UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

LA TRANSFORMADA DE SEGAL-BARGMANN, ASPECTOS ANALÍTICOS Y GEOMÉTRICOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA

MARÍA MAGDALENA CASAS SAUCEDO

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. CARLOS VILLEGAS BLAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIDAD CUERNAVACA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CUERNAVACA, MORELOS. SEPTIEMBRE 2018

Dedicado a mis padres,
a Octavio y
a Paco

“No es el conocimiento, si no el acto de aprendizaje,
y no la posesión, sino el acto de llegar allí,
lo que concede el mayor disfrute.”
–CARL FRIEDRICH GAUSS.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi familia. A mis padres y a mis hermanas por seguir apoyándome en todo momento, por seguirnos el rastro aunque estábamos distanciadas geográficamente, sé que fue algo difícil pero lo logramos. Más que agradecerles, quiero dedicarles este trabajo a Paco y a Emilio, por los momentos compartidos en esta etapa, porque interactuar con ellos siempre fue gratificante y reconfortante.

A Octavio, a este punto pequeño en el cosmos por haber decidido acompañarme una vez más en un proyecto al cual por iniciativa propia me he embarcado. Gracias por respaldarme y por coincidir conmigo.

También quisiera agradecer a Salvador Pérez Esteva por haber aceptado ser mi tutor en este programa de maestría. A Carlos Villegas Blas por su enorme paciencia y dedicación, por darme la oportunidad de trabajar con él, por guiarme con lecturas interesantes a lo largo de los cursos, pues estas motivaron el desarrollo del documento que aquí expongo y gracias también por haber estado siempre al pendiente de mi situación como becaria y apoyarme en momentos críticos. A Marcos López porque además de ser uno de mis profesores durante la maestría, se ha convertido en un amigo más.

Quiero hacer mención de mis amigos, aquellos que ya conocía desde hace tiempo como a aquellos que fui conociendo a lo largo de esta experiencia. A Adri, Óscar, Eduardo Serrano, José Luis Cisneros, Eddye, Erich, Guadalupe, Giovanna, Joel, Enrique de Juárez, Enrique de Puebla, Mario, Francisco, Andrea, Arilin, Luis Jorge, Marina, Gerino, Don Alex, Alex Ucan... y muchos más que harían de esta lista, una gran lista y que seguramente si están leyendo esto es por que también formaron parte de esta aventura.

Más que agradecerles, quiero dedicarles este trabajo a todos los que aquí menciono directa e indirectamente, ya que cada uno de ellos ha contribuído en el enriquecimiento de mi formación, no me refiero solamente a la formación matemática que he adquirido, me refiero también a la formación como ser humano. Gracias por acompañarme en esta experiencia.

Finalmente, agradezco también al proyecto de investigación PAPIIT IN104015 de la UNAM por haberme brindado el sustento económico durante la primera parte de mi estancia para la culmiación de este trabajo. Gracias también al Instituto de Matemáticas Unidad Cuernavaca por el apoyo económico durante la segunda parte de la estancia para la culminación de este trabajo.

Índice general

Introducción

"Let's ask Bargmann!"
– JOHN R. KLAUDER

El propósito de este trabajo es estudiar las distintas representaciones que se tienen para la Transformada de Segal-Bargmann tanto en sus aspectos analíticos como en sus aspectos geométricos y sus relaciones. Analizaremos la obtención de la Transformada de Segal-Bargmann desde el punto de vista analítico, pasando por las ideas concebidas por Bargmann [1]; hasta el punto de vista geométrico utilizando el programa de cuantización geométrica descrito en [3], [4] y [6] .

El objeto de estudio de este trabajo, la Transformada de Segal-Bargmann, tiene relevancia en la mecánica cuántica porque da una representación de la mecánica cuántica en términos de un espacio de Hilbert de funciones analíticas así como operadores actuando en ellos. De hecho, presentaremos las tres representaciones que se tienen para la transformación, la introducida por V. Bargmann a la cual llamaremos forma clásica, la forma dada en términos del estado base y por último la detallada por B. Hall y que llamaremos forma invariante. Es remarcable también que en el caso de su forma invariante, dicho mapeo unitario está dado en términos de una convolución con el núcleo de la ecuación del calor. Otro aspecto que hay que considerar y resaltar en el caso de la representación clásica de la Transformada de Segal-Bargmann, es que podemos relacionarla con una transformación canónica tal y como se muestra en [8]. Como dato interesante, podemos destacar que justo la función generadora de dicha transformación canónica aparece en el argumento del núcleo integral de la transformación unitaria, esto para la forma clásica de la Transformada.

El documento se presenta con la siguiente estructura. La primera parte es dedicada a definir los espacios con los cuales vamos a estar trabajando y algunas de las propiedades que éstos poseen. En la segunda parte se muestra la obtención del espacio de funciones holomorfas de Segal-Bargmann y de la Transformada de Segal-Bargmann, según la concepción de Bargmann. Luego se hace una breve descripción de los elementos a relacionar en la última parte; elementos de la mecánica clásica y elementos de la mecánica cuántica. En la última parte describimos el programa de cuantización geométrica, primero de manera intuitiva para el caso de $\mathbb{R}^n$ y después de manera formal para variedades en general obteniendo el anterior como un caso particular. Esto también incluyendo la corrección con semi-formas, así como los mapeos de apareamiento.

En el primer capítulo, basándonos en [2], presentamos un preámbulo de los conceptos, los objetos con los cuales estaremos trabajando, las propiedades que estos poseen y que nos serán de utilidad en el resto del texto. No está por demás mencionar que las herramientas que se utilizan en esta parte son resultados representativos de la variable compleja; mencionando algunos tenemos, resultados sobre funciones holomorfas, su representación en series de potencias, convergencia de funciones analíticas, la fórmula integral de Cauchy, el Teorema de Morera, entre otros. También hacemos uso de los resultados propios de la teoría de la medida e integración. Aplicamos la teoría de los espacios de Hilbert, espacios de Hilbert con núcleo reproductor y mapeos unitarios. En concreto, partiremos de la definición de espacios de funciones holomorfas de cuadrado integrable con alguna densidad. Definiremos lo qué es el núcleo reproductor, algunas de sus propiedades así como obtenerlo dada alguna base ortonormal para el espacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable. Casi para terminar esta parte, mencionamos algunos ejemplos de espacios de funciones holomorfas de cuadrado integrable con ciertos pesos: los espacios de Bergman y los espacios de Segal[1]-Bargmann[2], estos últimos serán nuestro objeto de estudio. Finalmente, definimos el concepto de equivalencia holomorfa esclareciendo dicho concepto mediante un ejemplo.

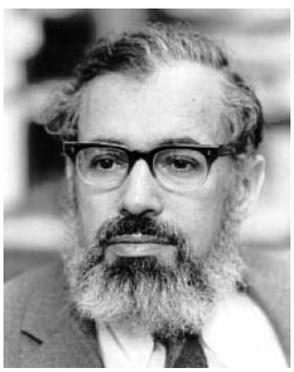

Figura 1: Irving E. Segal

Figura 2: Valentine Bargmann

En el segundo capítulo, obtenemos por primera vez tanto el espacio como la Transformada de Segal-Bargmann. Comenzamos definiendo los operadores de posición y momento, para luego exponer las relaciones de conmutación canónicas (R.C.C.) que estos satisfacen. Luego, definimos a los operadores de aniquilación y creación en términos de los operadores de posición y momento, y reescribimos las R. C. C. para estos operadores. Puesto que los operadores de posición y momento son operadores densamente definidos en el espacio de funciones de cuadrado integrable y no acotados, consideraremos a sus operadores exponenciados para evitar problemas de acotabilidad y continuidad en el dominio. Necesitamos tener esta última condición, pues aunado a cierta condición de irreducibilad, podemos hacer uso del Teorema de Stone-von Neumann. Dados dos espacios de Hilbert donde en ambos se tiene una representación irreducible de las R. C. C., dicho teorema garantiza la existencia de un operador unitario (salvo un factor constante de módulo 1) entre ambos espacios. Adicionalmente, este mapeo unitario relaciona los operadores de creación y aniquilación definidos en los espacios de Hilbert mediante conjugación. En efecto, en nuestra situación de interés es el Teorema de Stone-von Neumann el que

[1]Irving E. Segal [1918-1998] Matemático americano. Conocido por sus desarrollos en mecánica cuántica, análisis funcional y análisis armónico. Fue galardonado con el Premio Humboldt (1981), ganó tres becas Guggenheim (1947, 1951, 1967). Fue elegido para la Academia Nacional de Ciencias (1973).

[2]Valentine Bargmann [1908-1989] Matemático y físico teórico aleman. Trabajó como asistente de Albert Einstein en el Instituto de Estudios Avanzados (Institute for Advanced Study) en Princeton. Fue miembro de la Academia Nacional de Ciencias. Fue galardonado con las medallas Wigner (1979) y Max Planck (1988), ambas por sus contribuciones a la teoría de grupos en física cuántica.

nos garantiza la existencia del mapeo unitario entre el espacio de Segal-Bargmann y el espacio $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, dicho mapeo es la Transformada de Segal-Bargmann. Sin embargo, antes de presentar como tal a dicho operador unitario, describimos cuál fue el proceso que se siguió para la obtención del operador. De hecho en esta parte, luego de notar la observación de Fock (1928), seguiremos las ideas concebidas por Bargmann (1960) para obtener el espacio de funciones holomorfas que lleva su nombre. Concluimos esta sección exhibiendo la Transformada de Segal-Bargmann en sus distintas representaciones: en su forma clásica, en la forma asociada con la transformación de estado base y finalmente en su forma invariante.

En el siguiente capítulo, tratamos temas de mecánica clásica y mecánica cuántica. Empezamos por recordar el formalismo Hamiltoniano en el espacio euclidiano, pasando luego a describir los conceptos de la mecánica clásica en términos de variedades, definiendo también el concepto de transformaciones canónicas y funciones generadoras. Así como lo hicimos para el caso clásico, describiremos también algunos de los elementos de la mecánica cuántica. Como se describirá en el texto, por cuantización entenderemos un procedimiento que nos indica cómo relacionar elementos del esquema clásico con elementos del esquema cuántico, sin llegar a dar equivalencias entre estos. De hecho, el motivo de introducir esta pequeña sección sobre elementos de mecánica, es justamente el de entender cuáles son los elementos que buscamos relacionar con el programa de cuantización geométrica que se utilizará luego para obtener la Transformada de Segal-Bargmann. Finalizamos esta parte con algunos ejemplos de transformaciones canónicas y funciones generadoras.

En la última parte del documento nos ocuparemos justamente de desarrollar el programa de cuantización geométrica para obtener tanto el espacio como la Transformada de Segal-Bargmann, primero en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$ y posteriormente en variedades en general. Daremos comienzo a esta parte en el cuarto capítulo citando el programa de cuantización propuesto por Dirac, el cual propone encontrar un mapeo que relacione la clase de funciones en el espacio fase $\mathbb{R}^{2n}$ con operadores en el espacio de Hilbert $\mathbf{H}$ de tal manera que se satisfagan las siguientes propiedades: a funciones reales les corresponden operadores autoadjuntos, a la función constante 1 se relaciona con el operador identidad, los paréntesis de Poisson de dos funciones se corresponden con el conmutador de los operadores asociados a dichas funciones e irreducibilidad de ciertos operadores en el espacio $\mathbf{H}$. En nuestro desarrollo tratamos de aproximarnos lo más que podamos a este programa, pues es conocido que el Teorema de Groenewold-van Hove nos garantiza que no existe un mapeo satisfaciendo todas las propiedades mencionadas. Proponemos un mapeo al cual llamaremos mapeo precuántico definido en términos de un potencial simpléctico y que satisface tres de las propiedades eludiendo la propiedad de irreducbilidad. Vemos que el espacio de Hilbert que obtenemos es muy grande, por tanto se busca reducir nuestro espacio a un espacio de Hilbert en el cual nuestros operadores actúen de manera irreducible. Para obtener un espacio de Hilbert el cual podamos entender como la cuantización de $\mathbb{R}^{2n}$, necesitaremos restringirnos a un subespacio del espacio de Hilbert obtenido incialmente. La idea entonces, es restringirse a la mitad de las $2n$ variables en $\mathbb{R}^{2n}$. Después enunciamos las definiciones para subespacios de posiciones, de momentos y subespacio holomorfo, definiciones que dependen de la elección de un potencial simpléctico. Acto seguido, obtenemos estos subespacios para dos potenciales simplécticos distintos. Se ve entonces que podemos identificar a los subespacios obtenidos con los espacios de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ y con los espacios de Segal-Bargmann con peso[3] $\mu_{2\hbar}$ y $\nu_{\hbar}$. Por último, mediante el mapeo de precuantización se obtienen los operadores correspondientes a las posiciones y a los momentos definidos en el espacio fase.

Para finalizar esta parte del documento, en el útlimo capítulo presentamos formalmente el programa de cuantización desarrollándolo para variedades en general. Recalquemos una vez más que el objetivo en este capítulo será la obtención geométrica del espacio y de la Transformada de Segal-Bargmann. Para llegar a nuestro objetivo desarrollamos la teoría necesaria con el fin de poder hablar de mapeos de apareamiento, los cuales

[3] Ver la definición (1.2.2) y la igualdad (1.11) en el capítulo 1.

permiten comparar el resultado de cuantizar con respecto de dos polarizaciones diferentes. En primera instancia expondremos las definiciones de haz lineal sobre una variedad y secciones, definiendo también la derivada covariante de secciones la cual queda determinada por un potencial simpléctico. Antes de hablar propiamente de un programa de cuantización, como en el capítulo previo, se hablará primero de un espacio de Hilbert precuántico y de una precuantización, asimismo se verificarán algunas de las propiedades que debe satisfacer el mapeo de precuantización. Posteriormente, introducimos el concepto de polarización de una variedad simpléctica, como una subvariedad del espacio tangente complejificado a la variedad satisfaciendo las propiedades de ser cerrado bajo el conmutador y de que la dimensión de la intersección de esta polarización con su complejo conjugado sea constante. Pidiendo las respectivas condiciones, distinguimos entre polarizaciones puramente reales, polarizaciones puramente complejas y polarizaciones de Kähler.

Para definir el espacio de Hilbert cuántico se incluye la definición de haz canónico de la polarización y se da una relación de gran importancia entre las n-formas en el espacio de hojas de la polarización y las n-formas del haz canónico mediante un mapeo cociente. Otra de las definiciones relevantes en esta parte es la de raíz cuadrada del haz canónico; entendemos por raíz cuadrada a un haz lineal real de tal manera que el producto tensorial consigo mismo es isomorfo al haz canónico. Con estos elementos pasamos a formar el espacio de semiformas considerando las secciones polarizadas del producto tensorial del haz lineal precuántico con cualquier raíz cuadrada del haz canónico complejificado. Aunado a esto, definimos la norma de estas secciones. Más aún, haciendo la completación con respecto a la norma del espacio de secciones polarizadas con norma finita obtenemos el espacio de Hilbert de la semiforma. Lo anterior se define tanto en el caso en el que tengamos una polarización real o una polarización de Kähler. Finalmente, para completar el programa de cuantización, definimos la cuantización de observables.

Casi para concluir, mostramos el mapeo de apareamiento mediante el cual es posible obtener la Transformada de Segal-Bargmann en su forma clásica y en su representación invariante. Dadas las polarizaciones P y P' mediante el procedimiento descrito anteriormente podemos encontrar los espacios de Hilbert de las semiformas respectivos a cada polarización, digamos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, en donde mediante el mapeo de apareamiento podemos relacionar a estos espacios.

El mapeo de apareamiento que viene a relacionar los espacios de Hilbert de las semiformas es el dado por

$$\Lambda_{P,P'} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$$

y es tal que cumple la siguiente propiedad

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{P,P'} = \langle \Lambda_{P,P'} s_1, s_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

El lado izquierdo de la igualdad es también un mapeo de apareamiento que se define previamente en la parte correspondiente del texto que trata sobre mapeos de apareamiento, y el lado derecho es justo el producto interno en el espacio de Hilbert de la semiforma $\mathcal{H}_2$, definido en la parte de espacios de Hilbert de semiformas.

Para concluir, ejemplificamos el procedimiento descrito para obtener la Transformada de Fourier mediante mapeos de apareamiento. Y como resultados principales de esta parte del documento desarrollamos el proceso para encontrar el mapeo de apareamiento que nos proporciona la Transformada de Segal-Bargmann. Como se había mencionado antes, se obtienen las transformadas clásica e invariante. Para ambas utilizamos las mismas polarizaciones, la polarización vertical y una polarización de Kähler, considerando a nuestra variedad simpléctica como el espacio $\mathbb{R}^{2n}$. Sabíamos también que los haces canónicos y sus raíces cuadradas quedan determinados por la polarización que consideramos. Para encontrar las secciones que conforman el espacio de Hilbert de las semiformas, se necesita además considerar un potencial simpléctico, así que en nuestro caso además de utilizar las polarizaciones mencionadas, utilizamos también dos potenciales simplécticos distintos para obtener las distintas transformadas. En el caso particular de la obtención de la Transformada de Segal-Bargmann en su forma clásica utilizamos la propiedad del núcleo reproductor, mientras que para obtener la representación de la transformada en su forma invariante se uitliza el núcleo del calor.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Empezaremos por mencionar algunos de los requerimientos para describir la transformada de Segal-Bargmann. Básicamente, a lo largo de todo el texto estaremos utilizando recursos de la teoría de variable compleja y espacios de funciones holomorfas y de espacios de Hilbert. Para el desarrollo de este capítulo hemos considerado la referencia [2].

1.1. Espacios de funciones holomorfas

En las siguientes líneas haremos una reproducción de la sección 2 de [2], añadiendo a las demostraciones de los teoremas enunciados algunos cálculos no desarrollados en dicha referencia. Consideremos U un conjunto abierto no vacío en $\mathbb{C}^d$. Sea $L^2(U,\alpha)$ el espacio de funciones a valores complejos, de cuadrado integrable respecto al peso α; para $f, g \in L^2(U,\alpha)$, definimos su producto interno como

$$\langle f, g\rangle = \int_U \overline{f(z)} g(z)\alpha(z)dz,$$

en donde dz denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$. Sea $\mathcal{H}(U)$ el espacio de funciones holomorfas en U, en donde entendemos que una función de varias variables complejas es holomorfa si es holomorfa en cada variable con el resto fijas. Sea también α una función continua y estrictamente positiva en U.

Definición 1.1.1 *Denotemos por $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ al subespacio de $L^2(U,\alpha)$ de funciones holomorfas con respecto a la densidad (peso) α, es decir,*

$$\mathcal{H}L^2(U,\alpha) = \left\{ F \in \mathcal{H}(U) : \int_U |F(z)|^2 \alpha(z)dz < \infty \right\}.$$

Una de las propiedades más importantes de éstos espacios en particular es que la evaluación es continua, ciertamente los espacios en los cuales están contenidos (los espacios L^2) no tienen ésta propiedad. Esto queda establecido en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1 (Theorem 2.2, [2]) *1. **Evaluación continua.** Para todo $z \in U$, existe una constante c_z tal que*

$$|F(z)|^2 \leq c_z \|F\|^2_{L^2(U,\alpha)}, \tag{1.1}$$

para todo $F \in \mathcal{H}L^2(U, \alpha)$.

*2. **Subespacio cerrado.** $\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$ es un subespacio cerrado de $L^2(U, \alpha)$, y por lo tanto un espacio de Hilbert.*

Demostración:

1. **Evaluación continua.** Sean U y α como se ha definido anteriormente. Sea $z \in U$, consideremos también el polidisco de radio r, con centro en z dado por $P_r(z) = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_d$, donde D_k es el disco en $\mathbb{C}$ de radio r centrado en la componente z_k de z,es decir,

$$P_r(z) = \{v \in \mathbb{C}^d : \ |v_k - z_k| < r, \ k = 1, 2, \ldots, d\},$$

donde $z = (z_1, \ z_2, \ldots, \ z_d)$ con $z_k \in \mathbb{C}, k = 1, \ \ldots, \ d$. Ahora como $z \in U$, escojamos r suficientemente pequeño tal que $\overline{P_r(z)} \subset U$, entonces tenemos la siguiente afirmación:

$$F(z) = (\pi r^2)^{-d} \int_{P_r(z)} F(v) dv. \tag{1.2}$$

Primero vamos a probar el caso cuando $d = 1$.
Por hipótesis F es holomorfa, entonces podemos expandirla en una serie de Taylor en $v = z$,

$$F(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (v - z)^n = a_0 (v - z)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (v - z)^n = a_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (v - z)^n,$$

en donde $a_0 = F(z)$; ésta serie converge uniformemente a F en el conjunto compacto $\overline{P_r(z)}$, entonces evaluando la integral (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} (\pi r^2)^{-1} \int_{P_r(z)} F(v) dv &= (\pi r^2)^{-1} \int_{P_r(z)} \left[F(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (v - z)^n \right] dv \\ &= (\pi r^2)^{-1} \left[\int_{P_r(z)} F(z) dv + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{P_r(z)} a_n (v - z)^n dv \right] \end{aligned}$$

en la segunda igualdad simplemente se está sutituyendo F por su serie de Taylor, y en la tercera se ha utilizado la linealidad de la integral y el hecho de que la serie es uniformemente convergente en el compacto $\overline{P_r(z)}$ para poder intercambiar la sumatoria con la integral. Ahora, haciendo el siguiente cambio de variable $(v - z) = s e^{i\theta}$, con $s \in [0, r]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, la última línea obtenida viene a ser

$$(\pi r^2)^{-1} \left[\int_{P_r(z)} F(z) dv + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \int_0^r s^n e^{i\theta n} ds d\theta \right] = (\pi r^2)^{-1} \int_{P_r(z)} F(z) dv = F(z)$$

Por tanto, la igualdad (1.2) es cierta para $d = 1$.

Veamos ahora el caso cuando $d > 1$. En este caso, recordando que el polidisco $P_r(z) = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_d$, donde D_k es el disco en $\mathbb{C}$ de radio r centrado en la componente z_k de z, denotando también $d\lambda_d$ como la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}^d$. Dado que $d\lambda_d(P_r(z))$ es finita, y por hipótesis $F \in \mathcal{H}L^2(P_r(z), d\lambda_d)$, se sigue entonces que $F \in L^1(P_r(z), d\lambda_d)$ y por tanto F es una función integrable en $P_r(z)$. Así, podemos aplicar el teorema de Fubini el cual nos permite calcular la integral del lado derecho de (1.2) como una integral iterada de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
(\pi r^2)^{-d} & \int_{P_r(z)} F(v) d\lambda_d(v) = \\
= \quad & (\pi r^2)^{-d} \int_{D_2 \times D_3 \times \cdots \times D_d} \left[\int_{D_1} F(v_1, v_2 \ \ldots, \ v_d) d\lambda_1(v_1) \right] d\lambda_{d-1}(v_2, \ \ldots, \ v_d) \\
= \quad & (\pi r^2)^{-(d-1)} \int_{D_2 \times D_3 \times \cdots \times D_d} \left[(\pi r^2)^{-1} \int_{D_1} F(v_1, , v_2 \ \ldots, \ v_d) d\lambda_1(v_1) \right] d\lambda_{d-1}(v_2, \ \ldots, \ v_d) \\
= \quad & (\pi r^2)^{-(d-1)} \int_{D_2 \times D_3 \times \cdots \times D_d} F(z_1, v_2 \ \ldots, \ v_d) d\lambda_{d-1}(v_2, v_3 \ \ldots, \ v_d) \\
\vdots \quad & \\
= \quad & (\pi r^2)^{-1} \int_{D_d} F(z_1, \ z_2, \ \ldots, \ v_d) d\lambda_1(v_d) \\
= \quad & F(z_1, \ z_2, \ \ldots, \ z_d) \\
= \quad & F(z)
\end{aligned}
$$

Así, queda establecida (1.2).

Ahora, reescribiendo (1.2) en términos del producto escalar

$$
\begin{aligned}
F(z) &= (\pi r^2)^{-d} \int_U \chi_{P_r(z)}(v) \frac{1}{\alpha(v)} F(v) \alpha(v) dv \\
&= (\pi r^2)^{-d} \langle \chi_{P_r(z)} \frac{1}{\alpha}, F \rangle
\end{aligned}
$$

donde χ es la función característica de $P_r(z)$. Entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que

$$
|F(z)|^2 \leq (\pi r^2)^{-2d} \|\chi_{P_r(z)} \frac{1}{\alpha}\|^2 \|F\|^2. \tag{1.3}
$$

Luego, como $\overline{P_r(z)} \subset U$ y α es una función estrictamente positiva y continua en U, entonces alcanza sus valores extremos en $\overline{P_r(z)}$, y por tanto $\frac{1}{\alpha}$ es acotada en $P_r(z)$. Entonces podemos definir $c_z = (\pi r^2)^{-d} \|\chi_{P_r(z)} \frac{1}{\alpha}\|^2$, con lo que (1.3) se convierte en

$$
|F(z)|^2 \leq c_z \|F\|^2. \tag{1.4}
$$

2. **Subespacio cerrado.** Sea $F \in \mathcal{H}L^2(U, \alpha)$. Sea $z \in U$, dado que U es abierto podemos encontrar una vecindad $V_z = P_{2r}(z) \subset U$, en donde $r > 0$. Consideremos el polidisco $P_r(z)$ el cual a su vez está contenido en el polidisco $P_{2r}(z)$; entonces para cualquier $v \in P_r(z)$, se cumple que $P_r(v) \subset P_{2r}(z)$. Por otra parte, el inciso anterior garantiza la existencia de la constante c_v tal que $|F(v)|^2 \leq c_v \|F\|^2$. De hecho, tenemos la siguiente estimación,

$$
\begin{aligned}
c_v &= (\pi r^2)^{-d} \|\chi_{P_r(v)} \frac{1}{\alpha}\|^2 = (\pi r^2)^{-d} \int_{P_r(v)} \left| \frac{1}{\alpha(w)} \right|^2 \alpha(w) dw = (\pi r^2)^{-d} \int_{P_r(v)} \frac{1}{|\alpha(w)|} dw \\
&\leq \sup_{w \in P_r(v)} \frac{1}{|\alpha(w)|} \leq \sup_{w \in P_{2r}(z)} \frac{1}{|\alpha(w)|}.
\end{aligned}
$$

Entonces definamos $C_z = \sup_{w\in P_{2r}(z)} \dfrac{1}{|\alpha(w)|}$. Así,

$$|F(v)|^2 \leq c_v\|F\|^2 \leq C_z\|F\|^2.$$

Ahora supongamos que tenemos una sucesión $\{F_n\} \subset \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ de Cauchy, y como $L^2(U,\alpha)$ es un espacio de Hilbert, existe $F \in L^2(U,\alpha)$ tal que $F_n \to F$ en $L^2(U,\alpha)$. Basta demostrar que $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. En particular tenemos que $\{F_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(U,\alpha)$, y además

$$\sup_{v\in V_z}|F_n(v) - F_m(v)| \leq \sqrt{C_z}\|F_n - F_m\|_{L^2(U,\alpha)} \to 0,$$

cuando $m, n \to 0$. Por tanto $\{F_n\}$ converge uniformemente en un compacto de manera local a alguna función límite, la cual debe ser F. Luego, si el límite en $L^2(U,\alpha)$ y el límite puntual existen, éstos deben ser iguales casi en todas partes.

Entonces por el teorema de convergencia analítica, tenemos que el límite uniforme localmente de funciones holomorfas es siempre holomorfo. Por tanto la función límite F pertenece a $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ y con esto mostramos que $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ es cerrado, y por tanto un espacio de Hilbert. ■

Observación 1.1.1 *Considerando el espacio de funciones $\mathcal{H}L^2(U,\alpha) \subset L^2(U,\alpha)$ notamos que para cualquier $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, la desigualdad* (1.1) *nos dice que la evaluación en cada punto $z \in U$ es un funcional lineal acotado y con esto el teorema de representación de Riesz implica que existe una única función ϕ_z en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ tal que*

$$\begin{aligned} F(z) &= \langle \phi_z,\ F\rangle_{L^2(U,\alpha)} && (1.5)\\ &= \int_U \overline{\phi_z(w)}F(w)\alpha(w)dw,. && (1.6)\end{aligned}$$

Teorema 1.1.2 (Theorem 2.3, [2]) ***Núcleo Reproductor.*** *Sea $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ definido como en el teorema* (1.1.1)*. Entonces existe una función $K(x,w)$, $z, w \in U$, con las siguientes propiedades:*

1. *$K(z,w)$ es holomorfa en z y antiholomorfa en w, y satisface*

$$K(w,z) = \overline{K(z,w)}.$$

2. *Para cada $z \in U$ fijo, $K(z,w)$ es una función de cuadrado integrable respecto a la medida $d\alpha(w)$, con $d\alpha(w) = \alpha(w)dw$. Para toda $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$,*

$$F(z) = \int_U K(z,w)F(w)\alpha(w)dw.$$

3. *Si $F \in L^2(U,\alpha)$, y PF es la proyección ortogonal de F sobre el subespacio cerrado $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Entonces*

$$PF(z) = \int_U K(z,w)F(w)\alpha(w)dw.$$

4. *Para todo $z,\ u \in U$,*

$$\int_U K(z,w)K(w,u)\alpha(w)dw = K(z,u).$$

5. *Para todo $z \in U$,*
$$|F(z)|^2 \leq K(z,z)\|F\|^2,$$
y la constante $K(z,z)$ es óptima en el sentido de que para cada $z \in U$ existe una función $F_z \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ distinta de cero para la cual se cumple la igualdad.

6. *Dado cualquier $z \in U$, si $\phi_z(\cdot) \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ satisface*
$$F(z) = \int_U \overline{\phi_z(w)} F(w)\alpha(w)dw$$
para todo $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, entonces $\overline{\phi_z(w)} = K(z,w)$.

Demostración: De la primera parte del teorema anterior, tenemos que la evaluación en un punto $z \in U$ es un funcional lineal continuo en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Luego, por la observación (1.1.1), éste funcional lineal puede ser expresado únicamente como producto interno con algún ϕ_z en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, esto es
$$F(z) = \langle \phi_z, F\rangle_{L^2(U,\alpha)} = \int_U \overline{\phi_z(w)} F(w)\alpha(w)dw. \tag{1.7}$$
Entonces definimos $K(z,w) = \overline{\phi_z(w)}$. Así, por esta construcción la función $K(z,w)$ satisface el punto 2 del teorema y dado que $\phi_z(\cdot)$ es holomorfa, entonces $K(z,w)$ es holomorfa en $\bar{w}$, es decir, es anti-holomorfa en w.

Ahora, aplicando (1.7) a ϕ_z tenemos
$$\phi_z(w) = \langle \phi_w, \phi_z\rangle_{L^2(U,\alpha)} = \overline{\langle \phi_z, \phi_w\rangle}_{L^2(U,\alpha)} = \overline{\phi_w(z)},$$
de aquí que $\overline{K(z,w)} = K(w,z)$, y por tanto hemos probado el punto 1.

Para el punto 3, tenemos dos casos.
Caso 1. $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. En este caso tenemos justo el punto 2 del teorema, y por tanto ya está probado.
Caso 2. $F \in [\mathcal{H}L^2(U,\alpha)]^{\perp}$. En este caso tenemos que
$$\int_U K(z,w)F(w)\alpha(w)dw = \langle \phi_z, F\rangle = 0,$$
pues $\phi_z \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$.
Así $\int_U K(z,w)F(w)\alpha(w)dw$ es la identidad en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ y cero en $[\mathcal{H}L^2(U,\alpha)]^{\perp}$, y esto coincide con P.

El punto 4 es sólo una aplicación del punto 2 a la función holomorfa de cuadrado integrable $K(w,u)$ donde w es vista como variable y u como un parámetro, es decir,
$$K(z,u) = \int_U K(z,w)K(w,u)\alpha(w)dw.$$

Para probar el punto 5 notamos que la evaluación en z es justo el producto interno con un elemento ϕ_z de nuestro espacio de Hilbert. Así, como
$$\|\phi_z\|^2 = \langle \phi_z,\ \phi_z\rangle = \phi_z(z) = K(z,z),$$

usando (1.7) tenemos que

$$|F(z)|^2 = |\langle \phi_z, F\rangle|^2 \leq \|\phi_z\|^2\|F\|^2 = K(z,z)\|F\|^2.$$

Para ver que $K(z,z)$ es la constante óptima que buscamos en el punto 5, tomemos $F_z = \phi_z$, $|\phi_z(z)|^2 = [K(z,z)]^2 = \|\phi_z\|^2\|\phi_z\|^2$, dicha función es la que hace que la igualdad se cumpla en el punto 5 del teorema.

Por último, para el punto 6 notemos que si $\phi_z(\cdot)$ está en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ y para cualquier función $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ se satisface que

$$F(z) = \langle \phi_z, F\rangle,$$

entonces

$$\langle \phi_z, F\rangle = \langle \overline{K(z,\cdot)}, F\rangle$$

implicando que

$$\langle \overline{K(z,\cdot)} - \phi_z, F\rangle = 0,\ \forall F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha).$$

Como $\overline{K(z,\cdot)}$ y ϕ_z están en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ podemos tomar

$$F = \overline{K(z,\cdot)} - \phi_z,$$

lo cual muestra que $\overline{K(z,\cdot)} - \phi_z = 0$. Y por tanto, $\phi_z(w) = \overline{K(z,w)}$. ■

Teorema 1.1.3 (Theorem 2.4, [2]) *Sea $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Entonces para cualesquiera $z, w \in U$*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |e_j(z)\overline{e_j(w)}| < \infty$$

y

$$K(z,w) = \sum_{j\in\mathbb{N}} e_j(z)\overline{e_j(w)}.$$

Demostración:

Sea $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ y sean $f, g \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Consideremos las sucesiones $\{|\langle f, e_j\rangle|\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{|\langle g, e_j\rangle|\}_{j\in\mathbb{N}}$, por el Teorema de Parseval tenemos que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle f, e_j\rangle|^2 = \|f\|^2_{L^2},$$

análogo para g, $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle g, e_j\rangle|^2 = \|g\|^2_{L^2}$. Por tanto las sucesiones$\{|\langle f, e_j\rangle|\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $\{|\langle g, e_j\rangle|\}_{j\in\mathbb{N}}$ pertenecen al espacio de sucesiones l^2. Luego, por la desigualdad de Hölder, tenemos que la sucesión $\{|\langle f, e_j\rangle||\langle g, e_j\rangle|\}_{j\in\mathbb{N}} \in l^1$ y también se cumple la desigualdad

$$\||\langle f, e_j\rangle||\langle e_j, g\rangle|\|_{l^1} \leq \||\langle f, e_j\rangle|\|_{l^2}\||\langle e_j, g\rangle|\|_{l^2} = \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Es decir, tenemos que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle f, e_j\rangle\langle e_j, g\rangle| \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Luego, tomando $f = \phi_z$ y $g = \phi_w$ tenemos que $\langle \phi_z, e_j \rangle = e_j(z)$ y $\langle \phi_w, e_j \rangle = e_j(w)$ y por tanto

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |e_j(z)\overline{e_j(w)}| \leq \|\phi_z\|\|\phi_w\| < \infty.$$

Así la suma es absolutamente convergente para cada z y w.

Antes de encontrar la fórmula para el núcleo reproductor probaremos que las sumas parciales $s_k(w) = \sum_{j=0}^{k} e_j(z)\overline{e_j(w)}$ las cuales son elementos del subespacio $\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$, convergen a la serie $S(w) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(z)\overline{e_j(w)}$ en $L^2(U, \alpha)$. Entonces,

$$\|S - s_k\|_{L^2} = \| \sum_{j=k+1}^{\infty} e_j(z)\overline{e_j(w)}\|_{L^2} = \| \sum_{j=k+1}^{\infty} \langle \phi_z, e_j \rangle e_j\|_{L^2} \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Pasemos ahora a probar la fórmula que nos dice cómo encontrar el núcleo reproductor K. Sea $F \in \mathcal{H}L^2(U, \alpha)$, F es la suma de las proyecciones sobre los elementos de la base ortonormal $\{e_j\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
F(z) &= \langle \phi_z, F \rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle \phi_z, e_j \rangle \langle e_j, F \rangle \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} e_j(z) \int_U \overline{e_j(w)} F(w)\alpha(w)dw = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} e_j(z) \int_U \overline{e_j(w)} F(w)\alpha(w)dw \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_U \left[\sum_{j=0}^{k} e_j(z)\overline{e_j(w)} \right] F(w)\alpha(w)dw = \lim_{k\to\infty} \langle \overline{s_k}, F \rangle = \langle \lim_{k\to\infty} \overline{s_k}, F \rangle = \langle \overline{S}, F \rangle.
\end{aligned}$$

En la primera línea hemos usado la propiedad básica de los ϕ_z's y el teorema de Parseval. En la segunda, usamos la propiedad básica de ϕ_z al evaluar $\langle \phi_z, e_j \rangle$ y haber escrito $\langle e_j, F \rangle$ como una integral, además de escribir la serie como un límite. En la tercera línea hemos intercambiado la suma y la integral ya que la suma es finita, también se pasa a considerar a $e_j(z)$ en el integrando, luego escribimos la integral como el producto interno que representa y finalmente, ya que el producto interno en L^2 es continuo, se ha intercambiado con el límite. Y por tanto hemos obtenido que

$$F(z) = \int_U S(w)F(w)\alpha(w)dw.$$

Así, utilizando el punto 6 del teorema (1.1.2) concluimos que

$$K(z, w) = S(w) = \sum_{j\in\mathbb{N}} e_j(z)\overline{e_j(w)}$$

como se quería probar. ■

Observación 1.1.2 *Cabe aclarar que en la mayoría de las ocasiones, ésta fórmula para el núcleo reproductor no es especialmente útil pues usualmente no se puede encontrar una expresión explícita para alguna base ortonormal, e incluso si pudieramos encontrar esa base, probablemente no podríamos calcular la suma. Sin embargo, es importante mencionar cómo podríamos obtener el núcleo reproductor en algunos espacios de funciones, pues éste juega un papel de gran relevancia en la teoría ya que justamente nos reproduce nuestro espacio en cuestión.*

1.2. Ejemplos

En las siguientes líneas mencionaremos un par de ejemplos de espacios de funciones holomorfas mostrando también cómo aplicar la fórmula obtenida en el teorema (1.1.2) para calcular el núcleo reproductor de dichos espacios. En esta parte, se representan los ejemplos de [2], sección 3, para ser más explícitos las secciones 3.1 y 3.2.

1.2.1. Espacios de Bergman

Definición 1.2.1 *Los espacios de Bergman con peso son los espacios de funciones holomorfas*

$$\mathcal{H}L^2(\mathbb{D},\ (1-|z|^2)^a), \quad a > -1,$$

en donde $\mathbb{D}$ *denota al disco unitario complejo*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

La restricción $a > -1$ nos indica en este caso que nuestro espacio no es el espacio nulo, ya que la medida $(1-|z|^2)^a dz$ es finita si y sólo si $a > -1$, pues la integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^a dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)^a r dr d\theta = \lim_{s\to 1} 2\pi \int_0^s (1-r^2)^a r dr = \lim_{s\to 1} -\pi \int_1^{1-s^2} u^a du \\
&= \lim_{s\to 1} -\pi \left.\frac{u^{a+1}}{a+1}\right|_1^{1-s^2} = \frac{-\pi}{a+1}\lim_{s\to 1}((1-s^2)^{a+1} - 1^{a+1}) \\
&= \frac{-\pi}{a+1}\lim_{s\to 1}((1-s^2)^{a+1} - 1),
\end{aligned}$$

es divergente si $a+1<0$ y es 0 si $a+1>0$.

Calcularemos el núcleo reproductor para los espacios de Bergman justo cuando $a = 0$, en este caso el espacio es llamado *espacio de Bergman estándar* y lo denotaremos por $\mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$ en donde se entiende que la función constante 1 es el peso para este espacio.

Afirmación 1.2.1 $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una base ortogonal para* $\mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$.

Demostración: Primero probaremos la ortogonalidad, calculando la integral en coordenadas polares

$$\begin{aligned}
\langle z^n, z^m\rangle &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^n e^{-in\theta} r^m e^{im\theta} r dr d\theta \\
&= \int_0^1 r^{n+m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} dr d\theta \\
&= 0 \quad (n \neq m)
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que los z^n's generan un subespacio denso de $\mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$. Para esto, es suficiente mostrar que si $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$ y $\langle z^n, F\rangle = 0$ para todo n, entonces $F = 0$.

Entonces consideremos $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$ y sea

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{1.8}$$

su expansión en serie de potencias. Ésta serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Ahora, calculamos

$$\langle z^m, F\rangle = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^m e^{-im\theta} F(re^{i\theta}) r dr d\theta = \lim_{a\to 1} \int_0^a \int_0^{2\pi} r^m e^{-im\theta} F(re^{i\theta}) r dr d\theta.$$

Sustituyendo $F(z)$ dada por (1.8), la cual converge uniformemente en el conjunto $r \leq a$, podemos intercambiar la suma y la integral para tener así

$$\langle z^m, F\rangle = \lim_{a\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a \int_0^{2\pi} r^m e^{-im\theta} c_n r^n e^{in\theta} r dr d\theta = \lim_{a\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^a r^{n+m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta dr.$$

Pero la integral respecto θ es cero excepto cuando $n = m$. Así solamente hay un término que aporta a la suma, y podemos entonces hacer tender a a 1 y obtener

$$\langle z^m, F\rangle = 2\pi c_m \int_0^1 r^{2m+1} dr = 2\pi c_m \frac{1}{2m+2} = \frac{\pi c_m}{m+1}.$$

Así si $\langle z^m, F\rangle = 0$ para todo m, entonces $c_m = 0$ para todo m, en tal caso F es idénticamente cero. Por tanto, $\{z^n\}$ es una base ortogonal para $\mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$. ■

Ahora que hemos obtenido una base ortogonal calculemos la norma para cada elemento de la base, esta viene dada por

$$\|z^n\|^2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2n} r dr d\theta = 2\pi \frac{1}{2n+2} = \frac{\pi}{n+1}.$$

Así, normalizando, obtenemos que

$$\left\{ z^n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

es una base ortonormal para $\mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$.

Ahora si, calculemos el núcleo reproductor. De acuerdo al teorema (1.1.3), tenemos

$$\begin{aligned} K(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \overline{w}^n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} && (1.9) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z\overline{w})^n. && (1.10) \end{aligned}$$

Sea $\xi \in \mathbb{D}$, consideremos la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = \frac{1}{1-\xi}.$$

De análisis complejo sabemos que esta serie es una función analítica definida en $\mathbb{D}$, y por lo que sabemos de diferenciación de series de potencias podemos afirmar que

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\xi^n.$$

Entonces, si definimos $f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\xi^n$, tenemos que

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n\xi^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{d\xi}\xi^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{d\xi}\xi^n = \frac{d}{d\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n.$$

Así,

$$f(\xi) = \frac{d}{d\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n = \frac{d}{d\xi}\frac{1}{1-\xi} = \frac{1}{(1-\xi)^2}.$$

Luego, utilizando (1.10), $K(z,w) = f(z\overline{w})/\pi$. Por tanto, tenemos la siguiente

Conclusión 1.2.1 (Conclusion 3.2, [2]) *El núcleo reproductor para el espacio de Bergman estándar está dado por*

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}.$$

En particular,

$$|F(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi(1-|z|^2)^2}\|F\|^2,$$

para toda $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{D})$ y todo $z \in \mathbb{D}$.

1.2.2. Espacios de Segal-Bargmann

En ésta sección, como el título lo sugiere, se dará la definición de espacio de Segal-Bargmann así como también su correspondiente núcleo reproductor vía el teorema (1.1.3), es decir, dada una base ortonormal entonces podremos calcular explícitamente el núcleo reproductor. Recordemos que no en todos los espacios de funciones se podrá hacerlo así, es una característica que posee el espacio de Segal-Bargmann. En secciones posteriores mostraremos cómo obtener éste espacio de funciones holomorfas primero siguiendo la idea de V. Bargmann y después utilizando el programa de cuantización geométrica.

Definición 1.2.2 *Los espacios de Segal-Bargmann son los espacios de funciones holomorfas*

$$\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d,\ \mu_t),$$

donde

$$\mu_t(z) = (\pi t)^{-d}e^{-|z|^2/t}.$$

Aquí $|z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_d|^2$ y t es un número positivo.

Al igual que en el espacio de Bergman estándar, calcularemos el núcleo reproductor para el espacio de Segal-Bargmann. Consideremos primero el caso cuando $d = 1$.

Afirmación 1.2.2 $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una base ortogonal para el espacio de Segal-Bargmann.*

Demostración: Calculemos el producto interno en coordenadas polares

$$\begin{aligned}\langle z^n, z^m\rangle &= (\pi t)^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^n e^{-in\theta} r^m e^{im\theta} e^{-r^2/t} r dr d\theta \\ &= (\pi t)^{-1}\int_0^{\infty} r^{n+m+1} e^{-r^2/t}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta dr \\ &= 0 \quad (n \neq m)\end{aligned}$$

De manera análoga que en el Espacio de Bergman estándar, podemos ver que $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generan un subespacio denso del espacio de Segal-Bargmann. ■

Ya que tenemos que el conjunto propuesto forma una base ortogonal, solo basta normalizar. Comprobemos por inducción sobre n, que $\|z^n\|^2 = n!t^n$. Para $n = 0$, tenemos que $\|z^0\|^2 = 1$, pues

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} (1)^2 \mu_t(z) dz &= \frac{1}{\pi t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/t} r dr d\theta \\ &= \frac{2\pi}{\pi t}\left(-\frac{t}{2}\right)\lim_{A\to\infty} e^{-r^2/t}\Big|_0^A \\ &= -\lim_{A\to\infty}\left[e^{-A^2/2} - 1\right] = 1.\end{aligned}$$

Ahora calculemos la norma de z^n para cuando $n > 0$, suponiendo que para $n-1$ se satisface que $\|z^{n-1}\|^2 = (n-1)!t^{n-1}$. Usando de nuevo coordenadas polares

$$\|z^n\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |z^n|^2 \mu_t(z) dz = \frac{1}{\pi t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/t} r^{2n+1} dr d\theta = \frac{2}{t}\int_0^{\infty} r^{2n}(e^{-r^2/t} r) dr.$$

Integrando por partes tenemos

$$\|z^n\|^2 = -\frac{2}{t}\int_0^{\infty} (2nr^{2n-1})\left(-\frac{t}{2}e^{-r^2/t}\right) dr = \frac{2}{t}(nt)\int_0^{\infty} e^{-r^2/t} r^{2(n-1)+1} dr = nt\|z^{n-1}\|^2.$$

Entonces, usando la hipótesis de inducción podemos concluir que

$$\|z^n\|^2 = n!t^n,$$

y así

$$\left\{\frac{z^n}{\sqrt{n!t^n}}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

es una base ortonormal para $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, \mu_t)$.

Ahora calculemos el núcleo reproductor para éste espacio de funciones,

$$\begin{aligned}K(z,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!t^n}} \frac{\overline{w^n}}{\sqrt{n!t^n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{z\overline{w}}{t}\right)^n = e^{z\overline{w}/t}.\end{aligned}$$

Así hemos calculado el núcleo reproductor explícitamente para el caso $d = 1$. Para el caso general tenemos el siguiente resultado

Teorema 1.2.1 (Theorem 3.4, [2]) *Para todo $d \geq 1$, el núcleo reproductor para el espacio $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$ está dado por*

$$K(z,w) = e^{z\cdot\overline{w}/t},$$

en donde $z \cdot \overline{w} = z_1 \cdot \overline{w}_1 + \cdots + z_d \cdot \overline{w}_d$. En particular, tenemos la acotación puntual

$$|F(z)|^2 \leq e^{|z|^2/t}\|F\|^2$$

para toda $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$ y todo $z \in \mathbb{C}^d$.

Demostración: Para el caso general notemos que $\overline{K(z,w)}$, con K dado como en el teorema, es ciertamente holomorfa y de cuadrado integrable respecto a μ_t como una función de w para cada z fijo.
Sea $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$. Notemos que $\int_{\mathbb{C}^d} e^{z\cdot\overline{w}/t}F(w)\mu_t(w)dw$ se puede escribir como

$$\int_{\mathbb{C}^d} e^{z\cdot\overline{w}/t}F(w)\mu_t(w)dw = \int_{\mathbb{C}} \cdots \int_{\mathbb{C}} e^{z_1\overline{w}_d/t} \cdots e^{z_d\overline{w}_d}F(w_1,\ldots,w_d)\frac{dw_1}{\pi t}\cdots\frac{dw_d}{\pi t}.$$

Dado que $F(w_1,\ldots,w_d)$ es holomorfa en cada variable w_i considerando las restantes $w_j, \quad j \neq i$ como variables fijas, y previsto que F es de cuadrado integrable respecto a $(\pi t)^{-1}e^{-|w_i|^2/t}dw_i$ con respecto a cada w_i, con las otras variables fijas, podemos aplicar el resultado unidimensional d veces y así obtener

$$\int_{\mathbb{C}^d} e^{z\cdot\overline{w}/t}F(w)\mu_t(w)dw = F(z_1,\ldots,z_d).$$

Luego por el punto 6 del teorema (1.1.2) concluímos que

$$K(z,w) = e^{z\cdot\overline{w}/t}.$$

■

1.3. Equivalencia holomorfa

En esta breve sección definiremos el concepto de equivalencia holomorfa entre espacios de funciones holomorfas así como también mencionaremos un caso particular que involucra al espacio de Segal-Bargmann. La definición de equivalencia holomorfa aquí expuesta, se encuentra dada en [2], sección 4.3.
Consideremos al espacio de funciones holomorfas $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, donde U y α son como en las secciones anteriores. Sea ϕ una función holomorfa cero en ninguna parte en U. Entonces

$$\int_U |F(z)|^2\alpha(z)dz = \int_U |\phi(z)F(z)|^2\frac{1}{|\phi(z)|^2}\alpha(z)dz.$$

Más formalmente, sea M el mapeo definido por

$$\begin{aligned} M : \mathcal{H}L^2(U,\alpha) &\to \mathcal{H}L^2(U,\alpha/|\phi|^2) \\ F(z) &\mapsto \phi(z)F(z). \end{aligned}$$

Sea $G \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha/|\phi|^2)$, calculando su norma obtenemos que

$$\infty > \|G\|^2_{\alpha/|\phi|^2} = \int_U |G(z)|^2\frac{\alpha(z)}{|\phi(z)|^2}dz = \int_U \left|\frac{G(z)}{\phi(z)}\right|^2\alpha(z)dz = \left|\left|\frac{G}{\phi}\right|\right|^2_\alpha.$$

Entonces $\frac{G}{\phi} \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, por tanto $\frac{G}{\phi} = F$ para alguna función $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Así, $G(z) = F(z)\phi(z) = MF(z)$, para alguna $F \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ concluyendo entonces que M es un mapeo sobreyectivo.

Consideremos ahora a las funciones F y G en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ tenemos[1]

$$\begin{aligned}\langle MF, MG\rangle_{\frac{\alpha}{|\phi|^2}} &= \langle \phi F, \phi G\rangle_{\frac{\alpha}{|\phi|^2}} = \int_U \overline{\phi(z)F(z)}\phi(z)G(z)\frac{\alpha(z)}{|\phi(z)|^2}dz \\ &= \int_U |\phi(z)|^2\overline{F(z)}G(z)\frac{\alpha(z)}{|\phi(z)|^2}dz = \int_U \overline{F(z)}G(z)\alpha(z)dz \\ &= \langle F, G\rangle_\alpha\end{aligned}$$

Así, el mapeo $F \mapsto \phi F$ es un mapeo unitario del espacio $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ sobre $\mathcal{H}L^2(U,\alpha/|\phi|^2)$, cuyo mapeo inverso es el mapeo $G \mapsto \frac{1}{\phi}G$.

Definición 1.3.1 *Los espacios de funciones holomorfas $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ y $\mathcal{H}L^2(U,\beta)$ se dicen **equivalentemente holomorfos** si existe una función ϕ holomorfa cero en ninguna parte en U tal que*

$$\beta(z) = \frac{\alpha(z)}{|\phi(z)|^2}, \quad \forall z \in U.$$

La equivalencia holomorfa entre $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ y $\mathcal{H}L^2(U,\beta)$ es el mapeo unitario dado por $F \mapsto \phi F$.

Así por ejemplo tenemos que los espacios $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_{2\hbar})$ y $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \nu_\hbar)$ son equivalentemente holomorfos, en donde

$$\nu_\hbar(z) = (\pi\hbar)^{-d/2}e^{-(Im\ z)^2/\hbar} \tag{1.11}$$

y $\hbar$ es la constante de Planck, la cual es una constante positiva y de la cual (por cuestiones de contexto) hablaremos en el siguiente capítulo.

Veamos, definamos el mapeo $U_\hbar$ como sigue

$$\begin{aligned} U_\hbar : \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_{2\hbar}) &\rightarrow \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \nu_\hbar) \\ F &\mapsto \phi F, \end{aligned}$$

en donde $\phi(z) = (4\pi\hbar)^{-d/4}e^{-z^2/4\hbar}$ y $z^2 = z_1^2 + \cdots + z_d^2$. Notemos que ϕ como función de z es una función holomorfa. Para ver que $U_\hbar$ es un mapeo unitario, basta probar que

$$\nu_\hbar = \frac{\mu_{2\hbar}}{|\phi|^2}.$$

Veamos,

$$\begin{aligned}\frac{\mu_{2\hbar}(z)}{|\phi(z)|^2} &= \frac{(2\pi\hbar)^{-d}e^{-|z|^2/2\hbar}}{|(4\pi\hbar)^{-d/4}e^{-z^2/4\hbar}|^2} = (\pi\hbar)^{-d/2}\frac{e^{-\frac{x^2+p^2}{2\hbar}}}{|e^{\frac{-x^2+p^2-2ixp}{2\hbar}}|} \\ &= (\pi\hbar)^{-d/2}e^{-\frac{x^2+p^2}{2\hbar}+\frac{x^2-p^2}{2\hbar}} = (\pi\hbar)^{-d/2}e^{-\frac{p^2}{\hbar}} = \nu_\hbar(z).\end{aligned}$$

Por tanto, los espacios $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \mu_{2\hbar})$ y $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \nu_\hbar)$ son equivalente holomorfos.

[1]El subíndice que aparece junto al producto interno hace referencia a la medida respecto a la cual se esta considerando el producto, así por ejemplo $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ hace referencia al producto interno en el espacio $\mathcal{H}L^2(U,\rho)$. O bien, siendo más explícitos, cuando no indiquemos la medida, se indicará en qué espacio de funciones se está realizando el producto, por ejemplo, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(U,\rho)}$ indica que el producto se lleva a cabo en funciones del espacio $L^2(U,\rho)$.

CAPÍTULO 2

Transformada de Segal-Bargmann

En el capítulo anterior definimos los objetos con los cuales estaremos trabajando y mencionamos algunas de sus propiedades tales como ser espacios de Hilbert, poseer núcleo reproductor y equivalencia holomorfa.

En este apartado, empezaremos por definir los operadores de posición y momento, para luego definir las relaciones de conmutación canónicas. De hecho, en general nos encontraremos con operadores posiblemente no acotados en un espacio Hilbert H. Por cuestiones de dominio, presentaremos de manera informal el teorema de Stone-von Neumann el cual nos garantizará la existencia de algún operador unitario entre el espacio de Hilbert H y el espacio $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Mejorando en cuanto a cuestiones de dominio, definiremos las relaciones de conmutación canónicas exponenciadas y enunciaremos inmediatamente el teorema de Stone-von Neumann en la forma correcta pues en éste queda justficada la existencia del operador unitario que nos definirá a la transformada de Segal-Bargmann. En lo que resta del capítulo presentaremos la transformada de Segal-Bargmann en varias formas, en su forma clásica denotada por $A_\hbar$; en la forma asociada con la transformación de estado base y denotada por $B_\hbar$; y finalmente en su forma invariante, la cual representamos por $C_\hbar$.

2.1. Relaciones de conmutación canónicas

Para el desarrollo de esta sección seguimos reproduciendo la referencia [[2], sección 5], complementando con referencias de [3] tal y como se indicará en cada caso. Consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)$, y los operadores lineales (no acotados) definidos en éste espacio, denotados por $\hat{x}$ y $\hat{p}$ y definidos por

$$\begin{array}{rcl} \hat{x} & = & xf(x) \\ \hat{p} & = & -i\hbar\frac{df}{dx}. \end{array} \tag{2.1}$$

A los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ se les conoce como **operadores de posición** y **momento**, respectivamente. Hacemos las siguientes observaciones:

- Puesto que las funciones pertencientes a $L^2(\mathbb{R}, dx)$ no son necesariamente diferenciables y $xf(x)$ podría no pertenecer a $L^2(\mathbb{R}, dx)$, $\hat{x}$ y $\hat{p}$ están definidos en subespacios densos de L^2.

- La siguiente observación se presenta en el corolario 9.31 de [3].

Corolario 2.1.1 *El operador $\hat{x}$ es autoadjunto en el dominio*

$$Dom(\hat{x}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}, dx) | xf(x) \in L^2(\mathbb{R}, dx)\}.$$

Dicho dominio es un subconjunto denso de $L^2(\mathbb{R}, dx)$

- Respecto al operador $\hat{p}$, tenemos el resultado presentado en la proposición 9.29 de [3].

Proposición 2.1.1 *Sea $\hat{p}$ el operador densamente definido con dominio $Dom(\hat{p}) = C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}, dx)$. Entonces $\hat{p}$ es esencialmente autoadjunto.*

- Respecto al conmutador de los operadores, veamos efectivamente que no conmutan y que de hecho $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I$, donde I es el operador identidad. Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{p}]f &= \hat{x}(\hat{p}(f)) - \hat{p}(\hat{x}(f)) \\
&= \hat{x}\left(-i\hbar\frac{df}{fx}\right) - \hat{p}(xf(x)) \\
&= -i\hbar x\frac{df}{fx} + i\hbar\left(f(x) + x\frac{df}{fx}\right) \\
&= i\hbar f(x),
\end{aligned}$$

por tanto

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I.$$

Luego, generalizando a n dimensiones, para $n \geq 1$, definimos

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k f(x) &= x_k f(x) \\
\hat{p}_k f(x) &= -i\hbar\frac{\partial f}{\partial x_k},
\end{aligned}$$

con $k = 1, 2, \ldots, n$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Análogo al caso unidimensional, en el corolario 9.31 y en la proposición 9.32 de [3] se establecen los dominios en los cuales los operadores de posisición y de momentos son autoadjuntos. Vemos también que para éstos operadores se cumplen las **relaciones de conmutación canónicas**

$$[\hat{x}_k, \hat{x}_l] = 0$$

$$[\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0$$

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{k,l}I$$

en donde $\delta_{k,l}$ se entiende como la delta de Kronecker. Y por supuesto $[\hat{p_l}, \hat{x_k}] = -i\hbar\delta_{k,l}I$. Usualmente se acostumbra escribir solamente la última relación para indicar las relaciones de conmutación canónicas y se denotarán a lo largo del texto por R. C. C.

A continuación vamos a reescribir las R. C. C. en términos de los operadores de creación y aniquilación definidos por

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{\hat{x}_k + i\hat{p}_k}{\sqrt{2}} \\
a_k^\dagger &= \frac{\hat{x}_k - i\hat{p}_k}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

Ya que $\hat{x}_k$ y $\hat{p}_k$ son simétricos en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tenemos lo siguiente. Sean $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$
\begin{aligned}
\langle a_k f, g\rangle &= \left\langle \frac{\hat{x}_k + i\hat{p}_k}{\sqrt{2}} f, g \right\rangle = \overline{\left\langle g, \frac{\hat{x}_k + i\hat{p}_k}{\sqrt{2}} f \right\rangle} \\
&= \overline{\left\langle g, \frac{\hat{x}_k}{\sqrt{2}} f \right\rangle} + -i\, \overline{\left\langle g, \frac{\hat{p}_k}{\sqrt{2}} f \right\rangle} \\
&= \left\langle f, \frac{\hat{x}_k}{\sqrt{2}} g \right\rangle + \left\langle f, -i\frac{\hat{p}_k}{\sqrt{2}} g \right\rangle \\
&= \left\langle f, \frac{\hat{x}_k - i\hat{p}_k}{\sqrt{2}} g \right\rangle \\
&= \langle f, a_k^\dagger g\rangle,
\end{aligned}
$$

Y por tanto, $a_k^\dagger \subset a_k^*$, en donde a_k^* denota el adjunto de a_k.

Guiándonos por [17], podemos llegar a probar que $a_k^\dagger = a_k^*$. Sin embargo, la prueba esta fuera del objetivo que perseguimos desarrollar en este proyecto.

De igual manera se puede calcular el conmutador de éstos operadores,

$$
\begin{aligned}
[a_k, a_l] &= \frac{1}{2}[\hat{x}_k + i\hat{p}_k, \hat{x}_l + i\hat{p}_l] \\
&= \frac{1}{2}([\hat{x}_k, \hat{x}_l] + i[\hat{x}_k, \hat{p}_l] + i[\hat{p}_k, \hat{x}_l] - [\hat{p}_k, \hat{p}_l]) \\
&= \frac{1}{2}(i(i\hbar\delta_{k,l}I) + i(-i\hbar\delta_{k,l}I)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Análogo para $[a_k^\dagger, a_l^\dagger]$. Y finalmente,

$$
\begin{aligned}
[a_k, a_l^\dagger] &= \frac{1}{2}[\hat{x}_k + i\hat{p}_k, \hat{x}_l - i\hat{p}_l] \\
&= \frac{1}{2}([\hat{x}_k, \hat{x}_l] - i[\hat{x}_k, \hat{p}_l] + i[\hat{p}_k, \hat{x}_l] + [\hat{p}_k, \hat{p}_l]) \\
&= \frac{1}{2}(2\hbar\delta_{k,l}I) \\
&= \hbar\delta_{k,l}I.
\end{aligned}
$$

Así, las R. C. C. quedan representadas de la siguiente manera

$$
\begin{gathered}
[a_k, a_l] = 0 \\
[a_k^\dagger, a_l^\dagger] = 0 \\
[a_k, a_l^\dagger] = \hbar\delta_{k,l}I,
\end{gathered}
$$

recordando que para referirnos a ellas escribiremos solamente la última relación.

La siguiente afirmación dada en [[2], Claim 5.1], nos dice que salvo equivalencia unitaria existe solamente una representación irreducible de las R. C. C.. ¿Por qué es importante éste resultado? Porque, como se verá más adelante, en mecánica cuántica nos ayuda a justificar el uso del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ y de los operadores de posición y momento; ya que si se tiene cualquier otro espacio de Hilbert con operadores satisfaciendo las R. C. C. (e irreducibilidad), lo que tendríamos es que éste podría ser unitariamente equivalente al espacio $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ por la manera en que se relacionan dichos operadores, mejor dicho, por la forma en que son transformados a los operadores de aniquilación y creación. Hay que notar que no se harán suposiciones más fuertes respecto a los operadores implicados, y por eso es que por el momento el resultado lo presentamos como afirmación, sin embargo es posible dar la forma correcta del teorema sin tener problemas tanto con el dominio como con el contradominio involucrados.

Afirmación 2.1.1 *[Teorema de Stone-von Neumann.] Sea H un espacio de Hilbert, sean $b_1, \ \ldots, \ b_n$ operadores (posiblemente no acotados) en H y sean $b_1^*, \ \ldots, \ b_n^*$ los adjuntos de los operadores $b_1, \ \ldots, \ b_n$, respectivamente. Supongamos que*

1. *(R. C. C.) Para todo k, l, $[b_k, b_l] = [b_k^*, b_l^*] = 0$ y $[b_k, b_l^*] = \hbar \delta_{k,l} I$.*
2. *(Irreducibiliad) Si V es un subespacio cerrado de H el cual es invariante bajo b_k y b_k^*, en donde $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces $V = \{0\}$ ó $V = H$.*

Entonces existe un mapeo unitario (salvo alguna constante de módulo 1) $U : H \to L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ tal que

$$\begin{aligned} U b_k U^{-1} &= \frac{\hat{x}_k + i\hat{p}_k}{\sqrt{2}} \\ U b_k^* U^{-1} &= \frac{\hat{x}_k - i\hat{p}_k}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

donde $\hat{x}_k$ y $\hat{p}_k$ son los operadores de posición y momento definidos anteriormente.

Para obtener la forma correcta del Teorema de Stone-von Neumann necesitamos considerar los operadores exponenciados, los cuales sin problema alguno en sus dominios, son acotados. Sean una vez más los operadores de posición $\hat{x}$ y momento $\hat{p}$, y consideremos los operadores unitarios $e^{is\hat{x}_k/\hbar}$ y $e^{it\hat{p}_k/\hbar}$ definidos en todas partes para cada s y cada t en $\mathbb{R}$ y $k = 1, 2, \ldots, n$. Éstos operadores pueden ser calculados como

$$e^{ir\hat{x}_k/\hbar} f(x) = e^{irx_k/\hbar} f(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

$$e^{is\hat{p}_l/\hbar} f(x) = f(x_1, \ \ldots, \ x_{l-1}, x_l + s, \ x_{l+1}, \ \ldots, \ x_n), \quad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Veamos cuáles relaciones de conmutación satisfacen éstos operadores exponenciados. Considerando $n = 1$, para cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ notamos que

$$\begin{aligned} e^{ir\hat{x}/\hbar} e^{is\hat{p}/\hbar} f(x) &= e^{ir\hat{x}/\hbar} f(x+s) = e^{irx\hbar} f(x+s) \\ e^{is\hat{p}/\hbar} e^{ir\hat{x}/\hbar} f(x) &= e^{is\hat{p}/\hbar} (e^{irx/\hbar} f(x)) \\ &= e^{ir(x+s)/\hbar} f(x+s) \\ &= e^{irs/\hbar} e^{irx/\hbar} f(x+s) \\ &= e^{irs/\hbar} e^{ir\hat{x}/\hbar} e^{is\hat{p}/\hbar} f(x), \end{aligned}$$

Así, la relación que finalmente obtuvimos fue

$$e^{ir\hat{x}/\hbar} e^{is\hat{p}/\hbar} = e^{-irs/\hbar} e^{is\hat{p}/\hbar} e^{ir\hat{x}/\hbar}.$$

De manera general en n dimensiones las R. C. C. se obtienen de la siguiente manera

Afirmación 2.1.2 *Sean $r, s \in \mathbb{R}$ y $k, l \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Sean también los operadores $\hat{x}_j$ y $\hat{p}_j$, $j = 1, \ldots, n$ los operadores de posición y momento definidos anteriormente. Entonces se tienen las siguientes relaciones para los operadores exponenciados*

1. $e^{ir\hat{x}_k/\hbar}e^{is\hat{x}_l/\hbar} = e^{is\hat{x}_l/\hbar}e^{ir\hat{x}_k/\hbar}$.
2. $e^{ir\hat{p}_k/\hbar}e^{is\hat{p}_l/\hbar} = e^{is\hat{p}_l/\hbar}e^{ir\hat{p}_k/\hbar}$.
3. $e^{ir\hat{x}_k/\hbar}e^{is\hat{p}_l/\hbar} = e^{-irs\delta_{k,l}/\hbar}e^{is\hat{p}_l/\hbar}e^{ir\hat{x}_k/\hbar}$.

Dichas relaciones nos dan la forma exponenciada de las R. C. C..

Demostración: Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Para el punto 1 tenemos,

$$\begin{aligned} e^{ir\hat{x}_k/\hbar}e^{is\hat{x}_l/\hbar}f(x) &= e^{ir\hat{x}_k/\hbar}e^{isx_l/\hbar}f(x) \\ &= e^{irx_k/\hbar+isx_l/\hbar}f(x) \\ &= e^{i(rx_k+sx_l)/\hbar}f(x) \\ &= e^{isx_l/\hbar}e^{ir\hat{x}_k/\hbar}f(x) \\ &= e^{is\hat{x}_l/\hbar}e^{ir\hat{x}_k/\hbar}f(x). \end{aligned}$$

Mientras que para el punto 2,

$$\begin{aligned} e^{ir\hat{p}_k/\hbar}e^{is\hat{p}_l/\hbar}f(x) &= e^{ir\hat{p}_k/\hbar}f(x_1,\ \ldots,\ x_{l-1}, x_l+s, x_{l+1}, \ldots, x_d) \\ &= f(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l+s, x_{l+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k+r, x_{k+1}, \ldots, x_d) \\ &= e^{is\hat{p}_l/\hbar}e^{ir\hat{p}_k/\hbar}f(x). \end{aligned}$$

Y finalmente vemos que por una parte si $l = k$

$$\begin{aligned} e^{is\hat{p}_l/\hbar}e^{ir\hat{x}_k/\hbar}f(x) &= e^{is\hat{p}_l/\hbar}(e^{irx_k/\hbar}f(x)) = e^{ir(x_l+s)/\hbar}f(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l+s, x_{l+1}, \ldots, x_n) \\ &= e^{irs/\hbar}e^{irx_k/\hbar}f(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l+s, x_{l+1}, \ldots, x_n) = e^{irs/\hbar}e^{ir\hat{x}_k/\hbar}e^{is\hat{p}_l/\hbar}f(x). \end{aligned}$$

Mientras que si $l \neq k$,

$$e^{is\hat{p}_l/\hbar}e^{ir\hat{x}_k/\hbar}f(x) = e^{is\hat{p}_l/\hbar}(e^{irx_k/\hbar}f(x)) = e^{irx_k/\hbar}f(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l+s, x_{l+1}, \ldots, x_n) = e^{ir\hat{x}_k/\hbar}e^{is\hat{p}_l/\hbar}f(x).$$

Por tanto, se satisface la conclusión del punto 3. ■

En [3] capítulo 14, se da una exposición del Teorema de Stone-von Neumann el cual enunciaremos a continuación en su forma correcta ya que hemos desarrollado las R. C. C. exponenciadas.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Stone-von Neumann.) *[[2], Theorem 5.2.] Supongamos que A_j y B_j, con $j = 1, \ldots, n$, son operadores autoadjuntos (posiblemente no acotados) en un espacio de Hilbert H satisfaciendo:*

1. *(R. C. C.) Para todo $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y para todo $r, s \in \mathbb{R}$, $e^{irA_k/\hbar}$ conmuta con $e^{isA_l/\hbar}$, $e^{irB_k/\hbar}$ conmuta con $e^{isB_l/\hbar}$, y*
$$e^{irA_k/\hbar}e^{isB_l/\hbar} = e^{-irs\delta_{k,l}/\hbar}e^{isB_l/\hbar}e^{irA_k/\hbar}.$$
2. *(Irreducibilidad) Si V es un subespacio cerrado de H invariante bajo $e^{irA_k/\hbar}$ y $e^{isB_l/\hbar}$ para todo $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y para todo $r, s \in \mathbb{R}$, entonces $V = \{0\}$ ó $V = H$.*

Entonces existe un mapeo unitario (único salvo alguna constante) $U : H \to L^2(\mathbb{R}, dx)$ tal que

$$\begin{aligned} Ue^{irA_k/\hbar}U^{-1} &= e^{ir\hat{x}_k/\hbar}; \\ Ue^{isB_l/\hbar}U^{-1} &= e^{is\hat{p}_l/\hbar}, \end{aligned}$$

en donde se entiende que $\hat{x}_k$ y $\hat{p}_l$ son los operadores definidos en los párrafos anteriores.

2.2. Transformada de Segal-Bargmann

El hecho de haber introducido las R. C. C. tiene su justificación en que al asumir que se satisfacen para ciertos operadores, además de la condición de irreducibilidad, el Teorema de Stone-von Neumann nos garantiza la existencia de la Transformada de Segal-Bargmann. Antes de mostrar la utilización del Teorema de Stone-von Neumann, mostraremos la obtención de la medida en el espacio de Segal-Bargmann en la manera en la que la concibió Bargmann cerca de los años 1960's.

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ definido como el espacio de funciones holomorfas en $\mathbb{C}^n$ y definamos los operadores $\hat{z}_k$ y $\hat{\pi}_k$ en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{z}_k &= \text{multiplicación por la coordenada } z_k, \\ \hat{\pi}_k &= \hbar\frac{\partial}{\partial z_k}. \end{aligned}$$

para $k = 1, \ldots, n$.

En el año 1928, Fock hizo la siguiente y relevante observación: los operadores $\hat{z}$ y $\hat{\pi}$ "satisfacen" las mismas relaciones de conmutación que los operadores de creación y aniquilación a y $a^\dagger$ definidos en la sección anterior. Y efectivamente si uno realiza el cálculo del conmutador de estos operadores actuando en cualquier función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, uno encuentra que

$$\begin{aligned} \left[\hbar\frac{d}{dz}, z\right] f &= \hbar\frac{d}{dz}(zf(z)) - \hbar z\frac{df}{dz} \\ &= \hbar f(z) + \hbar z\frac{df}{dz} - \hbar z\frac{df}{dz} \\ &= \hbar f(z) \end{aligned}$$

verificando entonces que

$$\left[\hbar\frac{d}{dz}, z\right] = \hbar I,$$

donde I es el operador identidad. Sin embargo, esto todavía no constituye una representación para las R. C. C. (por eso el uso de las comillas en el párrafo anterior), pues para que realmente se tenga esto requerimos que nuestros operadores en consideración, llamémosles b y $b^\dagger$, estén definidos en un espacio de Hilbert, sea uno adjunto del otro y que satisfagan $[b, b^\dagger] = \hbar I$.

Tiempo después Bargmann se avocó a esta tarea buscando un producto interno y con ello un espacio de Hilbert, así como hacer de $\hat{z}$, y $\hat{\pi}$ uno adjunto del otro. Justamente, dicho espacio de Hilbert es el espacio con producto interno definido en el espacio de Segal-Bargmann de la sección 1.2.2 con peso $\mu_\hbar$ y $n = 1$,

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)}g(z)\mu_\hbar(z)dz,$$

con esto último se logra que $\hat{z}$ y $\hat{\pi}$ sean una representación de las R. C. C.

Obtención de la medida $\mu_\hbar$

A continuación reproduciremos el desarrollo mediante el cual, Bargmann [1] obtuvo la medida $\mu_\hbar$ y así justificar por qué los espacios de Segal-Bargmann están definidos tal y como se mencionaron en la sección 1.2.2.

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ definido como el espacio de funciones holomorfas en $\mathbb{C}^n$, el objetivo que perseguimos es dotar a este espacio con un producto interno

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{f(z)}g(z)\mu(z)dz, \tag{2.4}$$

con $dz = dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_n$, la medida usual de Lebesgue en $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ y $z_k = x_k + iy_k$ con $k = 1, \ldots, n$. Para lograrlo, requerimos que los operadores $\hat{z}_k$ y $\hat{\pi}_k$ sean uno adjunto del otro con respecto a este producto escalar.

Así, dadas las condiciones sobre $\hat{z}_k$ y $\hat{\pi}_k$, la ecuación que nos va a determinar a la medida μ es

$$\langle \hat{z}_k f, g\rangle_{\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)} = \langle f, \hat{\pi}_k g\rangle_{\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Vemos de acuerdo con la definición de (2.4) que los miembros de esta ecuación son explícitamente

$$\langle \hat{z}_k f, g\rangle_{\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{z_k f(z)}g(z)\mu(z)dz = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{z}_k\overline{f(z)}g(z)\mu(z)dz \tag{2.6}$$

y

$$\langle f, \hat{\pi}_k g\rangle_{\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{f(z)}\frac{\partial g}{\partial z_k}(z)\mu(z)dz.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\overline{f}\frac{\partial g}{\partial z_k}\mu &= \frac{\partial(\overline{f}g\mu)}{\partial z_k} - \frac{\partial\overline{f}}{\partial z_k}g\mu - \overline{f}g\frac{\partial\mu}{\partial z_k} && (2.7)\\
&= \frac{\partial(\overline{f}g\mu)}{\partial z_k} - \overline{f}g\frac{\partial\mu}{\partial z_k} && (2.8)
\end{aligned}$$

en donde para pasar de (2.7) a (2.8) se ha usado el hecho de que f es analítica en z_k. Por tanto lo que tenemos es que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n} \overline{f}(z)\frac{\partial g}{\partial z_k}(z)\mu(z)dz &= \int_{\mathbb{C}^n} \left(\frac{\partial(\overline{f}g\mu)}{\partial z_k}(z) - \overline{f}(z)g(z)\frac{\partial\mu}{\partial z_k}(z)\right)dz && (2.9)\\
&= -\int_{\mathbb{C}^n} \overline{f}(z)g(z)\frac{\partial\mu}{\partial z_k}(z)dz && (2.10)
\end{aligned}$$

en donde suponemos que la medida μ es tal que $\overline{f}g\mu$ se anula en infinito. Luego, reescribiendo (2.5) con lo obtenido en (2.6) y (2.10) tenemos que

$$\int_{\mathbb{C}^n} \overline{z}_k\overline{f(z)}g(z)\mu(z)dz = -\int_{\mathbb{C}^n} \overline{f}(z)g(z)\frac{\partial\mu}{\partial z_k}(z)dz$$

lo cual sugiere que

$$\overline{z}_k \mu(z) = -\frac{\partial \mu}{\partial z_k}(z). \tag{2.11}$$

Como $\mu(z) = \mu(z(x,y))$, aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu}{\partial x_k} &= \frac{\partial \mu}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu}{\partial \overline{z}_k}\frac{\partial \overline{z}_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \mu}{\partial z_k} + \frac{\partial \mu}{\partial \overline{z}_k} \\
\frac{\partial \mu}{\partial y_k} &= \frac{\partial \mu}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial y_k} + \frac{\partial \mu}{\partial \overline{z}_k}\frac{\partial \overline{z}_k}{\partial y_k} = i\left(\frac{\partial \mu}{\partial z_k} - \frac{\partial \mu}{\partial \overline{z}_k}\right)
\end{aligned}$$

lo que nos lleva a

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_k} - i\frac{\partial \mu}{\partial y_k} = 2\frac{\partial \mu}{\partial z_k}$$

y por tanto

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x_k} - i\frac{\partial \mu}{\partial y_k}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial z_k}.$$

Así la ecuación (2.11) puede escribirse como

$$-(x_k - iy_k)\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x_k} - i\frac{\partial \mu}{\partial y_k}\right),$$

lo que nos lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned}
-x_k\mu &= \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x_k} \\
y_k\mu &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial y_k}
\end{aligned}$$

cuya solución viene dada por

$$\mu(z) = Ke^{-(\overline{z}\cdot z)} = Ke^{-|z|^2}, \quad K = \text{constante},$$

en donde $\overline{z}\cdot z = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + y_k^2$ y normalizando, elegimos $K = (\pi^{-n})$ de tal manera que la función $f = 1$ tenga norma 1 en $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$.

Por lo tanto

$$\mu(x,y) = (\pi)^{-n}e^{-|z|^2}.$$

Recapitulando, lo que hemos hecho es tomar el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, definir un producto interno en él de tal manera que el operador $\hat{z}_k$ sea el adjunto de $\hat{\pi}_k$ en este espacio resolviendo las ecuaciones que se implicaban de tales suposiciones. Hemos obtenido que el espacio en cuestión es nada menos que $L^2\mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mu_t)$, $t = 1$.

Por construcción, lo que hemos obtenido es por tanto que las R. C. C. se cumplen en el espacio de Segal-Bargmann con $b = \hbar\partial/\partial z_k$ y $b^* = z_k$.

Transformada $A_\hbar$

En lo que sigue y resta del capítulo, seguiremos las ideas presentadas en [2] para dar paso a la exposición de la Transformada de Segal- Bargmann. En particular, utilizaremos la definición de operadores unitarios de traslación en los espacios de Segal-Bargmann dada en [[2], sección 4.1], y desarrollaremos el ejercicio 6.2 propuesto en [2].

Sea $a \in \mathbb{C}^n$ arbitrario, definimos el operador unitario $T_a : \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar) \to \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$ por

$$T_a F(z) = e^{-|a|^2/2t} e^{\overline{a}\cdot z} F(z-a).$$

Sean entonces $\{V_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ y $\{W_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ las colecciones de operadores unitarios definidos por

$$\begin{aligned} V_r &= T_{\frac{-ir}{\sqrt{2}}} \\ W_s &= T_{\frac{-s}{\sqrt{2}}}, \end{aligned}$$

dichas colecciones forman grupos unitarios uniparamétricos pues como podemos observar rápidamente $V_0 = T_0 = I$ y $W_0 = T_0 = I$, y por una parte tenemos que para cualquier $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$

$$V_{r+s}F(z) = T_{\frac{-i(r+s)}{\sqrt{2}}} F(z) = e^{\frac{-|r+s|^2}{4\hbar}} e^{\frac{i(r+s)}{\sqrt{2}}\frac{z}{\hbar}} F\left(z + \frac{i(r+s)}{\sqrt{2}}\right);$$

y por otra,

$$\begin{aligned} V_r V_s F(z) &= T_{\frac{-ir}{\sqrt{2}}}\left(T_{\frac{-is}{\sqrt{2}}} F(z)\right) \\ &= T_{\frac{-ir}{\sqrt{2}}}\left(e^{\frac{-s^2}{4\hbar}} e^{\frac{is}{\sqrt{2}}\frac{z}{\hbar}} F\left(z + \frac{is}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &= e^{\frac{-r^2}{4\hbar}} e^{\frac{ir}{\sqrt{2}}\frac{z}{\hbar}} e^{\frac{-s^2}{4\hbar}} e^{\frac{is}{\sqrt{2}\hbar}(z+\frac{ir}{\sqrt{2}})} F\left(z + \frac{i(r+s)}{\sqrt{2}}\right) \\ &= e^{\frac{-|r+s|^2}{4\hbar}} e^{\frac{i(r+s)}{\sqrt{2}}\frac{z}{\hbar}} F\left(z + \frac{i(r+s)}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Y por tanto,

$$V_{r+s} = V_r V_s.$$

De manera análoga podemos ver que

$$W_{r+s} = W_r W_s.$$

Luego, como para cualquier $F \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$ se cumple por una parte que

$$\begin{aligned} V_r W_s F(z) &= T_{\frac{-ir}{\sqrt{2}}}\left(T_{\frac{-s}{\sqrt{2}}} F(z)\right) \\ &= T_{\frac{-ir}{\sqrt{2}}}\left(e^{\frac{-s^2}{4\hbar}} e^{\frac{-sz}{\sqrt{2}\hbar}} F(z + \frac{s}{\sqrt{2}})\right) \\ &= e^{\frac{-r^2}{4\hbar}} e^{\frac{irz}{\sqrt{2}\hbar}} e^{\frac{-s^2}{4\hbar}} e^{\frac{-s(z+ir/\sqrt{2})}{\sqrt{2}\hbar}} F(z + \frac{ir+s}{\sqrt{2}}), \end{aligned}$$

y por otra

$$\begin{aligned} W_s V_r F(z) &= T_{\frac{-s}{\sqrt{2}}}\left(T_{\frac{-ir}{\sqrt{2}}} F(z)\right) \\ &= T_{\frac{-s}{\sqrt{2}}}\left(e^{\frac{-r^2}{4\hbar}} e^{\frac{irz}{\sqrt{2}\hbar}} F(z+\frac{ir}{\sqrt{2}})\right) \\ &= e^{\frac{-s^2}{4\hbar}} e^{\frac{-sz}{\sqrt{2}\hbar}} e^{\frac{-r^2}{4\hbar}} e^{\frac{ir(z+s/\sqrt{2})}{\sqrt{2}\hbar}} F(z+\frac{ir+s}{\sqrt{2}}), \end{aligned}$$

en donde multiplicando ésta última por $e^{-irs/\hbar}$, obtenemos la igualdad

$$V_r W_s = e^{-irs/\hbar} W_s V_r. \tag{2.12}$$

En resumen, hemos probado la siguiente afirmación.

Proposición 2.2.1 *Sean $\{V_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ y $\{W_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ las familias de operadores uniparamétricos definidos por*

$$\begin{aligned} V_r &= T_{\frac{-ir}{\sqrt{2}}} \\ W_s &= T_{\frac{-s}{\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Se satisfacen las siguientes propiedades

1. $V_{r+s} = V_r V_s$.

2. $W_{r+s} = W_r W_s$.

3. $V_r W_s = e^{-irs/\hbar} W_s V_r$.

Recordemos que el Teorema de Stone nos dice que todo grupo unitario uniparamétrico U_s puede ser expresado de manera única en la forma $U_s = e^{isA/\hbar}$, donde A es un operador autoadjunto dado por

$$A = -i\hbar \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} U_s,$$

a dicho operador se le conoce como el generador de U_s.

Con esto en mente, vemos entonces que el generador de V_r es

$$\begin{aligned} A &= -i\hbar \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} V_r F(z) = -i\hbar \left.\frac{d}{dr}\right|_{r=0} \left(e^{-\frac{r^2}{4\hbar}} e^{\frac{irz}{\sqrt{2}\hbar}} F(z+\frac{ir}{\sqrt{2}})\right) \\ &= -i\hbar\left(0 + \frac{iz}{\sqrt{2}\hbar} F(z) + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{dF}{dz}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z + \hbar\frac{d}{dz}\right) F(z), \end{aligned}$$

de manera análoga, obtenemos que el generador de W_s es

$$B = \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\hbar\frac{d}{dz} - z\right).$$

Y por tanto, podemos expresar a los operadores V_r y W_s como

$$\begin{aligned} V_r &= e^{irA/\hbar} \\ W_s &= e^{isB/\hbar}. \end{aligned}$$

Así, por la proposición anterior concluimos que A y B satisfacen las R. C. C. exponenciadas.

Entonces hemos obtenido que los operadores A y B son operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$ satisfaciendo las R. C. C. exponenciadas, si asumimos también irreducibilidad bajo $e^{irA/\hbar}$ y $e^{isB/\hbar}$, el Teorema de Stone-von Neumman nos garantiza la existencia de un operador unitario $U : \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$ $\to L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ relacionando los operadores exponenciados de A y B con los de $\hat{x}_k$ y $\hat{p}_k$, respectivamente. Justamente, el inverso de éste operador nos definirá la Transformada de Segal-Bargmann, la enunciamos en el siguiente teorema cuya demostración se ha completado según las indicaciones del autor.

Teorema 2.2.1 (Theorem 6.2, [2]) *Consideremos el mapeo $A_\hbar : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \to \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$ dado por*

$$A_\hbar f(z) = (\pi\hbar)^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z - x^2)/2\hbar} f(x) dx. \tag{2.13}$$

Entonces

1. *Para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, la integral es convergente y es una función holomorfa de $z \in \mathbb{C}^n$.*
2. *El operador $A_\hbar$ es un operador unitario.*
3. *Para $k = 1, \ldots, n$ tenemos que*

$$A_\hbar \left(\frac{\hat{x}_k + i\hat{p}_k}{\sqrt{2}} \right) A_\hbar^{-1} = \hbar \frac{\partial}{\partial z_k} \tag{2.14}$$

$$A_\hbar \left(\frac{\hat{x}_k - i\hat{p}_k}{\sqrt{2}} \right) A_\hbar^{-1} = z_k \tag{2.15}$$

Demostración: Al igual que en demostraciones anteriores, procedemos por simplicididad considerando el caso para $n = 1$, el caso general para $n > 1$ será totalmente análogo.

Para probar en el primer punto la convergencia de la integral, notemos que la función $e^{\frac{-z^2+2\sqrt{2}xz-x^2}{2\hbar}}$ es una función gaussiana como función de x para cada $z \in \mathbb{C}$ fijo, y por tanto es una función de cuadrado integrable. Luego, la desigualdad de Hölder implica que para $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ arbitraria, tenemos que $e^{\frac{-z^2+2\sqrt{2}xz-x^2}{2\hbar}} \cdot f(x) \in L^1(\mathbb{R}, dx)$. Y por tanto $A_\hbar f$ converge. De hecho s consideramos $z \in \mathcal{K}$, con $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ compacto, por el argumento anterior tenemos que $A_\hbar f$ converge uniformemente.

Luego, por el teorema de derivación bajo el signo de integral que puede consultarse en el capítulo 12 de [16], podemos concluir que $A_\hbar f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Con esto hemos obtenido lo establecido en el punto 1.

Probaremos el tercer punto para luego hacer uso de él y probar el segundo punto. Dicho esto, no podemos dar por hecho que $A_\hbar$ sea un mapeo unitario, entonces probaremos (2.14) y (2.15) en la forma

$$\begin{aligned} A_\hbar \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}} &= \hbar \frac{\partial}{\partial z} A_\hbar \\ A_\hbar \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}} &= z A_\hbar. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ estarán actuando en funciones pertenecientes a $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Calculemos primero $\frac{d}{dz}(A_\hbar f)(z)$, para cualquier $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(A_\hbar f)(z) &= (\pi\hbar)^{-1/4}\frac{d}{dz}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-z^2+2\sqrt{2}xz-x^2}{2\hbar}} f(x)dx \\
&= (\pi\hbar)^{-1/4}\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dz} e^{\frac{-z^2+2\sqrt{2}xz-x^2}{2\hbar}} f(x)dx \\
&= (\pi\hbar)^{-1/4}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2}x-z}{\hbar} e^{\frac{-z^2+2\sqrt{2}xz-x^2}{2\hbar}} f(x)dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\hbar}A_\hbar(\hat{x}f)(z) - \frac{z}{\hbar}A_\hbar f(z).
\end{aligned}$$

Para pasar a la segunda línea se ha utilizado de nuevo el teorema de derivación bajo el signo de integral mencionado anteriormente. Así, confirmamos la igualdad obtenida,

$$\frac{d}{dz}A_\hbar = \frac{\sqrt{2}}{\hbar}A_\hbar\hat{x} - \frac{z}{\hbar}A_\hbar. \tag{2.17}$$

Por otra parte, calculemos lo siguiente

$$A_\hbar\left[\frac{df}{dx}\right](z) = (\pi\hbar)^{-1/4}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-z^2+2\sqrt{2}xz-x^2}{2\hbar}} \left[\frac{df}{dx}(x)\right] dx$$

en donde haciendo integración por partes, y considerando que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ la última línea se puede escribir como

$$\begin{aligned}
A_\hbar\left[\frac{df}{dx}\right](z) &= (\pi\hbar)^{-1/4}\int_{\mathbb{R}} \frac{x-\sqrt{2}z}{\hbar} e^{\frac{-z^2+2\sqrt{2}xz-x^2}{2\hbar}} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\hbar}\Big(A_\hbar\hat{x}f(z) - \sqrt{2}zA_\hbar f(z)\Big).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A_\hbar\frac{d}{dx} = \frac{1}{\hbar}\Big(A_\hbar\hat{x} - \sqrt{2}zA_\hbar\Big). \tag{2.18}$$

Ahora, despejando en (2.18) para $zA_\hbar$,

$$\begin{aligned}
zA\hbar &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(A_\hbar\hat{x}/\hbar - A_\hbar\frac{d}{dx}\right) \\
&= \frac{A_\hbar\hat{x} - iA_\hbar\hat{p}}{\sqrt{2}} \\
&= A_\hbar\left(\frac{\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

Luego, sustituyendo lo anterior en (2.17) obtenemos

$$\frac{d}{dz}A_\hbar = -\frac{1}{\hbar}A_\hbar\left(\frac{\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{\hbar}A_\hbar\hat{x}$$

lo que implica

$$\hbar\frac{dA_\hbar}{dz} = A_\hbar\left(\frac{-\hat{x}+i\hat{p}+2\hat{x}}{\sqrt{2}}\right) = A_\hbar\left(\frac{\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right).$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} A_\hbar\left(\frac{\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right) &= \hbar\frac{d}{dz}A_\hbar \\ A_\hbar\left(\frac{\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right) &= zA_\hbar. \end{aligned}$$

Ya probado el tercer punto, procederemos a demostrar el segundo punto del teorema, esto es, que el operador $A_\hbar$ es un operador unitario. Consideremos la función de "estado base"

$$f_0(x) = (\pi\hbar)^{-1/4}e^{-\frac{x^2}{2\hbar}},$$

dicha función es única salvo constantes, y con la propiedad de que el operador de aniquilación aplicado a ella es cero,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+h\frac{d}{dx}\right)f_0 &= \frac{xf_0}{\sqrt{2}}+\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{df_0}{dx} \\ &= \frac{xf_0}{\sqrt{2}}+\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{(\pi\hbar)^{-1/4}(-2x)}{2\hbar}e^{-\frac{x^2}{2\hbar}} \\ &= \frac{xf_0}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}f_0 = 0. \end{aligned}$$

Ahora, que si le aplicamos el mapeo $A_\hbar$ a f_0 tenemos

$$\begin{aligned} A_\hbar f_0(z) &= (\pi\hbar)^{-1/4}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-z^2+2\sqrt{2}xz-x^2}{2\hbar}}(\pi\hbar)^{-1/4}e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}dx \\ &= (\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-z^2+2\sqrt{2}xz-2x^2}{2\hbar}}dx \\ &= (\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(\sqrt{2}x-z)^2}{2\hbar}}dx \\ &= 1, \end{aligned}$$

es decir, $A_\hbar f_0$ la función constante 1.

Ahora aseveramos que,

$$A_\hbar((a^\dagger)^m f_0) = z^m\mathbf{1} = z^m.$$

Lo probaremos por inducción sobre m. Veamos que la afirmación es cierta para $m=0$.

$$A_\hbar((a^\dagger)^0 f_0)(z) = A_\hbar(f_0)(z) = \mathbf{1} = z^0\mathbf{1}.$$

Luego, supongamos que la afirmación es cierta para $m\in\mathbb{Z}$, o sea, se cumple que

$$A_\hbar((a^\dagger)^m f_0) = z^m\mathbf{1} = z^m.$$

Entonces

$$A_\hbar((a^\dagger)^{(m+1)}f_0) \quad = \quad A_\hbar(a^\dagger((a^\dagger)^m f_0))$$

y puesto que $A_\hbar \dfrac{\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2}} = zA_\hbar$, se tiene

$$A_\hbar(a^\dagger((a^\dagger)^m f_0)) = zA_\hbar((a^\dagger)^m f_0)) = z(z^m) = z^{m+1}.$$

Así, $A_\hbar((a^\dagger)^m f_0) = z^m \mathbf{1} = z^m$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, como se quería demostrar.

De hecho, las funciones $(a^\dagger)^m f_0$ son justamente las funciones de Hermite, las cuales forman una base ortogonal para $L^2(\mathbb{R}^n)$ y son tales que su norma es $\|(a^\dagger)^m f_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \hbar^m m!$.

Para concluir, recordemos del primer capítulo (sobre espacios de funciones holomorfas), en la sección (1.2.2), que las funciones z^m forman una base ortogonal para el espacio de Segal-Bargmann $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$, con $\|z^m\| = \hbar^m m!$. De esta manera, hemos obtenido que el operador $A_\hbar$ toma una base ortogonal y la envía en otra base ortogonal con la misma norma. Se sigue por tanto que $A_\hbar$ es un mapeo unitario. ■

Transformada $B_\hbar$

Ahora representaremos a la transformada dada por $A_\hbar$ de manera un poco diferente, obtenida mediante la **Transformación de estado base**. Seguiremos con la exposición de la sección 6.2 en [2], desarrollando al igual que en los apartados anteriores las justificaciones que han quedado pendientes en el texto original. Consideremos el mapeo unitario

$$G_\hbar : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \to L^2(\mathbb{R}^n, (\pi\hbar)^{-n/2} e^{-x^2/\hbar} dx)$$

dado por

$$G_\hbar f(x) = \frac{f(x)}{f_0(x)} = \frac{f(x)}{(\pi\hbar)^{-n/4} e^{-x^2/2\hbar}},$$

donde $f_0(x) := (\pi\hbar)^{-n/4} e^{-x^2/2\hbar}$ es el estado base en $\mathbb{R}^n$. Notemos que la medida en el espacio de la imagen es la medida $f_0(x)^2 dx$, y que el hecho de que $G_\hbar$ sea unitario se puede comprobar considerando que un mapeo unitario es una isometría sobreyectiva; la sobreyectividad se obtiene por la definición de $G_\hbar$, y el hecho de que sea isometría se obtiene mediante el siguiente cálculo

$$\|G_\hbar f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n, f_0(x)^2 dx)} = \int_{\mathbb{R}^n} |G_\hbar f(x)|^2 f_0^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{f_0(x)} \right|^2 f_0(x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \cdot 1 dx = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, dx)}$$

Esta transformación es llamada la transformación de estado base porque justamente lo que hace es dividir cada función en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ por el estado fundamental f_0. Notemos también que $G_\hbar f_0$ es la función constante 1. Entonces el efecto de $G_\hbar$ es convertir el estado fundamental en la función constante 1 y convertir la medida de Lebesgue usual en la medida de Lebesgue $(f_0(x))^2 dx$.

Afirmación 2.2.1 *Consideremos los operadores definidos en* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n, dx)$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\hat{x}_k + i\hat{p}_k}{\sqrt{2}} \\ a_k^\dagger &= \frac{\hat{x}_k - i\hat{p}_k}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

en donde $\hat{x}_k = x_k$ *(multiplicación por la componente* x_k*) y* $\hat{p}_k = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$.
Entonces

$$\begin{aligned} G_\hbar a_k G_\hbar^{-1} &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_k} \\ G_\hbar a_k^\dagger G_\hbar^{-1} &= \sqrt{2}x_k - \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Demostración: Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ arbitraria, probaremos que

$$\begin{aligned} G_\hbar a_k &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_k}G_\hbar \\ G_\hbar a_k^\dagger &= \sqrt{2}x_k - \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_k}G_\hbar. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_k}G_\hbar(f(x)) &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{f(x)}{(\pi\hbar)^{-d/4}e^{-x^2/2\hbar}} \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}(\pi\hbar)^{-d/4}}\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}e^{x^2/2\hbar} + f(x)\frac{2x_k e^{x^2/2\hbar}}{2\hbar}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(\pi\hbar)^{-d/4}e^{-x^2/2\hbar}}\left(x_k f(x) + \hbar\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \\ &= G_\hbar\left(\frac{x_k f(x) + \hbar\frac{\partial f}{\partial x_k}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= G_\hbar a_k f(x), \end{aligned}$$

por tanto, $G_\hbar a_k = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_k}G_\hbar$.

De manera análoga garantizamos que $G_\hbar a_k^\dagger = \left(\sqrt{2}x_k - \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)G_\hbar$. ■

Ahora, haciendo un cambio de variable considerando $y = \sqrt{2}x$, y luego renombrando nuestra variable como x, tenemos que los operadores de creación y aniquilación toman la forma

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k &= \hbar\frac{\partial}{\partial x_k} \\ \tilde{a}_k^\dagger &= x_k - \hbar\frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Entonces nuestro espacio de Hilbert original $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, se convierte en el espacio $L^2(\mathbb{R}^n, \rho_\hbar(x)dx)$, donde

$$\rho_\hbar(x) = (2\pi\hbar)^{-n/2}e^{-x^2/2\hbar},$$

y por tanto, podemos definir al espacio de Hilbert H de la siguiente manera:

$$H = L^2(\mathbb{R}^n, \rho_\hbar(x)dx) = \{F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ medible } | \int_{\mathbb{R}^n}|F(x)|^2\rho_\hbar(x)dx < \infty, \quad \rho_\hbar(x) = (2\pi\hbar)^{-n/2}e^{-x^2/2\hbar}\},$$

dotado con el producto interno

$$\langle F_1, F_2\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\overline{F_1(x)}F_2(x)\rho_\hbar(x)dx, \quad \forall F_1, F_2 \in H.$$

Tenemos entonces la siguiente

Afirmación 2.2.2 *El producto interno en el espacio de Hilbert H satisface*

$$\langle \tilde{a}_k F_1, F_2 \rangle = \langle F_1, \tilde{a}_k^\dagger F_2 \rangle, \quad \forall F_1, F_2 \in H$$

en donde

$$\begin{array}{rcl} \tilde{a}_k & = & \hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \tilde{a}_k^\dagger & = & x_k - \hbar \frac{\partial}{\partial x_k}, \end{array} \tag{2.19}$$

Demostración: Sean $f_1,\ f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, en donde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denota al espacio de Schwartz. Sabemos que $\langle a_k f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \langle f_1, a_k^\dagger f_2 \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$. El mapeo $G_\hbar : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \to L^2(\mathbb{R}^n, \rho(x)dx)$ es tal que

$$\tilde{a}_k = G_\hbar a_k G_\hbar^{-1} \quad \text{y} \quad \tilde{a}_k^\dagger = G_\hbar a_k^\dagger G_\hbar^{-1}. \tag{2.20}$$

Sean $F_1, F_2 \in L^2(\mathbb{R}^n, \rho dx)$ de tal manera que $F_i = G_\hbar f_i,\ i = 1, 2$. Por ser $G_\hbar$ unitario, tenemos que

$$\langle G_\hbar f_1, G_\hbar f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \rho dx)} = \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, dx)}. \tag{2.21}$$

Se sigue entonces,

$$\begin{array}{rcl} \langle \tilde{a}_k F_1, F_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \rho dx)} & = & \langle G_\hbar a_k G_\hbar^{-1} G_\hbar f_1, G_\hbar f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \rho dx)} = \langle a_k f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, dx)} = \langle f_1, a_k^\dagger f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, dx)} \\ & = & \langle G_\hbar^{-1} F_1, a_k^\dagger G_\hbar^{-1} F_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, dx)} = \langle F_1, G_\hbar a_k^\dagger G_\hbar^{-1} F_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \rho dx)} = \langle F_1, \tilde{a}_k^\dagger F_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \rho dx)} \end{array}$$

■

Lo que buscamos es entonces encontrar un mapeo unitario de $L^2(\mathbb{R}^n, \rho_\hbar(x)dx)$ a $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$ el cual transforme los operadores (2.19) en los operadores $\hbar \dfrac{\partial}{\partial z_k}$ y z_k, respectivamente.

Como sabemos la función $\rho_\hbar$ está definida por

$$\begin{array}{rcl} \rho_\hbar : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \rho_\hbar(x) = (2\pi\hbar)^{-n/2} e^{-\frac{x^2}{2\hbar}}, \end{array}$$

y, por el principio de identidad (continuación analítica), ésta admite una extensión analítica en $\mathbb{C}^n$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\rho}_\hbar : \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \tilde{\rho}_\hbar(z) = (2\pi\hbar)^{-n/2} e^{-\frac{z^2}{2\hbar}}. \end{array}$$

Por comodidad seguiremos llamando a dicha extensión $\rho_\hbar$ entendiéndose por el contexto si estamos tratando con la función $\rho_\hbar$ o con $\tilde{\rho}_\hbar$.

Teorema 2.2.2 (Theorem 6.3, [2]) *Para todo $\hbar > 0$, consideremos el mapeo $B_\hbar : L^2(\mathbb{R}^n, \rho_\hbar(x)dx) \to \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$, dado por*

$$\begin{array}{rcl} B_\hbar f(z) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\hbar(z - x) f(x) dx \\ & = & (2\pi\hbar)^{-n/2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{(z-x)^2/2\hbar} f(x) dx. \end{array}$$

Entonces,

1. *Para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \rho_\hbar(x)dx)$, la integral es absolutamente convergente y es una función holomorfa de $z \in \mathbb{C}^n$.*

2. *El mapeo $B_\hbar$ es un mapeo unitario de $L^2(\mathbb{R}^n, \rho_\hbar(x)dx)$ sobre $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$.*

3. *Para todo $n = 1, 2, \ldots, n$*

$$\begin{aligned} B_\hbar \tilde{a}_k B_\hbar^{-1} &= \hbar \frac{\partial}{\partial z_k} \\ B_\hbar \tilde{a}_k^\dagger B_\hbar^{-1} &= z_k. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Demostración: El hecho de que sea una integral absolutamente se sigue por argumentos similares al que se dieron en la demostración del punto 1 del teorema para $A_\hbar$, al igual que para ver que la función es holomorfa en $\mathbb{C}^n$.

Vamos a proceder de la misma manera que en la demostración para la transformada $A_\hbar$, considerando $n = 1$ y valiéndonos de las propiedades enunciadas para los operadores de creación y aniquilación en el apéndice (A).

Consideremos (2.22) en la forma

$$\begin{aligned} B_\hbar \tilde{a} &= \hbar \frac{d}{dz} B_\hbar \\ B_\hbar \tilde{a}^\dagger &= z B_\hbar. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Calculemos lo siguiente para cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R}, \rho_\hbar(x)dx)$ utilizando el teorema de derivación bajo el signo de integral,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(B_\hbar f)(z) &= (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dz} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}} f(x)dx \\ &= (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{-(z-x)}{\hbar} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}} f(x)dx \\ &= -(2\pi\hbar)^{-1/2} \frac{z}{\hbar} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}} f(x)dx + (2\pi\hbar)^{-1/2} \frac{1}{\hbar} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}} f(x)dx \\ &= -\frac{z}{\hbar} B_\hbar f(z) + \frac{1}{\hbar} B_\hbar x f(z). \end{aligned}$$

Hemos obtenido por tanto que

$$\frac{d}{dz} B_\hbar f = -\frac{z}{\hbar} B_\hbar f + \frac{1}{\hbar} B_\hbar (xf). \tag{2.24}$$

Por otra parte,

$$B_\hbar \left[\frac{df}{dx} \right](z) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}} \frac{df}{dx}(x)dx =: I,$$

donde haciendo integración por partes obtenemos que

$$\begin{aligned} I &= -(2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{(z-x)}{\hbar} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}} f(x)dx \\ &= -(2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{z}{\hbar} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}} f(x)dx + (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\hbar} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\hbar} B_\hbar (xf)(z) - \frac{z}{\hbar} B_\hbar f(z), \end{aligned}$$

igualdando los extremos, obtenemos la expresión

$$B_\hbar\left[\frac{df}{dx}\right]=\frac{1}{\hbar}B_\hbar(xf)-\frac{z}{\hbar}B_\hbar f$$

despejando ahora para $zB_\hbar$

$$\frac{z}{\hbar}B_\hbar f=\frac{1}{\hbar}B_\hbar(xf)-B_\hbar\left[\frac{df}{dx}\right]$$

simplificando aún más esta expresión

$$zB_\hbar f=\hbar B_\hbar(xf)-\hbar B_\hbar\left[\frac{df}{dx}\right]=B_\hbar\left(x-\hbar\frac{df}{dx}\right).$$

Luego, sustituyendo esto último en (2.24) tenemos

$$\hbar\frac{d}{dz}B_\hbar=-B_\hbar x+\hbar B_\hbar\frac{d}{dx}+B_\hbar x=\hbar B_\hbar\frac{d}{dx},$$

y por tanto

$$\hbar\frac{d}{dz}B_\hbar=B_\hbar\hbar\frac{d}{dx}.$$

De esta manera hemos obtenido

$$\begin{aligned}B_\hbar\tilde{a} &= \hbar\frac{d}{dz}B_\hbar\\ B_\hbar\tilde{a}^\dagger &= zB_\hbar.\end{aligned}$$

Siguiendo con la esencia de la demostración para $A_\hbar$, encontramos que la función que satisface $\tilde{a}f=0$, donde $\tilde{a}=\hbar\frac{d}{dx}$ el operador de aniquilación, es justo la función constante 1 y la denotaremos por f_0. Ahora, aplicando el operador $B_\hbar$ a f_0,

$$\begin{aligned}B_\hbar f_0(z) &= (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}}1dx\\ &= (2\pi\hbar)^{-1/2}(2\pi\hbar)^{1/2}=1.\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que $B_\hbar f_0=\mathbf{1}$, la función constante 1.

Remitiéndonos a la propiedad (**x**) del apéndice (A), tenemos que las funciones

$$(\tilde{a}^\dagger)^m f_0$$

forman una base ortogonal para el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\rho_\hbar(x)dx)$ con norma

$$\|(\tilde{a}^\dagger)^m f_0\|^2_{L^2(\mathbb{R},\rho_\hbar dx)}=\hbar^m m!.$$

Además, por inducción sobre m, se prueba que

$$B_\hbar((\tilde{a}^\dagger)^m f_0)=z^m\mathbf{1}=z^m.$$

Veamos, para $m=0$, $B_\hbar((\tilde{a}^\dagger)^0 f_0)=B_\hbar(f_0)=\mathbf{1}=z^0$. Supongamos luego que $B_\hbar((\tilde{a}^\dagger)^m f_0)=z^m$, entonces

$$\begin{aligned}B_\hbar((\tilde{a}^\dagger)^{m+1}f_0) &= B_\hbar(\tilde{a}^\dagger((\tilde{a}^\dagger)^m f_0))\\ &= zB_\hbar((\tilde{a}^\dagger)^m f_0)\\ &= z\cdot z^m=z^{m+1}.\end{aligned}$$

Por tanto, hemos mostrado que $B_\hbar$ mapea bases ortogonales en bases ortogonales y con la misma norma. De aquí concluímos que $B_\hbar$ es un mapeo unitario, como se quería probar. ■

Transformada $C_\hbar$

Por último, siguiendo [2], presentaremos la Transformada de Segal-Bargmann como una convolución, en términos de la extensión analítica del núcleo del calor para $\mathbb{R}^n$. De hecho notaremos que la expresión es la misma que dimos para la Transformada $B_\hbar$ sólo que tanto el rango como el dominio para la transformada cambian. Dicha transformada tendrá como dominio el espacio de funciones $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ y como imagen al espacio $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu_\hbar)$, donde aquí la densidad $\nu_\hbar$ está definida en $\mathbb{C}^n$ como

$$\nu_\hbar(z) = (\pi\hbar)^{-n/2} e^{-(Im\ z)^2/\hbar}.$$

Recordemos también que cuando definimos la transformada $B_\hbar$ y su núcleo integral consideramos la densidad $\rho_\hbar = (2\pi\hbar)^{-n/2} e^{-x^2/2\hbar}$ y más aún, sabemos que esta función admite una continuación analítica a $\mathbb{C}^n$. Con estos elementos nos es posible presentar a la Transformada de Segal-Bargmann en su forma invariante. Como se menciona en [3], a la Transformada $C_\hbar$ se le llama invariante porque la densidad $\nu_\hbar$ es invariante bajo traslaciones en las direcciones reales.

Teorema 2.2.3 (Theorem 6.4, [2]) *Consideremos el mapeo $C_\hbar : L^2(\mathbb{R}^n, dx) \mapsto \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu_\hbar)$ dado por*

$$\begin{aligned} C_\hbar f(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\hbar(z-x) f(x) dx \\ &= (2\pi\hbar)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(z-x)^2/2\hbar} f(x) dx. \end{aligned}$$

1. *Para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ la integral definida $C_\hbar f(z)$ es absolutamente convergente y holomorfa en $z \in \mathbb{C}^n$.*
2. *El mapeo $C_\hbar$ es un mapeo unitario de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ sobre $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu_\hbar)$.*
3. *Para $k = 1, 2 \dots, n$*

$$\begin{aligned} C_\hbar(\hat{x}_k - i\hat{p}_k) C_\hbar^{-1} &= z_k \\ C_\hbar(\hat{x}_k + i\hat{p}_k) C_\hbar^{-1} &= z_k + 2\hbar \frac{\partial}{\partial z_k} \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde z_k denota multiplicación por z_k.

Demostración: Como en los casos anteriores, vamos a considerar el caso para $n = 1$. También, la demostración del punto 1 del teorema, se sigue de manera análoga a como se hizo para las transformadas $A_\hbar$ y $B_\hbar$. Quedan entonces por demostrar los puntos 2 y 3.

Para probar el punto 2, es decir, que el mapeo $C_\hbar$ es unitario, recordemos que en la sección (1.3) se mostró que el espacio $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu_\hbar)$ es equivalentemente holomorfo al espacio $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_{2\hbar})$ y la equivalencia holomorfa está dada por el mapeo unitario $U_\hbar$ que se menciona en la misma sección.

Más aún, notemos que la Transformada de Segal-Bargmann $C_\hbar$ la podemos relacionar con la Transformada $A_\hbar$ y el mapeo $U_\hbar$ como sigue. Para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$, tenemos

$$C_\hbar f(z) = (4\pi\hbar)^{-1/4} e^{-z^2/4\hbar} [A_\hbar f] \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right). \tag{2.26}$$

Consideremos el mapeo denotado por $\tilde{A}_\hbar$ y definido como

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\hbar : L^2(\mathbb{R}^n, dx) &\to \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_{2\hbar}(z)dz) \\ F &\mapsto \tilde{A}_\hbar F(z) = A_\hbar F\left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

aseveramos que tal mapeo es unitario. Dado que el mapeo $A_\hbar$ es unitario, es sobreyectivo, y por como está definido $\tilde{A}_\hbar$, se sigue también que es sobreyectivo. Y dado que

$$\begin{aligned}\|\tilde{A}_\hbar F\|^2_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n,\mu_{2\hbar})} &= (2\pi\hbar)^{-n}\int_{\mathbb{C}^n}|\tilde{A}_\hbar F(w)|^2 e^{-|w|/2\hbar}dw = (2\pi\hbar)^{-n}\int_{\mathbb{C}^n}|A_\hbar F\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)|^2 e^{-|w|/2\hbar}dw \\ &= (\pi\hbar)^n\int_{\mathbb{C}^n}|A_\hbar F(z)|^2 e^{-|z|/\hbar}dz = \|A_\hbar F\|^2_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n,\mu_\hbar)} = \|F\|_{L^2(\mathbb{R}^n,dx)}\end{aligned}$$

se sigue que $\tilde{A}_\hbar$ es una isometría, y entonces $\tilde{A}_\hbar$ es un mapeo unitario. Por tanto, considerando los mapeos $U_\hbar$ y $\tilde{A}_\hbar$ con $n=1$, tenemos que $C_\hbar$ definido como en (2.26) es la composición de dos mapeos unitarios. Así, $C_\hbar$ es un mapeo unitario.

Para probar el punto 3, vamos a proceder como en las demostraciones anteriores para $A_\hbar$ y $B_\hbar$. Consideremos (2.25) en la forma siguiente

$$\begin{aligned}C_\hbar(\hat{x}-i\hat{p}) &= zC_\hbar \\ C_\hbar(\hat{x}+i\hat{p}) &= \left(z+2\hbar\tfrac{d}{dz}\right)C_\hbar\end{aligned} \tag{2.27}$$

Calculemos lo siguiente para cualquier función $f\in L^2(\mathbb{R},dx)$, utilizando una vez el teorema de derivación bajo el signo de integral [16],

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(C_\hbar f)(z) &= (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dz}e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}}f(x)dx \\ &= (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\frac{-(z-x)}{\hbar}e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}}f(x)dx \\ &= -(2\pi\hbar)^{-1/2}\frac{z}{\hbar}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}}f(x)dx + (2\pi\hbar)^{-1/2}\frac{1}{\hbar}\int_{\mathbb{R}}xe^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}}f(x)dx \\ &= -\frac{z}{\hbar}C_\hbar f(z)+\frac{1}{\hbar}C_\hbar(xf)(z).\end{aligned}$$

Hemos obtenido por tanto que

$$\frac{d}{dz}C_\hbar f = -\frac{z}{\hbar}C_\hbar f+\frac{1}{\hbar}C_\hbar(xf). \tag{2.28}$$

Por otra parte,

$$C_\hbar\left[\frac{df}{dx}\right](z) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}}\frac{df}{dx}(x)dx =: I$$

donde haciendo integración por partes obtenemos que

$$\begin{aligned}I &= -(2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\frac{(z-x)}{\hbar}e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}}f(x)dx \\ &= -(2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\frac{z}{\hbar}e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}}f(x)dx + (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}\frac{x}{\hbar}e^{-\frac{(z-x)^2}{2\hbar}}f(x)dx \\ &= \frac{1}{\hbar}C_\hbar(xf)(z)-\frac{z}{\hbar}C_\hbar f(z),\end{aligned}$$

igualdando los extremos, obtenemos la expresión

$$C_\hbar\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{1}{\hbar}C_\hbar(xf)-\frac{z}{\hbar}C_\hbar f$$

despejando ahora para $zC_\hbar$

$$\frac{z}{\hbar}C_\hbar f = \frac{1}{\hbar}C_\hbar(xf) - C_\hbar\left[\frac{df}{dx}\right]$$

simplificando aún más esta expresión

$$zC_\hbar f = \hbar C_\hbar(xf) - \hbar C_\hbar\left[\frac{df}{dx}\right] = C_\hbar\left(x - \hbar\frac{df}{dx}\right). \tag{2.29}$$

Luego, sustituyendo esto último en (2.28) tenemos

$$\hbar\frac{d}{dz}C_\hbar = -C_\hbar x + \hbar C_\hbar\frac{d}{dx} + C_\hbar x = \hbar C_\hbar\frac{d}{dx},$$

y por tanto

$$\hbar\frac{d}{dz}C_\hbar = C_\hbar\hbar\frac{d}{dx}. \tag{2.30}$$

Luego, usando las expresiones (2.29) y (2.30), sumando $zC_\hbar$ y $2\hbar C_\hbar$, obtenemos

$$zC_\hbar + 2\hbar C_\hbar \quad = \quad C_\hbar\left(x - \hbar\frac{d}{dx}\right) + 2\hbar C_\hbar\frac{d}{dx} = C_\hbar\left(x - \hbar\frac{d}{dx} + 2\hbar\frac{d}{dx}\right) = C_\hbar\left(x + \hbar\frac{d}{dx}\right).$$

De esta manera, usando (2.29) y lo anterior hemos obtenido

$$\begin{array}{rcl} C_\hbar(\hat{x} - i\hat{p}) & = & zC_\hbar \\ C_\hbar(\hat{x} + i\hat{p}) & = & \left(z + 2\hbar\frac{d}{dz}\right)C_\hbar \end{array}$$

como se quería probar. ■

CAPÍTULO 3

Elementos de mecánica

Apartándonos un poco de los aspectos analíticos en este capítulo vamos a mencionar algunos de los elementos de la mecánica clásica y de la mecánica cuántica. Esto se hará así porque en los siguientes capítulos buscaremos describir mediante cierto programa de cuantización cómo relacionar elementos de un esquema clásico con elementos de un esquema cuántico, sin olvidar que el objetivo es obtener la Transformada de Segal-Bargmann. Cabe mencionar que a lo largo de este capítulo nos estaremos guiando por las referencias [2], [3] y [5] para el desarrollo del tema haciendo la referencia adecuada destacando con exactitud qué resultado se esta considerando de cada referencia.

3.1. Elementos de mecánica clásica

Empecemos con los elementos de la mecánica clásica, específicamente vamos a considerar el caso de una dimensión tal y como se hace en [2] complementando también con algunos elementos de [3]. Como sabemos, el movimiento de la partícula está gorbernado por la ecuación de Newton $F = ma$, donde m es la masa de partícula y a su aceleración. La posición de la partícula en el tiempo t está dada por $x(t)$ y su aceleración $a = \ddot{x}(t)$. Reescribiendo la ecuación para la fuerza F nos queda que $F = m\ddot{x}(t)$. Usualmente F depende solamente de la posición y puede ser expresada en términos de la energía potencial como $F(x) = -V'(x)$. Así lo que tenemos como nuestra ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} = -V'(x), \tag{3.1}$$

notemos que es una ecuación diferencial de segundo orden y que podemos desacoplarla en un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Definamos el **momento** de la partícula como $p = m\dot{x}$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tfrac{p}{m} \\ \dot{p} &= -V'(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vamos a introducir también la siguiente notación

$$\begin{aligned} \text{Recta (coordenada } x) &= \textbf{Espacio de configuración} \\ \text{Plano (coordenadas } (x,p)) &= \textbf{Espacio fase}, \end{aligned}$$

es decir, el entorno en el cual nuestra partícula se mueve es lo que llamaremos espacio de configuración y al conjunto de puntos con coordenadas de posición y momento le llamaremos espacio fase.

Sea $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función suave[1] de las variables x y p, conocida como **función Hamiltoniana.** Físicamente nos describe la energía mecánica del sistema, comúnmente se suele escribir como la suma de la energía cinética y la energía potencial del sistema, es decir,

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x).$$

Entonces se definen las ecuaciones de movimiento en $\mathbb{R}^2$ por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Estas son las **ecuaciones de Hamilton**, lo que con ellas buscamos con trayectorias $(x(t), p(t))$ que satisfagan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)) \\ \frac{d}{dt}p(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)), \end{aligned}$$

sujetas a las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $p(0) = p_0$.

Otro elemento que necesitamos introducir para poder desarrollar nuestro esquema de trabajo, es la siguiente

Definición 3.1.1 *Si f, g son funciones reales, suaves en $\mathbb{R}^2$, definimos los **Paréntesis de Poisson** de f y g, denotado por $\{f, g\}$, por*

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x},$$

de modo que $\{f, g\}$ es también una función suave en $\mathbb{R}^2$.

Como es bien sabido los paréntesis de Poisson satisfacen las siguientes propiedades.

Proposición 3.1.1 *Para cualesquiera f, g y h funciones suaves en $\mathbb{R}^2$, tenemos*

1. *$\{f, g + ch\} = \{f, g\} + c\{f, h\}$, para todo $c \in \mathbb{R}$.*
2. *$\{g, f\} = -\{f, g\}$.*

[1] A lo largo del texto entenderemos como funciones suaves a quellas funciones que admiten derivadas de cualquier orden, y por tanto todas sus derivadas de cualquier orden son continuas. También se les conoce como funciones infinitamente diferenciables, la clase de funciones que estas forman se denota por C^∞.

3. $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.

4. $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

Demostración: Ver [3], proposición 2.23.

Teorema 3.1.1 (Theorem 7.2, [2]) *Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y $(x(t), p(t))$ es una solución a las ecuaciones de Hamilton* (3.3)*, entonces*

$$\frac{df}{dt}(x(t), p(t)) = \{f, H\}(x(t), p(t)).$$

Demostración: Usando la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= \{f, H\},\end{aligned}$$

la última igualdad se debe a la definición de los Paréntesis de Poisson. Por tanto, $\frac{df}{dt} = \{f, H\}$ como se quería probar. ∎

Definición 3.1.2 *Sea f una función suave en $\mathbb{R}^2$. f se dice que es una cantidad que se conserva si $f(x(t), p(t))$ es independiente de t para cada solución $(x(t), p(t))$ de las ecuaciones de Hamilton.*

Una de las consecuencias del teorema anterior se presenta en el siguiente corolario, el cual tiene el sentido físico que tenemos sobre la energía: la energía se conserva.

Corolario 3.1.1 (Corollary 2.26, [3]) *Sea f una función suave en $\mathbb{R}^2$ y H el Hamiltoniano definido anteriormente. f es una cantidad que se conserva si y sólo si $\{f, H\} = 0$.*

En particular, el Hamiltoniano H es una cantidad que se conserva.

Definición 3.1.3 *Llamamos flujo en $\mathbb{R}^2$ a la familia de difeomorfismos $\{\Phi_t\}$ de $\mathbb{R}^2$, en donde $\Phi_t(x, p)$ es igual a la solución en el tiempo t de las ecuaciones de Hamilton con condición inicial (x, p). Decimos que el flujo es completo cuando Φ_t está definido en $\mathbb{R}^2$ para todo t.*

Por definición, un difeomorfismo Φ, es una aplicación diferenciable, biyectiva y su inversa $\Phi^{-1} : N \to M$, también es diferenciable.

Teorema 3.1.2 (Teorema de Liouville.) *El flujo asociado a las ecuaciones de Hamilton, para una función H Hamiltoniana, preserva la medida de volumen 2-dimensional $dxdp$.*

Demostración: Ver [3], teorema 2.27. ∎

Generalizando a n dimensiones tenemos que el espacio de configuración es $\mathbb{R}^n$ y el espacio fase es $\mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. El Hamiltoniano $H(x, p)$ en este caso sigue siendo una función suave, perteneciente a $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, y se escribe generalmente en la forma

$$H(x, p) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2 + V(x).$$

Las ecuaciones de Hamilton toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

con $k = 1, \ldots, n$, y los paréntesis de Poisson se definen como

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial x_k},$$

y el teorema (3.1.1) se mantiene. De hecho, la generalización de las definiciones, proposiciones y teoremas enunciados para el caso $n = 1$ se siguen cumpliendo para el caso general $n > 1$.

3.2. Mecánica Clásica y variedades

Como sabemos, nuestra partícula podría tener un espacio de configuración más general, algo que no fuera $\mathbb{R}^n$ tal como fue planteado en la sección anterior. Aunque nuestra partícula este inmersa en algún espacio geométrico más general, localmente podríamos decir que nuestra partícula se está moviendo en algún entorno n-dimensional. Por esta razón es necesario plantear de nuevo los conceptos básicos de la mecánica clásica en términos de dichos espacios geométricos: variedades. En esta sección, se utiliza la referencia [5] extrayendo de esta las definiciones que aquí aparecen, seguiremos su notación y omitiremos también las demostraciones a las proposiciones presentadas aquí remitiéndonos a dicha referencia.

Empecemos por recordar la siguiente definición.

Definición 3.2.1 *Una variedad simpléctica (N, ω) es una variedad suave N junto con una 2-forma cerrada ω y no degenerada en N.*

Recordemos, por definición, que ω es cerrada en N si es una 2-forma diferenciable en la variedad N y tal que su derivada exterior es cero, $d\omega = 0$. Así también, es no degenerada si para todo $\xi \in TN_x,\ \xi \neq 0$, existe una $\eta \in TN_x$ talque $\omega(\xi, \eta) \neq 0$. La 2-forma ω definida de ésta manera se le conoce como forma simpléctica.

Denotamos también mediante Ω_ω el elemento de volumen $[1/n!]\omega^n$, en donde ω^n significa $\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n veces).

Teorema 3.2.1 (Teorema de Darboux.) *Sea ω una 2-forma no-degenerada en una variedad M tal que $dim\ M = 2n$. Entonces $d\omega = 0$ si y sólo si existe una carta $(U,\ \varphi)$ en cada $m \in M$ tal que $\varphi(m) = 0$, y con $\varphi(u) = \varphi(x_1(u), \ldots, x_n(u), p_1(u), \ldots, p_n(u))$ tenemos que para $(a, b) \in TM_U \times TM_U$,*

$$\omega|_U(a, b) = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dp_n(a, b).$$

Demostración: Ver [5], Theorem 3.2.2. ■

Las cartas garantizadas por el teorema de Darboux son llamadas cartas simplécticas y las funciones componentes $x_j,\ p_j$ son llamadas coordenadas canónicas.
Así en una carta simpléctica tenemos

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dp_j; \quad \Omega_\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n.$$

Definición 3.2.2 *Sean (M,ω) y (N,ρ) variedades simplécticas. Un mapeo $\Phi : M \to N$ es un simplectomorfismo o transformación canónica si Φ es un difeomorfismo y además, Φ es tal que*

$$\Phi^*(\rho) = \omega.$$

Proposición 3.2.1 (Proposition 3.2.6, [5]) *Si (M,ω) y (N,ρ) son variedades simplécticas y $\Phi : M \to N$ es un simplectomorfismo, entonces Φ preserva el volumen.*

Definición 3.2.3 *Sean (N,ω) una variedad simpléctica y $H : N \to \mathbb{R}$ una función C^r dada*[2]*. Asignaremos a H un campo vectorial X_H determinado por*

$$\omega(X_H, Y) = dH \cdot Y$$

es decir,

$$X_H \lrcorner \omega = dH.$$

X_H es llamado campo vectorial Hamiltoniano con función de energía H. Llamaremos sistema Hamiltoniano a la tripleta (N,ω,X_H).

Definición 3.2.4 *Una curva σ en un punto m de una variedad N es un mapeo C^1 de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en N tal que $0 \in I$ y $\sigma(0) = m$. Asignamos un vector tangente en cada punto $\sigma(\lambda)$, $\lambda \in I$, por $\sigma'(\lambda)$.*

Sea N una variedad y sea X cualquier campo vectorial en N. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una curva integral de X en $m \in N$ es una curva σ en m tal que $\sigma'(\lambda) = X(\sigma(\lambda))$ para cada $\lambda \in I$.

Proposición 3.2.2 *Sean $x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n$ coordenadas canónicas para $\omega = \sum_j dx_j \wedge dp_j$. Entonces en éstas coordenadas*

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial x_j}\right).$$

Entonces $(x(t),p(t))$ es una curva integral de X_H si y sólo si las ecuaciones de Hamilton se mantienen

$$\begin{aligned}\frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j}\\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

Demostración: Ver [5], Proposition 3.3.2. ■

Proposición 3.2.3 *Sea (N,ω,X_H) un sistema Hamiltoniano y sea $c(t)$ una curva integral para X_H. Entonces $H(c(t))$ es constante en t.*
Demostración: Ver [5], Proposition 3.3.3. ■

Definición 3.2.5 *Dada una variedad N y un campo vectorial X en N, sea $\mathfrak{D} \subset N \times \mathbb{R}$ el conjunto de $(m,t) \in N \times \mathbb{R}$ tales que existe una curva integral $\sigma : I \to N$ de X en m con $t \in I$. El campo vectorial X es completo si $\mathfrak{D} = N \times \mathbb{R}$.*

Proposición 3.2.4 *Sea N una variedad y sea X un campo vectorial en N. Entonces, existe un único mapeo $\Phi : \mathfrak{D} \to N$ tal que $t \mapsto \Phi_t = \Phi(m,t)$ es una curva integral en m, para toda $m \in N$.*
Demostración: Ver [5], Proposition 2.1.15. ■

[2] Cabe aclarar que dicha función H no es la función Hamiltoniana definida en la sección anterior.

Definición 3.2.6 *Sea N una variedad y sea X un campo vectorial en N. Entonces el mapeo Φ_t es llamado la integral de X, y la curva $t \mapsto \Phi(m,t)$ es llamada la curva integral maximal de X en m. En el caso de que X sea completo, Φ_t es llamado flujo de X.*

Proposición 3.2.5 (Teorema de Liouville) *Sea (N, ω, X_H) un sistema Hamiltoniano, y sea Φ_t el flujo de X_H. Entonces para cada t, Φ_t es simpléctica, es decir, $\Phi_t^*\omega = \omega$. También, Φ_t preserva el volumen de fase Ω_ω.*
Demostración: Ver [5], Proposition 3.3.4. ■

Definición 3.2.7 *Sea (N, ω) una variedad simpléctica y sean f, g funciones reales C^∞, con X_f y X_g sus respectivos campos vectoriales Hamiltonianos asociados en N. Los paréntesis de Poisson de f y g se definen como la función*

$$\{f, g\}(u) = \omega(X_f, X_g)(u), \quad u \in N.$$

Se puede ver también que

Proposición 3.2.6 *En coordenadas canónicas (i.e., en una carta simpléctica) $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$, tenemos*

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

Demostración: Ver [5], Corollary 3.3.14. ■

Finalizaremos esta sección mostrando algunas de las caracterizaciones para los simplectomorfismos. Una viene dada por el Teorema de Jacobi y otra se da en términos de los paréntesis de Poisson.

Teorema 3.2.2 (Teorema de Jacobi) *Sean (M, ω) y (N, ρ) dos variedades simplécticas y $f : M \to N$ un difeomorfismo. Entonces f es un simplectomorfismo si y sólo si para cualquier función $h : M \to \mathbb{R}$ y C^∞, $f_* X_h = X_{h \circ f^{-1}}$.*
Demostración: Ver [5], Theorem 3.3.19. ■

Teorema 3.2.3 *Sean (M, ω) y (N, ρ) dos variedades simplpécticas y $F : M \to N$ un difeomorfismo. Entonces F es un simplectomorfismo si y sólo si F preserva los paréntesis de Poisson; es decir, para cualesquiera $f, g : N :\to \mathbb{R}$, funciones C^∞, se tiene que*

$$\{F^* f, F^* g\} = F^*\{f, g\}.$$

Demostración: Ver [5], Proposition 3.3.20. ■

Consideremos las variedades $\mathbb{R}^2$ con la 2-forma $\omega = dp \wedge dx$ y $\mathbb{C}$ con la 2-forma $\rho = -id\bar{z} \wedge dz$ en donde la variable compleja z se define como $z = \frac{x - ip}{\sqrt{2}}$. Tenemos que ω definida de esta manera satisface

1. Es cerrada, pues $d\omega = d(dp \wedge dx) = d(dp) \wedge dx - dp \wedge d(dx) = 0$.

2. Es no degenerada, ya que si consideramos cualquier $\xi \in T\mathbb{R}^2$, con $\xi \neq 0$ podemos encontrar $\eta \in T\mathbb{R}^2$ tal que $\omega(\xi, \eta) \neq 0$. Es decir, sean $\xi = f_1(x,p)\partial/\partial x + f_2(x,p)\partial/\partial p$ y $\eta = g_1(x,p)\partial/\partial x + g_2(x,p)\partial/\partial p$ con $f_i, g_i, \;\; i = 1, 2$, funciones suaves en $\mathbb{R}^2$, en donde $\xi \neq 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \omega(\xi, \eta) &= dp \wedge dx(f_1(x,p)\partial/\partial x + f_2(x,p)\partial/\partial p, g_1(x,p)\partial/\partial x + g_2(x,p)\partial/\partial p) \\ &= f_2(x,p)g_1(x,p) - f_1(x,p)g_2(x,p). \end{aligned}$$

Podemos definir $\eta = f_2(x,p)\partial/\partial x - f_1(x,p)\partial/\partial p$, así

$$\omega(\xi,\eta) = (f_2(x,p))^2 + (f_1(x,p))^2$$

y dado que $\xi \neq 0$ se tiene que $\omega(\xi,\eta) \neq 0$.

Y por tanto ω es una 2-forma simpléctica para $\mathbb{R}^2$. Así, $(\mathbb{R}^2,\omega)$ es una variedad simpléctica.

Consideremos ahora la transformación F definida por

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^2, dp \wedge dx) &\rightarrow (\mathbb{C}^2, d\pi \wedge dz) \\ (x,p) &\mapsto (z,\pi) = \left(\frac{x-ip}{\sqrt{2}}, -i\frac{x+ip}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

en la cual se ve que $\pi = -i\bar{z}$. Notemos también que $\mathbb{C}^2$ es una variedad simpléctica con la forma $\kappa = d\pi \wedge dz$, la prueba de esto se reduce al caso anterior.

Definamos la siguiente subvariedad de $\mathbb{C}^2$,

$$\mathcal{D} = \{(z,\pi) \in \mathbb{C}^2 | \pi = -i\bar{z}\}.$$

Entonces podemos considerar a $\mathcal{D}$ como variedad simpléctica con forma simpléctica τ dada por $\kappa|_{\mathcal{D}}$. Reescribiendo entonces a F, tenemos

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^2, \omega) &\rightarrow (\mathcal{D}, \tau) \\ (x,p) &\mapsto (z, -i\bar{z}) = \left(\frac{x-ip}{\sqrt{2}}, -i\frac{x+ip}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Más aún, el mapeo G definido por

$$\begin{aligned} G : (\mathcal{D}, \tau) &\rightarrow (\mathbb{C}, \rho) \\ (z, -i\bar{z}) &\mapsto z \end{aligned}$$

nos permite hacer la identificación $\mathcal{D} \cong \mathbb{C}$ por medio de la transformación canónica que este define. Así, hemos encontrado que la transformación

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbb{R}^2, dp \wedge dx) &\rightarrow (\mathbb{C}, -id\bar{z} \wedge dz) \\ (x,p) &\mapsto \Phi(x,p) = \frac{x-ip}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

es también un simplectomorfismo.

Función generadora

En esta sección redefiniremos el concepto de transformación canónica de tal manera que nos sea posible introducir la definición de funciones generadoras. Presentamos la siguiente caracterización.

Proposición 3.2.7 *Sean (P_1,ω_1) y (P_2,ω_2) variedades simplécticas, $\pi_i : P_1 \times P_2 \rightarrow P_i$ la proyección sobre P_i, $i = 1,2$ y*

$$\Omega = \pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2. \tag{3.4}$$

Entonces:

i) Ω *es una forma simpléctica en* $P_1 \times P_2$.

ii) *Un mapeo* $f : P_1 \to P_2$ *es un simplectomorfismo si y sólo si* $i_f^*\Omega = 0$*, donde* $i_f : \Gamma_f \to P_1 \times P_2$ *es el mapeo de inclusión y* Γ_f *es la gráfica de* f.

Demostración: Ver [5], Proposition 5.2.1. ■

Lema 3.2.1 (Lema de Poincaré) *Si* ω *es una* k*-forma cerrada, entonces para cada* $m \in M$*, existe una vecindad* U *de* m *para la cual* $\omega|U$ *es exacta. Esto es, localmente existe una* $(k-1)$*-forma* α *tal que* $\omega = d\alpha$.

Demostración: Ver [5], Theorem 2.4.17.

Supongamos ahora que $\Omega = d\theta$ (localmente). Por ejemplo, si $\theta = \pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2$ es la 1-forma con $d\theta_i = \omega_i$, $i = 1, 2$ efectivamente se verifica que

$$d\theta = d(\pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2) = d\pi_1^*\theta_1 - d\pi_2^*\theta_2 = \pi_1^* d\theta_1 - \pi_2^* d\theta_2 = \pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2.$$

Luego, si f es un simplectomorfismo, el teorema implica que $i_f^*\Omega = 0$, lo que a su vez es equivalente a $i_f^* d\theta = 0$, o bien es análogo a tener que $d(i_f^*\theta) = 0$. Por tanto, $i_f^*\theta$ es cerrada. Entonces por la proposición podemos concluir que f es un simplectomorfismo si y sólo si $i_f^*\theta$ es cerrada. Más aún por el Lema de Poincaré, existe una función $S : \Gamma_f \to \mathbb{R}$ tal que

$$i_f^*\theta = dS.$$

Definición 3.2.8 *Llamamos a tal función* S *una función generadora para el simplectomorfismo* f *(depende claramente de la elección de* θ *y es localmente definido).*

3.3. Elementos de mecánica cuántica

Describiremos los elementos de la mecánica cuántica de manera similar a como lo hicimos con los elementos de la mecánica clásica. Dicho de otra manera, describiremos la estructura de la mecánica cuántica mediante una analogía con la mecánica clásica, haciendo hincapié en que no estamos dando una equivalencia entre éstas.

Con el nacimiento de la mecánica cuántica se introduce una cantidad física de carácter fundamental, esta es la llamada constante de Planck. La cual tiene un valor determinado experimentalmente y tiene dimensiones físicas de energía×tiempo = acción, su valor numérico es $h = 6.626 \times 10^{-27} erg - seg$ (en unidades c.g.s). Frecuentemente se usa $\hbar$, un múltiplo de ella en lugar de h, y es la constante de la cual haremos uso en este trabajo

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-27} erg - seg.$$

Con el fin de obtener a la mecánica clásica como un límite de la mecánica cuántica es importante considerar a $\hbar$ como un parámetro positivo. Al hacer esto estaremos escogiendo la escala en la que estaremos trabajando. Así pues cuando $\hbar$ tome valores pequeños diremos que estamos en la región semiclásica y en el límite $\hbar \to 0$, obtendremos propiedades asociadas a la mecánica clásica.

En la siguiente tabla enlistaré las relaciones que podemos hacer entre una estructura y la otra, en donde la información ha sido recabada de la fuente [2].

Mecánica Clásica	Mecánica Cuántica
Espacio fase $\mathbb{R}^{2n}$	Espacio de Hilbert complejo $\mathbf{H}$
Puntos en el espacio fase (x, p)	Vectores unitarios φ en $\mathbf{H}$, llamados *estados*
Funciones reales f en el espacio fase	Operadores autoadjuntos (hermitianos) A en $\mathbf{H}$
El valor $f(x, p) \in \mathbb{R}$ de una función f en el punto (x, p)	Valor esperado de un operador A en el estado φ, definido como $\langle \varphi, A\varphi \rangle$
Paréntesis de Poisson $\{f_1, f_2\}$	Conmutador $\frac{1}{i\hbar}[A_1, A_2]$
La dinámica (ecuaciones de movimiento): $\frac{df}{dt} = \{f, H\}$	La dinámica $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, \hat{H}]$

Recordemos que en la formulación Hamiltoniana de la mecánica clásica la dinámica del sistema está gobernada por el Hamiltoniano H mediante las ecuaciones de Hamilton. Dicha H es una función real definida en el espacio fase; por tanto, según se nos indica en la tabla, a ésta función debería entonces corresponderle un operador autoadjunto $\hat{H}$ en el espacio de Hilbert (cuántico), a dicho operador se le conoce como operador Hamiltoniano cuántico.

Otro de los puntos que asumiremos es que la dinámica de los estados $\varphi \in \mathbf{H}$ satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\varphi}{dt} = \hat{H}\varphi.$$

Así como en la estructura clásica tenemos que la dinámica está descrita por la variación en el tiempo de las funciones definidas en el espacio fase, mediante la ecuación de Schrödinger podemos establecer la dinámica en la estructura cuántica, como la variación en el tiempo de algún operador actuando en algún estado perteneciente al espacio de Hilbert, y deducir la ecuación de Heisenberg de movimiento tal y como se muestra en [21]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, \hat{H}].$$

Con esto, tenemos todos los ingredientes que necesitamos para exhibir a qué nos referimos cuando hablamos de *relacionar* a elementos de la mecánica clásica con los de la mecánica cuántica, ¿cómo es posible llevar a cabo ese proceso? Justamente en los siguientes capítulos responderemos esta pregunta.

3.4. Transformaciones Canónicas y Mapeos Unitarios

Siguiendo con la idea de encontrar un programa que me permita relacionar los esquemas clásicos y cuánticos de la mecánica uno se encuentra con una relación más, a saber, que las transformaciones canónicas (simplectomorfismos) que se definen en el espacio fase (clásico) tienen un análogo cuántico, éstas son las transformaciones unitarias definidas en espacios de Hilbert. Es importante destacar y estudiar las transformaciones canónicas porque justamente podemos ver a la Transformada de Segal-Bargmann, la cual es un operador unitario, como el análogo cuántico de una transformación canónica en el espacio fase de posiciones y momentos. Y más aún, podemos encontrar relación entre el núcleo integral de la Transormada de Segal-Bargmann y alguna función generadora de la transformación canónica en el espacio fase. En este pequeño apartado seguiremos las ideas de Moshinsky [8] para describir cómo obtener la Transformada de Bargmann a partir de una transformación canónica.

Primero que todo, notemos que cuando consideramos el sistema uni-dimensional que tiene a $\mathbb{R}^2$ como espacio fase con coordenadas de posición y momento, x y p, pasar al esquema cuántico se realiza luego de haber definido los operadores hermitianos $\hat{x}$, $\hat{p}$ definidos en $L^2(\mathbb{R}, dx)$ de tal manera que los paréntesis de Poisson son reemplazados por conmutadores y verificando que se satisfacen las R. C. C.[3]; es decir, se satisface

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}] = iI, &\qquad [\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0 \\ \hat{x}^\dagger = \hat{x} &\qquad \hat{p}^\dagger = \hat{p}. \end{aligned}$$

En [9] se encuentra una solución a las R. C. C. a través de considerar las siguientes expresiones

$$\hat{x}\psi(x) = x\psi(x), \qquad \hat{p}\psi(x) = -i\frac{\partial}{\partial x}\psi(x).$$

De hecho, esto lo hemos comprobado a inicios del capítulo anterior cuando introdujimos los operadores de posición y momento, en este caso $\hat{x}$ y $\hat{p}$ son los mismos que se han venido considerando desde el capítulo anterior.

Consideremos una vez más la transformación canónica del espacio fase real $\mathbb{R}^2$ al espacio fase complejo $\mathbb{C}^2$ dada por

$$\begin{pmatrix} z \\ \pi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

en la cual para poder regresar a nuestras variables originales x y p se imponen las condiciones de realidad $\overline{z} = i\pi$ y $\overline{\pi} = iz$, condiciones que nos ayudan a establecer el rango de esta transformación. Podemos hacer la identificación $\pi = -i\overline{z}$ llegando como en la sección anterior a la conclusión de que la transformación

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x, p) &\mapsto z = \frac{x - ip}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

es una transformación canónica que satisface

$$\{z, \pi\} = \{x, p\} = 1, \quad \{\pi, \pi\} = \{z, z\} = 0,$$

es decir, los paréntesis de Poisson se preservan bajo tal transformación. Nos preguntamos si del espacio fase complejo con coordenadas z se puede pasar a un espacio de Hilbert como lo hicimos para el caso del espacio fase (x, p). El resultado es afirmativo; haciendo la analogía con el caso anterior resolviendo los conmutadores

$$[\hat{z}, \hat{\pi}] = iI, \qquad [\hat{z}, \hat{z}] = [\hat{\pi}, \hat{\pi}] = 0,$$

encontramos que una solución esta dada por los operadores $\hat{z}$ y $\hat{\pi}$ que actúan en funciones holomorfas de cuadrado integrable como

$$\begin{aligned} \hat{z}f(z) = zf(z), &\qquad \hat{\pi}f(z) = -i\frac{\partial}{\partial z}f(z) \\ \hat{z}^\dagger = i\hat{\pi}, &\qquad \hat{\pi}^\dagger = i\hat{z}, \end{aligned}$$

lo cual es justamente la observación de Fock mencionada anteriormente. Siguiendo las ideas de Bargmann encontramos que el espacio de Hilbert que cumple es el espacio de Segal-Bargmann.

[3]En [9], sección IV, se describe también este procedimiento.

En este contexto es posible también encontrar el núcleo integral de la Transformada de Segal-Bargmann siguiendo el razonamiento que Bargmann implementó. Sin abundar en detalles, mencionaremos el proceso que se sigue para obtener la Transformada y que se desarrolla en [1] y [8].

Consideramos los espacios de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)$ y el espacio de Segal-Bargmann $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, \mu_\hbar)$. Mediante el Teorema de Stone-von Neumann aseguramos la existencia de un operador unitario entre estos espacios de Hilbert tal como se vio en el capítulo anterior. Supongamos entonces que existe una transformación integral tal que para cada $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}, dx)$,

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\hbar(z,x)\psi(x)dx \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, \mu_\hbar).$$

Guiándonos por la transformación (3.5) definimos los siguientes operadores en $L^2(\mathbb{R}, dx)$ como su contraparte cuántica

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\partial}{\partial x}) \\ -i\hat{\xi} &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(x + \frac{\partial}{\partial x}) \end{aligned}$$

tales que $[\hat{\xi}, \hat{\eta}] = I$, $\hat{\eta}^\dagger = \hat{\xi}$ y $\hat{\xi}^\dagger = \hat{\eta}$, después buscamos una asociación con los operadores $\hat{z}$ y $\hat{\pi}$ definidos anteriormente en el espacio de Bargmann dada por las ecuaciones integrales

$$\begin{aligned} \hat{z}f(z) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\hbar(z,x)\hat{\eta}\psi(x)dx \\ \hat{\pi}f(z) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\hbar(z,x)(-i\hat{\xi})\psi(x)dx \end{aligned}$$

o bien, ayudándonos del teorema de derivación bajo el signo integral[4] para la segunda ecuación,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} z\mathcal{A}_\hbar(z,x)\psi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} (\hat{\xi}\mathcal{A}_\hbar)(z,x)\psi(x)dx \\ -i\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{A}_\hbar(z,x)\psi(x)dx &= -i\int_{\mathbb{R}} (\hat{\eta}\mathcal{A}_\hbar)(z,x)\psi(x)dx. \end{aligned}$$

Las cuales nos llevan a las ecuaciones diferenciales

$$z\mathcal{A}_\hbar(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{A}_\hbar(z,x) \tag{3.6}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{A}_\hbar(z,x) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{A}_\hbar(z,x). \tag{3.7}$$

Reescribiendo (3.6),

$$\left(z - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\mathcal{A}_\hbar(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_\hbar(z,x)$$

se tiene que su solución es de la forma $\mathcal{A}_\hbar(z,x) = \varphi(z)e^{\sqrt{2}zx - x^2/2}$. Luego, sustituyendo esta función en (3.7), haciendo las operaciones indicadas y simplificando, tenemos la ecuación

$$\varphi'(z) = -z$$

[4]Teorema 12.2, [16]

la cual tiene por solución $\varphi(z) = Ke^{-z^2/2}$, con K una constante. Así, eligiendo $K = (\pi\hbar)^{-1/4}$ tenemos que

$$\mathcal{A}_\hbar(z,x) = (\pi\hbar)^{-1/4} e^{(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z - x^2)/2\hbar}.$$

Hemos encontrado el núcleo integral de la transformación integral

$$\begin{array}{rcl} A_\hbar : L^2(\mathbb{R}, dx) & \to & HL^2(\mathbb{C},\ \mu_\hbar) \\ A_\hbar f(z) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\hbar(z,x) f(x) dx, \ \ \forall f(x) \in L^2(\mathbb{R}, dx) \end{array}$$

el cual confirmamos que es

$$\mathcal{A}_\hbar(z,x) = (\pi\hbar)^{-1/4} e^{(-z^2+2\sqrt{2}x\cdot z - x^2)/2\hbar}$$

tal y como se había descrito en el capítulo anterior.

Tratemos de relacionar la Transformada de Segal-Bargmann con alguna transformación canónica en el espacio fase. Sigamos ahora con la notación de la proposición (3.2.7). Sean P_1 el espacio fase real y P_2 el espacio fase complejo definidos por $(P_1, \omega_1) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dx)$ y $(P_2, \omega_2) = (\mathbb{C}, -id\overline{z} \wedge dz)$. Consideremos las 1-formas $\theta_1 = pdx$ y $\theta_2 = -i\overline{z}dz$ sobre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ respectivamente, las cuales satisfacen $d\theta_j = \omega_j,\ j = 1, 2.$
Sea F la función definida por

$$\begin{array}{rcl} F : P_1 & \to & P_2 \\ (x,p) & \mapsto & F(x,p) = \dfrac{x - ip}{\sqrt{2}}, \end{array}$$

en párrafos previos se vio que esta transformación es canónica. Definiendo $\theta = \pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2$, en donde $d\theta_i = \omega_i$ para $i = 1, 2$; se tiene que $\Omega = d\theta$. Luego, ya que F es canónica, se sigue de la proposición (3.2.7) que $i_F^*\theta$ es cerrada. Luego, por el Lema de Poincaré, existe una función $S : \Gamma_F \to \mathbb{R}$ tal que $i_F^*\theta = dS$.

Consideremos la curva $\beta : \mathbb{R} \to \Gamma_F$ con $\beta(0) = P$, y vector de velocidad $(d\beta/dt)|_{t=0} = \nu$. Explícitamente $\beta(t) = (x(t), p(t), z(t)) \in \Gamma_F$ y $\nu = \left.\dfrac{d\beta}{dt}\right|_{t=0}(t) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}(x(t), p(t), z(t))$. Así, para $\nu \in T\Gamma_{F,P}$,

$$\begin{array}{rcl} i_F^*\theta(\nu) & = & i_F^*(\pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2)(\nu) = (\pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2)(i_F\nu) = (\pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2)(\nu) \\ & = & \theta_1(\pi_{1_*}\nu) - \theta_2(\pi_{2_*}\nu) = \theta_1\left(\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}(x(t), p(t))\right) - \theta_2\left(\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}(z(t))\right) \\ & = & p(0)\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}(t) + i\overline{z}(0)\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=0}(t). \end{array}$$

Por tanto,

$$dS(\nu) = p(0)\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}(t) + i\overline{z}(0)\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=0}(t)$$

Esta última igualdad sugiere que

$$\begin{array}{rcl} p & = & \dfrac{\partial S}{\partial x} \\ i\overline{z} & = & \dfrac{\partial S}{\partial z}. \end{array}$$

Escribiendo a p y a $i\overline{z}$ en las ecuaciones anteriores, en términos de x y z, tenemos

$$\begin{array}{r} \dfrac{\partial S}{\partial x} = i(\sqrt{2}z - x) \\ -\dfrac{\partial S}{\partial z} = i(z - \sqrt{2}x). \end{array}$$

Resolviendo la primera ecuación, tenemos que $S(x,z) = i\sqrt{2}zx - ix^2/2 + \varphi(z)$. Luego, utilizando la segunda ecuación tenemos que la función $\varphi(z) = -iz^2/2 + C$, con C una constante. Por lo tanto, la función que satisface las ecuaciones diferenciales está dada por

$$S(x,p;z) = -\frac{i}{2}(z^2 - 2\sqrt{2}xz + x^2), \tag{3.8}$$

la cual es un múltiplo de la función que aparece en el argumento de la función exponencial del núcleo integral de la Transformada de Segal-Bargmann.

Recapitulemos los resultados obtenidos. Hemos definido una transformación canónica entre un espacio fase real y un espacio fase complejo, con coordenadas (x,p) y z, respectivamente. Logramos pasar a un esquema cuántico encontrando operadores que fueron solución a los conmutadores de tal manera que satisfacieran las R. C. C. en ambos casos. Usando después, la transformación canónica como sugerencia para definir los operadores de aniquilación y creación, se logró obtener una correspondencia entre los operadores actuando en el espacio de Segal-Bargmann y los operadores de aniquilación y creación definidos en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Justamente, la correspondencia encontrada cuya existencia está garantizada por el Teorema de Stone-von Neumann, es la Transformada de Segal-Bargmann. Finalmente, encontramos una función generadora para la transformación canónica. Lo relevante de esta función generadora es que, salvo una constante, es el argumento del núcleo integral de la Transformada de Segal-Bargmann.

Transformada $B_\hbar$

Siguiendo el planteamiento presentado en [8], también es posible obtener la Transformada de Segal-Bargmann en la forma $B_\hbar$. Recordemos que nuestro objetivo fue encontrar un mapeo unitario de $L^2(\mathbb{R}^n, \rho_\hbar(x)dx)$ al espacio de Bargmann $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$ el cual transforma los operadores $\tilde{a}_k$ y $\tilde{a}_k^\dagger$ en los operadores $\hbar\frac{\partial}{\partial z_k}$ y z_k, respectivamente. Recordemos también que $\rho_\hbar(x)dx = (2\pi\hbar)^{-n/2}e^{-x^2/2\hbar}$. En lo que sigue consideraremos $n = 1 = \hbar$, la extensión a $n > 1$ se hace de manera similar que en los resultados del capítulo 2. Continuaremos desarrollando ideas análogas a las expuestas en [8].

Consideremos el espacio fase (x,p) para el sistema clásico unidimensional descrito por las coordenadas canónicamente conjugadas x y p. Es decir, x es la coordenada para la posición y p es la coordenada de momento en el espacio tangente en el punto dado x. Consideremos el nuevo par de variables complejas (z,π) dado por la matriz $g = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la cual nos define el mapeo $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2$, dado por $(x,p) \mapsto (z,\pi)$

$$\begin{pmatrix} z \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Para asegurarnos de que podemos regresar a nuestras variables reales x y p, debemos imponer en z y π las condiciones de realidad

$$x = z + i\pi = \overline{x} = \overline{z} - i\overline{\pi} \tag{3.10}$$
$$p = \pi = \overline{p} = \overline{\pi} \tag{3.11}$$

o bien,

$$\overline{z} = z + 2i\pi \tag{3.12}$$
$$\overline{\pi} = \pi. \tag{3.13}$$

En la sección anterior vimos que $\mathbb{R}^2$ es una variedad simpléctica dotada con la 2-forma canónica $\omega = dp \wedge dx$. Identificando ahora a z como $z = x - ip$, se tiene que $(\mathbb{C}^2, \nu = d\pi \wedge dz)$ es una variedad simpléctica. Definamos entonces la siguiente subvariedad de $\mathbb{C}^2$,

$$\mathcal{D} = \{(z, \pi) \in \mathbb{C}^2 | \pi = (\overline{z} - z)/2i\}.$$

Entonces podemos considerar a $\mathcal{D}$ como variedad simpléctica con forma simpléctica $\nu|_{\mathcal{D}}$. Reescribiendo entonces a Φ, tenemos

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbb{R}^2, \omega) &\to (\mathcal{D}, \varrho = \nu|_{\mathcal{D}}) \\ (x, p) &\mapsto \left(z, \frac{\overline{z} - z}{2i}\right) = (x - ip, p). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ya que dicha transformación es un difeomorfismo y también su inversa, y además $\Phi^* \varrho = \omega$, se tiene que Φ es un simplectomorfismo.

Ahora vamos a considerar los espacios de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \rho(x)dx)$ el cual denotaremos simplemente por L^2, y el espacio de Bargmann $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, \mu_\hbar)$ denotado por $\mathcal{H}L^2$. Supongamos que existe una transformada integral cuyo núcleo integral viene representado por $B_\hbar(z, x)$ y es tal que para cualquier $\psi(x) \in L^2$,

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} B_\hbar(z, x) \psi(x) \rho(x) dx \in \mathcal{H}L^2. \tag{3.15}$$

Vamos a introducir en L^2 los operadores sugeridos por (3.9)

$$\hat{\eta} = \hat{x} - i\hat{p} = x - \frac{\partial}{\partial x} \tag{3.16}$$

$$-i\hat{\xi} = \hat{p} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.17}$$

los cuales cumplen que $[\hat{\xi}, \hat{\eta}] = I$, $\hat{\eta}^\dagger = \hat{\xi}$.

Nuestro objetivo es entonces asociar $\hat{\eta}$ en L^2 con $\hat{z}$ =mutiplicación por z en $\mathcal{H}L^2$ y $-i\hat{\xi}$ en L^2 con $\hat{\pi} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z}$ en $\mathcal{H}L^2$. Esto requiere que para cualquier $\psi(x) \in L^2$

$$\hat{z} f(z) = \int_{\mathbb{R}} B_\hbar(z, x)(\hat{\eta}\psi(x))\rho(x)dx \tag{3.18}$$

$$\hat{\pi} f(z) = \int_{\mathbb{R}} B_\hbar(z, x)(-i\hat{\xi}\psi(x))\rho(x)dx \tag{3.19}$$

considerando (3.15) y el teorema de derivación bajo el signo integral[5], las ecuaciones (3.18) y (3.19) pueden ser escritas como

$$\int_{\mathbb{R}} [z B_\hbar(z, x)]\psi(x)\rho(x)dx = \int_{\mathbb{R}} [\hat{\xi} B_\hbar(z, x)]\psi(x)\rho(x)dx \tag{3.20}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z} B_\hbar(z, x)\right] \psi(x)\rho(x)dx = \int_{\mathbb{R}} [-i\hat{\eta} B_\hbar(z, x)]\psi(x)\rho(x)dx, \tag{3.21}$$

[5] Teorema 12.2 [16]

lo que a su vez implica

$$\begin{aligned} zB_\hbar(z,x) &= \hat{\xi}B_\hbar(z,x) = \frac{\partial}{\partial x}B_\hbar(z,x) & (3.22)\\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z}B_\hbar(z,x) &= -i\hat{\eta}B_\hbar(z,w) = -i\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)B_\hbar(z,x). & (3.23)\end{aligned}$$

De (3.22) tenemos

$$zB_\hbar(z,x) = \frac{\partial}{\partial x}B_\hbar(z,x),$$

dicha ecuación tiene por solución a la función

$$B_\hbar(z,x) = e^{zx}\varphi(z). \tag{3.24}$$

Luego utilizando (3.23)

$$\frac{\partial}{\partial z}B_\hbar(z,x) = xB_\hbar(z,x) - \frac{\partial}{\partial x}B_\hbar(z,x),$$

tenemos la ecuación diferencial

$$xe^{zx}\varphi(z) + e^{zx}\varphi'(z) = xe^{zx}\varphi(z) - ze^{zx}\varphi(z)$$

$$\varphi'(z) = -z\varphi(z)$$

cuya solución es

$$\varphi(z) = e^{-z^2/2}. \tag{3.25}$$

Así, sustituyendo (3.25) en (3.24) tenemos que el núcleo integral viene dado por

$$B_\hbar(z,x) = e^{zx-z^2/2}.$$

Por tanto,

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx-z^2/2}\psi(x)\rho(x)dx,$$

reemplazando $\rho(x)$ por $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ tenemos finalmente que

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx-z^2/2}\psi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx, = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(z-x)^2/2}\psi(x)dx,$$

como se quería demostrar.

Tratemos de relacionar la Transformada de Segal-Bargmann $B_\hbar$ con alguna transformación canónica del el espacio fase. Utilizando de nuevo la notación de la proposición (3.2.7). Sean P_1 el espacio fase real y P_2 el espacio fase complejo definidos por $(P_1,\omega_1) = (\mathbb{R}^2, dp\wedge dx)$ y $(P_2,\omega_2) = (\mathcal{D}, (1/2i)d\overline{z}\wedge dz)$, en donde $\theta_1 = pdx$ y $\theta_2 = \frac{\overline{z}-z}{2i}dz$, con $z = x - ip$, son tales que $d\theta_j = \omega_j$, $j = 1,2$.
Sea Φ la transformación canónica definida anteriormente por

$$\begin{aligned} \Phi : (P_1,\omega_1) &\rightarrow (P_2,\omega_2)\\ (x,p) &\mapsto \Phi(x,p) = (x-ip,p) = (z,\pi).\end{aligned}$$

Definiendo $\theta = \pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2$, en donde $d\theta_i = \omega_i$ para $i = 1,2$; se tiene que $\Omega = d\theta$. Luego, ya que Φ es canónica, se sigue de la proposición (3.2.7) que $i_\Phi^*\theta$ es cerrada. Luego, por el Lema de Poincaré, existe una función $R : \Gamma_\Phi \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $i_\Phi^*\theta = dR$.

Consideremos la curva $\sigma : \mathbb{R} \to \Gamma_\Phi$ con $\sigma(0) = P$, y vector de velocidad $(d\sigma/dt)|_{t=0} = \nu$. Explícitamente $\sigma(t) = (x(t), p(t), z(t), \pi(t)) \in \Gamma_\Phi$ y $\nu = \left.\dfrac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0}(t) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}(x(t), p(t), z(t), \pi(t))$. Así, para $\nu \in T\Gamma_{\Phi,P}$,

$$\begin{aligned} i_\Phi^*\theta(\nu) &= i_\Phi^*(\pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2)(\nu) = (\pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2)(i_\Phi\nu) = (\pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2)(\nu) \\ &= \theta_1(\pi_{1_*}\nu) - \theta_2(\pi_{2_*}\nu) = \theta_1\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(x(t), p(t))\right) - \theta_2\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(z(t), \pi(t))\right) \\ &= p(0)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}(t) - \frac{\overline{z}(0) - z(0)}{2i}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}(t). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$dR(\nu) = p(0)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}(t) - \frac{\overline{z}(0) - z(0)}{2i}\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}(t)$$

Esta última igualdad sugiere que

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ -\frac{\overline{z} - z}{2i} &= \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}$$

Reescribiendo estas expresiones en términos de las variables x y z, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= i(z - x) \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= -i(z - x). \end{aligned}$$

En donde resolviendo las ecuaciones diferenciales se obtiene que la función que las satisface es

$$R(x, p; z, \pi) = -\frac{i}{2}(z - x)^2 \tag{3.26}$$

la cual es un múltiplo de la función que aparece en el argumento de la Transformada de Segal-Bargmann $B_\hbar$.

CAPÍTULO 4

Cuantización geométrica

En el capítulo anterior han quedado establecidos los elementos en cada uno de los marcos clásico y cuántico, ahora nos será posible decir cuál es el objetivo que perseguimos. Lo que buscamos es realizar un procedimiento que nos permita pasar de la estructura clásica a la estructura cuántica, es decir, que nos permita "llevar" los elementos que encontramos en la mecánica clásica a elementos en la mecánica cuántica. A dicho proceso le llamaremos **cuantización**. Como ya se venía mencionando, el proceso de **cuantización** nos da una *analogía* entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica más no una equivalencia entre éstos dos esquemas. En general no hay procedimiento a seguir cuando vamos a *cuantizar*, de hecho existen varios esquemas de cuantización que para casos muy específicos se tiene establecida la cuantización a seguir. No está por demás decir que el esquema que desarrollaremos es un esquema geométrico, en el cual se da una variedad simpléctica, y se busca construir un espacio de Hilbert así como operadores actuando en este mismo.

Como se podrá observar, empezaremos proponiendo un programa de precuantización para dar la relación mencionada en el párrafo anterior. Dicha relación será una analogía dada por un mapeo entre elementos de la mecánica clásica y elementos de la mecánica cuántica. Sin embargo este programa no será el que satisfaga las propiedades requeridas, esto nos llevará a proponer lo que será el esquema definitivo para obtener los espacios de Segal-Bargmann y los operadores definidos en ellos partiendo de algunos elementos clásicos. Las definiciones y la mayoría de los resultados aquí presentados fueron tomados de [3].

4.1. Precuantización

Partiendo de la variedad simpléctica (N, ω), lo que pretendemos es construir un espacio de Hilbert y con ello un mapeo que asocie a cada función suave en N con un operador en el espacio de Hilbert. En esta sección, se trata de reproducir la línea de exposición seguida en [3], complementando con desarrollos adicionales para exponer algunos resultados. A lo largo del capítulo vamos a considerar la variedad simpléctica $\mathbb{R}^{2n}$ con la 2-forma canónica[1] $w = dp_j \wedge dx_j$ como nuestro espacio fase con coordenadas $(x, p) = (x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$. Es decir, buscamos $\mathbf{H}$ y Q tal que

[1]En parte del texto estaremos usando el convenio de suma de Einstein.

Q : Clase funciones en el espacio fase $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow$ operadores en el espacio de Hilbert $\mathbf{H}$

satisfaciendo las propiedades:

1. Si f es una función real, entonces $Q(f)$ es autoadjunto.
2. Si f es la función constante $\mathbf{1}$, entonces $Q(\mathbf{1}) = I$.
3. $Q(\{f, g\}) = [Q(f), Q(g)]/(i\hbar)$.
4. Irreducibilidad del espacio $\mathbf{H}$ bajo ciertos operadores.

A pesar de que el Teorema de Groenewold-van Hove asevera la no existencia de tal mapeo, trataremos de aproximarnos para cumplir las cuatro propiedades tanto como sea posible.

Recordemos que dada una función f suave en $\mathbb{R}^{2n}$, podemos considerar su **campo vectorial Hamiltoniano** asociado dado por la siguiente expresión

$$X_f = \{f, \cdot\} = \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

actuando en $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

También, tenemos la siguiente propiedad

Proposición 4.1.1 *Sean X_f y X_g los campos vectoriales asociados a f y g, con f y g funciones suaves en $\mathbb{R}^{2n}$. Entonces*

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}.$$

Demostración: Sea $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, entonces

$$[X_f, X_g]h = X_f(X_g h) - X_g(X_f h) = X_f(\{g, h\}) - X_g(\{f, h\}) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}.$$

Utilizando las propiedades del paréntesis de Poisson enunciadas en la proposición (3.1.1), sabemos que los paréntesis de Poisson satisfacen la identidad de Jacobi, podemos despejar en esta para $\{g, \{f, h\}\}$ y obtener con ayuda de la antisimetría de los paréntesis de Poisson

$$\begin{aligned}
\{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} &= \{f, \{g, h\}\} + \{f, \{h, g\}\} + \{h, \{g, f\}\} \\
&= \{f, \{g, h\}\} - \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{g, f\}\} = \{h, \{g, f\}\} \\
&= \{h, -\{f, g\}\} = -\{-\{f, g\}, h\} = \{\{f, g\}, h\} = X_{\{f,g\}}h.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ahora, si consideramos los campos vectoriales Hamiltonianos X_f y X_g, con f y g como en la proposición anterior, podemos observar que los operadores $i\hbar X_f$ y $i\hbar X_g$ satisfacen

$$[i\hbar X_f, i\hbar X_g] = (i\hbar)^2 [X_f, X_g] = i\hbar(i\hbar X_{\{f,g\}}),$$

esta igualdad nos motiva a proponer $Q(f) = i\hbar X_f$, notando que efectivamente se satisface la propiedad de conmutación que le exigimos al mapeo Q en la propiedad 3,

$$[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\}).$$

Sin embargo, la propiedad 2 no se satisface, pues $Q(\mathbf{1}) = 0$. Entonces vamos a permitirnos hacer una corrección en la definición propuesta para Q definiendo

$$Q(f) = i\hbar X_f + f,$$

así efectivamente tenemos que $Q(\mathbf{1}) = I$, pero luego nos encontramos que

$$\begin{aligned}
[Q(f), Q(g)] &= [i\hbar X_f + f, i\hbar X_g + g] = i\hbar(i\hbar[X_f, X_g]) + i\hbar[X_f, g] + i\hbar[f, X_g] \\
&= i\hbar(i\hbar[X_f, X_g]) + i\hbar(X_f g - gX_f + fX_g - X_g f) \\
&= i\hbar(i\hbar[X_f, X_g]) + i\hbar\{f, g\} - i\hbar(g\{f, \cdot\} - f\{g, \cdot\})) - i\hbar\{g, f\} \\
&= i\hbar(i\hbar X_{\{f,g\}}) + i\hbar\{f, g\} - i\hbar X_{fg} + i\hbar\{f, g\} \\
&= i\hbar Q(\{f, g\}) - i\hbar X_{fg} + i\hbar\{f, g\} \\
&\neq i\hbar Q(\{f, g\})
\end{aligned}$$

es decir, no se cumple la relación de conmutación que queremos. Esto sigue siendo incompatible con lo que buscamos, así que debemos proponer otra forma para Q. En efecto, lo que debemos hacer es otra correción añadiendo un término más, definido por medio de una 1-forma con ciertas propiedades como se menciona a continuación.

Definición 4.1.1 *Consideremos la variedad simpléctica $\mathbb{R}^{2n}$ con 2-forma canónica $w = dp_j \wedge dx_j$, θ es llamado **potencial simpléctico** para ω si θ es cualquier 1-forma de tal manera que*

$$d\theta = \omega.$$

Con éste elemento que acabamos de introducir podemos entonces mejorar nuestra definición del mapeo Q.

Definición 4.1.2 *Sea f una función suave en $\mathbb{R}^{2n}$, definamos el operador $Q_{pre}(f)$ actuando en $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ como*

$$Q_{pre}(f) = i\hbar\left(X_f - \frac{i}{\hbar}\theta(X_f)\right) + f.$$

Las expresiones f y $\theta(X_f)$ que aparecen en la definición de Q_{pre} denotan operadores de multiplicación por f y $\theta(X_f)$, respectivamente.

*El operador Q_{pre} es la **precuantización** de f y es un operador que actúa en $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ y que en general es un operador no acotado. Al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ le llamaremos **espacio de Hilbert precuántico**.*

De hecho, el término $X_f - \frac{i}{\hbar}\theta(X_f)$ que aparece en la definición del operador Q_{pre} se define como sigue

Definición 4.1.3 *Para cualquier potencial simpléctico θ y cualquier campo vectorial X en $\mathbb{R}^{2n}$, sea ∇_X denotando el operador **derivada covariante**, actuando en $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, dado por*

$$\nabla_X = X - \frac{i}{\hbar}\theta(X). \tag{4.1}$$

Definida de esta manera la derivada covariante, para cualquier $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ real, nos permite reescribir el mapeo Q_{pre} como sigue

$$Q_{pre}(f) = i\hbar\nabla_{X_f} + f.$$

Las siguientes afirmaciones nos ayudarán a probar algunas de las propiedades que debe cumplir el mapeo Q_{pre}.

Afirmación 4.1.1 *Consideremos el campo vectorial*

$$X := \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

en $\mathbb{R}^n$, donde a_j, $j = 1, \dots, n$, son funciones reales suaves en $\mathbb{R}^n$. Si la divergencia de X es idénticamente cero, entonces X es anti-simétrico en $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración: Si div$X = 0$, esto implica que $\dfrac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} = 0$, entonces para f y g, funciones de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ arbitrarias tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle Xf, g\rangle &= \langle \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, g\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, g\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x)\frac{\partial \overline{f}(x)}{\partial x_j} g(x)dx \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial (a_j\overline{f}g)(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}\overline{f}(x)g(x) - a_j(x)\overline{f}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) dx \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j}\overline{f}(x)g(x) - a_j(x)\overline{f}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) dx \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(a_j(x)\overline{f}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) dx \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \langle f, a_j(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}\rangle \\
&= -\langle f, \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}\rangle \\
&= -\langle f, Xg\rangle.
\end{aligned}$$

Notemos que en la tercera línea, como f y g son de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ el primer término se anula al integrarlo, luego en la siguiente línea utilizamos la hipótesis sobre la divergencia de X anulando así el primer término, quedando por tanto

$$\langle Xf, g\rangle = -\langle f, Xg\rangle.$$

■

Afirmación 4.1.2 *Sea $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ una función real. El mapeo $Q_{pre}(f)$ es un operador simétrico actuando en $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$.*

Demostración: Sea $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ una función real, y sea entonces X_f su campo vectorial Hamiltoniano asociado

$$X_f = \left(-\frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial p_n}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

y por tanto $divX_f = 0$. Luego, por la afirmación (4.1.1), X_f es antisimétrico.

Ahora veamos quién es $\langle Q_{pre(f)}g, h\rangle$, con $g, h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$,

$$\begin{aligned}
\langle Q_{pre(f)}g, h\rangle &= \langle (i\hbar X_f + \theta(X_f) + f)g, h\rangle \\
&= \langle i\hbar X_f g, h\rangle + \langle \theta(X_f)g, h\rangle + \langle fg, h\rangle \\
&= -i\hbar\langle X_f g, h\rangle + \langle g, \theta(X_f)h\rangle + \langle g, fh\rangle \\
&= i\hbar\langle g, X_f h\rangle + \langle g, \theta(X_f)h\rangle + \langle g, fh\rangle \\
&= \langle g, i\hbar X_f h\rangle + \langle g, \theta(X_f)h\rangle + \langle g, fh\rangle \\
&= \langle g, (i\hbar X_f + \theta(X_f) + f)h\rangle \\
&= \langle g, Q_{pre}(f)h\rangle.
\end{aligned}$$

Y por tanto, $Q_{pre}(f)$ es simétrico, como se quería. ■

Afirmación 4.1.3 *Sea X cualquier campo vectorial en $\mathbb{R}^n$, entonces $[\nabla_X, f] = X(f)$, para cualquier función real $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
Demostración: Sea $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ real,

$$\begin{aligned}
[\nabla_X, f]g &= \nabla_X(fg) - f\nabla_X(g) \\
&= (X - \frac{i}{\hbar}\theta(X))(fg) - f(X - \frac{i}{\hbar}\theta(X))(g) \\
&= X(fg) - \frac{i}{\hbar}\theta(X)fg - fX(g) + f\frac{i}{\hbar}\theta(X)g \\
&= X(fg) - fX(g) \\
&= X(f)g + fX(g) - fX(g) \\
&= X(f)g.
\end{aligned}$$

■

Afirmación 4.1.4 *Sea θ cualquier potencial simpléctico, sea ∇_X la derivada covariante asociada a θ. Entonces para cualesquiera campos vectoriales suaves X y Y en $\mathbb{R}^{2n}$ se tiene que*

$$[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_{[X,Y]} - \frac{i}{\hbar}\omega(X, Y).$$

En particular, si $X = X_f$ y $Y = X_g$, donde $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, tenemos

$$[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] = \nabla_{X_{\{f,g\}}} + \frac{i}{\hbar}\{f, g\}.$$

Demostración: Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, entonces

$$
\begin{aligned}
([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})f &= \nabla_X((Y - \frac{i}{\hbar}\theta(Y))f) - \nabla_Y((X - \frac{i}{\hbar}\theta(X))f) - ([X,Y] - \frac{i}{\hbar}\theta([X,Y]))f \\
&= (X - \frac{i}{\hbar}\theta(X))(Y - \frac{i}{\hbar}\theta(Y))f - (Y - \frac{i}{\hbar}\theta(Y))(X - \frac{i}{\hbar}\theta(X))f \\
&- XYf + YXf + \frac{i}{\hbar}\theta([X,Y]))f \\
&= XYf - \frac{i}{\hbar}X(\theta(Y)f) - \frac{i}{\hbar}\theta(X)Yf - \frac{\theta(X)\theta(Y)f}{\hbar^2} \\
&- YXf + \frac{i}{\hbar}Y(\theta(X)f) + \frac{i}{\hbar}\theta(Y)Xf + \frac{\theta(Y)\theta(X)f}{\hbar^2} \\
&- XYf + YXf + \frac{i}{\hbar}\theta([X,Y]))f \\
&= -\frac{i}{\hbar}[X(\theta(Y)f) + \theta(X)Yf - Y(\theta(X)f) - \theta(Y)Xf - \theta([X,Y])f] \\
&= -\frac{i}{\hbar}[X(\theta(Y))f + \theta(Y)Xf + \theta(X)Yf - Y(\theta(X))f \\
&- \theta(X)Yf - \theta(Y)Xf - \theta([X,Y])f] \\
&= -\frac{i}{\hbar}[X(\theta(Y))f - Y(\theta(X))f - \theta([X,Y])f] \\
&= -\frac{i}{\hbar}(d\theta)(X,Y)f \\
&= -\frac{i}{\hbar}\omega(X,Y)f.
\end{aligned}
$$

Ahora que si consideramos $X = X_f$ y $Y = X_g$, dado que $\omega(X_f, X_g) = -\{f,g\}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] &= \nabla_{X\{f,g\}} - \frac{i}{\hbar}\omega(X_f, X_g) \\
&= \nabla_{X\{f,g\}} + \frac{i}{\hbar}\{f,g\}.
\end{aligned}
$$

■

Como se había mencionado, nos vamos a valer de las afirmaciones anteriores para probar algunas de las propiedades que satisface el mapeo Q_{pre} definido anteriormente. De hecho, a continuación, demostraremos que Q_{pre} satisface las primeras tres propiedades que se le pide al mapeo que buscamos nos dé el programa de cuantización.

1. *Si f es una función real, entonces $Q_{pre}(f)$ definido en $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ es esencialmente autoadjunto.*

   Demostración: Ver [7], Proposition 6.3.1.

   ■

2. *Si f es la función constante $\mathbf{1}$, entonces $Q(\mathbf{1}) = I$.*

   Demostración: Consideremos la función constante $\mathbf{1}$. Sea $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$
\begin{aligned}
Q_{pre}(\mathbf{1})g &= (i\hbar(X_{\mathbf{1}} - \frac{i}{\hbar}\theta(X_{\mathbf{1}})) + \mathbf{1})g \\
&= i\hbar \cdot 0g + \mathbf{1}g = \mathbf{1}g = g.
\end{aligned}
$$

   Por tanto, $Q_{pre}(\mathbf{1}) = I$. ■

3. *Para todo $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, tenemos la igualdad de operadores*

$$\frac{1}{i\hbar}[Q_{pre}(f), Q_{pre}(g)] = Q_{pre}(\{f,g\}).$$

Demostración: Sean $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i\hbar}[Q_{pre}(f), Q_{pre}(g)] &= \frac{1}{i\hbar}[i\hbar\nabla_{X_f} + f, i\hbar\nabla_{X_g} + g] \\
&= \frac{1}{i\hbar}\big([i\hbar\nabla_{X_f}, i\hbar\nabla_{X_g}] + [i\hbar\nabla_{X_f}, g] + [f, i\hbar\nabla_{X_g}] + [f,g]\big) \\
&= i\hbar[\nabla_{X_f}, \nabla_{X_g}] + [\nabla_{X_f}, g] + [f, \nabla_{X_g}] + 0.
\end{aligned}$$

Luego, por la afirmación (4.1.4) y utilizando también (4.1.3), la última línea se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&= i\hbar\nabla_{X_{\{f,g\}}} - \{f,g\} + X_f(g) - [\nabla_{X_g}, f] \\
&= i\hbar\nabla_{X_{\{f,g\}}} - \{f,g\} + X_f(g) - X_g(f) \\
&= i\hbar\nabla_{X_{\{f,g\}}} - \{f,g\} + \{f,g\} + \{f,g\} \\
&= i\hbar\nabla_{X_{\{f,g\}}} + \{f,g\} \\
&= Q_{pre}(\{f,g\}).
\end{aligned}$$

■

Por lo que hemos desarrollado hasta el momento, podemos observar que el concepto de derivada covariante y por tanto el de pre-cuantización, dependen de la elección del potencial simpléctico, sin embargo, los mapeos pre-cuánticos obtenidos por dos diferentes potenciales simplécticos son unitariamente equivalentes tal y como lo muestra el siguiente teorema.

Proposición 4.1.2 (Proposition 22.5, [3]) *Sean θ_1 y θ_2 dos potenciales simpléctios distintos para la 2-forma canónica, de tal manera que $d(\theta_1 - \theta_2) = 0$. Sean ∇^1 y ∇^2 las derivadas covariantes asociadas a θ_1 y θ_2, respectivamente. Escojamos una función real γ tal que $d\gamma = \theta_1 - \theta_2$ y sea U_γ el mapeo unitario de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ en sí mismo dado por*

$$U_\gamma\psi = e^{-i\gamma/\hbar}\psi.$$

Entonces para todo campo vectorial X, tenemos

$$U_\gamma\nabla^1_X U_\gamma^{-1} = \nabla^2_X.$$

Si $Q^j_{pre}(f)$, $j = 1, 2$, son los mapeos de precuantización asociados, se sigue que

$$U_\gamma Q^1_{pre}(f) U_\gamma^{-1} = Q^2_{pre}(f).$$

*El mapeo U_γ es llamado **transformación de calibración**.*

Demostración: Notemos que el mapeo inverso de U_γ está dado por $U^{-1}\varphi = e^{i\gamma/\hbar}\varphi$, para cualquier $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$, y que la multiplicación por $\theta_1(X)$ conmuta con la multiplicación por $e^{-i\gamma/\hbar}$. Sea entonces $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$,

$$\begin{aligned}
X(e^{i\gamma/\hbar}\varphi) &= e^{i\gamma/\hbar}X(\varphi) + X(e^{i\gamma/\hbar})\varphi \\
&= e^{i\gamma/\hbar}X(\varphi) + \frac{i}{\hbar}e^{i\gamma/\hbar}X(\gamma)\varphi
\end{aligned}$$

y como $X(\gamma) = (d\gamma)(X) = (\theta_1 - \theta_2)(X)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\nabla^1_X(e^{i\gamma/\hbar}\varphi) &= X(e^{i\gamma/\hbar}\varphi) - \frac{i}{\hbar}\theta_1(X)e^{i\gamma/\hbar}\varphi \\
&= e^{i\gamma/\hbar}X(\varphi) + \frac{i}{\hbar}e^{i\gamma/\hbar}(\theta_1 - \theta_2)(X)\varphi - \frac{i}{\hbar}\theta_1(X)e^{i\gamma/\hbar}\varphi \\
&= e^{i\gamma/\hbar}X(\varphi) - \frac{i}{\hbar}\theta_2(X)e^{i\gamma/\hbar}\varphi
\end{aligned}$$

lo que a su vez implica

$$\begin{aligned}
U_\gamma \nabla^1_X U_\gamma^{-1}\varphi &= e^{-i\gamma/\hbar}\left(e^{i\gamma/\hbar}X - \frac{i}{\hbar}\theta_2(X)e^{i\gamma/\hbar}\right)\varphi \\
&= \left(X - \frac{i}{\hbar}\theta_2(X)\right)\varphi \\
&= \nabla^2_X\varphi.
\end{aligned}$$

Para obtener la última afirmación del teorema, sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$, entonces

$$\begin{aligned}
Q^1_{pre}(f)e^{i\gamma/\hbar}\varphi &= (i\hbar\nabla^1_X + f)e^{i\gamma/\hbar}\varphi \\
&= i\hbar\nabla^1_X(e^{i\gamma/\hbar}\varphi) + fe^{i\gamma/\hbar}\varphi.
\end{aligned}$$

Aplicando ahora U_γ a esta igualdad, o lo que es lo mismo, multiplicando por $e^{-i\gamma/\hbar}$ y escribiendo explícitamente quién es ∇^1_X,

$$\begin{aligned}
e^{-i\gamma/\hbar}Q^1_{pre}(f)e^{i\gamma/\hbar}\varphi &= e^{-i\gamma/\hbar}\left((i\hbar e^{i\gamma/\hbar}X_f(\varphi) + e^{i\gamma/\hbar}\theta_2(X_f)\varphi) + fe^{i\gamma/\hbar}\varphi\right) \\
&= i\hbar X_f(\varphi) + \theta_2(X_f)\varphi + f\varphi \\
&= i\hbar(X_f(\varphi) - \frac{i}{\hbar}\theta_2(X_f)\varphi) + f\varphi \\
&= (i\hbar\nabla^2_{X_f} + f)\varphi \\
&= Q^2_{pre}(f)\varphi.
\end{aligned}$$

■

El programa que acabamos de obtener mediante Q_{pre} se ve un cuanto ambicioso de ser considerado como un programa de cuantización. El motivo por el cual no lo consideramos como un programa de cuantización es que presenta algunos problemas. Primeramente que el espacio $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ no es irreducible bajo la acción de los operadores x_j y p_j y con ello no existe el mapeo satisfaciendo las cuatro propiedades enlistadas anteriormente.

Si consideramos el ejemplo del oscilador armónico

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}(p^2 + (m\omega x)^2),$$

se tiene que $\{n\hbar\omega : n \in \mathbb{Z}\}$ son los eigenvalores para $Q_{pre}(H)$, lo cual es físicamente imposible, pues dicho conjunto no está acotado inferiormente. La demostración de dicho enunciado puede encontrarse en [3], proposición 22.6.

Entonces lo que debemos hacer es reducir nuestro espacio de Hilbert, pues el espacio precuántico no funciona al ser muy grande. Debemos buscar un espacio de Hilbert en el cual los operadores de posición y momento actúen irreduciblemente. La pregunta que ahora queda planteada es ¿qué debemos hacer para obtener un mapeo que además de satisfacer las propiedades ya demostradas, también satisfaga la propiedad de irreducibilidad?

4.2. Cuantización

En esta sección seguiremos exponiendo el desarrollo del tema tal y como se hace en [3] agregando como en las secciones anteriores explicaciones que complementan a la exposición original, además de mostrar algunos resultados independientes pero basados en la referencia.

Para obtener un espacio de Hilbert el cual podamos entender como la cuantización de $\mathbb{R}^{2n}$, necesitaremos restringirnos a un subespacio del espacio de Hilbert precuántico. La idea entonces, será restringirse a la mitad de las $2n$ variables en $\mathbb{R}^{2n}$ debido a que este último es demasiado grande. Adicionalmente, en este capítulo tratamos de dar una idea introductoria al programa de cuantización para variedades en general. En el siguiente capítulo se justificarán las premisas que aquí se van a ir suponiendo para ir evitando complicaciones y poder definir los espacios de Segal-Bargmann mediante el programa de cuantización geométrica.

Podemos por ejemplo, restringirnos a funciones φ dependientes solamente de las n coordenadas de posición, es decir, a las n coordenadas que son independientes de las variables momento según la noción de *calibración invariante*, es decir que las derivadas covariantes de φ deben anularse en las direcciones p. Definamos con certeza este concepto.

Definición 4.2.1 *Fijemos un potencial simpléctico θ. Definamos el **subespacio de posiciones** como el subespacio de $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ consistiendo de funciones φ para las cuales*

$$\nabla_{\partial/\partial p_j}\varphi = 0$$

para toda j, en donde ∇_X es el operador definido en la ecuación (4.1).

*De manera análoga, definamos el **subespacio de momentos** como el subespacio de $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ consistiendo de funciones φ para las cuales*

$$\nabla_{\partial/\partial x_j}\varphi = 0$$

para toda j.

*Finalmente, definamos el **subespacio holomorfo** con parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, como el subespacio de $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ consistiendo de funciones φ para las cuales*

$$\nabla_{\partial/\partial \overline{z}_j}\varphi = 0$$

para toda j, donde $z_j = x_j - i\alpha p_j$ y $\partial/\partial z_j$ y $\partial/\partial \overline{z}_j$ están definidos por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{i}{\alpha}\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{\alpha}\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\end{aligned}$$

No está demás recalcar el hecho de que la descripción exacta de los subespacios definidos depende de la elección del potencial simpléctico. Es por eso que en las siguientes proposiciones se hará distinción de los potenciales que estaremos utilizando para luego hacer la referencia a éstos según sea el caso.

Proposición 4.2.1 (Proposition 22.8, [3]) *Sea θ_1 el potencial simpléctico dado por $\theta_1 = p_j dx_j$. Entonces los subespacios de posiciones, momentos y el subespacio holomorfo pueden se calculados como siguen.*

*El **subespacio de posiciones** consiste de las funciones suaves φ en $\mathbb{R}^{2n}$ de la forma*

$$\varphi(x,p) = \phi(x) \tag{4.2}$$

en donde ϕ es una función suave arbitraria en $\mathbb{R}^n$.

*El **subespacio de momentos** consiste de todas las funciones suaves φ en $\mathbb{R}^{2n}$ de la forma*

$$\varphi(x,p) = e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p) \tag{4.3}$$

en donde ϕ es una función suave arbitraria en $\mathbb{R}^n$.

*El **subespacio holomorfo** consiste de funciones de la forma*

$$\varphi(x,p) = \phi(z_1,\ldots,z_n)e^{-\alpha|p|^2/(2\hbar)}, \tag{4.4}$$

en donde ϕ es una función holomorfa arbitraria en $\mathbb{C}^n$ y $z_j = x_j - i\alpha_j p_j$.

Demostración: Consideremos el potencial simpléctico $\theta_1 = p_k dx_k$, y sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Denotemos por ∇^1 a la derivada covariante definida en términos de θ_1.

Para encontrar explícitamente el subespacio de posiciones, tenemos que resolver la ecuación

$$\nabla^1_{\partial/\partial p_j}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{i}{\hbar}\theta_1\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\right)\varphi = 0. \tag{4.5}$$

Observemos primero que $\theta_1(\frac{\partial}{\partial p_j}) = p_k dx_k(\frac{\partial}{\partial p_j}) = 0$, y entonces (4.5) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\varphi = 0. \tag{4.6}$$

Resolviendo la ecuación, tenemos que las funciones que satisfacen (4.6) son aquellas que $\varphi(x,p) = \phi(x)$ para alguna $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Análogamente para encontrar el subespacio de momentos tenemos que resolver la ecuación

$$\nabla^1_{\partial/\partial x_j}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{\hbar}\theta_1\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\varphi = 0. \tag{4.7}$$

Vemos que $\theta_1(\frac{\partial}{\partial x_j}) = p_k dx_k(\frac{\partial}{\partial x_j}) = p_j$, entonces (4.7) se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi - \frac{i}{\hbar}p_j\varphi = 0. \tag{4.8}$$

Resolviendo la ecuación tenemos que la solución viene dada por $\varphi(x,p) = \phi(p)e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}$, quedando así definido el espacio de momentos por las funciones $\varphi(x,p) = \phi(p)e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}$ en donde $\phi(p)$ es una función suave en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Finalmente, encontremos el espacio de funciones holomorfas determinado por θ_1. Como en los casos anteriores, debemos resolver la ecuación diferencial

$$\nabla^1_{\partial/\partial \bar{z}_j}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{i}{\hbar}\theta_1\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)\right)\varphi = 0. \tag{4.9}$$

Considerando la forma en que se definieron z_j y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$, tenemos que

$$\theta_1\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = p_k dx_k\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = \frac{1}{2}p_k dx_k\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{\alpha}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) = \frac{1}{2}p_j.$$

Sustituyendo también $p_j = \frac{\overline{z}_j - z_j}{2i\alpha}$, (4.9) la reescribimos como

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\varphi - \frac{\overline{z}_j - z_j}{4\hbar\alpha}\varphi = 0.$$

Notemos también que cualquier función en $\mathbb{R}^{2n}$ puede ser escrita en la forma $\phi e^{-\alpha|p|^2/2\hbar}$ para alguna función ϕ, se cumple también

$$e^{-\alpha|p|^2/2\hbar} = \exp\left(\sum_{j=1}^{n}(\overline{z}_j - z_j)^2/(8\alpha\hbar)\right).$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}e^{-\alpha|p|^2/2\hbar} = \frac{\overline{z}_j - z_j}{4\alpha\hbar}e^{-\alpha|p|^2/2\hbar} = \frac{i}{2\hbar}p_j e^{-\alpha|p|^2/2\hbar}.$$

Luego, calculando $\nabla_{\partial/\partial\overline{z}_j}\phi(z,\overline{z})e^{-\alpha|p|^2/2\hbar}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial/\partial\overline{z}_j}\phi(z,\overline{z})e^{-\alpha|p|^2/2\hbar} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\left(\phi(z,\overline{z})e^{-\alpha|p|^2/2\hbar}\right) - \frac{i}{2\hbar}p_j\phi(z,\overline{z})e^{-\alpha|p|^2/2\hbar} \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial \overline{z}_j}e^{-\alpha|p|^2/2\hbar} + \phi(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}e^{-\alpha|p|^2/2\hbar} - \frac{i}{2\hbar}p_j\phi(z,\overline{z})e^{-\alpha|p|^2/2\hbar} \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial \overline{z}_j}e^{-\alpha|p|^2/2\hbar}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla_{\partial/\partial\overline{z}_j}\phi(z,\overline{z})e^{-\alpha|p|^2/2\hbar} = 0$, para todo j, si y sólo si ϕ es una función holomorfa en las variables z_j.

Así, el subespacio de funciones holomorfas queda definido como el espacio conformado por aquellas funciones $\varphi(x,p) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tales que $\varphi(x,p) = \phi(z_1,\ldots,z_n)e^{-\alpha|p|^2/2\hbar}$, para alguna $\phi \in \mathcal{H}$ en donde $\mathcal{H}$ denota al espacio de funciones holomorfas, y como antes, $z_j = x_j - i\alpha p_j$. ■

Proposición 4.2.2 *Sea θ_2 el potencial simpléctico dado por $\theta_2 = -\dfrac{z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j}{4i\alpha}$. Entonces los subespacios de posiciones, momentos y el subespacio holomorfo pueden ser obtenidos como siguen.*

*El **subespacio de posiciones** consiste de las funciones suaves φ en $\mathbb{R}^{2n}$ de la forma*

$$\varphi(x,p) = \phi(x)e^{-\frac{i}{2\hbar}x\cdot p}, \tag{4.10}$$

en donde ϕ es una función suave arbitraria en $\mathbb{R}^n$.

*El **subespacio de momentos** consiste de todas las funciones suaves φ en $\mathbb{R}^{2n}$ de la forma*

$$\varphi(x,p) = \phi(p)e^{\frac{i}{2\hbar}x\cdot p} \tag{4.11}$$

en donde ϕ es una función suave arbitraria en $\mathbb{R}^n$.

*El **subespacio holomorfo** consiste de funciones de la forma*

$$\varphi(x,p) = \phi(z)e^{-\frac{z\overline{z}}{4\hbar\alpha}} \tag{4.12}$$

en donde ϕ es una función holomorfa arbitraria en $\mathbb{C}^n$ y $z = (z_1,\ldots,z_n)$ con $z_j = x_j - i\alpha_j$, $j = 1,\ldots,n$.

Demostración: Sea el potencial simpléctico $\theta_2 = -\dfrac{z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j}{4i\alpha}$ dado y consideremos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Usando la misma notación que en la proposición anterior ∇^2 denotará a la derivada covariante definida en términos de θ_2.

Como en la proposición anterior, para encontrar cada uno de los subespacios se resolverán las respectivas ecuaciones diferenciales.

Empecemos por encontrar explícitamente el subespacio de posiciones. Tenemos que

$$\nabla^2_{\partial/\partial p_j}\varphi = 0, \tag{4.13}$$

lo cual es equivalente a resolver

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\varphi - \frac{i}{\hbar}\left(\frac{z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j}{-4i\alpha}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\varphi = 0. \tag{4.14}$$

Recordemos que $z_j = x_j - i\alpha p_j$, de lo cual se puede deducir que $\frac{\partial}{\partial p_j} = -i\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right)$. Notemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j}{-4i\alpha}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right) &= \left(\frac{z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j}{-4i\alpha}\right)(-i\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right)\\ &= \frac{1}{4}(-\overline{z}_j - z_j) = -\frac{x_j}{2}.\end{aligned}$$

Luego, (4.14) puede reescribirse como

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\varphi - \frac{i}{\hbar}\left(-\frac{x_j}{2}\right)\varphi = \frac{\partial}{\partial p_j}\varphi + \left(\frac{ix_j}{2\hbar}\right)\varphi = 0. \tag{4.15}$$

Cuya solución viene dada por

$$\varphi(x,p) = \phi(x)e^{-\frac{i}{2\hbar}x\cdot p},$$

para alguna $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, así dichas funciones conforman el espacio de posiciones.

Haciendo lo análogo para encontrar el subespacio de momentos, planteemos la ecuación correspondiente.

$$\nabla^2_{\partial/\partial x_j}\varphi = 0. \tag{4.16}$$

O equivalentemente,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{\hbar}\cdot\frac{z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j}{-4i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\varphi = 0. \tag{4.17}$$

Pero

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j}{-4i\alpha}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \left(\frac{z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j}{-4i\alpha}\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right)\right)\\ &= \left(\frac{z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j}{-4i\alpha}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right)\\ &= \frac{(-\overline{z}_j + z_j)}{-4i\alpha} = \frac{-2i\alpha p_j}{-4i\alpha} = \frac{p_j}{2}.\end{aligned}$$

Así (4.17), se puede escribir como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \frac{i}{2\hbar} p_j \varphi = 0,$$

y su solución viene dada por

$$\varphi(x,p) = \phi(p) e^{\frac{i}{2\hbar} x \cdot p},$$

en donde ϕ es una función suave en $\mathbb{R}^n$. Por medio de éstas funciones queda definido del subespacio de momentos.

Finalmente, nos queda encontrar el subespacio holomorfo. Partimos de la ecuación

$$\nabla^2_{\partial/\partial \overline{z}_j} \varphi = 0, \tag{4.18}$$

o mejor aún,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} - \frac{i}{\hbar} \left(\frac{z_j d\overline{z}_j - \overline{z}_j dz_j}{-4i\alpha} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \right) \right) \varphi = 0. \tag{4.19}$$

simplificando,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} - \frac{i}{\hbar} \left(\frac{-z_j}{4i\alpha} \right) \right) \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_j} + \frac{z_j}{4\alpha\hbar} \varphi = 0. \tag{4.20}$$

La solución a esta ecuación está dada por

$$\varphi(x,p) = \phi(z) e^{-\frac{z\overline{z}}{4\alpha\hbar}}, \tag{4.21}$$

en donde $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_j = x_j - i\alpha p_j$ y $\phi(z)$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}^n$. Las funciones obtenidas, de hecho conforman el subespacio holomorfo.

Por tanto, hemos descrito los subespacios de posiciones, momentos y de funciones holomorfas, como se quería. ■

Ya hemos descrito explícitamente los subespacios de posiciones, de momentos y holomorfos, para dos potenciales simplécticos, de hecho son espacios de funciones que poseen la estructura de espacio vectorial. Sin embargo desde el punto de vista físico requerimos aún más, necesitamos que nuestras funciones conformen un espacio de Hilbert.

Entonces propongamos en primera instancia que las funciones encontradas en las proposiciones anteriores para los subespacios de posición y de momento pertenezcan a $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. Sin embargo, notemos lo siguiente, si φ es un elemento del subespacio de posiciones entonces φ es independiente de p, y la integral sobre las variables p_k podría ser infinita a menos de que φ sea cero casi donde sea. Ocurre lo análogo para cuando consideramos φ en el espacio de momentos.

Para evitar estos incovenientes y sin abundar en detalles (pues las razones del por qué esto se ha descrito así se darán en el siguiente capítulo mediante las correcciones dadas por las semi-formas que también definiremos posteriormente), haremos la integración sobre $\mathbb{R}^n$ en lugar de $\mathbb{R}^{2n}$, es decir,

Conclusión 4.2.1 (Conclusion 22.9, [3]) *Consideremos el potencial θ_1. El espacio de Hilbert de **posiciones** es el espacio de funciones en $\mathbb{R}^{2n}$ de la forma*

$$\varphi(x,p) = \phi(x),$$

donde $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La norma de tal función viene dada por

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2 dx.$$

Lo denotaremos por E_p^1 en donde el subíndice p hace referencia al espacio posiciones y el superíndice 1 a que es el espacio obtendido tomando θ_1.

*El espacio de Hilbert de **momentos** es el espacio de funciones en $\mathbb{R}^{2n}$ de la forma*

$$\varphi(x,p) = e^{\frac{i}{\hbar} x\cdot p}\phi(p),$$

donde $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La norma de tal función viene dada por

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(p)|^2 dp.$$

Lo denotaremos por E_m^1 en donde el subíndice m hace referencia al espacio de momentos y el superíndice 1 a que es el espacio obtendido tomando θ_1.

Conclusión 4.2.2 *De manera análoga, considerando el potencial θ_2 tenemos que el espacio de Hilbert de **posiciones** es el espacio de funciones en $\mathbb{R}^{2n}$ de la forma*

$$\varphi(x,p) = e^{-\frac{i}{2\hbar} x\cdot p}\phi(x),$$

donde $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La norma de tal función viene dada por

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2 dx.$$

Siguiendo con la notación de la conclusión precedente, lo denotaremos por E_p^2.

*El espacio de Hilbert de **momentos** es el espacio de funciones en $\mathbb{R}^{2n}$ de la forma*

$$\varphi(x,p) = e^{\frac{i}{2\hbar} x\cdot p}\phi(p),$$

donde $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La norma de tal función viene dada por

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(p)|^2 dp.$$

Lo denotaremos por E_m^2.

Para los subespacios holomorfos tenemos lo siguiente.

Conclusión 4.2.3 *El espacio de Hilbert **holomorfo**, denotado por E_h^1 consiste de aquellas funciones φ de la forma* (4.4)

$$\varphi(x,p) = \phi(z_1,\ldots,z_n)e^{-\alpha|p|^2/(2\hbar)},$$

que son de cuadrado integrable sobre $\mathbb{R}^{2n}$ y forman un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$; en donde ϕ es una función holomorfa arbitraria en $\mathbb{C}^n$ y $z_j = x_j - i\alpha p_j$, $j = 1,\ldots,n$. Si φ es identificada con la función *holomorfa ϕ que aparece en* (4.4)*, entonces este espacio de Hilbert puede ser identificado con el espacio de Segal-Bargmann invariante $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu_\hbar)$, en donde*

$$\nu_\hbar(z) = e^{-|Im\ z|^2/(\alpha\hbar)}.$$

Análogamente, el espacio de Hilbert **holomorfo***, denotado por E_h^2 consiste de aquellas funciones φ de la forma* (4.12)

$$\varphi(x,p) = \phi(z)e^{-\frac{z\overline{z}}{4\alpha\hbar}},$$

que son de cuadrado integrable sobre $\mathbb{R}^{2n}$. Más aún, si φ es identificada con la función holomorfa ϕ que aparece en (4.12)*, entonces este espacio de Hilbert puede ser identificado con $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_{2\alpha\hbar})$, en donde*

$$\mu_{2\alpha\hbar}(z) = e^{-\frac{z\overline{z}}{4\alpha\hbar}}.$$

En términos de la geometría diferencial, al conjunto de direcciones en el cual los elementos del espacio cuántico son covariantemente constantes se le llama **polarización**, en el siguiente capítulo también se definirá éste concepto con mayor precisión. En estos términos, lo que nos dicen las conclusiones (4.2.1) y (4.2.2), es que fijando el potencial simpléctico θ_1 y considerando la polarización $\{\partial/\partial p_1, \ldots, \partial/\partial p_n\}$ se obtiene el subespacio

$$E_p^1 = \{\varphi(x,p) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \varphi(x,p) = \phi(x), \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\},$$

mientras que si tomamos el potencial θ_2 con la misma polarización obtenemos el subespacio

$$E_p^2 = \{\varphi(x,p) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \varphi(x,p) = \phi(x)e^{-\frac{i}{2\hbar}x\cdot p}, \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Análogamente la conclusión (4.2.3) puede re-escribirse diciendo que si fijamos el potencial simpléctico θ_1 y consideramos la polarización $\{\partial/\partial\overline{z}_1, \ldots, \partial/\partial\overline{z}_n\}$, obtenemos el subespacio holomorfo

$$E_h^1 = \{\varphi(x,p) \mid \varphi(x,p) = \phi(z_1, \ldots, z_n)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}}, \phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n), z_k = x_k - i\alpha p_k,\ k = 1, \ldots, n\},$$

por otra parte si tomamos el potencial θ_2 con la misma polarización, obtenemos el subespacio

$$E_h^2 = \{\varphi(x,p) \mid \varphi(x,p) = \phi(z_1, \ldots, z_n)e^{-\frac{z\cdot\overline{z}}{4\alpha\hbar}}, \phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n), z_k = x_k - i\alpha p_k,\ k = 1, \ldots, n, \},$$

Una vez que hemos construido nuestros espacios de Hilbert cuánticos, procederemos a construir operadores en dichos espacios. Según el esquema de cuantización geométrica, el operador cuántico asociado con la función f es simplemente el operador $Q_{pre}f$ restringido al espacio de Hilbert cuántico considerado, siempre que Q_{pre} deje el espacio de Hilbert cuántico invariante.

Proposición 4.2.3 (Proposition 22.11, [3]) *Los subespacios de posiciones, momentos y holomorfos de la definición* (4.2.1) *son invariantes bajo los operadores $Q_{pre}^1(x_j)$ y $Q_{pre}^1(p_j)$. En particular, en el subespacio de posiciones, tenemos*

$$\begin{aligned} Q_{pre}^1(x_j)\phi(x) &= x_j\phi(x) \\ Q_{pre}^1(p_j)\phi(x) &= -i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

En el subespacio de momentos, tenemos

$$\begin{aligned} Q_{pre}^1(x_j)(e^{ix\cdot p/\hbar}\phi(p)) &= e^{ix\cdot p/\hbar}i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial p_j}(p) \\ Q_{pre}^1(p_j)(e^{ix\cdot p/\hbar}\phi(p)) &= e^{ix\cdot p/\hbar}(p_j\phi(p)). \end{aligned}$$

Finalmente, en el subespacio holomorfo tenemos

$$\begin{aligned} Q^1_{pre}(x_j)(F(z)e^{-\alpha|z|^2/(2\hbar)}) &= \left(\alpha\hbar\frac{\partial F}{\partial z_j} + z_jF(z)\right)e^{-\alpha|p|^2/(2\hbar)} \\ Q^1_{pre}(p_j)(F(z)e^{-\alpha|p|^2/(2\hbar)}) &= \left(-i\hbar\frac{\partial F}{\partial z_j}\right)e^{-\alpha|p|^2/(2\hbar)}. \end{aligned}$$

Demostración: Recordemos que el mapeo $Q_{pre}(f)$ está definido por $Q_{pre}(f) = i\hbar\nabla_{X_f} + f$. Consideremos $\varphi \in E^1_p$, es decir $\varphi(x,p) = \phi(x)$,

$$\begin{aligned} Q^1_{pre}(x_j)\phi(x) &= i\hbar\left(X_{x_j} - \frac{i}{\hbar}p_jdx_j(X_{x_j})\right)\phi(x) + x_j\phi(x) \\ &= i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial p_j} + x_j\phi(x) \\ &= x_j\phi(x). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} Q^1_{pre}(p_j)\phi(x) &= i\hbar\left(-\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{i}{\hbar}p_j\right)\phi(x) + p_j\phi(x) \\ &= -i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Ahora consideremos $\varphi \in E^1_m$, así $\varphi(x,p) = e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p)$, y entonces

$$\begin{aligned} Q^1_{pre}(x_j)(e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p)) &= i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial p_j}(e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p)) + x_je^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p)\right) \\ &= i\hbar\left(\frac{i}{\hbar}x_je^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p) + e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\frac{\partial\phi}{\partial p_j}\right) + x_je^{\frac{i}{\hbar x\cdot p}}\phi(p) \\ &= -x_je^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p) + i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\frac{\partial\phi}{\partial p_j} + x_je^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p) \\ &= i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\frac{\partial\phi}{\partial p_j}. \end{aligned}$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} Q^1_{pre}(p_j)(e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p)) &= i\hbar\left(-\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{i}{\hbar}p_j\right)e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p) + p_je^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p) \\ &= -i\hbar\left(\frac{i}{\hbar}p_je^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p)\right) - p_je^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p) + p_je^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\phi(p) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}(p_j\phi(p)). \end{aligned}$$

Por útlimo, para $\varphi \in E^1_h$, tenemos que $\varphi(x,p) = \phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}}$, donde $z = (z_1,\ldots,z_n)$ y cada $z_k = x_k - i\alpha p_k$,

$k = 1, \ldots, n$. Así

$$\begin{aligned}
Q^1_{pre}(x_j)(\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}}) &= i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}}\right) + x_j\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} \\
&= i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial p_j}e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} - \frac{i\hbar\alpha(2p_j)}{2\hbar}\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} + x_j\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} \\
&= i\hbar\left(-i\alpha\frac{\partial\phi}{\partial z_j}e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}}\right) - i\alpha p_j\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} + x_j\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} \\
&= \hbar\alpha\frac{\partial\phi}{\partial z_j}e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} + z_j\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} \\
&= \left(\hbar\alpha\frac{\partial\phi}{\partial z_j} + z_j\phi(z)\right)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^1_{pre}(p_j)(\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}}) &= i\hbar\left(-\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{i}{\hbar}p_j\right)\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} + p_j\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} \\
&= i\hbar\left(-\frac{\partial\phi}{\partial z_j}e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} + \frac{i}{\hbar}p_j\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}}\right) + p_j\phi(z)e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}} \\
&= -i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial z_j}e^{-\frac{\alpha|p|^2}{2\hbar}}.
\end{aligned}$$

■

Pues bien, hemos obtenido las precuantizaciones de los operadores de posición y momento respecto al potencial θ_1 en los respectivos subespacios precuánticos. Podríamos reproducir la proposición anterior utilizando el potencial θ_2, sin embargo ésto no es necesario puesto que podemos relacionar las precuantizaciones dadas por los potenciales simplécticos θ_1 y θ_2 por medio de una transformación de calibración.

Así que ahora haremos uso del teorema que nos define una transformación de calibración dados dos potenciales simplécticos distintos. Vamos a considerar los potenciales θ_1 y θ_2 definidos como en las proposiciones (4.2.1) y (4.2.2), consideremos z como $(z_1, \ldots, z_n)$, en donde $z_k = x_k - i\alpha p_k$, para todo k, también $z^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2$ y $\overline{z}^2 = \sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k^2$. Tomemos la función real

$$\gamma(z, \overline{z}) = \frac{-z^2 + \overline{z}^2}{8i\alpha}$$

así γ es tal que

$$\begin{aligned}
d\gamma &= \frac{\partial\gamma}{\partial z_k}dz_k + \frac{\partial\gamma}{\partial\overline{z}_k}d\overline{z}_k = \frac{-2z_k}{8i\alpha}dz_k + \frac{2\overline{z}_k}{8i\alpha}d\overline{z}_k = \frac{-z_k dz_k}{4i\alpha} + \frac{\overline{z}_k d\overline{z}_k}{4i\alpha} \\
&= \frac{1}{4i\alpha}[-z_k dz_k + \overline{z}_k dz_k - \overline{z}_k dz_k + z_k d\overline{z}_k - z_k d\overline{z}_k + \overline{z}_k d\overline{z}_k]
\end{aligned}$$

asociando de manera conveniente los términos en la expresión final para $d\gamma$, esa última línea puede escribirse como

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4i\alpha}[(\overline{z}_k dz_k - z_k dz_k) + (\overline{z}_k d\overline{z}_k - z_k d\overline{z}_k) - \overline{z}_k dz_k + z_k d\overline{z}_k] \\
&= \left(\frac{\overline{z}_k - z_k}{2i\alpha}\right)\left(\frac{d\overline{z}_k + dz_k}{2}\right) + \frac{1}{4i\alpha}(z_k d\overline{z}_k - \overline{z}_k dz_k)
\end{aligned}$$

e identificando a $p_k = \frac{\overline{z}_k - z_k}{2i\alpha}$ y a $dx_k = \frac{d\overline{z}_j + dz_k}{2}$ podemos continuar igualando la última línea con la siguiente

$$p_k dx_k - \frac{\overline{z}_k dz_k - z_k d\overline{z}_k}{4i\alpha} = \theta_1 - \theta_2.$$

Por tanto γ satisface que

$$d\gamma = \theta_1 - \theta_2$$

Definimos entonces el mapeo unitario

$$\begin{aligned} U_\gamma &: E_h^1 \to E_h^1 \\ U_\gamma \varphi &= e^{-i\frac{-z^2+\overline{z}^2}{8i\alpha\hbar}} \varphi \\ &= e^{\frac{z^2-\overline{z}^2}{8\alpha\hbar}} \varphi, \end{aligned}$$

y por lo tanto, podemos asegurar que

$$Q^2_{pre}(x_k) = U_\gamma Q^1_{pre}(x_k) U_\gamma^{-1}$$

$$Q^2_{pre}(p_k) = U_\gamma Q^1_{pre}(p_k) U_\gamma^{-1}.$$

Además de mostrarnos las precuantizaciones para x_k y p_k respecto al potencial simpléctico θ_2, $Q^2_{pre}(x_j)$ y $Q^2_{pre}(p_j)$, la transformación de calibración U_γ nos muestra una manera de relacionar a los espacios de Bargmann dados por $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu_\hbar)$ y $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_{2\alpha\hbar})$.

Llamemos ι_k, $k = 1, 2$, a los mapeos de identificación de E_h^k con los espacios de Bargmann respectivos, es decir,

$$\begin{aligned} \iota_1 : E_h^1 &\to \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu) \\ \varphi(x,p) = \phi(z) e^{-\frac{|Im\ z|^2}{2\alpha\hbar}} &\mapsto \iota_1(\varphi(x,p)) = \phi(z), \end{aligned}$$

con ϕ función holomorfa en $\mathbb{C}^n$.

$$\begin{aligned} \iota_2 : E_h^2 &\to \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_{2\alpha\hbar}) \\ \varphi(x,p) = \phi(z) e^{-\frac{z\overline{z}}{4\alpha\hbar}} &\mapsto \iota_2(\varphi(x,p)) = \phi(z), \end{aligned}$$

con ϕ función holomorfa en $\mathbb{C}^n$.

Dichos mapeos están bien definidos y más aún podemos hablar de su inversa, ι_k^{-1}, $k = 1, 2$, la cual está definida como $\iota_1^{-1}\phi(z) = \phi(z) e^{-\frac{|Im\ z|^2}{2\alpha\hbar}}$ y $\iota_2^{-1}\phi(z) = \phi(z) e^{-\frac{z\overline{z}}{4\alpha\hbar}}$.

Ahora consideremos $\Phi \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu)$, notemos que

$$\iota_1^{-1}\Phi(z) = \Phi(z) e^{-\frac{|Im\ z|^2}{2\alpha\hbar}}$$

la cual es una función perteneciente a E_h^1, entonces podemos aplicarle la transformada de calibración U_γ para obtener

$$U_\gamma \Psi(z) = \Psi(z) e^{-\frac{z\overline{z}}{4\alpha\hbar}},$$

en donde $\Psi(z)$ es la función holomorfa $\Psi(z) = \Phi(z) e^{\frac{z^2}{4\alpha\hbar}}$ perteneciente a E_h^2. Finalmente, aplicamos el mapeo ι_2,

$$\iota_2(\Psi(z) e^{-\frac{z\overline{z}}{4\alpha\hbar}}) = \Psi(z)$$

el cual es un elemento del espacio de funciones $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_{2\alpha\hbar})$. Hecho esto, tenemos que la relación entre los espacios $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu)$ y $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_{2\alpha\hbar})$ está dada en términos de U_γ por

$$\iota_2 \circ U_\gamma \circ \iota_1^{-1}\Phi(\mathbf{z}) \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_{2\alpha\hbar})$$

para cualquier $\Phi \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu)$.

De hecho, podemos observar que el mapeo obtenido es justamente la inversa del mapeo unitario que se definió al final de la sección (1.3).

Notemos también que mediante la transformación de calibración pudimos relacionar también los espacios de Segal-Bargmann. En el capítulo siguiente se mostrará cómo obtener la Transformaciones de Segal-Bargmann mediante los llamados mapeos de apareamiento obtenidos de aplicar toda la herramienta que nos da el programa de cuantización geométrica.

4.3. Esquemas adicionales de cuantización

Como se ha venido mencionando al encontrar un programa de cuantización tratamos de relacionar clases de funciones en el espacio fase con operadores en algún espacio de Hilbert. Se mencionó también, que existen otros programas para cuantizar además del programa de cuantización geométrica. En este apartado describiremos, grosso modo, algunos de los programas adicionales al programa de cuantización geométrica que se ha introducido en este capítulo.

Definición 4.3.1 *Definamos varios esquemas de cuantización para símbolos que son polinomios en x y p, de la manera siguiente. Cada esquema está determinado de manera única como un operador que envía polinomios en $\mathbb{R}^2$ a operadores actuando en C_0^∞, por las siguientes fórmulas.*

1. *Cuantización del operador pseudodiferencial*

$$Q(x^j p^k) = \hat{x}^j \ \hat{p}^k.$$

2. *Cuantización de Weyl*

$$Q(x^j p^k) = \frac{1}{(j+k)!} \sum_{\sigma \in S_{j+k}} \sigma(\hat{x}, \hat{x}, \hat{x}, \ldots, \hat{p}, \hat{p}, \hat{p}),$$

en donde para cualesquiera operadores $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y para cualquier $\sigma \in S_n$, definimos

$$\sigma(A_1, A_2, \ldots, A_n) = A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(n)}.$$

3. *Cuantización de Wick (ordenamiento normal)*

$$Q((x - ip)^j (x + ip)^k) = (\hat{x} - i\hat{p})^j (\hat{x} + i\hat{p})^k.$$

4. *Cuantización anti-Wick (ordenamiento anti-normal)*

$$Q((x - ip)^j (x + ip)^k) = (\hat{x} + i\hat{p})^j (\hat{x} - i\hat{p})^k.$$

Observemos que podemos escribir tanto la cuantización de Wick como la cuantización anti-Wick en términos de los operadores de creación y aniquilación. Recordemos que los operadores de creación y aniquilación están definidos como $a = \dfrac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}$ y $a^* = \dfrac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}$. Así, para la cuantización de Wick tenemos que

$$Q((x-ip)^j(x+ip)^k) = (\hat{x} - i\hat{p})^j(\hat{x} + i\hat{p})^k = (2^{(j+k)/2})(a^*)^j a^k.$$

Mientras que la cuantización anti-Wick puede ser escrita como

$$Q((x-ip)^j(x+ip)^k) = (\hat{x} + i\hat{p})^j(\hat{x} - i\hat{p})^k = (2^{(j+k)/2})a^j(a^*)^k,$$

de hecho podemos decir más acerca de la cuantización anti-Wick. Como se expone en [2], la cuantización anti-Wick puede ser expresada de manera analítica mediante operadores de Toeplitz en el espacio de Segal-Bargmann. A continuación desarrollaremos la teoría necesaria para describir dicho programa de cuantización. En primera instancia daremos la definición de Operadores de Toeplitz actuando en cualquier subespacio de funciones holomorfas de cuadrado integrable para luego mostrar el caso particular en el que actúan en el espacio de Segal-Bargmann.

Retomemos la notación del capítulo 1, en donde $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ representa algún subespacio cerrado del espacio de funciones $L^2(U,\alpha)$, recordemos que $U \subset \mathbb{C}$ y α es una función continua y estrictamente positiva en U, $z \in U$ es de la forma $z = x + ip$. Dado que $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ es un subespacio cerrado de $L^2(U,\alpha)$, existe una proyección ortogonal $P : L^2(U,\alpha) \to \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Más aún, en el punto 3 del teorema (1.1.2) dicha proyección está dada por

$$Pf(z) = \int_U K(z,w)f(w)\alpha(w)dw, \quad \forall F \in L^2(U,\alpha), \tag{4.22}$$

en donde $K(z,w)$, $z,w \in U$, es el núcleo reproductor para el subespacio $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$.

Definición 4.3.2 *Dada una una función $\varphi \in L^\infty$, definimos el operador de Toeplitz con símbolo φ en el espacio $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, por medio de*

$$T_\varphi f = P(\varphi f),\ f \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha),$$

donde P es la proyección ortogonal dada en (4.22) *y L^∞ es la clase de funciones medibles esencialmente acotadas. Si φ es una función no acotada, el operador de Toeplitz T_φ se define de la misma manera, siempre y cuando el multiplicar por la función φ preserve la permanencia al espacio $L^2(U,\alpha)$. En este caso T_φ podría ser no acotado.*

De hecho es posible ver al operador de Toeplitz con símbolo φ en el espacio $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ como la composición de la proyección ortogonal con la función θ, donde θ es función definida como la multipliación por alguna función en L^∞, es decir tenemos que

$$T_\varphi : \mathcal{H}L^2(U,\alpha) \to \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$$

pero como

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathcal{H}L^2(U,\alpha) & \to & L^2 \\ f & \mapsto & \theta(f) = \varphi f,\ \varphi \in L^\infty \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} P : L^2 & \to & \mathcal{H}L^2(U,\alpha) \\ g & \mapsto & P(g) \end{array}$$

hacemos la composición y obtenemos

$$\begin{array}{rcl} P\circ\theta:\mathcal{H}L^2(U,\alpha) & \to & \mathcal{H}L^2(U,\alpha) \\ f & \mapsto & P\circ\theta(f)=P(\theta(f))=P(\varphi f),\ \varphi\in L^\infty \end{array}$$

También es importante mencionar que, como la norma de la proyección ortogonal tiene norma menor o igual a 1, entonces tenemos que $||T_\varphi||\leq||\varphi||_\infty$. A continuación veamos algunas de las propiedades que satisfacen éstos operadores y que se pueden deducir partiendo solamente de la definición.

Proposición 4.3.1 *Si a y b son números complejos; φ y ϕ son funciones medibles acotadas en U, entonces:*

1. $T_{a\varphi+b\phi}=aT_\varphi+bT_\phi$.
2. $T_{\bar{\varphi}}=(T_\varphi)^*$. *En particular, si φ es real entonces T_φ es autoadjunto.*
3. $T_\varphi\geq 0$ *si* $\varphi\geq 0$.
4. *Si además de ser acotadas, φ y ϕ son funciones holomorfas, se tiene que $T_\varphi T_\phi=T_{\varphi\phi}$.*
5. $T_1=I$, *con I el operador identidad.*
6. *Para cualesquiera $f_1,f_2\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$,*

$$\langle T_\varphi f_1,f_2\rangle=\langle\varphi f_1,f_2\rangle. \tag{4.23}$$

Demostración:

La demostración de cada inciso es directa a partir de la definición de operador de Toeplitz.

1. Sea $f\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, por la linealidad de la integral se sigue que

$$\begin{aligned} T_{a\varphi+b\phi}f(z) &= \int_U K(z,w)[a\varphi(w)f(w)+b\phi(w)f(w)]\alpha(w)dw \\ &= a\int_U K(z,w)\varphi(w)f(w)\alpha(w)dw+b\int_U K(z,w)\phi(w)f(w)\alpha(w)dw \\ &= aT_\varphi f(z)+bT_\phi f(z) \\ &= (aT_\varphi+bT_\phi)f(z) \end{aligned}$$

2. Sean $f,g\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, notemos que la aplicación θ_φ, la cual es multiplicar por la función acotada φ tiene como adjunto $(\theta_\varphi)^*=\theta_{\overline{\varphi}}$, pues

$$\langle\theta_\varphi f,g\rangle=\int_U\theta_\varphi f(z)\overline{g(z)}\alpha(z)dz=\int_U\varphi(z)f(z)\overline{g(z)}\alpha(z)dz$$

y por otra parte

$$\langle f,\theta_{\overline{\varphi}}g\rangle=\int_U f(z)\overline{\theta_{\overline{\varphi}}g(z)}\alpha(z)dz=\int_U f(z)\varphi(z)\overline{g(z)}\alpha(z)dz$$

por lo cual

$$\langle\theta_\varphi f,g\rangle=\langle f,\theta_{\overline{\varphi}}g\rangle.$$

Vamos a considerar $T_\varphi = P \circ \theta_\varphi$, y dado que tanto P y θ_φ son operadores acotados en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, se sigue que

$$(T_\varphi)^* = (P \circ \theta_\varphi)^* = P^* \circ \theta_\varphi^* = P \circ \theta_{\bar{\varphi}} = T_{\bar{\varphi}}.$$

Luego, si φ es una función real, tenemos que $(T_\varphi)^* = T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi$. Por tanto en este caso, T_φ es autoadjunto.

3. Sea $f \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$,
$$\langle T_\varphi f, f\rangle = \int_U \varphi(z)|f(z)|^2\alpha(z)dz,$$
entonces, si $\varphi \geq 0$ y si T_φ es acotado en el espacio de los operadores acotados en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ tenemos que $T_\varphi \geq 0$.

4. Sea $f \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$. Si ϕ es acotada y holomorfa, entonces $\phi f \in \mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ y por tanto
$$\begin{aligned} T_{\varphi\phi}f(z) &= \int_U K(z,w)\varphi(w)\phi(w)f(w)\alpha(w)dw \\ &= \int_U K(z,w)\varphi(w)\left(\int_U K(w,y)\phi(y)f(y)\alpha(y)dy\right)\alpha(w)dw \\ &= \int_U K(z,w)\varphi(w)(T_\phi f(w))\alpha(w)dw \\ &= T_\varphi T_\phi f(z). \end{aligned}$$

5. Sea 1 la función constante 1, entonces
$$T_1 f(z) = \int_U K(z,w)1(w)f(w)\alpha(w)dw = \int_U K(z,w)f(w)\alpha(w)dw = f(z).$$

6. Sean f_1 y f_2 como en la hipótesis, se tiene que
$$\langle T_\varphi f_1, f_2\rangle = \langle P(\varphi f_1), f_2\rangle = \langle \varphi f_1, Pf_2\rangle = \langle \varphi f_1, f_2\rangle,$$
pues P es autoadjunto y f_2 se asumió perteneciente al subespacio holomorfo $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$.

■

Considerando el punto 4 de la proposición que acabamos de probar, y siendo permisivos en cuanto a cuestiones de dominio, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1 *[Theorem 8.2, [2]] Sean φ_j y ψ_k funciones holomorfas en U, en donde $j = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,m$. Entonces*
$$T_{\overline{\psi}_1\cdots\overline{\psi}_m\varphi_1\cdots\varphi_n} = T_{\overline{\psi}_1}\cdots T_{\overline{\psi}_m}T_{\varphi_1}\cdots T_{\varphi_n}.$$

Demostración: Como primera parte de la prueba, mostremos por inducción que para las funciones holomorfas y acotadas $\phi_1,\cdots,\phi_k$, se cumple que

$$T_{\phi_1\cdots\phi_k} = T_{\phi_1}\cdots T_{\phi_k}. \tag{4.24}$$

El caso para $k=2$ se satisface por el punto 4 de la proposición anterior. Supongamos entonces que (4.24) es válido para $k-1$. Luego, asociando y aplicando 4 de la proposición precedente

$$T_{\phi_1\cdots\phi_k} = T_{(\phi_1\cdots\phi_{k-1})\phi_k} = T_{\phi_1\cdots\phi_{k-1}}T_{\phi_k} = (T_{\phi_1}\cdots T_{\phi_{k-1}})T_{\phi_k} = T_{\phi_1}\cdots T_{\phi_{k-1}}T_{\phi_k}.$$

Por tanto se satisface (4.24) para cualquier k. Luego, calculando el adjunto tenemos que

$$\begin{aligned}(T_{\phi_1\cdots\phi_k})^* &= T^*_{\phi_1}\cdots T^*_{\phi_k}\\ &= T_{\overline{\phi}_1}\cdots T_{\overline{\phi}_k}\end{aligned}$$

por tanto,

$$T_{\overline{\phi}_1\cdots\overline{\phi}_k} = T_{\overline{\phi}_1}\cdots T_{\overline{\phi}_k}$$

Entonces como f es una función en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ podemos escribir $T_\varphi f = P\theta_\varphi Pf$, en donde recordemos que θ_φ es la multiplicación por la función φ. Usando este y los hechos anteriores podemos concluir que

$$\begin{aligned}T_{\overline{\psi}_1\cdots\overline{\psi}_m\varphi_1\cdots\varphi_n} &= P\theta_{\overline{\psi}_1\cdots\overline{\psi}_m\varphi_1\cdots\varphi_n}P\\ &= P\theta_{\overline{\psi}_1\cdots\overline{\psi}_m}\theta_{\varphi_1\cdots\varphi_n}P\\ &= P\theta_{\overline{\psi}_1\cdots\overline{\psi}_m}PP\theta_{\varphi_1\cdots\varphi_n}P\\ &= T_{\overline{\psi}_1\cdots\overline{\psi}_m}T_{\varphi_1\cdots\varphi_n}\\ &= T_{\overline{\psi}_1}\cdots T_{\overline{\psi}_m}T_{\varphi_1}\cdots T_{\varphi_n}.\end{aligned}$$

■

Consideremos ahora el espacio $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$ como el espacio de Segal-Bargmann $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C},\mu_\hbar(z))$, en donde recordemos $\mu_\hbar(z) = (\pi\hbar)^{-1}e^{-|z|^2/\hbar}$. Una de las características de los operadores de Toeplitz actuando en este espacio se prueba a continuación.

Tal característica de los operadores de Toeplitz actuando en los espacios de Segal-Bargmann es respecto a su compacidad. En [13] se menciona la condición bajo la cual un operador de Toeplitz llega a ser compacto en el espacio de Segal-Bargmann, dicha condición es muy fuerte en el sentido de que al símbolo que define al operador de Toeplitz se le exigen varias propiedades. Primero recordaremos la definición de lo que es un operador de Hilbert-Schmidt y posteriormente desarrollaremos este resultado.

Definición 4.3.3 *Sea H un espacio de Hilbert y T un operador lineal acotado. Decimos que T es un operador de Hilbert-Schmidt si existe una base ortonormal $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty}\|Te_k\|^2 < \infty$.*

En el teorema $VI.22$ de [17] sobre operadores de Hilbert-Schmidt, se prueba que cualquier operador de Hilbert-Schmidt T puede ser aproximado por operadores de rango finito en la norma

$$\|T\|_2 := \left(\sum_k \|Te_k\|^2\right)^{1/2}.$$

Como corolario de este resultado, se tiene entonces que un operador de Hilbert-Schmidt es compacto.

Teorema 4.3.2 (Theorem 5, [13]) *Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C}^n)$ tiene soporte compacto, entonces T_φ es un operador compacto.*

Demostración: La idea de la demostración es que mediante la igualdad de Parseval mostremos que T_φ es un operador de Hilbert-Schmidt y por tanto, es compacto.

Consideremos $n = 1$, la prueba para $n > 1$ se extiende de manera análoga. Sea $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ una base ortonormal de $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C},\mu_\hbar)$ la cual viene dada como en el capítulo 1 por

$$e_k = (\hbar^k k!)^{-1/2}z^k.$$

Dado que φ es esencialmente acotada, con soporte compacto, existen las constantes positivas C y c tales que $|\varphi(z)| \leq C$ casi donde sea y $\varphi(z) = 0$ para todo z con $|z| > c$. Comencemos por reescribir $\langle T_\varphi e_k, e_j\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C},\mu_h)}$,

$$\langle T_\varphi e_k, e_j\rangle_{\mathcal{H}L^2(\mathbb{C},\mu_h)} = \langle \varphi e_k, e_j\rangle_{L^2(\mathbb{C},\mu_h)}.$$

Luego, escribiendo explícitamente los términos de la base y aplicando valor absoluto

$$\begin{aligned}
|\langle T_\varphi e_k, e_j\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{C}} \overline{\varphi}(z)\overline{e_k}(z)e_j(z)\mu_\hbar(z)dz\right| = \left|\int_{\mathbb{C}} \overline{\varphi}(z)\frac{\overline{z}^k}{\sqrt{\hbar^k k!}}\frac{z^j}{\sqrt{\hbar^j j!}}\frac{1}{\pi\hbar}e^{-|z|^2/\hbar}dz\right| \\
&\leq \frac{C}{\pi\hbar\sqrt{\hbar^{k+j}k!j!}}\int_{|z|<c}|z|^{k+j}e^{-|z|^2/\hbar}dz = \frac{2\pi C}{\pi\hbar\sqrt{\hbar^{k+j}k!j!}}\int_0^c r^{k+j}e^{-r^2/\hbar}rdr \\
&\leq \frac{2C}{\hbar\sqrt{\hbar^{k+j}k!j!}}\int_0^c r^{k+j+1}dr = \frac{2C}{\hbar\sqrt{\hbar^{k+j}k!j!}}\frac{c^{k+j+2}}{(k+j+2)} \\
&\leq \frac{2C}{\hbar\sqrt{\hbar^{k+j}k!j!}}c^{k+j+2}.
\end{aligned}$$

Entonces, haciendo una primera suma

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}|\langle \varphi e_k, e_j\rangle_{L^2(\mathbb{C},\mu_h)}|^2 &\leq \sum_{j=0}^{\infty}\frac{4C^2}{\hbar^2\hbar^{k+j}k!j!}c^{(k+j+2)2} \\
&= \frac{4C^2c^4c^{2k}}{\hbar^2\hbar^k k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{c^{2j}}{\hbar^j j!} \\
&= \frac{4C^2c^4c^{2k}}{\hbar^2\hbar^k k!}e^{c^2/\hbar}.
\end{aligned}$$

Y por útlimo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|\langle \varphi e_k, e_j\rangle_{L^2(\mathbb{C},\mu_h)}|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4C^2c^4c^{2k}}{\hbar^2\hbar^k k!}e^{c^2/\hbar} \\
&= \frac{4C^2c^4}{\hbar^2}e^{c^2/\hbar}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^{2k}}{\hbar^k k!} \\
&= \frac{4C^2c^4}{\hbar^2}e^{2c^2/\hbar} < \infty.
\end{aligned}$$

Por tanto hemos obtenido que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|T_\varphi e_k\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|\langle T_\varphi e_k, e_j\rangle|^2 < \infty,$$

así T_φ es un operador de Hilbert-Schmidt, se sigue entonces que T_φ es compacto, como se quería probar. ■

Siguiendo en el mismo contexto de operadores de Toeplitz en el espacio de Segal-Bargmann. Consideremos $\varphi(z) = z$, aplicando la definición de Toeplitz con símbolo φ a alguna función $f \in H \subset \mathcal{H}L^2(\mathbb{C},\mu_\hbar)$, con $H = \{f \in L^2(\mathbb{C},\mu_\hbar) \mid zf(z) \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C},\mu_\hbar)\}$. Así, tenemos que

$$T_z f(z) = P(zf(z)) = \int_{\mathbb{C}} K(z,w)wf(w)\mu_\hbar(w)dw = zf(z),$$

y dado que $T_{\overline{z}} = (T_z)^*$,

$$T_{\overline{z}} = \hbar \frac{d}{dz}.$$

De hecho, por lo visto en el capítulo 2, estos operadores son los operadores de creación y aniquilación en el espacio de Segal-Bargmann.

Ahora, utilizando el teorema (4.3.1) podemos escribir

$$T_{\overline{z}^n z^m} = \left(\hbar \frac{d}{dz}\right)^n z^m. \tag{4.25}$$

Recordando la definición del programa de cuantización anti-Wick, podemos observar que los operadores de Toeplitz guardan una relación con este esquema de cuantización en el sentido siguiente

$\frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}} = a^*$	se corresponde mediante la Transformada de Segal-Bagrmann con	T_z
$\frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}} = a$	se corresponde mediante la Transformada de Segal-Bagrmann con	$T_{\overline{z}}$.

Notamos también que mediante la cuantización anti-Wick, $x + ip$ no se corresponde con T_z, habría que hacer una corrección usando el conjugado de $x + ip$ y un factor de $\sqrt{2}$ como queda mejor establecido en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.3 (Theorem 8.3, [2]) *Dada una función φ en $\mathbb{C}^n$, definamos otra función φ' en $\mathbb{C}^n$ por*

$$\varphi'(z) = \varphi(\sqrt{2}\overline{z}).$$

Para cada φ, consideremos el operador de Toeplitz $T_{\varphi'}$ como un operador en el espacio de Segal-Bargmann $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$. Entonces el mapeo

$$\varphi \mapsto T_{\varphi'}$$

es unitariamente equivalente al ordenamiento anti-Wick. De manera más precisa, para cualquier φ, el operador $A_\hbar^{-1} T_{\varphi'} A_\hbar$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es el mismo que la cuantización anti-Wick de φ.

Entonces hemos dado una equivalencia unitaria entre operadores de Toeplitz y el programa de cuantización anti-Wick mediante conjugación usando la Transformada de Segal-Bargmann. Con esto, hemos mostrado a grandes rasgos un esquema de cuantización adicional al programa de cuantización geométrica desarrollado en la mayor parte de este capítulo.

CAPÍTULO 5

Apareamientos y la Transformada de Bargmann

En este capítulo daremos las definiciones y los resultados, que no son pocos, que nos llevan a definir los mapeos de apareamiento entre dos espacios de Hilbert. Haciendo uso de éstos podemos obtener las Transformadas de Segal-Bargmann, la clásica y la invariante. En comparación con el capítulo anterior, aquí se desarrollará el programa de cuantización geométrica con variedades en general y se expondrá también cómo es aplicada toda esta metodología a la variedad simpléctica $(\mathbb{R}^{2n}, dp_j \wedge dx_j)$. Justificaremos los resultados del capítulo anterior ya que se obtuvieron de manera muy intuitiva pareciendo que forzamos las condiciones para obtener los resultados correctos, y por último describiremos otra manera de obtener la Transformada de Segal-Bargmann. En palabras breves, en este capítulo desarrollaremos las herramientas que justifican el "recorte" de variables que hicimos en el capítulo anterior para obtener los subespacios de funciones de tal manera que no tuvieramos problemas de integración. Concluiremos con la Transformada de Segal-Bargmann obtenida vía mapeos de apareamiento. Las referencias en las cuales nos hemos basado para el tratamiento de los temas en este capítulo son en mayor parte [3], ya que definiciones y proposiciones, teoremas, etc., son tomados textualmente, y [6], [4] para el desarrollo de los mapeos de apareamiento.

5.1. Haces lineales y conexiones

En esta sección desarrollaremos las herramientas necesarias para extender el proceso de precuantización que se hizo en el caso anterior, $\mathbb{R}^{2n}$, a variedades simplécticas más arbitrarias. Recordemos que en el capítulo anterior nos restringimos al caso $N = (\mathbb{R}^{2n}, dp_j \wedge dx_j)$ y que tanto las definiciones como las proposiciones aquí mencionadas fueron extraídas de la sección 23.2, [3].

Definición 5.1.1 *Sea N una variedad suave, un* ***haz lineal complejo*** *sobre N es una variedad suave L junto con las estructuras adicionales*

i. *El mapeo $\pi : L \to N$, es un mapeo suave sobreyectivo.*

ii. *Para cada $x \in N$, el conjunto $\pi^{-1}(\{x\})$ tiene la estructura de un espacio vectorial complejo unidimensional. Para cada $x \in N$, al espacio vectorial $\pi^{-1}(\{x\})$ lo llamaremos* ***fibra*** *de L sobre x.*

Suponemos que estas estructuras satisfacen la ***propiedad de trivialidad local****, a saber, que cada $x \in N$ tiene una vecindad U tal que existe un difeomorfismo $\chi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:*

i. $\pi(q) = \pi_1(\chi(q))$*, en donde $q \in \pi^{-1}(U) \subset L$ y $\pi_1 : U \times \mathbb{C} \to U$ es la proyección sobre el primer factor.*

ii. *Para cada $x \in U$, el mapeo $p \mapsto \pi_2(\chi(p))$ es un isomorfismo de espacios vectoriales de $\pi^{-1}(\{x\})$ con $\mathbb{C}$, en donde $\pi_2 : U \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la proyección sobre el segundo factor.*

Una ***sección*** *de un haz lineal L sobre N es un mapeo $s : N \to L$ tal que $\pi(s(p)) = p$ para todo $p \in N$.*

Hacemos también las siguientes observaciones. La primera es que para cualquier variedad N, podemos formar el haz lineal trivial $N \times \mathbb{C}$, en donde $\pi(p, z) = p$ y donde la estructura de espacio vectorial en $\{x\} \times \mathbb{C}$ es justamente la estructura de espacio vectorial usual en $\mathbb{C}$. La segunda, es que de la propiedad de trivialidad local podemos concluir que para cualquier haz lineal L, L se ve localmente como el haz lineal trivial.

Definición 5.1.2 *Una* ***conexión*** *∇ en un haz lineal L sobre N es un a mapeo que asigna a cada campo vectorial X en N y una sección s de L otra sección $\nabla_X s$ de L satisfaciendo las siguientes propiedades*

i. Para cada función f suave en N, tenemos

$$\nabla_{fX}(s) = f\nabla_X(s), \tag{5.1}$$

para todo campo vectorial X y toda sección s.

ii. Para toda función suave en f en N, tenemos la regla del producto

$$\nabla_X(fs) = (X(f))(s) + f\nabla_X(s) \tag{5.2}$$

para todo campo vectorial X y toda sección s.

iii. Linealidad. Sean X, X_1, X_2 campos vectoriales en N, y sean s, s_1, s_2 secciones en de L, entonces

$$\nabla_{X_1+X_2}(s) = \nabla_{X_1}(s) + \nabla_{X_2}(s) \qquad \nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X(s_1) + \nabla_X(s_2).$$

Denotaremos por (L, ∇) al haz lineal L con conexión ∇, queriendo decir que L y ∇ son tales como se han definido.

Dada una conexión ∇ y un campo vectorial X, definimos el operador ∇_X como ***derivada covariante*** *en la dirección de X.*

Definición 5.1.3 *Una* ***estructura Hermitiana*** *en un haz lineal L sobre N es una elección de un producto interno $(\cdot, \cdot)$ en cada fibra $\pi^{-1}(\{x\})$ de L tal que para cada sección suave s de L, (s, s) es una función suave en N. A un haz lineal L junto con una elección de una estructura Hermitiana en L le llamaremos* ***haz lineal Hermitiano****. Una conexión ∇ en un haz lineal Hermitiano L es llamada* ***Hermitiana*** *si para cada campo vectorial X en N tenemos*

$$(\nabla_X(s_1), s_2) + (s_1, \nabla_X(s_2)) = X(s_1, s_2) \tag{5.3}$$

para cualesquiera secciones $s_1,\ s_2$ en L.

Dado un haz lineal Hermitiano L con conexión, siempre es posible elegir una sección suave s_0 definida localmente cerca de cualquier punto tal que $(s_0, s_0) \equiv 1$. Llamaremos a s_0, **trivialización local isométrica** de L. Cualquier sección s de L puede ser escrita localmente como $s = fs_0$ para una única función compleja f. Dado un campo vectorial X, sea $\theta(X)$ la única función tal que

$$\nabla_X(s_0) = -\frac{i}{\hbar}\theta(X)s_0,$$

dicha función $\theta(X)$ depende solamente del valor de X en el punto a evaluar de N y por tanto θ define una 1-forma en N. La función $\theta(X)$ siempre es real y más aún, usando la regla del producto para derivadas covariantes tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_X(fs_0) &= X(f)s_0 + f\nabla_X(s_0) \\ &= (X(f) - \frac{i}{\hbar}\theta(X)f)s_0, \end{aligned}$$

en donde si identificamos las secciones s de L localmente con sus funciones “coeficientes” f, lo que obtenemos es

$$\nabla_X(f) = X(f) - \frac{i}{\hbar}\theta(X)f, \tag{5.4}$$

tal como se obtuvo en el capítulo anterior. Llamaremos a θ la **1-forma de conexión** asociada a la trivialización isométrica local.

Definición 5.1.4 *Para cualquier haz lineal Hermitiano (L, ∇) con conexión, definimos la **2-forma de curvatura** ω de ∇ requiriendo que*

$$\omega(X, Y)s = i(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla[X, Y])(s)$$

para toda sección s y campos vectoriales X y Y.

Definición 5.1.5 *Llamamos **potencial simpléctico** a cualquier 1-forma θ localmente definida satisfaciendo $d\theta = \omega$, para ω.*

Una observación que podemos agregar respecto a los potenciales simplécticos es que todo potencial simpléctico es la 1-forma de conexión para alguna trivialización local isométrica de L, ver [3] proposición 23.6.

Supongamos que L es un haz lineal hermitiano sobre N, con conexión ∇ y 2-forma de curvatura ω. Dado un lazo $\gamma : [a, b] \to N$, podemos construir una sección s de L la cual está definida sobre γ y es tal que la derivada covariante de s en las direcciones a lo largo de γ es cero, es decir $\nabla_{\dot\gamma}(s) = 0$. En una trivialización local tal sección puede ser construida como

$$s(\gamma(T)) = \exp\left\{ i\int_{\gamma(a)}^{\gamma(T)} \theta(\gamma(t))dt \right\}.$$

Definición 5.1.6 *Definimos la **holonomía** de un lazo $\gamma : [a, b] \to N$ como la única constante α (de valor absoluto 1) tal que $s(\gamma(b)) = \alpha s(\gamma(a))$, donde s es una sección distinta de 0 definida sobre γ que es covariantemente constante en las direcciones de γ, es decir $\nabla_{\dot\gamma}(s) = 0$.*

Consideremos S, una superficie orientada y compacta con frontera en N, ∂S es un lazo. En [3], se menciona que la holonomía al rededor de ∂S puede ser calculada como

$$\text{holonomia}(\partial S) = exp\left\{ i \int_S \omega \right\}. \tag{5.5}$$

Para S, una superficie cerrada tenemos que su frontera es el lazo trivial, la cual tiene como holonomía la trivial, es decir, su holonomía es 1.

Entonces por (5.5) para cualquier superficie cerrada S,

$$\text{holonomia}(\partial S) = exp\left\{ i \int_S \omega \right\} = 1, \quad \partial S = \emptyset.$$

O equivalentemente

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \omega \in \mathbb{Z} \tag{5.6}$$

Decimos que una equivalencia de dos haces lineales Hermitianos L_1 y L_2 con conexión Hermitiana sobre N es un difeomorfismo $\Phi : L_1 \to L_2$ tal que para cada $x \in N$, la restricción de Φ a $\pi_1^{-1}(\{x\})$ es un mapeo lineal isométrico sobre $\pi_2^{-1}(\{x\})$ y tal que para cada sección s de L_1 tenemos

$$\Phi(\nabla_X(s)) = \nabla_X(\Phi(s)).$$

Definición 5.1.7 *Sea ω una 2-forma cerrada en una variedad N, decimos que $\omega/(2\pi)$ es una **2-forma integral** si se cumple* (5.6).

Teorema 5.1.1 (Theorem 23.9, [3]) *Supongamos que ω es una 2-forma cerrada en una variedad N tal que $\omega/(2\pi)$ es una **2-forma integral**. Entonces existe un haz lineal Hermitiano L sobre N con conexión Hermitiana ∇ tal que la curvatura de ∇ es igual a ω. Más aún, si N es simplemente conexa, entonces (L, ∇) es único salvo equivalencia.*

5.2. Precuantización

En esta parte estamos por empezar a construir el programa de cuantización que nos interesa, para lograr nuestro objetivo, seguiremos exponiendo las definiciones y las proposiciones de la sección 23.3, de [3]. El primer paso en el programa de la cuantización geométrica para la variedad simpléctica (N, ω) es construir un haz lineal Hermitiano sobre N con conexión Hermitiana para la cual la 2-forma de curvatura es igual a $\omega/\hbar$. De hecho, el teorema (5.1.1) da la condición para la existencia de tal haz.

Definición 5.2.1 *Una variedad simpléctica (N, ω) es **cuantizable** para un valor particular de $\hbar$ si*

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_S \omega \in \mathbb{Z}$$

para cualquier superficie cerrada S en N.

A partir de aquí, en lo que resta del capítulo vamos a suponer que N es una variedad simpléctica con forma simpléctica ω y que (L, ∇) es un haz lineal Hermitiano con conexión sobre N con curvatura $\omega/\hbar$. Si L es un haz lineal Hermitiano sobre una variedad simpléctica N, decimos que una sección medible s de L es cuadrado integrable si

$$\|s\| := \left(\int_N (s(x), s(x))\lambda(x) \right)^{1/2}$$

es finita, en donde λ es la forma de volumen de Liouville en N. Dadas dos secciones de cuadrado integrable s_1 y s_2 de L, definimos el **producto interno** de s_1 y s_2 por

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_N (s_1(x), s_2(x))\lambda(x).$$

Nota: Vamos a usar $(\cdot,\cdot)$ para denotar el producto interno puntual de dos secciones de L y el cual es una función en N. Usaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar el producto interno global de las secciones el cual es un número.

Definición 5.2.2 *El **espacio de Hilbert precuántico** para N es el espacio de clases de equivalencia de secciones cuadrado integrable de L, en donde dos secciones son equivalentes si son iguales casi en todas partes con respecto a la medida de volumen de Liouville.*

Definición 5.2.3 *Si f es una función compleja suave en N, el **operador precuántico** $Q_{pre}(f)$ es el operador posiblemente no acotado en el espacio de Hilbert precuántico dado por*

$$Q_{pre}(f) = i\hbar\nabla_{X_f} + f,$$

en donde f representa la operación de mltiplicación por f.

Respecto al operador precuántico tenemos los siguientes resultados, análogos al caso que describimos en el capítulo anterior y cuyas demostraciones se pueden consultar en [3].

Proposición 5.2.1 *Si f es una función real, entonces $Q_{pre}(f)$ es simétrico en el espacio de secciones suaves de soporte compacto de L.*
Demostración: Ver [3], Proposition 23.13. ■

Proposición 5.2.2 *Para cualesquiera $f, g \in C^\infty(X)$, tenemos*

$$\frac{1}{i\hbar}[Q_{pre}(f), Q_{pre}(g)] = Q_{pre}\{f, g\}.$$

Demostración: Ver [3], Proposition 23.14. ■

5.3. Polarizaciones

A continuación expondremos una de las definiciones fundamentales para el entendimiento de los mapeos de apareamiento. Tanto las definiciones como la proposición que en esta sección aparecen son tomadas de la sección 23.4, [3].

Definición 5.3.1 *Para cualquier $z \in N$, un subespacio P de T_zN se dice **Lagrangiano** si $dim P = n$ y $\omega(X, Y) = 0$ para cualesquiera $X, Y \in P$.*

Consideremos ahora, el espacio $T^{\mathbb{C}}N$ el cual es la complejificación del espacio TN entendida en términos de suma directa tal y como se describe en el apéndice (B).

Definición 5.3.2 *Una **polarización** de una variedad simpléctica N es una elección en cada punto $z \in N$ de un subespacio Lagrangiano $P_z \subset T_z^{\mathbb{C}}(N)$, es tal que varía suavemente con z, satisfaciendo las siguientes propiedades*

i. ***Integrabilidad**. Si dos campos vectoriales X y Y pertenecen a P_z en cada punto z, entonces también lo está $[X,Y]$.*

ii. *La dimensión de $P_z \cap \overline{P_z}$ es constante.*

En donde $\overline{P_z} = \{\overline{X} \mid X \in P_z\}$.

Por convención, el espacio de Hilbert cuántico es definido como el espacio de secciones que son covariantemente constantes en la dirección de $\overline{P}$, más que en P. Entonces, P más bien es el complejo conjugado del espacio de direcciones en las cuales las secciones son constantes.

Ejemplo 5.3.1 *Si M es cualquier variedad suave, sea $N = T^*M$ el haz cotangente de M, equipado con la 2-forma canónica ω. Para cada $a \in T^*M$, sea P_a la complejificación del espacio tangente a la fibra T_z^*M en donde $z = \pi(a)$. Entonces P es una polarización en T^*M, llamada **polarización vertical**.*
Demostración: Si $\{x_k\}$ es un sistema de coordenadas locales en M, sea $\{x_k, p_k\}$ es sistema de coordenadas locales asociado a T^*M. Sabemos también que la 2-forma canónica en T^*M está dada por $\omega = dp_k \wedge dx_k$. En cada punto $a \in T^*M$, el subespacio vertical $P_a = T^{\mathbb{C}}(T_z^*M)$, en donde $z = \pi(a)$, es generado por los vectores $\partial/\partial p_k$.

Sean $u, v \in P_a$, en donde $u = X + iY$ y $v = A + iB$, con $A, B, X, Y \in T(T_z^*M)$. Definamos la 2-forma simpléctica en N, ω_{ext} como sigue

$$\omega_{ext}(u,v) = \omega(X,A) - \omega(Y,B) + i(\omega(X,B) + \omega(Y,A)).$$

Entonces tenemos que $dim_{\mathbb{C}}\ P_a = n$. También para cualesquiera campos vectoriales $a_j(x,p)\partial/\partial p_j$ y $b_k(x,p)\partial/\partial p_k$ en $T(T_z^*M)$ se verifica que

$$\omega(a_j(x,p)\partial/\partial p_j, b_k(x,p)\partial/\partial p_k) = 0, \tag{5.7}$$

y por tanto para u y v en P_a descritos como en las líneas anteriores se cumple que

$$\omega_{ext}(u,v) = \omega(X,A) - \omega(Y,B) + i(\omega(X,B) + \omega(Y,A)) = 0$$

ya que cada uno de los términos se anula por satisfacer (5.7). Así, P_a es Lagrangiana. Ahora falta comprobar las propiedades de integrabilidad y que $dim\ P_a \cap \overline{P_a}$ es constante. Como $P_a = \overline{P_a}$ en todo punto a, tenemos que $dim\ P_a \cap \overline{P_a} = n$.

Luego, observemos que para $X = a_j(x,p)\partial/\partial p_j = a_j\partial/\partial p_j$ y $Y = b_k(x,p)\partial/\partial p_k = b_k\partial/\partial p_k$ campos vectoriales en $T(T_z^*M)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \left[a_j\frac{\partial}{\partial p_j}\left(b_k\frac{\partial}{\partial p_k}\right) - b_k(x,p)\frac{\partial}{\partial p_k}\left(a_j(x,p)\frac{\partial}{\partial p_j}\right)\right] \\
&= a_j\frac{\partial b_k}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial p_k} + a_jb_k\frac{\partial^2}{\partial p_j\partial p_k} - b_k\frac{\partial a_j}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial p_j} - b_ka_j\frac{\partial^2}{\partial p_j\partial p_k} \\
&= a_j\frac{\partial b_k}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial p_k} - b_k\frac{\partial a_j}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial p_j},
\end{aligned}$$

es decir, $[X,Y]$ se escribe como combinación lineal de los generadores de $T(T_z^*M)$ y por tanto $[X,Y]$ es un campo vectorial en $T(T_z^*M)$. Luego, considerando $u = X+iY,\ v = A+iB \in P_a$ con $X, Y, A, B \in T(T_z^*M)$, tenemos que

$$[u,v] = [X+iY, A+iB] = [X,A] - [Y,B] + i([X,B] + [Y,A]),$$

dado que cada uno de los términos que aparecen en la expresión para $[u,v]$ es un elemento de $T(T_z^*M)$, se tiene $[u,v] = \tilde{X} + i\tilde{Y}$, en donde $\tilde{X}, \tilde{Y}$ son elementos de $T(T_z^*M)$. Por tanto, podemos concluir que P es una polarización en T^*M ya que satisface las propiedades requeridas. ■

Definición 5.3.3 *Decimos que una polarización es* ***puramente real*** *si $\overline{P_z} = P_z$ para todo $z \in N$. Y decimos que una polarización es* ***puramente compleja*** *si $P_z \cap \overline{P_z} = \{0\}$ para todo $z \in N$.*

Definición 5.3.4 *Una* ***subvariedad integral*** *R para alguna polarización P es una subvariedad para la cual $T_z^{\mathbb{C}} R = P_z$ para todo $z \in R$.*

Teorema 5.3.1 (Teorema de Frobenius.) *Una distribución P es integrable si y sólo si para cualquier $m_0 \in N$ existe una subvariedad integral (local) $M \subset N$ tal que $m_0 \in M$ y cuyo haz tangente es exactamente P restringido a M.*
Demostración: Ver [5], Theorem 2.2.26. ■

Consideremos ahora P cualquier polarización puramente real, dado que se cumple la condición de integrabilidad el Teorema de Frobenius implica que para cada punto z en N existe una subvariedad R en la cual está contenido y tal que es maximal en la clase de subvariedades integrales conexas para P.

Definición 5.3.5 *Dada la polarización puramente real P, llamaremos* ***hojas*** *de la polarización a las subvariedades integrales conexas maximales de P.*

Respecto a las polarizaciones puramente complejas tenemos los siguientes resultados.

Proposición 5.3.1 *Sea P una polarización puramente compleja en N. Para cada $z \in N$, sea $J_z : T_z^{\mathbb{C}}(N) \to T_z^{\mathbb{C}}(N)$ el único mapeo lineal tal que $J_z = iI$ en P_z y $J_z = -iI$ en $\overline{P_z}$. Entonces se satisfacen:*

i. *J_z es real. Transforma el espacio tangente real a sí mismo.*

ii. *ω es J_z-invariante.*

Demostración: Ver [3], Proposition 23.18. ■

Definición 5.3.6 *Para cualquier polarización puramente compleja P, la polarización es llamada polarización de Kähler, si la forma hermitiana*

$$g(X,Y) = i\omega(X, \overline{Y}) \tag{5.8}$$

es definida positiva para $X, Y \in P$.

Para finalizar ésta sección, consideremos la forma simpléctica $\omega = dp \wedge dx$ en $\mathbb{R}^2$. Vamos a identificar a $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ mediante el mapeo $z = x - ip$. Definamos a P_z como el subespacio de $T_z^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^2$ generado por el vector $\partial/\partial\overline{z}$. Tenemos que para cada punto $z \in \mathbb{C}$, P_z satisface:

Sean X y Y en P_z de la forma $X = f(z,\overline{z})\partial/\partial\overline{z}$ y $Y = g(z,\overline{z})\partial/\partial\overline{z}$, en donde para abreviar notación escribiremos a $f = f(z,\overline{z})$ y $g = g(z,\overline{z})$. Entonces

1. Notemos que $dim_{\mathbb{C}} P_z = 1$ y que

$$\omega(X,Y) = \omega(f\partial/\partial\overline{z}, g\partial/\partial\overline{z}) = \frac{d\overline{z}\wedge dz}{2i}\left(f\frac{\partial}{\partial\overline{z}}, g\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right) = 0.$$

   Por tanto, P_z es Lagrangiano.

2. Sea $h = h(z,\overline{z})$ una función suave en $\mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}
[X,Y]h &= f\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(g\frac{\partial h}{\partial\overline{z}}\right) - g\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(f\frac{\partial h}{\partial\overline{z}}\right) \\
&= f\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}\frac{\partial h}{\partial\overline{z}} + fg\frac{\partial^2 h}{\partial\overline{z}^2} - g\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\frac{\partial h}{\partial\overline{z}} - gf\frac{\partial^2 h}{\partial\overline{z}^2} \\
&= \left(f\frac{\partial g}{\partial\overline{z}} - g\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\right)\frac{\partial h}{\partial\overline{z}} \\
&= F(z,\overline{z})\frac{\partial h}{\partial\overline{z}}.
\end{aligned}$$

   Entonces, como $[X,Y] = F\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$, concluímos que $[X,Y]\in P_z$.

3. Dado que $P_z\cap\overline{P_z} = \{0\}$, $dimP_z\cap\overline{P_z}$ es constante. Luego, P_z es una polarización. Más aún, P_z es una polarización puramente compleja.

Para mostrar que P_z es una polarización de Kähler. Basta mostrar que la forma bilineal definida por (5.8) es definida positiva para cada $z\in\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$. Entonces, sea $X\in P_z$ de la forma $X = f(z,\overline{z})\partial/\partial\overline{z}$, entonces

$$\begin{aligned}
g(X,X) &= i\omega(X,\overline{X}) = i\frac{1}{2i}(d\overline{z}\wedge dz)(X,\overline{X}) = \frac{1}{2}(d\overline{z}\wedge dz)(f(z,\overline{z})\partial/\partial\overline{z}, \overline{f(z,\overline{z})}\partial/\partial z) \\
&= \frac{|f|^2}{2}\geq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $g(X,Y)$ es definida positiva y P_z es entonces una polarización de Kähler.

5.4. Cuantización con semi-formas

En este apartado construiremos el concepto de semi-forma para luego definir los espacios de Hilbert asociados a éstas. Este concepto dependerá de las polarizaciones definidas en N y de los potenciales simplécticos asociados a la conexión en L. Para llegar a dar un tratamiento completo que nos permita llegar a explicar los mapeos de apareamiento, se reproducirá la sección 23.6 de [3], en cada sección se hará la referencia adecuada para indicar cuidadosamente las partes de [3] que fueron tomadas en cuenta[1].

[1] En cada sección (o subsección) se indicará entre corchetes el nombre de la sección (o subsección) correspondiente de la que fue extraída, por ejemplo la subsección **El espacio de hojas** fue tomada de la subsección [23.6.1], por tanto en este documento aparacererá como **El espacio de hojas [23.6.1]**. En el entendido de que cada una de estas secciones se encuentran expuestas en la referencia [3] de la bibliografía.

5.4.1. Cuantización con semi-formas: Caso Real

El espacio de hojas [23.6.1]

Recordando el concepto de hoja de P, vamos a definir el **espacio de hojas** Ξ como el conjunto de todas las hojas de P y al mapeo cociente $q : N \to \Xi$ de tal manera que manda a cada punto $z \in N$ a la única hoja que lo contiene. Podemos topologizar Ξ definiendo a un conjunto U en Ξ como un abierto si $q^{-1}(U)$ es abierto en N.

Para poder llevar a cabo el programa de cuantización geométrica se asumirá que Ξ es una variedad suave de acuerdo a la siguiente convención: a Ξ se le dotará con la estructura de variedad suave, n-dimensional de tal manera que $q : N \to \Xi$ es suave y que el kernel de $q_{*,z}$ es igual a la intersección de P_z con el espacio tangente real de P_z, y que denotaremos por $P_z^{\mathbb{R}}$. Aquí, $q_{*,z}$ se entiende como el pushforward de q, o bien, la diferencial de q en el punto z. En el caso particular cuando $N = T^*M$ con P_z la polarización vertical, el espacio de hojas Ξ es una variedad suave difeomorfa a M. Por ejemplo, si consideramos $M = \mathbb{R}$ y $N = T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$, tenemos que Ξ es difeomorfo a $\mathbb{R}$.

El haz canónico [23.6.2]

Definición 5.4.1 *El **haz canónico** $\mathcal{K}_P$ de P es el haz lineal real*[2] *cuyas secciones que son n-formas α satisfaciendo la propiedad*

$$X \lrcorner \alpha = 0 \tag{5.9}$$

*para todo campo vectorial X perteneciente a P. Una sección α de $\mathcal{K}_P$ es **polarizada** si*

$$X \lrcorner (d\alpha) = 0 \tag{5.10}$$

para todo campo vectorial X perteneciente a P.

Podemos introducir también al **haz canónico complejificado** $\mathcal{K}_P^{\mathbb{C}}$, las secciones en $\mathcal{K}_P^{\mathbb{C}}$ serán aquellas n-formas complejas que satisfacen (5.9), y definimos una sección de $\mathcal{K}_P^{\mathbb{C}}$ polarizada de si satisface (5.10).

Ejemplo 5.4.1 *Sea $N = T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ y sea P la polarización vertical en N. Entonces una n-forma α en $\mathbb{R}^{2n}$ es una sección de $\mathcal{K}_P$ si y sólo si α es de la forma*

$$\alpha = f(x,p)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \tag{5.11}$$

y α es una sección polarizada de $\mathcal{K}_P$ si y sólo si α es de la forma

$$\alpha = g(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \tag{5.12}$$

para funciones suaves f en $\mathbb{R}^{2n}$ y g en $\mathbb{R}^n$.
Demostración: Sea α una n-forma en $\mathbb{R}^{2n}$ del estilo

$$\alpha = f_1(x,p)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad + \quad \Big(\sum f_k(x,p) \text{ términos en donde aparece alguna} \tag{5.13}$$
$$\text{1-forma } dp_j \text{ en el producto exterior}\Big)\,. \tag{5.14}$$

[2] Véase Woodhouse pág. 223, para una definición rigurosa

Como α es tal que $X \lrcorner \alpha = 0$, para cualquier X campo vectorial en P de la forma $X = \sum_k a_k(x,p)\partial/\partial p_k$, se sigue que para $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \in TN$

$$\begin{aligned} 0 &= X \lrcorner \alpha(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \\ &= \alpha(X, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \\ &= \alpha(\sum_k a_k(x,p)\partial/\partial p_k, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \\ &= f_1(x,p)(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)(\sum_k a_k(x,p)\partial/\partial p_k, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) + \cdots \end{aligned}$$

como el primer término es cero, se sigue que para que la igualdad se cumpla las funciones f_k para $k \geq 2$, tienen que ser cero. Entonces tenemos que α debe ser de la forma

$$\alpha = f(x,p) \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Luego, $d\alpha = \sum_{j=1}^{2n} \partial f(x,p)/\partial y_j(dy_j \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$ con $y_j = x_j$, si $j = 1, 2, \ldots, n$ y $y_j = p_{j-n}$ si $j = n+1, \ldots, 2n$, por ser sección polarizada de $\mathcal{K}_P$ satisface $X \lrcorner d\alpha = 0$ para cualquier campo vectorial X en P de la forma $X = \sum_k a_k(x,p)\partial/\partial p_k$. Entonces para $v_1, v_2, \ldots, v_n \in TN$ se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= X \lrcorner d\alpha = d\alpha(X, v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \partial f(x,p)/\partial y_j(dy_j \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)(\sum_k a_k(x,p)\partial/\partial p_k, v_1, v_2, \ldots, v_n) \end{aligned}$$

de donde $\partial f/\partial y_j = \partial f/\partial p_{j-n} = 0$ para $j = n+1, \ldots, 2n$, pero esto implica que f es una función que no depende de p, y por tanto $f = f(x)$. Así,

$$\alpha = f(x)x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$$

nos dicta la manera en que deben ser las secciones polarizadas de $\mathcal{K}_P$. ■

Podemos notar que las secciones polarizadas obtenidas en el ejemplo anterior son secciones que son n-formas en el espacio de configuración. Este resultado es un caso especial de la siguiente

Proposición 5.4.1 *Si el espacio de hojas Ξ de P es una variedad suave y α es una sección polarizada de $\mathcal{K}_P$, entonces existe una única n-forma $\widetilde{\alpha}$ en Ξ tal que*

$$\alpha = q^*(\widetilde{\alpha}),$$

en donde $q : N \to \Xi$ es el mapeo cociente.

Recíprocamente, si β es cualquier n-forma en Ξ, entonces $\alpha := q^*(\beta)$ es una sección polarizada de $\mathcal{K}_P$.
Demostración: Ver [3] Proposición 23.37. ■

Definición 5.4.2 *Una función compleja, suave f en N es* ***cuantizable*** *con respecto a P si $Q_{pre}(f)$ preserva al espacio de secciones suaves que son polarizadas con respecto a P.*

Definición 5.4.3 *Un campo vectorial (posiblemente) complejo X preserva una polarización P si para todo campo vectorial Y en P, el campo vectorial $[X, Y]$ también está en P.*

Las siguientes proposiciones establecen cuándo la derivada de Lie preserva el espacio de secciones polarizadas de $\mathcal{K}_P$. La importancia de éste resultado es que nos permitirá definir un operador cuántico en el espacio de Hilbert de la semi-forma asociado a P.

Proposición 5.4.2 *Para cualquier f una función compleja suave en N, si el campo vectorial Hamiltoniano X_f preserva $\overline{P}$, entonces f es cuantizable.*
Demostración: Ver [3], Proposition 23.24. ■

Proposición 5.4.3 *Sea X un campo vectorial en N que preserva P, y supongamos α una sección suave de $\mathcal{K}_P$. Entonces la derivada de Lie $\mathcal{L}_X\alpha$ es otra sección de $\mathcal{K}_P$ y si α es polarizada, entonces $\mathcal{L}_X\alpha$ es también polarizada.*
Demostración: Ver [3], Proposition 23.38. ■

Proposición 5.4.4 *Sea Ξ el espacio de hojas de P una variedad suave y sea X un campo vectorial en N que preserva P. Entonces existe un único campo vectorial Y en Ξ tal que*

$$q_{*,z}(X) = Y, \;\; \forall z \in N. \tag{5.15}$$

Más aún, si $\alpha = q^*(\beta)$ es una sección polarizada de $\mathcal{K}_P$, como en la proposición (5.4.1)*, entonces*

$$\mathcal{L}_X(q^*(\beta)) = q^*(\mathcal{L}_Y(\beta)).$$

Demostración: Ver [3], Proposition 23.39. ■

Raíces cuadradas del haz canónico [23.6.3]

Consideremos ahora que el espacio de hojas Ξ de P es una variedad orientable con alguna orientación en particular.

Definición 5.4.4 *Sea β una n-forma orientada y que nunca se anula, en Ξ, y tal que $\alpha := q^*(\beta)$ es una sección de $\mathcal{K}_P$ que nunca se anula. Una sección de $\mathcal{K}_P$ es **no-negativa** si es, en cada punto, un múltiplo no-negativo de α. Esto no depende de la elección de la n-forma orientada.*

Vamos a considerar al haz lineal real δ_P como una "raíz cuadrada"del haz canónico $\mathcal{K}_P$, de tal manera que nos proporciona un isomorfismo entre $\delta_P \otimes \delta_P$ y $\mathcal{K}_P$ como sigue, si s_i, $i = 1, 2$, son secciones de δ_P, entonces $s_1 \otimes s_2$ será considerada como una sección en $\mathcal{K}_P$. Asumiremos también que dado este isomorfismo, la sección $s_1 \otimes s_2$ será no-negativa .

Podemos considerar también la complejificación de δ_P, como el haz lineal $\delta_P^{\mathbb{C}}$ cuya fibra en cada punto es la complejificación de la fibra de δ_P. En particular, si s_1 y s_2 son secciones de $\delta_P^{\mathbb{C}}$, entonces $s_1 \otimes s_2$ es una sección de $\mathcal{K}_P^{\mathbb{C}}$.

En las siguientes líneas desarrollaremos conceptos y resultados que nos ayudarán a definir cuándo una sección del haz lineal δ_P es una sección polarizada.

Sea α una sección de $\mathcal{K}_P$ y sea X un campo vectorial en P, definimos la n-forma $\nabla_X\alpha$ como

$$\nabla_X\alpha = X\lrcorner(d\alpha). \tag{5.16}$$

Recordemos que la derivada de Lie de α en la dirección de X puede ser calculada mediante la fórmula

$$\mathcal{L}_X\alpha = X\lrcorner(d\alpha) + d(X\lrcorner\alpha),$$

y observemos también, puesto que α es una sección de $\mathcal{K}_P$, se satisface que $X\lrcorner\alpha = 0$. Esto implica que

$$\mathcal{L}_X\alpha = X\lrcorner(d\alpha) = \nabla_X\alpha.$$

Dado que X pertenece a P, X preserva P y por tanto la proposición (5.4.3) implica que $\mathcal{L}_X\alpha = X\lrcorner(d\alpha) = \nabla_X\alpha$ es una sección de $\mathcal{K}_P$. Sabemos que la derivada de Lie en general no satisface que $\mathcal{L}_{fX} = f\mathcal{L}_X$, sin embargo en vista de que podemos calcular la derivada de Lie como ∇ actuando en cualquier sección de $\mathcal{K}_P$, y éste mapeo sí satisface que $\nabla_{fX} = f\nabla_X$, diremos que el mapeo ∇ es una **conexión parcial** en $\mathcal{K}_P$.

Proposición 5.4.5 *Sea δ_P una raíz cuadrada fija de $\mathcal{K}_P$. Para cualquier campo vectorial X en P, existe un operador lineal único ∇_X tal que*

$$\nabla_X : \delta_P \to \delta_P,$$

$$\begin{aligned} \nabla_X(fs_1) &= X(f)s_1 + f\nabla_X s_1 &\quad(5.17)\\ \nabla_X(s_1\otimes s_2) &= (\nabla_X s_1)\otimes s_2 + s_1\otimes(\nabla_X s_2) &\quad(5.18)\end{aligned}$$

para cualquier función suave f y cualesquiera secciones s_1 y s_2 de δ_P.

Si X es un campo vectorial en N que preserva P, entonces existe un operador lineal único $\mathcal{L}_X$ tal que

$$\mathcal{L}_X : \delta_P \to \delta_P,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(fs_1) &= X(f)s_1 + f\mathcal{L}_X s_1 &\quad(5.19)\\ \mathcal{L}_X(s_1\otimes s_2) &= (\mathcal{L}_X s_1)\otimes s_2 + s_1\otimes(\mathcal{L}_X s_2) &\quad(5.20)\end{aligned}$$

para cualquier función suave f y cualesquiera secciones s_1 y s_2 de δ_P.

Demostración: Ver [3] Proposición 23.41. ■

Cabe notar que éstas construcciones se extienden naturalmente de secciones de δ_P a secciones de $\delta_P^{\mathbb{C}}$. Notemos también que todos los operadores ∇ que intervienen en la proposición no son los mismos, mientras que el operador ∇ que aparece en el lado izquierdo de (5.18) es la conexión parcial en $\mathcal{K}_P$ que se definió anteriormente, el resto de los operadores ∇ que aparecen tanto en (5.17) y en (5.18) son los operadores definidos en el haz lineal δ_P. No esta por demás mencionar que hay que estar atentos al contexto en el cual se estarán empleando para saber de cuál operador se está hablando. Con esto en mente y por la proposición anterior, podemos decir que una sección s de δ_P es **polarizada** si $\nabla_X s = 0$ para cualquier campo vectorial X en P.

Espacio de Hilbert de la semi-forma [23.6.4]

Con los elementos hasta ahora desarrollados estamos en forma para definir los espacios de Hilbert de nuestro interés y que se obtienen mediante este programa de cuantización geométrica. Seguiremos considerando el espacio de hojas de P como antes, orientable y con una orientación particular.

Sean δ_P una raíz cuadrada de K_P, y L un haz lineal precuántico sobre N. Formemos entonces el producto tensorial $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$, si s_j con $j = 1, 2$ son secciones de dicho producto tensorial, éstas se pueden descomponer localmente como $s_j = \mu_j \otimes \nu_j$, en donde μ_j es una sección de L, $\mu_j \neq 0$ y ν_j es una sección de $\delta_P^{\mathbb{C}}$. Definimos el producto interno entre s_1 y s_2, secciones de $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$, como

$$(\cdot, \cdot) : L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}} \times L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}} \to \mathcal{K}_{\mathcal{P}}$$

$$(s_1, s_2) := (\mu_1, \mu_2)\overline{\nu_1} \otimes \nu_2, \tag{5.21}$$

en ésta definición (μ_1, μ_2) es el producto escalar puntual dado por la esctructura Hermitiana dada en L.

Observación 5.4.1 (s_1, s_2) *está definido globalmente. Para ver este resultado, notar que s puede tener la descomposición local $(f\mu_j) \otimes \nu_j/f$ para alguna f distinta de cero.*

Ahora nos encaminamos a formar una conexión parcial en $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera. Sea X un campo vectorial en P arbitrario, sea s una sección de $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$, tal que su descomposición local sea de la forma $s = \mu \otimes \nu$, con $\mu \neq 0$. Definimos el operador ∇_X como

$$\nabla_X : L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}} \to L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$$

$$\nabla_X(\mu \otimes \nu) = (\nabla_X \mu) \otimes \nu + \mu \otimes (\nabla \nu). \tag{5.22}$$

Afirmación 5.4.1 *El operador $\nabla_X(s)$ está definido globalmente.*

Demostración: Sea s sección de $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ cuya decomposición local es $(f\mu) \otimes (\nu/f)$ para alguna función f que no se anula. Entonces

$$\begin{aligned} \nabla_X(s) &= \nabla_X((f\mu) \otimes (\nu/f)) \\ &= (\nabla_X(f\mu)) \otimes \nu/f + f\mu \otimes (\nabla_X \nu/f). \end{aligned}$$

Por una parte tenemos

$$\nabla_X(f\mu) = (X(f))\mu + f\nabla_X\mu$$

y por otra

$$\nabla_X(\nu/f) = (\nabla_X(\nu/f))\nu + 1/f\nabla_X\nu.$$

Así,

$$\begin{aligned} \nabla_X(s) &= [(X(f))\mu + f\nabla_X\mu] \otimes \nu/f + f\mu \otimes [(\nabla_X(\nu/f))\nu + 1/f\nabla_X\nu] \\ &= (X(f))\mu \otimes \nu/f + f\nabla_X\mu \otimes \nu/f + f\mu \otimes (\nabla_X(\nu/f))\nu + f\mu \otimes 1/f\nabla_X\nu \\ &= [f\nabla_X\mu \otimes \nu/f + f\mu \otimes (1/f)\nabla_X\nu] + (X(f))\mu \otimes \nu/f + f\mu \otimes (X(1/f))\nu \\ &= [\nabla_X\mu \otimes \nu + \mu \otimes \nabla_X\nu] + (1/f)(X(f))\mu \otimes \nu + f(X(1/f))\mu \otimes \nu \\ &= \nabla_X(\mu \otimes \nu) + X(1)\mu \otimes \nu \\ &= \nabla_X(\mu \otimes \nu). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\nabla_X((f\mu)\otimes(\nu/f)) = \nabla_X(\mu\otimes\nu),$$

es decir, no importa la descomposicón local que se tenga para s, $\nabla_X(s)$ está definido globalmente. ■

Afirmación 5.4.2 *Sean s_1 y s_2 secciones polarizadas de $L\otimes\delta_P^{\mathbb{C}}$, entonces la sección (s_1,s_2) es una seción polarizada de $\mathcal{K}_P^{\mathbb{C}}$.*

Demostración: Sean s_1 y s_2 secciones polarizadas de $L\otimes\delta_P^{\mathbb{C}}$, entonces se pueden descomponer localmente como $s_j=\mu_j\otimes\nu_j$, $j=1,2$, y satisfacen

$$\nabla_X(s_j) = (\nabla_X\mu_j)\otimes\nu_j + \mu_j\otimes(\nabla_X\nu_j) = 0.$$

Luego, para calcular $\nabla_X((s_1,s_2))$ utilizamos en primera instancia la definición del producto interno entre s_1 y s_2, después las igualdades (5.17) y (5.18) de la proposición (5.4.5), obteniendo que

$$\begin{aligned}
\nabla_X((s_1,s_2)) &= \nabla_X((\mu_1,\mu_2)\overline{\nu_1}\otimes\nu_2) \\
&= X((\mu_1,\mu_2))\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 + (\mu_1,\mu_2)\nabla_X(\overline{\nu_1}\otimes\nu_2) \\
&= X((\mu_1,\mu_2))\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 + (\mu_1,\mu_2)(\nabla_X\overline{\nu_1})\otimes\nu_2 + (\mu_1,\mu_2)\overline{\nu_1}\otimes(\nabla_X\nu_2).
\end{aligned}$$

Reescribiendo los dos últimos términos de la última línea en términos del producto interno, utilizando la hipótesis $(-\nabla_X\mu_j)\otimes\nu_j = \mu_j\otimes(\nabla_X\nu_j)$, y que $X(\mu_1,\mu_2) = (\nabla_X\mu_1,\mu_2)+(\mu_1,\nabla_X\mu_2)$; la última línea que obtuvimos para el cálculo de $\nabla_X((s_1,s_2))$ es igual a

$$\begin{aligned}
& X((\mu_1,\mu_2))\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 + (\mu_1\otimes\nabla_X\nu_1,\mu_2\otimes\nu_2) + (\mu_1\otimes\nu_1,\mu_2\otimes\nabla_X\nu_2) \\
=\; & X((\mu_1,\mu_2))\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 + (-\nabla_X\mu_1\otimes\nu_1,\mu_2\otimes\nu_2) + (\mu_1\otimes\nu_1,\mu_2\otimes\nabla_X\nu_2) \\
=\; & [(\nabla_X\mu_1,\mu_2)+(\mu_1,\nabla_X\mu_2)]\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 + (-\nabla_X\mu_1,\mu_2)\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 + (\mu_1\otimes\nu_1,\mu_2\otimes\nabla_X\nu_2) \\
=\; & [(\nabla_X\mu_1,\mu_2)+(\mu_1,\nabla_X\mu_2)+(-\nabla_X\mu_1,\mu_2)]\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 + (\mu_1\otimes\nu_1,\mu_2\otimes\nabla_X\nu_2) \\
=\; & (\mu_1,\nabla_X\mu_2)\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 + (\mu_1\otimes\nu_1,\mu_2\otimes\nabla_X\nu_2) \\
=\; & (\mu_1,\nabla_X\mu_2)\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 + (\mu_1\otimes\nu_1,-\nabla_X\mu_2\otimes\nu_2) \\
=\; & (\mu_1,\nabla_X\mu_2)\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 + (\mu_1,-\nabla_X\mu_2)\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 \\
=\; & 0\overline{\nu_1}\otimes\nu_2 = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\nabla_X((s_1,s_2)) = 0$$

implicando lo que se quería probar. ■

Definición 5.4.5 *Sea P una polarización puramente real y sea δ_P alguna raíz cuadrada de $\mathcal{K}_P$, llamaremos **espacio de semi-forma** al espacio de secciones suaves polarizadas de $L\otimes\delta_P^{\mathbb{C}}$. Para una sección polarizada s de $L\otimes\delta_P^{\mathbb{C}}$, definimos la norma de s por*

$$\|s\|^2 = \int_\Xi \widetilde{(s,s)}, \tag{5.23}$$

en donde (s,s) es como en (5.21) *y $\widetilde{(s,s)}$ es la n-forma en Ξ dada por la proposición* (5.4.1). *Si s_1 y s_2 son elementos del espacio de semi-forma con $\|s_1\|<\infty$ y $\|s_2\|<\infty$, definimos su producto interno como*

$$\langle s_1,s_2\rangle = \int_\Xi \widetilde{(s_1,s_2)}. \tag{5.24}$$

*El **Espacio de Hilbert de semi-forma** es la completación con respecto a la norma* (5.23) *del espacio de secciones polarizadas s para las cuales $\|s\|^2<\infty$.*

Ejemplo 5.4.2 *Sea $N = T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ y sea L es haz trivial en N con conexión $\nabla_X = X - (i/\hbar)\theta(X)$, donde $\theta = pdx$. Sea P la polarización vertical en N y orientemos $\mathbb{R}$ de tal manera que las 1-formas orientadas son múltiplos positivos de dx. Sea δ_P el haz trivial con una sección trivializante $\sqrt{dx}$ tal que $\sqrt{dx} \otimes \sqrt{dx} = dx$. Entonces toda sección polarizada s de $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ tiene la forma*

$$s = \phi(x) \otimes \sqrt{dx} \tag{5.25}$$

para alguna función ϕ en $\mathbb{R}$. La norma de tal sección se calcula como

$$\|s\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|^2 dx.$$

Demostración: Para empezar debemos mostrar quién es el haz canónico de P, es decir, $\mathcal{K}_P$. Veamos cuáles son las secciones que lo conforman.

Sea α una $1-$forma de $\mathcal{K}_P$ de la forma $\alpha = f(x,p)dx + g(x,p)dp$ con f y g funciones reales en $\mathbb{R}$. Entonces como α debe satisfacer la condición

$$X \lrcorner \alpha = 0$$

para cualquier campo vectorial X perteneciente a P, tenemos las siguientes implicaciones considerando $X = \partial/\partial p$ y $(x,p) \in N$

$$\begin{aligned} 0 &= X \lrcorner \alpha(x,p) = \alpha(\partial/\partial p)(x,p) \\ &= (f(x,p)dx + g(x,p)dp)(\partial/\partial p) \\ &= 0 + g(x,p) \\ &= g(x,p). \end{aligned}$$

Por tanto, $g(x,p) = 0$ y de aquí que $\alpha = f(x,p)dx$. Sabemos también que las secciones polarizadas de $\mathcal{K}_P$ vienen dadas por la condición

$$X \lrcorner d\alpha = 0,$$

como $d\alpha = \partial f/\partial p dp \wedge dx$, se sigue que para $v \in TN$,

$$X \lrcorner d\alpha(X,v) = d\alpha(X,v) = \frac{\partial f}{\partial p} dp \wedge dx(\partial/\partial p, v) = \frac{\partial f}{\partial p} dx(v).$$

Entonces $X \lrcorner d\alpha = 0$ si y sólo si f es independiente de p. Así, dx es una sección polarizada de $\mathcal{K}_P$. Si elegimos δ_P trivial y $\sqrt{dx}$ tal que $\sqrt{dx} \otimes \sqrt{dx} = dx$, entonces por la igualdad (5.18), se tiene que

$$0 = \nabla_X(\sqrt{dx} \otimes \sqrt{dx}) = 2(\nabla_X \sqrt{dx}) \otimes \sqrt{dx},$$

implicando a su vez que $\nabla_X \sqrt{dx} = 0$. Por tanto, $\sqrt{dx}$ es una sección polarizada de δ_P.

Formando ahora el producto tensorial $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$, tenemos que las secciones s pertenecientes a éste haz se descomponen (localmente) como $s = \mu \otimes \nu$, en donde μ es una sección en L y ν es una sección en $\delta_P^{\mathbb{C}}$ de la forma $\mu = \varphi(x,p)$ y $\nu = \sqrt{dx}$,

$$s = \varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx}.$$

Para encontrar el espacio de semi-formas, aún es necesario verificar que para cualquier sección s en $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$, se satisface la condición

$$\begin{aligned} \nabla_X(s) &= 0, \text{ en donde} \\ \nabla_X(s) &= (\nabla_X \mu) \otimes \nu + \mu \otimes (\nabla_X \nu). \end{aligned}$$

Así,para $s = \varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx}$ en $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial p}(\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx}) &= \nabla_{\partial/\partial p}\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx} + \varphi(x,p) \otimes \nabla_{\partial/\partial p}\sqrt{dx} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial p}\varphi(x,p) - \left(\frac{i}{\hbar}pdx\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)\right)\varphi(x,p)\right] \otimes \sqrt{dx} + \varphi(x,p) \otimes 0 \\ &= \frac{\partial}{\partial p}\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx}\end{aligned}$$

por tanto

$$\nabla_{\partial/\partial p}(\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx}) = 0$$

si y sólo si

$$\frac{\partial}{\partial p}\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx} = 0$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial p}\varphi(x,p) = 0$$

lo que es equivalente a decir que φ es una función que no depende de p. Y por lo tanto, $s = \varphi(x) \otimes \sqrt{dx}$ para alguna función φ. Y puesto que

$$(s,s) = (\varphi(x), \varphi(x))\sqrt{dx} \otimes \sqrt{dx} = |\varphi(x)|^2 dx$$

entonces su norma se puede calcular como

$$(s,s) = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx,$$

en donde $\widetilde{(s,s)}$ lo hemos escrito de la misma forma que (s,s), sólo que ahora interpretado como una 1-forma en el espacio de hojas $\Xi \cong \mathbb{R}$ (las coordenadas en p).

■

Cuantización de observables [23.6.5]

Ya que hemos obtenido los espacios de Hilbert, necesitamos definir como se asocian las funciones en nuestra variedad con operadores en los espacios de Hilbert obtenidos y se enunciarán algunas de las propiedades que éstos cumplen, aunque sin demostración, pues recordemos que nuestro objetivo es llegar a obtener la Transformada de Segal-Bargmann. En efecto, para sus demostraciones nos podemos remitir a [3]. Tengamos en mente que para cuando $N = T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$, en el capítulo anterior vimos cómo funciona el operador Q_{pre} en nuestro programa de cuantización geométrica, por tanto podemos remitirnos a ese caso para ilustrar los siguientes resultados.

Supongamos que f es una función en N que de acuerdo a la definición (5.1.2), X_f preserva P.

Definición 5.4.6 *Para cualquier función en N para la cual X_f preserva P, sea $Q(f)$ el operador definido en el espacio de semi-forma de P dado por*

$$Q(f)s = (Q_{pre}(f)\mu) \otimes \nu + i\hbar\mu \otimes \mathcal{L}_{X_f}\nu,$$

en donde s se descompone localmente como $s = \mu \otimes \nu$, con μ una sección de L y ν una sección de $\delta_P^{\mathbb{C}}$.

Dicho operador está bien definido, pues si consideramos la sección $s \in L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ con la descomposición local $(g\mu) \otimes (\nu/g)$ para alguna función g que no se anula, se verifica que

$$\begin{aligned}
Q(f)s &= Q(f)((g\mu) \otimes (\nu/g)) \\
&= (Q_{pre}(f)g\mu) \otimes (\nu/g) + i\hbar(g\mu) \otimes \mathcal{L}_{X_f}(\nu/g) \\
&= (i\hbar\nabla_{X_f} + f)g\mu \otimes (\nu/g) + i\hbar g\mu \otimes \mathcal{L}_{X_f}(\nu/g) \\
&= i\hbar(X_f(g)\mu + g\nabla_{X_f}(\mu)) \otimes (\nu/g) + fg\mu \otimes (\nu/g) + i\hbar g\mu \otimes (X_f(1/g)\nu + (1/g)\mathcal{L}_{X_f}\nu) \\
&= i\hbar X_f(g)\mu \otimes (\nu/g) + i\hbar\nabla_{X_f}(\mu) \otimes \nu + f\mu \otimes \nu + i\hbar g\mu \otimes X_f(1/g)\nu + i\hbar\mu \otimes \mathcal{L}_{X_f}\nu \\
&= i\hbar\nabla_{X_f}(\mu) \otimes \nu + f\mu \otimes \nu + i\hbar\mu \otimes \mathcal{L}_{X_f}\nu + i\hbar X_f(g/g)\mu \otimes \nu \\
&= i\hbar\nabla_{X_f}(\mu) \otimes \nu + f\mu \otimes \nu + i\hbar\mu \otimes \mathcal{L}_{X_f}\nu \\
&= (i\hbar\nabla_{X_f} + f)(\mu) \otimes \nu + i\hbar\mu \otimes \mathcal{L}_{X_f}\nu \\
&= Q(f)(\mu \otimes \nu).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Q(f)((g\mu) \otimes (\nu/g)) = Q(f)(\mu \otimes \nu)$$

es decir, no importa la descomposición local que se tenga para s, y por tanto el operador esta bien definido como se quería probar.

A continuación, expondremos el ejemplo 23.45 presentado en [3], con algunos detalles añadidos.

Ejemplo 5.4.3 *Siguiendo con la notación del ejemplo anterior* (5.4.2)*, sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forma*

$$f(x,p) = a(x) + b(x)p,$$

para algunas funciones suaves a y b en $\mathbb{R}$. Entonces X_f preserva P y

$$Q(f)(\psi(x) \otimes \sqrt{dx}) = \widetilde{\psi}(x) \otimes \sqrt{dx},$$

en donde

$$\widetilde{\psi}(x) = -i\hbar\left(b(x)\psi'(x) + \frac{1}{2}b'(x)\psi(x)\right) + a(x)\psi(x).$$

Demostración: Verifiquemos que efectivamente X_f preserva P, la polarización vertical. Sea Y un campo vectorial en P, digamos $Y = h(x,p)\frac{\partial}{\partial p} = h\frac{\partial}{\partial p}$. El campo vectorial Hamiltoniano asociado a f es

$$X_f = (a'(x) + pb'(x))\frac{\partial}{\partial p} - b(x)\frac{\partial}{\partial x} = H(x,p)\frac{\partial}{\partial p} - b\frac{\partial}{\partial x}.$$

Sea $g = g(x,p)$ una función suave en N, entonces

$$\begin{aligned}
[X_f, Y]g &= X_f(Y(g)) - Y(X_f(g)) = H\frac{\partial}{\partial p}\left(h\frac{\partial g}{\partial p}\right) - b\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial g}{\partial p}\right) - h\frac{\partial}{\partial p}\left(H\frac{\partial g}{\partial p} - b\frac{\partial g}{\partial x}\right) \\
&= H\frac{\partial h}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial p} + Hh\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} - b\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - bh\frac{\partial^2 g}{\partial p\partial x} - h\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial p} - hH\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + hb\frac{\partial^2 g}{\partial p\partial x} \\
&= \left(H\frac{\partial h}{\partial p} - h\frac{\partial H}{\partial p} - b\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial p}g.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[X_f, Y]$ está en P, para cualquier Y en P. Así, X_f preserva la polarización.

Calculemos ahora quien es $Q_{pre}(f)$ con f dada según la hipótesis.

$$\begin{aligned} Q_{pre}(f)\psi(x) &= i\hbar\left[X_f(\psi(x)) - \frac{i}{\hbar}\theta(X_f)\psi(x)\right] + f\psi(x) \\ &= -i\hbar b(x)\psi'(x) - pb(x)\psi(x) + a(x)\psi(x) + pb(x)\psi(x) \\ &= -i\hbar b(x)\psi'(x) + a(x)\psi(x). \end{aligned}$$

Por otra parte, como la 1-forma dx es cerrada, tenemos que

$$\mathcal{L}_{X_f}(dx) = d(X_f \lrcorner dx) = d(-b(x)) = -b'(x)dx.$$

Utilizando la proposición (5.20),

$$\mathcal{L}_{X_f}\left(\sqrt{dx}\right) \otimes \sqrt{dx} = -\frac{1}{2}b'(x)dx = -\frac{1}{2}b'(x)\sqrt{dx} \otimes \sqrt{dx},$$

o bien

$$\mathcal{L}_{X_f}\left(\sqrt{dx}\right) = -\frac{1}{2}b'(x)\sqrt{dx}.$$

Así, considerando lo obtenido para $Q_{pre}(f)$ y $\mathcal{L}_{X_f}\left(\sqrt{dx}\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned} Q(f)(\psi(x) \otimes \sqrt{dx}) &= (Q_{pre}(f)\psi(x)) \otimes \sqrt{dx} + i\hbar\psi(x) \otimes \mathcal{L}_{X_f}\left(\sqrt{dx}\right) \\ &= \left[-i\hbar b(x)\psi'(x) + a(x)\psi(x)\right] \otimes \sqrt{dx} + i\hbar\psi(x) \otimes \left(-\frac{1}{2}b'(x)\sqrt{dx}\right) \\ &= \left[-i\hbar b(x)\psi'(x) + a(x)\psi(x) - \frac{i\hbar}{2}b'(x)\psi(x)\right] \otimes \sqrt{dx}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\widetilde{\psi}(x) = -i\hbar\left(b(x)\psi'(x) + \frac{1}{2}b'(x)\psi(x)\right) + a(x)\psi(x)).$$

■

Notemos que si nos restringimos a que $f(x,p) = x$ entonces $\widetilde{\psi}(x) = x\psi(x)$ y si $f(x,p) = p$, entonces $\widetilde{\psi}(x) = -i\hbar\partial\psi/\partial x$. Los cuales son los operadores de multiplicación y diferenciación que relacionamos en los espacios de Segal-Bargmann de capítulos anteriores.

A continuación enunciaremos los teoremas que nos muestran que efectivamente el operador Q satisface las relaciones de conmutación, y que dada una función real f el operador Q es un operador auto-adjunto.

Teorema 5.4.1 *Sean f y g funciones en N para las cuales X_f y X_g preservan P. Entonces los operadores $Q(f)$ y $Q(g)$ satisfacen*

$$\frac{1}{i\hbar}[Q(f), Q(g)] = Q(\{f, g\})$$

en el espacio de secciones suaves polarizadas de $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$.
Demostración: Ver Theorem 23.46, [3]. ■

Teorema 5.4.2 *Si $f \in C^\infty(N)$ es una función real y X_f preserva P, entonces el operador $Q(f)$ es simétrico en el espacio de secciones suaves s en el espacio de semi-forma para el cual $\widetilde{(s, s)}$ tiene soporte compacto en* Ξ. **Demostración:** Ver Theorem 23.47, [3]. ■

5.4.2. Cuantización con semi-formas: Caso complejo

A lo largo de esta sección vamos a considerar (N, ω) como una variedad simpléctica cuantizable $2n$-dimensional. (L, ∇) el haz lineal pre-cuántico sobre N. P una polarización de Kähler sobre N. Muchos de los resultados y definiciones que se tienen para polarizaciones complejas son similares a los que ya se mencionaron en el caso de polarizaciones reales, simplemente vamos a reemplazar en algunos de los resultados a la polarización P por $\overline{P}$. Y aclarando también que nos remitimos a la sección [23.7], de [3].

Definición 5.4.7 *El **haz canónico** $\mathcal{K}_P$ de P es el haz lineal complejo para el cual las secciones son n-formas α tales que*

$$X \lrcorner \alpha = 0$$

*para todo campo vectorial X en$\overline{P}$. Secciones de $\mathcal{K}_P$ son precisamente las $(n, 0)$-formas en N. Una sección de $\mathcal{K}_P$ se dice **polarizada** si*

$$X \lrcorner (d\alpha) = 0$$

para todo campo vectorial X en $\overline{P}$.

De manera análoga que en el caso real, entenderemos que δ_P es una **raíz cuadrada** de $\mathcal{K}_P$. en el sentido en el que $\delta_P \otimes \delta_P$ nos da un isomorfismo con $\mathcal{K}_P$.

Si X es un campo vectorial que preserva $\overline{P}$, entonces $\mathcal{L}_X$ preserva el espacio de secciones de $\mathcal{K}_P$ y el espacio de secciones polarizadas de $\mathcal{K}_P$. Definimos también la derivada parcial $\nabla_X \alpha$ como $\nabla_X \alpha = X \lrcorner (d\alpha)$. Tanto para la derivada de Lie (para campos vectoriales que preservan $\overline{P}$) como para la conección parcial (para campos vectoriales en $\overline{P}$) tenemos que se cumple un análogo a la proposición (5.4.5). La conexión en L y la conexión parcial en δ_P nos dan una conexión en $L \otimes \delta_P$. Decimos que una sección s de $L \otimes \delta_P$ es polarizada si $\nabla_X s = 0$ para todos los campos vectoriales X en $\overline{P}$.

A continuación presentaremos una proposición que nos ayudará en el cálculo para la obtención del mapeo de apareamiento que perseguimos.

Proposición 5.4.6 (Proposition 23.50, [3]) *Si α es una n-forma en N, entonces en cada punto de la $2n$-forma*

$$(-1)^{n(n-1)/2}(-i)^n \overline{\alpha} \otimes \alpha$$

es un múltiplo no-negativo de la forma de Liouville λ. Existe una estructura Hermitiana en δ_P con la propiedad de que para cada sección s de δ_P tenemos

$$|s|^2 = \left(\frac{(-1)^{n(n-1)/2}(-i)^n}{2^n} \frac{(\overline{s \otimes s}) \wedge (s \otimes s)}{\lambda} \right)^{1/2}.$$

Definición 5.4.8 *El **espacio de Hilbert de la semi-forma** para una polarización de Kähler P en N es el espacio de secciones polarizadas de $L \otimes \delta_P$ cuadrado integrables.*

Definición 5.4.9 *Si f es una función en N para la cual X_f preserva $\overline{P}$, sea $Q(f)$ el operador en el espacio de Hilbert de la semi-forma de $\overline{P}$ dado por*

$$Q(f)s = (Q_{pre}(f)\mu) \otimes \nu - i\hbar\mu \otimes \mathcal{L}_{X_f}\nu,$$

en donde s se descompone localmente como $s = \mu \otimes \nu$, con μ una sección de L y ν una sección de δ_P.

Dichos operadores satisfacen:

i. Relaciones de conmutación. $[Q(f), Q(g)]/(i\hbar) = Q(\{f, g\})$ en el espacio de secciones suaves polarizadas de $L \otimes \delta_P$.

ii. Son simétricos. Si f es una función real y X_f preserva $\overline{P}$, entonces $Q(f)$ es al menos simétrico, suponiendo que podemos encontrar un subespacio denso del espacio de Hilbert de la semi-forma consistiendo de funciones "agradables".

Como se indica en [3], las pruebas de estos enunciados son idénticas a las pruebas del teorema 23.46 presentado en la misma referencia.

5.5. Mapeos de apareamiento

Lo que se pretende en las siguientes líneas es comparar los resultados de cuantizar con respecto a dos polarizaciones diferentes. Justamente los objetos que definiremos, los mapeos de apareamiento, nos permitirán hacer tal comparación. Para nuestros propósitos vamos a considerar el caso de dos polarizaciones reales transversales y luego el caso de una polarización puramente real y una polarización de Kähler, en el primer caso se obtiene la Transformada de Fourier mientras que en el último obtenemos la Transformada de Segal-Bargmann en su forma invariante y en su forma clásica. El desarrollo de esta sección esta basada en [3] principalmente y como segunda fuente [6], reproduciendo algunos de los resultados de la sección 23.8 de [3] y desarrollando el ejemplo de la transformada de Fourier que en esta misma se menciona. Para la obtención de la Transformada de Segal-Bargmann en su forma clásica, seguimos la exposición de [6], y para la obtención de la Transformada de Segal-Bargmann en su forma invariante se ha utilizado como referencia [4].

Para nuestros propósitos a partir de aquí y a lo largo del texto, N será una variedad suave y tal que $N = T^*M$. Supongamos que tenemos dos polarizaciones puramente reales P y P' y que los espacios de hojas asociados Ξ_1 y Ξ_2 son variedades orientadas. Supongamos también que P y P' satisfacen la condición de transversalidad, esta es, que en cada punto $z \in N$ la condición $P_z \cap P'_z = \{0\}$. Si α y β son secciones polarizadas de los haces canónicos $\mathcal{K}_P$ y $\mathcal{K}_{P'}$, respectivamente, la hipótesis de transversalidad implica que $\alpha \wedge \beta$ es una 2-forma no nula en N.

Entonces para cualquier punto $z \in N$ podemos definir un apareamiento bilineal E como sigue

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot) : \delta_{P,z} \times \delta_{P',z} &\to \mathbb{R} \\ (\nu_1, \nu_2) &= \left(\frac{(\nu_1 \otimes \nu_1) \wedge (\nu_2 \otimes \nu_2)}{\lambda} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

en donde $\delta_{P,z}$ y $\delta_{P',z}$ son las **raíces cuadradas** de $\mathcal{K}_P$ y $\mathcal{K}_{P'}$, respectivamente; y λ es la forma de volumen de Liouville en N.

Si consideramos la complejificación de $\delta_{P,z}$ y $\delta_{P',z}$, es posible extender este mapeo como

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot)^{\mathbb{C}} : \delta^{\mathbb{C}}_{P,z} \times \delta^{\mathbb{C}}_{P',z} &\to \mathbb{C} \\ (\nu_1, \nu_2)^{\mathbb{C}} &= \left(\frac{\overline{(\nu_1 \otimes \nu_1)} \wedge (\nu_2 \otimes \nu_2)}{\lambda} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

el cual es conjugado lineal en el primer factor y lineal en el segundo.

Todo esto con el afán de poder definir el siguiente apareamiento

$$\begin{aligned} M : (L_z \otimes \delta^{\mathbb{C}}_{P,z}) \times (L_z \otimes \delta^{\mathbb{C}}_{P',z}) &\to \mathbb{C} \\ M(\mu_1 \otimes \nu_1, \mu_2 \otimes \nu_2) &= (\mu_1, \mu_2)(\nu_1, \nu_2), \end{aligned}$$

en donde (μ_1, μ_2) es el producto interno dado por la estructura hermitiana de L.

Ahora, pasamos a considerar los espacios de Hilbert de las semiformas $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ para las polarizaciones P y P', respectivamente. Entonces, dados $s_j \in \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$, definimos el *apareamiento* de s_1 y s_2 por

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{P,P'} : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 &\to \mathbb{C} \\ \langle s_1, s_2 \rangle_{P,P'} &:= c \int_N M(s_1, s_2)\lambda \end{aligned}$$

provistos de que ésta integral es absolutamente convergente, c es cierta constante universal que depende solamente de $\hbar$ y de la dimensión de n, que además puede ser escogida para hacer que ciertos ejemplos funcionen bien, y recordando que $s_j = \mu_j \otimes \nu_j$, $j = 1, 2$.

Lo que nosotros estamos buscando es un mapeo de apareamiento

$$\Lambda_{P,P'} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$$

que cumpla la siguiente propiedad

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{P,P'} = \langle \Lambda_{P,P'} s_1, s_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.26}$$

Si el apareamiento $\langle \cdot, \cdot \rangle_{P,P'}$ es acotado, entonces por el teorema de representación de Riesz, existe un operador acotado único $\Lambda_{P,P'}$ satisfaciendo (5.26). Incluso si el apareamiento es no acotado podríamos definir $\Lambda_{P,P'}$ como un operador no acotado. También hay que hacer la siguiente aclaración, no siempre el mapeo de apareamiento que buscamos es unitario, podría quizar ser un múltiplo constante de algún mapeo unitario.

Como primer ejemplo de un mapeo de apareamiento tenemos a la Transformada de Fourier.

Transformada de Fourier

Afirmación 5.5.1 *Consideremos $N = \mathbb{R}^2 \cong T^*\mathbb{R}$, tomemos a L como el haz lineal trivial con 1-forma de conexión $\theta = pdx$. Sea P la polarización vertical generada en cada punto por $\langle \partial/\partial p \rangle$, y sea P la polarización horizontal generada en cada punto por $\langle \partial/\partial x \rangle$. Entonces los elementos s_1 y s_2 de los* ***espacios de las semiformas*** *para P y P', respectivamente, tienen las formas*

$$s_1(x, p) = \phi(x) \otimes \sqrt{dx}, \tag{5.27}$$

$$s_2(x, p) = \varphi(p) e^{ixp/\hbar} \otimes \sqrt{dp}, \tag{5.28}$$

donde ϕ y φ son funciones en $\mathbb{R}$.

Si $c = 1$, el apareamiento es calculado como

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{P,P'} = i \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)} \varphi(p) e^{ixp/\hbar} dx dp. \tag{5.29}$$

Si s_1 tiene la forma (5.27)*, entonces $\Lambda_{P,P'}(s_1)$ tiene la forma* (5.28)*, donde*

$$\varphi(p) = -i \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-ixp/\hbar} dx. \tag{5.30}$$

Entonces, $\Lambda_{P,P'}(s_1)$ es una versión escalada de la transformada de Fourier y es en particular, un múltiplo constante de un mapeo unitario.

Demostración: Notemos que en el ejemplo (5.4.2) se muestra que las secciones polarizadas de $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ tienen la forma $s = \phi(x) \otimes \sqrt{dx}$, cuya norma viene dada por

$$\|s\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|^2 dx.$$

Podemos hacer el mismo tratamiento para encontrar qué forma tienen los elementos del espacio de semi-formas para P'. Igual que como lo hicimos para P en el ejemplo (5.4.2), veamos quién es el haz canónico de P', es decir, $\mathcal{K}_{P'}$. Veamos cuáles son las secciones que lo conforman.

Sea β una $1-$forma de $\mathcal{K}_{P'}$ de la forma $\beta = f(x,p)dx + g(x,p)dp$ con f y g funciones en $\mathbb{R}$. Entonces como β debe satisfacer la condición

$$Y \lrcorner \beta = 0$$

para cualquier campo vectorial Y perteneciente a P', tenemos las siguientes implicaciones considerando $Y = \partial/\partial x$

$$\begin{aligned} 0 &= Y \lrcorner \beta = \beta(\partial/\partial x) \\ &= (f(x,p)dx + g(x,p)dp)(\partial/\partial x) \\ &= f(x,p) + 0 \\ &= f(x,p). \end{aligned}$$

Por tanto, $f(x,p) = 0$ y de aquí que $\beta = g(x,p)dp$. Sabemos también que las secciones polarizadas de $\mathcal{K}_{P'}$ vienen dadas por la condición

$$Y \lrcorner d\beta = 0,$$

como $d\beta = \partial g/\partial x dx \wedge dp$, se sigue que $d\beta = 0$ si y sólo si g es independiente de x. Entonces dp es una sección polarizada de $\mathcal{K}_{P'}$. Si elegimos $\delta_{P'}$ trivial y $\sqrt{dp}$ tal que $\sqrt{dp} \otimes \sqrt{dp} = dp$, entonces $\sqrt{dp}$ es una sección polarizada de $\delta_{P'}$.

Formando ahora el producto tensorial $L \otimes \delta_{P'}^{\mathbb{C}}$, tenemos que las secciones s pertenecientes a éste haz vectorial se descomponen (localmente) como $s = \mu_2 \otimes \nu_2$, con $\mu_2 = \varphi(x,p)$ y $\nu_2 = \sqrt{dp}$,

$$s = \varphi(x,p) \otimes \sqrt{dp}.$$

Para encontrar el espacio de semi-formas, aún es necesario verificar que para cualquier sección s en $L \otimes \delta_{P'}^{\mathbb{C}}$, se satisface la condición

$$\begin{aligned} \nabla_Y(s) &= 0, \text{ en donde} \\ \nabla_Y(s) &= (\nabla_Y \mu_2) \otimes \nu_2 + \mu_2 \otimes (\nabla_Y \nu_2). \end{aligned}$$

Así, para $s = \varphi(x,p) \otimes \sqrt{dp}$ en $L \otimes \delta_{P'}^{\mathbb{C}}$ tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial/\partial x}(\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dp}) &= \nabla_{\partial/\partial x}\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dp} + \varphi(x,p) \otimes \nabla_{\partial/\partial x}\sqrt{dp} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,p) - \frac{i}{\hbar}pdx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,p)\right] \otimes \sqrt{dp} + \varphi(x,p) \otimes 0 \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,p) - \frac{i}{\hbar}pdx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,p)\right] \otimes \sqrt{dp} \end{aligned}$$

por tanto

$$\nabla_{\partial/\partial x}(\varphi(x,p)\otimes\sqrt{dp})=0$$

si se satisface que

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,p)-\frac{i}{\hbar}pdx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,p)=0$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,p)=\frac{i}{\hbar}pdx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,p),$$

ecuación que tiene por solución $\varphi(p)e^{ixp/\hbar}$. Así, s es una sección de la forma

$$s=\varphi(p)e^{ixp/\hbar}\otimes\sqrt{dp}.$$

Y puesto que

$$(s,s)=(\varphi(p)e^{ixp/\hbar},\varphi(p)e^{ixp/\hbar})\sqrt{dp}\otimes\sqrt{dp}=|\varphi(p)|^2dp$$

entonces su norma se puede calcular como

$$\|s\|^2=\int_{\mathbb{R}}|\varphi(p)|^2dp.$$

Sean ahora las secciones s_1 en $L\otimes\delta_P^{\mathbb{C}}$ y s_2 en $L\otimes\delta_{P'}^{\mathbb{C}}$ de la forma $s_1=\phi(x)\otimes\sqrt{dx}$ y $s_2=\varphi(p)e^{ixp/\hbar}\otimes\sqrt{dp}$. Considerando $c=1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle s_1,s_2\rangle_{P,P'} &= \int_{\mathbb{R}^2}M(s_1,s_2)\lambda\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}M(\phi(x)\otimes\sqrt{dx},\varphi(p)e^{ixp/\hbar}\otimes\sqrt{dp})\lambda\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}(\phi(x),\varphi(p)e^{ixp/\hbar})(\sqrt{dx},\sqrt{dp})dpdx\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\overline{\phi(x)}\varphi(p)e^{ixp/\hbar}\left(\frac{(\sqrt{dx}\otimes\sqrt{dx})\wedge(\sqrt{dp}\otimes\sqrt{dp})}{dp\wedge dx}\right)^{1/2}dpdx\\
&= i\int_{\mathbb{R}^2}\overline{\phi(x)}\varphi(p)e^{ixp/\hbar}dpdx.
\end{aligned}$$

Por otra parte, considerando el *mapeo de apareamiento* entre los espacios de Hilbert de las semi-formas asociadas a P y P'

$$\Lambda_{P,P'}:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$$

que satisface

$$\langle s_1,s_2\rangle_{P,P'}=\langle\Lambda_{P,P'}s_1,s_2\rangle_{\mathcal{H}_2}, \tag{5.31}$$

para s_1 tenemos que $\Lambda_{P,P'}s_1$ es de la forma $\xi(p)e^{ixp/\hbar}\otimes\sqrt{dp}$, con ξ alguna función en $\mathbb{R}$, y por tanto

$$\begin{aligned}
\langle\Lambda_{P,P'}s_1,s_2\rangle_{\mathcal{H}_2} &= \langle\xi(p)e^{ixp/\hbar}\otimes\sqrt{dp},\varphi(p)e^{ixp/\hbar}\otimes\sqrt{dp}\rangle_{\mathcal{H}_2}\\
&= \int_{\mathbb{R}}\overline{\xi(p)}\varphi(p)dp.
\end{aligned}$$

Así, por (5.31) se sigue que

$$i\int_{\mathbb{R}^2}\overline{\phi(x)}\varphi(p)e^{ixp/\hbar}dpdx=\int_{\mathbb{R}}\overline{\xi(p)}\varphi(p)dp$$

y por tanto

$$\xi(p)=-i\int_{\mathbb{R}}\phi(x)e^{-ixp/\hbar}dx,$$

como se quería probar. ■

5.6. Transformada de Segal-Bargmann

Estamos entrando a la parte en la que se describirá la obtención de la Transformada de Segal-Bargmann en sus versiones clásica e invariante por medio del programa de cuantización geométrica. Justamente el objetivo del capítulo fue dar las definiciones y proposiciones correspondientes para poder definir los mapeos de apareamiento; ahora nos encontramos en condiciones de presentar a la Transformada de Segal-Bargmann. Presentaremos la Transformada clásica tal y como lo hace Woodhouse [6] utilizando el núcleo reproductor del Espacio de Segal-Bargmann; mientras que para obtener la Transformada en su forma invariante, recurriremos a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales para ayudarnos del núcleo de la ecuación del calor y concluir nuestra descripción.

5.6.1. Transformada de Segal-Bargmann Clásica

En ésta sección veremos cómo se obtiene la Transformada de Segal-Bargmann Clásica mediante mapeos de apareamiento. Antes de empezar con el procedimiento, recordemos la propiedad de los espacios de funciones holomorfas respecto al núcleo reproductor. Para cualquier función $f\in\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, $f(z)=\int_U K(z,w)f(w)\alpha(w)dw$ en $\mathcal{H}L^2(U,\alpha)$, en donde la función $K(z,w)$ es el núcleo reproductor para el espacio en cuestión. En particular, nosotros vamos a utilizar el núcleo reproductor para el espacio de Segal-Bargmann obtenido en la sección (1.2).

Afirmación 5.6.1 *Sea la variedad simpléctica $N=T^*\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$ nuestro espacio fase con coordenadas $x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_n$, con x_k las coordenadas de posición y p_k las coordenadas de momentos. La forma de volumen en N está dada por $\lambda=dp_1\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dp_n\wedge dx_n$. Consideremos a L como el haz trivial en N con derivada covariante $\nabla_X=X-(i/\hbar)\theta_2(X)$ y 1-forma de conexión $\theta_2=-\dfrac{z_kd\overline{z_k}-\overline{z_k}dz_k}{2i}$, con $z_k=\dfrac{x_k-ip_k}{\sqrt{2}}$. Consideremos también las polarizaciones real y compleja dadas por*

$$\begin{aligned}P&=\langle\partial/\partial p_k\rangle\\ P'&=\langle\partial/\partial z_k\rangle,\end{aligned}$$

para todo $k=1,2,\dots,n$.

Los elementos s del espacio de semi-forma para P tienen la forma

$$s=\phi(x)e^{-ix\cdot p/2\hbar}\otimes\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n},\tag{5.32}$$

para alguna función ϕ en $\mathbb{R}^n$. En este espacio la norma de s viene dada por

$$\|s\|^2=\int_{\mathbb{R}^n}|\phi(x)|^2d^nx.$$

Los elementos del espacio de semiforma para P' tienen la forma

$$s = F(z)e^{-|z|/2\hbar} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}, \tag{5.33}$$

con F alguna función holomorfa en $\mathbb{C}^n$ y cuya norma viene dada por

$$\|s\|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |F(z)|^2 e^{-|z|/\hbar} d^n z.$$

Se hará la identificación del espacio de Hilbert de la semi-forma para P con el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ y del espacio de Hilbert de la semi-forma para P' con el espacio de Segal-Bargmann $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar)$. A dichos espacios los llamaremos respectivamente $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$.

Con estos elementos definimos el mapeo de apareamiento $\Lambda_{PP'} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que a la sección $s_1 = \phi(x) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$ en $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ le corresponde $\Lambda_{PP'}(s_1) = G(z)e^{-|z|/2\hbar} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}$, para alguna función holomorfa G y es tal que

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{PP'} = \langle \Lambda_{PP'} s_1, s_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Así, $\Lambda_{PP'}(s_1)$ tiene la forma (5.33) *en donde*

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) K(x,z) d^n x, \qquad \text{con} \qquad K(x,z) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{n/4}} e^{(-z^2 + 2\sqrt{2}x\cdot z - x^2)/2\hbar}.$$

Demostración: En el ejemplo (5.4.1) se obtuvo que las n-formas que son secciones polarizadas en $\mathcal{K}_P$ son del estilo $\alpha = g(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Por tanto, si consideramos $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ podemos decir que ésta es una sección polarizada de $\mathcal{K}_P$. Eligiendo δ_P trivial y $\sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$ tal que $\sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, entonces $\sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$ es una sección polarizada de δ_P.

Formemos entonces el producto tensorial $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$. Sea s_1 cualquier sección perteneciente a este haz lineal, y escribámosla en su descomposición local

$$s_1 = \varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}.$$

Vamos ahora a encontrar el espacio de semi-forma asociado a P. Entonces debemos encontrar las secciones s en $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ para las cuales $\nabla_X(s) = 0$, para cualquier campo vectorial en P. Luego, para $s_1 = \varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$ en $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ y $X = \partial/\partial p_k$, tenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial/\partial p_k}(s_1) &= \nabla_{\partial/\partial p_k}\left(\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}\right) \\
&= \left(\nabla_{\partial/\partial p_k}\varphi(x,p)\right) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} + \varphi(x,p) \otimes \nabla_{\partial/\partial p_k}\sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial p_k}\varphi(x,p) - \frac{i}{\hbar}\left(\frac{p_j dx_j - x_j p_j}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_k}\right)\varphi(x,p)\right] \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial p_k}\varphi(x,p) + \frac{i x_k}{2\hbar}\varphi(x,p)\right] \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}.
\end{aligned}$$

Entonces $\nabla_{\partial/\partial p_k}(s_1) = 0$ si y sólo si $\left[\frac{\partial}{\partial p_k}\varphi(x,p) + \frac{i x_k}{2\hbar}\varphi(x,p)\right] \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} = 0$, lo cual es equivalente a que $\frac{\partial}{\partial p_k}\varphi(x,p) + \frac{i x_k}{2\hbar}\varphi(x,p) = 0$. Así tenemos que esto último es lo mismo que la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\varphi(x,p) = -\frac{i x_k}{2\hbar}\varphi(x,p).$$

En donde dicha ecuación se satisface con

$$\varphi(x,p) = \phi(x)e^{-ix\cdot p/2\hbar},$$

con ϕ una función en $\mathbb{R}^n$. Y por tanto,

$$s_1 = \phi(x)e^{-ix\cdot p/2\hbar} \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}. \tag{5.34}$$

Cuya norma viene dada por

$$|s_1|^2 = \int_{\mathbb{R}} |x|^2 d^n x.$$

Ahora hagamos un tratamiento análogo para describir la forma en que se escriben las secciones del espacio de semi-forma para la polarización compleja P'. Empecemos por mostrar que $\sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}$ es una sección polarizada de $\delta_{P'}^{\mathbb{C}}$.

Sea β una sección de $K_{P'}$, es decir una n-forma del estilo $\beta = f(z,\overline{z})dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ con f una función en $\mathbb{C}^n$. Luego, decimos que β es una sección polarizada de $K_{P'}$ si satisface que $Y \lrcorner (d\beta) = 0$ para cualquier campo vectorial Y en $\overline{P'}$. Se sigue entonces que para $Y = \partial/\partial\overline{z}_k$, $k = 1, 2\ldots, n$, $Y \lrcorner (d\beta) = 0$ si y sólo si para $v_1, \ldots, v_n \in TN$

$$Y \lrcorner (d\beta)(v_1,\ldots,v_n) = d\beta(\partial/\partial\overline{z}_k, v_1,\ldots,v_n) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n(\partial/\partial\overline{z}_k, v_1,\ldots,v_n) = 0.$$

Por tanto

$$Y \lrcorner (d\beta)(v_1,\ldots,v_n) = 0$$

si y sólo si $\partial f/\partial\overline{z}_k = 0$, es decir, f es independiente de $\overline{z}$. Entonces podemos escoger $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ como una sección polarizada de $K_{P'}$. Eligiendo a $\delta_{P'}$ trivial y $\sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}$ tal que $\sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n} = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$, entonces utilizando la propiedad dada en la igualdad (5.18), de manera análoga a los casos anteriores, se ve que $\sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}$ es una sección polarizada de $\delta_{P'}$ como se quería probar.

Buscaremos ahora las secciones polarizadas de $L \otimes \delta_{P'}$ para definir lo que será nuestro espacio de Hilbert de la semiforma. Formemos entonces el producto tensorial $L \otimes \delta_{P'}$. Sea s_2 una sección en $L \otimes \delta_{P'}$, sabemos que podemos descomponer localmente a las secciones de éste haz lineal como

$$s_2 = F(z,\overline{z}) \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n},$$

con $F(z,\overline{z})$ una sección en L y $\sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}$ una sección en $\delta_{P'}$.

Sean Y_k campos vectoriales arbitarios en $\overline{P'}$, $Y_k = \partial/\partial\overline{z}_k$, $k = 1,\ldots,n$, buscamos las secciones en $L \otimes \delta_{P'}$ tales que

$$\nabla_{Y_k}(s) = 0.$$

Por tanto, para s_2 tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{Y_k}(s_2) &= \nabla_{\partial/\partial\overline{z}_k}(F(z,\overline{z}) \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}) \\
&= \nabla_{\partial/\partial\overline{z}_k}(F(z,\overline{z})) \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n} + F(z,\overline{z}) \otimes \nabla_{\partial/\partial\overline{z}_k}(\sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}) \\
&= \nabla_{\partial/\partial\overline{z}_k}(F(z,\overline{z})) \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}.
\end{aligned}$$

Lo cual es igual a cero si y sólo si

$$\nabla_{\partial/\partial\overline{z}_k}(F(z,\overline{z})) = 0.$$

O equivalentemente, si se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}F(z,\overline{z}) - \frac{i}{\hbar}\left(\frac{-z_j d\overline{z}_j + \overline{z}_j dz_j}{2i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\right)F(z,\overline{z}) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}F(z,\overline{z}) + \frac{z_k}{2\hbar}F(z,\overline{z}) = 0$$

Dicha ecuación diferencial tiene por solución,

$$F(z,\overline{z}) = G(z)e^{-|z|^2/2\hbar},$$

con G una función holomorfa en $\mathbb{C}^n$. Así, s_2 es de la forma $s_2 = G(z)e^{-|z|^2/2\hbar} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}$, con G alguna función holomorfa en $\mathbb{C}^n$. Además, si $s_i = F_i(z) \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}$, $i = 1, 2$, son dos secciones en $L \otimes \delta_{P'}$, tenemos que su producto interno esta dado por

$$(s_1, s_2) = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{F_1(z)}F_2(z)e^{-|z|^2/\hbar}d^n z,$$

por tanto para una sección $s = F(z)e^{-|z|^2/2\hbar}$ en $L \otimes \delta_{P'}$ su norma viene dada por

$$|s|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |F(z)|^2 e^{-|z|^2/\hbar}d^n z.$$

Recapitulando, hemos obtenido los espacios de semi-forma asociados a las polarizaciones P y P'. Decimos que el espacio de Hilbert de la semi-forma asociada a P es el espacio de secciones polarizadas en $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ tales que su norma es finita. Denotemos por $\mathcal{H}_1$ al conjunto de secciones $\{s | s \in L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}},\ \nabla_X s = 0, \forall X \in P,\ |s| < \infty\}$. Más aún, podemos identificar al espacio $\mathcal{H}_1$ con el espacio de funciones de cuadrado integrable en $\mathbb{R}^n$ mediante el mapeo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M} : \mathcal{H}_1 & \to & L^2(\mathbb{R}^n, d^n x) \\ \phi(x)e^{-i\frac{x\cdot p}{2\hbar}} \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} & \mapsto & \phi(x). \end{array}$$

Igualmente, tenemos que el espacio de Hilbert de la semi-forma asociada a P' es el espacio que consta de secciones polarizadas en $L \otimes \delta_{P'}$ cuya norma es finita. Lo denotaremos por $\mathcal{H}_2 = \{s | s \in L \otimes \delta_{P'}\ \nabla_Y s = 0, \forall Y \in P', |s| < \infty\}$. Podemos hacer la identificación de dicho espacio con el espacio de Segal-Bargmann a través del mapeo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} : \mathcal{H}_2 & \to & \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_\hbar(z)) \\ F(z)e^{-|z|^2/2\hbar} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n} & \mapsto & F(z). \end{array}$$

Sean $s_1 = \psi(x)e^{-ix\cdot p/2\hbar} \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$ una sección en $\mathcal{H}_1$ y $s_2 = F(z)e^{-|z|^2/2\hbar} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}$ una sección en $\mathcal{H}_2$. Tenemos el siguiente apareamiento

$$\langle s_1, s_2\rangle_{PP'} = c\int_{\mathbb{R}^{2n}} M(s_1, s_2)\lambda \tag{5.35}$$

$$= c\int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\psi(x)e^{-i\frac{x\cdot p}{2\hbar}} \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}, F(z)e^{\frac{-|z|^2}{2\hbar}} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}\right) d^n p d^n x \tag{5.36}$$

$$= c\int_{\mathbb{R}^{2n}} (\psi(x)e^{-i\frac{x\cdot p}{2\hbar}}, F(z)e^{\frac{-|z|^2}{2\hbar}})\left(\sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}, \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}\right) d^n p d^n x \tag{5.37}$$

$$= c\int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\psi(x)}F(z)e^{(ix\cdot p - |z|^2)/2\hbar}d^n p d^n x, \tag{5.38}$$

el paso para llegar a la última línea es justamente el cálculo

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n},\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}\right)=\\
=&\quad\left(\frac{\overline{(\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}\otimes\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n})}\wedge(\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n})}{b\lambda}\right)^{1/2}\\
=&\quad\left(\frac{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}{(-i)^n(-1)^{n(n+1)/2}(dp\wedge dx)^n}\right)^{1/2}\\
=&\quad\left(\frac{(-i)^n(-1)^{(n+1)n/2}dp_1\wedge dx_1\cdots dp_n\wedge dx_n}{(-i)^n(-1)^{n(n+1)}2dp_1\wedge dx_1\cdots dp_n\wedge dx_n}\right)^{1/2}=1
\end{aligned}
$$

en donde se ha multiplicado de manera conveniente el denominador que aparece en la fórmula por la constante $b=(-1)^{n(n+1)/2}(-i)^n$.

Regresando al cálculo del apareamiento, como $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C},\mu_{2\hbar(t)})$ tiene la propiedad de poseer núcleo reproductor podemos escribir a F como

$$F(z)=\frac{1}{(\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{C}^n}F(w)e^{\frac{z\cdot\overline{w}}{\hbar}}e^{-\frac{|w|^2}{\hbar}}d^nw,\quad w=\alpha+i\beta. \tag{5.39}$$

Entonces sustituyendo (5.39) en (5.38) tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle s_1,s_2\rangle_{PP'}&=\frac{c}{(\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\overline{\psi(x)}\left(\int_{\mathbb{C}^n}F(w)e^{\frac{z\cdot\overline{w}}{\hbar}}e^{-\frac{|w|^2}{\hbar}}d^nw\right)e^{\frac{ix\cdot p}{2\hbar}-\frac{|z|^2}{2\hbar}}d^npd^nx\\
&=\frac{c}{(\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\overline{\psi(x)}\left(\int_{\mathbb{R}^{2n}}F(w)e^{\frac{x\cdot\overline{w}}{\sqrt{2}\hbar}-i\frac{p\cdot\overline{w}}{\sqrt{2}\hbar}-\frac{|w|^2}{\hbar}}d^n\alpha d^n\beta\right)e^{\frac{ix\cdot p}{2\hbar}-\frac{x^2+p^2}{4\hbar}}d^npd^nx\\
&=\frac{c}{(\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^{3n}}\overline{\psi(x)}F(w)e^{\frac{x\cdot\overline{w}}{\sqrt{2}\hbar}-\frac{|w|^2}{\hbar}-\frac{x^2}{4\hbar}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{-ip\cdot\overline{w}}{\sqrt{2}\hbar}+\frac{ix\cdot p}{2\hbar}-\frac{p^2}{4\hbar}}d^np\right]d^n\alpha d^n\beta d^nx\\
&=\frac{c}{(\pi\hbar)^n}\int_{\mathbb{R}^{3n}}\overline{\psi(x)}F(w)e^{\frac{x\cdot\overline{w}}{\sqrt{2}\hbar}-\frac{|w|^2}{\hbar}-\frac{x^2}{4\hbar}}\left[(4\hbar\pi)^{n/2}e^{\frac{-2\overline{w}^2+2\sqrt{2}x\cdot\overline{w}-x^2}{4\hbar}}\right]d^n\alpha d^n\beta d^nx\\
&=\frac{2^nc}{(\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{3n}}\overline{\psi(x)}F(w)e^{-\frac{|w|^2}{\hbar}}e^{\frac{-\overline{w}^2+2\sqrt{2}x\cdot\overline{w}-x^2}{2\hbar}}d^n\alpha d^n\beta d^nx
\end{aligned}
$$

Luego, definiendo la función K como

$$K(x,w)=\frac{1}{(\pi\hbar)^{n/4}}e^{\frac{-\overline{w}^2+2\sqrt{2}x\cdot\overline{w}-x^2}{2\hbar}}$$

escribimos

$$\langle s_1,s_2\rangle_{PP'}=\frac{2^nc}{(\pi\hbar)^{n/4}}\int_{\mathbb{R}^{3n}}\overline{\psi(x)}F(w)\overline{K(x,w)}e^{-\frac{|w|^2}{\hbar}}d^n\alpha d^n\beta d^nx. \tag{5.40}$$

Por otra parte, el mapeo $\Lambda_{PP'}:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ es tal que para $s_1\in\mathcal{H}_1$,

$$\Lambda_{PP'}s_1=G(z)e^{-|z|^2/2\hbar}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}\in\mathcal{H}_2.$$

Por tanto tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_{PP'} s_1, s_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} &= \int_{\Xi} (\widetilde{\Lambda_{PP'} s_1, s_2}) = \int_{\Xi} (\Lambda_{PP'} s_1, s_2) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n} (G(z) e^{-|z|^2/2\hbar}, F(z) e^{-|z|^2/2\hbar}) d^n z = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{G(z)} F(z) e^{-|z|^2/\hbar} d^n z \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{G(z)} F(z) e^{-|z|^2/\hbar} d^n p d^n x.
\end{aligned}$$

Y puesto que buscamos que se cumpla la relación $\langle s_1, s_2 \rangle_{PP'} = \langle \Lambda_{PP'} s_1, s_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$, eligiendo $c = (\pi\hbar)^{n/4}$, obtenemos entonces que

$$\int_{\mathbb{R}^{3n}} \overline{\psi(x)} F(w) \overline{K(x,w)} e^{-\frac{|w|^2}{\hbar}} d^n\alpha d^n\beta d^n x = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{G(w)} F(w) e^{-|w|^2/\hbar} d^n\alpha d^n\beta.$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) K(x,w) d^n x = G(w).$$

■

5.6.2. Transformada de Segal-Bargmann Invariante

Afirmación 5.6.2 *Sea la variedad simpléctica $N = T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ la cual representa a nuestro espacio fase con coordenadas $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, en donde los x_k representan las posiciones y los p_k representan los momentos. La forma de volumen en N está dada por $\lambda = dp_1 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dx_n$, consideremos a L como el haz trivial con 1-forma de conexión $\theta_1 = \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k$ y derivada covariante $\nabla_X = X - \frac{i}{\hbar}\theta_1(X)$. Consideremos también una polarización real y una compleja dadas por*

$$\begin{aligned}
P &= \langle \partial/\partial p_k \rangle, \quad k = 1, \ldots, n \\
P' &= \langle \partial/\partial z_k \rangle, \quad k = 1, \ldots, n,
\end{aligned}$$

en donde $z_k = x_k - ip_k$, para $k = 1, \ldots, n$. Entonces los elementos s del espacio de semiforma para P tienen la forma

$$s = \varphi(x) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}, \tag{5.41}$$

para alguna función ϕ en $\mathbb{R}^n$. Llamaremos ***espacio de Hilbert polarizado verticalmente*** *al espacio de secciones polarizadas s de $L \otimes \delta_P$ para las cuales*

$$\|s\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 d^n x < \infty.$$

Los elementos s del espacio de semiforma para P' tienen la forma

$$s = F(z) e^{-p^2/2\hbar} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}, \tag{5.42}$$

con F alguna función holomorfa en $\mathbb{C}$, $z = (x_1 - ip_1, \ldots, x_n - ip_n)$ y $p^2 = p_1^2 + \cdots + p_n^2$, y en donde su norma puede ser calculada como

$$\|s\|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |F(z)|^2 e^{-p^2/\hbar} d^n x d^n p.$$

De hecho es posible hacer la identificación del espacio de Hilbert polarizado verticalmente con el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Análogamente, el espacio de Hilbert de la semi-forma para P' podemos identificarlo con el espacio de Segal-Bargmann invariante $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, e^{-p^2/\hbar} d^n x d^n p)$.

Con estos elementos definimos el mapeo de apareamiento $\Lambda_{PP'} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que para la sección $s_1 = \varphi(x) \otimes dx$ en $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ le corresponde $\Lambda_{PP'}(s_1) = G(z)e^{-p^2/\hbar} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}$ con G una función holomorfa, y es tal que

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{PP'} = \langle \Lambda_{PP'} s_1, s_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle s_1, \Lambda^*_{PP'} s_2 \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Entonces tenemos que

i) *El mapeo $\Lambda_{PP'} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ está dado por*

$$\Lambda_{PP'} s_1 = \frac{1}{(\pi\hbar)^{n/2}(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(z-q)^2/2\hbar} d^n q e^{-p^2/2\hbar} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}.$$

ii) *El mapeo $\Lambda^*_{PP'}$ puede ser calculado como*

$$\Lambda^*_{PP'} s_2 = \int_{\mathbb{R}^n} F(x - ip) e^{-p^2/2\hbar} d^n p \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$$

iii) *El mapeo $(\pi\hbar)^{n/4}(2\pi\hbar)^{n/2}\Lambda_{PP'}$ es unitario.*

Demostración: De manera análoga al caso de la Transormada de Segal-Bargmann clásica, cuando nuestra variedad simpléctica es $N = \mathbb{R}^{2n}$, considerando a L como el haz trivial en N y a la polarización vertical, podemos llegar a concluir que dx es una sección polarizada de $\mathcal{K}_P$, queriendo decir que $\sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Luego $\sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$ es una seción polarizada de $\delta_P^{\mathbb{C}}$.

Entonces podemos formar el haz lineal $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$, el cual tiene por secciones a aquellas que se descomponen localmente como $s = \varphi(x_1 \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$, las cuales son polarizadas en $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ si y sólo si $\nabla_Y(s) = 0$ para cualquier campo vectorial Y en P. Sean $s = \varphi(x_1 \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$ una sección en $L \otimes \delta_P^{\mathbb{C}}$ y $Y_k = \partial/\partial p_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, campos vectoriales arbitrarios en P ; escribiendo $(x_1 \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = (x, p)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{Y_k}(s) &= \nabla_{\partial/\partial p_k}\left(\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}\right) \\
&= \left(\nabla_{\partial/\partial p_k}\varphi(x,p)\right) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} + \varphi(x,p) \otimes \nabla_{\partial/\partial p_k}\sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} \\
&= \left(\nabla_{\partial/\partial p_k}\varphi(x,p)\right) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial p_k}\varphi(x,p) - \frac{i}{\hbar} p_j dx_j \left(\frac{\partial}{\partial p_k}\right)\varphi(x,p)\right) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} \\
&= \frac{\partial}{\partial p_k}\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\nabla_{Y_k}(s) = 0$ si y sólo si $\frac{\partial}{\partial p_k}\varphi(x,p) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n} = 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$, es decir, si

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\varphi(x,p) = 0, \quad \forall k = 1, \ldots, n,$$

pero esta ecuación tiene por solución $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x)$. De lo cual concluimos que

$$s = \varphi(x) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}.$$

Más aún, el producto interno de dos secciones polarizadas en $L\otimes\delta_P^{\mathbb{C}}$, digamos $s_1 = f_1(x)\otimes\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}$ y $s_2 = f_2(x)\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}$ polarizadas en $L\otimes\delta_P^{\mathbb{C}}$, está dado por

$$(s_1, s_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f_1(x)} f_2(x) dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

Por tanto podemos decir que el espacio de Hilbert de la semi-forma para P es el espacio de secciones polarizadas s de $L\otimes\delta_P$ para las cuales

$$|s|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 d^n x < \infty.$$

Desarrollando un procedimiento similar al que se utilizó en el caso clásico de la Transormada de Segal-Bargmann, considerando nuestra variedad simpléctica N, el haz trivial L en N, y la polarización $\partial/\partial\overline{z_k}$, $k = 1,\ldots,n$, tenemos que efectivamente $\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}$ es una sección polarizada de $\delta_{P'}^{\mathbb{C}}$ y además satisface $\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n} = dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$, en donde $dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$ es una sección polarizada de $\mathcal{K}_{P'}$.

Pasemos ahora a formar el producto tensorial $L\otimes\delta_{P'}$, en donde una sección s en $L\otimes\delta_{P'}$ se puede descomponer localmente como $s = F(x,p)\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}$ en donde a partir de ahora (x,p) se escribirá en lugar de $(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)$. Para dar con la forma correcta para s primero notemos que para los campos vectoriales arbitrarios en P', $X_k = \partial/\partial\overline{z}_k$, $k = 1,\ldots,n$ se cumple que

$$\begin{aligned}\nabla_{X_k} &= \frac{\partial}{\partial\overline{z}_k} - \frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{n} p_j dx_j\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_k}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{i}{2\hbar}p_k.\end{aligned}$$

Observemos también que para $e^{-p^2/2\hbar}$, $p^2 = p_1^2+\cdots+p_n^2$, se tiene

$$\begin{aligned}\nabla_{X_k} e^{-p^2/2\hbar} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}e^{-p^2/2\hbar} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_k}e^{-p^2/2\hbar} - \frac{i}{2\hbar}p_k e^{-p^2/2\hbar}\\ &= \frac{i}{2\hbar}p_k e^{-p^2/2\hbar} - \frac{i}{2\hbar}p_k e^{-p^2/2\hbar}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Entonces si s es cualquier sección en $L\otimes\delta_{P'}$, podemos escribirla como $s = F(z,\overline{z})e^{-p^2/2\hbar}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}$, para alguna función compleja F. Tal sección es polarizada si y sólo si $\nabla_{X_k}s = 0$, y dado que $\nabla_{X_k}s = \nabla_{X_k}\left(F(z,\overline{z})e^{-p^2/2\hbar}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}\right) = \nabla_{X_k}(F(z,\overline{z})e^{-p^2/2\hbar})\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n} + (F(z,\overline{z})e^{-p^2/2\hbar})\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}$, se sigue que $\nabla_{X_k}s = 0$ si y sólo si $\nabla_{X_k}(F(z,\overline{z})e^{-p^2/2\hbar}) = 0$. Por tanto, como

$$\begin{aligned}\nabla_{X_k}(F(z,\overline{z})e^{-p^2/2\hbar}) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial\overline{z}_k}}\left(F(z,\overline{z})e^{-p^2/2\hbar}\right)\\ &= \frac{\partial F(z,\overline{z})}{\partial\overline{z}_k}e^{-p^2/2\hbar} + F(z,\overline{z})\nabla_{\frac{\partial}{\partial\overline{z}_k}}e^{-p^2/2\hbar}\\ &= \frac{\partial F}{\partial\overline{z}_k}e^{-p^2/2\hbar},\end{aligned}$$

se sigue que $\frac{\partial F}{\partial\overline{z}_k}e^{-p^2/2\hbar} = 0$ si y sólo si F es una función holomorfa en $\mathbb{C}^n$. Así, s es de la forma $s = F(z)e^{-p^2/2\hbar}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}$, con F una función holomorfa en $\mathbb{C}^n$.

Además, tenemos que el producto interno de dos secciones en $L\otimes\delta_{P'}$, $s_1 = F_1(z)e^{-p^2/2\hbar}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}$ y $s_2 = F_2(z)e^{-p^2/2\hbar}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}$ está dado por

$$(s_1, s_2) = \int_{\mathbb{C}^n} \overline{F_1(z)}F_2(z)e^{-p^2/\hbar}dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n,$$

y por tanto, para una sección s en $L\otimes\delta_{P'}$, $s = F(z)e^{-p^2/2\hbar}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}$, se tiene que su norma está dada por

$$\|s\|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |F(z)|^2 e^{-p^2/\hbar}d^n z.$$

Recapitulando, hemos obtenido los espacios de semi-forma asociados a las polarizaciones P y P'. Decimos que el espacio de Hilbert de la semi-forma asociada a P es el espacio de secciones polarizadas en $L\otimes\delta_P^{\mathbb{C}}$ tales que su norma es finita, lo denotaremos por $\mathcal{H}_1 = \{s : s\in L\otimes\delta_P^{\mathbb{C}},\ \nabla_X s = 0\forall X\in P,\ \|s\|<\infty\}$. Identificamos a tal espacio de secciones con el espacio de funciones de cuadrado integrable en $\mathbb{R}^n$ mediante el mapeo

$$\begin{aligned}\mathcal{M} : \mathcal{H}_1 &\to L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)\\ \varphi(x)\otimes\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n} &\mapsto \varphi(x).\end{aligned}$$

Igualmente, tenemos que el espacio de Hilbert de la semi-forma asociada a P' es el espacio que consta de secciones polarizadas en $L\otimes\delta_{P'}$ cuya norma es finita;lo denotaremos por $\mathcal{H}_2 = \{s : s\in L\otimes\delta'_P,\ \nabla_Y s = 0,\ \forall Y\in P',\ \|s\|<\infty\}$. Podemos hacer la identificación de dicho espacio con el espacio de Segal-Bargmann invariante a través del mapeo

$$\begin{aligned}\mathcal{P} : \mathcal{H}_2 &\to \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, e^{-p^2/\hbar}d^n x d^n p)\\ F(z)e^{-p^2/2\hbar}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n} &\mapsto F(z).\end{aligned}$$

Sean $s_1 = \varphi(x)\otimes\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}$ y $s_2 = F(z)e^{-p^2/2\hbar}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}$ secciones en $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Calculemos el apareamiento $\langle s_1, s_2\rangle_{PP'}$,

$$\begin{aligned}\langle s_1, s_2\rangle_{PP'} &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} M\left(\varphi(x)\otimes\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}, F(z)e^{-p^2/2\hbar}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}\right)d^n p d^n x\\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\varphi(x)}F(z)e^{-p^2/2\hbar}\left(\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}, \sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}\right)d^n p d^n x.\end{aligned}$$

Ahora, considerando $b = (-i)^n(-1)^{n(n+1)/2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}, \sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}\right)\\ &= \left(\frac{\overline{(\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}\otimes\sqrt{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n})}\wedge(\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}\otimes\sqrt{dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n})}{b\lambda}\right)^{1/2}\\ &= \left(\frac{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n}{(-i)^n(-1)^{n(n+1)/2}(dp\wedge dx)^n}\right)^{1/2}\\ &= \left(\frac{(-i)^n(-1)^{(n+1)n/2}dp_1\wedge dx_1\cdots dp_n\wedge dx_n}{(-i)^n(-1)^{n(n+1)}2dp_1\wedge dx_1\cdots dp_n\wedge dx_n}\right)^{1/2} = 1.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\langle s_1, s_2\rangle_{PP'} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\varphi(x)}F(x-ip)e^{-p^2/2\hbar}d^n p d^n x. \tag{5.43}$$

Por otro lado, dado que queremos encontrar el mapeo de apareamiento $\Lambda_{PP'} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que para s_1, $\Lambda_{PP'}(s_1)$ es de la forma $G(z)e^{-p^2/2\hbar} \otimes \sqrt{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}$ con G una función una función holomorfa en $\mathbb{C}^n$, y para s_2, $\Lambda^*_{PP'}s_2$ es de la forma $\xi(x) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$, con ξ una función de cuadrado integrable en $\mathbb{R}^{2n}$. Luego

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{PP'}(s_1), s_2\rangle_{\mathcal{H}_2} &= \langle s_1, \Lambda^*_{PP'}s_2\rangle_{\mathcal{H}_1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (s_1, \Lambda^*_{PP'}s_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}, \xi(x) \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\xi(x)d^n x. \end{aligned}$$

Así, por (5.43), se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\varphi(x)}F(x-ip)e^{-p^2/2\hbar}d^n p d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\xi(x)d^n x.$$

Esto a su vez implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x-ip)e^{-p^2/2\hbar}d^n p = \xi(x).$$

Por tanto, hemos encontrado que $\Lambda^*_{PP'}(s_2)$ tiene la forma $\int_{\mathbb{R}^n} F(x-ip)e^{-p^2/2\hbar}d^n p \otimes \sqrt{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}$. En conlusión, podemos decir mediante los mapeos de identificación $\mathcal{M}$ y $\mathcal{P}$, que el mapeo $\Lambda_{PP'}$ es tal que para $F(z) \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, e^{-p^2/\hbar}d^n p d^n x)$ se tiene que $\Lambda^*_{PP'}F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x-ip)e^{-p^2/2\hbar}d^n p$.

Fijemos ahora una función holomorfa F en $\mathbb{C}^n$ de cuadrado integrable sobre $\mathbb{R}^n$ tal que en las direcciones imaginarias tiene un crecimiento moderado. Definamos la función $f_\hbar$ en $\mathbb{R}^n$ como sigue

$$f_\hbar(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x-ip)\left[\frac{e^{-p^2/2\hbar}}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\right]d^n p, \tag{5.44}$$

denotemos por $\Phi(p,\hbar)$ a la función $\dfrac{e^{-p^2/2\hbar}}{(2\pi\hbar)^{1/2}}$, la cual es justamente el la solución fundamental de la ecuación del calor y satisface la ecuación del calor $\partial u/\partial\hbar = (1/2)\Delta u$. Luego, por las hipótesis que hemos hecho sobre F y Φ, podemos derivar $f_\hbar$ y obtener

$$\frac{\partial f_\hbar}{\partial\hbar} = -\frac{1}{2}\Delta f_\hbar$$

También la función $f_\hbar$ satisface

$$\lim_{\hbar\downarrow 0} f_\hbar(x) = F(x).$$

Entonces $\Lambda^*_{PP'}F$ se obtiene de aplicar el operador inverso del calor, salvo una constante, a la restricción de F a $\mathbb{R}^n$. Así tenemos que

$$(\Lambda^*_{PP'})^{-1}f = (2\pi\hbar)^{1/2}(\text{continuación analítica de } e^{\hbar\Delta/2}f),$$

donde $e^{\hbar\Delta/2}f$ es la solución a la ecuación del calor en el tiempo $\hbar$, con condición inicial f. Y ya que ésta puede escribirse como la convolución $f * \Phi$, se tiene entonces que

$$(\Lambda_{PP'}^*)^{-1}f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(z-x)^2/2\hbar} f(x) d^n x.$$

Justamente $(\Lambda_{PP'}^*)^{-1}$ es lo que reconocemos como la Transformada de Segal-Bargmann invariante, salvo un factor constante. ■

APÉNDICE A

Sobre el oscilador armónico

En este apéndice recojemos algunos de los resultados más representativos respecto al modelo del oscilador armónico. Se presentaran resultados cuyas demostraciones pueden consultarse en [3]. Como sabemos, en el esquema clásico el formalismo Hamiltoniano nos indica que las ecuaciones de Hamilton se satisfacen para una función suave H en el espacio fase, dicha función físicamente representa la energía del sistema y es llamada función Hamiltoniana. Resulta que podemos encontrar su análogo en el esquema de la mecánica cuántica y es el llamado operador oscilador armónico cuántico, o bien, operador Hamiltoniano cuántico.

Consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, y los operadores lineales definidos en ciertos subespacios de éste espacio, denotados por $\hat{x}$ y $\hat{p}$ y definidos por

$$\hat{x}_k = x_k f(x), \qquad \hat{p}_k = -i\hbar \frac{df}{dx_k}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{A.1}$$

Los cuales satisfacen las R. C. C. $[\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{k,l}I$. Consideremos $n = 1$, por simplicidad. Definimos los operadores de aniquilación (decaimiento) y creación (crecimiento) como sigue

$$a = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \qquad a^* = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}.$$

El nombre apropiado para estos operadores es el que aparece entre paréntesis, y se llaman así porque justamente lo que hacen estos operadores es disminur o incrementar el valor propio para el Hamiltoniano que describiremos a continuación. Sin embargo, la terminología que usamos en el documento para los nombres de dichos operadores realmente es el que utiliza en la teoría cuántica de campos y viene del hecho de que estos operadores mapean al espacio de n-partículas a otro espacio de $(n-1)$-partículas o al espacio de $(n+1)$-partículas, respectivamente.

El oscilador armónico cuántico generalmente esta dado por $\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2)$ en donde $k > 0$ y ω es la frecuencia del oscilador armónico.

Notemos que podemos escribir al oscilador armónico cuántico en términos de los operadores de creación y aniquilación,

$$\hat{H} = \hbar\omega(a^*a + (1/2)I),$$

en donde I es el operador identidad. Supongamos también que $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ satisface la condición de irreducibilidad bajo a^* y a. Definamos $E := a^*a$. Tenemos entonces que se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $[a^*, a] = I$.

ii) E es un operador positivo y autoadjunto.

iii) $[a, E] = a$ y $[a^*, E] = -a^*$.

iv) Sea $\nu \neq 0$ un vector propio para E con valor propio λ. Entonces

$$E(a\nu) = (\lambda - 1)a\nu \qquad E(a^*\nu) = (\lambda + 1)a^*\nu.$$

v) Existe $N \geq 0$ tal que $a^N\nu \neq 0$, pero $a^{N+1}\nu = 0$.

Dado que E tiene al menos un vector propio ν, podemos encontrar un vector distinto de 0, ν_0 tal que $a\nu_0 = E\nu_0 = 0$. Como E no puede tener valores propios negativos, podemos encontrar un valor propio inferior a todos los demás, su correspondiente vector propio será entonces ν_0 y es el llamado vector de **estado base**. Siguiendo con la notación, definiendo los vectores $\nu_n := (a^*)^n\nu_0$ para $n \geq 0$, tenemos que se satisface lo siguiente para $n, m \geq 0$.

vi) $a^*\nu_n = \nu_{n+1}$.

vii) $E\nu_n = n\nu_n$.

viii) $\langle \nu_n, \nu_m \rangle = n!\delta_{n,m}$.

ix) $a\nu_{n+1} = (n + 1)\nu_n$.

x) Los vectores $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ forman una base ortonormal para el espacio de Hilbert cuántico.

En cuanto a los mapeos de precuantización y cuantización se tiene lo siguiente.

Proposición A.0.1 *Considere el oscilador armónico de la forma $H(x, p) = \frac{1}{2m}(p^2 + (m\omega x)^2)$. Entonces para todo número entero n, el número $n\hbar\omega$ es un valor propio para $Q_{pre}(H)$.*

Proposición A.0.2 *Para cualquier $\alpha > 0$, sea $\mathcal{H}_\alpha$ el subespacio de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ formado por las funciones suaves φ que satisfacen la condición $\nabla_{\partial/\partial\bar{z}_j}\varphi = 0$.*

Entonces $\mathcal{H}_\alpha$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ y es invariante bajo los grupos uniparámetricos generados por $Q_{pre}(x_j)$ y $Q_{pre}(p_j)$. Más aún, $Q_{pre}(x_j)$ y $Q_{pre}(p_j)$ actúan de manera irreducible en $\mathcal{H}_\alpha$.

Proposición A.0.3 *Considere el oscilador armónico con Hamiltoniano $H = (1/2)(p^2 + (m\omega x)^2)$. Considere también el subespacio $\mathcal{H}_\alpha$ de la proposicón anterior con $\alpha = 1/(m\omega)$.*

Entonces $\mathcal{H}_\alpha$ es invariante bajo el operador $Q_{pre}(H)$. Más aún, la restricción de $Q_{pre}(H)$ a $\mathcal{H}_\alpha$ tiene espectro no negativo formado por los valores propios de la forma $n\hbar\omega$, con n un entero positivo.

Proposición A.0.4 *Considere $\mathbb{R}^2 \cong T^*\mathbb{R}$ con la polarización de Kähler P dada por la coordenada global $z = (x - ip)/(m\omega)$, para algún número positivo ω. Tomemos δ_P trivial y con sección trivializante $\sqrt{dz}$. Considere también el oscilador armónico $H := (p^2 + (m\omega x)^2)/2m$.*

Entonces X_H preserva P y en el espacio de Hilbert de la semiforma el operador $Q(H)$ tiene espectro formado por los números de la forma $(n + 1/2)\hbar\omega$, donde $n = 0, 1, 2 \ldots$.

APÉNDICE B

Estructuras complejas

Cualquier espacio vectorial real puede ser complejificado.

En este apartado como lo dice la afirmación anterior describiremos a grosso modo el proceso que nos describe la complejificación de un espacio vectorial real.

Consideremos un espacio vectorial real W. Una **estructura compleja** en W es una transformación lineal $J : W \to W$ tal que $J^2 = -I$, en donde I denota al operador identidad. Se puede notar que la existencia de una estructura compleja en el espacio vectorial real W implica que la dimensión de W debe ser par.

Dado el espacio vectorial real V con dimensión real n, consideremos la suma directa $V \oplus V$ vista como un espacio vectorial sobre el campo real $\mathbb{R}$.

Afirmación B.0.1 *Sea el conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de V, se tiene entonces que el conjunto $\{(e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e_1), (0, e_2), \dots, (0, e_n)\}$ es una base de $V \oplus V$. Se verifica también que $dim_{\mathbb{R}} V \oplus V = 2n$.*

Dotemos a $V \oplus V$ con la estructura compleja J definida por

$$\begin{array}{rcl} J : V \oplus V & \to & V \oplus V \\ J(X, Y) & = & (-Y, X). \end{array}$$

Definamos en $V \oplus V$ la multiplicación por un escalar complejo como sigue

$$(\alpha + i\beta)(X, Y) = \alpha(X, Y) + \beta J(X, Y) = \alpha(X, Y) + \beta(-Y, X) = (\alpha X - \beta Y, \alpha Y + \beta Y). \tag{B.1}$$

Hemos obtenido por tanto al espacio vectorial complejo $V \oplus V$ a partir del espacio vectorial real $V \oplus V$ dotándolo con la multiplicación compleja dada en (B.1). Denotaremos por $V^{\mathbb{C}}$ al espacio vectorial complejo $V \oplus V$. Entenderemos al espacio vectorial complejo $V^{\mathbb{C}}$ como la **complejificación** del espacio real V.

Afirmación B.0.2 *El conjunto $\{(e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_n, 0)\}$ es una base del espacio $V^{\mathbb{C}}$. Se verifica también que $dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = n$.*

En conclusión, dado un espacio vectorial real V de dimensión real n con una estructura compleja, lo que hemos conseguido es asociarle un espacio vectorial complejo $V^{\mathbb{C}}$ de dimensión compleja n.

Bibliografía

[1] BARGMANN, V., *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform*, Part I, Comm. Pure Appl. Math. 14, 1961.

[2] HALL, BRIAN C., *First summer school in analysis and mathematical physics: Quantization, the Segal-Bargmann Transform and Semiclassical Aalysis.*, *Holomorphic methods in analysis and mathematical physics*, Contemporary mathematics, Volume 260, American Mathematical Soc., 2000

[3] HALL, BRIAN C., *Quantum theory for mathematicians*, Springer-Verlag, New York, 2013.

[4] HALL, BRIAN C., *Geometric Quantization and the Generalized Segal-Bargmann Transform for Lie Group of Compact Type*, Commun. Math. Phys. Springer-Verlag, New York, 2002.

[5] ABRAHAM R., MARSDEN J. E., *Foundations of Mechanics*, II ed., Benjamin/Cummings Publishing Co., 1978.

[6] WOODHOUSE, N. M. J., *Geometric Quantization*, Second Ed. Oxford, NewYork: Oxford Univ. Press 1991.

[7] PUTA, MIRCEA *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*, Kluwer Academic Publishers Group, 1993.

[8] KRAMER, P., MOSHINSKY, M., SELIGMAN, T.H., *Complex Extensions of Canonical Transformations and Quantum Mechanics*, Group Theory and its Applications Volume III, Academic Press, 1975.

[9] DIRAC, P. A. M., *The principles of Quantum Mechanics*, Fourth Edition. Oxford, NewYork: Oxford Univ. Press 1959.

[10] ARNOLD, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Second Edition. Springer-Verlag New York 1989.

[11] SNIATYCKI, JEDRZEJ, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[12] WOLF, KURT BERNARDO, *Canonical Transforms. I. Complex linear transforms*, Journal of Mathematical Physics, Vol.5, No.8, 1974.

[13] C.A. BERGER, L.A. COBURN, *Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space*, Trans. Amer. Math. Soc. 301 (1987).

[14] WALTER RUDIN, *Real and complex analysis*,' Third Edition, McGraw-Hill, Inc. 1987.

[15] WALTER RUDIN, *Functional analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, Inc. 1991.

[16] FUSTER, K. AND GIMÉNEZ, I., *Variable compleja y ecuaciones diferenciales*, Editorial Reverté, 1995.

[17] REED, M., SIMON, B., *Methods of Modern Mathematical Physics. I Functional Analysis*, Academic Press. 1980.

[18] LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M., *Mechanics*, Third Edition, Elsevier, 1982.

[19] KLAUDER, JOHN R., *Valentine Bargmann 1908-1989*, National Academy Press, Washington D.C., 1999.

[20] CHACÓN, ELPIDIO, *Apuntes del curso de Mecánica Cuántica de Marcos Moshinsky* , Prensas de ciencias, UNAM, México, 2008.

[21] SAKURAI, JUN JOHN, *Modern quantum mechanics; rev. ed.* , Addison-Wesley,Reading, MA, 1994.