

$$\begin{aligned} \xi(x,y) &= \left.\frac{\partial \mathbf{X}(x,\epsilon)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \left.\frac{\partial(x^*,y^*)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \\ &= \left.\frac{\partial(e^{\epsilon}x, e^{\epsilon}y)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = (e^{\epsilon}x, e^{\epsilon}y)|_{\epsilon=0} \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

El generador infinitesimal correspondiente es

$$\mathbf{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Una recta $y - \lambda x = 0, \quad x > 0, \quad \lambda = cte$, es una curva invariante para (1.37),(1.38) debido a que $\mathbf{X}(y - \lambda x) = y - \lambda x = 0$ cuando $y - \lambda x = 0$; una parábola $y - \lambda x^2 = 0, \quad \lambda = cte$, no es una curva invariante para (1.37),(1.38) ya que $\mathbf{X}(y - \lambda x^2) = y - 2\lambda x^2 \neq 0$ cuando $y - \lambda x^2 = 0$.
Para encontrar curvas invariantes $y - f(x) = 0$ para este grupo, primero encontramos la solución general $u(x,y)$ de la ecuación diferencial parcial

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

la cual es

$$u(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

donde F es una función arbitraria de y/x. Entonces las curvas invariantes incluyen a las curvas

$$y - \lambda x = 0, \quad \lambda = cte, \quad x > 0 \quad o \quad x < 0.$$

La solución general de una ecuación diferencial ordinaria está representada geométricamente por una familia de curvas; la "solución general"de una ecuación diferencial parcial se ve como una familia de superficies.

Definición 1.15 Un grupo de transformaciones es admitido por una ecuación diferencial, si la transformación del grupo manda cualquier curva(superficie) solución a otra curva(superficie) solución. En particular un grupo de transformaciones admitido por una ecuación diferencial debe dejar invariantes a una familia de curvas(superficies) solución.

Definición 1.16 La familia de superficies $\omega(\mathbf{x}) = constante = c$ es una familia invariante de superficies para $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)$ si $\omega(\mathbf{x}^*) = constante = c^*$ cuando $\omega(\mathbf{x}) = c$.

Definición 1.17 La familia de curvas $\omega(x,y) = constante = c$ es una familia invariante de curvas para (1.33) si $\omega(x^*,y^*) = constante = c^*$ cuando $\omega(x,y) = c$.

Teorema 1.18

(i) Una familia de superficies $\omega(\mathbf{x}) = constante = c$ es una familia invariante de superficies para $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)$ si y sólo si $\mathbf{X}\omega = \Omega(\omega)$ para alguna función infinitamente diferenciable $\Omega(\omega)$.

(ii) Una familia de curvas $\omega(x,y) = constante = c$ es una familia invariante de curvas para (1.33) si y sólo si $\mathbf{X}\omega = \xi(x,y)\dfrac{\partial\omega}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial\omega}{\partial y} = \Omega(\omega)$ para alguna función infinitamente diferenciable $\Omega(\omega)$.

Demostración

Sea $\omega(\mathbf{x}) = c$ una familia invariante de superficies para $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\omega(\mathbf{x}^*) &= e^{\epsilon\mathbf{X}}\omega(\mathbf{x}) \\
&= \omega(\mathbf{x}) + \epsilon\mathbf{X}\omega(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon^2}{2}\mathbf{X}^2\omega(\mathbf{x}) + \ldots \\
&= c^* = C(c;\epsilon).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{X}\omega(\mathbf{x}) = \Omega(\omega)$ para alguna función $\Omega(\omega)$ cuando $\omega(\mathbf{x}) = c$. Se sigue que $\mathbf{X}^2\omega = \Omega'(\omega)\mathbf{X}\omega = \Omega'(\omega)\Omega(\omega)$, etc.
De manera recíproca, supongamos que $\mathbf{X}\omega = \Omega(\omega)$ para alguna función infinitamente diferenciable $\Omega(\omega)$. Entonces $\mathbf{X}^2\omega = \Omega'(\omega)\Omega(\omega)$ y $\mathbf{X}^n\omega = f_n(\omega)$ para alguna función $f_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$. Como consecuencia si $\omega(\mathbf{x}) = c$, entonces

$$\begin{aligned}
\omega(\mathbf{x}^*) &= e^{\epsilon\mathbf{X}}\omega(\mathbf{x}) \\
&= \omega(\mathbf{x}) + \epsilon\mathbf{X}\omega(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon^2}{2}\mathbf{X}^2\omega(\mathbf{x}) + \ldots \\
&= \omega(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon^n f_n(\omega(\mathbf{x}))}{n!} \\
&= c + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon^n f_n(c)}{n!} \\
&= cte = c^*. \qquad \square
\end{aligned}$$

Para encontrar la familia invariante de superficies (curvas) para un grupo de Lie de transformaciones, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Omega(\omega) = 1$. Esto se sigue del hecho de que si $\omega(\mathbf{x}) = c$ es una familia invariante de superficies, entonces $F(\omega(\mathbf{x})) = F(c)$ también lo es, para cualquier función F; $\mathbf{X}F(\omega(\mathbf{x})) = F'(\omega)\mathbf{X}\omega = F'(\omega)\Omega(\omega)$, así que tomando $F'(\omega) = \frac{1}{\Omega(\omega)}$, tenemos que $\mathbf{X}F(\omega) = 1$.[Asumimos que $\Omega(\omega) \neq 0$, de otra forma cada superficie en la familia invariante de superficies es en sí misma una superficie invariante para $\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)$.]

Consideremos nuevamente el grupo de homotecias $(x^*, y^*) = (e^\epsilon x, e^\epsilon y)$. La familia invariante de curvas $\omega(x, y) = c$ resuelve

$$\mathbf{X}\omega = x\frac{\partial \omega}{\partial x} + y\frac{\partial \omega}{\partial y} = 1,$$

cuya solución general es

$\omega(x, y) = \log(x) + f\left(\frac{y}{x}\right)$ para una función arbitraria f.

Por lo tanto, cualquier familia de curvas

$$F(\omega) = F\left(\log(x) + f\left(\frac{y}{x}\right)\right) = cte = c \tag{1.39}$$

es una familia invariante de curvas para el grupo de homotecias para cualquier elección de F, f.

Como primer ejemplo escogemos $F(\omega) = e^{2\omega}$ y $f(\frac{y}{x}) = \frac{1}{2}\log(1 + (\frac{y}{x})^2)$ en (1.39). Al desarrollar tenemos

$$\begin{aligned}
\omega(x, y) &= \log(x) + \frac{1}{2}\log\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \\
&= \log(x) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) \\
&= \log(x) + \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\log(x^2) \\
&= \log(x) + \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) - \log(x) \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

Por ello $F(\omega) = F(\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)) = e^{2(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2))} = e^{\log(x^2+y^2)} = x^2 + y^2$. Notamos que en particular la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = cte = r^2$ es una familia invariante de curvas para este grupo.

Si tomamos ahora $F(\omega) = e^{\omega}$ y $f(\frac{y}{x}) = 0$ en (1.39), tenemos

$$\begin{aligned} \omega(x,y) &= \log(x) + 0 \\ &= \log(x) \end{aligned}$$

Como consecuencia $F(\omega) = F(\log x) = e^{\log x} = x$.
Así la familia de rectas $x = cte$ es invariante para este grupo.

Como último ejemplo consideramos $F(\omega) = e^{2\omega}$ y $f(\frac{y}{x}) = \frac{1}{2}\left(\log(1 + (\frac{y}{x})^2) + \arctan(\frac{y}{x})\right)$ en (1.39), lo cual nos lleva a

$$\begin{aligned} \omega(x,y) &= \log(x) + \frac{1}{2}\left(\log(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\ &= \log(x) + \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\ &= \log(x) + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \frac{1}{2}\log(x^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \log(x) + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \log(x) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\log(x^2+y^2) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F\left(\frac{1}{2}\left(\log(x^2+y^2) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right) \\ &= e^{2(\frac{1}{2})\left(\log(x^2+y^2)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)} \\ &= e^{\log(x^2+y^2)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \\ &= e^{\log(x^2+y^2)}e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \\ &= (x^2+y^2)e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares en la expresión anterior, obtenemos $F(\omega) = r^2e^{\theta}$. Por lo tanto la familia de espirales logarítmicas $r^2e^{\theta} = cte$ es invariante para este grupo.

1.6. Funciones Invariantes

Definición 1.19. Una función infinitamente diferenciable $F(\mathbf{x})$ es una función invariante para el grupo de Lie de transformaciones

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}(\mathbf{x};\epsilon) \tag{1.40}$$

si y sólo si para cualquier grupo de transformaciones tenemos que

$$F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x}).$$

Si $F(\mathbf{x})$ es una función invariante de (1.40), entonces $F(\mathbf{x})$ es llamada una invariante de (1.40) y $F(\mathbf{x})$ se dice que es invariante bajo (1.40).

Teorema 1.20. $F(\mathbf{x})$ es invariante bajo (1.40) si y sólo si

$$\mathbf{X}F(\mathbf{x}) \equiv 0.$$

Demostración

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}^*) &\equiv e^{\epsilon\mathbf{X}}F(\mathbf{x}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\epsilon^k}{k!}\mathbf{X}^kF(\mathbf{x}) \\ &\equiv F(\mathbf{x}) + \epsilon\mathbf{X}F(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon^2}{2!}\mathbf{X}^2F(\mathbf{x}) + \dots . \end{aligned} \tag{1.41}$$

Supongamos que $F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x})$. De la ecuación anterior se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \epsilon\mathbf{X}F(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon^2}{2!}\mathbf{X}^2F(\mathbf{x}) + \dots \\ &\equiv \left[\epsilon\mathbf{X} + \frac{\epsilon^2}{2!}\mathbf{X}^2 + \dots\right]F(\mathbf{x}) \\ &\equiv \left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon^k}{k!}\mathbf{X}^k\right]F(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{X}^kF(\mathbf{x}) \equiv 0$ para $k = 1, 2, \dots$, y por lo tanto $\mathbf{X}F(\mathbf{x}) \equiv 0$.
Recíprocamente, sea $F(\mathbf{x})$ tal que $\mathbf{X}F(\mathbf{x}) \equiv 0$. Entonces $\mathbf{X}^nF(\mathbf{x}) \equiv 0$, $n = 1, 2, \dots$. Por lo tanto de (1.41), tenemos que $F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x})$. □

Teorema 1.21. Para un grupo de Lie de transformaciones (1.40), la identidad

$$F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x}) + \epsilon \tag{1.42}$$

se cumple si y sólo si $F(\mathbf{x})$ es tal que

$$\mathbf{X}F(\mathbf{x}) \equiv 1. \tag{1.43}$$

Demostración
Sea $F(\mathbf{x})$ tal que (1.42) se cumple. Entonces

$$F(\mathbf{x}) + \epsilon = F(\mathbf{x}) + \epsilon\mathbf{X}F(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon^2}{2!}\mathbf{X}^2F(\mathbf{x}) + \dots .$$

Por lo tanto, $\mathbf{X}F(\mathbf{x}) \equiv 1$.
De manera recíproca, sea $F(\mathbf{x})$ tal que se cumple (1.43).
Entonces $\mathbf{X}^nF(\mathbf{x}) \equiv 0$, $n = 2, 3, \dots$.
Por tanto $F(\mathbf{x}^*) \equiv e^{\epsilon\mathbf{X}}F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}) + \epsilon\mathbf{X}F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}) + \epsilon$. □

1.7. Coordenadas Canónicas

Supongamos que hacemos un cambio de variable (uno a uno y continuamente diferenciable en algún dominio apropiado)

$$\mathbf{y} = Y(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})). \tag{1.44}$$

Para el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2), \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{1.45}$$

el generador infinitesimal $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ con respecto a las coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se convierte en el generador infinitesimal

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

con respecto a las coordenadas $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definido por (1.44). Entonces $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ para tener la misma acción de grupo. El infinitesimal con respecto a las coordenadas $\mathbf{y}$ es

$$\eta(\mathbf{y}) = (\eta_1(\mathbf{y}), \eta_2(\mathbf{y}), \ldots, \eta_n(\mathbf{y})) = \mathbf{Y}\mathbf{y}.$$

Teorema 1.22. El operador infinitesimal con respecto a las coordenadas $\mathbf{y}$ está dado por la expresión $\eta(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\mathbf{y}$.
Demostración
Usando la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} = \mathbf{Y} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \eta_j(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \\ &= \mathbf{X} y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \square \end{aligned}$$

Teorema 1.23. Con respecto a las coordenadas $\mathbf{y}$ dada por (1.44), el grupo de Lie de transformaciones (1.45) es

$$\mathbf{y}^* = e^{\epsilon \mathbf{Y}} \mathbf{y}.$$

Demostración
De las ecuaciones $F(\mathbf{x}^*) = e^{\epsilon \mathbf{X}} F(\mathbf{x})$ y (1.44), obtenemos

$$\mathbf{y}^* = Y(\mathbf{x}^*) = e^{\epsilon \mathbf{X}} Y(\mathbf{x}) = e^{\epsilon \mathbf{X}} Y = e^{\epsilon \mathbf{Y}} \mathbf{y}. \qquad \square$$

Definición 1.24. Un cambio de coordenadas (1.44) define un conjunto de coordenadas canónicas para el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (1.45) si en términos de tales coordenadas el grupo (1.45) se convierte en

$$y_i^* = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{1.46}$$
$$y_n^* = y_n + \epsilon. \tag{1.47}$$

Teorema 1.25. Para cualquier grupo de Lie de transformaciones (1.45) existe un conjunto de coordenadas canónicas $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tal que (1.45) es equivalente a (1.46),(1.47).

Demostración

Del Teorema 1.20 tenemos

$$y_i^* = y_i(\mathbf{x}^*) = y_i(\mathbf{x})$$

si y sólo si

$$\mathbf{X} y_i(\mathbf{x}) \equiv 0, \qquad (i)$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$. La ecuación diferencial parcial lineal homogénea de primer orden

$$\mathbf{X} u(\mathbf{x}) = \xi_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \xi_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

tiene $n-1$ soluciones funcionalmente independientes para $u(\mathbf{x})$. Éstas soluciones son $n-1$ constantes esenciales $(y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_{n-1}(\mathbf{x}))$ que aparecen en la solución general del sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \xi(\mathbf{x}),$$

resultado de las ecuaciones características

$$\frac{dx_1}{\xi_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{\xi_2(\mathbf{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n(\mathbf{x})}.$$

Ésto produce las $n-1$ coordenadas que satisfacen (1.46).

La coordenada canónica $y_n(\mathbf{x})$ se sigue del Teorema 1.21:

$$y_n^* = y_n(\mathbf{x}^*) = y_n(\mathbf{x}) + \epsilon$$

si y sólo si

$$\mathbf{X}y_n(\mathbf{x}) \equiv 1. \qquad (ii)$$

Por lo tanto, $v(\mathbf{x}) = y_n(\mathbf{x})$ es una solución particular de la ecuación diferencial parcial lineal no homogénea de primer orden

$$\mathbf{X}v(\mathbf{x}) = \xi_1(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial x_1} + \xi_2(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial x_n} = 1,$$

y se encuentra determinando una solución particular del correspondiente sistema característico de $n+1$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 1, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \xi(\mathbf{x}). \end{aligned} \qquad \square$$

Teorema 1.26. En términos de cualquier conjunto de coordenadas canónicas $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, el generador infinitesimal del grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (1.44) es

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Demostración

Tenemos que

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

En términos de coordenadas canónicas, de (i) y (ii) se sigue que

$$\eta_i(\mathbf{y}) = \mathbf{X}y_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\eta_n(\mathbf{y}) = \mathbf{X}y_n = 1.$$

Por lo tanto obtenemos

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial y_n}. \qquad \square$$

Ejemplos de Conjuntos de Coordenadas Canónicas

En $\mathbb{R}^2$ ponemos $x_1 = x$, $x_2 = y$ y etiquetamos las coordenadas canónicas como $y_1 = r$, $y_2 = s$, así que en términos de coordenadas canónicas un grupo de Lie de transformaciones se convierte en

$$\begin{aligned} r^* &= r, \\ s^* &= s + \epsilon, \end{aligned}$$

con generador infinitesimal $\mathbf{Y} = \dfrac{\partial}{\partial s}$.

(1) *Grupo de Homotecias*

Para el grupo de homotecias

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\epsilon} x, \\ y^* &= e^{2\epsilon} y, \end{aligned} \tag{1.48}$$

el generador infinitesimal es $\mathbf{X} = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial}{\partial y}$, dado que

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= \left.\frac{\partial x^*}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = e^{\epsilon} x|_{\epsilon=0} = x \\ \eta(x, y) &= \left.\frac{\partial y^*}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 2e^{\epsilon} y|_{\epsilon=0} = 2y \end{aligned}$$

La coordenada canónica $r(x, y)$ satisface

$$\mathbf{X}r = x\frac{\partial r}{\partial x} + 2y\frac{\partial r}{\partial y} = 0.$$

La correspondientes ecuaciones diferenciales características se reducen a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

De donde

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= 2\int \frac{dx}{x} \\ \log y &= 2(\log x + C) \\ y &= Cx^2 \\ \frac{y}{x^2} &= C \end{aligned}$$

Por ello la solución es $r(x, y) = \dfrac{y}{x^2} = constante$.

La coordenada canónica $s(x,y)$ satisface

$$\mathbf{X}s = x\frac{\partial s}{\partial x} + 2y\frac{\partial s}{\partial y} = 1. \tag{1.49}$$

Una solución particular de (1.49) es $s(x,y) = s(x)$ la cual satisface

$$\begin{aligned} x\frac{ds}{dx} &= 1 \\ \frac{ds}{dx} &= \frac{1}{x} \\ \int ds &= \int \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$s(x,y) = \log x,$$

y el grupo de homotecias (1.48) tiene coordenadas canónicas $(r,s) = \left(\frac{y}{x^2}, \log x\right)$.

(2) *Grupo de Rotaciones*

Para el grupo de rotaciones

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, \\ y^* &= x\sin\epsilon + y\cos\epsilon, \end{aligned} \tag{1.50}$$

el generador infinitesimal es $\mathbf{X} = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, ya que

$$\begin{aligned} \xi(x,y) &= \left.\frac{\partial x^*}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = (-x\sin\epsilon - y\cos\epsilon)|_{\epsilon=0} = -y \\ \eta(x,y) &= \left.\frac{\partial y^*}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = (x\cos\epsilon - y\sin\epsilon)|_{\epsilon=0} = x \end{aligned}$$

Correspondientemente

$$\mathbf{X}r = x\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial x} = 0.$$

que da paso a las siguientes ecuaciones diferenciales características

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ \int y dy &= -\int x dx \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C \\ C &= x^2 + y^2 \\ c &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

por lo que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De la siguiente relación

$$\mathbf{X}s = x\frac{\partial s}{\partial y} - y\frac{\partial s}{\partial x} = 1.$$

una solución particular es $s(x,y) = s(y)$, que satisface

$$x\frac{ds}{dy} = 1$$

Entonces un candidato para $s(x,y)$ es una solución de

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dy} &= \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2}} \\
\int ds &= \int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$s = \theta = \arcsin\frac{y}{r}.$$

Las coordenadas canónicas son coordenadas polares

$$(r,s) = (r,\theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arcsin\frac{y}{r}\right),$$

en términos de los cuales el grupo de rotaciones (1.50) es expresado en la forma familiar

$$\begin{aligned}
r^* &= r, \\
\theta^* &= \theta + \epsilon.
\end{aligned}$$

1.8. Transformaciones Extendidas

Consideremos nuevamente el siguiente grupo de Lie de transformaciones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^* &= (x^*, y^*) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \epsilon) = (X(x, y; \epsilon), Y(x, y; \epsilon)) \\
&= \mathbf{X}(x, y, \epsilon) = (X(\mathbf{x}; \epsilon), Y(\mathbf{x}; \epsilon)).
\end{aligned}$$

Sea

$$y_k = \frac{d^k y}{dx^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Vamos a extender al grupo anterior a un espacio $(x, y, y_1, \ldots, y_k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ demandando que éste preserve las condiciones que relacione las diferenciales $dx, dy, dy_1, dy_2, \ldots$:

$$dy = y_1 dx,$$

y

$$dy_k = y_{k+1} dx, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

En particular, bajo la acción del grupo de transformaciones, las derivadas transformadas $y_k^*, \quad k = 1, 2, \ldots$, están definidas sucesivamente por

$$\begin{aligned} dy^* &= y_1^* dx^*, \\ dy_k^* &= y_{k+1}^* dx^*, \end{aligned}$$

donde x^* está definido como arriba. Entonces

$$\begin{aligned} dy^* &= dY(\mathbf{x}, \epsilon) = \frac{\partial Y}{\partial x}(\mathbf{x}; \epsilon) dx + \frac{\partial Y}{\partial y}(\mathbf{x}; \epsilon) dy, \\ dx^* &= dX(\mathbf{x}, \epsilon) = \frac{\partial X}{\partial x}(\mathbf{x}; \epsilon) dx + \frac{\partial X}{\partial y}(\mathbf{x}; \epsilon) dy. \end{aligned}$$

Como consecuencia, de la ecuación $dy^* = y_1^* dx^*$ llegamos a

$$\frac{\partial Y}{\partial x}(\mathbf{x}; \epsilon) dx + \frac{\partial Y}{\partial y}(\mathbf{x}; \epsilon) dy = y_1^* \left[\frac{\partial X}{\partial x}(\mathbf{x}; \epsilon) dx + \frac{\partial X}{\partial y}(\mathbf{x}; \epsilon) dy \right].$$

Sustituyendo $dy = y_1 dx$ en la ecuación anterior, vemos que

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; \epsilon) = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}(\mathbf{x}; \epsilon) + y_1 \frac{\partial Y}{\partial y}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\frac{\partial X}{\partial x}(\mathbf{x}; \epsilon) + y_1 \frac{\partial X}{\partial y}(\mathbf{x}; \epsilon)}.$$

Definición 1.27 El **operador derivada total** está definido por

$$\frac{D}{Dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + y_{n+1} \frac{\partial}{\partial y_n} + \ldots; \tag{1.51}$$

dada una función diferenciable $F(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_l)$,

$$\frac{D}{Dx} F(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_l) = F_x + y_1 F_y + y_2 F_{y_1} + y_3 F_{y_2} + \ldots + y_{l+1} F_{y_l}.$$

Teorema 1.28 El grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (1.33) se extiende a su k-ésima extensión, $k \geq 2$, el cual es el siguiente grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico actuando en el espacio $(x, y, y_1, \ldots, y_k)$:

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon), \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon), \\ &\vdots \\ y_i^* = Y_i(x, y, y_1, \ldots, y_i; \epsilon) &= \frac{\frac{DY_{i-1}}{Dx}}{\frac{DX(x,y;\epsilon)}{Dx}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \end{aligned} \tag{1.52}$$

donde

$$Y_0 = Y(x, y; \epsilon).$$

Demostración

La prueba se hará por inducción sobre i.

Probemos la base inductiva ($i = 1$).

Es suficiente probar que la propiedad de cerradura se preserva en la primera extensión del grupo (1.33) al espacio (x, y, y_1). Las demás propiedades de un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico se siguen inmediatamente de la cerradura para la primera extensión.
Si $\phi(\epsilon, \delta)$ define la ley de composición de los parámetros ϵ y δ. Supongamos que $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{X}(\mathbf{x}^*; \delta)$. Entonces de la propiedad de cerradura del grupo (1.33), se sigue que $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta))$. Pero y_1^{**} satisface $dy^{**} = y_1^{**} dx^{**}$. Como consecuencia

$$y_1^{**} = Y_1(x, y, y_1; \phi(\epsilon, \delta)) = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta)) + y_1 \frac{\partial Y}{\partial y}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta))}{\frac{\partial X}{\partial x}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta)) + y_1 \frac{\partial X}{\partial y}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta))} = \frac{\dfrac{DY(x, y; \phi(\epsilon, \delta))}{Dx}}{\dfrac{DX(x, y; \phi(\epsilon, \delta))}{Dx}}.$$

Hipótesis de inducción ($i = k$)

La k-esima extensíon del grupo (1.33), $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*, y_1^*, \ldots, y_k^*)$ es un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico.

Por demostrar para $i = k + 1$.

Nuevamente sólo probaremos la propiedad de cerradura para la $(k+1)$-ésima extensión del grupo (1.33) o dicho de otra manera para la primera extensión del grupo $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*, y_1^*, \ldots, y_k^*)$, debido a que las demás propiedades del grupo se siguen de ésta.
Tomamos nuevamente a $\phi(\epsilon, \delta)$ como la ley de composición de parámetros ϵ y δ, y $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{X}(\mathbf{x}^*; \delta)$. Y de la propiedad de cerradura del grupo $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*, y_1^*, \ldots, y_k^*)$, se sigue que $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \phi(\epsilon, \delta))$.

Por último, tenemos que $dy_k^{**} = y_{k+1}^{**}dx^{**}$ y que $dy_k = y_{k+1}dx$, por lo que

$$\begin{aligned}
y_{k+1}^{**} &= Y_{k+1}(x, y, \ldots, y_{k+1}; \phi(\epsilon, \delta)) = \frac{dy_k^{**}}{dx^{**}} \\
&= \frac{dY_k(x, y, \ldots, y_k; \phi(\epsilon, \delta))}{dX(x, y; \phi(\epsilon, \delta))} \\
&= \frac{\frac{\partial Y_k}{\partial x}dx + \frac{\partial Y_k}{\partial y}dy + \frac{\partial Y_k}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial Y_k}{\partial y_k}dy_k}{\frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy} \\
&= \frac{\frac{\partial Y_k}{\partial x}dx + \frac{\partial Y_k}{\partial y}y_1dx + \frac{\partial Y_k}{\partial y_1}y_2dx + \ldots + \frac{\partial Y_k}{\partial y_k}y_{k+1}dx}{\frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}y_1dx} \\
&= \frac{\left[\frac{\partial Y_k}{\partial x} + y_1\frac{\partial Y_k}{\partial y} + y_2\frac{\partial Y_k}{\partial y_1} + \ldots + y_{k+1}\frac{\partial Y_k}{\partial y_k}\right]dx}{\left[\frac{\partial X}{\partial x} + y_1\frac{\partial X}{\partial y}\right]dx} \\
&= \frac{\frac{DY_k(x, y, y_1, \ldots, y_k; \phi(\epsilon, \delta))}{Dx}}{\frac{DX(x, y; \phi(\epsilon, \delta))}{Dx}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Definición 1.29 La **k-ésima extensión** de (1.33) está dada por

$$\begin{aligned}
x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2), \\
y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2), \\
y_1^* &= Y_1(x, y, y_1; \epsilon) = y_1 + \epsilon\eta^{(1)}(x, y, y_1) + O(\epsilon^2), \\
&\vdots \\
y_k^* &= Y_k(x, y, y_1, \ldots, y_k; \epsilon) = y_k + \epsilon\eta^{(k)}(x, y, y_1, \ldots, y_k) + O(\epsilon^2), \qquad (1.53)
\end{aligned}$$

tiene como su infinitesimal k-ésimo extendido

$$(\xi(x, y), \eta(x, y), \eta^{(1)}(x, y, y_1), \ldots, \eta^{(k)}(x, y, y_1, \ldots, y_k)), \qquad (1.54)$$

con correspondiente generador infinitesimal k-ésimo extendido

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(k)} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots \\
+\eta^{(k)}(x, y, y_1, \ldots, y_k)\frac{\partial}{\partial y_k}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (1.55)
\end{aligned}$$

Teorema 1.30 El **infinitesimal k-ésimo extendido** está dado por

$$\eta^{(k)}(x, y, y_1, \ldots, y_k) = \frac{D\eta^{k-1}}{Dx} - y_k\frac{D\xi(x, y)}{Dx}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (1.56)$$

donde

$$\eta^{(0)} = \eta(x, y).$$

Demostración

De (1.52), (1.53) y (1.51), tenemos que

$$
\begin{aligned}
Y_k(x,y,y_1,\ldots,y_k;\epsilon) &= \frac{\frac{DY_{k-1}}{Dx}}{\frac{DX(x,y;\epsilon)}{Dx}} \\
&= \frac{\frac{D\left[y_{k-1}+\epsilon\eta^{(k-1)}+O(\epsilon^2)\right]}{Dx}}{\frac{D[x+\epsilon\xi(x,y)+O(\epsilon^2)]}{Dx}} \\
&= \frac{\left[y_k+\epsilon\frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx}\right]}{\left[1+\epsilon\frac{D\xi(x,y)}{Dx}\right]}+O(\epsilon^2) \\
&= y_k+\epsilon\left[\frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx}-y_k\frac{D\xi(x,y)}{Dx}\right]+O(\epsilon^2) \\
&= y_k+\epsilon\eta^{(k)}+O(\epsilon^2),
\end{aligned}
$$

lo que nos lleva a (1.56). $\square$

Siguiendo con los anteriores ejemplos:

(1) Un Grupo de Traslaciones

Para el grupo de traslaciones

$$
\begin{aligned}
x^* &= X = x+\epsilon, \\
y^* &= Y = y,
\end{aligned}
$$

tenemos que

$$
y_1^* = \left(\frac{dy}{dx}\right)^* = \frac{dy^*}{dx^*} = Y_1 = \frac{y_1\frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x}} = y_1\left(\frac{1}{1}\right) = y_1,
$$

y en general

$$
\begin{aligned}
y_k^* &= \left(\frac{d^ky}{dx^k}\right)^* = \frac{d^ky^*}{d{x^*}^k} = Y_k = \frac{y_k\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\frac{\partial X}{\partial x}} = y_k\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}} \\
&= y_k\left(\frac{\partial\left(y_{k-1}\frac{\partial Y_{k-2}}{\partial y_{k-2}}\right)}{\partial y_{k-1}}\right) = y_k\frac{\partial Y_{k-2}}{\partial y_{k-2}} = \ldots = y_k\frac{\partial Y}{\partial y} \\
&= y_k, \quad k=1,2,\ldots.
\end{aligned}
$$

Entonces la k-ésima extensión de éste grupo de traslaciones está dado por

$$\begin{aligned} x^* &= x+\epsilon, \\ y^* &= y, \\ y_i^* &= y_i, \quad i=1,2,\ldots,k. \end{aligned}$$

De la fórmula (1.53) y la igualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned} y_k^* &= y_k+\epsilon\eta^{(k)}+O(\epsilon^2) \\ &= y_k. \end{aligned}$$

Por lo que llegamos a $\epsilon\eta^{(k)}=0$. Concluimos que $\eta^{(k)}=0, \quad k=1,2,\ldots$.

También por el Teorema 1.30 y dado que $(\xi,\eta)=(1,0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \eta^{(k)} &= y_k\frac{\partial\eta^{(k-1)}}{\partial y_{k-1}} = y_k\left(\frac{\partial\left(y_{k-1}\frac{\partial\eta^{(k-2)}}{\partial y_{k-2}}\right)}{\partial y_{k-1}}\right) \\ &= y_k\frac{\partial\eta^{(k-2)}}{\partial y_{k-2}} = \ldots = y_k\frac{\partial\eta}{\partial y} = y_k(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) Un Grupo de Homotecias

Para el grupo de homotecias

$$\begin{aligned} x^* = X = e^{\epsilon}x, \\ y^* = Y = e^{2\epsilon}y, \end{aligned}$$

tenemos que

$$y_1^* = \left(\frac{dy}{dx}\right)^* = \frac{dy^*}{dx^*} = Y_1 = \frac{y_1\frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x}} = y_1\frac{e^{2\epsilon}}{e^{\epsilon}} = e^{\epsilon}y_1,$$

y en general

$$\begin{aligned} y_k^* &= \left(\frac{d^ky}{dx^k}\right)^* = \frac{d^ky^*}{{dx^*}^k} = Y_k = \frac{y_k\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\frac{\partial X}{\partial x}} = \frac{y_k}{e^{\epsilon}}\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}} \\ &= \frac{y_k}{e^{\epsilon}e^{\epsilon}}\left(\frac{\partial\left(y_{k-1}\frac{\partial Y_{k-2}}{\partial y_{k-2}}\right)}{\partial y_{k-1}}\right) = \frac{y_k}{e^{2\epsilon}}\frac{\partial Y_{k-2}}{\partial y_{k-2}} = \ldots = \frac{y_k}{e^{k\epsilon}}\frac{\partial Y}{\partial y} \\ &= \frac{y_ke^{2\epsilon}}{e^{k\epsilon}} = e^{(2-k)\epsilon}y_k, \quad k=1,2,\ldots. \end{aligned}$$

Aquí la k-ésima extensión de éste grupo de homotecias está dado por

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\epsilon}x, \\ y^* &= e^{2\epsilon}y, \\ y_i^* &= e^{(2-i)\epsilon}y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior se sigue inmediatamente que

$$\begin{aligned} y_k^* &= y_k + \epsilon\eta^{(k)} + O(\epsilon^2) \\ e^{(2-k)\epsilon}y_k &= y_k + \epsilon\eta^{(k)} + O(\epsilon^2) \\ y_k\left(e^{(2-k)\epsilon} - 1\right) &= \epsilon\eta^{(k)} + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Usando la Regla de L'Hôpital nos queda

$$\lim_{\epsilon\to 0} y_k(2-k)e^{(2-k)\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} y_k\left(\frac{e^{(2-k)\epsilon} - 1}{\epsilon}\right) = \lim_{\epsilon\to 0} \eta^{(k)}$$

Por lo tanto

$$\eta^{(k)} = (2-k)y_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Usando el Teorema 1.30 con $(\xi, \eta) = (x, 2y)$, nos da

$$\begin{aligned} \eta^{(k)} &= y_k\frac{\partial\eta^{(k-1)}}{\partial y_{k-1}} - y_k = y_k\left(\frac{\partial\eta^{(k-1)}}{\partial y_{k-1}} - 1\right) = y_k\left(\frac{\partial\left(y_{k-1}\frac{\partial\eta^{(k-2)}}{\partial y_{k-2}} - y_{k-1}\right)}{\partial y_{k-1}} - 1\right) \\ &= y_k\left(\frac{\partial\eta^{(k-2)}}{\partial y_{k-2}} - 2\right) = \ldots = y_k\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - k\right) \\ &= y_k(2-k) \end{aligned}$$

Capítulo 2

Invarianza de una EDO y aplicaciones

Gracias a la prolongación del generador infinitesimal podemos caracterizar cuando una EDO es admitida por un grupo. Este resultado es conocido como el Criterio Infinitesimal para la Invarianza de una EDO y nos sirve, entre otras cosas, para encontrar los infinitesimales $(\xi(x,y),\eta(x,y))$ admitidos por la EDO $y_n = f(x,y,y_1,\ldots,y_{n-1})$ resolviendo un sistema de EDP's lineales homogéneas denominado *ecuaciones determinantes*.

Además de ésto, el criterio nos dice que toda EDO puede ser reducida a orden uno mediante métodos constructivos.

Al estudiar las EDO's de primer orden se muestra que podemos encontrar la solución general de éstas desde el infinitesimal de un grupo admitido, ya sea mediante el uso de las coordenadas canónicas adecuadas o determinando un factor integrante sin hacer uso de alguna solución particular de las mismas.

2.1. Invarianza de una Ecuación Diferencial Ordinaria

Definición 2.1 El grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (ϵ)

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\epsilon) = x + \epsilon\xi(x,y) + O(\epsilon^2), \\ y^* &= Y(x,y;\epsilon) = y + \epsilon\eta(x,y) + O(\epsilon^2), \qquad (\star) \end{aligned}$$

es admitido por la EDO de orden n

$$y_n = f(x,y,y_1,\ldots,y_{n-1}), \tag{2.1}$$

donde

$$y_k = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

si su n-ésima extensión, definida por $(\star)$ y (1.53) para $k = n$, deja invariante a la superficie definida por (2.1).

La invarianza de la superficie (2.1) bajo la n-ésima extensión de $(\star)$ significa que toda curva solución $y = \Theta(x)$ de esta se transforma en alguna otra curva solución $y = \phi(x; \epsilon)$ de la misma bajo la acción de dicho grupo. Además, si una transformación $(\star)$ convierte cualquier curva solución $y = \Theta(x)$ de (2.1) en otra curva solución $y = \phi(x; \epsilon)$, entonces la superficie es invariante bajo $(\star)$ con

$$y_k = \frac{\partial^k \phi(x; \epsilon)}{\partial x^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Una curva solución $y = \Theta(x)$ de (2.1) satisface $\Theta^{(n)}(x) = f(x, \Theta(x), \Theta'(x), \ldots, \Theta^{(n-1)}(x))$ y por lo tanto se encuentra en la superficie (2.1) con $y = \Theta(x), y_k = \Theta^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Se sigue inmediatamente que la familia de todas las curvas solución de (2.1) es invariante bajo $(\star)$ si y sólo si dicha EDO admite el grupo $(\star)$.

Teorema 2.2 (Criterio Infinitesimal para la Invarianza de una EDO). Sea

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \qquad (\star\star)$$

el generador infinitesimal de $(\star)$. Sea (1.55) con $k = n$ el generador infinitesimal n-ésimo extendido de $(\star\star)$ cuando $\eta^{(k)}(x, y, y_1, \ldots, y_k)$ está dado por (1.56) en términos de $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $(\star)$ es admitida por (2.1) si y sólo si

$$\mathbf{X}^{(n)}(y_n - f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})) = 0,$$

es decir

$$\eta^{(n)}(x, y, y_1, \ldots, y_n) = \mathbf{X}^{(n-1)} f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0 \tag{2.2}$$

cuando $y_n = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Demostración

Se sigue directamente de la Definición 2.1 y del Teorema 1.14 (i) aplicado a la n-ésima extensión del grupo $(\star)$. □

De manera más general, una EDO $F(x, y, y_1, \ldots, y_n) = 0$ admite $(\star)$ con generador infinitesimal $(\star\star)$ si y sólo si

$$\mathbf{X}^{(n)} F(x, y, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad \textit{cuando} \quad F(x, y, y_1, \ldots, y_n) = 0. \tag{2.3}$$

Algunos Ejemplos del Criterio Infinitesimal para la Invarianza de una EDO

(1) Grupo de Traslaciones

La solución general de la EDO de primer orden

$$y_1 = F(x) \tag{2.4}$$

es

$$y = \int F(x)dx + C \tag{2.5}$$

Observamos que el lado derecho de (2.4) no depende de y. En particular el grupo de Lie de traslaciones uniparamétrico (ϵ)

$$x^* = x, \tag{2.6}$$
$$y^* = y + \epsilon, \tag{2.7}$$

es admitido por (2.4) ya que bajo (2.6),(2.7), tenemos que

$$y_1^* = \frac{dy^*}{dx^*} = \frac{dy}{dx} = y_1 \quad y \quad F(x^*) = F(x), \tag{2.8}$$

Así que bajo (2.6),(2.7) la superficie $y_1 = F(x)$ es invariante en el espacio (x, y, y_1).
Además es fácil ver que la EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

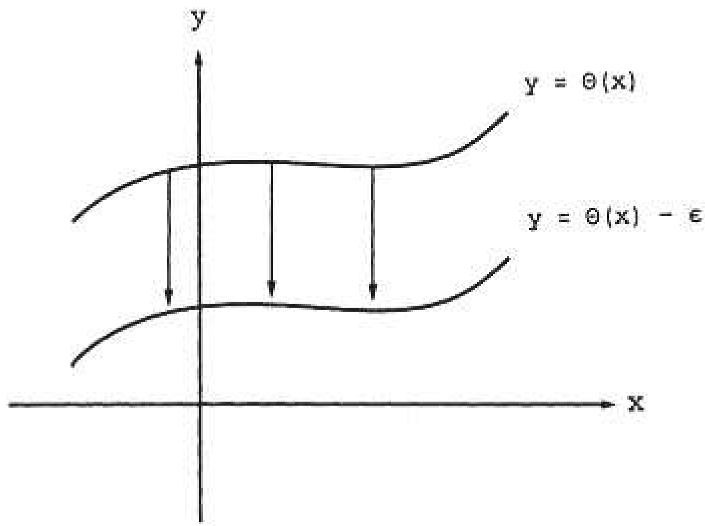
es invariante bajo (2.6),(2.7) si y sólo si para cualquier valor del parámetro ϵ

$$f(x^*, y^*) \equiv f(x, y + \epsilon) \equiv f(x, y),$$

es decir, $f(x, y)$ es independiente de y o, equivalentemente, $f(x, y) \equiv F(x)$ para alguna función $F(x)$. Por lo tanto la reducción de (2.4) a (2.5) es equivalente a la invarianza de (2.4) bajo (2.6),(2.7).

Bajo la acción de (2.6),(2.7) una curva solución $y = \Theta(x)$ de (2.4) se transforma en una curva $y^* = \Theta(x^*)$ la cual corresponde a la curva solución $y = \Theta(x) - \epsilon$ de (2.4).

Por lo tanto, de la invarianza de (2.4) bajo (2.6),(2.7) vemos que si $y = \Theta(x)$ es una solución particular de (2.4) entonces $y = \Theta(x) + C$ es la solución general de la misma EDO para una constante arbitraria C.



(2) Grupo de Homotecias

La EDO de primer orden

$$y_1 = F\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.9}$$

comunmente llamada una *ecuación homogénea*, admite el grupo de Lie de homotecias uniparamétrico (α)

$$x^* = \alpha x, \tag{2.10}$$
$$y^* = \alpha y, \tag{2.11}$$

debido a que

$$y_1^* = \frac{dy^*}{dx^*} = \frac{\alpha dy}{\alpha dx} = y_1, \quad y \quad F\left(\frac{y^*}{x^*}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Bajo la acción de (2.10),(2.11) una curva solución $y = \Theta(x)$ de (2.9) se transforma en una curva $y^* = \Theta(x^*)$ la cual corresponde a la curva solución

$$y = \frac{1}{\alpha}\Theta(\alpha x)$$

de (2.9). Se sigue que si $y = \Theta(x)$ es una solución particular de (2.9), y la curva $y - \Theta(x) = 0$ no es una curva invariante bajo (2.10),(2.11) (es decir, $\Theta(x) \neq \lambda x$ para alguna constante fija λ), entonces

$$y = \frac{1}{C}\Theta(Cx)$$

es la solución general de (2.9) para una constante arbitraria C.

El generador infinitesimal para (2.10),(2.11) es $\mathbf{X} = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$. La coordenada canónica $r(x,y)$ satisface

$$\mathbf{X}r = x\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} = 0.$$

La correspondientes ecuaciones diferenciales características se reducen a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\ \log y &= \log x + C \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Por ello

$$r(x,y) = \frac{y}{x} = constante.$$

La coordenada canónica $s(x,y)$ satisface

$$\mathbf{X}s = x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y} = 1.$$

Una solución particular de la ecuación anterior es $s(x,y) = s(y)$ la cual satisface

$$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{y}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int ds &= \int \frac{dy}{y} \\ s(x,y) &= \log y \end{aligned}$$

Así, la reducción de orden de (2.9) desde la invarianza bajo (2.10),(2.11) se realiza escogiendo las coordenadas canónicas (Capítulo 1.7)

$$\begin{aligned} r &= \frac{y}{x}, && (2.12) \\ s &= \log y, && (2.13) \end{aligned}$$

como nuevas coordenadas. Entonces la EDO (2.9) es invariante bajo el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (ϵ)

$$\begin{aligned} r^* &= r, \\ s^* &= s + \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto se sigue desde el primer ejemplo que en términos de las coordenadas canónicas (2.12),(2.13) la EDO (2.9) debe ser de la forma

$$\frac{ds}{dr} = G(r)$$

para alguna función $G(r)$. Por tanto su solución general es

$$s = \int G(r)dr + C,$$

o, en términos de las coordenadas (x, y),

$$y = e^{\int^{\frac{y}{x}} G(r)dr + C}.$$

$G(r)$ está determinada como sigue:

$$ds = \frac{1}{y}dy, \quad dr = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy.$$

Por lo tanto

$$G(r) = \frac{ds}{dr} = \frac{y_1}{ry_1 - r^2} = \frac{F(r)}{rF(r) - r^2},$$

donde $F(r)$ está dada por la EDO (2.9).

2.1.1. Transformación de Soluciones de una EDO

Bajo la acción de un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (ϵ) admitido por una EDO, una curva solución es transformada en una familia de curvas solución de un parámetro si la curva solución no es invariante bajo el grupo. Ahora derivaremos una fórmula para ésta familia de soluciones de un parámetro generadas desde una solución conocida. Suponiendo que el grupo de Lie de transformaciones de un parámetro es parametrizado tal que es de la forma

$$x^* = X(x, y; \epsilon) = e^{\epsilon \mathbf{X}} x, \tag{2.14}$$
$$y^* = Y(x, y; \epsilon) = e^{\epsilon \mathbf{X}} y, \tag{2.15}$$

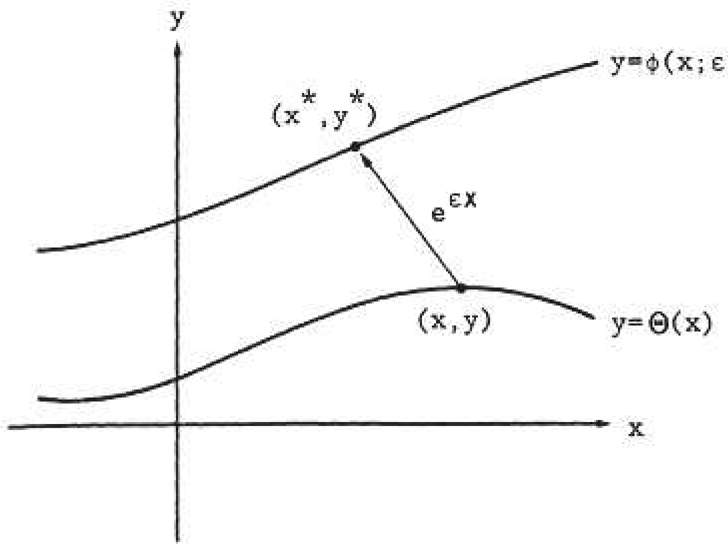
con generador infinitesimal

$$\mathbf{X} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.16}$$

Consideremos una solución $y = \Theta(x)$ de $y_n = f(x, y, y_1, \ldots\ldots, y_{n-1})$ (con $y_k = \frac{d^k y}{dx^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$) la cual no es una solución invariante correspondiente a (2.16). La transformación (2.16) transforma un punto $(x, \Theta(x))$ dentro de la curva solución $u = \Theta(x)$ en el punto (x^*, y^*) con

$$x^* = X(x, \Theta(x); \epsilon), \tag{2.17}$$
$$y^* = Y(x, \Theta(x); \epsilon). \tag{2.18}$$

Para un valor fijo ϵ, las ecuaciones (2.17),(2.18) definen una representación paramétrica de la nueva curva solución con x jugando el rol de un parámetro. En la siguiente figura se muestra la transformación de una curva solución, donde una distinta curva solución $y = \phi(x;\epsilon)$ de $y_n = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ corresponde a cada valor del parámetro ϵ.



Uno puede eliminar x de (2.17),(2.18) sustituyendo la transformación inversa de (2.14), es decir,

$$x = X(x^*, y^*; -\epsilon)$$

en (2.18):

$$\begin{aligned} y^* &= Y(X(x^*, y^*; -\epsilon), \Theta(X(x^*, y^*; -\epsilon)); \epsilon), \\ &= Y(e^{-\epsilon \mathbf{X}} x^*, \Theta(e^{-\epsilon \mathbf{X}} x^*); \epsilon). \end{aligned} \tag{2.19}$$

La ecuación (2.19) nos lleva a una relación entre las coordenadas x e y de la nueva curva solución, la cual denotamos por $y = \phi(x;\epsilon)$.

Teorema 2.3 Supongamos
(i) $y = \Theta(x)$ es una solución (curva solución) de la EDO de orden n,
$y_n = f(x, y, y_1, \ldots\ldots, y_{n-1})$, con $y_k = \frac{d^k y}{dx^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$;
(ii) La EDO $y_n = f(x, y, y_1, \ldots\ldots, y_{n-1})$, con $y_k = \frac{d^k y}{dx^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ admite (2.14),(2.15);
(iii) $y = \Theta(x)$ no es una superficie invariante de (2.14),(2.15).

Entonces

$$
\begin{aligned}
y &= Y(e^{\epsilon \mathbf{X}}x, \Theta(e^{\epsilon \mathbf{X}}x); -\epsilon) \\
&= Y(X(x, y; \epsilon), \Theta(X(x, y; \epsilon)); -\epsilon)
\end{aligned}
$$

define implícitamente una familia de soluciones de un parámetro $y = \phi(x; \epsilon)$ de la EDO $y_n = f(x, y, y_1, \ldots\ldots, y_{n-1})$, con $y_k = \frac{d^k y}{dx^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración

Usando el hecho de que $y = \Theta(x)$ es solucion de la EDO $y_n = f(x, y, y_1, \ldots\ldots, y_{n-1})$, y usando las ecuaciones (2.14),(2.15) y sus transformaciones inversas tenemos el siguiente desarrollo:

$$
\begin{aligned}
y &= Y(x^*, y^*; -\epsilon) \\
&= Y(e^{\epsilon \mathbf{X}}x, e^{\epsilon \mathbf{X}}y; -\epsilon) \\
&= Y(e^{\epsilon \mathbf{X}}x, e^{\epsilon \mathbf{X}}\Theta(x); -\epsilon) \\
&= Y(e^{\epsilon \mathbf{X}}x, e^{\epsilon \mathbf{X}}\Theta(e^{-\epsilon \mathbf{X}}x^*); -\epsilon) \\
&= Y(e^{\epsilon \mathbf{X}}x, e^{\epsilon \mathbf{X}}e^{-\epsilon \mathbf{X}}\Theta(x^*); -\epsilon) \\
&= Y(e^{\epsilon \mathbf{X}}x, \Theta(e^{\epsilon \mathbf{X}}x); -\epsilon) \\
&= Y(X(x, y; \epsilon), \Theta(X(x, y; \epsilon)); -\epsilon),
\end{aligned}
$$

donde éstas nuevas ecuaciones generan una relación entre x e y de la nueva curva solución $y = \phi(x; \epsilon)$, la cual define una familia de soluciones uniparamétrica de la EDO $y_n = f(x, y, y_1, \ldots\ldots, y_{n-1})$. $\square$

2.2. EDO's de Primer Orden

Ahora consideremos las aplicaciones de transformaciones infinitesimales al estudio de una EDO de primer orden

$$
y' = f(x, y) \qquad \left[y' = \frac{dy}{dx}\right]. \tag{2.20}
$$

Asumimos que la EDO (2.20) admite un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico

$$
\begin{aligned}
x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2), \\
y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2), \qquad (\bullet)
\end{aligned}
$$

con generador infinitesimal

$$
\mathbf{X} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad (\bullet\bullet)
$$

Mostraremos cómo encontrar la solución general de la EDO (2.20) desde el infinitesimal $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ de un grupo admitido ($\bullet$) desde dos puntos de vista:
(i) uso de coordenadas canónicas;
(ii) determinación de un factor integrante.
La solución general de (2.20), obtenida usando coordenadas canónicas o determinando un factor integrante, no depende del conocimiento de una solución particular de la misma.

2.2.1. Coordenadas Canónicas

Dado cualquier grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico ($\bullet$), existen coordenadas canónicas $(r(x,y), s(x,y))$, determinadas resolviendo el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{X}r &= 0, \\ \mathbf{X}s &= 1, \end{aligned}$$

tal que ($\bullet$) se convierte en el grupo de traslación

$$\begin{aligned} r^* &= r, \\ s^* &= s + \epsilon. \end{aligned} \tag{2.21}$$

En términos de las coordenas canónicas la EDO (2.20) se convierte en

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + s_y y'}{r_x + r_y y'} = F(r,s) = \frac{s_x + s_y f(x,y)}{r_x + r_y f(x,y)}. \tag{2.22}$$

La invarianza de la EDO (2.20), y por lo tanto de la EDO (2.22), bajo (2.21) quiere decir que F(r,s) no depende de s. Por lo tanto la EDO (2.22) es de la forma

$$\frac{ds}{dr} = G(r) = \frac{s_x + s_y f(x,y)}{r_x + r_y f(x,y)}. \tag{2.23}$$

En consecuencia la solución general de la EDO (2.20) está dada por

$$s(x,y) = \int^{r(x,y)} G(\rho)d\rho + C, \quad C = constante. \tag{2.24}$$

Algunos ejemplos son

(1) Ecuación Lineal Homogénea

La EDO lineal homogénea de primer orden

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2.25}$$

admite el grupo de Lie de transformaciones de homotecia uniparamétrico (α)

$$\begin{aligned} x^* &= x, \\ y^* &= \alpha y, \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} y_1^* + p(x^*)y^* &= \frac{dy^*}{dx^*} + p(x)\alpha y = \alpha\frac{dy}{dx} + p(x)\alpha y \\ &= \alpha\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = \alpha\left(y' + p(x)y\right) \\ &= \alpha * 0 = 0. \end{aligned}$$

Dado que $(\xi, \eta) = (0, y)$ tenemos que $\mathbf{X} = y\dfrac{\partial}{\partial y}$, de aqui obtenemos las coordenadas canónicas

$$\mathbf{X}r = y\frac{\partial r}{\partial y} = 0 \quad \to \quad \frac{\partial r}{\partial y} = 0 \quad \to \qquad r = F(x),$$

en particular r=x.

$$\mathbf{X}s = y\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \quad \to \quad ds = \frac{dy}{y} \quad \to \qquad s = \log y.$$

En términos de las coordenadas canónicas correspondientes

$$\begin{aligned} r &= x, \\ s &= \log y, \end{aligned}$$

la EDO (2.25) se convierte en

$$\frac{ds}{dr} = \frac{y'}{y} = -p(r),$$

así que la solución general de (2.25) está dada por

$$s(x, y) = \log y = -\int^x p(\rho)d\rho + C,$$

o

$$y = Ce^{-\int^x p(\rho)d\rho}, \quad C = cte.$$

(2) Ecuación Lineal No Homogénea

La EDO lineal no homogénea de primer orden

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{2.26}$$

admite el grupo de Lie de transformaciones de homotecia uniparamétrico (ϵ)

$$\begin{aligned} x^* &= x, && (2.27)\\ y^* &= y + \epsilon\phi(x), && (2.28) \end{aligned}$$

donde $u = \phi(x)$ es una solución particular de la ecuación homogénea asociada

$$u' + p(x)u = 0.$$

Esto es debido a que

$$\begin{aligned} y_1^* + p(x^*)y^* - g(x^*) &= \epsilon\phi'(x) + y_1 + p(x)\left(y + \epsilon\phi(x)\right) - g(x)\\ &= y_1 + p(x)y - g(x) + \epsilon\phi'(x) + p(x)\epsilon\phi(x)\\ &= \epsilon\left(u' + p(x)u\right) = \epsilon(0)\\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $(\xi, \eta) = (0, \phi(x))$, el generador infinitesimal correspondiente a (2.27),(2.28) es

$$\mathbf{X} = \phi(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

obtenemos las coordenadas canónicas

$$\mathbf{X}r = \phi(x)\frac{\partial r}{\partial y} = 0 \quad \to \quad \frac{\partial r}{\partial y} = 0 \quad \to \qquad r = F(x),$$

en particular r=x.

$$\mathbf{X}s = \phi(x)\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \quad \to \quad ds = \frac{dy}{\phi(x)} \quad \to \qquad s = \frac{y}{\phi(x)}.$$

En términos de las coordenadas canónicas

$$\begin{aligned} r &= x,\\ s &= \frac{y}{\phi(x)}, \end{aligned}$$

podemos reducir la EDO (2.26) de la siguiente forma. Sabemos que $dx = dr$ y $dy = s\phi'(r)dr + \phi(r)ds$, y sustituyendo en (2.26) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{s\phi'(r)dr + \phi(r)ds}{dr} + s\phi(r)p(r) &= g(r)\\ \left[s\phi'(r) + s\phi(r)p(r)\right] + \phi(r)\frac{ds}{dr} &= g(r)\\ s\left[\phi'(r) + \phi(r)p(r)\right] + \phi(r)\frac{ds}{dr} &= g(r)\\ s * 0 + \phi(r)\frac{ds}{dr} &= g(r)\\ \phi(r)\frac{ds}{dr} &= g(r). \end{aligned}$$

Así la EDO se reduce a
$$\frac{ds}{dr} = \frac{g(r)}{\phi(r)},$$
por lo que su solución general está dada por
$$s(x, y) = \frac{y}{\phi(x)} = \int^x \frac{g(\rho)}{\phi(\rho)} d\rho + C$$
o
$$y = \phi(x) \int^x \frac{g(\rho)}{\phi(\rho)} d\rho + C\phi(x), \quad C = cte.$$

2.2.2. Factores Integrantes

Una EDO de primer orden (2.20) puede ser escrita en forma diferencial
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.29}$$
donde $f(x, y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Si
$$\omega(x, y) = constante \tag{2.30}$$
es la solución general (familia de curvas solución) de (2.20), entonces
$$N\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0. \tag{2.31}$$
Asumimos que la EDO (2.20) admite un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (•). Entonces (•) deja invariante a la familia de curvas solución (2.30). Sin pérdida de generalidad, la familia de curvas solución (2.30) satisface
$$\mathbf{X}\omega = \xi(x, y)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial\omega}{\partial y} = 1 \tag{2.32}$$
para el generador infinitesimal (••). El sistema dado por (2.31) y (2.32) puede resolverse para las derivadas parciales de primer orden
$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{M}{M\xi + N\eta}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{N}{M\xi + N\eta}. \tag{2.33}$$
Pero $d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy$ es una diferencial exacta. Por lo tanto se sigue que
$$\mu(x, y) = \frac{1}{M\xi + N\eta} \tag{2.34}$$
es un factor integrante para (2.29). Por otro lado tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.4 Si $\mu(x,y)$ es un factor integrante de (2.29), entonces cualquier $(\xi(x,y),\eta(x,y))$ que satisfaga (2.34) define un generador infinitesimal $\mathbf{X}=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ admitido por la EDO de primer orden $y'=f(x,y)$.

Demostración

Como $\mu(x,y)$ es factor integrante de $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ entonces la ecuación diferencial $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ es exacta, por lo que

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{M}{M\xi+N\eta}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{N}{M\xi+N\eta}\right)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Derivando estas expresiones llegamos a

$$\frac{N\eta M_y-M^2\xi_y-MN\eta_y-M\eta N_y}{(M\xi+N\eta)^2}=\frac{M\xi N_x-N\xi M_x-NM\xi_x-N^2\eta_x}{(M\xi+N\eta)^2}$$

Desarrollando lo anterior:

$$N(\xi M_x+\eta M_y)-M(\xi N_x+\eta N_y)+MN(\xi_x-\eta_y)+N^2\eta_x-M^2\xi_y=0$$

Por otro lado $\mathbf{X}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$ es admitido por la EDO $y'=f(x,y)$ si y sólo si $\mathbf{X}^{(1)}(y'-f(x,y))=0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(1)}(y'-f(x,y)) &= \mathbf{X}^{(1)}\left(y'+\frac{M}{N}\right)\\
&= \xi\frac{\partial(y'+\frac{M}{N})}{\partial x}+\eta\frac{\partial(y'+\frac{M}{N})}{\partial y}+\eta^{(1)}\frac{\partial(y'+\frac{M}{N})}{\partial y_1}\\
&= \frac{\xi NM_x-M\xi N_x+\eta NM_y-\eta MN_y}{N^2}+\eta_x-\frac{M}{N}\eta_y+\frac{M}{N}\xi_x-\frac{M^2}{N^2}\xi_y\\
&= \frac{N(\xi M_x+\eta M_y)-M(\xi N_x+\eta N_y)+MN(\xi_x-\eta_y)+N^2\eta_x-M^2\xi_y}{N^2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Como consecuencia $X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$ es admitido por la EDO $y'=f(x,y)$. $\square$

Teorema 2.5 Para cualquier función $\xi(x,y)$, el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico con generador infinitesimal

$$\mathbf{X}=\xi(x,y)\left[\frac{\partial}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right] \tag{2.35}$$

deja invariante a cada curva solución de la EDO de primer orden $y'=f(x,y)$.

Demostración

Sea $y = \Theta(x)$ una curva solución de $y' = f(x,y)$. Entonces

$$y' = \Theta'(x) = f(x, \Theta(x)). \tag{2.36}$$

Consideremos el generador infinitesimal $\mathbf{X}$ dado por (2.35). Entonces

$$\mathbf{X}(y - \Theta(x)) = \xi(x,y)\left[f(x,y) - \Theta'(x)\right].$$

Por lo tanto si $y = \Theta(x)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(y - \Theta(x)) &= \xi(x,\Theta(x))\left[f(x,\Theta(x)) - \Theta'(x)\right]. \\ &= 0 \quad de \quad (2.36).\end{aligned}$$

Como consecuencia $y - \Theta(x) = 0$ es una curva invariante para el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico con generador infinitesimal (2.35). $\square$

De los Teoremas 2.4 y 2.5 vemos que dos tipos de grupos Lie de transformaciones uniparamétricos son admitidos por cualquier EDO de primer orden $y' = f(x,y)$.

(i) *Grupos de Lie triviales uniparamétricos* con generadores infinitesimales $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ son siempre admitidos por $y' = f(x,y)$ si $\frac{\eta}{\xi} \equiv f(x,y)$. Aquí cada curva solución de $y' = f(x,y)$ es una curva invariante y cada curva invariante es una curva solución de $y' = f(x,y)$. Este tipo de grupo no nos sirve para reducir $y' = f(x,y)$ por cuadratura debido a que para encontrar las coordenadas canónicas del grupo es necesario encontrar primero la solución general de $y' = f(x,y)$.

(ii) *Grupos de Lie no triviales uniparamétricos* cuyos infinitesimales $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ no satisfacen la ecuación algebraica $F\left(x, y, \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}\right) \equiv 0$ en todo dominio en $\mathbb{R}^2$ pero satisface la condición de invarianza

$$\mathbf{X}^{(1)}F(x,y,y') = \mathbf{X}^{(1)}(y' - f(x,y)) = 0 \quad \textit{cuando} \quad F(x,y,y') = y' - f(x,y) = 0.$$

En este caso la familia de curvas solución de $y' = f(x,y)$ es invariante, pero una curva solución arbitraria de $y' = f(x,y)$ no es una curva invariante. Este tipo de grupo es útil para reducir $y' = f(x,y)$ por cuadratura siempre que podamos resolver la EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi}$.

2.3. Ecuación para los infinitesimales de una EDO

2.3.1. EDO de primer orden

Del Teorema 2.2 vemos que la EDO de primer orden $y' = f(x,y)$ admite el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico con generador infinitesimal $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ si y sólo si $\eta^{(1)} = \xi f_x + \eta f_y$ cuando $y' = f(x,y)$, donde el primer generador infinitesimal extendido está dado por $\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2$.

Por lo tanto $y' = f(x,y)$ admite $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ si y sólo si $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ satisface $\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2 - \xi f_x - \eta f_y = 0$.

Ésta ecuación es llamada la *ecuación determinante* para las transformaciones infinitesimales admitidas por $y' = f(x,y)$.

Es fácil notar que para cualquiera $\xi(x,y)$, la ecuación $\eta(x,y) = \xi(x,y)f(x,y)$ resuelve la *ecuación determinante*.

Para cualquier $\xi(x,y)$, la ecuación $\eta(x,y) = \xi(x,y)f(x,y) + \chi(x,y)$ nos lleva a la solución general de la ecuación $\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2 - \xi f_x - \eta f_y = 0$, donde $\chi(x,y)$ es la solución general de la ecuación diferencial parcial lineal de primer orden $\chi_x + f\chi_y - f_y\chi = 0$.

Como consecuencia el problema de encontrar todos los grupos de Lie de transformaciones admitidos por una EDO de primer orden dada por $y' = f(x,y)$, se reduce a encontrar la solución general de la EDP anterior. Pero para poder encontrar dicha solución general debemos conocer la solución general de la EDO de primer orden dada. Sin embargo, una solución particular χ de la EDP

$$\chi_x + f\chi_y - f_y\chi = 0,$$

o de forma equivalente, (ξ, η) de

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)f - \xi_y f^2 - \xi f_x - \eta f_y = 0,$$

con $\eta \neq \xi f$, nos lleva al grupo de Lie uniparamétrico admitido por la EDO dada, y por lo tanto a la solución general de la misma ecuación mediante cuadraturas. Desafortunadamente una solución particular χ de $\chi_x + f\chi_y - f_y\chi = 0$ no puede encontrarse mediante un procedimiento deductivo debido a su complejidad.

2.3.2. EDO de n-ésimo orden

Del Teorema 2.2 para la invarianza vemos que la EDO de n-ésimo orden $y_n = f(x, y, y_1 \ldots, y_{n-1})$ admite el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico con generador infinitesimal $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ si y sólo si $\mathbf{X}^{(n)}[y_n - f(x, y, y_1 \ldots, y_{n-1})] = 0$ cuando $y_n = f(x, y, y_1 \ldots, y_{n-1})$, donde $\mathbf{X}^{(n)} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x,y,y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \eta^{(n)}(x,y,y_1,\ldots,y_n)\frac{\partial}{\partial y_n}$ es el n-ésimo generador infinitesimal extendido.

Recordemos que $\eta^{(k)}(x, y.y_1, \ldots, y_k) = \frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx} - y_k\frac{D\xi(x,y)}{Dx}$, $k = 1, 2, \ldots$, donde $\eta^{(0)} = \eta(x, y)$. Por lo tanto, llegamos a

$$\eta^{(n)} - \left[\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + \eta^{(n-1)}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\right] = 0 \tag{2.37}$$

cuando $y_n = f(x, y, y_1 \ldots, y_{n-1})$.

El siguiente teorema es probado en Bluman (1989).

Teorema 2.6. El k-ésimo generador infinitesimal extendido tiene las siguientes propiedades:
(i) $\eta^{(k)}$ es lineal en y_k, $k = 2, 3, \ldots$.
(ii) $\eta^{(k)}$ es un polinomio en $y_1, y_2, \ldots, y_k$ cuyos coeficientes son lineales homogéneos en $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ hasta sus derivadas parciales de k-ésimo orden.

Del teorema anterior se sigue que si $f(x, y, y_1 \ldots, y_{n-1})$ es un polinomio en $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, entonces (2.37) es una ecuación polinomial en $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ cuyos coeficientes son lineales homogéneos en $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ y sus derivadas parciales hasta el n-ésimo orden. Debido a que para cualquier EDO de n-ésimo orden $y_n = f(x, y, y_1 \ldots, y_{n-1})$ podemos asignar valores arbitrarios a cada una de las $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ en cualquier punto fijo x, se sigue que el coeficiente de cada término polinomial en (2.37) debe desaparecer. Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales homogéneas para $(\xi(x, y), \eta(x, y))$. Este sistema lineal define el conjunto de *ecuaciones determinantes* para los infinitesimales admitidos por la EDO de n-ésimo orden $y_n = f(x, y, y_1 \ldots, y_{n-1})$. Este conjunto está sobredeterminado si $n \geq 2$ debido a que el número de ecuaciones determinantes es mayor que 2 (el número de incógnitas ξ y η).

Si $f(x, y, y_1 \ldots, y_{n-1})$ no es un polinomio en $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, podemos seguir derivando un correspondiente conjunto de ecuaciones determinantes desde (2.37) basado en la independencia de las variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ en (2.37).

Teorema 2.7. Consideremos una EDO de tercer orden de la forma

$$y_3 = g(x, y)y_2 + h(x, y, y_1). \tag{2.38}$$

Si (2.38) admite el generador infinitesimal $\mathbf{X} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$, entonces

$$\xi_y = 0, \quad \eta_{yy} = 0.$$

Demostración

El criterio de invarianza para la ecuación $y_3 = g(x, y)y_2 + h(x, y, y_1)$ es:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(3)}(y_3 - g(x, y)y_2 - h(x, y, y_1)) &= -\xi(g_x y_2 + h_x) - \eta(g_y y_2 + h_y) - \eta^{(1)}h_{y_1} - \eta^{(2)}g + \eta^{(3)} \\ &= 0,\end{aligned}$$

donde $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}$ están dadas por $\eta^{(k)}(x, y, y_1, \ldots, y_k) = \frac{D\eta^{k-1}}{Dx} - y_k \frac{D\xi(x,y)}{Dx}$ para $k = 1, 2, 3$. En otras palabras:

$$\begin{aligned}
\eta^{(1)} &= \eta_x + y_1\eta_y - y_1\xi_x - y_1^2\xi_y \\
\eta^{(2)} &= \eta_{xx} + 2y_1\eta_{xy} - y_1\xi_{xx} - 2y_1^2\xi_{xy} + y_1^2\eta_{yy} - y_1^3\xi_{yy} - 2y_2\xi_x + y_2\eta_y - 3y_1y_2\xi_y \\
\eta^{(3)} &= \eta_{xxx} + 3y_1\eta_{xxy} - y_1\xi_{xxx} + 3y_1^2\eta_{xyy} - 3y_1^2\xi_{xxy} + y_1^3\eta_{yyy} - 3y_1^3\xi_{xyy} \\
&\quad -y_1^4\xi_{yyy} + 3y_2\eta_{xy} - 3y_2\xi_{xx} + 3y_1y_2\eta_{yy} - 9y_1y_2\xi_{xy} - 6y_1^2y_2\xi_{yy} - 3y_2^2\xi_y \\
&\quad +y_3\eta_y - 3y_3\xi_x - 4y_1y_3\xi_y.
\end{aligned}$$

Usando las fórmulas anteriores de $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}$ y sustituyendolas en la ecuación de invarianza, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
-3\xi_y(y_2)^2 &= 0 \quad \ldots \quad (1) \\
-4\xi_y(y_1y_3) &= 0 \quad \ldots \quad (2) \\
(3\xi_y g + 3\eta_{yy} - 9\xi_{xy})(y_1y_2) &= 0 \quad \ldots \quad (3)
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos que $\xi_y = 0$, y sustituyendo este último valor en la ecuación (3) llegamos a $\eta_{yy} = 0$. $\square$

Ejemplo

Ecuación de Blasius

Paul Richard Heinrich Blasius fue un ingeniero alemán especializado en mecánica de fluidos. Su principal contribución fue proporcionar las bases matemáticas para el estudio del arrastre a través de la teoría de capa límite.

La solución para la capa límite laminar sobre una placa plana fue obtenida por Blasius en 1908 empleando una expansión en series de potencias. Para un flujo bidimensional en estado estable con gradiente de presión despreciable, las ecuaciones de gobierno se reducen a:

$$y_3 + \frac{1}{2}yy_2 = 0 \tag{2.39}$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
y_1(0) = y(0) &= 0 \\
y_1(\infty) &= 1
\end{aligned}$$

Usaremos el método antes descrito para encontrar el grupo admitido por la ecuación (2.39).
El criterio de invarianza para la ecuación de Blasius es

$$\eta^{(3)} + \frac{1}{2}y_2\eta + \frac{1}{2}y\eta^{(2)} = 0 \quad \textit{cuando} \quad y_3 = -\frac{1}{2}yy_2, \tag{2.40}$$

donde $\eta^{(2)}, \eta^{(3)}$ están dados como en la demostración del Teorema 2.7.
Entonces (2.40) es la ecuación polinomial

$$\begin{aligned}
& \left[\eta_{xxx} + \frac{1}{2}y\eta_{xx}\right] + \left[3\eta_{xxy} - \xi_{xxx} + y\eta_{xy} - \frac{1}{2}y\xi_{xx}\right] y_1 \\
+ & \left[3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy} + \frac{1}{2}y\eta_{yy} - y\xi_{xy}\right](y_1)^2 + \left[\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy} - \frac{1}{2}y\xi_{yy}\right](y_1)^3 \\
- & \xi_{yyy}(y_1)^4 + \left[3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + \frac{1}{2}y\xi_x + \frac{1}{2}\eta\right] y_2 \\
+ & \left[3\eta_{yy} - 9\xi_{xy} - \frac{3}{2}y\xi_y\right] y_1 y_2 - 6\xi_{yy}(y_1)^2 y_2 - 3\xi_y (y_2)^2 = 0. \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

El conjunto resultante de ecuaciones determinantes para $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ es:

$$\eta_{xxx} + \frac{1}{2}y\eta_{xx} = 0, \qquad (2.42)$$

$$3\eta_{xxy} - \xi_{xxx} + y\eta_{xy} - \frac{1}{2}y\xi_{xx} = 0, \qquad (2.43)$$

$$3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy} + \frac{1}{2}y\eta_{yy} - y\xi_{xy} = 0, \qquad (2.44)$$

$$3\xi_{xyy} + \frac{1}{2}y\xi_{yy} - \eta_{yyy} = 0, \qquad (2.45)$$

$$\xi_{yyy} = 0, \qquad (2.46)$$

$$3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + \frac{1}{2}y\xi_x + \frac{1}{2}\eta = 0, \qquad (2.47)$$

$$3\eta_{yy} - 9\xi_{xy} - \frac{3}{2}y\xi_y = 0, \qquad (2.48)$$

$$\xi_{yy} = 0, \qquad (2.49)$$

$$\xi_y = 0. \qquad (2.50)$$

Debido a que la EDO (2.39) es de la forma (2.38) se sigue inmediatamente del Teorema 2.7 que $\xi_y = 0$, $\eta_{yy} = 0$. Por lo tanto el conjunto de ecuaciones determinantes resultante de (2.41) se reduce a (2.42),(2.43),(2.47).
Tomando $\frac{\partial}{\partial y}$ de (2.43) y $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ de (2.47), llegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(3\eta_{xxy} - \xi_{xxx} + y\eta_{xy} - \frac{1}{2}y\xi_{xx}\right) &= 0 \\
3\eta_{xxyy} - \xi_{xxxy} + y\eta_{xyy} + \eta_{xy} - \frac{1}{2}y\xi_{xxy} - \frac{1}{2}\xi_{xx} &= 0 \\
\eta_{xy} - \frac{1}{2}\xi_{xx} &= 0
\end{aligned}$$

y también a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + \frac{1}{2}y\xi_x + \frac{1}{2}\eta\right) &= 0\\
3\eta_{xxyy} - 3\xi_{xxxy} + \frac{1}{2}y\xi_{xxy} + \frac{1}{2}\eta_{xy} &= 0\\
\eta_{xy} &= 0
\end{aligned}$$

Es decir obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
\eta_{xy} - \frac{1}{2}\xi_{xx} &= 0\\
\eta_{xy} &= 0,
\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\eta_{xy} = \xi''(x) = 0.$$

Además (2.43) se satisface. Entonces

$$\begin{aligned}
\xi &= \alpha + \beta x,\\
\eta &= \gamma y + a(x).
\end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (2.47) nos lleva a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\beta y + \frac{1}{2}(\gamma y + a(x)) &= 0\\
\frac{1}{2}(y(\beta + \gamma) + a(x)) &= 0\\
a(x) + y(\beta + \gamma) &= 0,
\end{aligned}$$

Llegamos a $y(\beta + \gamma) = 0$, $a(x) = 0$; es decir, $a(x) = 0$ y $\gamma = -\beta$. No surgen más restricciones desde (2.42). Por lo tanto la ecuación de Blasius (2.39) sólo admite un grupo de Lie de tranformaciones biparamétrico correspondiente a los infinitesimales

$$\begin{aligned}
\xi &= \alpha + \beta x,\\
\eta &= -\beta y,
\end{aligned}$$

donde α, β son constantes arbitrarias.

Capítulo 3

Construcción de Soluciones Invariantes

Si una EDO admite un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico, entonces se pueden construir soluciones especiales sin el conocimiento de la solución general de la EDO. Tales soluciones son curvas invariantes del grupo, y por lo tanto son denominadas *soluciones invariantes*. Normalmente un número finito de curvas invariantes del grupo terminan siendo soluciones invariantes de la EDO.

También se demuestra un teorema que prueba que no es necesario encontrar todas las curvas de un grupo admitido por una EDO para determinar las soluciones invariantes; y nos dice que las soluciones invariantes se encuentran resolviendo ecuaciones algebraicas obtenidas desde la EDO y los infinitesimales del grupo.

Las soluciones invariantes tienen gran importancia para las EDO's de primer orden, ya que las soluciones separatrices y/o envolventes son soluciones invariantes para todo grupo no trivial admitido por la EDO.

3.1. Soluciones Invariantes

En este capítulo vamos a considerar una EDO de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0 \tag{3.1}$$

donde

$$y_k = y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

y un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\epsilon) = x + \epsilon\xi(x,y) + O(\epsilon^2), \\ y^* &= Y(x,y;\epsilon) = y + \epsilon\eta(x,y) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{3.2}$$

con generador infinitesimal

$$\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.3}$$

Definición 3.1 $y = \phi(x)$ es una **solución invariante** de (3.1) correspondiente al generador infinitesimal (3.3) del grupo (3.2) admitido por (3.1) si y sólo si
(i) $y = \phi(x)$ es una curva invariante de (3.2);
(ii) $y = \phi(x)$ resuelve (3.1).

La siguiente definición es una versión generalizada de la definición anterior:

$\Phi(x,y) = 0$ define una solución invariante de (3.1) como resultado de su invarinza bajo (3.2) si se cumplen las condiciones siguientes:
(i) $\Phi(x,y) = 0$ es una curva invariante de (3.2);
(ii) $\Phi(x,y) = 0$ resuelve (3.1).

De esta última definición de una solución invariante se sigue que $\Phi(x,y) = 0$ es una solución invariante de (3.1) relacionada a su invarianza bajo (3.2) si y sólo si
(i) $\Phi(x,y) = 0$ es una solución de la EDO de primer orden $y' = \dfrac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}$;
(ii) $\Phi(x,y) = 0$ resuelve $y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$.

Suponiendo que $\Phi(x,y) = 0$ es una curva invariante de (3.2), por el Teorema 1.14 (i) tenemos que $\mathbf{X}\Phi(x,y) = \xi\Phi_x + \eta\Phi_y = 0$, y así $\frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y} = y'$.
Es decir Φ es solución de $y' = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}$, por lo que se cumple el inciso (i).
Ahora el inciso (ii) se sigue inmediatamente del punto (ii) de la definición anterior.

3.2. Teorema para Soluciones Invariantes

Una forma para encontrar soluciones invariantes de la EDO (3.1) relacionada a su invarianza bajo el grupo (3.2) es obtener primero la solución general

$$g(x,y;C) = 0 \tag{3.4}$$

de la EDO

$$y' = \eta(x,y)/\xi(x,y)$$

(la familia de curvas invariantes de un parámetro de (3.2)) y entonces sustituir (3.4) en la EDO (3.1) para encontrar cuáles valores de $C = C^*$ hacen que (3.4) resuelva la EDO (3.1). Cualquiera de estos valores de $C = C^*$ produce una solución invariante

$$\Phi(x, y) = g(x, y; C^*) = 0$$

de (3.1) relacionada a su invarianza bajo (3.2).

Probaremos que generalmente es innecesario resolver la EDO $y' = \eta(x, y)/\xi(x, y)$ o cualquier otra EDO para encontrar las soluciones invariantes de (3.1) relacionadas a la invarianza de la EDO (3.1) bajo el grupo (3.2).

Teorema 3.2 Supongamos que la EDO $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$ admite el grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico (3.2) en el dominio D$\subset \mathbb{R}^2$. Sin pérdida de generalidad asumimos que $\xi(x, y) \neq 0$ en D. Sea

$$\Psi(x, y) = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}, \quad \mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial x} + \Psi(x, y)\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\xi(x, y)}\mathbf{X},$$

y

$$y_k = \mathbf{Y}^{k-1}\Psi, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Para la EDO (3.1) consideramos la función algebraica $Q(x, y)$ definida por

$$Q(x, y) = y_n - f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \mathbf{Y}^{n-1}\Psi - f(x, y, \Psi, \mathbf{Y}\Psi, \ldots, \mathbf{Y}^{n-2}\Psi) \tag{3.5}$$

en el dominio D. Tres casos surgen para la ecuación algebraica $Q(x, y) = 0$:
(I) $Q(x, y) = 0$ no define curvas en D;
(II) $Q(x, y) \equiv 0$ en D;
(III) $Q(x, y) = 0$ define curvas en D.
En el caso (I) la EDO (3.1) no tiene soluciones invariantes relacionadas a su invarianza bajo (3.2).
En el caso (II) cualquier solución de la EDO $y' = \eta(x, y)/\xi(x, y)$, es decir, cualquier curva invariante de (3.2), es una solución invariante de la EDO (3.1) relacionada a su invarianza bajo (3.2).
En el caso (III) una solución invariante de la EDO (3.1) relacionada a su invarianza bajo (3.2) debe satisfacer $Q(x, y) = 0$ y, recíprocamente toda curva que cumpla con $Q(x, y) = 0$ es una solución invariante de la EDO (3.1) relacionada a su invarianza bajo (3.2).

Demostración

Si $y_1 = y' = \frac{\eta}{\xi} = \Psi$, entonces $y_k = y^{(k)} = \mathbf{Y}^{k-1}\Psi, \quad k = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto una solución invariante de la EDO (3.1) relacionada a su invarianza bajo (3.2) debe satisfacer la ecuación algebraíca:

$$Q(x, y) = 0$$

Se sigue inmediatamente de (I), que si $Q(x, y) = 0$ no define curvas en D, entonces la EDO (3.1) no tiene soluciones invariantes relacionadas a su invarianza bajo (3.2), y (II) si $Q(x, y) \equiv 0$ en D entonces toda solución de $y' = \frac{\eta}{\xi}$ es una solución invariante de la EDO (3.1). (Claramente $\mathbf{X}Q = 0$ cuando $Q \equiv 0$).

En el caso (III) consideramos cualquier curva que cumpla con $Q(x, y) = 0$. Por construcción tal curva es una curva solución de la EDO (3.1). Esta curva es una solución invariante de la EDO (3.1) relacionada a su invarianza bajo (3.2) si

$$Q_x + Q_y y' = 0$$

resuelve la EDO $y' = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}$. Esto es verdadero si $\mathbf{Y}Q = 0$ cuando $Q = 0$, lo cual mostraremos como sigue:

Debido a que la EDO (3.1) admite (3.2), se sigue que la ecuación de invarianza

$$\eta^{(n)} = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + \eta^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \qquad (*)$$

debe mantenerse para cualesquiera valores de $(x, y, y_1, \ldots, y_n)$ y tal que

$$y_n - f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0$$

donde en términos del operador derivada total $\frac{D}{Dx}$,

$$\eta^{(1)} = \frac{D\eta}{Dx} - y_1 \frac{D\xi}{Dx},$$

$$\eta^{(k)} = \frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx} - y_k \frac{D\xi}{Dx}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Sea $y_k = \mathbf{Y}^{k-1}\Psi$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces la EDO (3.1) se convierte en $Q(x, y) = 0$ y el operador derivada total se convierte en $\frac{D}{Dx} \equiv \mathbf{Y}$, debido a que para cualquier función $G(x, y, y_1, \ldots, y_j)$, $j < n$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{DG}{Dx}\right|_{y_k = \mathbf{Y}^{k-1}\Psi, \quad k=1,2,\ldots,j+1} \\
&= \left.\left(\frac{\partial G}{\partial x} + y_1 \frac{\partial G}{\partial y} + y_2 \frac{\partial G}{\partial y_1} + \ldots + y_{j+1} \frac{\partial G}{\partial y_j}\right)\right|_{y_k = \mathbf{Y}^{k-1}\Psi, \quad k=1,2,\ldots,j+1} \\
&= \mathbf{Y}G(x, y, \Psi, \ldots, \mathbf{Y}^{j-1}\Psi),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{DG}{Dx} \equiv \mathbf{Y}G$$

cuando $y_k = \mathbf{Y}^{k-1}\Psi$, $k = 1, 2, \ldots, j+1$. Por lo tanto si $y_k = \mathbf{Y}^{k-1}\Psi$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\begin{aligned}
\eta^{(1)} &= \mathbf{Y}\eta - \Psi\mathbf{Y}\xi \\
&= \mathbf{Y}(\xi\Psi) - \Psi\mathbf{Y}\xi \\
&= \left[\frac{\partial(\xi\Psi)}{\partial x} + \Psi\frac{\partial(\xi\Psi)}{\partial y}\right] - \Psi\mathbf{Y}\xi \\
&= [\xi_x\Psi + \xi\Psi_x + \Psi\xi_y\Psi + \Psi\xi\Psi_y] - \Psi\mathbf{Y}\xi \\
&= [\xi(\Psi_x + \Psi\Psi_y) + \Psi(\xi_x + \Psi\xi_y)] - \Psi\mathbf{Y}\xi \\
&= [\xi\mathbf{Y}\Psi + \Psi\mathbf{Y}\xi] - \Psi\mathbf{Y}\xi \\
&= \xi\mathbf{Y}\Psi.
\end{aligned}$$

Ahora mostraremos inductivamente que

$$\eta^{(k)} = \xi\mathbf{Y}^k\Psi, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Si $\eta^{(k)} = \xi\mathbf{Y}^k\Psi$, entonces

$$\begin{aligned}
\eta^{(k+1)} &= \mathbf{Y}\eta^{(k)} - (\mathbf{Y}^k\Psi)(\mathbf{Y}\xi) \\
&= \mathbf{Y}(\xi\mathbf{Y}^k\Psi) - (\mathbf{Y}^k\Psi)(\mathbf{Y}\xi) \\
&= \xi\mathbf{Y}^{k+1}\Psi.
\end{aligned}$$

Como consecuencia si la EDO (3.1) admite (3.2), entonces de (*) se sigue que para cualquier curva que cumpla con $Q(x, y) = 0$, tenemos $[\xi \neq 0]$

$$\mathbf{Y}^n\Psi = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial f}{\partial y} + (\mathbf{Y}\Psi)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + (\mathbf{Y}^{n-1}\Psi)\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \tag{3.6}$$

evaluado en $y_k = \mathbf{Y}^{k-1}\Psi$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Pero de (3.5) tenemos

$$\mathbf{Y}Q \equiv Q_x + \frac{\eta}{\xi}Q_y \equiv \mathbf{Y}^n\Psi - \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\eta}{\xi}\frac{\partial f}{\partial y} + (\mathbf{Y}\Psi)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + (\mathbf{Y}^{n-1}\Psi)\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\right]$$

evaluado en $y_k = \mathbf{Y}^{k-1}\Psi$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Entonces de (3.6) obtenemos que $\mathbf{Y}Q = 0$ cuando $Q = 0$. $\square$

1. Como un primer ejemplo consideremos la EDO lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \tag{3.7}$$

Encontramos todas las soluciones invariantes de (3.7) relacionadas a su invarianza bajo traslaciones en x y homotecias en y producidas por el generador infinitesimal $\mathbf{X} = \alpha(\frac{\partial}{\partial x}) + \beta y(\frac{\partial}{\partial y})$ con constantes arbitrarias α, β.
Es fácil ver que la ecuación (3.7) admite dicho generador infinitesimal, pues si tomamos

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(n)}F &= \alpha\frac{\partial F}{\partial x}+\beta y\frac{\partial F}{\partial y}+\eta^{(1)}\frac{\partial F}{\partial y_1}+\ldots+\eta^{(n)}\frac{\partial F}{\partial y_n}\\
&= a_n\beta y+\left(\frac{D\eta}{Dx}-y_1\frac{D\alpha}{Dx}\right)a_{n-1}+\left(\frac{D\eta^{(1)}}{Dx}-y_2\frac{D\alpha}{Dx}\right)a_{n-2}+\ldots+\left(\frac{D\eta^{(n-1)}}{Dx}-y_n\frac{D\alpha}{Dx}\right)\\
&= a_n\beta y+a_{n-1}\beta y_1+a_{n-2}\beta y_2+\ldots+a_1\beta y_{n-1}+\beta y_n\\
&= \beta\left(a_n y+a_{n-1}y_1+a_{n-2}y_2+\ldots+a_1y_{n-1}+y_n\right)=\beta(0)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Sea $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$. Entonces $\Psi=\frac{\eta}{\xi}=\lambda y,\quad \mathbf{Y}=\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y(\frac{\partial}{\partial y})$.
Como consecuencia,

$$
\begin{aligned}
y^{(k)} &= \mathbf{Y}^{k-1}\Psi=\mathbf{Y}^{k-2}(\mathbf{Y}\Psi)=\mathbf{Y}^{k-2}(\lambda^2 y)\\
&= \mathbf{Y}^{k-3}(\mathbf{Y}\lambda^2 y)=\mathbf{Y}^{k-3}(\lambda^3 y)=\ldots=\mathbf{Y}(\lambda^{k-1}y)\\
&= \lambda^k y,\quad k=1,2,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Sustituyendo (3.8) en (3.7) tenemos

$$
\begin{aligned}
Q(x,y) &= \mathbf{Y}^{n-1}\Psi+a_1\mathbf{Y}^{n-2}\Psi+\ldots+a_{n-1}\mathbf{Y}^0\Psi+a_n y\\
&= \lambda^n y+a_1\lambda^{n-1}y+\ldots+a_{n-1}\lambda y+a_n y\\
&= (\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n)y\\
&= p(\lambda)y=0,
\end{aligned}
$$

donde $p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n$.
Por lo tanto obtenemos la ecuación polinomial característica $p(\lambda)=0$, la cuál λ debe satisfacer si $y\neq 0$:

$$
p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{3.9}
$$

Cualquier solución $\lambda=r$ de (3.9) nos deja una solución invariante de (3.7). En términos del Teorema 3.2, Caso (II) corresponde a λ ser una raíz de $p(\lambda)=0$; el Caso (III) corresponde a λ no ser raíz de $p(\lambda)=0$ y en este caso $y=0$ es la solución invariante trivial. En el Caso (II) la solución invariante es cualquier solución de $y'=ry$, es decir, $y=Ce^{rx},\quad p(r)=0$.
Además, si $y=e^{rx}$ resuelve (3.7), entonces la EDO (3.7) admite

$$
\mathbf{X}=\alpha\frac{\partial}{\partial x}+(\beta y+\gamma e^{rx})\frac{\partial}{\partial y}
$$

para constantes arbitrarias α,β,γ. Sea $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$, $\upsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\neq 0$. Entonces $\Psi=\frac{\eta}{\xi}=\lambda y+\upsilon e^{rx},\quad \mathbf{Y}=\frac{\partial}{\partial x}+(\lambda y+\upsilon e^{rx})\frac{\partial}{\partial y}$. Por lo tanto

$$
y^{(k)}=\mathbf{Y}^{k-1}\Psi=\upsilon(r^{k-1}+\lambda r^{k-2}+\ldots+\lambda^{k-2}r+\lambda^{k-1})e^{rx}+\lambda^k y,\quad k=1,2,\ldots,n. \tag{3.10}
$$

Correspondientemente,

$$Q(x,y) = p(\lambda)\left[\frac{\upsilon}{\lambda - r}e^{rx} + y\right]$$

Surgen 4 casos:
(i) Si $p(\lambda) \neq 0$, $\upsilon = 0$, entonces $Q(x,y) = 0$ genera la solución trivial $y = 0$ de (3.7).
(ii) Si $p(\lambda) \neq 0$, $\upsilon \neq 0$, entonces $Q(x,y) = 0$ genera la solución conocida $y = Ce^{rx}$ de (3.7) para una constante arbitraria C.
(iii) Si r es una raíz simple de $p(\lambda) = 0$ y $\lambda = r$, entonces $Q(x,y) \neq 0$ y por lo tanto ninguna solución de (3.7) es obtenida (Caso I).
(iv) Si $p(\lambda) = 0$ y r no es una raíz simple de $p(\lambda) = 0$, entonces $Q(x,y) \equiv 0$ y cualquier solución de $y' = \lambda y + \upsilon e^{rx}$ genera una solución de (3.7). Si $\lambda \neq r$, entonces esta solución invariante es $y = C_1e^{rx} + C_2e^{\lambda x}$ para constantes arbitrarias C_1, C_2; si $\lambda = r$, entonces la solución invariante correspondiente es $y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}$ para constantes arbitrarias C_1, C_2.

Por métodos convencionales podemos encontrar la solución general de la ecuación (3.7) con ecuación característica $p(\lambda)$ (3.9) tomando en cuenta los siguientes casos:

(a) Si tenemos $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, n soluciones linealmente independientes (es decir si $\{y_i(x) : i = 1, \ldots, n\}$ forma un conjunto fundamental de soluciones para la EDO (2.7), entonces la solución general es de la forma

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

donde $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$, y las λ_i son soluciones reales y distintas de $p(\lambda)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto tenemos

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_ne^{\lambda_n x} = \sum_{i=1}^{n} c_ie^{\lambda_i x}.$$

como solución general.

(b) Si existe λ^* raíz de $p(\lambda)$ de multiplicidad k, con $1 < k \leq n$, entonces $y = x^{i-1}e^{\lambda^* x}$ es solucion de la ecuación para cada $i = 1, \ldots, k$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\lambda^* = \lambda_1$ y que las restantes λ_i, es decir, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-k+1}$, son raices reales y distintas de $p(\lambda)$. Entonces nuestra solución general queda de la siguiente manera

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_ix^{i-1}e^{\lambda_1 x} + \sum_{j=k+1}^{n} c_je^{\lambda_{j-k+1}x}.$$

Así, observamos que las soluciones invariantes son casos particulares de nuestra solución general.

2. Como segundo ejemplo consideremos la ecuación de Blasius, de la cual también hablamos en el capítulo 2.3.2 y encontramos un grupo admitido por ésta usando el Criterio Infinitesimal para la Invarianza de una EDO.

$$y''' + \frac{1}{2}yy'' = 0 \tag{3.11}$$

la cual admite el siguiente generador infinitesimal

$$\mathbf{X} = (\alpha x + \beta)\frac{\partial}{\partial x} - \alpha y\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.12}$$

para constantes arbitrarias α, β, ya que tomando a
$F(x, y, y_1, y_2, y_3) = y_3 + \frac{1}{2}yy_2 = 0$, llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(3)}F &= (\alpha x + \beta)\frac{\partial F}{\partial x} + (-\alpha y)\frac{\partial F}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial F}{\partial y_1} + \eta^{(2)}\frac{\partial F}{\partial y_2} + \eta^{(3)}\frac{\partial F}{\partial y_3} \\
&= (-\alpha y)\left(\frac{1}{2}y_2\right) + \left(\frac{D\eta^{(1)}}{Dx} - y_2\frac{D(\alpha x + \beta)}{Dx}\right)\left(\frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{D\eta^{(2)}}{Dx} - y_3\frac{D(\alpha x + \beta)}{Dx}\right) \\
&= \frac{-\alpha yy_2}{2} + (-3\alpha y_2)\left(\frac{1}{2}y\right) + (-3\alpha y_3 - \alpha y_3) \\
&= -4\alpha\left(\frac{yy_2}{2}\right) - 4\alpha y_3 = -4\alpha\left(y_3 + \frac{yy_2}{2}\right) = -4\alpha(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para $\alpha = 0$, tenemos que $\mathbf{X} = \beta\frac{\partial}{\partial x}$ y por ello $\mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial x}$. Por el teorema anterior concluimos que $Q(x, y) = -f(x, y, 0, 0) = \frac{1}{2}y(0) = 0$, así estamos en el Caso II y cualquier solución de $y' = 0$ es solución invariante de la ecuación de Blasius. Así la solución invariante resultante es $y = cte = C$ para toda constante C. Para $\alpha \neq 0$, sea $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$. Entonces una solución invariante $y = \phi(x)$ satisface:

$$y' = \frac{n}{\xi} = \frac{-\alpha y}{\alpha x + \beta} = \frac{-\alpha y}{\alpha x + \alpha\lambda} = -\frac{y}{x + \lambda},$$ cuya solución general es

$$y = \frac{C}{x + \lambda} \tag{3.13}$$

donde C y λ son constantes arbitrarias. Sustituyendo (3.13) en (3.11), encontramos que

$$\begin{aligned}
y_3 + \frac{1}{2}yy_2 &= -\frac{6C}{(x+\lambda)^4} + \frac{1}{2}\left(\frac{C}{x+\lambda}\right)\left(\frac{2C}{(x+\lambda)^3}\right) \\
&= -\frac{C^2 - 6C}{(x+\lambda)^4} = 0
\end{aligned}$$

Entonces $C^2 - 6C = C(C - 6) = 0$, por lo tanto $C = 0$ o $C = 6$, lo cual genera soluciones invariantes

$$y = 0, \quad y = \frac{6}{x + \lambda} \tag{3.14}$$

de (3.11) relacionadas a su invarianza bajo (3.12).
Alternativamente, derivamos las soluciones invariantes (3.14) usando el Teorema 3.2 para $\alpha \neq 0$. Aquí:

$$\Psi = -\frac{y}{x+\lambda}, \qquad \mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x+\lambda}\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\mathbf{Y}\Psi = \frac{2y}{(x+\lambda)^2}, \qquad \mathbf{Y}^2\Psi = -\frac{6y}{(x+\lambda)^3}$$

Entonces $Q(x,y) = \dfrac{y^2}{(x+\lambda)^2} - \dfrac{6y}{(x+\lambda)^3}$, $\quad Q(x,y) = 0$ dan paso a las soluciones invariantes (3.14):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{y^2}{(x+\lambda)^2} - \frac{6y}{(x+\lambda)^3} \\ &= \frac{y}{(x+\lambda)^2}\left(y - \frac{6}{x+\lambda}\right) = 0 \end{aligned}$$

De aquí, llegamos a $\dfrac{y}{(x+\lambda)^2} = 0$, $y = \dfrac{6}{x+\lambda}$. Así

$$y = 0, \quad y = \frac{6}{x+\lambda}$$

Note que si no podemos obtener la solución general de la EDO $y' = \frac{\eta}{\xi}$ entonces debemos usar el algoritmo desarrollado en el Teorema 3.2 para determinar soluciones invariantes de EDO (3.1) relacionado a su invarianza bajo (3.2).

Si bien logramos encontrar una solución invariante para la ecuación de Blasius, encontrar soluciones particulares de la misma requiere métodos mas complejos como aproximaciones numéricas. Por ello, habrá ocasiones donde será mas conveniente usar grupos de Lie de transformaciones para encontrar soluciones de una EDO.

3.3. Soluciones invariantes para EDO's de primer orden

En el caso de una EDO de primer orden

$$F(x, y, y_1) = 0 \tag{3.15}$$

sólo tiene sentido considerar soluciones invariantes para un generador infinitesimal no trivial (3.3) admitido por (3.1), cuando $Q(x,y) = F(x, y, \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}) \neq 0$ en D (si $Q(x,y) \equiv 0$ en D, entonces la correspondiente familia uniparamétrica de soluciones invariantes es una solución general de (3.15)). Para tal generador infinitesimal no trivial, del Teorema 3.2 extendido se sigue que toda curva que satisface

$$Q(x,y) = F\left(x, y, \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}\right) = 0 \tag{3.16}$$

es una solución invariante de la EDO (3.15).
Consideremos el conjunto de todas las curvas solución en el plano xy (plano fase) de una EDO (3.15) de la forma

$$y_1 = f(x,y) \tag{3.17}$$

($F(x,y,y_1) = y_1 - f(x,y)$). Este conjunto puede incluir *separatrices*, que son curvas que marcan la frontera entre dominios con distinto comportamiento dinámico (curvas fase) en un sistema dinámico.
Dos soluciones de la EDO (3.17) con distinto comportamiento dinámico, no pueden ser mapeadas una en la otra por cualquier grupo de Lie de transformaciones admitidas por la EDO (3.17). Debido a que un grupo de transformaciones admitido por la EDO (3.17) mapea cualquier solución en otra solución de la misma ecuación, se sigue que una separatriz es una solución invariante de la EDO (3.17) para todos los grupos de Lie de transformaciones admitidos.

Una *envolvente* de una familia de curvas de un parámetro en el plano, es una curva que en cada punto es tangente a una curva de la familia.
Por el mismo argumento que el de las separatrices, se sigue que las soluciones envolventes (si existen) para una EDO (3.15) de primer orden deben ser soluciones invariantes para cualquier grupo de Lie de transformaciones admitido. Si la EDO (3.15) admite un grupo de Lie de transformaciones no trivial uniparamétrico con generador infinitesimal $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, entonces

$$\mathbf{X}^{(1)}F = \xi F_x + \eta F_y + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2]F_{y'} = 0$$

cuando

$$F(x,y,y') = 0$$

y

$$F\left(x, y, \frac{\eta(x,y)}{\xi)x,y)}\right) \neq 0 \quad para \quad toda \quad x, y.$$

Por una simple extensión del Teorema 3.2 se sigue que las soluciones invariantes de la EDO (3.15) relacionadas a su invarianza bajo $\mathbf{X}$ son las curvas definidas por la ecuación algebraica

$$F\left(x, y, \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}\right) = 0.$$

Por lo tanto una solución envolvente de la EDO (3.15) satisface la ecuación anterior para todo $\mathbf{X}$ admitido por la EDO (3.15).

(I) Como un primer ejemplo consideramos la EDO de primer orden

$$y' = y^2 \tag{3.18}$$

la cual admite $\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$.
Tomando $F(x, y, y') = y' - y^2 = 0$, obtenemos $\mathbf{X}^{(1)}F = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial F}{\partial y_1}$.
Por lo tanto $\mathbf{X}_1^{(1)} = 0$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2^{(1)} &= -y(-2y) + (-y' - y') \\ &= 2y^2 - 2y' = 2(y' - y^2) = -2(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De $\mathbf{X}_1$ se sigue que una solución separatriz $y = \phi(x)$ de (3.18) debe satisfacer:

$$y' = \frac{\eta}{\xi} = \phi'(x) = 0 \quad o \quad \phi(x) = C_1 = const.$$

Substituyendo lo anterior en la EDO $y' = y^2$ llegamos a $C_1 = 0$, es decir $y = 0$.
De forma alternativa

$$Q(x, y) = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} - f(x, y) = -y^2 = 0,$$

la cual nos conduce al único candidato posible $y = 0$.
De $\mathbf{X}_2$ se sigue que una solución separatriz $y = \phi(x)$ de (3.18) debe satisfacer:

$$y' = \frac{\eta}{\xi} = -\frac{y}{x}.$$

Substituyendo en la EDO $y' = y^2$ obtenemos $-\frac{y}{x} = y^2$ ó

$$\begin{aligned} -\frac{y}{x} - y^2 &= 0 \\ -y\left(\frac{1}{x} + y\right) &= 0 \\ y = 0, \quad y &= -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

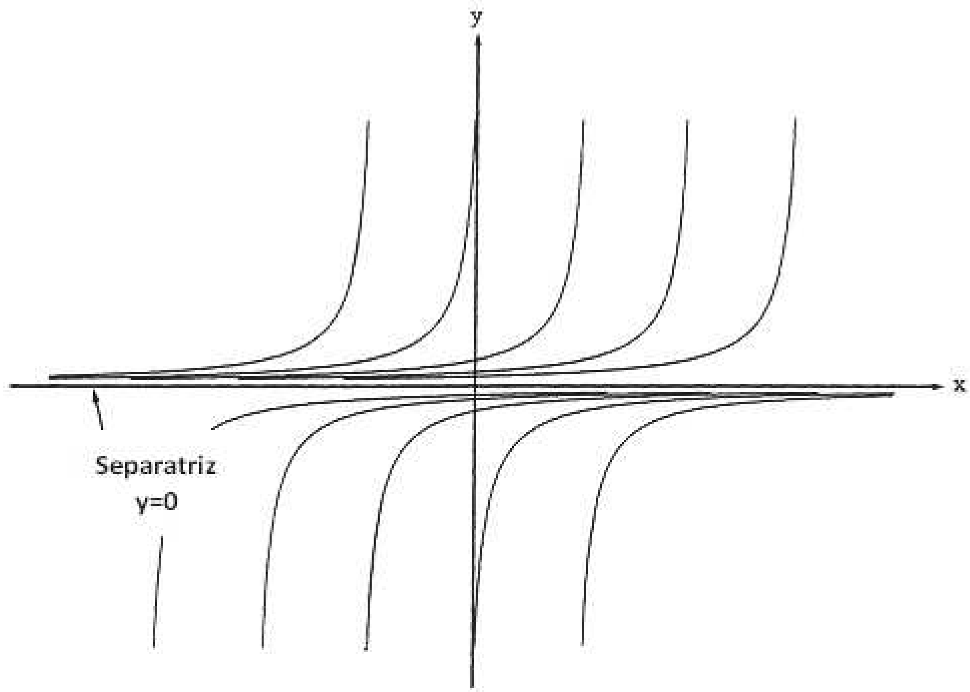
Alternativamente

$$Q(x, y) = -\frac{y}{x} - y^2 = 0,$$

la cual nos conduce a los candidatos $y = 0$, $y = -\frac{1}{x}$.
Debido a que $y = -\frac{1}{x}$ no es una solución invariante de $\mathbf{X}_1$, ya que $Q(x, y) = -y^2 = -\left(-\frac{1}{x}\right)^2 = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, esta no puede ser una separatriz de (3.18). Ésta solución es una solución particular de $y' = y^2$ asociada con su solución general

$$y = -\frac{1}{x + C}, \quad C = const., \quad C = 0.$$

Las curvas solución de (3.18) son ilustradas a continuación, en donde vemos que $y = 0$ es de hecho una separatriz.



Analizando nuevamente esta ecuación notamos que al resolverla por el método de separación de variables obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y' = y^2 \\
\frac{dy}{y^2} &= dx \quad con \quad y \neq 0 \\
\int \frac{dy}{y^2} &= \int dx \\
\frac{-1}{y} &= x + C \\
y &= \frac{-1}{x + C}
\end{aligned}$$

Así, la solución general de $y' = y^2$ es $y = \dfrac{-1}{x+C}$, mientras que su solución singular es $y = 0$, lo que concuerda con nuestro análisis mediante grupos de Lie.

(II) Como segundo ejemplo consideramos la EDO de primer orden

$$y' = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} + y(x^2+y^2-1)}{x(x^2+y^2-1) - y\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{3.19}$$

la cual admite el grupo de rotación $\mathbf{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.
Las curvas invariantes $F(x,y) = 0$ de este grupo se encuentran resolviendo $\mathbf{X}F = y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.
Las ecuaciones características se reducen a $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}$

$$\int y dy = \int -x dx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1$$
$$x^2 + y^2 = 2c_1$$

Estas curvas invariantes son círculos

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Entonces una separatriz debe satisfacer esta ecuación. Después de substituirla en (3.19) obtenemos

$$-\frac{x}{y} = \frac{\eta}{\xi} = y' = \frac{xc + y(c^2-1)}{x(c^2-1) - yc},$$

Desarrollando

$$\begin{aligned}
-\frac{x}{y} &= \frac{c(x+yc) - y)}{c(cx-y) - x} \\
-xc(cx-y) + x^2 &= yc(x+yc) - y^2 \\
-x^2c^2 + x^2 &= y^2c^2 - y^2 \\
c^2(-x^2-y^2) &= -x^2 - y^2 \\
c^2 &= \frac{-x^2-y^2}{-x^2-y^2} \\
c^2 &= 1
\end{aligned}$$

así que $c = 1$. Por lo tanto la separatriz es

$$x^2 + y^2 = 1$$

De manera alterna
$$Q(x,y) = -\left(\frac{x}{y} + \frac{x\sqrt{x^2+y^2} + y(x^2+y^2-1)}{x(x^2+y^2-1) - y\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

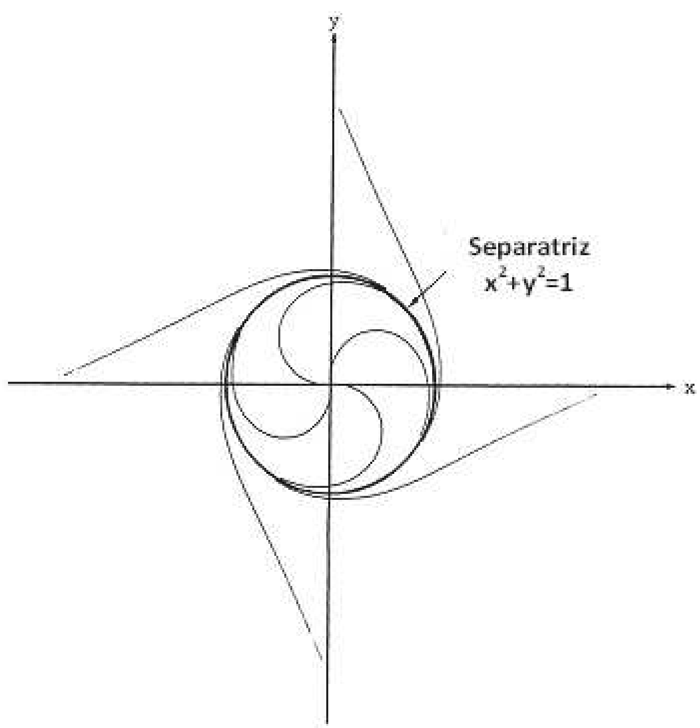
y $Q(x,y)=0$ nos lleva a

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \frac{x^2(x^2+y^2-1)-xy\sqrt{x^2+y^2}+yx\sqrt{x^2+y^2}+y^2(x^2+y^2-1)}{y\left[x(x^2+y^2-1)-y\sqrt{x^2+y^2}\right]}=0 \\ &= \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)}{y\left[x(x^2+y^2-1)-y\sqrt{x^2+y^2}\right]}=0 \end{aligned}$$

De donde $x^2+y^2=0$ ó $x^2+y^2-1=0$
Por lo tanto la única solución invariante y por lo tanto la única separatriz posible es el círculo:

$$x^2+y^2=1 \tag{3.20}$$

Es fácil notar que (3.20) es un ciclo límite de la EDO (3.19). Las típicas curvas solución de (3.19) son ilustradas a continuación.



Si queremos resolver la ecuación (3.19) por métodos convencionales, notamos primero que no es exacta, y por lo tanto tenemos que buscar un factor integrante adecuado (si es que existe), lo que hace más complejo encontrar su solución. Sin embargo en la sección 2.2.2 logramos determinar un factor integrante para cualquier EDO del tipo $y' = f(x, y)$. Como podemos observar al igual que en el caso de la ecuación de Blasius, a veces es más útil usar el método de Lie.

(III) Como tercer ejemplo consideramos la ecuación de Clairaut, la cual posee una solución singular que resulta ser también la envolvente de dicha ecuación y por ende la candidata perfecta para ser una solución invariante.

$$F(x, y, y_1) = xy_1 + \frac{m}{y_1} - y = 0, \tag{3.21}$$

donde m es una constante.
Esta ecuación admite

$$\mathbf{X} = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.22}$$

pues si $F(x, y, y_1) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(1)}F &= 2xy_1 - y + (y_1 - 2y_1)\left(x - \frac{m}{y_1^2}\right) \\
&= 2xy_1 - y - y_1x + \frac{m}{y_1} \\
&= xy_1 + \frac{m}{y_1} - y = 0.
\end{aligned}$$

Una solución envolvente de (3.21) debe satisfacer (3.16) para $y_1 = \dfrac{\eta}{\xi} = \dfrac{y}{2x}$:

$$\begin{aligned}
Q(x, y) &= F\left(x, y, \frac{y}{2x}\right) = x\left(\frac{y}{2x}\right) + \frac{2xm}{y} - y \\
&= \frac{y}{2} + \frac{2mx}{y} - y = 0.
\end{aligned}$$

Así $y = \dfrac{y}{2} + \dfrac{2mx}{y}$, o de otra forma

$$\begin{aligned}
y &= \frac{y^2 + 4mx}{2y} \\
2y^2 &= y^2 + 4mx \\
y^2 &= 4mx
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Por lo tanto, $y^2 = 4mx$ es la única solución envolvente posible de la EDO (3.21).

Mediante el uso de las coordenadas canónicas $(r, s) = \left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}, \ln(\sqrt{x})\right)$, la invarianza de (3.21) bajo (3.22) nos lleva a su solución general:

$$y = cx + \frac{m}{c}, \tag{3.24}$$

donde c es una constante arbitraria. Notamos que la parábola (3.23) es la envolvente de la familia de líneas rectas (3.24), pues dada la familia de rectas

$$F(x, y, c) = xc + \frac{m}{c} - y = 0,$$

Tomamos la derivada parcial respecto a c

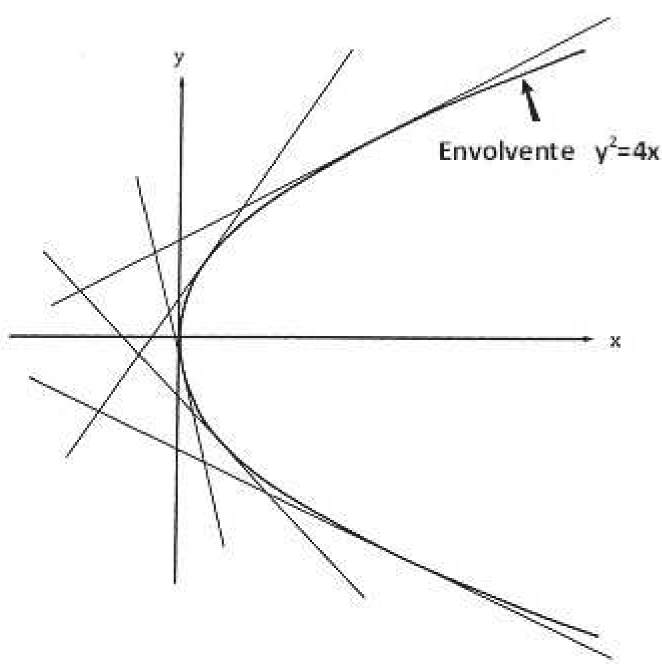
$$\frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} = F_c(x, y, c) = x - \frac{m}{c^2} = 0$$

De donde obtenemos que $c = \sqrt{\frac{m}{x}}$, sustituyendo el valor de c en $F(x, y, c)$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{m}{x}}x + \sqrt{\frac{x}{m}}m \\ &= \frac{mx + xm}{\sqrt{mx}} = \frac{2mx}{\sqrt{mx}} \\ &= 2\sqrt{mx} \end{aligned}$$

Es decir llegamos a $y^2 = 4mx$.

Las curvas solución de (3.21) son ilustradas a continuación, para $m = 1$.



Notemos que la ecuación de Clairaut se resuelve de la sigueinte manera:

De la ecuación original

$$y = xy' + \frac{m}{y'},$$

derivamos respecto de x

$$y' = xy'' + y' - \frac{my''}{(y')^2},$$

de donde tenemos que

$$0 = \left(x - \frac{m}{(y')^2}\right) y'',$$

por lo tanto

$$y'' = 0 \quad o \quad x = \frac{m}{(y')^2}.$$

En el caso, $y'' = 0$, intengrando tenemos que $y' = C$, por lo que sustituyendo en la ecuacion original nos queda

$$y = Cx + \frac{m}{C},$$

la cual es la solución general.
En el otro caso, $x = \dfrac{m}{(y')^2}$, llegamos a $y' = \pm\sqrt{\dfrac{m}{x}}$. Resolviendo esta ecuación por separación de variables obtenemos

$$y^2 = 4mx,$$

que es la solución singular.
Notamos que estas soluciones coinciden con las anteriores, y en particular, la solución invariante obtenida coincide con la solución singular para la ecuación de Clairaut.

3.3.1. Ecuación de Clairaut en Coordenadas Canónicas

Dada la ecuación de Clairaut

$$F(x, y, y_1) = xy_1 + \frac{m}{y_1} - y = 0 \qquad \ldots \qquad (*)$$

necesitamos encontrar las coordenadas canónicas (r, s) para el grupo de Lie con generador infinitesimal

$$\mathbf{X} = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

En el capítulo 1.7 vimos que se cumplen las igualdades:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}r &= 0 \\ \mathbf{X}s &= 1 \end{aligned}$$

De esta manera $r(x, y)$ satisface

$$\mathbf{X}r = 2x\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} = 0 \qquad \ldots \qquad (a)$$

de donde obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales características

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \\ \log y &= \frac{1}{2}(\log x + C_0) \\ y &= C_1\sqrt{x} \\ \frac{y}{\sqrt{x}} &= C_1 \end{aligned}$$

Así $r(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x}} = cte \qquad \ldots \qquad (1)$

La coordenada canónica $s(x, y)$ debe satisfacer

$$\mathbf{X}s = 2x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \qquad \ldots \qquad (b)$$

Tomamos una solución particular de (b), $s(x, y) = s(x)$ que cumple

$$\begin{aligned} 2x\frac{ds}{dx} &= 1 \\ \frac{ds}{dx} &= \frac{1}{2x} \\ \int ds &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \\ s &= \frac{1}{2}\log x \end{aligned}$$

Por lo tanto $s(x) = \log\sqrt{x} \qquad \ldots \qquad (2)$

De (1) y (2) obtenemos las ecuaciones $x = e^{2s}$, $y = re^{s}$.

Ahora reducimos la ecuación $(*)$ de la siguiente manera.

Tenemos que

$$\begin{aligned} dx &= 2e^{2s}ds, \quad y \\ dy &= re^{s}ds + e^{s}dr = e^{s}(rds + dr), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
re^s &= e^{2s}\left(\frac{e^s(rds+dr)}{2e^{2s}ds}\right)+m\left(\frac{2e^{2s}ds}{e^s(rds+dr)}\right)\\
re^s &= \frac{e^s}{2}\left(\frac{rds+dr}{ds}\right)+\frac{2me^s ds}{rds+dr}\\
re^s &= \frac{re^s}{2}+\frac{e^s}{2}\frac{dr}{ds}+\frac{2me^s ds}{rds+dr}\\
\frac{e^s}{2}\left(r-\frac{dr}{ds}\right) &= 2me^s\left(\frac{ds}{rds+dr}\right)\\
\left(r-\frac{dr}{ds}\right)\left(r+\frac{dr}{ds}\right) &= 4m\\
r^2-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 &= 4m\\
\frac{dr}{ds} &= \sqrt{r^2-4m}
\end{aligned}$$

Ahora resolveremos la nueva ecuación diferencial con las coordenadas canónicas (r,s)

$$\begin{aligned}
\int\frac{dr}{\sqrt{r^2-4m}} &= \int ds\\
\ln\mid r+\sqrt{r^2-4m}\mid &= s+C_2\\
e^{(\ln|r+\sqrt{r^2-4m}|)} &= e^{(s+C_2)}\\
r+\sqrt{r^2-4m} &= C_3e^s\\
r^2-4m &= (C_3e^s-r)^2
\end{aligned}$$

Volviendo a las variables originales (x,y) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{x}-4m &= \left(C_3\sqrt{x}-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2\\
-4m &= C_3^2x-2C_3y\\
y &= \frac{-4m-C_3^2x}{-2C_3}\\
y &= \frac{2m}{C_3}+\frac{C_3x}{2}\\
y &= \left(\frac{C_3}{2}\right)x+\frac{m}{\left(\frac{C_3}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Tomando $C=\dfrac{C_3}{2}$, entonces

$$y = Cx + \frac{m}{C}$$

que es la solución general de la ecuación de Clairaut $(*)$.

Conclusiones

En este texto hemos usado los conocimientos aprendidos entre otras cosas para construir soluciones a las EDO's por medio de las transformaciones infinitesimales y también logramos encontrar transformaciones infinitesimales admitidas por una EDO dada usando el algoritmo de Lie.

Si una EDO admite un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico, entonces podemos reducir su orden de manera constructiva de uno en uno mediante el uso de coordenadas canónicas o invariantes diferenciales. Además la solución de la EDO dada se encuentra por cuadraturas al resolver la EDO reducida.

Conocer la invarianza de una EDO de primer orden bajo un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico es equivalente a encontrar un factor integrante para la EDO.

Así, el método de Lie resulta muy valioso pues nos brinda la posibilidad de obtener soluciones exactas de una gran cantidad de EDO's de primer orden e incluso en algunas ocasiones reducen la cantidad de cálculos facilitando los procesos tradicioneales.

Si una EDO de primer orden admite un grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico entonces podemos determinar sus soluciones invariantes sin la necesidad de resolver otra EDO por medio del Teorema 3.2.

Ante todo esto, concluimos que las soluciones separatrices y las envolventes son soluciones invariantes para cualquier grupo de Lie de transformaciones uniparamétrico admitido por una EDO de primer orden. Como consecuencia observamos que tales soluciones se construyen sin determinar la solución general de dicha EDO.

Bibliografía

[1] D. Avella, O. Mendoza, E. Sáenz, M.J. Souto (2015), Grupos I, Textos, Paphiros.

[2] G.W. Bluman, S. Kumei (1989), Symmetries and Differential Equations, Springer-Verlag, New York.

[3] F. Oliveri (2010), Lie Symmetries of Differential Equations: Classical Results and Recent Contributions.

[4] M. Eriksson (2008), Symmetries and Conservation Laws Obtained by Lie Group Analysis for Certain Physical Systems.

[5] J. Starret (2002), Solving Differential Equations by Symmetry Groups.

[6] O. Palmas Velasco, J. Reyes Victoria (2008), Curso de Geometría Diferencial, Parte 1. Curvas y Superficies.

[7] Peter J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Segunda Edición, Springer-Verlag, New York, 1986.

[8] George Bluman, Invariant Solutions for Ordinary Differential Equations, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 50, No. 6 (Dec., 1990), pp. 1706-1715.