



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA REBANADA DE MASKIT

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Carlos Humberto Bojorges Sánchez

TUTOR

Dr. Guillermo Javier Francisco Sierra Loera



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a
mis padres.*

Introducción

En este documento se muestra que con matemáticas sencillas se pueden lograr matemáticas bastante sofisticadas. Los conocimientos que se requieren para poder comprender lo que aquí se exhibe son las nociones básicas de variable compleja y un poco de topología.

A lo largo de la historia, nuestro entendimiento de la simetría ha sufrido una evolución junto con nosotros, debido a la pasión que sentimos por los objetos simétricos. Con la pretensión de matematizar este concepto, de simetría, he vertido algunos resultados, ya encontrados, dentro de las páginas siguientes como una manera de lisonjear esta pasión.

La rebanada de Maskit es el espacio de deformaciones del toro con un pinchazo, es un subconjunto del plano cuya frontera es una curva fractal. La analogía a esto es: un mapa que nos permite localizar grupos Kleinianos tales que el cociente de su conjunto ordinario entre el grupo, son el toro con un pinchazo.

La tesis tiene un doble objetivo, escribir el espacio de deformaciones del toro con un pinchazo y utilizar la computadora para generar grupos Kleinianos. Para ello el contenido del primer capítulo es una porfía para examinar el grupo de Möbius. El capítulo dos refleja una porción de la cara de los grupos Kleinianos, mostrando algunos teoremas, lemas y ejemplos que son determinados por variables complejas e incluso por un ángulo. En el capítulo tres normalizamos subgrupos Kleinianos consiguiendo determinarlos por el menor número de variables, y una de estas es la rebanada de Maskit. El capítulo cuatro muestra un algoritmo que se puede seguir para poder dibujar mediante una computadora la acción de estos grupos sobre el plano complejo.

Lista de símbolos

∞	Infinito
\mathbb{N}	Números naturales
\mathbb{Z}	Números enteros
\mathbb{C}	Plano complejo
$\hat{\mathbb{C}}$	Esfera de Riemann
\mathbb{R}	Recta real
$\hat{\mathbb{R}}$	Recta real extendida
\mathbb{S}^2	Esfera unitaria de dimensión 2
\bar{z}	Conjugado de un número complejo
$ \cdot $	Norma Euclidiana
$Aut(\bullet)$	Grupo de automorfismos
d_C	Métrica cordal
\mathbb{H}	Semiplano superior
\Im	Parte imaginaria de un número complejo
Δ	Disco unitario
D	Disco
$PSL(2, \mathbb{C})$	Grupo de Möbius
$PSL(2, \mathbb{R})$	Grupo proyectivo real lineal
$PSL(2, \mathbb{Z})$	Grupo modular
Id	Matriz identidad
$e^{i\theta}$	$\cos\theta + i\sin\theta$
$\Lambda(G)$	Conjunto límite
$\Omega(G)$	Conjunto ordinario
$Tr(\bullet)$	Traza de una matriz
$Fix(\bullet)$	Punto fijo
$Fix^+(\bullet)$	Punto fijo atractor
$Fix^-(\bullet)$	Punto fijo repulsor

Índice general

1. Nociones básicas	1
1.1. El plano complejo extendido	1
1.2. Automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$	3
1.3. Grupo lineal especial proyectivo	8
2. Grupos Kleinianos	11
2.1. Región de discontinuidad de un grupo Kleiniano	11
2.2. Grupos Fuchsianos	14
2.3. Grupos de Schottky	18
3. La rebanada de Maskit	27
3.1. Grupos de Mumford	27
3.2. La rebanada de Maskit	32
3.2.1. Definición	32
3.2.2. Importancia	35
3.2.3. Ejemplo	36
3.2.4. Aspecto de \mathcal{M}	36
3.2.5. Elementos doblemente parabólicos	37
4. Programando grupos Kleinianos	39

Capítulo 1

Nociones básicas

1.1. El plano complejo extendido

Consideremos el plano complejo \mathbb{C} . Entonces es posible introducir un nuevo número complejo con el que podemos trabajar sobre los mismos fundamentos que los otros puntos del plano. Este número es llamado "punto al infinito" y es simbolizado como ∞ . Se extienden las reglas de la aritmética compleja a este número de la siguiente manera.

Definición 1.1.1. Sea $x \in \mathbb{C}$ diferente de cero, entonces la aritmética del infinito es:

$$x + \infty = \infty$$

$$x - \infty = \infty$$

$$x(\infty) = \infty$$

$$\frac{\infty}{x} = \infty$$

$$\frac{x}{\infty} = 0$$

$$\frac{x}{0} = \infty.$$

Advertimos que $\infty \pm \infty$, $0(\infty)$, $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ no están definidos.

Definición 1.1.2. El plano complejo extendido es denotado por $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Definición 1.1.3. La recta real extendida es denotado por $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

La unión disjunta del plano y este símbolo ajeno es llamada la compactificación usual de \mathbb{C} . El propósito es que si tomamos un número complejo z entonces su inverso $\frac{1}{z}$ está definido también para 0, siendo este ∞ .

Consideremos la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y el plano $z = 0$ que podemos identificar como \mathbb{C} , es decir si $z = (x, y, 0)$ entonces lo podemos corresponder como $z = x + iy$. El polo norte de \mathbb{S}^2 está determinado por sus coordenadas $N = (0, 0, 1)$. Con esto podemos construir la siguiente función.

Definición 1.1.4. *La proyección estereográfica es una función $\pi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$ que se define por*

$$\pi(z) = \begin{cases} \left(\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, \frac{i(\bar{z}-z)}{z\bar{z}+1}, \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1} \right) & \text{si } z \neq \infty, \\ N & \text{si } z = \infty. \end{cases} \quad (1.1)$$

Bajo esta identificación \mathbb{S}^2 es conocida como la esfera de Riemann.

La proyección estereográfica es un homeomorfismo¹ que relaciona un punto del plano $z = 0$ con un punto en la esfera \mathbb{S}^2 de la siguiente manera. Para cualquier punto z en el plano $z = 0$ existe una única línea recta de z a N que intersecta a la esfera unitaria en exactamente un punto. La proyección estereográfica relaciona estos dos puntos y asigna el punto al infinito con el polo norte de \mathbb{S}^2 , obteniendo así un homeomorfismo entre estos dos espacios. Por lo tanto, el plano complejo extendido es topológicamente una esfera.

La proyección estereográfica proporciona una forma de mapear una región del plano sobre la esfera. Uno de los tópicos importantes de esta función es que transforma círculos y líneas rectas del plano en círculos de la esfera, los círculos de la esfera son la intersección de la esfera con un plano. Utilizando geometría diferencial, se muestra que la curvatura Gaussiana del plano es 0 y de la esfera es 1, por lo que el teorema egregium de Gauss nos dice que es imposible construir un mapeo que preserve distancia y ángulos. Si bien la proyección estereográfica preserva ángulos, es decir, es conforme, también nos permite transferir la métrica Euclidiana de \mathbb{S}^2 a $\hat{\mathbb{C}}$:

Definición 1.1.5. *La métrica cordal en $\hat{\mathbb{C}}$ se define como*

$$d_C(z_1, z_2) = |\pi(z_1) - \pi(z_2)| = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & \text{si } z_1, z_2 \neq \infty, \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \text{si } z_2 = \infty. \end{cases} \quad (1.2)$$

Como la topología inducida en \mathbb{S}^2 está inducida por la norma euclidiana en \mathbb{R}^3 y π es un homeomorfismo, tenemos que la métrica cordal define la misma topología euclidiana en $\hat{\mathbb{C}}$.

Definición 1.1.6. *Una superficie de Riemann S es un espacio de Hausdorff segundo numerable tal que para cada $p \in S$ existe al menos una carta (ϕ, U) donde $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{C}$ es un homeomorfismo y U es una vecindad de p ; y cualesquiera dos cartas son compatibles en el siguiente sentido: si para (ϕ_i, U_i) se tiene $p \in U_1 \cap U_2$, entonces*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

es holomorfa.

¹Función continua, biyectiva y con inversa continua.

Proposición 1.1.1. $\widehat{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann.

Demostración. Una base topológica para $\widehat{\mathbb{C}}$ es dada por: $U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$ si $z \in \mathbb{C}$ y $U_\varepsilon(\infty) = \{w \in \mathbb{C} : |w| > \varepsilon\} \cup \{\infty\}$ para el punto al infinito. Es fácil ver que es un espacio Hausdorff segundo numerable. Ahora daremos dos cartas para confirmar que es una superficie de Riemann. Si $z \in \mathbb{C}$ tomaremos la carta de la identidad (ϕ_1, U_z) y para ∞ imponemos la carta de inversión (ϕ_2, U_∞) donde

$$\phi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \neq \infty \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Es fácil comprobar que ϕ_2 es un homeomorfismo. Su compatibilidad holomorfa es concluyente pues tanto $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ como $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ son $z \rightarrow \frac{1}{z}$ en un dominio que excluye 0. La discusión en estos renglones demuestra que la compactificación de \mathbb{C} es una superficie de Riemann. \square

1.2. Automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$

Sembrado nuestro espacio de trabajo con una estructura, continuaremos en ahondar cuán equivalente es esta superficie consigo misma. Para ello recordemos que una aplicación continua $f : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies de Riemann es holomorfa o analítica si para cada par de cartas (ϕ, U) y (ψ, V) , definidas sobre S_1 y S_2 respectivamente tales que $f(U) \subset V$, la aplicación $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es analítica. Se dice que f es un biholomorfismo si es holomorfa, biyectiva y su inversa es también holomorfa. Un automorfismo es un biholomorfismo donde el dominio y el contradominio, es ella misma. Un automorfismo es una equivalencia de una superficie de Riemann, es como apreciar una superficie de un mismo modo desde distintos ángulos. El conjunto formado por todos los automorfismos de S , dotado de la composición, tiene estructura de grupo y se denota con $Aut(S)$.

La parte medular de este trabajo es estudiar algunas clases de subgrupos de $Aut(\widehat{\mathbb{C}})$. Empecemos por determinar como son los elementos de este grupo.

Teorema 1.2.1. El grupo de automorfismos del plano complejo extendido es dado por:

$$Aut(\widehat{\mathbb{C}}) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}$$

donde cada elemento es llamado una transformación de Möbius.

Demostración. Primero veamos que una transformación de Möbius es un automorfismo. Supongamos que $ad - bc \neq 0$, pues si la igualdad se cumpliera sería una función constante. Como

$$\begin{aligned} T(z_1) &= T(z_2) \\ \Rightarrow \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} &= \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \\ \Rightarrow (cz_2 + d)(az_1 + b) &= (az_2 + b)(cz_1 + d) \\ \Rightarrow cz_2az_1 + cz_2b + daz_1 + db &= az_2cz_1 + az_2d + bcz_1 + bd \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_1(ad - bc) = z_2(ad - bc)$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2$$

por tanto, T es inyectiva. Por otro lado si despejamos a z_1 de

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = z_2$$

$$z_1 = \frac{dz_2 - b}{-cz_2 + a}$$

esta sería la inversa de la transformación y por consiguiente las transformaciones de Möbius son biyectivas. Para la continuidad tenemos que la métrica cordal induce la misma topología que la euclidiana, por lo que las transformaciones son continuas en \mathbb{C} , excepto cuando $cz + d = 0$, es decir, cuando $z = -\frac{d}{c}$ por lo tanto, basta probar continuidad en este punto y en ∞ para probar continuidad en $\hat{\mathbb{C}}$. Si $c = 0$, entonces $z = -\frac{d}{c} = \infty$ y por tanto hay que demostrar continuidad en $T(\infty) = \frac{a(\infty)+b}{c(\infty)+d} = \frac{a+\frac{b}{\infty}}{c+\frac{d}{\infty}} = \frac{a}{c}$. Si $z_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \frac{a + \frac{b}{z_n}}{c + \frac{d}{z_n}} \rightarrow \frac{a}{c},$$

cuando $n \rightarrow \infty$ y por consiguiente $d_C\left(\frac{az_n+b}{cz_n+d}, T(\infty)\right) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Ahora, si $c \neq 0$, entonces $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ y hay que probar continuidad aquí. Si $z_n \rightarrow -\frac{d}{c}$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \frac{az_n + b}{c\left(z_n - \left(-\frac{d}{c}\right)\right)} = \left(\frac{az_n + b}{c}\right) \left(\frac{1}{z_n - \left(-\frac{d}{c}\right)}\right) \rightarrow \infty$$

cuando $n \rightarrow \infty$ y por lo tanto $d_C\left(\frac{az_n+b}{cz_n+d}, T\left(-\frac{d}{c}\right)\right) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo que concluimos que las transformaciones de Möbius son continuas en $-\frac{d}{c}$, y como en ∞ es el caso análogo para $c = 0$ tenemos que son continuas en la compactificación de \mathbb{C} .

Ahora toca probar que efectivamente es analítica. Como vimos $T(\infty) = \frac{a}{c}$ y $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$. Para $z \neq \{\infty, -\frac{d}{c}\}$ tomamos las cartas de la identidad $\phi = \psi = id$, de esta manera $\hat{T} = \psi \circ T \circ \phi^{-1} = \frac{aw+b}{cw+d}$ es holomorfa en tanto $w \neq -\frac{d}{c}$. Para $z = -\frac{d}{c}$ escogemos las cartas $\phi = id$ y $\psi = \frac{1}{w}$, consiguiendo que $\hat{T} = \psi \circ T \circ \phi^{-1} = \frac{cw+d}{aw+b}$ es holomorfa en $w = -\frac{d}{c}$. Y para $z = \infty$ las cartas $\phi = \frac{1}{w}$ y $\psi = id$ obtenemos que $\hat{T} = \psi \circ T \circ \phi^{-1} = \frac{a+bw}{c+dw}$ es holomorfa en $w = 0$. Con lo que concluimos que las transformaciones de Möbius son analíticas y por lo tanto son automorfismos.

Recíprocamente, sea T un automorfismo de la esfera de Riemann. Un lema, que se encuentra en [1] p. 12, dice que: si $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es analítica y obedece que $f^{-1}(\infty) = \infty$ entonces es un polinomio. Centremos que $T(\infty) = \infty$, entonces tiene que ser un polinomio, pero por otra parte solamente los polinomios de grado 1 satisfacen tener inversa. Por ende T es un polinomio de grado 1, que es una transformación de Möbius. En caso de que $T(\infty) = a$ acomodamos el problema al caso anterior con la composición de un $S = \frac{1}{z-a}$ sirviéndonos de la igualdad $ST(\infty) = \infty$. Nuevamente por el lema la función es un polinomio de grado 1, digamos $ST = bz + c$. Así podemos ver que

$T = S^{-1}ST = \frac{az+ac+1}{bz+c}$ es una transformación de Möbius.

Por último observamos que las transformaciones $T = \frac{az+b}{cz+d}$ y $S = \frac{\lambda az+\lambda b}{\lambda cz+\lambda d}$ reproducen la misma asignación. Tomando $\lambda = \frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$ podemos restringir que las transformaciones de Möbius cumplan que $ad - bc = 1$. \square

La siguiente definición permite establecer una relación de equivalencia sobre el grupo de automorfismos del plano complejo extendido.

Definición 1.2.1. *Dos automorfismos T_1 y T_2 son conjugados si y solamente si existe un tercer automorfismo φ tal que $T_2 = \varphi \circ T_1 \circ \varphi^{-1}$.*

Geoméricamente la conjugación es un cambio de coordenadas de la esfera de Riemann. Resulta que la dinámica de dos transformaciones conjugadas es la misma sobre la esfera de Riemann.

Ahora vamos a clasificar las transformaciones de Möbius. Decimos que $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un punto fijo de una transformación T , diferente de la identidad, si satisface la igualdad $T(z) = z$. Desarrollando obtenemos la ecuación $cz^2 + (d-a)z + b = 0$ de segundo grado. Por lo tanto si T es una transformación de Möbius, diferente de la identidad, tiene a lo más dos puntos fijos distintos z_1 y z_2 en $\widehat{\mathbb{C}}$. Al aplicar el automorfismo varias veces a un punto diferente de los puntos fijos, $T^n(z)$, los puntos fluyen hacia, digamos sin pérdida de generalidad, z_1 y se dice punto atractor. Por el contrario los puntos se alejan de z_2 y se dice punto repulsor. La geometría dinámica de las transformaciones de Möbius presenta un comportamiento muy estético, como veremos más adelante. Y esto depende particularmente de las siguientes propiedades que poseen, herramientas poderosas y elegantes.

Proposición 1.2.1. *Sean $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ y $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ todos distintos, entonces existe un automorfismo T tal que $T(z_n) = w_n \forall n = 1, 2, 3$.*

Demostración. Sean $f(z) = \frac{(z_2-z_3)z-z_1(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)z-z_3(z_2-z_1)}$ y $g(z) = \frac{w_3(w_1-w_2)z-w_1(w_2-w_3)}{(w_1-w_2)z-(w_2-w_3)}$. Entonces $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$, $f(z_3) = \infty$, $g(0) = w_1$, $g(1) = w_2$ y $g(\infty) = w_3$, si componemos estas dos transformaciones $T = g \circ f$ obtenemos la transformación buscada. \square

Proposición 1.2.2. *Las transformaciones de Möbius transforman círculos en círculos.*

Demostración. Sea T una transformación y C un círculo en la esfera de Riemann. Existen otras transformaciones de la forma $r(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ que son llamadas reflexiones. Éstas son homeomorfismos de la esfera de Riemann que invierten la orientación, que tienen como puntos fijos el vacío, un punto, dos puntos o una circunferencia en la esfera de Riemann. Para cada circunferencia existe una reflexión que tiene como puntos fijos a la circunferencia, sea r_C la reflexión que tiene como puntos fijos a la circunferencia C . Si a una reflexión la conjugamos con una transformación de Möbius, obtenemos otra reflexión. Sea $\hat{r}_C = T \circ r_C \circ T^{-1}$. Como $T \circ r_C \circ T^{-1}(T(C)) = T(C)$, entonces el conjunto $T(C)$ son puntos fijos de \hat{r}_C que es una reflexión, por lo que puede ser un punto, dos puntos o un círculo pero por la biyectividad de las transformaciones necesariamente es un círculo. \square

Ya que estamos hablando de círculos es un buen momento para definir los siguientes conjuntos o discos.

Notación. Simbolizamos el semiplano superior como:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}.$$

Notación. Simbolizamos el disco unitario como:

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Pongamos especial atención en dos familias de círculos. Sea T un automorfismo con dos puntos fijos distintos z_1 y z_2 . Titulemos por Σ la familia de círculos que pasan por z_1 y z_2 ; y Σ' la familia de círculos que es ortogonal a Σ , que también es conocida como los círculos de Apolonio.

Fijado un automorfismo T , decimos que un conjunto X es invariante cuando $T(X) = X$. Un buen ejemplo son los puntos fijos. Con toda esta machaconería se consiguen los siguientes resultados.

Lema 1.2.1. Σ y Σ' son T -invariantes.

Demostración. Vamos a conjugar la transformación T con la transformación $\phi = \frac{z-z_1}{z-z_2}$, donde z_1 y z_2 son los puntos fijos de T , obteniendo la transformación $\hat{T} = \phi \circ T \circ \phi^{-1} = \frac{az+b}{cz+d}$. El propósito de ϕ es intercambiar los puntos fijos z_1 y z_2 con 0 e ∞ respectivamente. De manera que en \hat{T} los puntos fijos son 0 e ∞ . Realizando el siguiente despeje podemos apreciar de una manera sencilla a \hat{T} :

$$\begin{aligned} \frac{a(0)+b}{c(0)+d} = 0 & \quad \frac{a+\frac{b}{\infty}}{c+\frac{d}{\infty}} = \infty \\ \frac{b}{d} = 0 & \quad \frac{a}{c} = \infty \\ b = 0 & \quad c = 0 \end{aligned}$$

Cosechando la transformación $\hat{T} = \frac{a}{d}z$. Las familias de circunferencias Σ y Σ' bajo ϕ se convierten en el plano en la familia de rectas que pasan por el origen y en la familia de circunferencias con centro en el origen. Si escogemos una circunferencia con centro en el origen, $|z| = r$ para algún $r \in \mathbb{R}^+$, al aplicarle la transformación \hat{T} resulta $|\frac{a}{d}z| = r$, que se puede ver como $|z| = |\frac{d}{a}|r$, es decir, una circunferencia con centro en el origen. Lo mismo ocurre para las rectas que pasan por el origen, $z = kz_0 \forall k \in \mathbb{R}$, se transforman en $z = k\frac{d}{a}z_0$. Concluyendo que la familia de rectas y circunferencias son \hat{T} -invariantes y por conjugación Σ y Σ' son T -invariantes. \square

Definición 1.2.2. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius. Definimos la traza de una transformación como $Tr(T) = a + d$.

Lema 1.2.2. La traza es invariante bajo conjugación.

Demostración. Sean $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $S(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$. Dado que ocurre lo siguiente:

$$T \circ S = \frac{(ae + bg)z + af + bh}{(ce + dg)z + cf + dh}$$

$$S \circ T = \frac{(ae + fc)z + eb + fd}{(ga + hc)z + gb + hd}$$

Obtenemos que $Tr(T) \circ S = Tr(S \circ T)$. Y la afirmación es consecuencia de este hecho ya que entonces $Tr(T \circ S \circ T^{-1}) = Tr(T^{-1} \circ T \circ S) = Tr(S)$. \square

Teorema 1.2.2. *Si T una transformación de Möbius entonces:*

- A) cada círculo de Σ es T -invariante si y sólo si $|a + d| > 2$, la transformación es llamada hiperbólica,
- B) cada círculo de Σ' es T -invariante si y sólo si $|a + d| < 2$, la transformación es llamada elíptica,
- C) ningún círculo de Σ ó Σ' es T -invariante si y solo si $a + d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la transformación es llamada loxodrómica,
- D) $z_1 = z_2$ si y solo si $|a + d| = 2$, la transformación es llamada parabólica.

Demostración. D) $z_1 = z_2$ si y sólo si el discriminante de la ecuación cuadrática $cz^2 + (d - a)z + b = 0$ es igual a 0, es decir, $(a - d)^2 - 4bc = 0$ si y solo si $(a + d)^2 - 4 = 0$ si y solo si $|a + d| = 2$.

A) Si cada círculo de Σ es T -invariante, entonces cada recta que pasa por el origen es \hat{T} -invariante, con \hat{T} como en el Lema 1.2.1, entonces $\hat{T} = kz$ con $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, que se puede ver como $\hat{T} = \frac{\sqrt{k}z}{1/\sqrt{k}}$. De esta manera $|a + d| = |\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}| > 2$.

B) Si cada círculo de Σ' es T -invariante, entonces cada círculo con centro en el origen es \hat{T} -invariante, así $\hat{T} = e^{i\theta}z$ para algún $\theta \in (0, 2\pi)$, que se puede ver como $\hat{T} = \frac{e^{i\theta/2}z}{e^{-i\theta/2}}$. Por tanto, $|a + d| = |e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}| = |2\cos(\frac{\theta}{2})| < 2$.

C) Si ningún círculo de Σ ó Σ' es T -invariante, entonces ningún círculo de la familia de círculos con centro en el origen es \hat{T} -invariante al igual que ninguna recta que pasa por el origen. Entonces $\hat{T} = \alpha z$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\Im(\alpha) \neq 0$. Con lo que se concluye que $a + d = \alpha + 1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Para la suficiencia basta con observar que si suponemos alguna igualdad se debe cumplir la condición necesaria para no entrar en una contradicción, por ejemplo, si suponemos que $|a + d| > 2$ pero se cumple que cada círculo de Σ' es T -invariante, llegamos a que $|a + d| < 2$ lo cual es una contradicción. \square

El teorema de uniformización motiva para el estudio de estas transformaciones pues decreta que toda superficie de Riemann simplemente conexa es holomorfa a una y sólo una de las siguientes superficies: \mathbb{C} , $\hat{\mathbb{C}}$ ó \mathbb{H} . Por lo tanto, vale la pena estudiar sus grupos de automorfismos.

El grupo $Aut(\mathbb{C})$ consiste en los polinomios de grado uno, es decir, transformaciones afines de \mathbb{C} de la forma $az + b$ donde $a, b \in \mathbb{C}$ y por fuerza $a \neq 0$. Por otro lado, el grupo de automorfismos de \mathbb{H} será estudiado con más detenimiento en el capítulo dos.

1.3. Grupo lineal especial proyectivo

Para concluir este capítulo vinculemos nuestro grupo de automorfismos con otro grupo bastante conocido en matemáticas.

Definición 1.3.1. El espacio de matrices de 2×2 con entradas complejas se denota como:

$$M(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}^4.$$

Definición 1.3.2. La clase de matrices de 2×2 no singulares con entradas complejas es llamado grupo lineal general y se denota por:

$$GL(2, \mathbb{C}) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}.$$

Definición 1.3.3. La clase de matrices de 2×2 con entradas complejas y determinante igual a 1 es llamado grupo lineal especial y denotado como:

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) : \det(A) = 1\}.$$

Definidos de esta manera podemos dotar a $M(2, \mathbb{C})$ de la topología usual y de esta forma adquiere una estructura de grupo topológico. Por otro lado, $GL(2, \mathbb{C})$ es un subgrupo topológico cerrado de $M(2, \mathbb{C})$, mientras que $SL(2, \mathbb{C})$ es un subgrupo topológico abierto. Con todo esto podemos entender el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. La asignación $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

es un homomorfismo suprayectivo entre grupos cuyo kernel es $\{\pm Id\}$.

Demostración. Sean

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Dos elementos de $SL(2, \mathbb{C})$. Como el producto

$$MN = \begin{pmatrix} ae+bg & ce+dg \\ af+bh & cf+dh \end{pmatrix}$$

tiene determinante 1, desarrollamos $\rho(M) \circ \rho(N)$ para verificar que la composición arroja los mismos elementos que la matriz.

$$\rho(M)(\rho(N)) = \rho(M) \left(\frac{ez+f}{gz+h} \right) = \frac{a \left(\frac{ez+f}{gz+h} \right) + b}{c \left(\frac{ez+f}{gz+h} \right) + d} = \frac{(ae+bg)z + ce + dg}{(af+bh)z + cf + dh}$$

Ahora, encontremos el kernel de la función caracterizando las transformaciones

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

que responden a la identidad. La identidad debe fijar ∞ y 0, por lo que $c = 0$ y $b = 0$ y en conclusión $ad = 1$ y la transformación quedaría $T = \frac{a}{d}z$ y, por tanto $\frac{a}{d} = 1$ o lo que es lo mismo $a = d$. En consecuencia $a = d = \pm 1$. \square

Definición 1.3.4. Denotamos el siguiente cociente llamado grupo lineal especial proyectivo

$$PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) \setminus \{\pm Id\}$$

El cociente anterior es un subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$ al que se le puede definir la topología cociente y por lo tanto admite una estructura de grupo topológico. El siguiente resultado es consecuencia inmediata del primer teorema de isomorfismos.

Teorema 1.3.2. Los grupos $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ y $PSL(2, \mathbb{C})$ son isomorfos.

Capítulo 2

Grupos Kleinianos

La teoría básica de los grupos Kleinianos fue establecida en documentos fundamentales de Henry Poincaré y Felix Klein en el siglo XIX. El nombre "grupo Kleiniano" se remonta a Poincaré. Hasta nuestros días no se ha podido dar una clasificación completa de los subgrupos de $PSL(2, \mathbb{C})$, sin embargo los grupos Kleinianos son una clase de subgrupos que ha llamado la atención de muchos matemáticos.

2.1. Región de discontinuidad de un grupo Kleiniano

En esta sección definiré y daré algunas propiedades de los grupos Kleinianos. Por ejemplo, la inefable concatenación entre grupos Kleinianos y superficies de Riemann. Para las definiciones, en su mayoría, me guié de la referencia [2], en cambio los resultados que escribo sin demostración, se puede encontrar su demostración en [3].

Sea X un espacio donde G actúa. El subgrupo estabilizador de G en x es $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ y la órbita se define como $G(x) = \{gx : g \in G\}$.

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio topológico y G un grupo de homeomorfismos de X en si mismos. Decimos que G actúa de manera discontinua en X si y solo si para cualquier subconjunto compacto K de X ,*

$$gK \cap K = \emptyset$$

excepto para un número finito de $g \in G$.

Esta definición es equivalente a decir que el estabilizador G_x es finito y la demostración se puede encontrar en [4], p. 32, junto con el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1. *G actúa de manera discontinua en X si y solo si cada punto x tiene una vecindad V tal que $T(V) \cap V = \emptyset$, excepto para un número finito $T \in G$.*

En nuestro caso tenemos que $PSL(2, \mathbb{C})$ actúa sobre $\hat{\mathbb{C}}$ a través de $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$. El conjunto donde un subgrupo G de $PSL(2, \mathbb{C})$ actúa de manera discontinua se escribe $\Omega(G)$ y el grupo G se dice

discontinuo o Kleiniano si $\Omega(G) \neq \emptyset$.

Para un subgrupo discontinuo G encontramos dos clases de puntos en el conjunto de discontinuidad: los puntos tales que su estabilizador es trivial, que denotaremos por $\Omega'(G)$, y $\Omega''(G)$ los que su estabilizador no es trivial. Por lo tanto $\Omega(G) = \Omega'(G) \cup \Omega''(G)$. Este conjunto también es llamado conjunto ordinario. Por un lado $\Omega'(G)$ no son puntos fijos de elementos elípticos en G , y $\Omega''(G)$ son puntos fijos elípticos de G que por tanto su estabilizador es un grupo cíclico de orden finito.

Un punto x es un punto límite de un grupo Kleiniano G si existe un punto $z \in \Omega(G)$ y una secuencia g_n de elementos distintos de G , tal que $g_n z \rightarrow x$. Este conjunto es llamado el conjunto límite y se denota como $\Lambda(G)$. Como cualquier vecindad de un punto límite contiene infinidad de traslaciones de algún punto, $\Lambda(G) \cap \Omega(G) = \emptyset$, véase [5], p. 22. Este conjunto es denso en ninguna parte de la esfera de Riemann y coincide con la cerradura del conjunto de puntos fijos de los elementos no elípticos de G . Se puede mostrar que el conjunto límite de un grupo Kleiniano es vacío, o consiste de uno o dos puntos, o es infinito. Un grupo G se dice elemental si $\Lambda(G)$ es finito. En caso contrario, decimos que G es un grupo no-elemental.

El siguiente lema ayuda a entender la manera en cómo están distribuidos los puntos de $\Omega''(G)$ en la esfera de Riemann, trasladando las vecindades mediante un biholomorfismo a Δ , donde estamos en un terreno más familiar.

Lema 2.1.1. *Sea V una vecindad abierta de $0 \in \mathbb{C}$ y H un grupo finito de automorfismos holomorfos de V que fijan a 0 . Entonces existe una vecindad abierta y conexa D de 0 que es invariante por H y un mapeo biholomorfo $f : D \rightarrow \Delta$ tal que $f(0) = 0$ y $\hat{H} = f^{-1} \circ H \circ f$ es un grupo finito de rotaciones sobre el origen, véase.*

Teorema 2.1.2. *Si G es un grupo Kleiniano, entonces $\Omega(G)$ es un conjunto abierto, $\Lambda(G)$ es un conjunto cerrado y ambos conjuntos son invariantes por G .*

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega'(G)$, entonces existe una vecindad abierta de z_0 tal que $gU_{z_0} \cap U_{z_0} = \emptyset$, para todo $g \neq I$. Claramente, para todo $z' \in U_{z_0}$ su estabilizador es trivial y por lo tanto, $U_{z_0} \subset \Omega(G)$. Si $z_0 \in \Omega''(G)$, entonces existe una vecindad abierta de z_0 tal que $gU_{z_0} = U_{z_0}$, para todo $g \in G_{z_0}$, entonces por el lema anterior existe una vecindad abierta y conexa D_{z_0} tal que el subgrupo estabilizador luce como la acción de un grupo cíclico finito de rotaciones del disco al rededor de su centro, es decir, $\forall z' \in D_{z_0} \setminus \{z_0\}$ el estabilizador es trivial. Por tanto, $D \setminus \{z_0\} \subset \Omega(G)'$ logrando los dos primeros resultados.

Ahora veamos que $\Lambda(G)$ es invariante. Si $z_0 \in \Lambda(G)$ y $g \in G$, entonces existe $z \in \hat{\mathbb{C}}$ y $\{g_n\}$ una sucesión de elementos distintos en G talque $g_n z \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $g \circ g_n z \rightarrow g z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto $g z_0 \in \Lambda(G)$ para cualquier $g \in G$. \square

De aquí obtenemos que para todo grupo Kleiniano, $\Omega''(G)$ es un subconjunto discreto de la esfera de Riemann y que $\Omega'(G) \neq \emptyset$. En los siguientes renglones procederemos a investigar los grupos Kleinianos desde un enfoque geométrico basado en el siguiente concepto.

Definición 2.1.2. *Una región fundamental de un grupo Kleiniano G es un conjunto $F \subset \Omega(G)$ que*

contiene un punto para cada órbita $G(z_0)$, $z_0 \in \Omega(G)$, y tal que para cada componente Ω_j , $F \cap \Omega_j$ es conexa.

El conjunto de discontinuidad se descompone en componentes conexas Ω_j , donde j puede ser 1, 2 ó ∞ . El estabilizador de éstas componentes $G_j = \{g \in G : g\Omega_j = \Omega_j\}$ es un subgrupo de G . Si G_j coincide con G , entonces la componente Ω_j se dice que es invariante. Dos grupos G_1 y G_2 son conjugados si existe un automorfismo ϕ tal que $G_1 = \phi G_2 \phi^{-1}$, así dos componentes Ω_1 y Ω_2 se dice que son equivalentes o conjugadas si los estabilizadores G_1 y G_2 son conjugados en G ; entonces $\Omega_1 = g\Omega_2$ para algún $g \in G$.

Teorema 2.1.3. *Si G es un grupo Kleiniano, entonces $\Omega(G)/G$ es unión de superficies de Riemann.*

Lema 2.1.2. *Si $z \in \Omega(G)$, entonces su órbita es un subconjunto discreto de $\Omega(G)$.*

Demostración. Sea $z \in \Omega(G)$ y U_z tal que $gU_z \cap U_z = \emptyset$, $\forall g \in G \setminus G_z$. Supongamos que $G(z)$ no es discreto y sea z_1 un punto de acumulación, entonces podemos encontrar una sucesión $g_n z \rightarrow z_1$ con g_n distintas. Si $\varepsilon > 0$ entonces $\exists N$ tal que $m > n > N$ entonces $|g_n z - g_m z| < \varepsilon$. Si $g_n U_z \cap g_m U_z \neq \emptyset$ entonces $g_m z' = g_n z''$ para $z', z'' \in U_z$, entonces $g_n^{-1} g_m z' = z''$, entonces $g_n^{-1} g_m U_z \cap U_z \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por tanto $g_n U_z \cap g_m U_z = \emptyset$ para $m \neq n$ que también es una contradicción. Por lo tanto, $\Omega(G)$ es discreto. \square

Lema 2.1.3. *Si G es Kleiniano, entonces puede ser finito o numerable.*

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega(G)'$, entonces $G(z_0)$ es un subconjunto discreto, por el lema anterior, y por lo tanto es finito o numerable. El resultado se sigue del hecho que G y $G(z_0)$ tienen la misma cardinalidad, por que el estabilizador de z_0 es trivial. \square

Definición 2.1.3. $G \subset PSL(2, \mathbb{C})$ se dice discreto si es un subconjunto discreto del espacio topológico $PSL(2, \mathbb{C})$, es decir, subgrupos en los que la identidad es un elemento aislado.

Proposición 2.1.1. *Si G es Kleiniano, entonces es discreto.*

Demostración. Por el lema anterior si G es finito entonces es discreto. Si G es numerable y no es discreto, entonces existe un punto de acumulación $g_0 \in PSL(2, \mathbb{C})$, es decir, una secuencia $\{g_n\}$ que tiende a g_0 . Sea $z \in \Omega(G)$, entonces $g_n z \rightarrow g_0 z = z_0$ y $\{g_n z\}$ es de Cauchy. Pero esto contradice el hecho de que G actúa de manera discontinua en z . Por tanto es discreto. \square

Por el contrario un grupo discreto no necesariamente es Kleiniano. Por ejemplo, el grupo de Picard determinado de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}) : a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i] \right\},$$

donde $\mathbb{Z}[i]$ son los enteros gaussianos, los números complejos con coeficientes enteros. Este grupo es discreto pero no es Kleiniano, [6] p. 96.

2.2. Grupos Fuchsianos

Los grupos Fuchsianos fueron estudiados por Poincaré en 1882 en relación con el problema de la uniformización. Llamó a los grupos Fuchsianos en honor a Lazarus Fuchs, cuyos trabajos le inspiraron para introducir este concepto. El concepto de grupo Fuchsiano proporcionó una base para la teoría de automorfismos creada por Poincaré y Klein. La noción más asequible es que se tratan de grupos cuyo conjunto límite habita en un círculo.

Definición 2.2.1. *Un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ es llamado Fuchsiano si deja invariante (o preserva) un disco o un semiplano D .*

Debido a que un disco es conformemente o analíticamente equivalente a otro no habrá cualidad que lo deslinde de los demás. Lo más a menudo que uno toma para D son Δ y \mathbb{H} , modelos del plano de Lobachevskii. Por ejemplo, la transformación de Cayley

$$\varphi = \frac{z - i}{z + i}$$

es una biyección conforme de $\mathbb{H} \rightarrow \Delta$, cuya inversa es la función $\varphi^{-1} = i\frac{1+z}{1-z}$ de $\Delta \rightarrow \mathbb{H}$. Los siguientes dos teoremas determinan todas las posibles transformaciones de Möbius que preservan Δ y \mathbb{H} , cuya demostración se puede encontrar en [7].

Teorema 2.2.1. *El grupo de automorfismos de Δ es dado por:*

$$Aut(\Delta) = \left\{ T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} : \theta \in \mathbb{R} \text{ y } z_0 \in \Delta \right\}$$

Teorema 2.2.2. *El grupo de automorfismos de \mathbb{H} es dado por:*

$$Aut(\mathbb{H}) = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}$$

Análogamente a la última sección del capítulo uno demuestra que $Aut(\mathbb{H}) \cong PSL(2, \mathbb{R})$. De esta manera podemos referirnos a un grupo Fuchsiano como un subgrupo de $Aut(\mathbb{H})$, $Aut(\Delta)$ ó de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Ahora vamos a describir los grupos Fuchsianos elementales, para este propósito vamos a utilizar el disco del semiplano superior, entonces G será un subgrupo Kleiniano de $PSL(2, \mathbb{R})$. Necesitamos transformaciones que preservan \mathbb{R} . Por el lado de las transformaciones elípticas son aquellas que tienen puntos fijos simétricos con respecto a \mathbb{R} . Si el ángulo de rotación de una transformación elíptica es irracional, entonces genera un grupo de transformaciones elípticas que es infinito y no Kleiniano, sí el ángulo es racional entonces genera un grupo finito y cíclico, por lo tanto Kleiniano. Las transformaciones hiperbólicas y parabólicas que preservan $\hat{\mathbb{R}}$ son transformaciones que tienen sus puntos fijos en \mathbb{R} . Si se conjuga, estas transformaciones se pueden expresar como $f = \lambda z$ y $g = z + k$, donde $\lambda > 1$ y $k \neq 0$. El grupo generado por cada una de estas transformaciones es un grupo infinito, cíclico y Kleiniano.

Consideremos el caso en el que existen elementos elípticos e hiperbólicos. Conjugamos para que los dos puntos fijos sean 0 e ∞ . Con este fin, un elemento hiperbólico debe tener la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$, y con el fin de alternarlos, un elemento elíptico debe ser $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$. Podemos utilizar la transformación $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ para que si $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$ es cualquier elemento elíptico en el grupo, también hay un elemento hiperbólico $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$ obtenido por composición que en cierto sentido corresponde al elemento elíptico. Como deseamos que el grupo sea Kleiniano, todos los elementos hiperbólicos son generados por algún elemento $\begin{pmatrix} k^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}$, y como podemos asociar un elemento hiperbólico con un elíptico por medio de la composición con $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, el grupo es generado por estas dos transformaciones.

Con esta discusión podemos formular el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3. *Si G es un grupo Fuchsiano elemental, entonces:*

A) *es cíclico*

B) *o es conjugado de un grupo generado por kz y $-\frac{1}{z}$.*

Respecto a los grupos Fuchsianos no-elementales muchas cosas se pueden demostrar de ellos, sin embargo no es el propósito de este trabajo. Por decir algo, todo grupo Fuchsiano no-elemental contiene un elemento hiperbólico. Para un estudio más detallado del tema recomiendo [8]. A continuación se presenta una propiedad interesante de estos. Como vimos en el ejemplo del grupo de Picard, un grupo discreto no necesariamente es Kleiniano en $PSL(2, \mathbb{C})$, no obstante sí lo hacen en el caso de los grupos Fuchsianos. Más precisamente tenemos lo siguiente.

Teorema 2.2.4. *Si G es Fuchsiano, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

A) *G es discreto,*

B) *$D \subset \Omega(G)$,*

Demostración. (a) \Rightarrow (b): Sea $G \subset Aut(\Delta)$ y sea $z_0 \in \Delta$ un punto donde G no actúa de manera discontinua, entonces existe una secuencia infinita de puntos distintos $\{z_n\}$ en la órbita $G(z_0)$ que convergen a z_0 tal que $g_n(z_n) = z_0$. Para $n \geq 0$ definimos

$$A_n = \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z},$$

entonces $A_n \rightarrow A_0$ y para $n > 0$ consideramos

$$C_n = A_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1} \circ g_n \circ A_n^{-1}.$$

Entonces $C_n(0) = A_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1} \circ g_n(A_n^{-1}(0)) = A_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1}(g_n(z_n)) = A_{n+1}(g_{n+1}^{-1}(z_0)) = A_{n+1}(z_{n+1}) = 0$. Por el lema de Schwarz $C_n = \lambda_n z$ con $|\lambda_n| = 1$. Entonces existe una subsecuencia de $\{C_n\}$ que

converge a C_0 . Sea $h_n = g_{n+1}^{-1} \circ g_n \in G$, notemos que $h_n(z_n) = z_{n+1}$ y como $\{z_n\}$ son todos distintos entonces $\{h_n\}$ son todos distintos, entonces $h_n \rightarrow A_0^{-1} \circ C_0 \circ A_0$. Vemos que $A_0^{-1} \circ C_0 \circ A_0$ es un punto de acumulación para G y tenemos una contradicción de que era discreto.

(b) \Rightarrow (a): Se demostró en Proposición 2.1.1. \square

Corolario 2.2.1. Si G es un grupo Fuchsiano que deja invariante un disco D , entonces $\Lambda(G) \subset \partial D$.

Demostración. Como G preserva el disco D entonces también preserva el disco exterior en la esfera de Riemann. Entonces por el teorema anterior, el exterior de D también se encuentra en la región de discontinuidad $\Omega(G)$. \square

Es llamado un grupo Fuchsiano de primera clase si $\Lambda(G) = \partial D$, y de segunda clase si $\partial D \setminus \Lambda(G) \neq \emptyset$ (en este caso $\Lambda(G)$ es denso en ninguna parte de ∂D).

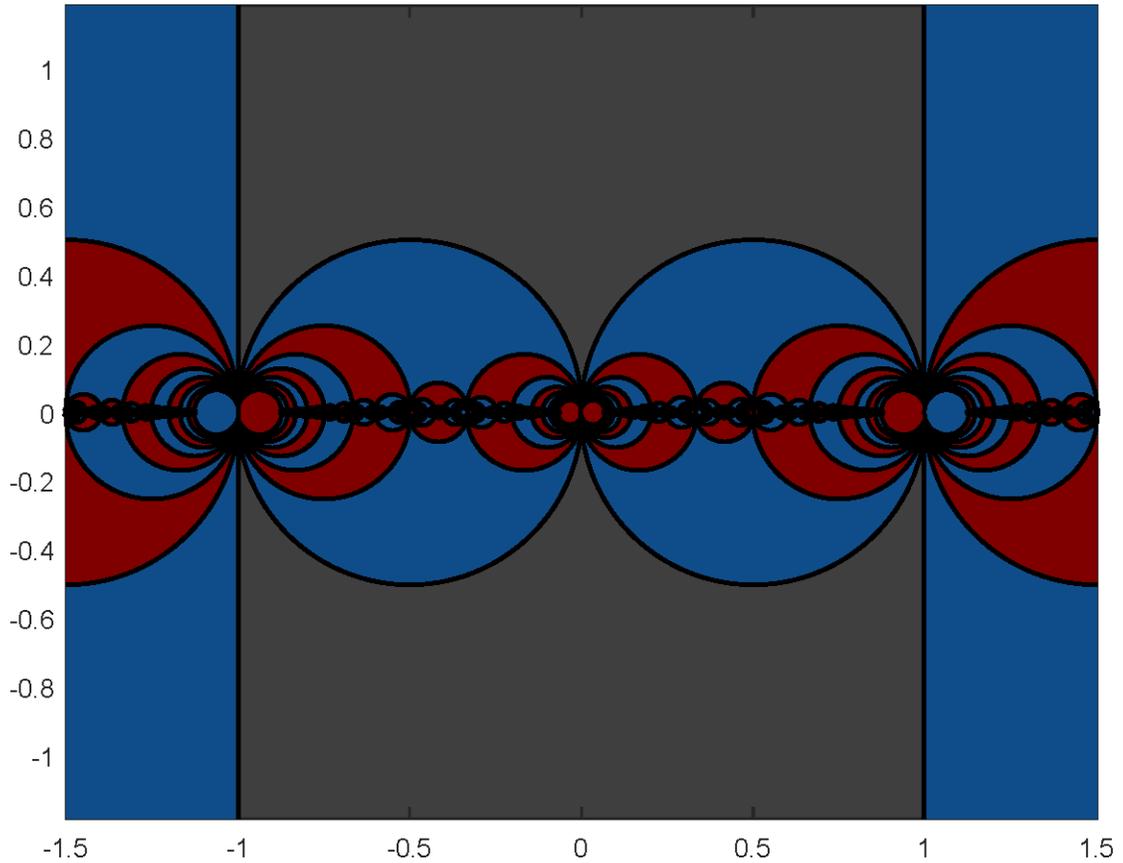


Figura 2.1: Teselación del conjunto ordinario del grupo modular estándar.

Ejemplo. El grupo $G = \left\langle \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right\rangle$. Este grupo es conocido como el grupo modular estándar, y es un subgrupo del grupo modular completo $PSL(2, \mathbb{Z})$ que consta de todas las

matrices $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ con entradas enteras p, q, r y s tal que su determinante $ps - qr$ es igual a 1. En el caso de $G \subset PSL(2, \mathbb{Z})$ son entradas enteras tal que q y r son pares y p y s son impares. Ambos grupos son discretos y Fuchsianos subgrupos de $PSL(2, \mathbb{R})$, entonces por el teorema 2.2.4 son Kleinianos y su conjunto límite existe en la recta real y son los racionales mientras que su conjunto de discontinuidad son el semiplano superior e inferior. En la figura 2.1 se muestra la teselación del conjunto ordinario de G cuya región fundamental son los cuadriláteros ideales coloreados de gris. El grupo genera la superficie de Riemann conocida como la esfera triplemente pinchada. Las matrices que generan el grupo son transformaciones parabólicas con puntos fijos 0 e ∞ .

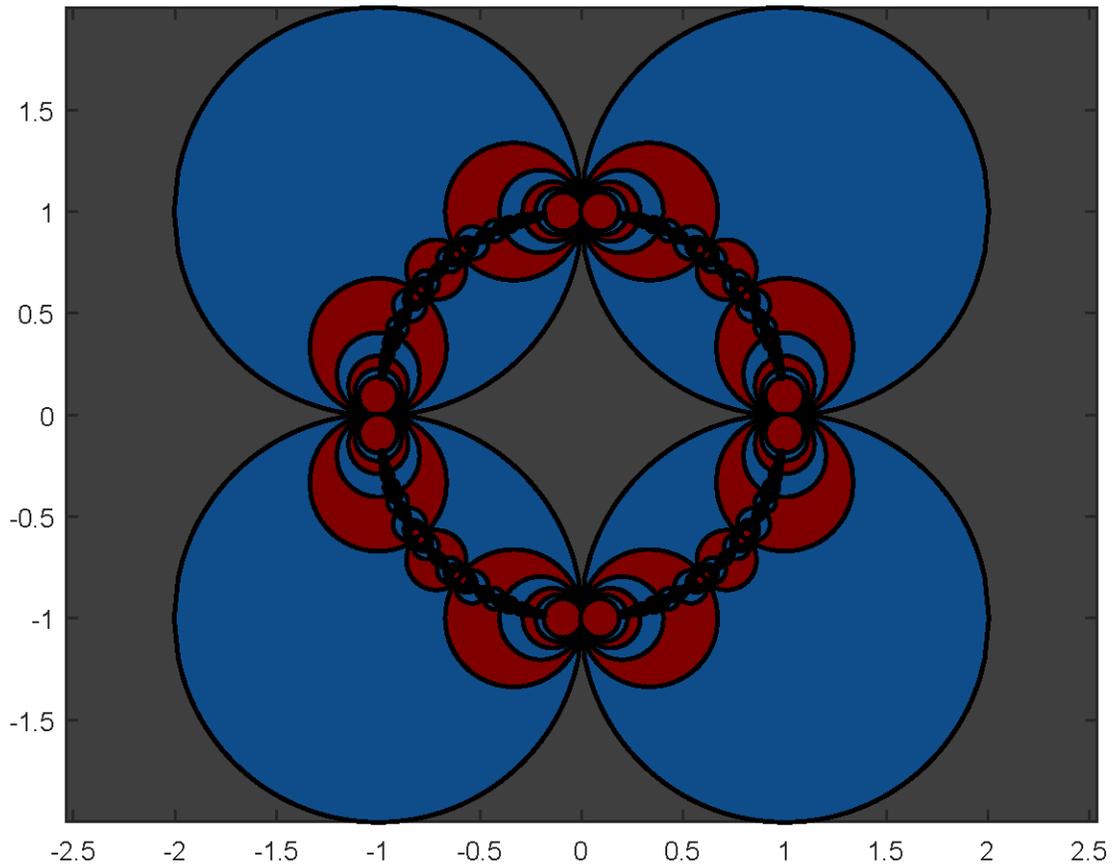


Figura 2.2: Teselación generada por el grupo modular estándar conjugado sobre el disco unitario.

Imitemos el grupo modular estándar conjugando sobre el disco unitario con la transformación de Cayley. Un sencillo cálculo muestra que

$$a = \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -i & 1-i \end{pmatrix} \text{ y } b = \varphi \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente el grupo generado por éstas dos transformaciones es un subgrupo discreto de $Aut(\Delta)$ de segunda clase tal que su conjunto límite y discontinuo pueden observarse en la figura

2.2. Las transformaciones a , b y ab son parabólicas y $Fix(a) = i$, $Fix(b) = -i$, $Fix(ab) = -1$ y $Fix(ba) = 1$, donde Fix representa el punto fijo de la transformación. Análogamente al ejemplo anterior el área sombreada de gris representa un dominio fundamental donde actúa cada elemento del grupo y lo transforma en un cuadrilátero azul y rojo dependiendo del nivel.

Una generalización directa de los grupos Fuchsianos son los grupos casi-Fuchsianos. Son grupos de transformaciones de Möbius tal que su conjunto límite es una imagen homeomorfa de un círculo, conocida como una curva de Jordan, un casi-círculo. La correcta definición es una curva cerrada simple sin autointersecciones. En concreto es lo siguiente.

Definición 2.2.2. *Un grupo casi-Fuchsiano es un grupo Kleiniano tal que deja invariante alguna curva de Jordan $L \in \hat{\mathbb{C}}$.*

Otra vez, es dicho que es de primera clase o de segunda clase si $\Lambda(G) = L$ ó $L \setminus \Lambda(G) \neq \emptyset$, respectivamente. Debido a que el conjunto límite es una deformación continua del círculo siempre separa el conjunto de discontinuidad en dos partes, el interior y el exterior.

2.3. Grupos de Schottky

La familia de grupos de Schottky es una especie de grupos Kleinianos cuya construcción esta basada en una dinámica geométrica. A lo largo de ésta sección iremos desmenuzando para estos grupos el esquema general que presentamos al inicio del capítulo, describiendo un dominio fundamental, la forma de la superficie de Riemann asociada, al igual que su conjunto límite y la clase de elementos de los cuales está conformado. Sin más preámbulos comencemos con las definiciones.

Definición 2.3.1. *Un automorfismo loxodrómico $a(z)$ se dice que empareja los discos D_A y D_a si:*

- a. $D_A \cap D_a = \emptyset$,
- b. el exterior de D_A es trasladado por a al interior de D_a ,
- c. y si C_A es la frontera del disco D_A y C_a de D_a , entonces $aC_A = C_a$.

De las condiciones anteriores podemos demostrar que el punto fijo atractor de a , $Fix^+(a)$, se localiza en el interior de D_a , mientras que el punto fijo repulsor, $Fix^-(a)$, se halla en el interior de D_A ; el automorfismo a mapea el interior del disco D_A en el exterior del disco D_a ; y potencias sucesivas de a reducen el disco D_a en discos cada vez más pequeños que contienen a $Fix^+(a)$, mientras que potencias sucesivas del automorfismo inverso de a , que denotaremos como A , reducen el disco D_A en discos cada vez más pequeños que contienen a $Fix^-(a)$.

Definición 2.3.2. *Un subgrupo generado por $g_1, \dots, g_n \in PSL(2, \mathbb{C})$, donde cada automorfismo es loxodrómico y empareja dos discos tales que sus fronteras de todos son disjuntas, es llamado un grupo de Schottky clásico.*

Teorema 2.3.1. *Un grupo $G \subset PSL(2, \mathbb{C})$ es un grupo de Schottky clásico si y solamente si G es un grupo finitamente generado, un grupo Kleiniano puramente loxódromico, libre y de rango n .*

Si $n = 1$, sea a el generador del grupo G de Schottky clásico y definimos $F = Ext(D_a) \cap Ext(D_A)$, en seguida demostraremos que F es una región fundamental de G . Es fácil darse cuenta que $\Lambda(G) = \{Fix^+(a), Fix^-(a)\}$, es decir G es un grupo Kleiniano elemental, y por lo tanto $F \subset \Omega(G)$. Sea $z \in \Omega(G)$, si $z \in F$ entonces $gz \in F$ con g la identidad. Si $z \in D_a \setminus \{Fix^+(a)\}$ sabemos que existe una potencia a^k tal que $a^k z_0 = z$, donde $z_0 \in Ext(D_A) \setminus D_a$. Por lo tanto $A^k z = z_0 \in F$. Análogamente se prueba para $z \in D_A \setminus \{Fix^-(a)\}$. Como F es conexo, $F \cap \Omega_j$ es conexo y podemos afirmar que F es una región fundamental. Como la superficie de Riemann asociada al conjunto F bajo el cociente sobre el grupo, F/G , es un toro, se concluye que $\Omega(G)/G$ es la unión numerable de toros.

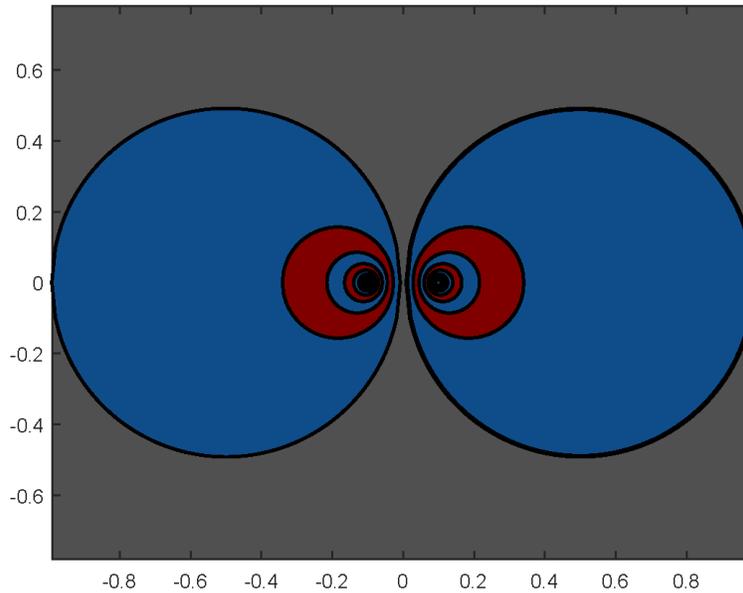


Figura 2.3: Grupo de Schottky con un generador.

Si $n = 2$, identificamos los generadores de G por a y b . Para calcular el conjunto límite basta con darse cuenta de dos hechos; que para cualquier elemento del grupo, $g \in G$, $g^k(z) \rightarrow Fix^+(g)$ cuando $k \rightarrow \infty$ y z que no es un punto fijo de algún elemento del grupo; y si $g_1, g_2 \in G$ entonces $g_2 Fix^+(g_1) = Fix^+(g_2 g_1)$; lo que concluye que $\Lambda(G) = \{Fix^+(g) : g \in G\}$. Veamos como están acomodados estos puntos en la esfera de Riemann. Sabemos que el automorfismo a empareja los discos D_a y D_A mientras que b los discos D_b y D_B . Como se muestra en la figura 2.3 los discos aD_b y aD_B se encuentran contenidos en D_a y los discos AD_b y AD_B en D_A , análogamente sucede con el automorfismo b y los correspondientes discos. Por lo tanto, potencias sucesivas de cualquier automorfismo del grupo aplicado a alguno de éstos discos se queda contenido en ellos mismos, deduciendo así que el conjunto límite está contenido en D_a, D_A, D_b y D_B . Además el punto $Fix^+(g) \in g^k D_g$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y como los discos están amoldados de forma autosimétrica, sorprendente el conjunto límite es un conjunto de Cantor. Luego la región de discontinuidad se puede teselar con una región fundamental utilizando la misma idea que para el caso $n = 1$ exponiendo los conjuntos $F_a = Ext(D_a) \cap Ext(D_A)$ y $F_b = Ext(D_b) \cap Ext(D_B)$, entonces $F = F_a \cap F_b$ es una región fundamental para G , véase la figura 2.3. La superficie de Riemann involucrada para este caso es un toro de dos agujeros.

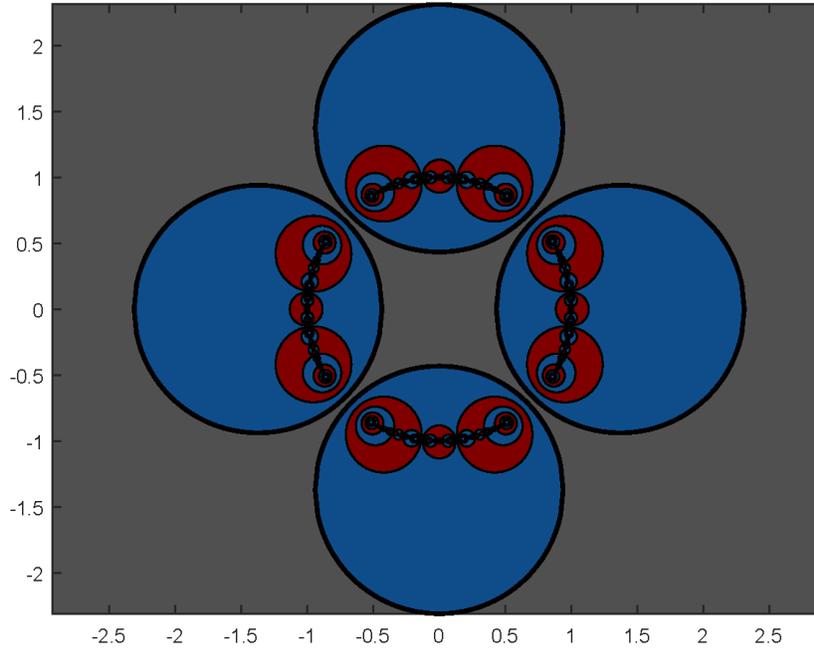


Figura 2.4: Grupo de Schottky con dos generadores.

En general, podemos concluir que el conjunto límite de un grupo de Schottky con un generador es igual a los dos puntos fijos de dicho automorfismo generador, y para $n > 1$ tenemos que $\Lambda(G)$ es un conjunto de Cantor. También podemos dar una región fundamental para cada grupo que consiste en la parte exterior de los discos que son emparejados por los generadores. Y el cociente $\Omega(G)/G$ es una superficie de Riemann cerrada de género n , cuyo inverso también se sostiene por el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. (de Retrosección de Koebe). *Sea S una superficie de Riemann de género $n \geq 1$. Entonces existe un grupo de Schottky G de rango n tal que $\Omega(G)/G$ es holomórficamente equivalente a S .*

Los grupos θ -Schottky son una familia específica de grupos de Schottky que son generados a partir de un parámetro θ , que representa un ángulo. Éste varía de la siguiente manera. Para el caso de dos generadores, acomodamos cuatro circunferencias con mismo radio, que sean ortogonales a la circunferencia unitaria y cuyos centros se localicen sobre los ejes. Tomamos la circunferencia tal que su centro se encuentra en la parte positiva del eje x , y la llamamos C_a . Entonces podemos dar los automorfismos, que emparejen los discos contenidos en las circunferencias, a partir del ángulo θ que se forma con el eje x y la línea que va del origen al punto de intersección de C_a y la circunferencia unitaria. Los círculos C_a, C_b, C_A y C_B tendrían su centro en $\sec \theta, i \sec \theta, -\sec \theta$ y $-i \sec \theta$ respectivamente. Mientras que los autormorfismos están determinados como:

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} & \cot \theta \\ \cot \theta & \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} & i \cot \theta \\ -i \cot \theta & \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \end{pmatrix}.$$

El conjunto límite de los θ -Schottky se ubica en la circunferencia unitaria, por ende estos grupos también pertenecen a la familia de grupos Fuchsianos. En la figura 2.4 se muestra un ejemplo de estos grupos con un θ cercano a $\frac{\pi}{4}$. En resumen: ésta familia de grupos son generados a partir de un sólo parámetro real. En el siguiente capítulo, que es el tema principal del trabajo, buscaremos parámetros para ciertos grupos Kleinianos.

Siguiendo nuestro sentido matemático resulta obvio preguntarnos qué pasa si hacemos tangentes las circunferencias de los discos emparejados por los generadores, y la respuesta es nada, a no ser que le agreguemos otras condiciones extras. Para efectos prácticos restringiremos la construcción de los siguientes grupos a únicamente dos generadores.

Comenzamos con dos automorfismos a y b que emparejan cuatro discos que son tangentes entre sí, como los discos azules C_a, C_A, C_b y C_B que se muestran en la figura 2.5, llamados de Schottky. El primer ingrediente que se necesita es asegurarnos que los discos de Schottky aplicados a un elemento del grupo tengan puntos de tangencia en común. Por ejemplo el disco C_B al aplicarle a (el cual obtenemos el disco C_{aB}) sean tangentes, y análogamente con C_b . Para esto solamente debemos fijar que suceda:

$$aR = Q, aS = P, bR = S \text{ y } bQ = P \quad (2.1)$$

donde P, Q, R y S son los puntos de tangencia como se muestran en la figura 2.5.

El segundo ingrediente es consolidar estos puntos de tangencia como puntos límite. Para ello basta observar que para cada punto existen dos sucesiones de discos que se van anidando. Por ejemplo en P tenemos la sucesión $C_{ab}, C_{abA}, C_{abAB}, C_{abABA}, C_{abABab}$ y así; y la sucesión $C_{ba}, C_{baB}, C_{baBA}, C_{baBAB}, C_{baBAb}$ y así. La única manera de que esto suceda es cuando el automorfismo $abAB$, denominado el conmutador, es parabólico y cuyo punto fijo es precisamente P . Pero por sorprendente que parezca, bajo esta condición también aseguramos que los automorfismos $bABa, ABab$ y $BabA$ son parabólicos y cuyos puntos fijos son S, R y Q respectivamente. Por el teorema 1.2.2, tenemos que la traza del conmutador, si lo vemos como una matriz, debe ser igual a 2 ó -2 . El siguiente lema nos obliga a elegir una de estas dos opciones.

Lema 2.3.1. *Si la traza de $abAB$ es 2, entonces a y b tienen un punto fijo en común.*

De esta manera la traza del conmutador no puede ser 2 ya que entonces los generadores tendrían un punto fijo en común, y por ello los discos emparejados no serían disjuntos, contradiciendo nuestra hipótesis. En conclusión, el segundo ingrediente es que la traza del conmutador $abAB$ sea igual a -2 .

Bajo estas dos condiciones formamos una familia de grupos llamada grupos de Schottky besando, ya que los círculos iniciales se tocan o "besan". Lo descollante de éstos grupos Kleinianos es su conjunto límite, que consiste en una curva cerrada fractal, considerando que un fractal es un objeto con dimensión Hausdorff no entera y que posee autosimilitud a escala. Al ser una curva cerrada también pertenecen a las grupos casi-Fuchsianos. Además, las superficies de Riemann asociadas a estos grupos son bastante exóticas, como veremos más adelante.

En el siguiente capítulo introduciremos una receta para generar conjuntos de límites fractales olvidándonos por completo de los círculos de Schottky. Sin embargo, existen fórmulas no tan funestas que vale la pena mencionar. Iniciamos con los círculos de Schottky que corresponden a cuatro

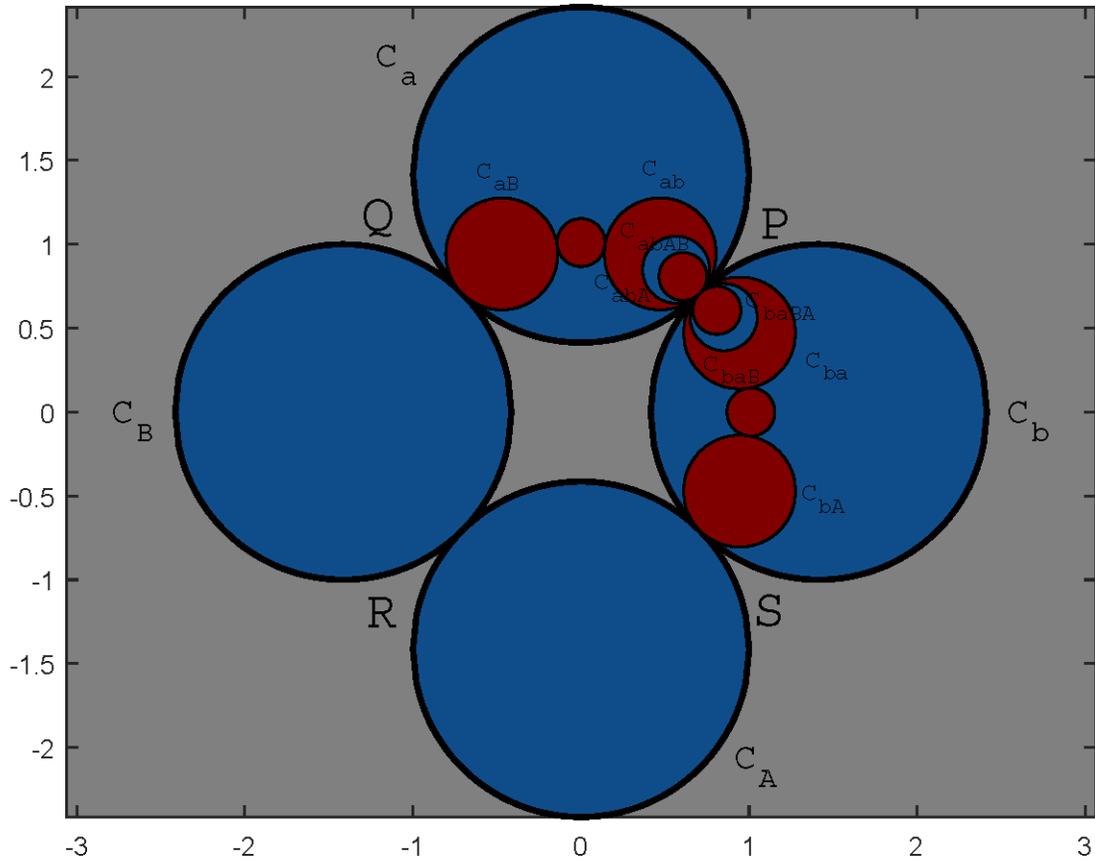


Figura 2.5: Puntos tangentes y círculos etiquetados.

círculos dispuestos muy simétricamente C_a , C_A , C_b y C_B con centro en $i\frac{ku}{v}$, $-i\frac{ku}{v}$, $\frac{x}{y}$ y $-\frac{x}{y}$ y radios $\frac{k}{v}$ y $\frac{1}{y}$ respectivamente. Las fórmulas para las matrices que implementan el emparejamiento en este caso son:

$$a = \begin{pmatrix} u & ikv \\ -\frac{iv}{k} & u \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Donde las variables están sujetas a las ecuaciones $x = \sqrt{1+y^2}$, $u = \sqrt{1+v^2}$ y $\frac{1}{2}(k + \frac{1}{k}) = \frac{1}{yv}$. De esta manera se procura la figura 2.6 como un primer ejemplo de éstos grupos.

Además de poseer conjuntos límite bastante curiosos, la superficie de Riemann ligada a éstos grupos también da mucho de qué hablar. El hecho de saber que $\Lambda(G)$ es una curva de Jordan, la región de discontinuidad es separada en dos componentes conexas. Al igual que los grupos de Schottky, el exterior de los círculos de Schottky resulta ser un dominio fundamental para el grupo, que en este caso no es conexo. La intersección con cada componente fructifica una componente Ω_0 simplemente conexa e invariante. Luego de hacer las respectivas identificaciones de Ω_0/G , véase figura 2.7, deriva la superficie de Riemann generadora conocida como el toro con un pinchazo.

Con tantos sabores geométricos en el paladar surge de manera casi natural cuestionarse por la

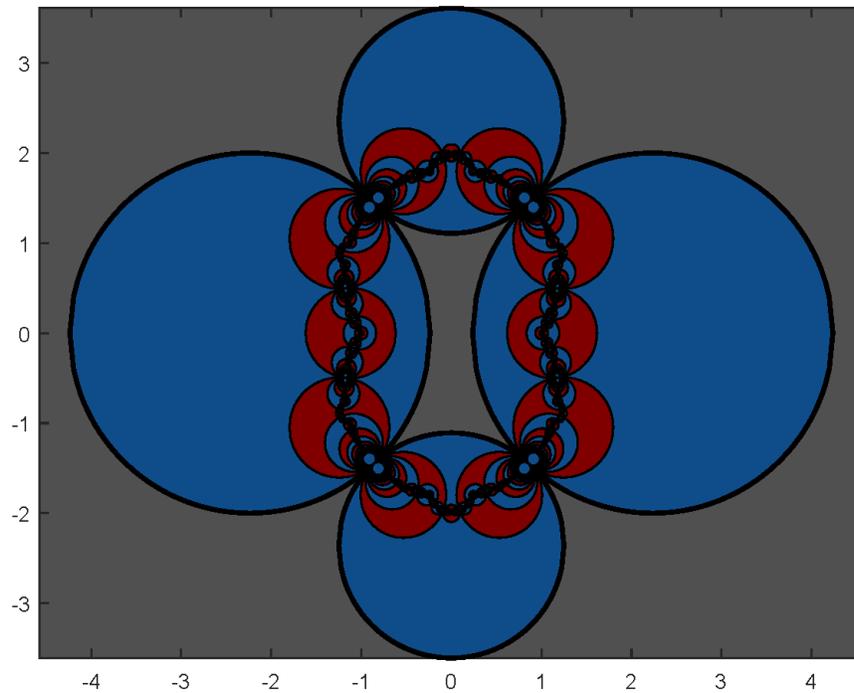


Figura 2.6: Grupo de Schottky besando.

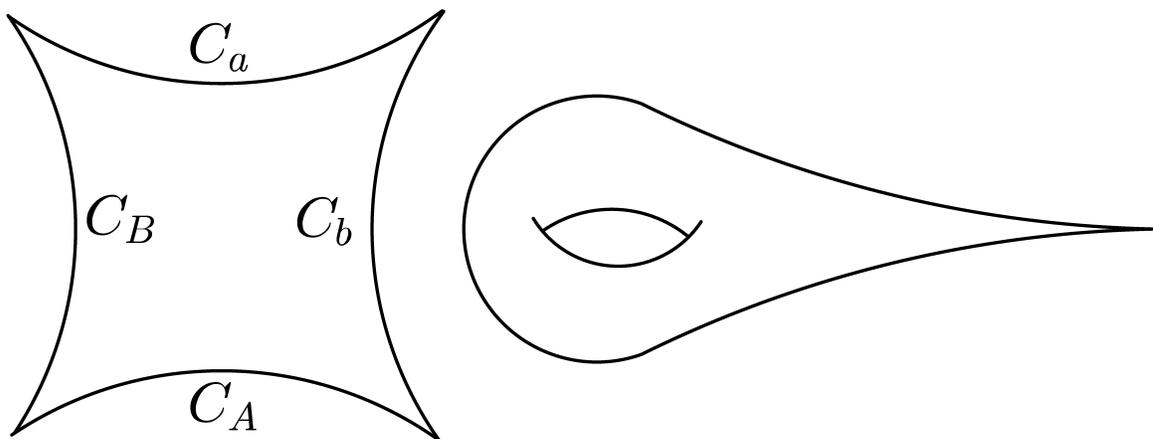


Figura 2.7: Toro con un pinchazo.

configuración inicial de los círculos de Schottky. Los grupos de collar tienen el estilo de emparejar cuatro círculos tangentes, pero la diferencia con los grupos de Schottky besado es que los genera-

dores no emparejan círculos opuestos sino adyacentes. Las transformaciones a , b y ab son todas parabólicas. Los puntos de tangencia son $C_a \cap C_A = \text{Fix}(a)$, $C_b \cap C_B = \text{Fix}(b)$, $C_a \cap C_B = \text{Fix}(ab)$ y $C_A \cap C_b = \text{Fix}(ba)$. El grupo generado por a y b es siempre conjugado del grupo modular estándar. La circunferencia límite es perpendicular a las circunferencias iniciales, véase las figuras 2.1 y 2.2. La superficie de Riemann generadora es la esfera con tres pinchazos.

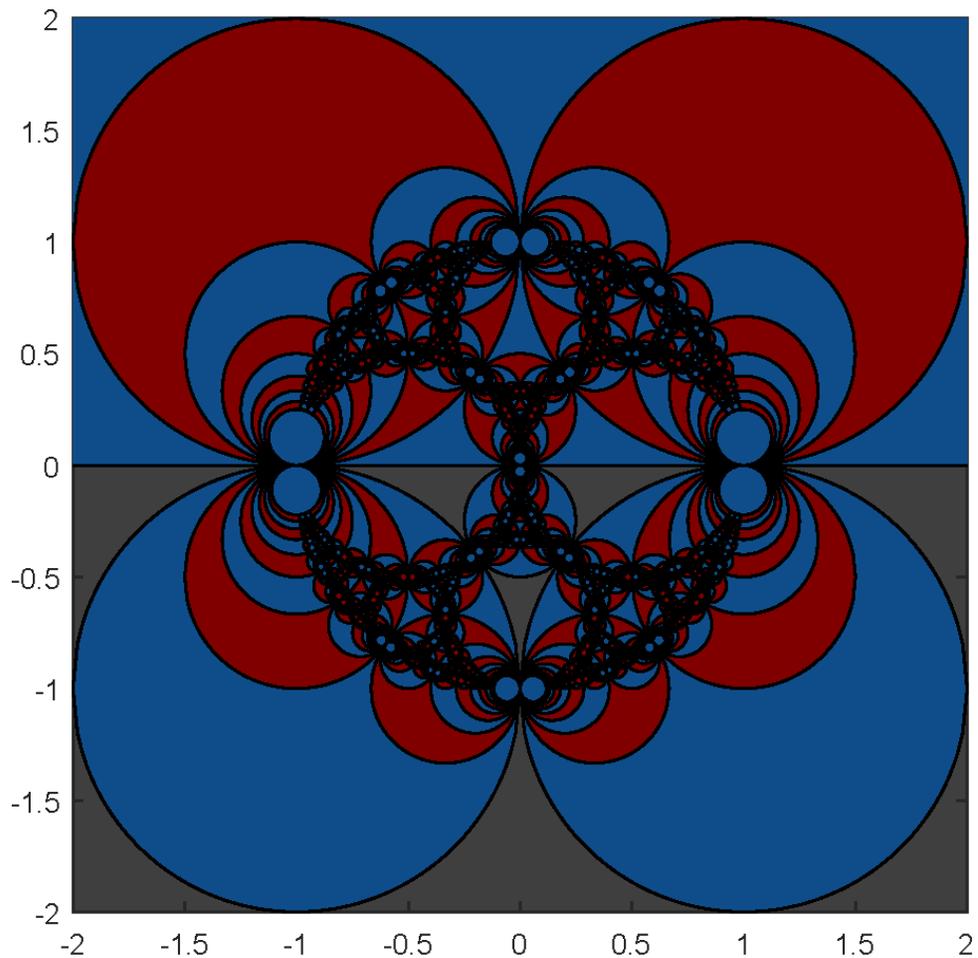


Figura 2.8: El tamiz de Apolonio.

Un problema que vincula círculos tangentes es el problema de Apolonio. Consiste en encontrar circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas. El problema fue propuesto y resuelto por el geómetra griego Apolonio de Perge. Empleando así tres circunferencias tangentes una a una y una cuarta circunferencia tangente a las tres como configuración inicial. Los automorfismos a y b que emparejan estos círculos son parabólicos. Anexando el requisito del conmutador parabólico tal que $\text{Tr}(abAB) = -2$, para que los círculos se aniden, de manera algo sorprendente se genera el tamiz de Apolonio¹ como conjunto límite.

¹El tamiz de Apolonio es uno de los primeros fractales conocidos. Su construcción tradicional empieza con una

En la figura 2.8 se desarrolla la dinámica de un grupo Kleiniano que activa el tamiz de Apolonio. La imagen se ha arreglado para que C_a se muestre como el eje x ; C_A aparezca como la circunferencia con centro en $-\frac{1}{4}i$ y radio $\frac{1}{4}$; y C_b y C_B circunferencias con centro en $1-i$ y $-1-i$ respectivamente y radio 1. Las matrices generadoras correspondientes son:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

De donde atisba la información $Fix(a) = 0$ y $Fix(b) = -i$, los puntos de tangencia. Cumpliendo también con la condición de que $Tr(abAB) = -2$. Por su lado la región de discontinuidad no es conexo. Y ya que el grupo contiene subgrupos de collar, $\Omega(G)/G$ es la esfera con tres pinchazos.

cadena de tres discos disjuntos, cada uno tangente a los otros, formando un triángulo ideal en el que se puede inscribir un disco tangente a los tres, que a la vez forma otros tres triángulos ideales para seguir el mismo procedimiento.

Capítulo 3

La rebanada de Maskit

En este capítulo revisaremos algunos grupos Kleinianos que se forman con unos cuantos parámetros y con los cuales vamos a jugar un poco. Varios matemáticos han dado ciertos parámetros, algunos en sus tesis doctorales, para formar grupos Kleinianos específicos los cuales llevan su nombre. Por ejemplo los grupos de Jørgensen se generan a partir de las matrices:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b_{\theta,k} = \begin{pmatrix} ke^{i\theta} & ik^2e^{i\theta} - ie^{-i\theta} \\ -ie^{i\theta} & ke^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Estos grupos son Kleinianos tipo parabólico y la superficie de Riemann que genera varía dependiendo de los parámetros que le demos.

Nuestro objetivo será la rebanada de Maskit, que es un mapa en el plano en el que cada punto determina un grupo Kleiniano cuyo conmutador es parabólico. Para comprender este espacio a través de algunos conceptos mediante ejemplos e imágenes con una simetría impresionante.

3.1. Grupos de Mumford

Los primeros parámetros que vamos a estudiar aparecen en el libro [9] de David Mumford. Este libro fue de suma importancia tanto para la teoría estudiada en este documento como especialmente para el desarrollo de las imágenes mostradas, ya que muestra el desarrollo del algoritmo que utilicé en el programa MATLAB para generarlas.

Limitaremos nuestro estudio a grupos generados por dos matrices, a y b , lo que significa que iniciamos con ocho parámetros complejos o dieciséis reales de los que están conformadas. Como vimos en el primer capítulo para cualquier matriz podemos encontrar una con determinante igual a 1 tal que actúan de la misma forma sobre $\hat{\mathbb{C}}$, y de esta manera podemos reducir nuestros parámetros complejos a seis. Además, podemos reducir tres parámetros más recordando que estamos interesados en grupos G iguales bajo conjugación hGh^{-1} , y por la proposición 1.2.1 existe un automorfismo que manda cualesquiera tres puntos a cualesquiera otros tres, así especificamos los puntos fijos de a , A y b por 0, 1 e ∞ respectivamente, a esto se le llama normalizar. Por lo tanto, se puede reducir

a tres parámetros complejos nuestros generadores.

A pesar de que el grupo de automorfismos no es conmutativo, si tenemos el resultado de que $Tr(mn) = Tr(nm)$. De lo cual derivan dos hechos que vamos a necesitar, primero que $Tr(mnm^{-1}) = Tr(n)$, es decir, la traza es invariante bajo conjugación; y segundo

$$Tr(mn) + Tr(m^{-1}n) = Tr(m) \cdot Tr(n), \quad (3.2)$$

es decir, la traza de cualquier elemento del grupo generado por m y n la podemos expresar en términos de $Tr(m)$, $Tr(n)$ y $Tr(mn)$. Obteniendo así el siguiente lema.

Lema 3.1.1. $Tr(abAB) = (Tr(a))^2 + (Tr(b))^2 + (Tr(ab))^2 - Tr(a) \cdot Tr(b) \cdot Tr(ab) - 2$

Demostración. Sustituimos en la ecuación (3.2) las siguientes transformaciones:

m	n	identidad
a	b	$Tr(ab) + Tr(Ab) = Tr(a) \cdot Tr(b)$
a	bAB	$Tr(abAB) + Tr(AbAB) = Tr(a) \cdot Tr(bAB)$
Ab	AB	$Tr(AbAB) + Tr(B^2) = Tr(Ab) \cdot Tr(AB)$
B	B	$Tr(B^2) + Tr(I) = (Tr(B))^2$

Despejamos

$$\begin{aligned} Tr(Ab) &= Tr(a) \cdot Tr(b) - Tr(ab) \\ Tr(abAB) &= Tr(a) \cdot Tr(bAB) - Tr(AbAB) \\ Tr(AbAB) &= Tr(Ab) \cdot Tr(AB) - Tr(B^2) \\ Tr(B^2) &= (Tr(B))^2 - 2 \end{aligned}$$

Sustituimos

$$\begin{aligned} Tr(abAB) &= Tr(a) \cdot Tr(bAB) - (Tr(Ab) \cdot Tr(AB) - Tr(B^2)) \\ Tr(abAB) &= (Tr(a))^2 - (Tr(a) \cdot Tr(b) - Tr(ab)) \cdot Tr(AB) + (Tr(B))^2 - 2 \\ Tr(abAB) &= (Tr(a))^2 + (Tr(b))^2 + Tr(ab) \cdot Tr(AB) - Tr(a) \cdot Tr(b) \cdot Tr(AB) - 2 \\ Tr(abAB) &= (Tr(a))^2 + (Tr(b))^2 + (Tr(ab))^2 - Tr(a) \cdot Tr(b) \cdot Tr(ab) - 2 \end{aligned}$$

□

Las trazas $Tr(a)$, $Tr(b)$ y $Tr(ab)$ son buenos candidatos para ser los parámetros que estamos buscando puesto que son invariantes bajo conjugación y cualquier traza de un elemento del grupo lo podemos expresar en términos de éstos.

Análogamente a la situación de las circunferencias tangentes de Schottky consideramos el conmutador parabólico con traza igual a -2 . Obteniendo así lo que se conoce como grupos toro con un pinchazo. Por el lema anterior, obtuvimos la forma en cómo se expresa el conmutador en términos de nuestros tres parámetros. Si $Tr(abAB) = -2$, esto conduce a una ecuación llamada la identidad de Markov:

$$(Tr(a))^2 + (Tr(b))^2 + (Tr(ab))^2 = Tr(a) \cdot Tr(b) \cdot Tr(ab). \quad (3.3)$$

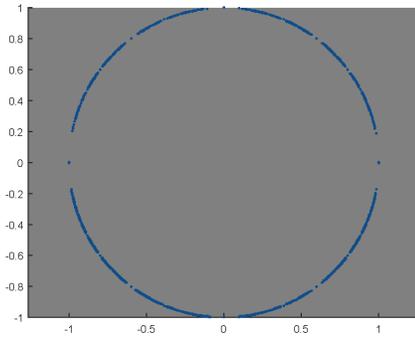
De esta manera podemos contemplar la identidad de Markov como una ecuación cuadrática de $Tr(ab)$ en términos de $Tr(a)$ y $Tr(b)$. Tomando alguna de las raíces de la ecuación, reduce nuestro número de parámetros de 3 a 2, a saber $Tr(a)$ y $Tr(b)$. La identidad de Markov surge en teoría de números donde es estudiada como una ecuación Diofántica $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$.

Para encontrar una parametrización adecuada, varios matemáticos se han embarcado en la misión con propuestas bastante interesantes. Una de ellas introducida por David Mumford en [9] es:

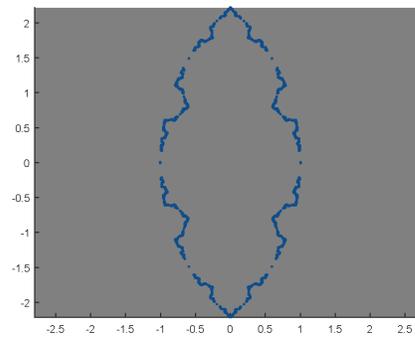
$$a = \begin{pmatrix} \frac{Tr(a)}{2} & \frac{Tr(a) \cdot Tr(b) - 2Tr(b) + 4i}{z_0(2Tr(ab) + 4)} \\ \frac{z_0(Tr(a) \cdot Tr(ab) - 2Tr(b) - 4i)}{2Tr(ab) - 4} & \frac{Tr(a)}{2} \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} \frac{Tr(b) - 2i}{2} & \frac{Tr(b)}{2} \\ \frac{Tr(b)}{2} & \frac{Tr(b) + 2i}{2} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

donde $z_0 = \frac{Tr(b)(Tr(ab) - 2)}{Tr(b) \cdot Tr(ab) - 2Tr(a) + 2iTr(ab)}$, siendo el punto fijo del conmutador, y $Tr(ab) = x$ es cualquiera de las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - Tr(a) \cdot Tr(b)x + (Tr(a))^2 + (Tr(b))^2 = 0$.

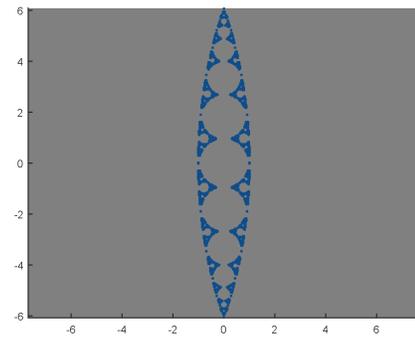
Definición 3.1.1. *Un grupo generado por dos matrices a y b como en (3.4), para algún $Tr(a)$ y $Tr(b)$, es llamado un grupo de Mumford.*



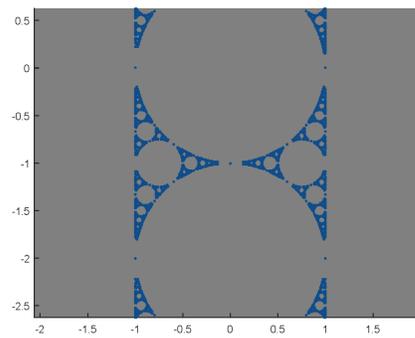
(a) $Tr(a) = Tr(b) = 3$



(b) $Tr(a) = Tr(b) = 2.5$



(c) $Tr(a) = Tr(b) = 2.1$



(d) $Tr(a) = Tr(b) = 2$

Figura 3.1: Conjuntos límites.

Como podemos observar las entradas de la matriz de los dos generadores, a y b , se anotan enteramente en función de los parámetros $Tr(a)$ y $Tr(b)$, que se pueden establecer igual a dos números complejos que se interesa elegir. Los grupos están diseñados para que estos números sean

las trazas de a y b . Un cálculo sencillo pero laborioso revela que el determinante de ambas matrices es igual a 1, y que el producto ab es bastante simple:

$$ab = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{Tr}(ab)}{2} & \frac{\operatorname{Tr}(ab)-2}{2z_0} \\ \frac{(\operatorname{Tr}(ab)+2)z_0}{2} & \frac{\operatorname{Tr}(ab)}{2} \end{pmatrix}$$

además el arreglo satisface la identidad de Markov, asegurando así que $\operatorname{Tr}(abAB) = -2$.

Para familiarizarnos con los conjuntos límite de estos grupos vamos a empezar nuestro juego bastante suavemente. En la figura 3.1 se muestran los conjuntos límite con grupos de Mumford en los que la traza de los generadores, $\operatorname{Tr}(a)$ y $\operatorname{Tr}(b)$, son ambos reales e iguales, deslizando desde el valor inicial 3 hasta el valor final 2. Estos grupos pueden hacerse apareando circunferencias tangentes, es decir, también son grupos de Schottky besado. En la porción (a) de la figura el conjunto límite es sólo el círculo unitario y el grupo es Fuchsiano, aquí el grupo está generado por $\operatorname{Tr}(a) = \operatorname{Tr}(b) = 3$. Conforme las trazas disminuyen el conjunto límite se arruga y el grupo se ha vuelto casi-Fuchsiano. A medida que nos movemos los puntos fijos de a y A se van alejando uno de otro, hasta que finalmente se juntan en el infinito en el último cuadro cuando $\operatorname{Tr}(a) = \operatorname{Tr}(b) = 2$. Esta imagen nos es familiar, es nuestro viejo amigo el tamiz de Apolonio, es decir, es conjugado al grupo utilizado para generar la figura 2.8 de la última sección del capítulo 2.

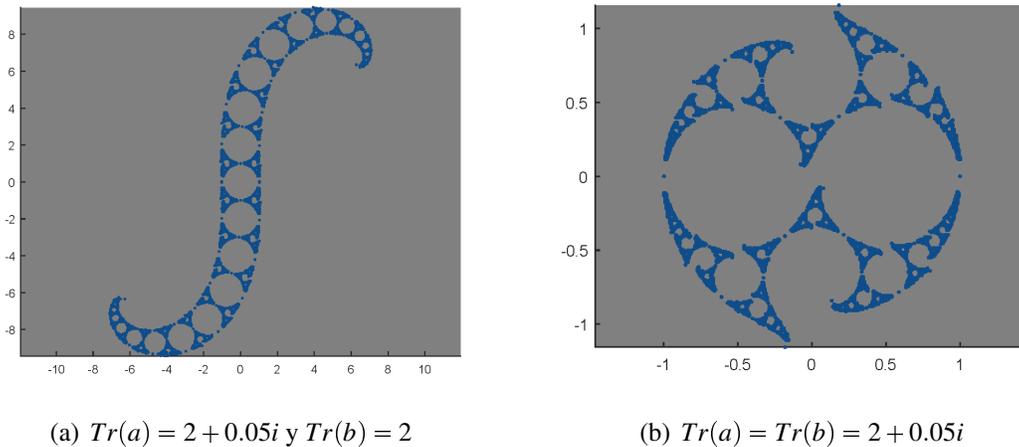


Figura 3.2: Conjuntos límites.

¿Qué ocurre si disminuimos la traza sólo un poco más y probamos $\operatorname{Tr}(a) = \operatorname{Tr}(b) = 1.9$? Los círculos de Schottky se comienzan a traslapar y el conjunto límite viene a ser toda la esfera de Riemann, así estos grupos dejan de ser Kleinianos. Un dominio fundamental para estos grupos se puede localizar identificando sus circunferencias de Schottky cuyos puntos de tangencia son los puntos fijos de los cuatro conmutadores $abAB$, $bABa$, $ABab$ y $BabA$.

Hasta el momento nos hemos limitado a grupos que siempre vienen equipados con una cadena de circunferencias tangentes de Schottky, por lo que su conjunto límite no es nada nuevo. La verdadera diversión comienza cuando $\operatorname{Tr}(a)$ y $\operatorname{Tr}(b)$ vienen a ser complejos. Las transformaciones con

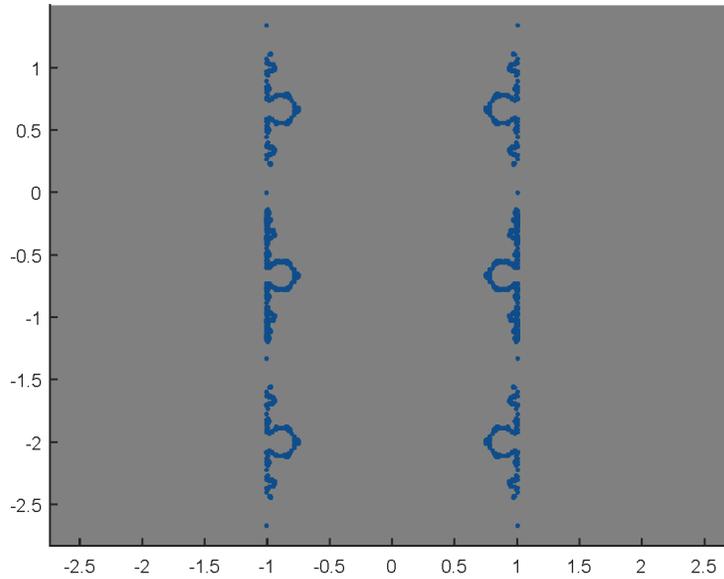
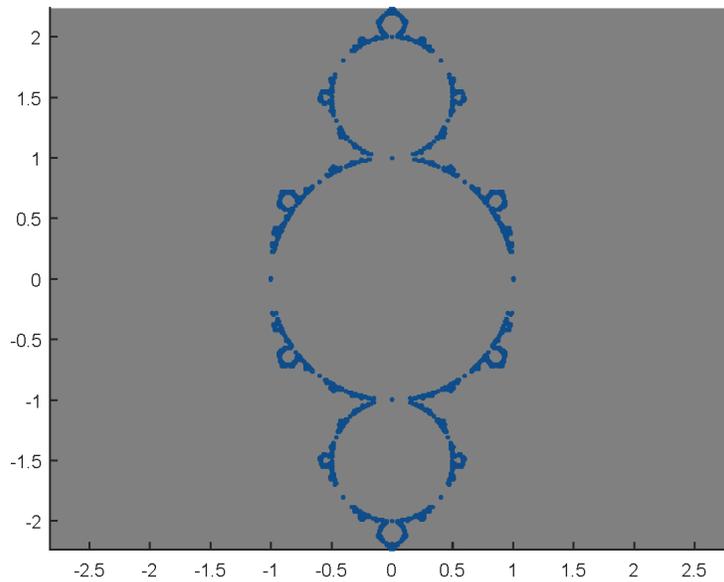
(a) $Tr(a) = 2$ y $Tr(b) = 3$ (b) $Tr(a) = 3$ y $Tr(b) = 2$

Figura 3.3: Conjuntos límite.

trazas complejas son siempre loxodrómicas, de modo que tan pronto como hacemos $Tr(a)$ y $Tr(b)$ complejos podemos esperar que se produzcan espirales. Se puede ver esto en evidencia en el primer cuadro de la figura 3.2, donde hemos fijado $Tr(b) = 2$ y hecho ligeramente complejo $Tr(a)$, es decir, tomamos los parámetros que generan el tamiz de Apolonio y uno de ellos lo volvimos un poco complejo. Entretanto en la segunda figura hemos vuelto complejas ambas trazas, obteniendo un conjunto límite más rizado.

Como se puede ver éstos grupos son aún casi-Fuchsianos, lo que significa que el conjunto límite es aún una curva conexa que no se cruza y que divide al plano en un interior y exterior, es decir, es una curva simple y cerrada. La curva se va enrollando en forma de espiral en los puntos fijos de a , que son los mismos que de A , con la forma del tamiz de Apolonio pero en espiral. Encontrar un dominio fundamental para éstos grupos es más complicado y sale de la teoría abordada en este documento. La curvatura y torsión que se puede ver en estos conjuntos límites es causada por pequeños movimientos en espiral o transformaciones loxodrómicas. El interés parece centrarse en las trazas cerca de 2, pero siempre ligeramente complejas. Cuando disminuimos la parte real a 1.9 los grupos dejan de ser Kleinianos, por lo que podemos considerar este número como nuestro límite inferior. Si la parte imaginaria es muy pequeña, las espirales aquí son más apretadas.

La figura 3.3 muestra imágenes en donde una de las dos trazas es 2 la otra es 3. En otras palabras, uno de los dos generadores a o b es parabólico pero el otro no. Ambas imágenes son más bien como el tamiz de Apolonio, pero en el recuadro (a) de la figura, infinito es el punto fijo de a y A , mientras que en el recuadro (b), -1 es el punto fijo de b y B . Es decir, los puntos fijos se han juntado.

Grupos como estos en que un elemento es parabólico son llamados grupos cúspides. Algunos grupos tienen un elemento parabólico extra y se llaman cúspides simples. Algunos, como el tamiz de Apolonio, tienen dos parabólicos extra, en este caso son llamados cúspides dobles. Si por ejemplo a es parabólico, entonces también lo es bAB , y por tanto lo mismo $abAB$.

3.2. La rebanada de Maskit

Por supuesto existen otras normalizaciones para explorar grupos con conmutador parabólico que también tienen sus ventajas. En esta sección describimos otra buena familia que son los grupos de Maskit que son siempre cúspides simples y en ocasiones cúspides dobles.

3.2.1. Definición

Definición 3.2.1. Denotamos por $\tilde{\mathcal{M}}$ el espacio de grupos caracterizados por las siguientes condiciones:

Un grupo G está en $\tilde{\mathcal{M}}$ si y sólo si

A) $G = \langle S, T \rangle$ es un grupo libre y S es parabólico

B) Las componentes conexas de $\Omega(G)$ son:

i) Una componente simplemente conexa G -invariante Ω_0 para el cual Ω_0/G está conjugado topológicamente con el toro con un pinchazo.

ii) Componentes no-invariantes Ω_i , $i \geq 1$, que se conjugan entre sí bajo G y para las cuales $\Omega_i/G\Omega_i$ es conforme a la esfera triplemente pinchada.

Más adelante se muestra que $\tilde{\mathcal{M}} \neq \emptyset$. A continuación describiremos los detalles de una normalización específica.

Definimos \mathcal{M}_1 como el conjunto de grupos $G_\mu = \langle S, T \rangle$, donde S es parabólico, para los cuales los puntos fijos de $S, \tilde{S} = T^{-1}ST$ y $K = \tilde{S}^{-1}S$ son $\{\infty, 0$ y $-1\}$ respectivamente. Si

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{S} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

entonces

$$\frac{a(\infty) + b}{c(\infty) + d} = \infty$$

$$\frac{a + \frac{b}{\infty}}{c + \frac{d}{\infty}} = \infty$$

$$\frac{a}{c} = \infty$$

$$c = 0$$

y como $Tr(S) = a + d = 2$ y $ad - bc = 1$ entonces $a = d = 1$. Por lo tanto $S = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por otro lado

$$\frac{e(0) + f}{g(0) + h} = 0$$

$$\frac{f}{h} = 0$$

$$f = 0$$

y como $Tr(\tilde{S}) = e + h = 2$ y $eh - fg = 1$, entonces $e = h = 1$. Por lo tanto, $\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix}$. De esta manera, podemos deducir que

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ -g & 1 - bg \end{pmatrix}.$$

Normalizando obtenemos que

$$\frac{-1 + b}{-g(-1) + 1 - bg} = -1$$

$$b - 1 = -g + bg - 1$$

$$b + g = bg.$$

Notamos que K es el conmutador del grupo por lo que $Tr(K) = -gb + 2 = -2$ y si despejamos y sustituimos obtenemos que $b = g = 2$ y por lo tanto,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

También es fácil calcular el elemento T que conjuga S a \tilde{S} de la siguiente manera. Sea $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha\delta + 2\gamma\delta - \beta\gamma & 2\delta^2 \\ -2\gamma^2 & -\beta\gamma - 2\gamma\delta + \alpha\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha\delta + 2\gamma\delta - \beta\gamma &= 1, \quad 2\delta^2 = 0, \\ -2\gamma^2 &= 2 \text{ y } -\beta\gamma - 2\gamma\delta + \alpha\delta = 1 \end{aligned}$$

y de aquí podemos concluir que $\delta = 0$, $\gamma = i$ y $\beta = -\frac{1}{i} = i$. Es decir,

$$T = \pm \begin{pmatrix} \alpha & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Es normal que los signos de las entradas de los generadores puedan ser elegidos arbitrariamente, de modo que tomamos el signo $-$ y escribimos $\alpha = i\mu$, $\mu \in \mathbb{C}$ para dar la siguiente definición.

Definición 3.2.2. *Un grupo generado por dos matrices $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = -i \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, para algún $\mu \in \mathbb{C}$, es llamado un grupo de Maskit, y se denota como G_μ*

Una vez definidos nuestros generadores del grupo procederemos a entender lo que está sucediendo en el conjunto ordinario. Las matrices

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \bar{a} = b^{-1}ab = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

son dos elementos parabólicos que generan un grupo Fuchsiano cuyo dominio fundamental puede ser la región D , donde D es:

$$D = \{-1 < \Re z < 1\} \cap \{|z + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}\} \cap \{|z - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}\}.$$

La demostración de ésto utiliza una combinación de teoremas que pueden encontrarse en [5]. Sin embargo, puede calcularse sencillamente que:

$$\bar{a} \rightarrow \frac{1}{2 + \frac{1}{z}}, \quad 0 \rightarrow 0, \quad -1 \rightarrow 1 \text{ e } \infty \rightarrow \frac{1}{2},$$

El cociente de la región D con el grupo generado por las matrices a y \bar{a} resulta ser dos esferas con tres pinchazos.

Agregando el elemento $b : z \rightarrow \mu + \frac{1}{z}$ se puede verificar que b manda el horociclo

$$H_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{it}{4}| \leq \frac{t}{4}\},$$

al horociclo horizontal

$$H_\infty = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq t - \frac{2}{t}\}$$

bajo la condición $\mu = it$ con $t > 2$, además de que $H_0 \cap H_\infty = \emptyset$. Comprobemos únicamente para $z = i\frac{t}{2}$:

$$i\frac{t}{2} \rightarrow it + \frac{1}{i\frac{t}{2}} = it - i\frac{2}{t} = i\left(t - \frac{2}{t}\right).$$

Consiguiendo de esta manera una región fundamental para G_μ , la región R que consiste en la parte de D exterior a H_0 y H_∞ . Además R/G_μ consiste de dos componentes conexas, un toro con un pinchazo $R \cap \mathbb{H}/G_\mu$ y una esfera con tres pinchazos $R \cap \mathbb{H}^*/G_\mu$, como se muestra en la figura 3.4. En resumen: estos grupos cumplen con la definición 3.2.1 siempre que $\mu = it$ y $t \in \mathbb{R}$, $t > 2$. A estos grupos los vamos a denotar como \mathcal{M} . Y cualquier grupo en $\tilde{\mathcal{M}}$ es conjugado a un grupo de Maskit.

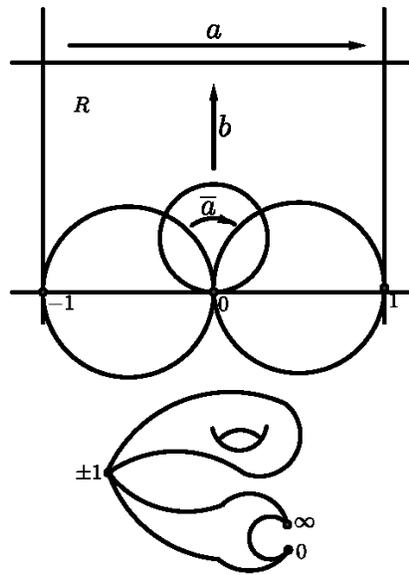


Figura 3.4: $R \cap \mathbb{H}$ y el cociente R/G_μ .

Definición 3.2.3. El conjunto de grupos \mathcal{M} se conoce como la rebanada de Maskit. [10]

3.2.2. Importancia

Sea $T_{1,1}$ el espacio de Teichmüller del toro con un pinchazo \mathcal{T} . Que consiste en las clases isotópicas de mapeos casiconformes del toro con un pinchazo. Las imágenes de estos mapeos casiconformes están de nuevo marcadas con diferentes estructuras conformes. Uno puede construir un homeomorfismo casiconforme $f : \mathcal{T} \rightarrow \Omega_0/G$, donde $G \in \tilde{\mathcal{M}}$, que conjuga sobre las dos superficies. El grupo G representa la clase isotópica de f en $T_{1,1}$.

Con estas suposiciones uno obtiene una correspondencia biyectiva entre clases conjugadas de grupos en $\tilde{\mathcal{M}}$ y puntos en $T_{1,1}$. Bajo la normalización realizada arriba para estos grupos, podemos representar a $T_{1,1}$ como un subespacio complejo de dimensión uno $\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}$.

Es por esto que nos interesa entender \mathcal{M} y su frontera $\partial\mathcal{M}$.

3.2.3. Ejemplo

Nuestro viejo amigo el tamiz de Apolonio también se encuentra en este μ -plano. Específicamente se encuentra en el punto $(0, 2)$, es decir, cuando $\mu = 2i$ genera un grupo que es conjugado del grupo 2.3 que vimos al final del segundo capítulo. La figura 2.8 nos permite apreciar una teselación del conjunto ordinario de este grupo. Existen más puntos en el μ -plano que nos permite generar un grupo conjugado al tamiz de Apolonio, ejemplo $(0, -2)$.

Para dar un ejemplo sencillo tomemos el punto $(2, 2)$ en el μ -plano, es decir $\mu = 2 + 2i$. De esta manera obtenemos un grupo generado por las siguientes matrices:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 2 - 2i & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Tras un cálculo se puede obtener que la $Tr(aB) = 2$. Lo que significa que el grupo tiene dos elementos parabólicos, es decir, es un grupo de doble cúspide. En la figura 3.4 se puede apreciar el conjunto límite que mana de este grupo de Maskit.

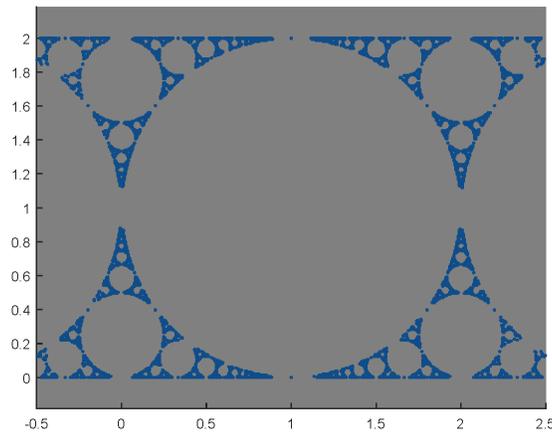


Figura 3.5: $\mu = 2 + 2i$

Los dos ejemplos que acabamos de ver son puntos en el μ -plano, que pertenecen a la frontera de la rebanada de Maskit una frontera entre los grupos discretos y no discretos.

3.2.4. Aspecto de \mathcal{M}

David Mumford y David Wright fueron los primeros en dirigir una investigación por encontrar este conjunto frontera llamado la frontera de Maskit, mediante experimentos computacionales. Antes nadie tenía más que una idea muy rudimentaria de la ubicación de éstos puntos. Para lograr dibujar la frontera se valieron de un resultado conocido como las secuencias de Farey. A continuación describiré la idea en general del camino que siguió Wright.

La parametrización realizada en la sección 3.2.1 fue elegida de tal forma que \mathcal{M} tuviera la forma de \mathbb{H} . El conjunto ordinario resulta ser una buena herramienta para reconocer, para $\mu \in \overline{\mathcal{M}}$, cuando $\mu \in \text{int}\mathcal{M}$ ó $\mu \in \partial\mathcal{M}$. Todos los grupos en $\partial\mathcal{M}$ son discretos. Puede ocurrir que el grupo sea cúspide doble, y $\Omega(G_\mu)$ se degenera en la unión numerable de discos, ó el grupo G_μ es degenerado y Ω consiste de las imágenes de \mathbb{H}^* bajo G_μ .

Proposición 3.2.1. *La frontera de \mathcal{M} está contenida en la banda horizontal*

$$\{\mu : 1 \leq \Im\mu \leq 2\}.$$

Proposición 3.2.2. *El conjunto de grupos de Maskit que son doble cúspide es un subconjunto denso de $\partial\mathcal{M}$. [10]*

Solamente los elementos de G_μ que son parabólicos representan curvas cerradas simples en el toro $\Omega_0(G_\mu)/G_\mu$. Por lo tanto, si estos elementos son enumerados sistemáticamente, y puntos en \mathbb{C} son encontrados donde sus trazas son ± 2 en una forma coherente, surge la imagen de \mathcal{M} . A continuación está explicado el método de enumeración.

3.2.5. Elementos doblemente parabólicos

Para cada par de números p y q , primos relativos, vamos asignar un elemento del grupo G_μ , que llamaremos $w_{p/q}$, de la siguiente manera. Primero vamos a crear una cadena utilizando el siguiente algoritmo. A partir de 1 en cada etapa vamos a sumar q o restar p . Se puede seguir sumando a menos que al sumar se llegue a un número mayor que $p + q$. Luego cambia restando p , y continúa a menos que llegue a un número menor que 1, en cuyo caso volvemos a sumar q . Seguir este algoritmo hasta que obtengamos nuevamente 1. Ahora para cada $+q$ se escribe un B , y para cada $-p$ se escribe un a . Llamamos a la palabra que obtenemos $w_{p/q}$ ¹.

Definición 3.2.4. *Si el elemento $w_{p/q}$ del grupo G_μ es parabólico llamaremos a éste, grupo cúspide p/q .*

La idea de este patrón surge de la dinámica que desarrollan algunos elementos del grupo sobre un cadena especial de círculos. Para el lector interesado que quiera entrar en detalles, de esto, veáse el capítulo 9 de [9]. Se obtiene la frontera de Maskit mostrando los llamados grupos cúspides.

Para conseguir que los grupos cúspides broten de forma conveniente comenzamos recordando la formación de los racionales por secuencias de Farey. Una pareja de racionales $(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})$ son llamados vecinos de Farey si $ps - rq = \pm 1$. Todos los racionales son obtenidos de forma única aplicando la repetición del proceso $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$ a vecinos de Farey comenzando con vecinos enteros $(\frac{n}{1}, \frac{n+1}{1})$.

¹Ejemplo. Si $p=5$ y $q=4$ obtendríamos

$$1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+4} 9 \xrightarrow{-5} 4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{-5} 3 \xrightarrow{+4} 7 \xrightarrow{-5} 2 \xrightarrow{+4} 6 \xrightarrow{-5} 1$$

Entonces la cadena que obtenemos, leída de derecha a izquierda, es $w_{5/4} = aBaBaBaBB$

Una secuencia de Farey es una serie de números racionales ordenados de menor a mayor para los cuales se establece un límite superior para el denominador y todos los elementos son vecinos de Farey².

Mumford y Wright se dieron cuenta que a pesar que las fracciones en una secuencia de Farey no estaban uniformemente distribuidas a lo largo del intervalo, sí lo estaban las soluciones μ de los elementos de una secuencia de Farey, ya que a cualquier número racional le podemos asignar un grupo cúspide p/q . Entonces lo único que queda es solucionar, para μ la ecuación $Tr(w_{p/q}) = 2$, donde $Tr(w_{p/q}) = (-i)^q(\mu^q - 2p\mu^{q-1} + b_{q-2}\mu^{q-2} + \dots + b_0)$ con $b_i \in \mathbb{Z}$.

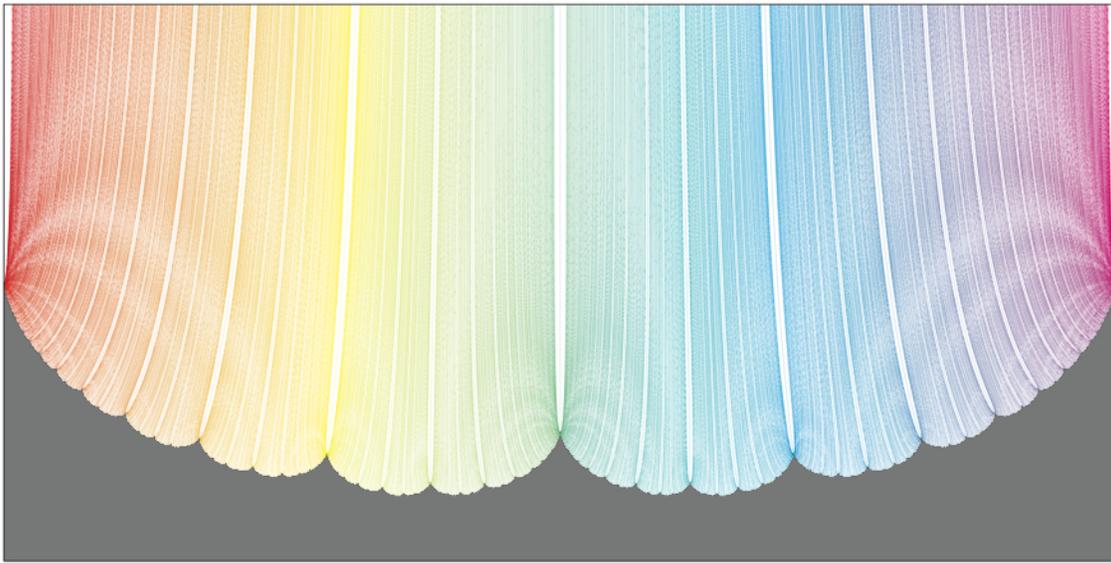


Figura 3.6: La rebanada de Maskit

Utilizando el método de Newton para encontrar las soluciones μ fue que lograron la imagen de la frontera de Maskit que se puede apreciar en la figura 3.5. En ésta se muestran los grupos no discretos coloreados de gris y los grupos discretos de colores. Las líneas de colores son llamadas rayos plisados. Las variedades de cualquier rayo tienen una propiedad geométrica en común. Esto es un tema para una segunda parte de este documento. La rebanada de Maskit es un mapa que ilustra uno de los ejemplos más simples posibles de variar familias holomórficas de grupos Kleinianos. Desde el punto de vista de la dinámica compleja es un análogo cercano del conjunto de Mandelbrot. Por lo que no es de extrañar un aspecto muy característico que sobresale de dicha imagen que es un fractal.

Los grupos de Maskit limitan nuestra búsqueda a grupos de doble cúspide en los que el generador b o la palabra $w_{1/0}$ es parabólica. ¿Qué pasaría si decidimos buscar grupos de doble cúspide en los que un par de palabras $w_{p/q}$ y $w_{r/s}$ son parabólicas?. Resulta que los grupos que se obtendrán de esta manera siempre serán conjugados con un grupo de Maskit.

²Por ejemplo la sucesión de Farey cuyo denominador máximo es 4 sería:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}.$$

Capítulo 4

Programando grupos Kleinianos

Para concluir esta tesis me gustaría describir, para el lector interesado, cómo generar las imágenes de los conjuntos límites que se mostraron. Para el propósito describiré los detalles basados en el software de programación llamado MATLAB, un laboratorio de matrices.

Lo primero es definir la función básica, a la cual llamaremos mobius, cuyo propósito es aplicar una transformación de Möbius a un punto o a un conjunto de puntos. El software nos permite trabajar con números complejos por lo que cada punto lo podemos definir como un número complejo. Afortunadamente no nos tenemos que preocupar por la composición de dos transformaciones de Möbius porque también el álgebra matricial están incorporados en el programa. La función sería de la siguiente manera:

```
function [ x ] = mobius( y,z )
x=(y(1).*z+y(3))./(y(2).*z+y(4))
end
```

Como se puede observar es una función cuyas variables de entrada son dos, la primera es una matriz de 2×2 que representa nuestro automorfismo, y la segunda es un vector a cuyos valores les vamos aplicar nuestra transformación. El resultado es un vector cuyas entradas son la imagen de las entradas del primer vector.

Otra herramienta que es importante mencionar es el dibujo de circunferencias. Como vimos en el primer capítulo las transformaciones de Möbius transforman círculos en círculos. Existen varias maneras de dibujar un círculo en MATLAB, abordaré aquella que se forma a partir de tres puntos conocidos en la circunferencia. Esta opción es la adecuada ya que la dinámica de las transformaciones no es simétrica, pues la distancia entre los puntos de una circunferencia no se preserva bajo la transformación.

El script que dibuja una circunferencia sería:

```
PC=[a1 b1;a2 b2;a3 b3];T=[1 2 3];TC=triangulation(T,PC);CC=circumcenter(TC);
r=sqrt((PC(1,1)-CC(1,1))^2+(PC(1,2)-CC(1,2))^2);h=CC(1,1);k=CC(1,2);
```

```
x1=h-r;x2=h+r;uCx=linspace(x1,x2);uCy=sqrt(r^2-(uCx-h).^2)+k;
dCx=linspace(x2,x1);dCy=-sqrt(r^2-(dCx-h).^2)+k;
Cx=[uCx dCx];Cy=[real(uCy) real(dCy)];Circ=complex(Cx,Cy);
plot(Circ,'-k','LineWidth',2);hold on;fill(Cx,Cy,'r');
```

En el primer renglón la matriz PC contiene las coordenadas de tres puntos por los que pasa nuestra circunferencia, después la herramienta *triangulation* crea una representación de una triangulación para posteriormente permitir encontrar el circuncentro de dicho triángulo. En el segundo renglón se calcula el radio y las coordenadas del centro. Se continúa determinando los puntos de la circunferencia en dos partes, los de la parte superior y después los de la parte inferior. El comando *linspace* genera por default una secuencia de 100 números distribuidos equitativamente entre los valores que nosotros le asignemos. Las cuales en nuestro caso serán las coordenadas x 's. Para obtener las coordenadas y 's simplemente evaluamos en la fórmula del círculo. Prosiguiendo en el script después a formar un vector con las coordenadas x 's y otro vector con las coordenadas y 's, el formato requerido para poder dibujar la figura. El comando *plot* dibuja el borde de nuestra circunferencia y mientras el comando *fill* colorea el interior de la misma.

Para obtener la imagen de un círculo por una transformación de Möbius basta con tomar tres puntos del círculo, evaluarlos con nuestra función *mobius* y dibujar el círculo que pasa por los puntos resultantes. También podríamos aplicar la función a todos los puntos del círculo, pero conforme vamos avanzando en las potencias del automorfismo los círculos van perdiendo su forma.

El cálculo de puntos fijos de una transformación de Möbius es una función muy importante en el desarrollo de imágenes de conjuntos límite. Para ello creamos una nueva función, cuyo nombre puede ser *fixpoints*, con el siguiente contenido:

```
function [ x,z ] = fixpoints( y )
x=(y(1)-y(4)+sqrt((y(4)-y(1))*(y(4)-y(1))+4*y(2)*y(3)))/(2*y(2));
z=(y(1)-y(4)-sqrt((y(4)-y(1))*(y(4)-y(1))+4*y(2)*y(3)))/(2*y(2));
end
```

Considero que éstos son los ingredientes más básicos que tenemos que tener en mente para darnos una idea razonable para la programación incluyendo matrices, aritmética compleja y gráficas básicas. Para realizar las imágenes sigamos las características más comunes a todos los algoritmos gráficos.

Organización de generadores. Al principio tenemos que especificar el grupo de transformaciones que queremos usar. Por lo general esto solo significa definir los generadores a y b junto con sus inversas A y B que serán matrices de 2×2 . Estas cuatro transformaciones deben ser almacenadas como una lista de matrices:

```
gens=[a b A B].
```

Objetos a dibujar. Durante el programa podemos dar instrucciones para trazar varios objetos. Los objetos solamente pueden ser de dos maneras. Una región específica como círculos o dominios fundamentales. Nuestra operación gráfica básica será aplicar un elemento del grupo a estas figuras y trazar el resultado. Y los otros objetos son puntos límite, que justamente son los puntos fijos de

los elementos del grupo.

Los elementos del grupo. El corazón del programa es generar los elementos del grupo. Vamos a catalogar a los elementos del grupo por niveles dependiendo de la longitud del número de generadores por los que esta conformado. Hay una manera agradable de registrar el patrón, que los programadores informáticos llaman un árbol. De forma esquemática en la figura 3.5 se muestra el árbol de la situación donde nos encontramos. El árbol tiene un nodo inicial que llamamos el nodo de nivel 0. Desde el nodo de nivel inicial emanan cuatro flechas apuntando a cuatro nodos etiquetados a , b , A y B que representan los cuatro automorfismos generadores. Estos son los nodos del nivel 1. De cada uno de estos a su vez emanan tres flechas apuntando a los nodos del nivel 2. Podemos extender este árbol a otros niveles y el patrón se repite. Cada nivel n nodo es alcanzado por una flecha que llega desde el nivel $n - 1$ nodo detrás en el árbol; mientras que emanan de él tres flechas que señalan a tres nuevos nodos del nivel $n + 1$. Se consiguen las etiquetas de los tres nuevos nodos agregando cada una de las 3 letras que no cancelen la letra final de la palabra. La cuarta letra se anula invirtiendo la dirección de la flecha y llevándonos a la palabra directamente detrás de nosotros en un nivel más abajo. Por ejemplo en el nodo Ab , la letra final es b , que cancela con B . Por lo tanto las tres flechas hacia delante son AbA , Abb y AbB , mientras que el nodo anterior en el árbol es A . Palabras como estas se llaman reducidas. En conclusión el árbol de palabras es un catalogo perfecto de las palabras reducidas en el grupo.

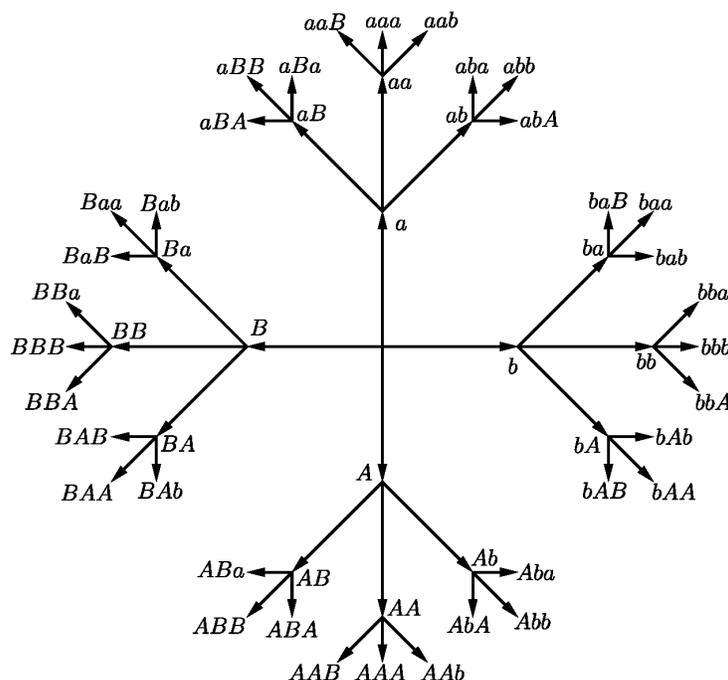


Figura 4.1: Árbol de palabras

Algoritmo de búsqueda. Existen varios métodos de enumeración, que en lenguaje de la informática se conocen como algoritmos de búsqueda. Diferentes algoritmos dan diferentes formas de organizar la búsqueda. El algoritmo a implementar recibe el nombre de DFS que viene de Depth-First-Search, este algoritmo sigue una rama del árbol hasta llegar a un nodo que activa el procedimiento de ter-

minación, en cuyo punto retrocedemos hasta encontrar una nueva rama inexplorada.

Antes de mostrar el algoritmo describamos las variables y las subrutinas que lo conforman en términos generales.

- 1) *word*. Es el elemento del grupo o la palabra en el árbol.
- 2) *lev*. Esta variable nos indica el nivel en el que se encuentra nuestra palabra en el árbol de palabras. Por ejemplo si nuestra palabra es *abbA* entonces sería $lev = 4$.
- 3) *levmax*. Indica el nivel máximo de profundidad que podemos buscar en el árbol.
- 4) *tags*. En este vector variable se van guardando las letras que conforman la palabra. Vamos a establecer un número para cada generador de la siguiente manera: 1 para *a*, 2 para *b*, 3 para *A* y 4 para *B*. Por ejemplo si nuestra palabra nuevamente es *abbA* entonces sería $tags = [1, 2, 2, 3]$.
- 5) *logic*. Es una variable lógica cuyo valor en 0 el algoritmo continúa por la rama del árbol, mientras que cuando toma el valor de 1 explora una rama diferente.
- 6) *logica*. Es una variable lógica que le dice al programa cuando vale 0 que ya no hay más ramas que explorar en ese nivel. Y cuando adquiere valor de 1 significa que aún quedan ramas en ese nivel por explorar.

7) *go_forward*. Sigue adelante un nivel en el árbol de palabras. Esta elección corresponde siempre a un orden cíclico *abAB*. A medida que avanzamos un paso más, incrementamos *lev* por 1. Cuyo script sería:

```
lev=lev+1
tags(lev)=modulo(tags(lev-1)+1,4)
word(1:2,2*lev-1:2*lev)=word(1:2,2*lev-3:2*lev-2)*gens(1:2,2*(tags(lev))-1:2*tags(lev))
```

8) *branch_termination*. Esta subrutina tiene dos propósitos: hacer uso del elemento del grupo y comprobar si hemos llegado al final de la rama. El criterio exacto para la terminación es una de las más sutiles. El requisito puede ser que *lev* sea igual a *levmax*, o podemos dar criterios más elaborados. Por ejemplo que la distancia de los puntos fijos de la palabra anterior y la palabra en la que nos encontramos sea menor que un ϵ . Si se cumple el criterio pasaremos a la fase de retroceder. Si el criterio no se cumple volvemos a la fase de seguir adelante. La idea del script es:

```
if lev==levmax
logic=1
else logic=0
end
```

9) *go_backward*. En esta fase retrocedemos un nivel en la ruta que hemos trazado en el árbol, disminuimos *lev* por 1 para cada nodo hacia atrás que viajamos. Sí hay más nodos por explorar avanzamos y si hay más turnos disponibles seguimos retrocediendo hasta llegar a $lev = 0$. Sencillemente se escribe:

```
lev=lev-1
```

10) *available_turn*. Comprueba si hay otra ruta de avance que conduce desde el nodo actual que no hemos viajado anteriormente. Si es así, devuelve *logica* = 1. Y el script sería:

```

if modulo(tags(lev+1)-1,4)==modulo(tags(lev)+2,4)
logica=0
else logica=1
end

```

11) *turn_and_go_forward*. Avanza un nivel en el árbol pero lo hace siguiendo el orden cíclico *aBAb*, dependiendo de la última letra de la última palabra hecha. Siendo de la siguiente manera:

```

tags(lev+1)=modulo(tags(lev+1)-1,4)
if lev==0
word(1:2,1:2)=gens(1:2,2*(tags(1))-1:2*(tags(1)))
lev=lev+1
else word(1:2,2*lev+1:2*lev+2)=word(1:2,2*lev-1:2*lev)*gens(1:2,2*(tags(lev+1))-1:2*(tags(lev+1)))
lev=lev+1
end

```

Advertencia. En el software MATLAB la función de *modulo* que viene por default no nos sirve, ya que si queremos saber el valor de un número *modulo* el mismo número nos da como resultado 0 y a nosotros nos conviene que nos de el mismo número. Para solucionar esto simplemente creamos una nueva función, denominada *modulo*, que funciona como nosotros queremos de la siguiente forma:

```

function [ x ] = modulo( y,z )
if mod(y,z)==0
x=mod(y,z)+z
else x=mod(y,z)
end

```

Ahora si, a continuación se muestra el algoritmo que nos permite plotear conjuntos límites y conjuntos ordinarios.

```

while ((lev==0)&(tags(1)==2))<1;
if logica==0;go_ forward;branch_ termination;
else go_ backward;
if lev==0;
if tags(1)==2;break;
else turn_ and_ go_ forward;logica=0;
end;
else available_ turn;
if logica==1;turn_ and_ go_ forward;branch_ termination;
else logica=1;
end;
end;
end;
end

```

Para dar inicio al algoritmo debemos definir antes algunas variables con las que el código em-

pieza a trabajar. Y éstos serían los siguientes:

```
gens=[a b A B];lev=1;word(1:2,1:2)=gens(1:2,1:2);tags(1)=1;logic=0;
```

La primera palabra es el primer generador a ; comenzando con el código seguimos con la palabra ab del nivel 2. Notar que b es el segundo generador. Continuando llegamos a la palabra abA , agregando el tercer generador. Siguiendo esto resulta lógica la palabra sucesiva $abAB$ de nivel 4. Así es, se trata de el conmutador, un elemento de suma importancia para la teoría vista al principio. Resulta que el algoritmo va eligiendo las palabras en el árbol de forma adecuada para ir construyendo la curva de Jordan que representa el conjunto límite. Puede observarse que el programa termina cuando alcanzamos el nivel 0 y no hay más ramas que explorar. Esto sucede cuando se llega a los valores $lev = 0$ y $tags(1) = 2$, es decir la b -rama es la última en explorar.

Procedimientos de terminación. Sería perfecto considerar cada palabra o elemento del grupo, pero no se puede porque hay una infinidad de ellos, una infinidad numerable. Por lo tanto debemos asignar un procedimiento de terminación que nos diga que hemos explorado lo suficiente. La subrutina que tiene esta función es *branch_termination*. Y aquí es donde la mente del matemático se junta con el alma del artista. En esta terminal el algoritmo tiene la oportunidad de hacer lo que uno quiera con la palabra y aquí también es donde decide si la palabra es el último nodo de la rama o vamos a seguir explorando a mayor profundidad. ¿Qué hacer con la palabra? en realidad solamente podemos hacer dos cosas, una aplicarlo a alguna figura como un círculo o un dominio fundamental y teselar el conjunto ordinario, y otra es obtener sus puntos fijos para empezar a encontrar el conjunto límite. Y con respecto a el procedimiento de terminación podemos considerar por ejemplo que sí la figura encontrada es demasiado pequeña ya no vale la pena seguir explorando, o también se puede considerar que la distancia entre los puntos fijos es demasiado pequeña que igualmente ya no tiene caso seguir explorando. Pero esto depende de lo que uno quiere en la imagen.

A lo largo del documento se fueron presentado diferentes tipos de imágenes. Para cada tipo de imagen se iba modificando la subrutina de *branch_termination* según lo necesitábamos. Por ejemplo en el segundo capítulo las figuras mostraban la teselación del conjunto ordinario, por lo que antes de iniciar el programa se definió un dominio fundamental para que en el proceso de terminación la palabra que estuviera en juego se aplicara y obtener así la imagen. En este último capítulo las figuras se limitaron a mostrar únicamente el conjunto límite, cuyo resultado se obtuvo diciéndole al programa que en el proceso de terminación hiciera el dibujo de los puntos fijos de dicha palabra que estuviera en proceso. Esto se realiza con la función que trae el software llamada *scatter*. La última figura muestra el acondicionamiento del programa para que muestre el conjunto límite del tamiz de Apolonio como una curva continua.

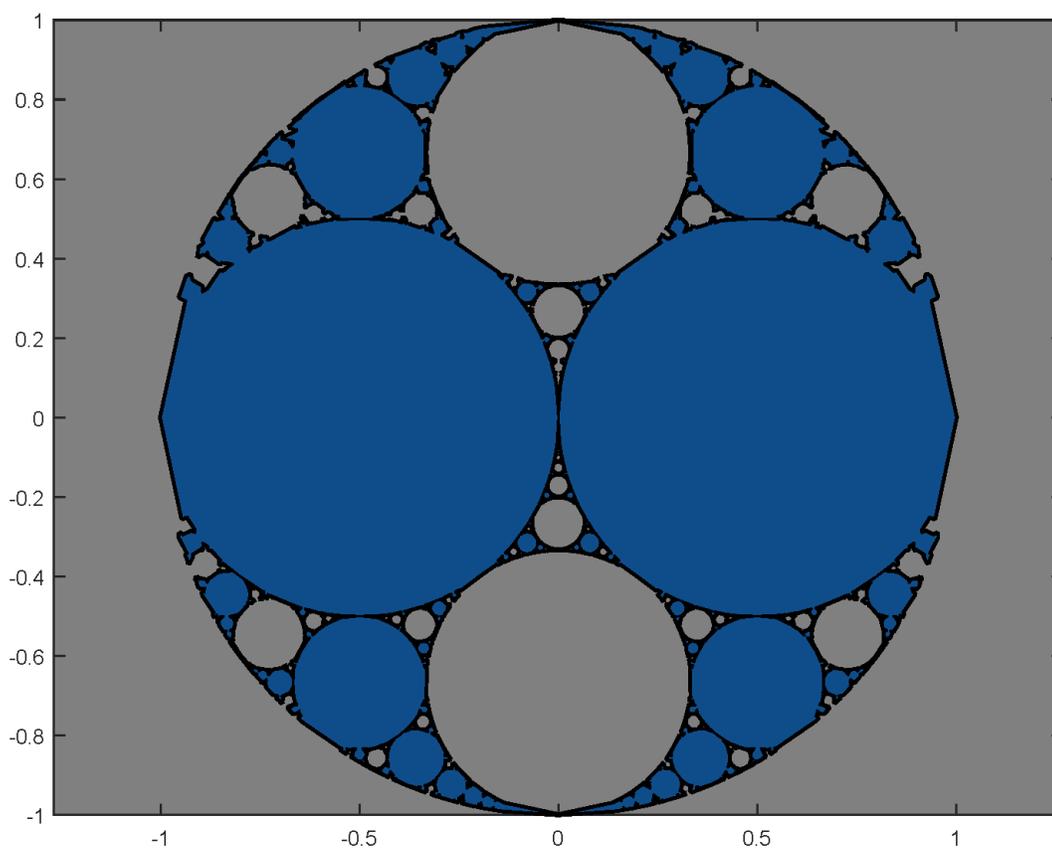


Figura 4.2: Conjunto límite como una curva continua

Bibliografía

- [1] A. Poirier, *Aspectos geométricos del análisis complejo*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Fondo Editorial, 2005.
- [2] S. L. Krushkal, B. N. Apanasov, and N. A. Gusevskiĭ, *Kleinian groups and uniformization in examples and problems*, vol. 62. American Mathematical Soc., 1986.
- [3] T. V. Balaji, *An introduction to families, deformations and moduli*. Universitätsverlag Göttingen, 2010.
- [4] H. Alaqad, “On the geometry of fuchsian groups,” *United Arab Emirates University*, 2015.
- [5] B. Maskit, *Kleinian groups*, vol. 287. Springer Science & Business Media, 2012.
- [6] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, vol. 91. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] J. Olsen, “The geometry of möbius transformations,” *Rochester: University of Rochester*, 2010.
- [8] S. Katok, *Fuchsian groups*. University of Chicago press, 1992.
- [9] D. Mumford, C. Series, and D. Wright, *Indra’s pearls: the vision of Felix Klein*. Cambridge University Press, 2002.
- [10] L. Keen and C. Series, “Pleating coordinates for the maskit embedding of the teichmüller space of punctured tori,” *Topology*, vol. 32, no. 4, pp. 719–749, 1993.
- [11] J. W. Anderson, *Hyperbolic geometry*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [12] A. Cano, J. P. Navarrete, and J. Seade, “Complex kleinian groups,” in *Complex Kleinian Groups*, pp. 77–92, Springer, 2013.
- [13] M. Cruz, “Dinámica de grupos kleinianos,” *Universidad de Guanajuato Facultad de Matemáticas*, 2015.
- [14] H. M. Farkas and I. Kra, “Riemann surfaces,” in *Riemann surfaces*, pp. 9–31, Springer, 1992.
- [15] J. L. S. Garrido, “Grupos kleinianos elementales y no elementales,” *Foro-Red-Mat: Revista electrónica de contenido matemático*, vol. 11, no. 1, p. 1, 2001.

- [16] R. A. Hidalgo, “Transformaciones de mobius: Una introduccion,” *Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile*, 2012.
- [17] A. Lascurain Orive, *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. Prensas Ciencias, UNAM, 2005.
- [18] A. L. Pérez del Pozo, “Conjuntos invariantes en superficies de riemann,” *Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones*, 2005.
- [19] S. Rivas and Y. Adony, *Geometría hiperbólica y conjuntos límites de grupos Kleinianos: grupos Quasifuchsianos y algunas degeneraciones*. PhD thesis, Universidad de El Salvador, 2015.
- [20] G. Rubiano, O. Palacios, and B. J. Zlobec, “Transformaciones de mobius y fractales [con mathematica],” *Boletín de Matemáticas*, vol. 18, no. 2, p. 183, 2011.
- [21] C. Series, “A crash course on kleinian groups,” *Università degli Studi di Trieste. Dipartimento di Matematica e Informatica*, 2005.
- [22] D. Sprunger, “Fuchsian groups: Intro,” *University of California, San Diego*, 2009.