



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

MOVIMIENTO BROWNIANO EN  
VARIETADES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

XIAOPING MA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2018





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno  
Ma  
Xiaoping  
5520261773  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
413490175
2. Datos del tutor  
Dr.  
Oscar Alfredo  
Palmas  
Velasco
3. Datos del sinodal 1  
Dra.  
Ana  
Meda  
Guardiola
4. Datos del sinodal 2  
Dr.  
Eugenio  
Garnica  
Vigil
5. Datos del sinodal 3  
Dr.  
Luis Antonio  
Rincón  
Solís
6. Datos del sinodal 4  
Dr.  
Pierre Michel  
Bayard
7. Datos del trabajo escrito  
Movimiento browniano en variedades  
79 p.  
2018

# Agradecimientos

Agradezco a mi asesor, el Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco por su apoyo y tiempo durante la realización de la tesis.

Agradezco a mis padres y mis tíos por su confianza y apoyo brindado durante toda la carrera.

Agradezco también al profesor Luis Manuel Hernández Gallardo por la instrucción y el apoyo recibido durante la carrera.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM, proyecto IN113516. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.



# Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	1
<b>1. Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de difusión</b>	<b>3</b>
1.1. Procesos estocásticos en el espacio euclidiano . . . . .	3
1.1.1. Definiciones básicas . . . . .	3
1.1.2. Procesos estocásticos . . . . .	5
1.1.3. Martingalas . . . . .	7
1.2. Movimiento browniano . . . . .	9
1.3. Integración estocástica . . . . .	12
1.3.1. Fórmula de Itô . . . . .	16
1.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .	19
1.5. Procesos de difusión . . . . .	23
<b>2. Geometría riemanniana</b>	<b>29</b>
2.1. Variedades diferenciables . . . . .	29
2.1.1. Definiciones básicas . . . . .	29
2.1.2. Vectores tangentes y formas . . . . .	30
2.2. Variedades riemannianas . . . . .	35
2.2.1. Métrica riemanniana . . . . .	35
2.2.2. Derivadas covariantes y transporte paralelo . . . . .	36
2.3. Conexión de Levi-Civita . . . . .	38
2.4. Tensor de curvatura . . . . .	39
2.5. Geodésicas y campos de Jacobi . . . . .	41
2.6. Operador de Laplace-Beltrami . . . . .	44
<b>3. Extensión de conceptos estocásticos a variedades</b>	<b>49</b>
3.1. Procesos de difusión en variedades . . . . .	49
3.2. Integrales de línea estocásticas . . . . .	52
3.3. Martingalas en una variedad riemanniana . . . . .	55
3.4. Movimiento browniano en una variedad riemanniana . . . . .	57
<b>4. Construcción y aplicación de movimientos brownianos en variedades</b>	<b>60</b>
4.1. Construcción de movimientos brownianos por proyección . . . . .	60
4.2. Ejemplos de movimientos brownianos . . . . .	62
4.3. Movimiento browniano en una variedad rotacionalmente simétrica . . . . .	63
4.4. Proceso radial y teoremas de comparación . . . . .	66
4.5. Aplicaciones . . . . .	69

---

4.5.1. Completez estocástica . . . . .	69
4.5.2. Transitoriedad y recurrencia . . . . .	70
4.6. Primer tiempo de entrada en una esfera geodésica . . . . .	71
<b>Bibliografía</b>	<b>78</b>





# Introducción

El objetivo principal de la presente tesis es estudiar los movimientos brownianos en variedades. Más precisamente, estudiar la construcción de un movimiento browniano en una variedad riemanniana a partir de su definición; y dar algunas propiedades del movimiento browniano en la variedad investigando la parte radial del movimiento browniano.

Un movimiento browniano en el espacio euclidiano puede construirse mediante ecuaciones diferenciales estocásticas; en efecto, es un proceso de difusión generado por el operador de Laplace en el espacio euclidiano. Una variedad riemanniana es un espacio que tiene estructura más complicada (en lo topológico y distinguida por su curvatura) que un espacio euclidiano; estos dos conceptos son estudiados en los primeros dos capítulos, que en su mayoría están basados en [12], [19], y [4]. Entonces podemos obtener el movimiento browniano en una variedad riemanniana de manera similar y deberá tener algunas propiedades especiales en relación con la curvatura; así, la construcción del movimiento browniano en una variedad riemanniana y algunas de sus propiedades se dan en los últimos dos capítulos, donde las referencias principales son [5], [6] y [11]. A continuación, damos un resumen de cada capítulo de la tesis.

En el primer capítulo introducimos unos resultados sobre las ecuaciones diferenciales estocásticas en el espacio euclidiano. Empezamos con las definiciones básicas de procesos estocásticos y la integración estocástica, del tipo de Itô y de Stratonovich. El resultado principal es que las ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo de Itô en el espacio euclidiano tienen solución única hasta su tiempo de explosión. La última sección estudia el proceso de difusión desde el punto de vista de las martingalas, y la existencia y unicidad de proceso de difusión generado por un operador diferencial de segundo orden se puede obtener resolviendo la ecuación diferencial estocástica; el proceso de Ornstein-Uhlenbeck y el movimiento browniano son ejemplos de un proceso de difusión, en particular, el movimiento browniano es un proceso de difusión generado por el operador de Laplace en el espacio euclidiano.

En las primeras cuatro secciones del segundo capítulo damos las definiciones básicas de la geometría riemanniana, y en la última sección de este capítulo, estudiamos algunos operadores en una variedad riemanniana. En particular, el operador de Laplace-Beltrami es un concepto central para la construcción de movimiento browniano en la variedad riemanniana, entonces la representación extrínseca y local del operador de Laplace-Beltrami serán estudiadas en esta sección.

El capítulo tres estudia una extensión de los conceptos estocásticos en el espacio euclidiano a una variedad. En la primera sección introducimos las ecuaciones diferenciales estocásticas en una variedad. La existencia y unicidad de solución a la ecuación hasta su tiempo de explosión se sigue de los resultados en el espacio euclidiano suponiendo que la variedad es una subvariedad cerrada de algún espacio euclidiano (lo que es válido por el teorema de encaje de Whitney). La existencia y unicidad del proceso de difusión en una variedad generado por el operador elíptico diferencial de segundo orden en la variedad

consiste entonces en resolver una ecuación diferencial estocástica en la variedad. La segunda sección estudia las integrales de línea de tensores covariantes de primer y segundo orden (i.e., 1-formas y formas bilineales en la variedad) a lo largo de una semimartingala en la variedad. En las últimas dos secciones estudiamos las martingalas y movimientos brownianos en una variedad riemanniana, así como la caracterización de Lévy para movimientos brownianos en una variedad riemanniana. El movimiento browniano en una variedad riemanniana está definido como un proceso de difusión generado por medio del operador de Laplace-Beltrami.

De la definición del movimiento browniano en una variedad riemanniana, se dan otras descripciones equivalentes, una de ellas es por la representación extrínseca del operador de Laplace-Beltrami, así, el movimiento browniano en una variedad riemanniana se puede construir por proyección ortogonal a partir de un movimiento browniano en el espacio euclidiano. En el cuarto capítulo, unos ejemplos del movimiento browniano en una variedad riemanniana están dados, tanto en las formas intrínseca y extrínseca, como en la forma local. Otro ejemplo se da para el movimiento browniano en una variedad riemanniana específica, que es rotacionalmente simétrica (las variedades riemannianas de curvatura seccional constante son ejemplos de éstas). Aquí vemos que la curvatura de la variedad juega un papel importante en el proceso radial del movimiento browniano, entonces, en la sección cuatro del capítulo investigamos la influencia de la curvatura en el proceso radial del movimiento browniano en una variedad riemanniana comparándolo con el mismo proceso en una variedad rotacionalmente simétrica, y se obtiene el teorema de comparación para el proceso radial. En la quinta sección están dados algunos resultados básicos sobre la investigación de la completez estocástica, la recurrencia y transitoriedad del movimiento browniano en la variedad (otras propiedades relacionadas al movimiento browniano pueden consultarse en [11]), que son estudiadas por la investigación del proceso radial del movimiento browniano.

El capítulo cuatro termina con una estimación de los momentos del primer tiempo en el que el movimiento browniano entra a una esfera geodésica, dados mediante fórmulas explícitas de integrales iteradas en términos de las cotas de la curvatura seccional. De la misma manera, el primer tiempo de entrada está estudiado mediante la investigación del proceso radial del movimiento browniano; así, esta última sección estudia los resultados para el proceso radial del movimiento browniano en una variedad rotacionalmente simétrica y los generaliza a variedades más generales aplicando el teorema de comparación del proceso radial. Las referencias importantes para esta última sección son [3] y [20].

# Capítulo 1

## Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de difusión

### 1.1. Procesos estocásticos en el espacio euclidiano

#### 1.1.1. Definiciones básicas

En este apartado daremos algunas definiciones básicas tanto de la teoría de la medida (cf. [1]) como de la teoría de la probabilidad (cf. [17]) que aparecerán durante esta tesis. La principal es la definición del *espacio de probabilidad*, representado por la terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , donde  $\Omega$  es un *espacio muestral*;  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra que consiste en subconjuntos de  $\Omega$  llamados *eventos* tal que  $\mathcal{F}$  satisface:

- 1)  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$ ;
- 2) si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $A^c \in \mathcal{F}$ ;
- 3) para cada  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ , se tiene que  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ .

A la pareja  $(\Omega, \mathcal{F})$  le llamamos un *espacio medible*.

Y  $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  es una *medida de probabilidad* que satisface:

- i)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$ ;
- ii)  $\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$ ;
- iii) si  $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$  tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ , entonces  $\mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ .

Un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  se dice que es *completo* si para cada conjunto nulo  $\mathcal{N}$  (i.e.  $\mathcal{N} \subseteq A$ , tal que  $A \in \mathcal{F}$  y  $\mathbb{P}(A) = 0$ ), se tiene que  $\mathcal{N} \in \mathcal{F}$  y  $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = 0$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una clase de subconjuntos de un espacio  $\Omega$ , denotamos por  $\sigma(\mathcal{C})$  la intersección de todas las  $\sigma$ -álgebras que contienen a  $\mathcal{C}$ , y se le llama la *mínima  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$* . La  *$\sigma$ -álgebra de Borel* en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $n$  es la mínima  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbb{R}^n$  generada por la colección de los subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , y denotada por  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . A los elementos de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  les llamamos *subconjuntos de Borel* de  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad, una familia  $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$  se dice *mutuamente independiente* si para cualquier subconjunto finito  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \Lambda$  y  $A_i \in \mathcal{F}_{\alpha_i}, i = 1, \dots, k$ , se tiene que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_k).$$

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y el espacio medible  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , una función  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es  $\mathcal{F}$ -medible (i.e.  $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ), se llama una *variable aleatoria de dimensión  $n$*  (ó simplemente *variable aleatoria*); en particular, cuando  $n = 1$ ,  $X$  se dice una *variable aleatoria real*.

Si  $X$  es una variable aleatoria definida en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , se define una medida de proba-

bilidad  $\mathbb{P}_X$  en el espacio medible  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  dada por

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P} \circ X^{-1}(B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

denominada la *medida de probabilidad inducida* por la variable aleatoria  $X$ , también se le conoce como la *distribución de probabilidad* de  $X$ .

Para cada función  $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , denotamos por  $\sigma(X) = \sigma\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$  a la  $\sigma$ -álgebra generada por  $X$ . En particular,  $X$  es una variable aleatoria si y sólo si  $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$ . Una familia  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  de variables aleatorias se dice *mutuamente independiente* si  $\{\sigma(X_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  lo es.

Ahora introducimos algunas definiciones de convergencia de variables aleatorias.

Supongamos que  $X$  y  $X_1, X_2, \dots$  son variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad común  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , entonces se dice que:

a) La sucesión  $\{X_n\}$  *converge en probabilidad* a  $X$ , si, para cada  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0;$$

b)  $\{X_n\}$  *converge casi seguramente* ( $\mathbb{P}$ -c.s. ó c.s.) ó *con probabilidad 1* (c.p.1) a  $X$  si

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\}) = 1;$$

donde  $|\cdot|$  es la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $X$  una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , entonces  $X$  es *integrable* si la integral de Lebesgue es finita, i.e. ,

$$\int_{\Omega} |X(\omega)| \mathbb{P}(d\omega) < \infty.$$

En general, si  $\int_{\Omega} |X(\omega)|^p \mathbb{P}(d\omega) < \infty$ , ( $p > 0$ ), decimos que  $X$  es *integrable de orden  $p$* . Sea  $p \geq 1$ , al conjunto de todas las variables aleatorias integrables de orden  $p$  le denotamos por  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mathcal{L}^p(d\mathbb{P})$  ó simplemente por  $\mathcal{L}^p$ .

Para una variable aleatoria  $X$  integrable, el *valor medio* ó la *esperanza* de  $X$  está definida por

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) \equiv \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

Si  $X \in \mathcal{L}^p$ , el *momento de orden  $p$*  es  $\mathbb{E}[X^p]$  y el *momento central de orden  $p$*  es  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^p]$ . En particular, al momento central de orden 2 le decimos la *varianza* de  $X$ , i.e.,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Sea  $X$  una variable aleatoria integrable definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , y  $\mathcal{G}$  una sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ , decimos que una variable aleatoria  $Y$  es una *esperanza condicional* de  $X$  dado  $\mathcal{G}$  si  $Y$  es medible con respecto de  $\mathcal{G}$  y cumple que

$$\int_G Y d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}, \quad \forall G \in \mathcal{G}.$$

A la esperanza condicional de  $X$  dado  $\mathcal{G}$  también le denotamos por  $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ .

Las propiedades básicas de la esperanza condicional se pueden encontrar en Ikeda [12] o Steele [25], una de importancia es la llamada *desigualdad de Jensen*: Sea  $X$  una variable aleatoria real integrable y  $\mathcal{G}$  una sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ , si  $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa tal que es integrable, entonces

$$\Phi(\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\Phi(X) | \mathcal{G}]. \quad \text{c.s.}$$

### 1.1.2. Procesos estocásticos

Los procesos físicos que varían aleatoriamente a lo largo del tiempo pueden ser modelados mediante variables aleatorias que describan el estado del sistema en cada instante de tiempo. De este modo, tenemos la siguiente definición de proceso estocástico.

**Definición 1.1.1.** Un *proceso estocástico* (o simplemente *proceso*) es una colección de variables aleatorias  $(X_t)_{t \in T}$  parametrizada por un conjunto de parámetros  $T$  y definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  con valores en  $\mathbb{R}^n$ .

*Observación.* Usualmente interpretamos a cada elemento de  $T$  como un instante de tiempo. Se tiene que  $T = \{0, 1, \dots, N\}$  ó  $T = \mathbb{N}$  en el caso de tiempo discreto, y  $T \subseteq [0, \infty)$  en el caso de tiempo continuo. Aquí sólo estudiaremos el caso de tiempo continuo, así que en lo sucesivo, supondremos  $T = [0, \infty)$  y denotaremos el proceso por  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

*Observación.* Un proceso estocástico  $(X_t)_{t \geq 0}$  también puede considerarse como una función de dos variables

$$X: [0, \infty) \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto X(t, \omega) \equiv X_t(\omega) \in \mathbb{R}^n,$$

donde la función  $\omega \mapsto X_t(\omega)$  es una variable aleatoria para cada  $t \in [0, \infty)$ , mientras que para cada  $\omega \in \Omega$  fijo, la función  $t \mapsto X_t(\omega)$  se denomina una *trayectoria* (o *realización*) del proceso (Fig. 1.1). Un proceso estocástico  $X$  se dice *continuo* si todas sus trayectorias  $t \mapsto X_t(\omega)$  son continuas con probabilidad 1, es decir,

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{s \rightarrow t} |X_s(\omega) - X_t(\omega)| = 0\}) = 1, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

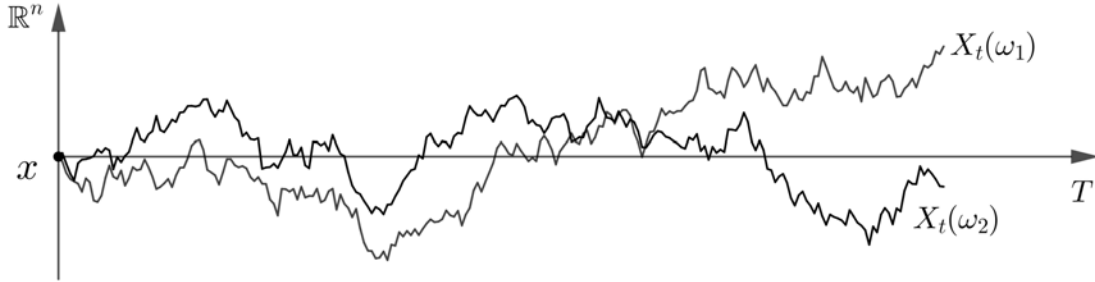


Figura 1.1: Dos trayectorias continuas de un proceso estocástico  $X_t$  con  $X_0 = x$ .

*Observación.* Finalmente, observemos que podemos identificar a cada  $\omega \in \Omega$  como una trayectoria  $t \mapsto X_t(\omega)$  del proceso, así que podemos considerar a  $\Omega$  como un subconjunto de  $W^n$ , el espacio de todas las funciones continuas de  $[0, \infty)$  en  $\mathbb{R}^n$ . Con la topología de producto en este espacio, se tiene que la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  de  $W^n$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$ , el conjunto de todos los conjuntos cilíndricos de Borel de  $W^n$ , donde cada  $C \in \mathcal{C}$  tiene la siguiente forma:

$$C = \{\omega \in W^n : (\omega_{t_1}, \omega_{t_2}, \dots, \omega_{t_k}) \in F\}, \quad \text{para algún } \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset [0, \infty),$$

tal que  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ , y  $F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{kn})$  con  $F_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ .

**Definición 1.1.2.** Sea  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Las *distribuciones de dimensión finita* del proceso  $X$  son las medidas  $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k}^X$  definidas en  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{kn})$  para los subconjuntos finitos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  de  $[0, \infty)$  y dadas por

$$\mathbb{P}_{t_1, t_2, \dots, t_k}^X (F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k) = \mathbb{P}(\{X_{t_1} \in F_1, X_{t_2} \in F_2, \dots, X_{t_k} \in F_k\}),$$

donde  $F_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

*Observación.* Como  $X_{t_i}$  es  $\mathcal{F}$ -medible para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ , entonces tiene sentido la definición anterior y cada una de las funciones  $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k}^X$  es una medida de probabilidad en el espacio medible  $(W^n, \mathcal{B})$  que está determinada unívocamente por sus valores en  $\mathcal{C}$  y se cumplen las siguientes propiedades: (cf. [17], pág.55-57)

(K1) Para cualquier permutación  $\sigma$  en  $\{1, 2, \dots, k\}$ ,

$$\mathbb{P}_{t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(k)}}^X (F_{\sigma(1)} \times F_{\sigma(2)} \times \dots \times F_{\sigma(k)}) = \mathbb{P}_{t_1, t_2, \dots, t_k}^X (F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k).$$

(K2) Para  $k < m$  y  $t_{k+1}, \dots, t_m \in T$  arbitrarios,

$$\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k}^X (F_1 \times \dots \times F_k) = \mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_m}^X (F_1 \times \dots \times F_k \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n).$$

Por otro lado, el teorema fundamental de Kolmogórov [17] afirma la existencia de un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y un proceso estocástico  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  definido en él tal que sus distribuciones de dimensión finita coinciden con una familia dada de medidas de probabilidad  $\{\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_k}^X\}$  en  $(W^n, \mathcal{B})$  que satisface las propiedades anteriores.

Un proceso estocástico  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  se dice que es una *versión* o *modificación* de otro proceso  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  si  $\mathbb{P}(\{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1$ , para todo  $t \in [0, \infty)$ . Notemos que si  $Y$  es una versión de  $X$ , la variable  $X_t$  es igual a  $Y_t$  casi seguramente para cada  $t \in [0, \infty)$ , entonces  $X$  y  $Y$  tienen las mismas distribuciones de dimensión finita, y se escribe  $X \stackrel{D}{\approx} Y$ . Para verificar la continuidad de un proceso, tenemos el siguiente famoso teorema de Kolmogórov [19]:

**Teorema 1.1.3** (Teorema de Continuidad de Kolmogórov). *Sea  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Si existen constantes  $\alpha, \beta, C$  positivas tales que:*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq C|t - s|^{1+\beta}, \quad \forall s, t \in [0, \infty). \quad (1.1.1)$$

*Entonces existe una versión de trayectorias continuas c.s. de  $X$ .*

**Definición 1.1.4.** Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sea  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  (o simplemente  $(\mathcal{F}_t)$ ) una familia de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ , se le llama una *filtración* si es creciente (i.e.,  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  para  $0 \leq s \leq t$ ), y satisface las siguientes propiedades:

- 1) Para cada  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_t$  contiene todos los conjuntos nulos  $\mathcal{N}$ ;
- 2)  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es continua por la derecha:  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s: s > t} \mathcal{F}_s$ .

Al espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  le decimos un *espacio de probabilidad filtrado*.

Se nota que la primera de las condiciones anteriores indica que el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es completo. En lo sucesivo, supondremos que un proceso estocástico  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  siempre está definido en un espacio de probabilidad completo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  junto con una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

**Definición 1.1.5.** Un proceso  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  se dice que es *adaptado a la filtración*  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  (o  $(\mathcal{F}_t)$ -*adaptado*) si para cada  $t \in [0, \infty)$ , la variable aleatoria  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.

*Observación.* Dado un proceso  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , la *filtración natural*  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  determinada por  $(X_t)_{t \geq 0}$  es tal que para cada  $t \in [0, \infty)$ ,  $\mathcal{F}_t$  es la mínima  $\sigma$ -álgebra generada por las variables  $X_s$ ,  $s \leq t$ , i.e.,  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \sigma(\{X_s : s \leq t + \epsilon\})$ ; en este caso, cada  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  se denomina la “historia” del proceso al tiempo  $t$ .

Claramente se tiene que cada proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  es adaptado a su filtración natural.

**Definición 1.1.6.** Dado un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ , una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{P}$  del conjunto producto  $[0, \infty) \times \Omega$  que es la mínima  $\sigma$ -álgebra generada por los subconjuntos de la forma:  $(s, t] \times F$ ,  $F \in \mathcal{F}_s$  y  $\{0\} \times F_0$  con  $F_0 \in \mathcal{F}_0$ , se le llama una  $\sigma$ -álgebra *predecible*. Un proceso  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  se dice  $(\mathcal{F}_t)$ -*predecible* si el proceso  $X: (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$  es  $\mathcal{P}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -medible en  $[0, \infty) \times \Omega$ .

En particular, un proceso  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado y continuo por la izquierda es predecible.

### 1.1.3. Martingalas

Un ejemplo de procesos estocásticos de reconocida importancia es el llamado *martingala*. El desarrollo de la teoría de martingalas fue motivado con el objetivo de buscar demostrar la inexistencia de estrategias ventajosas en un juego justo de apuestas, y hoy en día es una de las herramientas principales en el estudio de procesos aleatorios.

**Definición 1.1.7.** Sea  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico continuo y adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Decimos que  $X$  es una *martingala continua* con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ( $(\mathcal{F}_t)$ -*martingala* o simplemente *martingala*) si  $X_t$  es integrable para cada  $t \in [0, \infty)$  tal que satisface la siguiente propiedad

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s, \quad c.s. \quad 0 \leq s < t. \quad (1.1.2)$$

$X$  se dice que es una *submartingala* (*supermartingala*) si satisface que

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq (\leq) X_s, \quad c.s. \quad 0 \leq s < t. \quad (1.1.3)$$

*Observación.* Si  $X$  es una martingala tal que  $\mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$  para algún  $p \geq 1$ , entonces a  $X$  le decimos una  $\mathcal{L}^p$ -martingala y como consecuencia de la desigualdad de Jensen, se tiene que  $|X|^p = (|X_t|^p)_{t \geq 0}$  es una submartingala.

**Definición 1.1.8.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  un espacio de probabilidad filtrado. Una variable aleatoria  $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$  se denomina un  $(\mathcal{F}_t)$ -*tiempo de paro* (con respecto a  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ), si para cada  $t \in [0, \infty)$ ,  $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

**Definición 1.1.9.** Sean  $\tau$  un  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempo de paro y  $\mathcal{F}_\infty$  la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene a todas las  $\mathcal{F}_t$ ,  $\forall t \geq 0$ . Entonces la  $\sigma$ -álgebra *detenida en  $\tau$* ,  $\mathcal{F}_\tau$  está definida por

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

En particular, si  $\tau(\omega) \equiv t$ , entonces  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$ .

*Observación.* El comportamiento de un proceso  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , precisamente en el tiempo de paro  $\tau$ , se puede observar mediante la definición de una variable aleatoria  $X_\tau$  en el conjunto  $\{\tau(\omega) < \infty\}$  dada por

$$X_\tau(\omega) = X_t(\omega), \quad \text{siempre y cuando } \tau(\omega) = t.$$

Además, si  $t \wedge \tau = \min\{t, \tau\}$ , entonces  $t \wedge \tau$  es un tiempo de paro acotado, y para cualquier proceso  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ , el “proceso parado”  $X^{\uparrow \tau} = (X_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$  está bien definido.

**Ejemplo 1.1.10.** Sean  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  que es continuo por la derecha y  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  un conjunto de Borel, entonces el *primer tiempo de entrada en  $A$*  (ver Fig. 1.2) definido por

$$\tau_A(\omega) = \inf\{t : X_t(\omega) \in A\},$$

donde pedimos que  $\inf \emptyset = \infty$ ; es un tiempo de paro con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

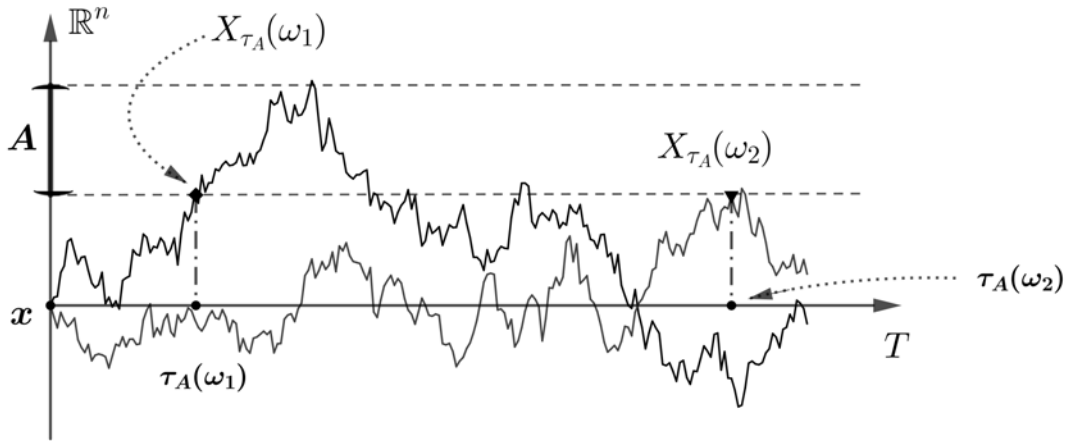


Figura 1.2: El primer tiempo de entrada de  $X$  a  $A$  y la variable  $X_{\tau_A}$  para las muestras  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ .

**Definición 1.1.11.** Si  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  es un proceso continuo y adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , entonces  $X$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala local (resp. supermartingala local, submartingala local) continua si existe una sucesión no decreciente de tiempos de paro,  $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ , tal que  $\lim_{k \uparrow \infty} \tau_k = \infty$ , c.s., y para cada  $k$ , el proceso parado definido por

$$X_t^k = X_{t \wedge \tau_k} - X_0, \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (1.1.4)$$

es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala (resp. supermartingala, submartingala).

Además, si  $X^k = (X_t^k)_{t \geq 0}$  es una martingala cuadrado integrable para cada  $k$ , entonces le decimos a  $X$  una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala localmente cuadrado integrable.

Las desigualdades de Doob para martingalas son herramientas importantes en el estudio de cálculo estocástico, en particular, en el estudio de la continuidad de integrales estocásticas: (cf. [12])

**Teorema 1.1.12.** (Desigualdades maximales de Doob) Sea  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  una  $\mathcal{L}^p$ -submartingala continua por la derecha. Entonces para cualquier  $p \geq 1$  y  $\lambda > 0$ , se tiene que

$$\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| > \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda^p} \mathbb{E}(|X_t|^p), \quad t > 0. \quad (1.1.5)$$

Para cualquier  $p > 1$ , se tiene que

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| \right)^p \right] \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}(|X_t|^p), \quad t > 0. \quad (1.1.6)$$

Finalmente, daremos la definición de semimartingala, que es una herramienta útil para el estudio de procesos de difusión. Para esto, primero introducimos la definición de variación cuadrática de un proceso recordando que dada una función  $f$  continua en un intervalo  $[a, b]$ , para cada  $p > 0$ , la  $p$ -variación de  $f$  con respecto a una partición  $\pi: a = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = b$  está definida por:

$$\mathcal{Q}_\pi^p(f) = \sum_{i=0}^m |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^p.$$

**Definición 1.1.13.** Sea  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico continuo y  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado. Para cada  $t \geq 0$  con  $[0, t] \subset [0, \infty)$  y cualquier sucesión de particiones  $\{\pi_m\}_{m=1}^\infty$  de  $[0, t]$ ,  $\pi_m: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = t$  tal que la norma de  $\pi_m$  tiende a 0 cuando  $m \rightarrow \infty$ ; si existe una variable aleatoria  $V_t^p$  tal que  $\mathcal{Q}_{\pi_m}^p(X)$  converge a  $V_t^p$  en probabilidad cuando  $m \rightarrow \infty$ , entonces al proceso  $V^p = (V_t^p)_{t \geq 0}$  le decimos la  $p$ -variación del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$ .



En particular, cuando  $p = 1$ , le decimos simplemente la *variación (total)* de  $X$  y denotaremos por  $|X|_t$ ; cuando  $p = 2$ , le decimos la *variación cuadrática* del proceso  $X$  y está denotada por  $\langle X \rangle_t$ .

**Definición 1.1.14.** Sean  $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ,  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  dos procesos estocásticos continuos y  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptados. Dada  $\pi_m: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = t$  cualquier partición del intervalo  $[0, t]$ , definimos

$$\mathfrak{Q}_{\pi_m} = \sum_{i=1}^m |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| |Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}|.$$

Entonces, la *covariación* de  $X$  e  $Y$ , denotada por  $[X, Y]_t$  (ó  $[X_t, Y_t]$ ) está definida como el límite de  $\mathfrak{Q}_{\pi_m}$  en probabilidad tal que la norma de  $\pi_m$  tiende a 0 cuando  $m \rightarrow \infty$ . Alternativamente, la covariación puede expresarse en términos de variación cuadrática mediante:

$$[X, Y]_t = \frac{1}{4} \{ \langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t \}.$$

Luego la variación cuadrática de  $X$  también está denotada por  $\langle X \rangle_t = [X, X]_t$ .

**Definición 1.1.15.** Un proceso estocástico  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  continuo y adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  se denomina  $(\mathcal{F}_t)$ -*semimartingala* (o simplemente *semimartingala*) si

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad \forall t \geq 0,$$

donde  $X_0$  es el valor inicial,  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  ( $M_0 = 0$ , *c.s.*) es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala local continua y  $A = (A_t)_{t \geq 0}$  ( $A_0 = 0$ , *c.s.*) es un proceso  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado con variación acotada en todos los intervalos compactos.

**Proposición 1.1.16.** Sea  $X = M + A$  una *semimartingala continua*, entonces  $\mathcal{Q}_\pi^2(X)$  converge uniformemente a  $\langle M \rangle_t$ , *c.s.* en intervalos compactos.

*Demostración.* Sea  $\pi$  una partición de  $[0, t]$ , notemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\pi^2(X) &= \sum_{\pi} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2 \\ &= \sum_{\pi} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|^2 + 2 \sum_{\pi} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| + \sum_{\pi} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|^2. \end{aligned}$$

Como  $A$  es un proceso con variación,  $V_t(A)$ , acotada en intervalos compactos, entonces el último sumando converge a 0 uniformemente en  $[0, t]$  *c.s.*, cuando la norma de  $\pi$  tiende a 0. Por otra parte, si la norma de  $\pi$  es menor que un número  $\delta > 0$ , se tiene que

$$\sum_{\pi} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}| |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| \leq \sup_{\substack{|s_2 - s_1| \leq \delta \\ s_1, s_2 \leq t}} |M_{s_2} - M_{s_1}| \cdot V_t(A),$$

por la continuidad de las trayectorias del proceso  $M$ , se concluye que el lado derecho de la desigualdad anterior converge a 0 uniformemente en  $[0, t]$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ .  $\square$

## 1.2. Movimiento browniano

En 1828, el botánico escocés R. Brown observó que los granos de polen suspendidos en líquido presentaban un movimiento irregular, como resultado de choques aleatorios contra las moléculas del líquido. El modelo matemático para este tipo de fenómeno es un proceso estocástico  $X = (X_t)_{t \in T}$  a tiempo continuo, interpretado como la posición en tiempo  $t$  de una partícula de polen  $\omega$ . Aquí consideraremos que  $X$  asume valores en  $\mathbb{R}^n$ .

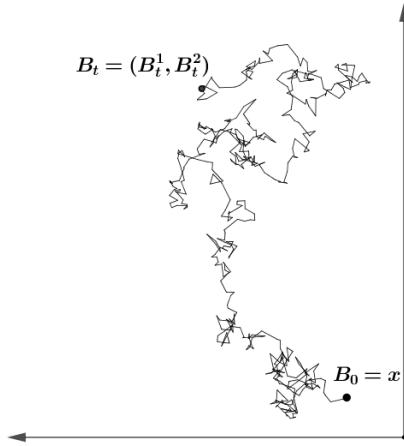


Figura 1.3: Movimiento browniano bidimensional que empieza en  $x$ .

En el estudio de Einstein (1905) sobre el fenómeno browniano, encontró que la densidad  $\rho(t, x)$  de la difusión de una partícula en el líquido en tiempo  $t$  (en posición  $x \in \mathbb{R}^n$  empezando del origen 0) está dada por:

$$\rho(t, x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n}} e^{-|x|^2/2t}, \quad t > 0. \quad (1.2.1)$$

Y la función de distribución de la posición de la partícula que representa un movimiento browniano es de *distribución gaussiana* de dimensión  $n$  con media 0 y matriz de covarianza  $tI_n$ , donde  $I_n$  es la matriz identidad del espacio matricial  $\mathbb{M}_{n \times n}$ , dada por

$$G_t(x) = \int_{-\infty}^x \rho(t, u) du, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

**Definición 1.2.1.** Sea  $\mu$  una medida de probabilidad en el espacio medible  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , y sea  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso estocástico adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  con valores en  $\mathbb{R}^n$ .  $(X_t)_{t \geq 0}$  se denomina un *movimiento browniano de dimensión  $n$  con la distribución inicial  $\mu$*  si se satisface las siguientes propiedades:

- (i)  $\mathbb{P}(X_0 \in A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ;
- (ii) Las trayectorias  $t \mapsto X_t$  son continuas, *c.s.*,  $\forall t \geq 0$ ;
- (iii) El proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  tiene incrementos independientes; i.e., para cualquier conjunto finito de tiempos  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , las variables aleatorias
 
$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$
 son independientes;
- (iv) Para cualesquiera tiempos  $s, t \geq 0$ , el incremento  $X_{t+s} - X_s$  tiene distribución gaussiana de dimensión  $n$  con media 0 y matriz de covarianza  $tI_n$ .

Aquí la distribución de probabilidad  $\mathbb{P}_\mu$  del proceso  $X$  en  $(W^n, \mathcal{B})$  se llama la *medida de Wiener con la distribución inicial  $\mu$* .

*Observación.* Si  $\mu = \delta_x$ , asignando la medida 1 a algún punto  $x \in \mathbb{R}^n$ , decimos que  $X$  es un movimiento browniano de dimensión  $n$  que empieza en  $x$ , y cuando  $x = 0$ , le decimos a  $X$  un *movimiento browniano estándar*.

La existencia de un movimiento browniano  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  se tiene por el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.2.** *Para cualquier medida  $\mu$  en  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , existe la única medida de Wiener,  $\mathbb{P}_\mu$  en el espacio de trayectorias  $(W^n, \mathcal{B})$  con la distribución inicial  $\mu$ .*

*Demostración.* Para demostrar la existencia, primero consideramos el caso de que  $\mu = \delta_x$ , y para cada conjunto finito de tiempos  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , se define una medida de probabilidad  $\nu_{t_1, \dots, t_k}$  en  $(\mathbb{R}^{kn}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{kn}))$  dada por

$$\begin{aligned} \nu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta_x(dx) \int_{F_1} \rho(t_1, x_1 - x) dx_1 \int_{F_2} \rho(t_2 - t_1, x_2 - x_1) dx_2 \\ &\quad \dots \int_{F_k} \rho(t_k - t_{k-1}, x_k - x_{k-1}) dx_k, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

donde  $F_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , y  $dx$  denota la medida de Lebesgue. Por el hecho de que  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t, x-y) dx = 1$ , se verifica fácilmente que estas medidas cumplen las propiedades (K1) y (K2) del teorema fundamental de Kolmogórov, y por tanto, la existencia de un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y un proceso estocástico  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  definido en él tal que la distribución de dimensión finita del proceso está dada por (1.2.2); es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k) &= \int_{F_1} \rho(t_1, x_1 - x) dx_1 \int_{F_2} \rho(t_2 - t_1, x_2 - x_1) dx_2 \\ &\quad \dots \int_{F_k} \rho(t_k - t_{k-1}, x_k - x_{k-1}) dx_k. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Esto significa que para cada  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ ,  $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$  son mutuamente independientes, cada uno con distribución gaussiana, y se observa que  $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ .

Además, para cualesquiera tiempos  $0 \leq s < t$ , sea  $r = t - s$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |X_t - X_s|^4 \right] &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^4 \rho(t-s, x) dx = \frac{1}{\sqrt{(2\pi r)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^4 e^{-\frac{|x|^2}{2r}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} r^2 \int_{\mathbb{R}^n} |y|^4 e^{-\frac{|y|^2}{2}} dy. \quad \left( y = \frac{x}{\sqrt{r}} \right) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Como para cualquier número  $\alpha > 0$ , se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|y|^2} dy = \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{n}{2}},$$

diferenciando dos veces ambos lados de la ecuación anterior con respecto al parámetro  $\alpha$ , se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y|^4 e^{-\alpha|y|^2} dy = \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{n}{2}} \alpha^{-2} \left( \frac{n}{2} \right) \left( \frac{n}{2} + 1 \right).$$

Entonces haciendo  $\alpha = \frac{1}{2}$  y sustituyendo en la igualdad (1.2.4), obtenemos

$$\mathbb{E} \left[ |X_t - X_s|^4 \right] = n(n+2) |t-s|^2.$$

Luego se cumple la hipótesis del Teorema 1.1.3 de continuidad de Kolmogórov con  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$  y  $C = n(n+2)$ , entonces el proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  tiene una versión de trayectorias continuas. Es decir, las trayectorias son continuas, *c.s.* Por tanto, existe una medida de Wiener  $\mathbb{P}_x$  en  $(W^n, \mathcal{B})$  con la distribución inicial  $\delta_x$ . En general, para cualquier medida de probabilidad  $\mu$  en  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ,  $\mathbb{P}_\mu(F) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}_x(F) \mu(dx)$ ,  $F \in \mathcal{B}$  define una medida de Wiener con la distribución inicial  $\mu$ .

Finalmente, la unicidad es inmediata de la definición.  $\square$

Sea  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano con valores en  $\mathbb{R}^n$ , consideramos su filtración natural  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \sigma(\{X_s : s \leq t + \epsilon\})$ ,  $t \geq 0$ .

**Definición 1.2.3.** Un proceso continuo  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  de dimensión  $n$  se llama un  $(\mathcal{F}_t)$ -movimiento browniano de dimensión  $n$  si es adaptado a su filtración natural  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  y satisface

$$\mathbb{E} \left[ \exp\{i\langle \xi, X_t - X_s \rangle\} \mid \mathcal{F}_s \right] = \exp\{-(t-s) |\xi|^2 / 2\}, \quad c.s. \quad (1.2.5)$$

para cada  $\xi \in \mathbb{R}^n$  y  $0 \leq s < t$ .

Se nota que esta definición es equivalente a la Definición 1.2.1 con  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtración generada por  $X$ , i.e., la filtración natural. En lo sucesivo, nos referimos a estos procesos simplemente como movimientos brownianos.

**Proposición 1.2.4.** *Un movimiento browniano  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala continua.*

*Demostración.* Sabemos que el proceso  $X$  es adaptado a su filtración natural,  $X_t - X_s$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$  y cada variable aleatoria  $X_t$  tiene media 0, i.e., es integrable. Entonces, para cualesquiera tiempos  $0 \leq s < t$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t - X_s + X_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[X_t - X_s] + X_s = X_s. \end{aligned}$$

La última igualdad se da porque  $X_t - X_s$  tiene distribución gaussiana de media 0.  $\square$

Finalmente, notemos que si  $X = \{X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n) : t \geq 0\}$ , es un movimiento browniano de dimensión  $n$ , entonces los procesos unidimensionales  $(X_t^k)_{t \geq 0}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , son movimientos brownianos independientes de dimensión uno. Por consiguiente, se tiene los siguientes resultados que se verifican fácilmente por la proposición anterior.

**Lema 1.2.5.** *Si  $X = \{X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano de dimensión  $n$ , entonces para cada  $k, l = 1, \dots, n$  y cualesquiera tiempos  $0 \leq s < t$ ,*

$$\mathbb{E}[X_t^k - X_s^k | \mathcal{F}_s] = 0, \quad c.s.$$

$$y \quad \mathbb{E}[(X_t^k - X_s^k)(X_t^l - X_s^l) | \mathcal{F}_s] = (t - s) \delta_{kl}. \quad c.s.$$

*Observación.* Si  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano de dimensión uno, aunque las trayectorias del proceso  $X$  son continuas *c.s.*, no son diferenciables con probabilidad uno en ningún punto, ya que  $Y_t^h = \frac{X_{t+h} - X_t}{h}$  es una variable con distribución gaussiana con media cero y con varianza  $1/h$ , con lo que cuando  $h \rightarrow 0$ , esta distribución diverge. Además, la variación cuadrática de  $X$  es  $\langle X \rangle_t = t$ , *c.s.* en el intervalo  $[0, t]$  (cf. [22]).

### 1.3. Integración estocástica

La integral estocástica fue introducida primero por K. Itô [13] basado en un movimiento browniano estándar, que después se generalizó a los casos de las martingalas locales y semimartingalas. En este apartado expondremos la integral estocástica (en el sentido de Itô) con respecto de semimartingalas continuas, estudiando primero la construcción de la integral estocástica con respecto de una clase intermedia entre las martingalas continuas y acotadas y las martingalas locales continuas.

Como siempre consideremos el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  junto con una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  usual, es decir,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es continua por la derecha.

**Definición 1.3.1.** Definimos al conjunto  $\mathcal{M}^2$  como el espacio de las  $(\mathcal{F}_t)$ -martingalas  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  que son continuas cuadrado integrables con valores reales; esto es, tales que

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|M_t|^2] < \infty.$$

*Observación.* Notemos que  $M \in \mathcal{M}^2$  si y sólo si existe  $M_\infty \in \mathcal{L}^2$  tal que para todo  $t \geq 0$ ,  $M_t = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t]$ , y que entonces  $\mathbb{E}[M_\infty^2] = \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[M_t^2]$ .

Con base en esto,  $\mathcal{M}^2$  puede considerarse como un espacio de Hilbert con el producto interior definido por  $[M, N] = \mathbb{E}[M_\infty N_\infty]$ , y genera la norma en  $\mathcal{M}^2$  dada por

$$\|M\|_{\mathcal{M}^2} = \|M_\infty\|_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \|M_t\|_2.$$

Se sabe que  $\mathcal{M}^2$  es completo con respecto a esta norma (cf. [27]).

Ahora introducimos el espacio de integrandos admisibles.

**Definición 1.3.2.** Sea  $M = (M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^2$  y  $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$  el proceso de variación cuadrática correspondiente. Definimos a  $\mathcal{L}^2(M)$  (o simplemente  $\mathcal{L}^2$ ) como el espacio de los procesos  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  tales que son  $(\mathcal{F}_t)$ -predecibles con valores reales y para cada  $T > 0$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T H_s^2(\omega) d\langle M \rangle_s \right] < \infty,$$

*Observación.* Si en el espacio producto  $[0, \infty) \times \Omega$ , definimos la medida

$$\lambda_M(A) = \mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_A(s, \omega) d\langle M \rangle_s(\omega) \right],$$

donde  $\mathbf{1}_A$  es la función indicadora del conjunto  $A$ . De la definición anterior se sigue que los elementos de  $\mathcal{L}^2(M)$  deben entenderse como clases de equivalencia relativas a  $\lambda_M$ . Así,  $\mathcal{L}^2(M)$  es un espacio de Hilbert con la norma

$$\|H\|_{\mathcal{L}^2} = \left( \int_{[0, \infty) \times \Omega} H^2 d\lambda_M \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty H_t^2 d\langle M \rangle_t \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Continuamos con la construcción de la integral estocástica, primero consideremos una subcolección  $\mathcal{L}_0$  de aquellos *procesos simples*  $\Phi = (\Phi_t(\omega))_{t \geq 0} \in \mathcal{L}^2(M)$  con la propiedad de que existe una sucesión de números reales  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \dots \rightarrow \infty$  y una sucesión de variables aleatorias  $\{\phi_i(\omega)\}_{i=0}^\infty$  tal que  $\phi_0 \in \mathcal{F}_0$ ,  $\phi_{i+1}$  es  $\mathcal{F}_{t_i}$ -medible y acotada, expresada por

$$\Phi_t(\omega) = \phi_0(\omega) \mathbf{1}_{\{i=0\}}(t) + \sum_{i=1}^\infty \phi_i(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t). \quad (1.3.1)$$

Sea  $M \in \mathcal{M}^2$ , definimos la función lineal  $\mathcal{I}: \Phi \in \mathcal{L}_0 \mapsto \mathcal{I}(\Phi) \in \mathcal{M}^2$  dada por:

$$\mathcal{I}(\Phi)_t(\omega) = \sum_{i=0}^\infty \phi_i(\omega) [M_{t_{i+1} \wedge t}(\omega) - M_{t_i \wedge t}(\omega)]. \quad (1.3.2)$$

Es claro que la suma anterior es finita y adaptada, además si  $0 \leq s < t$ , sea  $s \in (t_{j-1}, t_j]$  y  $t \in (t_{k-1}, t_k]$ ,  $j < k$ . Entonces

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}(\Phi)_t - \mathcal{I}(\Phi)_s \mid \mathcal{F}_s] = \phi_j \mathbb{E}[(M_{t_{j+1}} - M_s) \mid \mathcal{F}_s] + \sum_{i=j+1}^{k-1} \mathbb{E}[\phi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \mid \mathcal{F}_s].$$

Calculamos cada sumando al condicionar por  $\mathcal{F}_{t_i}$ , utilizando el carácter de martingala de  $M$ , tenemos que

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}(\Phi)_t - \mathcal{I}(\Phi)_s \mid \mathcal{F}_s] = 0, \quad c.s. \quad (1.3.3)$$

Por lo tanto,  $\mathcal{I}(\Phi) = (\mathcal{I}(\Phi)_t)_{t \geq 0}$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala continua acotada, es decir,  $\mathcal{I}(\Phi) \in \mathcal{M}^2$ . Así que  $\mathcal{I}$  está bien definida y además es una isometría:

**Lema 1.3.3** (Isometría de Itô). *Para cada  $\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{L}_0$ , tenemos:*

$$\|\mathcal{I}(\Phi)\|_{\mathcal{M}^2, t}^2 = \mathbb{E} \left[ (\mathcal{I}(\Phi)_t)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \Phi_s^2 d\langle M \rangle_s \right] = \|\Phi\|_{\mathcal{L}^2, t}^2, \quad t > 0. \quad (1.3.4)$$

*Demostración.* Sea  $t \in (t_m, t_{m+1}]$ . Notemos que, si  $i < j \leq m$ , se tiene que  $\phi_i, \phi_j$  y  $(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$  son  $\mathcal{F}_{t_j}$ -medibles, entonces  $\mathbb{E}[\phi_i \phi_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})] = 0$  al condicionar por  $\mathcal{F}_{t_j}$  por ser  $M$  una martingala.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}(\Phi)\|_{\mathcal{M}^2,t}^2 &= \mathbb{E} \left[ (\mathcal{I}(\Phi)(t))^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^m \phi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=0}^m \mathbb{E} \left[ \phi_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right] = \sum_{i=0}^m \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \phi_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \right] \\ &= \sum_{i=0}^m \mathbb{E} \left[ \phi_i^2 \mathbb{E} \left[ M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2 \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \right], \end{aligned}$$

notemos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2 \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (M_{t_{i+1}}^2 - \langle M \rangle_{t_{i+1}}) - (M_{t_i}^2 - \langle M \rangle_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] + \mathbb{E} \left[ (\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right], \end{aligned}$$

donde por el hecho de que  $M^2 - \langle M \rangle$  es una martingala (Revuz [21], Teorema IV (1.3)), se concluye que

$$\|\mathcal{I}(\Phi)\|_{\mathcal{M}^2,t}^2 = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^m \phi_i^2 (\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i}) \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \Phi_s^2 d\langle M \rangle_s \right] = \|\Phi\|_{\mathcal{L}^2,t}^2.$$

Por lo tanto,  $\|\mathcal{I}(\Phi)\|_{\mathcal{M}^2} = \|\Phi\|_{\mathcal{L}^2}$ .  $\square$

*Observación.* El lema anterior muestra que  $\mathcal{I}$  es una isometría para los procesos simples, pero estos son densos en  $\mathcal{L}^2$  (cf. Ikeda [12], Lema II (1.1)), entonces, si  $\Phi \in \mathcal{L}^2$ , podemos encontrar una sucesión  $\Phi_n \in \mathcal{L}_0$  tal que  $\|\Phi - \Phi_n\|_{\mathcal{L}^2} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $\|\mathcal{I}(\Phi_n) - \mathcal{I}(\Phi_m)\|_{\mathcal{M}^2} = \|\Phi_n - \Phi_m\|_{\mathcal{L}^2}$ , se tiene que  $\mathcal{I}(\Phi_n)$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{M}^2$ , por completez, esta sucesión converge a un único elemento de  $\mathcal{M}^2$ , denotado por  $\mathcal{I}(\Phi)$ . Por la isometría (1.3.4), vemos que  $\mathcal{I}(\Phi)$  está determinada únicamente por  $\Phi$  pero independiente de la sucesión  $\Phi_n$ .

**Definición 1.3.4.** Sean  $M = (M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^2$ ,  $H = (H_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{L}^2$ . Le llamamos al proceso  $\mathcal{I}(H)$  definido anteriormente la *integral estocástica* (o *integral de Itô*) de  $H$  con respecto a  $M$  y denotado por

$$\mathcal{I}(H)_t(\omega) = \int_0^t H_s(\omega) dM_s(\omega). \quad (1.3.5)$$

*Observación.* Notemos que para cada  $t$  fijo,  $\mathcal{I}(H)_t$  es una variable aleatoria y también llamada una integral estocástica. Claramente, si  $H, K \in \mathcal{L}^2$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\mathcal{I}(\alpha H + \beta K)_t = \alpha \mathcal{I}(H)_t + \beta \mathcal{I}(K)_t, \quad \text{para cada } t \geq 0 \text{ c.s.} \quad (1.3.6)$$

**Definición 1.3.5.** Para  $\Phi \in \mathcal{L}_0$  un proceso simple, en lugar de  $\mathcal{I}(\Phi)$  dado por (1.3.2), definimos

$$\mathcal{J}(\Phi)_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_{i+1}) (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}). \quad (1.3.7)$$

De manera análoga a la integral de Itô, la integral estocástica descrita como el límite de integrales de procesos simples para  $\Phi \in \mathcal{L}^2$  con respecto de  $M$  está denotada por

$$\mathcal{J}(\Phi)_t(\omega) = \int_0^t \Phi_s(\omega) \circ dM_s(\omega); \quad (1.3.8)$$

y se conoce como la *integral de Stratonovich de  $\Phi$  con respecto de  $M$* .

Se nota que la relación entre la integral de Stratonovich y la de Itô es la siguiente:

$$\int_0^t \Phi_s \circ dM = \int_0^t \Phi_s dM_s + \frac{1}{2} [\Phi, M]_t. \quad (1.3.9)$$

**Proposición 1.3.6.** *La integral estocástica  $\mathcal{I}(H)$ ,  $H \in \mathcal{L}^2(M)$  con respecto a  $M \in \mathcal{M}^2$  tiene las siguientes propiedades:*

(i) *Para cada  $0 \leq s < t$ ,*

$$\mathbb{E} \left[ (\mathcal{I}(H)_t - \mathcal{I}(H)_s)^2 \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_s^t H_u^2 d\langle M \rangle_u \mid \mathcal{F}_s \right], \quad c.s. \quad (1.3.10)$$

(ii) *Si  $N = (N_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^2$ , para  $0 \leq s < t$ ,*

$$\mathbb{E} \left[ (\mathcal{I}(H)_t - \mathcal{I}(H)_s)(N_t - N_s) \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_s^t H_u d[M, N]_u \mid \mathcal{F}_s \right]. \quad c.s. \quad (1.3.11)$$

La demostración es fácil probando primero para  $\Phi \in \mathcal{L}_0$  (detalle de la demostración, ver Ikeda & Watanabe [12], pág 49-51) y después tomar límite mediante aproximación. Se nota que (1.3.10) y (1.3.11) también nos dicen que:

$$\langle \mathcal{I}(H) \rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s, \quad c.s. \quad (1.3.12)$$

$$[\mathcal{I}(H), N]_t = \int_0^t H_s d[M, N]_s. \quad c.s. \quad (1.3.13)$$

Ahora extendemos la integral estocástica al caso de las semimartingalas mediante el método de localización pasando primero por martingalas locales:

Sea  $\mathcal{M}_{loc}^2$  el espacio que consta de los procesos estocásticos  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  continuos tales que son  $(\mathcal{F}_t)$ -martingalas localmente cuadrado integrables y  $M_0 = 0$ , *c.s.* (ver Def. (1.1.11)). Consideremos una clase más general de integrandos como sigue:

**Definición 1.3.7.** Sea  $M = (M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}^2$ . Definimos a  $\mathcal{L}_{loc}^2(M)$  como el espacio de los procesos  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  que son  $(\mathcal{F}_t)$ -predecibles tales que existe una sucesión de  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempos de paro  $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$  con  $\tau_k \leq \tau_{k+1}$ ,  $\tau_k \rightarrow \infty$ , *c.s.*, y para cada  $T > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_k \wedge T} H_s^2(\omega) d\langle M \rangle_s \right] < \infty. \quad (1.3.14)$$

Y sea  $\mathcal{L}_{loc}$  el espacio de los procesos  $H = (H_t)_{t \geq 0}$  que son  $(\mathcal{F}_t)$ -predecibles y localmente acotados; es decir, existe una sucesión de  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempos de paro  $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$  tal que  $\tau_k \leq \tau_{k+1}$ ,  $\tau_k \rightarrow \infty$ , *c.s.* y  $H^{\tau_k} = (H_{\tau_k \wedge t})_{t \geq 0}$  es acotado para todo  $k = 1, 2, \dots$ .

Sean  $M \in \mathcal{M}_{loc}^2$  y  $H \in \mathcal{L}_{loc}^2(M)$ . Es claro que podemos elegir una sucesión  $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$  de tiempos de paro tal que  $\tau_n < \tau_{n+1}$ ,  $\tau_n \rightarrow \infty$ , *c.s.*,  $M_n = (M_{\tau_n \wedge t})_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^2$  y satisface la condición (1.3.14). Puesto que  $H_n(t, \omega) = \mathbf{1}_{\{\tau_n(\omega) \geq t\}} H_t(\omega) \in \mathcal{L}^2(M)$ , entonces podemos definir la integral estocástica  $\mathcal{I}_n(H_n)$  respecto de  $M_n$  para cada  $n$ . Por la propiedad de localización, vemos que  $\mathcal{I}_m(H_m)_t = \mathcal{I}_n(H_n)_{\tau_m \wedge t}$  para  $m < n$ , y como  $\tau_n \rightarrow \infty$ , *c.s.*, luego existe un único proceso  $\mathcal{I}(H)_t$  tal que  $\mathcal{I}_n(H_n)_t = \mathcal{I}(H)_{\tau_n \wedge t}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Al proceso  $\mathcal{I}(H)$  le llamamos *la integral estocástica* de  $H \in \mathcal{L}_{loc}^2(M)$  respecto de  $M \in \mathcal{M}_{loc}^2$ , que también se denota por  $\mathcal{I}(H)_t = \int_0^t H_s dM_s$ .

Notemos que  $\mathcal{I}(H) \in \mathcal{M}_{loc}^2$ , y es claro que la Proposición 1.3.6 se extiende a este caso general.

Ahora pasamos al caso de las semimartingalas. Sea  $X$  una semimartingala continua con la descomposición canónica  $X = X_0 + M + A$  donde  $M$  es una martingala local continua ( $M_0 = 0$ , *c.s.*) y  $A$  es un proceso continuo de variación acotada en compactos. Si  $H = (H_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{L}_{loc}$ , entonces se define la *integral estocástica* de  $H$  respecto de  $X$ ,

denotada por  $\int H dX$  como el proceso estocástico dado por

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s.$$

Notemos que  $\int H dX$  es una nueva semimartingala, y se tiene el siguiente resultado que resume las propiedades importantes de la integral estocástica (cf. [6] y [27]).

**Proposición 1.3.8.** *Sea  $X = X_0 + M + A$  una semimartingala continua. Entonces*

1) *Propiedad asociativa para  $H, K \in \mathcal{L}_{loc}$ , i.e.,*

$$\int K \cdot H dX = \int K d\left(\int H dX\right).$$

2) *Si  $H \in \mathcal{L}_{loc}$  y  $T$  es un tiempo de paro, entonces*

$$\int H d(X^{|T}) = \left(\int H dX\right)^{|T}.$$

3) *Si  $H \in \mathcal{L}_{loc}$  tiene la descomposición  $H_t(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\omega) \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$ , entonces*

$$\int_0^t H_s dX_s = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i (X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t}).$$

4) *Si  $(H_n)$  es una sucesión de procesos  $(\mathcal{F}_t)$ -predecibles, dominados por  $K \in \mathcal{L}_{loc}$  (i.e.  $|H_n| \leq K$ ), y converge a  $H \in \mathcal{L}_{loc}$  uniformemente en compactos en probabilidad, entonces  $\int H_n dX$  converge uniformemente a  $\int H dX$  en compactos en probabilidad.*

5) *Si  $H \in \mathcal{L}_{loc}$  es continuo y  $(\pi_n)$  es una sucesión de particiones de  $[0, t]$  tal que la norma tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces*

$$\int_0^t H_s dX_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\pi_n} H_{t_i} (X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t}) \quad \text{en probabilidad.}$$

### 1.3.1. Fórmula de Itô

La fórmula de Itô es el resultado más importante en el análisis estocástico; es una versión estocástica de la regla de la cadena para la integral de Riemann-Stieltjes. Antes de introducirla, tenemos la siguiente fórmula de integración por partes.

**Lema 1.3.9** (Fórmula de integración por partes). *Sean  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  y  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  semimartingalas continuas. Entonces, para cada  $t > 0$ ,*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X, Y]_t. \quad \text{c.s.} \quad (1.3.15)$$

*En particular,  $X^2 = 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X \rangle_t$ .*

*Demostración.* Sea  $\pi_n$  una sucesión de particiones del intervalo  $[0, t]$  tal que la norma tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces por aproximación, notemos que

$$\begin{aligned} X_t Y_t - X_0 Y_0 &= \sum_{\pi_n} (X_{t_i} Y_{t_i} - X_{t_{i-1}} Y_{t_{i-1}}) \\ &= \sum_{\pi_n} \left\{ X_{t_{i-1}} (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) + Y_{t_{i-1}} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) \right\}; \end{aligned}$$

por las definiciones de la integral estocástica y la de covariación, concluimos la fórmula (1.3.15) de integración por partes.  $\square$



**Lema 1.3.10** (Fórmula de Itô). Si  $X^1, X^2, \dots, X^n$  son semimartingalas con valores reales (esto es, si  $X = (X^1, \dots, X^n)$  es una semimartingala con valores en  $\mathbb{R}^n$ ), para cualquier función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ , el proceso  $f(X) = (f(X_t))_{t \geq 0}$  es también una semimartingala real y se tiene la siguiente fórmula conocida con el nombre de la fórmula de Itô:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f(X_s)}{\partial x_i \partial x_j} d[X^i, X^j]_s. \quad (1.3.16)$$

La cual también se escribe en forma diferencial como:

$$df(X_t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t) d[X^i, X^j]_t. \quad (1.3.17)$$

*Demostración.* Sólo haremos el caso de dimensión uno, i.e.,  $n = 1$ , y demostraremos que

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s. \quad (1.3.18)$$

Notemos que:

1. Todas las expresiones en la fórmula tienen sentido: como  $f \in C^2$ , entonces los procesos  $(f'(X_t))_{t \geq 0}$ ,  $(f''(X_t))_{t \geq 0}$  son adaptados y continuos por la izquierda, por lo tanto son predecibles y localmente acotados.

2. Si la fórmula (1.3.18) vale para  $f$ , entonces se satisface para  $xf(x)$ .

En efecto, supongamos que la fórmula (1.3.18) vale para una  $f$ . Queremos obtener la fórmula para  $g(x) = xf(x)$  (donde  $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ ,  $g''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$ ). Aplicamos la fórmula de integración por partes para obtener

$$g(X_t) = X_t f(X_t) = X_0 f(X_0) + \int_0^t X_s df(X_s) + \int_0^t f(X_s) dX_s + [X, f(X)]_t. \quad (1.3.19)$$

Usando la forma de  $f(X_t)$  (de (1.3.18)) para el segundo y el cuarto sumandos, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^t X_s df(X_s) &= \int_0^t X_s d\left(\int_0^s f'(X_u) dX_u\right) + \int_0^t X_s d\left(\frac{1}{2} \int_0^s f''(X_u) d\langle X \rangle_u\right) \\ &= \int_0^t X_s f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t X_s f''(X_s) d\langle X \rangle_s; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X, f(X)]_t &= \left[ X, f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s \right]_t \\ &= \left[ X, \int_0^t f'(X_s) dX_s \right]_t + \left[ X, \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s \right]_t = \int_0^t f'(X_s) d[X, X]_s, \end{aligned}$$

donde las últimas igualdades se obtienen por definición de la covariación y por ser  $\langle X \rangle_t$  un proceso de variación cuadrática de  $X$  que es continuo, el segundo sumando es igual a 0. Sustituyendo la igualdad (1.3.19) obtenemos, agrupando:

$$\begin{aligned} g(X_t) &= X_0 f(X_0) + \int_0^t (f(X_s) + X_s f'(X_s)) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t (2f'(X_s) + X_s f''(X_s)) d\langle X \rangle_s \\ &= g(X_0) + \int_0^t g'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''(X_s) d\langle X \rangle_s. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula de Itô se satisface para  $g(x) = xf(x)$ , y como la fórmula es lineal en  $f$ , tenemos que la fórmula de Itô se satisface para polinomios.

3. Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo compacto y  $T = \inf \{t \geq 0 : X_t \notin I\}$ . Entonces  $T$  es un tiempo de paro y  $X^{|T} = (X_{T \wedge t})_{t \geq 0}$  es una semimartingala que permanece en  $I$ . Por

tanto, podemos suponer que  $X$  es acotado por una constante independiente de  $t$  y  $\omega$ , así supongamos que  $|X_t(\omega)| \leq c$  para  $c$  alguna constante y para todo  $t, \omega$ .

4. Puesto que  $f \in C^2$ , existe una sucesión de polinomios  $f_n$  tales que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $f'_n(x) \rightarrow f'(x)$ , y  $f''_n(x) \rightarrow f''(x)$  convergen uniformemente para  $x \in [-c, c]$ . Entonces, si  $j = 0, 1, 2$ ,  $f_n^{(j)}(X_t(\omega)) \rightarrow f^{(j)}(X_t(\omega))$  uniformemente en  $[-c, c]$  si  $n \rightarrow \infty$ . Por el teorema de convergencia acotada para la integral de Lebesgue-Stieljes (ver [1]) y el teorema de Taylor para la integral estocástica, vemos que la fórmula de Itô se satisface para  $f$ .  $\square$

*Observación.* Cuando  $f$  es una función de clase  $C^3$ , entonces por (1.3.9), la fórmula de Itô (1.3.16) se puede escribir en forma de la integral de Stratonovich por

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i. \quad (1.3.20)$$

*Observación.* Aplicando la fórmula de Itô a una función  $f: (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$  de clase  $C^{1 \times 2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$  y a una semimartingala  $X = (X^1, \dots, X^n)$ , obtenemos la siguiente fórmula (considerando la semimartingala determinista  $X_t^0 \equiv t$ )

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) d[X^i, X^j]_t. \quad (1.3.21)$$

Una aplicación de la fórmula de Itô a los procesos estocásticos es la caracterización de una martingala como un movimiento browniano, también conocida con el nombre de la caracterización de Lévy:

**Teorema 1.3.11** (Teorema de caracterización de Lévy). *Sea  $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n)$  una  $(\mathcal{F}_t)$ -semimartingala de dimensión  $n$  tal que*

$$M_t^i = X_t^i - X_0^i \in \mathcal{M}_{loc}^2, \quad y \quad [M^i, M^j]_t = \delta_{ij} t, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.22)$$

*Entonces  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  es un  $(\mathcal{F}_t)$ -movimiento browniano de dimensión  $n$ .*

*Demostración.* Por la Definición 1.2.3, es suficiente probar que para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbb{E}[e^{i\langle \xi, X_t - X_s \rangle} \mid \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}(t-s)}, \quad 0 \leq s < t. \quad c.s. \quad (1.3.23)$$

Sea  $f(x) = e^{i\langle \xi, x \rangle}$  y aplicando la fórmula de Itô, obtenemos

$$e^{i\langle \xi, X_t \rangle} - e^{i\langle \xi, X_s \rangle} = \sum_{k=1}^n \int_s^t i \xi_k e^{i\langle \xi, X_u \rangle} dM_u^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_s^t -\xi_k^2 e^{i\langle \xi, X_u \rangle} du. \quad (1.3.24)$$

Es claro que (1.3.22) implica  $M^k \in \mathcal{M}^2$  y por tanto

$$\mathbb{E} \left[ \int_s^t e^{i\langle \xi, X_u \rangle} dM_u^k \mid \mathcal{F}_s \right] = 0. \quad c.s.$$

Entonces, para cualquier  $A \in \mathcal{F}_s$ , multiplicando ambos lados de la ecuación (1.3.24) por  $e^{-i\langle \xi, X_s \rangle} \mathbf{1}_A$  y tomar la esperanza, se obtiene

$$\mathbb{E} \left[ e^{i\langle \xi, X_t - X_s \rangle} \mathbf{1}_A \right] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = -\frac{|\xi|^2}{2} \int_s^t \mathbb{E} \left[ e^{i\langle \xi, X_u - X_s \rangle} \mathbf{1}_A \right] du.$$

De esta ecuación integral vemos que  $\mathbb{E} \left[ e^{i\langle \xi, X_t - X_s \rangle} \mathbf{1}_A \right]$  es solución de la ecuación diferencial

$$g'(t) = -\frac{|\xi|^2}{2} g(t), \quad g(s) = \mathbb{P}(A), \quad \forall t \geq s.$$

En consecuencia, obtenemos

$$\mathbb{E} \left[ e^{i\langle \xi, X_t - X_s \rangle} : A \right] = \mathbb{P}(A) e^{-\frac{|\xi|^2}{2}(t-s)}. \quad \square$$

## 1.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas

En esta sección nos restringiremos al teorema de existencia y unicidad de una solución de una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô que está definida como sigue.

**Definición 1.4.1.** Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad completo junto con una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ,  $\sigma = (\sigma_{ij}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}_{d \times l}$  ( $\mathbb{M}_{d \times l}$  el espacio matricial de dimensión  $d \times l$ ) donde cada función  $\sigma_{ij}(x)$  ( $i \leq d, j \leq l$ ) es Borel medible, y  $Z = (Z^1, \dots, Z^l)^\dagger$  una  $(\mathcal{F}_t)$ -semimartingala continua con valores en  $\mathbb{R}^l$ . Decimos que un proceso  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado de dimensión  $d$ ,  $X = (X^1, \dots, X^d)^\dagger$  es la solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = \sigma(X_t) dZ_t \quad (1.4.1)$$

con valor inicial  $X_0 \in \mathcal{F}_0$ , si para todo  $t > 0$ , siempre se satisface que:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dZ_s, \quad (1.4.2)$$

donde  $X_0 \in \mathcal{F}_0$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_0$ -medible con valor en  $\mathbb{R}^d$ . A esta ecuación también le denotaremos por  $EDE(\sigma, Z, X_0)$ .

*Observación.* i). Las soluciones  $X$  y  $X'$  de una ecuación diferencial estocástica se dicen *indistinguibles* cuando sus trayectorias son idénticas, *c.s.*, es decir,

$$\mathbb{P}(\{\omega : X_t(\omega) = X'_t(\omega), \forall t \geq 0\}) = 1.$$

ii). Un caso especial donde  $Z_t = (B_t, t)$  con  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano con valor en  $\mathbb{R}^{l-1}$  y  $\sigma = (\sigma_1, b)$  tal que  $\sigma_1 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}_{d \times (l-1)}$  y  $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , entonces se obtiene una ecuación diferencial estocástica de forma más familiar:

$$dX_t = \sigma_1(X_t) dB_t + b(X_t) dt. \quad (1.4.3)$$

iii). Los coeficientes  $b(x)$  y  $\sigma_1(x)$  de la ecuación anterior se conocen como los coeficientes de *tendencia* o *deriva* (*drift* en inglés) y de *difusión* respectivamente. En general, el coeficiente matricial  $\sigma$  también se conoce como coeficiente de *difusión*.

**Definición 1.4.2.** El coeficiente matricial de difusión  $\sigma = (\sigma_{ij}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}_{d \times l}$  es *localmente Lipschitz* si para cada  $r > 0$ , existe una constante  $C(r)$  dependiendo en  $r$  tal que para cada  $i \leq d, j \leq l$ ,

$$|\sigma_{ij}(x) - \sigma_{ij}(y)| \leq C(r) |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathcal{B}(r), \quad (1.4.4)$$

donde  $\mathcal{B}(r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq r\}$ . Decimos que  $\sigma$  es *globalmente Lipschitz* si  $C(r) \equiv C$ , es una constante independiente de  $r$ .

De manera análoga al caso determinista, existen teoremas básicos de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas que establecen condiciones de regularidad para el coeficiente  $\sigma$ ; uno de los resultados es el siguiente.

**Teorema 1.4.3** (Existencia y unicidad). *Si el coeficiente matricial de difusión  $\sigma$  es globalmente Lipschitz, y el valor inicial  $X_0$  es cuadrado integrable, entonces la  $EDE(\sigma, Z, X_0)$  (1.4.2) tiene solución única.*

La demostración es semejante al caso determinista utilizando el método de iteraciones de Picard; se define la sucesión de procesos

$$X_t^{(0)} = X_0, \quad X_t^{(n+1)} = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s^{(n)}) dZ_s. \quad (1.4.5)$$

Es claro que si  $X$  es un proceso continuo y  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado, entonces  $\sigma(X) = (\sigma(X_t))_{t \geq 0}$  también lo es, luego  $\sigma(X) \in \mathcal{L}_{loc}$ , por lo tanto tienen sentido las integrales estocásticas.

*Observación.* Sean  $Z = M + A$  la descomposición canónica de la semimartingala  $Z$  en una martingala local  $M \in \mathcal{M}_{loc}^2$  y un proceso  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado,  $A$  de variación acotada. Si definimos

$$\varphi_t = \sum_{j=1}^l \langle M^j \rangle_t + \sum_{j=1}^l (|A^j|_t^3 + |A^j|_t) + t, \quad (1.4.6)$$

donde  $|A^j|_t$  es la variación total del componente  $A^j$  en el compacto  $[0, t]$ .

Notemos que  $\varphi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$  es un proceso  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado y estrictamente creciente, entonces tiene una inversa continua y estrictamente creciente  $\eta = (\eta_t)_{t \geq 0}$  dada por:

$$\eta_t \doteq \inf\{s : \varphi_s > t\}.$$

(a) Como  $\{\eta_t \leq s\} = \{\varphi_s \geq t\} \in \mathcal{F}_s$ , cada  $\eta_t$  es un  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempo de paro.

(b) Para cualquier proceso  $G$  continuo y  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado con valores en  $\mathbb{M}_{d \times l}$ , y cada  $T > 0$  fijo,  $\eta_T$  un  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempo de paro de la definición anterior, existe una constante  $K$  que depende de  $d$  y  $l$  tal que

$$\mathbb{E} \left[ \max_{0 \leq t \leq \eta_T} \left| \int_0^t G_s dZ_s \right|^2 \right] \leq K \mathbb{E} \left[ \int_0^{\eta_T} |G_s|^2 d\varphi_s \right] \leq K \mathbb{E} \left[ \int_0^T \max_{0 \leq u \leq \eta_u} |G_u|^2 du \right]. \quad (1.4.7)$$

Con este cambio de tiempo de paro, podemos probar que para cada tiempo  $T > 0$  fijo, la sucesión de procesos (1.4.5) constituye una sucesión de Cauchy en el espacio de funciones continuas  $C_{[0, \eta_T]}$  con probabilidad uno. Por lo cual, existe un proceso continuo  $X$ , tal que con probabilidad uno,  $X_t^{(n)}$  converge uniformemente a  $X_t$  en  $\mathcal{L}_{[0, \eta_T]}^2$ . Luego tomando el proceso límite en la ecuación que define las iteraciones, se verifica la convergencia uniforme en  $[0, \eta_T]$ , finalmente haciendo  $T \rightarrow \infty$ , se demuestra que  $X$  es efectivamente solución de la ecuación estocástica. Los detalles del teorema pueden encontrarse en Hsu ([11], Teorema 1.1.3).

Notemos que cuando el coeficiente  $\sigma$  es globalmente Lipschitz, la solución  $X$  está definida globalmente, es decir,  $X$  está definida para todo tiempo. Cuando la existencia de la solución  $X$  se tiene solamente hasta un tiempo finito  $\tau$ , tenemos que incorporar la posibilidad de que una solución explote en tiempo finito.

**Definición 1.4.4.** Sean  $M$  un espacio métrico localmente compacto y  $\hat{M} = M \cup \{\infty\}$  su compactificación por un punto. Denotamos por  $\hat{W}(M)$  el espacio de trayectorias en  $M$  definido por

$$\hat{W}(M) := \{w; w: [0, \infty) \ni t \mapsto w_t \in \hat{M} \text{ es una función continua tal que } w_0 \in M \text{ y, si } w_t = \infty, \text{ entonces } w_{t'} = \infty \text{ para todo } t' \geq t\};$$

y denotamos por  $\mathcal{B}(\hat{W}(M))$  la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos cilíndricos de Borel. Para cada  $w \in \hat{W}(M)$ , decimos que  $w$  es una trayectoria con tiempo de explosión  $e = e(w) > 0$ , donde el tiempo de explosión de  $w$  está definido por

$$e(w) = \inf\{t > 0 : w(t) = \infty\}.$$

**Definición 1.4.5.** Sea  $\xi$  un  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempo de paro, un proceso continuo  $X = (X_t)_{t < \xi}$  es una solución local de la EDE( $\sigma, Z, X_0$ ) (1.4.2) hasta  $\xi$ , si existe una sucesión de tiempos de paro  $\{\tau_n\}$  creciente con  $\tau_n \uparrow \xi$  tal que para cada  $n$ , el proceso parado  $X|_{\tau_n} = (X_{\tau_n \wedge t})_{t \geq 0}$  es una semimartingala y satisface:

$$X_{\tau_n \wedge t} = X_0 + \int_0^{\tau_n \wedge t} \sigma(X_s) dZ_s, \quad t \geq 0. \quad (1.4.8)$$

Además, si  $e(X) = \xi$  es tiempo de explosión de  $X$ , se tiene que  $(X_t)_{t < e(X)}$  no está acotada casi seguramente en el intervalo  $(e - \epsilon, e)$ ,  $\epsilon > 0$ , i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow e^-} |X_t| = \infty. \quad c.s.$$

Notemos que una solución local es también una solución global si y sólo si  $\tau_n \uparrow \infty$ , *c.s.* (i.e.,  $\mathbb{P}(\xi = \infty) = 1$ ). Ahora tenemos el siguiente resultado de la existencia y unicidad de solución  $X$  a la EDE( $\sigma, Z, X_0$ ) hasta su tiempo de explosión  $e(X)$ .

**Teorema 1.4.6.** *Supongamos que:*

(i) *El coeficiente matricial  $\sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{M}_{d \times l}$  es localmente Lipschitz;*

(ii)  *$Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -semimartingala con valores en  $\mathbb{R}^l$ ;*

(iii)  *$X_0$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_0$ -medible con valores en  $\mathbb{R}^d$ .*

*Entonces existe una única variable aleatoria  $X$  con valores en  $\hat{W}(\mathbb{R}^d)$  tal que es una solución de la EDE (1.4.2) hasta su tiempo de explosión  $e(X)$ .*

*Más aún, si el coeficiente  $\sigma(x)$  satisface la condición de crecimiento en  $x$ :*

$$|\sigma(x)| \leq K(1 + |x|), \quad (1.4.9)$$

*para alguna constante  $K > 0$ , entonces la solución de la EDE no explota.*

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $X_0^{(n)} = \left(1 \wedge \frac{n}{|X_0|}\right) X_0$ , y definimos  $\sigma_n(x) = \sigma\left(\left(1 \wedge \frac{n}{|x|}\right) x\right)$ . Entonces  $\sigma_n$  es globalmente Lipschitz, por el teorema de existencia y unicidad, existe una única  $(\mathcal{F}_t)$ -semimartingala  $X^{(n)}$  solución de la EDE( $\sigma_n, Z, X_0^{(n)}$ ):

$$X_t^{(n)} = X_0^{(n)} + \int_0^t \sigma_n(X_s^{(n)}) dZ_s. \quad (1.4.10)$$

Ahora definimos:

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0 : |X_t^{(n)}| \geq n \right\}, \quad \tau'_n = \inf \left\{ t \geq 0 : |X_t^{(n+1)}| \geq n \right\},$$

es claro que  $\tau_n$  y  $\tau'_n$  son  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempos de paro; sea  $\xi_n = \tau_n \wedge \tau'_n$ , el primer instante para que  $|X_t^{(n)}| = n$  ó  $|X_t^{(n+1)}| = n$ , también es un tiempo de paro.

Como  $X_0^{(n+1)} = X_0^{(n)}$  en el conjunto  $\Omega_0^n = \{\omega : |X_0| \leq n\}$ , y  $\sigma_n(x) = \sigma_{n+1}(x)$  para  $|x| \leq n$ . Se tiene que las semimartingalas  $X^{(n), \xi_n}$ ,  $X^{(n+1), \xi_n}$  ( $X^{(n)}$  y  $X^{(n+1)}$  parados en  $\xi_n$  respectivamente) son soluciones de la EDE( $\sigma_n, Z|_{\xi_n}, X_0^{(n)}$ ) en  $\Omega_0^n$ . Por la unicidad de solución del Teorema 1.4.3, tenemos que

$$X_{t \wedge \xi_n}^{(n+1)} = X_{t \wedge \xi_n}^{(n)} \quad \text{en } \Omega_0^n.$$

Por otro lado,  $X^{(n)}$  y  $X^{(n+1)}$  tienen trayectorias continuas, entonces en  $\Omega_0^n$  se debe tener que  $|X_{\xi_n}^{(n)}| = n = |X_{\xi_n}^{(n+1)}|$ . Por tanto necesariamente se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{1}_{\Omega_0^n}(\tau_n - \tau'_n) = 0\right) = 1.$$

Es decir:

$$X_{t \wedge \tau_n}^{(n+1)} = X_{t \wedge \tau_n}^{(n)} \quad \text{en } \Omega_0^n.$$

Entonces  $\tau_n$  es el primer instante en que el proceso común llega a la esfera  $\partial\mathcal{B}(n) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = n\}$  en  $\Omega_0^n$ , y se tiene que  $\tau_n \leq \tau_{n+1}$ .

Sea  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ ; definimos una semimartingala  $X$  hasta el tiempo  $e$  por

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\left\{ \begin{array}{l} n-1 < |X_0| \leq n \\ \tau_{n-1} < t \leq \tau_n \end{array} \right\}} X_t^{(n)}. \quad (0 \leq t < e)$$

Notemos que  $X_0 = X_0^{(n)}$  en  $\Omega_0^n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Omega_0^n) = 1$ ; como  $X_{t \wedge \tau_n} = X_t^{(n)}$ , y  $\sigma_n(X_s^{(n)}) = \sigma(X_s)$  para  $s \leq \tau_n$ , por (1.4.10), tenemos que

$$X_{\tau_n \wedge t} = X_0 + \int_0^{\tau_n \wedge t} \sigma(X_s) dZ_s, \quad c.s. \quad (1.4.11)$$

Es decir,  $X$  es una solución local de la EDE( $\sigma, Z, X_0$ ) hasta el tiempo  $e$ .

Se puede demostrar que  $e$  es el tiempo de explosión de  $X$  de manera que para algún  $R$  entero positivo, existe un tiempo  $t_R < e$  tal que  $|X_t| \geq R$  para todo  $t \in [t_R, e)$ . Es decir, si  $e < \infty$ , después de algún momento  $t_R$ ,  $X$  nunca regresa a la bola  $\mathcal{B}(R)$  ni se queda siempre en la bola  $\mathcal{B}(R+1)$ , ya que la segunda posibilidad contradice el hecho de que  $|X_{\tau_n}| = n$  y  $\tau_n \rightarrow e$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Los detalles de esta demostración pueden encontrarse en Hsu [11], Teorema 1.1.8.

Para probar la unicidad, podemos suponer que  $Y$  es otra solución local hasta su tiempo de explosión, y sean  $\tau_n, \tau'_n$  y  $\xi_n$  definidos como anterior con  $X$  y  $Y$  en lugar de  $X^{(n)}$  y  $X^{(n+1)}$  respectivamente, de manera análoga, vemos que  $X_t = Y_t$  para  $0 \leq t < \xi_n$ , además,  $e(X) = e(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ . Por lo tanto,  $X_t = Y_t$  para todo  $t \in [0, e(X))$ .

Finalmente, vemos que  $\mathbb{P}(e(X) = \infty) = 1$  si además el coeficiente  $\sigma$  satisface la condición de crecimiento en  $x$ . Retomamos  $X^{(n)}$  y  $\tau_n$  definidos anteriormente.

Como  $\mathbb{P}(e(X) \leq T) \leq \mathbb{P}(\tau_n \leq T)$ , afirmamos que: para todo  $T > 0$ , se tiene que

$$\mathbb{P}(\tau_n \leq T) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

En efecto: para cada  $n$ , sea

$$f_n(t) = \mathbb{E} \left[ \frac{(X_t^{(n)})^2}{1 + X_0^2} \right]. \quad \left( \mathbb{E} \left[ (X_t^{(n)})^2 < \infty \right] \right)$$

Por (1.4.10) y (1.4.7), tenemos

$$f_n(t) \leq 2 + 2K \mathbb{E} \left[ \int_0^t \frac{(X_u^{(n)})^2 + 1}{1 + X_0^2} du \right] \leq K_1 + K_2 \int_0^t f_n(u) du,$$

por el lema de Gronwall (cf. Revuz & Yor [21], pág. 543), se obtiene  $f_n(t) \leq K_1 e^{K_2 t}$ . Por consiguiente,  $f_n(t)$  es uniformemente acotada en  $0 \leq t \leq T$ :  $f_n(t) \leq K_1 e^{K_2 T} \equiv K'$ .

Además, por la desigualdad de Doob (1.1.6), tenemos que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{(X_t^{(n)})^2}{1 + X_0^2} \right] \leq K'_1 + K'_2 \int_0^T f_n(u) du \leq C(\text{constante}).$$

Entonces por la desigualdad de Chebyshev, tenemos que para  $\delta \approx 0$  positiva,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_n \leq T) &= \mathbb{P} \left( \sup_{[0, T]} |X_t^{(n)}| \geq n \right) = \mathbb{P} \left( \frac{\sup_{[0, T]} |X_t^{(n)}|^2}{1 + X_0^2} \geq \frac{n^2}{1 + X_0^2} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \frac{1}{1 + X_0^2} \leq \delta \right) + \mathbb{P} \left( \frac{\sup_{[0, T]} |X_t^{(n)}|^2}{1 + X_0^2} \geq n^2 \delta \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \frac{1}{1 + X_0^2} \leq \delta \right) + \frac{C}{n^2 \delta}. \end{aligned}$$

Por ende,  $\mathbb{P}(\tau_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . □

**Ejemplo 1.4.7** (Martingala exponencial). Supongamos que  $N$  es una semimartingala en  $\mathbb{R}^1$  con  $N_0 = 0$ . Consideremos la ecuación EDE dada por

$$dX_t = X_t dN_t, \quad X_0 = 1.$$

Si  $N_s$  es de variación finita, entonces la ecuación es una ecuación diferencial ordinaria cuya solución es  $X_t = \exp(N_t)$  y  $\log X_t = N_t$ . Ahora sea  $f(x) = \log x$ , entonces  $f'(x) = \frac{1}{x}$  y  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Tenemos que  $d\langle X \rangle_t = X_t^2 d\langle N \rangle_t$  por la ecuación dada.

Entonces por la fórmula de Itô, tenemos que

$$d(\log X_t) = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2} d\langle X \rangle_t = dN_t - \frac{1}{2} d\langle N \rangle_t.$$

Por tanto

$$\log X_t - \log X_0 = N_t - \frac{1}{2} \langle N \rangle_t - \left( N_0 - \frac{1}{2} \langle N \rangle_0 \right).$$

De donde por la condición inicial  $X_0 = 1$  y  $N_0 = 0$ , concluimos que

$$X_t = \exp \left\{ N_t - \frac{1}{2} \langle N \rangle_t \right\},$$

es la solución de la EDE dada.

Si  $N$  es una martingala local,  $X$  se llama una *martingala exponencial*. △

**Ejemplo 1.4.8** (Proceso de Ornstein-Uhlenbeck). Sea  $B$  un movimiento browniano con valores reales y consideremos la ecuación EDE en  $\mathbb{R}^1$  dada por

$$dX_t = \sigma dB_t - \alpha X_t dt, \quad (\alpha, \sigma \text{ son constantes})$$

con valor inicial  $X_0$ . Para resolverla, notemos que si  $\alpha = 0$ , entonces la solución es

$$X_t = X_0 + \sigma \int_0^t dB_s = X_0 + \sigma B_t.$$

Si  $\sigma = 0$ , entonces tenemos una ecuación diferencial ordinaria cuya solución es  $X_t = e^{-\alpha t} X_0$ . Ahora sea  $Y_t = f(t, X_t) = e^{\alpha t} X_t$ . Por la fórmula de Itô (1.3.21) aplicada a  $Y_t$ , tenemos que

$$dY_t = \alpha e^{\alpha t} X_t dt + e^{\alpha t} dX_t = \alpha e^{\alpha t} X_t dt + e^{\alpha t} (\sigma dB_t - \alpha X_t dt) = \sigma e^{\alpha t} dB_t.$$

Es decir,  $Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB_s$ . Por lo tanto

$$X_t = e^{-\alpha t} X_0 + \int_0^t \sigma e^{-\alpha(t-s)} dB_s.$$

Este proceso solución  $X$  se llama un *proceso de Ornstein-Uhlenbeck*. △

## 1.5. Procesos de difusión

Los procesos de difusión constituyen una clase de procesos estocásticos caracterizados por dos propiedades: la propiedad de Markov fuerte y la continuidad de trayectorias. En esta sección discutiremos los procesos de difusión generados por operadores diferenciales de segundo orden en  $\mathbb{R}^d$ , los cuales pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales estocásticas. En particular, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck del ejemplo anterior es un proceso de difusión. Para una exposición completa de este tema, se puede consultar Ikeda y Watanabe [12] y Stroock y Varadhan [26].

Sea  $\hat{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  la compactificación por un punto de  $\mathbb{R}^d$ ; definimos una  $\sigma$ -álgebra en este conjunto haciendo

$$\hat{\mathcal{G}} = \{G : G \subset \hat{\mathbb{R}}^d, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ ó } \hat{\mathbb{R}}^d \setminus G \text{ es compacto en } \mathbb{R}^d\}; \quad \text{y} \quad \mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}^d) = \sigma(\hat{\mathcal{G}}).$$

Consideremos el espacio de trayectorias en  $\mathbb{R}^d$  como en la Definición 1.4.4, denotado por  $\hat{W}^d$  y sea  $\mathcal{B}_t(\hat{W}^d)$  la  $\sigma$ -álgebra generada por los subconjuntos cilíndricos de Borel hasta el tiempo  $t$ .

**Definición 1.5.1.** Una familia de medidas de probabilidad  $\{\mathbb{P}_x : x \in \hat{\mathbb{R}}^d\}$  definida en el espacio medible  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d))$  se denomina *un sistema markoviano* si se satisfacen:

(M<sub>1</sub>)  $\mathbb{P}_x(\{w : w_0 = x\}) = 1$  para cualquier  $x \in \hat{\mathbb{R}}^d$ ;

(M<sub>2</sub>)  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{P}_x(A)$  es Borel medible para todo  $A \in \mathcal{B}(\hat{W}^d)$ ;

(M<sub>3</sub>) Para cualquier  $x \in \hat{\mathbb{R}}^d$ ,  $0 \leq s < t$ ,  $A \in \mathcal{B}_s(\hat{W}^d)$  y  $\Gamma \in \mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}^d)$ , se tiene que

$$\mathbb{P}_x(A \cap \{w_t \in \Gamma\}) = \int_A \mathbb{P}_{w'_s}(\{w_{t-s} \in \Gamma\}) \mathbb{P}_x(dw'), \quad (\mathbb{P}_x\text{-c.s.}) \quad (1.5.1)$$

donde  $\mathbb{P}_{w'_s}$  es la distribución de probabilidad condicional de  $\mathbb{P}_x$  dado  $\mathcal{B}_s(\hat{W}^d)$ .

Para los detalles de la exposición sobre la probabilidad condicional, consultar Stroock y Varadhan [26], pág. 12-17.

*Observación.* Si  $\{\mathbb{P}_x : x \in \hat{\mathbb{R}}^d\}$  es un sistema markoviano, entonces éste está determinado únicamente por

$$\left\{ \mathbb{P}(t, x, \Gamma) : \mathbb{P}(t, x, \Gamma) = \mathbb{P}_x(\{w : w_t \in \Gamma\}), t \geq 0, x \in \hat{\mathbb{R}}^d, \Gamma \in \mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}^d) \right\}.$$

La familia  $\{\mathbb{P}(t, x, \Gamma)\}$  se denomina la *probabilidad de transición* de un sistema markoviano. Por la aplicación sucesiva de la propiedad (M<sub>3</sub>), tenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_x(\{w_{t_1} \in A_1, w_{t_2} \in A_2, \dots, w_{t_k} \in A_k\}) \\ &= \int_{A_1} \mathbb{P}(t_1, x, dx_1) \int_{A_2} \mathbb{P}(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \cdots \int_{A_k} \mathbb{P}(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, dx_k), \end{aligned}$$

para  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ ,  $A_i \in \mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}^d)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Dado un sistema markoviano  $\{\mathbb{P}_x : x \in \hat{\mathbb{R}}^d\}$ . Para cada  $t \geq 0$ , definimos la filtración  $\mathcal{F}_t(\hat{W}^d) = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcap_{x \in \hat{\mathbb{R}}^d} \overline{\mathcal{B}_{t+\epsilon}(\hat{W}^d)}^{\mathbb{P}_x}$ , entonces se observa que  $\mathcal{F}_t(\hat{W}^d)$  es creciente y continua por la derecha; y sea  $\mathcal{F}_\infty(\hat{W}^d) = \bigcup_{t > 0} \mathcal{F}_t(\hat{W}^d)$ .

**Definición 1.5.2.** Una familia de medidas de probabilidad  $\{\mathbb{P}_x : x \in \hat{\mathbb{R}}^d\}$  definida en el espacio medible  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d))$  se denomina *un sistema markoviano fuerte* si se cumplen (M<sub>1</sub>) y (M<sub>2</sub>) de la Definición 1.5.1 y además:

(M'<sub>3</sub>) Para cualquier  $x \in \hat{\mathbb{R}}^d$ ,  $t \geq 0$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}(\hat{\mathbb{R}}^d)$ , un  $(\mathcal{F}_t(\hat{W}^d))$ -tiempo de paro  $\tau = \tau(w)$  y  $A \in \mathcal{F}_\tau(\hat{W}^d)$ , se tiene que

$$\mathbb{P}_x(A \cap \{w_{t+\tau} \in \Gamma\}) = \int_A \mathbb{P}_{w'_\tau(w')}(\{w_t \in \Gamma\}) \mathbb{P}_x(dw'), \quad (\mathbb{P}_x\text{-c.s.}) \quad (1.5.2)$$

**Definición 1.5.3.** Una familia de medidas de probabilidad  $\{\mathbb{P}_x\}_{x \in \hat{\mathbb{R}}^d}$  definida en  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d))$  se llama un *sistema de medidas de difusión* (o simplemente *difusión*) si es un sistema markoviano fuerte.

**Definición 1.5.4.** Un proceso estocástico  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  con valores en  $\mathbb{R}^d$  se llama un *proceso de difusión* si existe un sistema de medidas de difusión  $\{\mathbb{P}_x\}_{x \in \hat{\mathbb{R}}^d}$  tal que para casi todo  $\omega \in \Omega$ ,  $\{t \mapsto X_t(\omega)\} \in \hat{W}^d$  y la distribución de probabilidad de  $X$  en  $\hat{W}^d$ ,  $\mathbb{P} \circ X^{-1}$  coincide con  $\mathbb{P}_\mu(\cdot) = \int_{\hat{\mathbb{R}}^d} \mathbb{P}_x(\cdot) \mu(dx)$ , donde  $\mu$  es una medida boreliana en  $\hat{\mathbb{R}}^d$  definida por  $\mu(dx) = \mathbb{P}(\{\omega : X_0(\omega) \in dx\})$ , y se llama la *distribución inicial de  $X$* .

*Observación.* Sean  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de difusión y  $e(X) = \inf\{t : X_t = \infty\}$ , es decir,  $e$  el tiempo de explosión del proceso  $X$ . Si  $\mathbb{P}_x(e = \infty) = 1$  para todo  $x$ , decimos que el proceso  $X$  es *conservativo*. Se nota que en este caso, podemos ignorar el punto  $\infty$  ya que casi todas las trayectorias quedan en  $\mathbb{R}^d$ .



**Definición 1.5.5.** Sean  $C(\hat{\mathbb{R}}^d)$  el espacio de Banach de todas las funciones continuas y acotadas definidas en  $\hat{\mathbb{R}}^d$  con valores reales ó complejos, y  $(L, \mathcal{D}(L))$  un operador lineal de  $C(\hat{\mathbb{R}}^d)$  en  $C(\hat{\mathbb{R}}^d)$ . Sea  $\{\mathbb{P}_x\}_{x \in \hat{\mathbb{R}}^d}$  una familia de medidas de probabilidad definida en  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d))$  tal que  $x \mapsto \mathbb{P}_x(A)$  es Borel medible ( $A \in \hat{W}^d$ ). Entonces  $\{\mathbb{P}_x\}$  se llama un *sistema de medidas de difusión generado por el operador  $L$*  (o simplemente  *$L$ -difusión*) si es un sistema markoviano fuerte que satisface

- (i)  $\mathbb{P}_x(\{w : w_0 = x\}) = 1$ , para todo  $x \in \hat{\mathbb{R}}^d$ ;
- (ii) para todo  $f \in \mathcal{D}(L)$  y  $x \in \hat{\mathbb{R}}^d$ ,

$$M^{(f)}(w)_t = f(w_t) - f(w_0) - \int_0^t (Lf)(w_s) ds, \quad (1.5.3)$$

es una  $(\mathbb{P}_x, \mathcal{B}_t(\hat{W}^d))$ -martingala.

**Teorema 1.5.6.** Sea  $\{\mathbb{P}_x\}_{x \in \hat{\mathbb{R}}^d}$  un sistema de medidas de probabilidad en  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d))$  tal que satisface las condiciones (i) y (ii) de la definición anterior. Además supongamos que  $\{\mathbb{P}_x\}$  es única, i.e.,

- (iii) si  $\{\mathbb{P}'_x\}$  es otro sistema de medidas de probabilidad en  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d))$  que satisface las condiciones (i) y (ii) de la definición anterior, entonces  $\mathbb{P}'_x = \mathbb{P}_x$ , para todo  $x$ .

Entonces  $\{\mathbb{P}_x\}$  es un sistema de medidas de difusión generado por el operador  $L$ .

*Demostración.* Sólo tenemos que demostrar que  $\{\mathbb{P}_x\}$  es un sistema markoviano fuerte. Es decir, que se satisface  $(M'_3)$ . Por (1.5.3), se tiene que  $M^{(f)}(w)_t$  es continua por la derecha, por tanto,  $M^{(f)}(w)_t$  es también una  $(\mathbb{P}_x, \mathcal{F}_t(\hat{W}^d))$ -martingala. Sea  $\tau$  un  $(\mathcal{F}_t(\hat{W}^d))$ -tiempo de paro acotado, y denotamos  $w_{\tau+*} = (w_{\tau+t})_{t \geq 0}$  como la trayectoria  $w$  desplazada por el tiempo  $\tau$ , entonces  $M^{(f)}(w_{\tau+*})_t = M^{(f)}(w)_{\tau+t} - M^{(f)}(w)_\tau$  es una  $(\mathbb{P}_x, \mathcal{F}_{\tau+t}(\hat{W}^d))$ -martingala.

En particular, para cada  $0 \leq s < t$ ,  $A \in \mathcal{F}_\tau(\hat{W}^d)$  y  $B \in \mathcal{F}_{\tau+s}(\hat{W}^d)$ , tenemos que

$$\mathbb{E}_x [M^{(f)}(w_{\tau+*})_t - M^{(f)}(w_{\tau+*})_s : A \cap B] = 0,$$

donde  $\mathbb{E}_x$  es la esperanza con respecto a la probabilidad  $\mathbb{P}_x$ . Y esto implica que

$$\mathbb{E}_x [M^{(f)}(w_{\tau+*})_t - M^{(f)}(w_{\tau+*})_s : B \mid \mathcal{F}_\tau(\hat{W}^d)] = 0, \quad (\mathbb{P}_x\text{-c.s.}).$$

Por lo tanto, si  $\tilde{\mathbb{P}}_x^w(C) = \mathbb{P}_x[\{w_{\tau+*} \in C\} \mid \mathcal{F}_\tau(\hat{W}^d)]$  con  $C \in \mathcal{B}(\hat{W}^d)$  es una probabilidad condicional dado  $\mathcal{F}_\tau(\hat{W}^d)$ , entonces  $M^{(f)}(w)_t$  es una  $(\tilde{\mathbb{P}}_x^w, \mathcal{B}_t(\hat{W}^d))$ -martingala y  $\tilde{\mathbb{P}}_x^w(\{w' : w'_0 = w_{\tau(w)}\}) = 1$ . Por la hipótesis (iii), tenemos que  $\tilde{\mathbb{P}}^w = \mathbb{P}_{w_{\tau(w)}}$ , por consiguiente, obtenemos (1.5.2).  $\square$

*Observación.* Dado un operador  $L$ , la relación entre las medidas de  $L$ -difusión y los procesos de  $L$ -difusión es la siguiente: si  $X$  es una  $L$ -difusión, entonces su distribución de probabilidad  $\mu^X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$  en  $\hat{W}^d$  es una medida de  $L$ -difusión; por otro lado, si  $\mu$  es una medida de  $L$ -difusión definida en  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d))$ , entonces el proceso definido por  $X_t(w) = \omega_t$  en el espacio  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d), \mu)$  es un proceso de  $L$ -difusión.

Ahora consideremos un operador diferencial de segundo orden,  $L$  en  $\mathbb{R}^d$  de la forma:

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad (1.5.4)$$

donde  $a_{ij}(x): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  y  $b_i(x): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables, y  $(a_{ij}(x)) \in \mathcal{S}_d^+$  ( $\mathcal{S}_d^+$  denota el espacio de las matrices simétricas y definidas positivas de dimensión  $d \times d$ ). De la misma manera que antes, definimos el proceso de difusión generado por el operador

$L$  ( $L$ -difusión), donde el dominio de la definición de  $L$  es  $C_K^2(\hat{\mathbb{R}}^d)$ : el espacio de todas las funciones dos veces continuamente diferenciables con soporte compacto en  $\mathbb{R}^d$ .

*Observación.* Como  $a$  es una matriz simétrica y definida positiva, entonces existe la única raíz cuadrada de  $a$ , sea  $\sigma = a^{1/2}$ ; es una matriz simétrica y definida positiva. Más aún, si  $a: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{S}_d^+$  es dos veces continuamente diferenciable, entonces su raíz cuadrada  $\sigma = a^{1/2}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{S}_d^+$  es localmente Lipschitz. (ver Hsu [11], Lema 1.3.3)

Ahora verificamos la existencia y unicidad de tal  $L$ -difusión resolviendo una ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds \quad (1.5.5)$$

donde  $b = (b_i)$  y  $\sigma = a^{1/2}$  son funciones dos veces continuamente diferenciables en  $\mathbb{R}^d$ ,  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano con valores en  $\mathbb{R}^d$  y  $X_0$  es una variable aleatoria con valores en  $\mathbb{R}^d$  independiente de  $B$ . Por la observación anterior y el Teorema 1.4.6, sabemos que existe una única solución  $X$  de la EDE (1.5.5) hasta su tiempo de explosión  $e = e(X)$  tal que  $X_0 = x$ .

Por otro lado, para cada  $f \in C_K^2(\hat{\mathbb{R}}^d)$ , por la fórmula de Itô (1.3.16), la Proposición 1.1.16 y el Lema 1.2.5,

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial f(X_s)}{\partial x_i} \sigma_{ij}(X_s) dB_s^j + \int_0^t Lf(X_s) ds, \quad 0 \leq t < e. \quad (1.5.6)$$

Por lo tanto, es claro que la distribución de probabilidad  $\mathbb{P}_x = \mathbb{P} \circ X^{-1}$  con  $X_0 = x$  en  $\hat{W}^d$  del proceso satisface las condiciones (i) y (ii) de la Definición 1.5.5.

Además, afirmamos que la unicidad de soluciones de la EDE (1.5.5) es equivalente a la condición de unicidad (iii) del Teorema 1.5.6.

En efecto, es obvio que la condición (iii) implica la unicidad de soluciones de la EDE (1.5.5). Por otro lado, sea  $\{\mathbb{P}_x\}_{x \in \hat{\mathbb{R}}^d}$  un sistema de probabilidades en  $\hat{W}^d$  que satisface las condiciones (i) y (ii) como antes. Sean  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso definido en  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d), \mathbb{P}_x)$  tal que  $X_t(w) = w_t$  para  $w \in \hat{W}^d$ ,  $X_0 = x$  y  $e = e(w)$  el tiempo de explosión de  $w$ . Además, sea  $\mathcal{B}_k = \{z \in \mathbb{R}^d : |z| \leq k\}$ , para cada  $i = 1, \dots, d$ , tomamos  $f \in C_K^2(\hat{\mathbb{R}}^d)$  de manera que  $f(z) = z_i$  para todo  $z \in \mathcal{B}_k$ . Entonces para  $\tau_k = \inf\{t : X_t \notin \mathcal{B}_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , tenemos que para cada  $i = 1, \dots, d$

$$M_t^{i,k} = X_{\tau_k \wedge t}^i - X_0^i - \int_0^{\tau_k \wedge t} b_i(X_s) ds,$$

es una  $(\mathcal{F}_t(\hat{W}^d))$ -martingala. Así que,

$$M_t^i = X_t^i - X_0^i - \int_0^t b_i(X_s) ds, \quad i = 1, \dots, d \quad (1.5.7)$$

es una martingala local.

Ahora escogemos  $f \in C_K^2(\hat{\mathbb{R}}^d)$  tal que  $f(z) = z_i z_j$ ,  $z \in \mathcal{B}_k$ , análogamente, se obtiene

$$[M^i, M^j]_t = \int_0^t a_{ij}(X_s) ds, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Entonces, por la extensión del teorema de caracterización de Lévy (ver Hsu [11], Lema 1.3.5), existe un movimiento browniano euclidiano  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  de dimensión  $d$  definido en el espacio de probabilidad extendido  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d), \mathbb{P}_x)$  tal que

$$M_t^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(X_s) dB_s^j, \quad i = 1, \dots, d.$$

Sustituyendo en (1.5.7), para todo  $t \in [0, e)$ , se tiene

$$X_t^i = x^i + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(X_s) dB_s^j + \int_0^t b_i(X_s) ds, \quad i = 1, \dots, d.$$

Es decir,  $X = (X^1, \dots, X^d)$  es una solución de la EDE (1.5.5) tal que  $X_0 = x$ .

Como la distribución de probabilidad del proceso  $X$  es  $\mathbb{P}_x$ , la unicidad de soluciones de (1.5.5) implica la unicidad de la condición (iii). Entonces tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.5.7.** *Dado un operador diferencial de segundo orden  $L$  de la forma (1.5.4), sea  $\sigma = (\sigma_{ij}(x))$  tal que se cumple  $\sigma = a^{1/2}$ . Entonces las medidas de  $L$ -difusión  $\{\mathbb{P}_x\}_{x \in \hat{\mathbb{R}}^d}$  existen y son únicas si y sólo si se vale la unicidad de soluciones de la EDE (1.5.5). En este caso,  $\mathbb{P}_x$  es la distribución de probabilidad en  $(\hat{W}^d, \mathcal{B}(\hat{W}^d))$  de una solución  $X = (X_t)_{0 \leq t < e}$  de (1.5.5) tal que  $X_0 = x$ .*

**Ejemplo 1.5.8.** Consideremos el proceso de Ornstein-Uhlenbeck dado por el ejemplo 1.4.8. Entonces la solución  $X$  es un proceso de difusión generado por el operador

$$L := \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{d}{dx} \right)^2 - \alpha x \frac{d}{dx}. \quad \triangle$$

**Ejemplo 1.5.9.** Para la ecuación diferencial estocástica (1.5.5), en el caso  $b \equiv 0$ ,  $\sigma \equiv I_{d \times d}$  la matriz identidad. Tenemos entonces que la solución  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano euclidiano de dimensión  $d$ , y es un proceso de difusión generado por el operador de Laplace en  $\mathbb{R}^d$  (ver Ejemplo 2.6.7)

$$\frac{1}{2} \Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad \triangle$$

Ahora para cada  $x \in \mathbb{R}^d$ , tomando la esperanza con respecto a la probabilidad  $\mathbb{P}_x$  en la ecuación (1.5.6), se obtiene el siguiente resultado denominada la *fórmula de Dynkin* (cf. Øksendal [19], Teorema 7.10).

**Teorema 1.5.10** (Fórmula de Dynkin). *Sean  $f \in C_K^2(\hat{\mathbb{R}}^d)$  y  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de difusión definido en el espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  que satisface la EDE (1.5.5) con valor inicial  $X_0 = x$ . Entonces, si  $\tau$  es un  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempo de paro tal que  $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ , se tiene*

$$\mathbb{E}_x[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\tau Lf(X_s) ds \right]. \quad (1.5.8)$$

**Ejemplo 1.5.11.** Como aplicación del teorema anterior, consideremos  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un movimiento browniano en  $\mathbb{R}^n$ , y para  $R > 0$  fijo, sean

$$\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}, \quad \tau_R = \inf\{t \geq 0 : \|B_t\| = R\},$$

la bola abierta de radio  $R$  en  $\mathbb{R}^n$  y, el primer instante en que el movimiento browniano entre a  $\partial\mathcal{B}_R$ , la frontera de la bola. Supongamos que  $B$  tiene valor inicial  $B_0 = a \in \mathcal{B}_R$ , y queremos calcular la esperanza del tiempo  $\tau_R$ :

Aplicando la fórmula de Dynkin a  $X = B$ ,  $\tau = \tau_R \wedge N$  para  $N$  un entero, y sea  $f \in C_K^2(\hat{\mathbb{R}}^d)$  tal que  $f(x) = \|x\|^2$  para  $\|x\| \leq R$ , tendremos por el ejemplo anterior que,

$$R^2 \geq \mathbb{E}_a[f(B_\tau)] = f(a) + \frac{1}{2} \mathbb{E}_a \left[ \int_0^\tau \Delta f(B_s) ds \right] = \|a\|^2 + n \mathbb{E}_a[\tau]. \quad (1.5.9)$$

Por lo tanto,  $\mathbb{E}_a[\tau_R \wedge N] \leq \frac{1}{n}(R^2 - \|a\|^2)$  para todo  $N$ , haciendo  $N \rightarrow \infty$ , obtenemos  $\tau_R = \lim_{N \rightarrow \infty} \tau_R \wedge N < \infty$ , c.s. y

$$\mathbb{E}_a[\tau_R] = \frac{1}{n}(R^2 - \|a\|^2). \quad (1.5.10)$$

△

**Ejemplo 1.5.12.** Ahora, sea  $B$  un movimiento browniano en  $\mathbb{R}^n$  con valor inicial  $B_0 = b \in A_k$  donde  $A_k$  es un “anillo” dado por

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : R < \|x\| < 2^k R\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Definimos  $f = f_{n,k} \in C_K^2(\mathbb{R}^n)$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\ln \|x\| & \text{si } n = 2, \\ \|x\|^{2-n} & \text{si } n > 2. \end{cases} \quad R \leq \|x\| \leq 2^k R.$$

Como en ambos casos,  $f(x)$  es una función armónica en  $A_k$ , entonces  $\Delta f = 0$ ; consideremos  $\sigma_k := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin A_k\}$  el primer tiempo en que el movimiento browniano  $B$  sale del anillo  $A_k$ , y tenemos por la fórmula de Dynkin que

$$\mathbb{E}_b[f(B_{\sigma_k})] = f(b), \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (1.5.11)$$

Definimos

$$p_k = \mathbb{P}_b(\|B_{\sigma_k}\| = R), \quad y \quad q_k = \mathbb{P}_b(\|B_{\sigma_k}\| = 2^k R),$$

la probabilidad de que el movimiento browniano entre a  $\partial\mathcal{B}_R$  antes de que entre a  $\partial\mathcal{B}_{2^k R}$ , y la probabilidad de que  $B$  salga de  $\mathcal{B}_{2^k R}$  antes de que entre a  $\partial\mathcal{B}_R$ , respectivamente; cuando  $n = 2$ , tenemos por (1.5.11),

$$-\ln R \cdot p_k - (k \ln 2 + \ln R) \cdot q_k = -\ln \|b\|, \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (1.5.12)$$

Esto implica que  $q_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , por lo tanto

$$\mathbb{P}_b(\tau_R < \infty) = 1, \quad (1.5.13)$$

es decir, la probabilidad de que el movimiento browniano visite a la bola  $\mathcal{B}_R$  es 1 y regresará a dicha bola en una infinidad de tiempos no acotados. Luego, se dice que el movimiento browniano es *recurrente* en  $\mathbb{R}^2$  (cf. Rincón [22]). Por otro lado, si  $n > 2$ ,

$$p_k \cdot R^{2-n} + q_k \cdot (2^k R)^{2-n} = \|b\|^{2-n}. \quad (1.5.14)$$

Como  $0 \leq q_k \leq 1$ , haciendo  $k \rightarrow \infty$  y obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \mathbb{P}_b(\tau_R < \infty) = \left(\frac{\|b\|}{R}\right)^{2-n} < 1,$$

cuando hacemos  $R \rightarrow 0$ , y que el movimiento browniano empiece en el origen, tenemos que la probabilidad de que el movimiento browniano regrese al origen es cero. Esto es, el movimiento browniano es *transitorio* en  $\mathbb{R}^n$  para  $n > 2$ .

Ahora, si consideramos el anillo  $A = \{x \in \mathbb{R}^n : r < \|x\| < R\}$ , y  $\sigma = \tau_r \wedge \tau_R$  el primer momento para que el movimiento browniano  $B$  salga de  $A$  si  $B$  tiene valor inicial  $B_0 = x \in A$ , por las expresiones (1.5.12) y (1.5.14), se obtiene que

$$\mathbb{P}_x(\tau_r < \tau_R) = \mathbb{P}_x(\|B_\sigma\| = r) = \begin{cases} \frac{\ln R - \ln \|x\|}{\ln R - \ln r} & \text{si } n = 2, \\ \frac{R^{2-n} - \|x\|^{2-n}}{R^{2-n} - r^{2-n}} & \text{si } n > 2. \end{cases} \quad (1.5.15)$$

△

# Capítulo 2

## Geometría riemanniana

Como en esta tesis estamos interesados en los procesos estocásticos (en particular, las semimartingalas) con valores en una variedad, en este capítulo veremos los conceptos básicos de la geometría diferencial y riemanniana, que pueden encontrarse en muchos libros de geometría riemanniana elemental (cf. de Carmo [4] y Jost [14]).

### 2.1. Variedades diferenciables

#### 2.1.1. Definiciones básicas

**Definición 2.1.1.** Una *variedad*  $M$  de *dimensión*  $m$  es un espacio de Hausdorff tal que para cada  $p \in M$ , existe una vecindad abierta  $U \subset M$  que es homeomorfo a un subconjunto abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^m$ . Al homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  se le llama una *carta local* (también llamado *un sistema de coordenadas local*) de  $p \in M$ , denotada por  $(U, \varphi)$ . Un *atlas* es una familia  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  de cartas locales tal que  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = M$ .

*Observación.* Las coordenadas del punto  $p \in U$  están determinadas por las coordenadas de  $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ , denotadas por  $x^i(p) = (\varphi(p))^i$ . Así, al sistema de coordenadas local de  $p \in M$  también le denotamos por  $(U, (x^i))$ .

*Observación.* Sean  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  dos cartas locales en la variedad  $M$ , si los cambios de coordenadas  $\psi \circ \varphi^{-1}$ ,  $\varphi \circ \psi^{-1}$  son diferenciables de clase  $C^\infty$  siempre y cuando  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces se dice que las cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  son *compatibles*.

**Definición 2.1.2.** Un atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$  se dice que es *diferenciable* si todas las transiciones de cartas:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (2.1.1)$$

son compatibles.

Un atlas  $\mathcal{A}$  diferenciable maximal (i.e., si  $(U, \varphi)$  es una carta en  $M$ , y compatible con todos los elementos de  $\mathcal{A}$ , entonces  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ) se llama una *estructura diferenciable*; y una *variedad diferenciable* es una variedad  $M$  junto con una estructura diferenciable  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ , también denotada por  $(M, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ .

**Definición 2.1.3.** Sean  $(M, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$  y  $(N, (\psi_\beta)_{\beta \in \Xi})$  variedades diferenciables de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente. Una función  $\phi : M \rightarrow N$  entre las variedades  $M$  y  $N$  es *diferenciable* si para cada  $\alpha$  y  $\beta$ , se tiene que la función  $\psi_\beta \circ \phi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \phi^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable. Una biyección  $\phi$  entre dos variedades tal que  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  son diferenciables se llama un *difeomorfismo*.

En particular, cuando  $N \equiv \mathbb{R}$  con la estructura usual (i.e.,  $\psi_\beta$  es la identidad de  $\mathbb{R}$ ), decimos que  $\phi$  es una *función diferenciable* en la variedad  $M$ . Al conjunto de todas las funciones diferenciables en la variedad diferenciable  $M$  le denotamos por  $C^\infty(M)$ ; y denotamos por  $C_p^\infty$  como el conjunto de funciones diferenciables en una vecindad de  $p \in M$ .

**Definición 2.1.4.** Una *subvariedad*  $N$  de dimensión  $n \leq m$  de la variedad diferenciable  $M$  es un subconjunto de  $M$  tal que para cada punto  $p \in N$ , existe una carta local  $(U, \varphi)$  alrededor de  $p$  en  $M$  y un subespacio  $n$ -dimensional  $E$  de  $\mathbb{R}^m$  de manera que  $\varphi^{-1}(E) = N \cap U$ .  $N$  hereda una estructura diferenciable de  $M$  ( $(N \cap U, \varphi|_{N \cap U})$  es una carta local en  $N$ ) de dimensión a lo más  $m$ .

**Definición 2.1.5.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Decimos que  $M$  es *orientable* si existe un atlas  $\mathcal{A}_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  en  $M$  tal que para cada pareja  $\alpha, \beta \in \Lambda$  con  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , la transición de cartas:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

tiene determinante jacobiano positivo, es decir,

$$\det \left( \frac{\partial(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^i}{\partial x_\alpha^j} \right) > 0. \quad (2.1.2)$$

En caso contrario, decimos que  $M$  es *no-orientable*.

Si  $M$  es una variedad orientable, una estructura diferenciable en  $M$  que satisface la condición anterior se denomina una *orientación* de  $M$ , luego se dice que  $M$  es una *variedad orientada* si elegimos una orientación de  $M$ .

## 2.1.2. Vectores tangentes y formas

**Definición 2.1.6.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$  y  $p \in M$ . Un *vector tangente*  $v$  a la variedad  $M$  en el punto  $p$  es un operador diferencial de primer orden  $v: C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las siguientes condiciones:

- (1)  $v(f + g) = v(f) + v(g)$ ,  $\forall f, g \in C_p^\infty$ ;
- (2)  $v(\lambda f) = \lambda v(f)$ ,  $\forall f \in C_p^\infty, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (3)  $v(f \cdot g) = f(p) \cdot v(g) + g(p) \cdot v(f)$ ,  $\forall f, g \in C_p^\infty$ .

Las condiciones (1) y (2) indican que  $v$  es una función lineal de  $C_p^\infty$  a  $\mathbb{R}$ , y la condición (3) se llama la *regla de Leibnitz*.

**Ejemplo 2.1.7** (Definición alternativa de vector tangente). Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$ . Si  $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  es una curva diferenciable en  $M$  que pasa por el punto  $p \in M$  tal que  $\gamma(0) = p$ . El *vector tangente a la curva*  $\gamma$  en  $t = 0$  es una función  $v = \gamma'(0): C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$v(f) = \gamma'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \gamma(t))}{dt} \right|_{t=0}, \quad \forall f \in C_p^\infty. \quad (2.1.3)$$

Un vector tangente en el punto  $p$  es el vector tangente en  $t = 0$  para alguna curva  $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = p$ .  $\triangle$

Sean  $(U, \varphi = (x^i))$  un sistema de coordenadas local alrededor del punto  $p$  en la variedad diferenciable  $M$  y  $(x_0^1, \dots, x_0^m)$  las coordenadas del punto  $p$ . Para cualquier índice  $j$  fijo,  $1 \leq j \leq m$ , consideremos la curva diferenciable en  $M$  dada por  $\gamma_j: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  de manera que

$$x^i(\gamma_j(t)) = x_0^i + \delta_j^i t, \quad \forall 1 \leq i \leq m.$$

donde  $\delta_i^j$  es la delta de Kronecker; es decir,  $\gamma_j$  es una curva coordenada que pasa por el punto  $p$  bajo la carta local  $(U, \varphi = (x^i))$  (Figura 2.1).

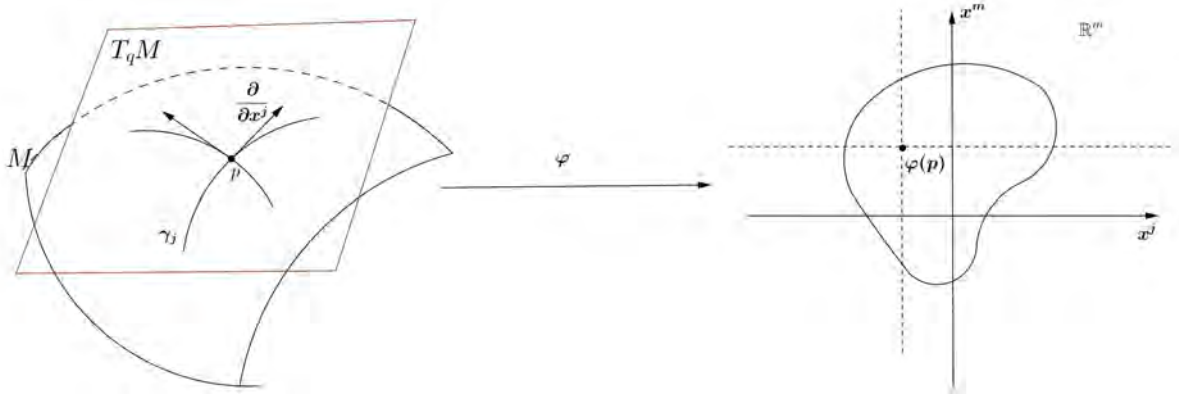


Figura 2.1: Vector tangente a la “curva coordenada” en el punto  $p$  de  $M$ .

Denotamos al vector tangente a la curva  $\gamma_j$  en el punto  $t = 0$  por  $\frac{\partial}{\partial x^j}$ , es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j}(f) &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_j) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1})(x_0^1, \dots, x_0^j + t, \dots, x_0^m) \\ &= \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \right|_{\varphi(p)}. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Note que si tomamos  $f$  como la función de coordenada  $i$ -ésima  $x^i$ , se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \delta_j^i.$$

Ahora consideremos el conjunto de los vectores tangentes  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \right\}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , para encontrar los componentes del vector tangente  $v$  a una curva  $\gamma$  bajo la combinación lineal estos vectores, primero notemos que las ecuaciones de la curva  $\gamma$  están dadas por:

$$x^i = x^i(t) = (\varphi(\gamma(t)))^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad -\epsilon < t < \epsilon.$$

Como el vector tangente a la curva  $\gamma$  en  $t = 0$  es  $v = \gamma'(0)$ , así que para todo  $f \in C_p^\infty$ , se tiene que:

$$v(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma(t)) = \sum_{i=1}^m \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \frac{dx^i(0)}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{dx^i(0)}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(f). \quad (2.1.5)$$

Es claro que  $v(x^i) = \frac{dx^i(0)}{dt}$ , entonces el vector tangente  $v$  puede expresarse en las coordenadas local  $(x^i)$  dado por:

$$v = \sum_{i=1}^m v(x^i) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.1.6)$$

*Observación.* Los coeficientes  $v^i = v(x^i)$  se llaman *componentes del vector  $v$*  en estas coordenadas; recíprocamente, cualquier conjunto de coeficientes  $v^i$  define un vector tangente. Así que todos los vectores tangentes a  $M$  en el punto  $p$  con las operaciones usuales de funciones forman un espacio vectorial de dimensión  $m$ , llamado el *espacio tangente de  $M$  en  $p$* , denotado por  $\mathcal{T}_p M$ , y  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^m$  forma una base del espacio tangente  $\mathcal{T}_p M$ .

Es claro que esta definición no depende del sistema de coordenadas: si  $(y^i)$  es otra carta local, los componentes  $v^i$  y  $w^i$  del mismo vector tangente  $v$  están relacionados por

$$w^i = v(y^i) = \sum_{j=1}^m v^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}(y^i).$$

Ahora si  $\phi: M \rightarrow N$  es una función diferenciable entre las variedades diferenciables  $M$  y  $N$ , entonces para cada punto  $p \in M$ ,  $\phi$  induce una función  $\phi^*$  de  $C_{\phi(p)}^\infty$  en  $C_p^\infty$ , definida por

$$\phi^*(g) = g \circ \phi, \quad \forall g \in C_{\phi(p)}^\infty.$$

Claramente  $\phi^*(g) \in C_p^\infty$ . Así que, para cualquier vector tangente  $v \in \mathcal{T}_p M$ , se puede definir la función  $(T_p \phi)(v): C_{\phi(p)}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que para cualquier  $g \in C_{\phi(p)}^\infty$ :

$$(T_p \phi)(v)(g) = v(\phi^*(g)) = v(g \circ \phi). \quad (2.1.7)$$

Por la Definición 2.1.6 del vector tangente en la variedad, podemos verificar que  $T_p \phi(v)$  es un vector tangente a la variedad  $N$  en el punto  $\phi(p)$ . También se verifica que la función  $T_p \phi: \mathcal{T}_p M \rightarrow \mathcal{T}_{\phi(p)} N$  es lineal y le llamamos la *diferencial de  $\phi$  en el punto  $p$* .

Cuando  $T_p \phi$  es inyectiva para cada  $p \in M$ , la función diferenciable  $\phi$  se dice una *inmersión*. Y tenemos el siguiente famoso teorema de inmersión de Whitney para una variedad diferenciable (ver Hsu [11], Teorema 1.2.5).

**Teorema 2.1.8** (Teorema de inmersión de Whitney). *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$ , entonces existe una inmersión inyectiva (i.e., un encaje),  $i: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$  tal que la imagen  $i(M)$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .*

Así, podemos identificar  $M$  con la imagen  $i(M)$  y suponer que  $M$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .

**Ejemplo 2.1.9.** Sean  $\phi: M \rightarrow N$  una función diferenciable,  $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una curva diferenciable en  $M$  y  $v \in \mathcal{T}_p M$  tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$ . Entonces por (2.1.7) y (2.1.3), tenemos que para cualquier  $g \in C_{\phi(p)}^\infty$ ,

$$T_p \phi(v)(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \circ \phi \circ \gamma(t)) = \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi \circ \gamma(t) \right) (g).$$

Es decir,

$$T_p \phi(v) = T_p \phi \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t) \right) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi \circ \gamma(t). \quad (2.1.8)$$

Aquí  $\phi \circ \gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$  es una curva diferenciable en la variedad diferenciable  $N$  que pasa por el punto  $\phi(p)$ . La expresión (2.1.8) significa que  $T_p \phi$  manda el vector tangente  $\gamma'(0)$  en  $M$  al vector tangente a la curva  $\phi \circ \gamma(t)$  de  $N$  en  $t = 0$ .  $\triangle$

**Definición 2.1.10.** La unión disjunta  $\mathcal{T}M = \bigcup_{p \in M} \mathcal{T}_p M \doteq \{(p, v) \mid p \in M, v \in \mathcal{T}_p M\}$  se denomina *el haz tangente* de una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $m$ ; es una variedad de dimensión  $2m$  junto con la siguiente estructura diferenciable:

Sea  $\pi: \mathcal{T}M \rightarrow M$  la proyección canónica definida por  $\pi(p, v) = p$ ; así, para cada punto  $p \in M$ ,  $\pi^{-1}(p) = \mathcal{T}_p M$ . Si  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  es una estructura diferenciable de  $M$ , tenemos que  $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{p \in U_\alpha} \mathcal{T}_p M$ , entonces  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\alpha) = \mathcal{T}M$ . Además para cada índice  $\alpha \in \Lambda$ , la función  $\xi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  definida por

$$\xi_\alpha \left( \sum_{i=1}^m v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m, v^1, \dots, v^m);$$

resulta ser un homeomorfismo de  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  sobre un subconjunto abierto  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m$  de  $\mathbb{R}^{2m}$ , por tanto  $(\pi^{-1}(U_\alpha), \xi_\alpha)$  es una carta en  $\mathcal{T}M$ . Es fácil verificar que estas cartas forman una estructura diferenciable.



**Definición 2.1.11.** Sea  $p \in M$ , el espacio dual  $\mathcal{T}_p^*M$  del espacio tangente  $\mathcal{T}_pM$  se llama el *espacio cotangente* a  $M$  en el punto  $p$ . Un elemento de  $\mathcal{T}_p^*M$  es un *vector cotangente* (ó simplemente *covector*) a  $M$  en  $p$ . Es decir, un covector en  $p \in M$  es una función lineal sobre el espacio tangente  $\mathcal{T}_pM$ .

**Ejemplo 2.1.12.** Un vector cotangente en  $p \in M$  es  $df_p$ ; la diferencial de una función diferenciable  $f \in C^\infty(M)$  en el punto  $p$  definida por

$$df_p: \mathcal{T}_pM \ni v \mapsto v(f) \in \mathbb{R}. \quad \triangle$$

Para obtener una base asociada en  $\mathcal{T}_p^*M$ , sea  $(U, (x^i))$  un sistema de coordenadas locales alrededor del punto  $p$ . Notemos que para las funciones coordenadas  $x^i \in C_p^\infty$ ,  $1 \leq i \leq m$ , se obtiene  $m$  covectores  $dx^i$  en  $p$  definidos por

$$dx^i(v) = v(x^i), \quad \forall v \in \mathcal{T}_pM.$$

Además,

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} (x^i) = \delta_j^i, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Por tanto, el conjunto  $\{dx^i\}_{i=1}^m$  forma una base de  $\mathcal{T}_p^*M$  y dual con la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^m$  de  $\mathcal{T}_pM$ . Note que si  $\alpha \in \mathcal{T}_p^*M$ , entonces para cualquier  $v = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{T}_pM$ , se tiene que  $\alpha(v) = \sum_{i=1}^m v^i \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ , pero como  $v^i = v(x^i) = dx^i(v)$ ,

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^i.$$

En particular, para la diferencial de la función diferenciable  $f$  en el punto  $p$ , tenemos

$$df_p = \sum_{i=1}^m df_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^i = \sum_{i=1}^m \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p dx^i. \quad (2.1.9)$$

**Definición 2.1.13.** Un *campo de vectores tangentes* (ó *campo vectorial*) diferenciable en una variedad diferenciable  $M$  es una función diferenciable  $Y: M \rightarrow \mathcal{T}M$  tal que, para cada  $p \in M$ ,  $Y(p) \in \mathcal{T}_pM$ .

*Observación.* Si  $(U, (x^i))$  es un sistema de coordenadas local alrededor del punto  $p \in M$ , los componentes  $Y^i$  de un campo vectorial diferenciable  $Y$  son funciones diferenciables.

Sean  $Y$  un campo vectorial en  $M$  y  $f \in C^\infty(M)$ , podemos definir  $Y(f)$  como una función en  $M$  dada por

$$(Y(f))(p) = (Y(p))(f), \quad p \in M. \quad (2.1.10)$$

Claramente se tiene que  $Y(f) \in C^\infty(M)$ , y de esta manera el campo vectorial  $Y$  puede considerarse como un operador lineal de  $C^\infty(M)$  en  $C^\infty(M)$  dado por  $Y: f \mapsto Y(f)$  que cumple las siguientes condiciones:

- (1)  $\forall f, g \in C^\infty(M)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $Y(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot Y(f) + \mu \cdot Y(g)$ ,
- (2)  $\forall f, g \in C^\infty(M)$ ,  $Y(f \cdot g) = f \cdot Y(g) + g \cdot Y(f)$ .

Estas condiciones se verifican fácilmente por la definición de vector tangente en cada punto de la variedad  $M$ . Por otra parte, un operador  $V: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  que cumple las condiciones (1) y (2) anteriores define un campo vectorial en  $M$  dado por (2.1.10).

*Notación.* Al conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables en  $M$  le denotamos por  $\mathfrak{X}(M)$  (o simplemente por  $\mathfrak{X}$ ); es un espacio vectorial y es un  $C^\infty(M)$ -módulo junto con la multiplicación por funciones  $f \in C^\infty(M)$  definida por

$$(fY)(p) = f(p)Y(p), \quad Y \in \mathfrak{X}(M), \quad p \in M. \quad (2.1.11)$$

**Proposición 2.1.14.** Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}$ , existe un único campo vectorial  $[X, Y] \in \mathfrak{X}$  definido por

$$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M).$$

El campo vectorial  $[X, Y]$  se denomina el corchete de Lie de los campos vectoriales  $X$  e  $Y$  y la operación corchete  $[\cdot, \cdot]$  tiene las siguientes propiedades:

- (a)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}$ ;
- (b)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}$ ;
- (c)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ ,  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}$ ;
- (d)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}$ .

Omitimos la demostración y los detalles se pueden encontrar en do Carmo [4].

**Definición 2.1.15** (1-formas). Sea  $\mathcal{T}^*M = \bigcup_{p \in M} \mathcal{T}_p^*M$ . De manera análoga a la Definición 2.1.10, podemos construir una estructura diferenciable en  $\mathcal{T}^*M$  para que sea una variedad diferenciable. Una 1-forma es una función diferenciable  $\alpha: M \rightarrow \mathcal{T}^*M$  tal que  $\alpha(p) \in \mathcal{T}_p^*M$  para cada  $p \in M$ .

En particular, para  $f \in C^\infty(M)$ ,  $df$  es una 1-forma definida por  $df: p \mapsto df_p$ , y para  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial, definimos  $df(X) = X(f)$ .

**Definición 2.1.16** (Formas bilineales). Sea  $p \in M$ , denotamos por  $\mathcal{T}_p^*M \otimes \mathcal{T}_p^*M$  el espacio vectorial de todas las formas bilineales en  $\mathcal{T}_pM$ , y por  $\mathcal{T}^*M \otimes \mathcal{T}^*M$  la unión disjunta  $\bigcup_{p \in M} \mathcal{T}_p^*M \otimes \mathcal{T}_p^*M$ , que es una variedad diferenciable. Luego, una forma bilineal (ó tensor dos veces covariantes) es una función diferenciable  $b: M \rightarrow \mathcal{T}^*M \otimes \mathcal{T}^*M$  tal que  $b(p) \in \mathcal{T}_p^*M \otimes \mathcal{T}_p^*M$  para cada  $p \in M$ . Si  $v, w \in \mathcal{T}_pM$ ,  $b(v, w) = b(p)(v, w)$  denota al valor de  $b$  actuado en el punto  $p$  sobre  $v$  y  $w$ ; si  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ , denotamos por  $b(X, Y)$  como la función  $p \mapsto b(p)(V(p), W(p))$ .

Un ejemplo más simple de una forma bilineal es el producto tensorial de  $\alpha$  y  $\beta$  con  $\alpha, \beta$  1-formas, dado por

$$\alpha \otimes \beta: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (V, W) \mapsto \alpha(V)\beta(W) \in \mathbb{R}.$$

Si  $(U, (x^i))$  es una carta local en  $M$ , podemos expresar localmente cada forma bilineal por

$$b = \sum b_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (2.1.12)$$

donde las componentes  $b_{ij} = b\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$  son funciones diferenciables en  $U$ .

Una matriz de funciones diferenciables  $b_{ij}$  es *simétrica* (respectivamente *antisimétrica*) si y sólo si  $b$  lo es, esto es, si y sólo si  $b(v, w) = \pm b(w, v)$ . Una forma bilineal es *definida positiva* si para cada campo vectorial  $V \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $b(V, V) > 0$ , donde  $V \neq 0$ .

Sean  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f, g \in C^\infty(M)$ , entonces para  $b$  una forma bilineal en  $M$ , podemos comprobar que

$$b(fV, gW) = fg b(V, W). \quad (2.1.13)$$

El teorema de inmersión de Whitney implica el siguiente resultado. (ver M. Emery [6], Lema 2.23)

**Lema 2.1.17.** Existe una familia finita de funciones  $\{h^1, \dots, h^n\}$  en  $M$  tal que cualquier forma bilineal puede expresarse como la suma  $b = \sum_{i,j} b_{ij} dh^i \otimes dh^j$ , donde los coeficientes  $b_{ij}$  dependen  $C^\infty$ -linealmente de  $b$ .

## 2.2. Variedades riemannianas

En la sección anterior vimos que la estructura diferenciable de una variedad diferenciable hace la posibilidad de definir las funciones diferenciables de clase  $C^\infty$  en la variedad, y por tanto la definición de vector tangente y campos vectoriales diferenciables mediante las funciones diferenciables. Además, la derivada direccional de una función diferenciable  $f$  en la dirección del vector tangente  $v \in \mathcal{T}_p M$  está bien definida y denotada por

$$D_v f = v(f), \quad \forall v \in \mathcal{T}_p M, \quad f \in C_p^\infty.$$

En esta sección introducimos dos estructuras adicionales para una variedad diferenciable: la estructura riemanniana y la conexión. Una variedad diferenciable junto con una estructura riemanniana es llamada una *variedad riemanniana*; y la conexión hace la posibilidad de definir la “derivada direccional” de un campo vectorial diferenciable en la dirección del vector tangente  $v \in \mathcal{T}_p M$ .

### 2.2.1. Métrica riemanniana

**Definición 2.2.1.** Una *métrica (o estructura) riemanniana* sobre una variedad diferenciable  $M$ , es una forma bilineal  $g$  (ó  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) en  $M$  que es simétrica y definida positiva tal que para cada punto  $p \in M$ , la forma bilineal  $g_p$  define un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  en el espacio tangente  $\mathcal{T}_p M$ .

Se dice entonces que una *variedad riemanniana* es una variedad diferenciable  $M$  junto con una métrica riemanniana  $g$ , denotada por  $(M, g)$ .

*Observación.* Cuando en una variedad  $M$  se supone prefijada una métrica riemanniana  $g$ , diremos que  $M$  es riemanniana, y para  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ , tenemos las siguientes notaciones:

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle, \quad \langle V, W \rangle_p = \langle V(p), W(p) \rangle.$$

Si  $ds^2$  es la función  $\mathcal{T}M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$ds_p^2(v) \doteq \langle v, v \rangle_p, \quad p \in M \text{ y } v \in \mathcal{T}_p M.$$

Sea  $(U, (x^i))$  un sistema de coordenadas local alrededor de  $p \in M$ , por la expresión (2.1.6) tal que para  $v = \sum_{i=1}^m dx^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in \mathcal{T}_p M$ , se tiene entonces

$$ds_p^2(v) = \sum_{i,j}^m \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p dx^i(v) dx^j(v), \quad (2.2.1)$$

Y escribiendo esta expresión en abreviaturas:

$$ds^2 = \sum_{i,j}^m g_{ij}^x dx^i \otimes dx^j, \quad (2.2.2)$$

donde  $g_{ij}^x = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p$ . Notemos que la métrica riemanniana  $g$  está determinada únicamente por la función  $ds^2$ , y la definición anterior no depende de las cartas locales, así podemos escribir  $g_{ij}$  en lugar de  $g_{ij}^x$ ; llamamos a la matriz  $(g_{ij})$  la *representación local de la métrica riemanniana en coordenadas locales*  $(x^i)$ .

Otra observación es que en cualquier variedad diferenciable se puede definir una métrica riemanniana (ver Jost [14], Teorema 1.4.1).

En lo sucesivo, consideraremos que  $M$  es una variedad riemanniana de dimensión  $m$  junto con la métrica  $g \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$ , si  $(U, (x^i))$  es una carta local en  $M$ , entonces  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$ , y  $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ .

**Ejemplo 2.2.2.** Sean  $M = \mathbb{R}^n$  y  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  un sistema de coordenadas estándar en  $M$ , i.e.,  $x(p) = p$  para cada  $p \in M$ ; de esta manera se tiene que  $\frac{\partial}{\partial x^i} = e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . Entonces la métrica riemanniana estándar en  $\mathbb{R}^n$  está determinada por

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i.$$

Es decir,  $(g_{ij}^x)$  es la matriz identidad. Con esta métrica,  $\mathbb{R}^n$  se llama el *espacio euclidiano de dimensión  $n$* , y la geometría riemanniana de este espacio es la geometría euclidiana.  $\triangle$

Sea  $\phi: (M, g) \rightarrow (N, \bar{g})$  una función suave de una variedad riemanniana  $(M, g)$  en otra  $(N, \bar{g})$ , decimos que  $\phi$  es una *inmersión isométrica* si

$$g_p(v, w) = \bar{g}_{\phi(p)}(T_p\phi(v), T_p\phi(w)), \quad \forall p \in M, \quad v, w \in \mathcal{T}_pM.$$

Si consideramos  $M$  como una subvariedad de  $N$ , entonces la inmersión es isométrica si el producto interior de  $v$  y  $w$  con respecto a la métrica de  $M$  es el mismo que con respecto a la métrica de  $N$ .

**Teorema 2.2.3** (Teorema de inmersión de Nash). *Cada variedad riemanniana puede ser isométricamente inmersa en un espacio euclidiano con la métrica estándar.*

## 2.2.2. Derivadas covariantes y transporte paralelo

**Definición 2.2.4.** Una *conexión afín* en una variedad riemanniana  $M$  es un operador  $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definido por  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  que satisface las siguientes propiedades:

- (1)  $\nabla_X(\lambda \cdot Y + Z) = \lambda \cdot \nabla_X Y + \nabla_X Z$  ;
- (2)  $\nabla_X(f \cdot Y) = X(f) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$  ;
- (3)  $\nabla_{fX+gY} Z = f \cdot \nabla_X Z + g \cdot \nabla_Y Z$  ;

donde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty(M)$ . El campo vectorial  $\nabla_X Y$  recibe el nombre de *derivada covariante* de  $Y$  con respecto a  $X$  para la conexión  $\nabla$ .

**Definición 2.2.5.** Si  $(U, \varphi = (x^i))$  es un sistema de coordenadas local en  $M$ , denotaremos por  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ; los símbolos de la conexión  $\nabla$  son las funciones diferenciables  $\Gamma_{ij}^k$  en  $U$  dadas por

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k X_k, \quad (2.2.3)$$

Si  $Z, Y \in \mathfrak{X}(M)$  son campos vectoriales sobre  $M$ , por las propiedades de la conexión  $\nabla$ , obtenemos la expresión local del campo  $\nabla_Z Y$  sobre  $U$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_Z Y &= \sum_{i=1}^m Z^i \nabla_{X_i} \left( \sum_{j=1}^m Y^j X_j \right) = \sum_{i,j} Z^i Y^j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j} Z^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} X_j \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i,j} Z^i Y^j \Gamma_{ij}^k + Z(Y^k) \right) X_k, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

donde  $Z^i = Z(x^i)$ ,  $Y^i = Y(x^i)$  sobre  $U$ . Esto nos dice que el valor  $(\nabla_Z Y)(p)$  de la derivada covariante en un punto  $p$  sólo depende del vector  $Z(p)$  y de los valores de  $Y$  a lo largo de cualquier curva  $\gamma$  que pasa por  $p$  con dirección  $Z(p)$ .

**Definición 2.2.6.** Sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva diferenciable en  $M$  con  $I$  un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ . Un *campo vectorial a lo largo de la curva*  $\gamma$  es una función diferenciable  $V: I \rightarrow \mathcal{T}M$  que asigna a cada punto  $t \in I$  un vector tangente  $V(t) \in \mathcal{T}_{\gamma(t)}M$ .

En particular,  $\gamma': t \mapsto \gamma'(t)$  es un campo vectorial a lo largo de la curva  $\gamma$ , llamado *la velocidad de la curva*.

**Proposición 2.2.7.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Entonces existe una única correspondencia  $\frac{D}{dt}$  que asigna a cada campo vectorial  $V$  a lo largo de la curva diferenciable  $\gamma: I \rightarrow M$  otro campo vectorial a lo largo de  $\gamma$  denotado por  $\frac{DV}{dt}$ , y denominado *la derivada covariante de  $V$  a lo largo de  $\gamma$  con respecto a la conexión  $\nabla$* , verificando las siguientes propiedades:

- (D<sub>1</sub>)  $\frac{D}{dt}(fV + W) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ , donde  $W$  es un campo vectorial a lo largo de  $\gamma$  y  $f$  es una función diferenciable en  $I$ ;
- (D<sub>2</sub>) Si  $V$  está inducido por un campo de vectores  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , es decir,  $V(t) = Y(\gamma(t))$ , entonces  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)}Y$ .

Si  $(U, (x^i))$  es un sistema de coordenadas local en  $M$  con  $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$  y  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ ,  $t \in I$ . Por (2.1.6), las propiedades de una conexión  $\nabla$  y (D<sub>2</sub>), usando las notaciones de la Definición 2.2.5 y se tiene que para cada  $i = 1, \dots, m$ ,

$$\frac{DX_i}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)}X_i = \nabla_{\left(\sum_j \frac{dx^j}{dt} X_j\right)} X_i = \sum_{j=1}^m \frac{dx^j}{dt} \nabla_{X_j} X_i = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ji}^k \right) X_k, \quad (2.2.5)$$

donde  $X_i = X_i(\gamma(t)) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}$ . Entonces obtenemos la expresión local de la derivada covariante de  $V$  sobre el entorno coordenado  $U$ ,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{dv^i}{dt} X_i + v^i \frac{DX_i}{dt} \right) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} v^i \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ji}^k \right) X_k, \quad (2.2.6)$$

donde  $v^i = (V(t))^i = (V(t))(x^i)$ .

La expresión (2.2.6) demuestra que  $\frac{DV}{dt}$  es un campo vectorial diferenciable a lo largo de  $\gamma$ , y con esto se demuestra la proposición anterior. Los detalles se pueden encontrar en do Carmo ([4], Proposición II, 2.2).

**Definición 2.2.8.** Sea  $V$  un campo vectorial a lo largo de una curva  $\gamma$ . Se dice que  $V$  es *paralelo* a lo largo de  $\gamma$  con respecto a una conexión afín  $\nabla$  si  $\frac{DV}{dt} = 0$ .

*Observación.* Bajo una carta local  $(U, (x^i))$  en  $M$ , una consecuencia de (2.2.6) es que los campos paralelos son las soluciones locales del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO):

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} v^i \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ji}^k = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.2.7)$$

Por lo tanto, el teorema fundamental de existencia y unicidad para tales sistemas implica el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.9.** Sean  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ ,  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva suave en  $M$  y  $V_0$  un vector tangente a  $M$  en  $\gamma(t_0)$  con  $t_0 \in I$ . Entonces existe un único campo vectorial  $V$  paralelo a lo largo de  $\gamma$  con respecto a la conexión  $\nabla$  tal que  $V(t_0) = V_0$ .

**Definición 2.2.10.** Sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva suave en  $M$ , para los puntos  $t_1, t_2 \in I$ , con  $\gamma(t_1) = p$  y  $\gamma(t_2) = q$ , definimos la función

$$P_{\gamma,p,q} := P_{t_1}^{t_2}: \mathcal{T}_p M \rightarrow \mathcal{T}_q M,$$

dada por  $P_{\gamma,p,q}(v) = V(t_2)$ , donde  $V$  es el único campo vectorial paralelo a lo largo de  $\gamma$  con  $V(t_1) = v \in \mathcal{T}_pM$ ; se denomina el *transporte paralelo* desde  $p$  hasta  $q$  lo largo de  $\gamma$  con respecto a  $\nabla$ .

*Observación.* La existencia y unicidad del teorema anterior implica que el transporte paralelo  $P_{\gamma,p,q}$  es un isomorfismo entre los espacios vectoriales  $\mathcal{T}_pM$  y  $\mathcal{T}_qM$ .

## 2.3. Conexión de Levi-Civita

Ahora introducimos una conexión especial en una variedad riemanniana  $(M, g)$  que depende únicamente en la métrica riemanniana  $g$ , llamada la conexión de Levi-Civita.

**Definición 2.3.1.** Una conexión afín  $\nabla$  en  $M$  se dice *compatible con la métrica*  $g$  si para cualquier curva diferenciable  $\gamma$  en  $M$ , y para cualesquiera  $V, W$  campos vectoriales paralelos a lo largo de  $\gamma$ , se tiene que  $g(V, W) = \text{const.}$  es constante (i.e.,  $\nabla g = 0$ ). En formas equivalentes, tenemos

- para cualesquiera  $V, W$  campos vectoriales a lo largo de  $\gamma$ , se tiene

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right), \quad t \in I. \quad (2.3.1)$$

- para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , se tiene

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \quad (2.3.2)$$

Un teorema fundamental de la geometría riemanniana está conocido como teorema de Levi-Civita (do Carmo [4], Teorema II, 3.6).

**Teorema 2.3.2 (Levi-Civita).** *Dada una variedad riemanniana  $M$ , existe una única conexión afín  $\nabla$  sobre  $M$  que es compatible con la métrica y libre de torsión (o simétrica), esto es, para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0.$$

**Definición 2.3.3.** La conexión  $\nabla$  del teorema anterior se llama la *conexión de Levi-Civita* (o *conexión riemanniana*) de  $M$  y está determinada por la llamada *fórmula de Koszul*,

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &+ \langle [X, Y], Z \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

En un sistema de coordenadas locales  $(U, (x^i))$  en  $M$ , por la fórmula (2.3.3), tenemos que para los símbolos de la conexión de Levi-Civita, o denominados *símbolos de Christoffel* de la conexión,

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right),$$

como la matriz  $(g_{lm})$  admite una inversa  $(g^{lm})$ , entonces, multiplicando por  $g^{lm}$  ambos lados de la identidad anterior y sumando sobre  $l$ , obtenemos

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k \sum_{l=1}^m (g_{kl} g^{lm}) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \delta_k^m = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) g^{lm},$$

donde  $\delta_k^m$  la delta de Kronecker. Por tanto, se obtiene la representación de  $\Gamma_{ij}^m$  dada por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right\} g^{lk}. \quad (2.3.4)$$

En particular,  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \forall i, j, k$ .

**Ejemplo 2.3.4.** Sea  $M = \mathbb{R}^n$  con la métrica riemanniana estándar  $g_0$ , i.e.  $g_{ij} = \delta_i^j$ , entonces la conexión de Levi-Civita en  $(M, g_0)$  es  $\nabla_X Y = dY(X)$ .

En efecto, notemos que los símbolos de Christoffel dados por la representación (2.3.4) en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  son idénticamente 0 (i.e.,  $\Gamma_{ij}^k = 0$ ), así que para  $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M)$ , por (2.2.4) tenemos

$$\nabla_X Y = \sum_k \left( \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k + X(Y^k) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_k X(Y^k) \frac{\partial}{\partial x^k} = dY(X). \quad \triangle$$

*Observación.* Si  $M$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$  con la métrica inducida y  $P(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_x M$  es la proyección ortogonal para todo  $x \in M$ , entonces tenemos que la *derivada covariante*  $\frac{DV}{dt}$  de un campo vectorial  $V$  a lo largo de la curva  $\gamma$  en  $M$  con respecto a la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  está definida por (ver Figura 2.2)

$$\frac{DV}{dt} = P(\gamma(t)) \frac{d}{dt} V(t).$$

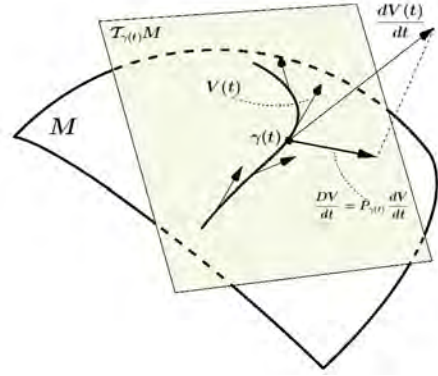


Figura 2.2: Derivada covariante de Levi-Civita.

## 2.4. Tensor de curvatura

En lo sucesivo, supondremos que  $M$  es una variedad riemanniana de dimensión  $m$  junto con la métrica  $g \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$  y la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . A partir de la conexión de Levi-Civita, podemos definir la curvatura para la variedad  $M$ , la que mide las desviaciones de la variedad riemanniana respecto al espacio euclidiano.

**Definición 2.4.1.** La *curvatura*  $R$  de una variedad riemanniana  $M$  es una correspondencia que asocia cada pareja  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  una aplicación  $R(X, Y): \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.4.1)$$

*Observación.* Se verifica fácilmente por las propiedades de la conexión de Levi-Civita y del corchete de Lie que  $R: (X, Y) \mapsto R(X, Y)$  es bilineal; así que  $R$  es un tensor de tipo (1,3), y se puede definir el *tensor de curvatura de Riemann* como una aplicación multilinear  $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  dado por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(Z, W)X, Y \rangle, \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.4.2)$$

En coordenadas locales, sea  $(U, (x^i))$  una carta local en  $M$ , escribimos

$$R \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^m R_{kij}^l \frac{\partial}{\partial x^l},$$

donde  $R_{kij}^l$  son los componentes de la curvatura  $R$  en la carta; por la definición de curvatura dada por (2.4.1) y la conexión dada en términos de los símbolos de Christoffel (2.2.3), tenemos que

$$R_{kij}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \sum_{h=1}^m \left( \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^l - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^l \right). \quad (2.4.3)$$

Además, los componentes del tensor de curvatura  $R$  en una carta local de  $M$  están dados por

$$R_{klij} := \sum_{s=1}^m R_{kij}^s g_{sl} = \left\langle R \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle. \quad (2.4.4)$$

**Ejemplo 2.4.2.** Por el Ejemplo 2.3.4, si  $M \equiv \mathbb{R}^n$  con la métrica estándar, sabemos que  $\mathbb{R}^n$  tiene curvatura cero.  $\triangle$

**Definición 2.4.3.** Dado  $p \in M$  y  $\Pi \subset \mathcal{T}_p M$  un plano en el espacio tangente  $\mathcal{T}_p M$ , para cualquier base  $\{u, v\}$  de  $\Pi$ , la *curvatura seccional* de  $\Pi$  está definida por

$$K(\Pi) \doteq K(u \wedge v) \doteq \frac{\langle R_p(u, v)v, u \rangle}{\|u \wedge v\|^2}, \quad (2.4.5)$$

donde  $\|v \wedge u\| = \sqrt{\|v\|^2 \|u\|^2 - \langle v, u \rangle^2} > 0$  representa el área del paralelogramo en el plano  $\Pi$  determinado por los vectores de la base  $u, v$ .

*Observación.* Es fácil verificar que el cociente anterior de la definición es invariante bajo las transformaciones elementales:  $A(v, u) = (v, u)$ ,  $B(v, u) = (\lambda v, u)$ ,  $C(v, u) = (v + \lambda u, u)$ . Entonces,  $K(\Pi)$  no depende de la base  $\{u, v\}$  elegida, así que tiene sentido la definición. Además, el tensor de curvatura de Riemann  $R$  queda determinado por las curvaturas seccionales de todos los planos  $\Pi$  de la variedad  $M$  (ver Jost [14]).

En ocasiones, denotaremos por  $\kappa_p(u, v) := K(u \wedge v) \|u \wedge v\|^2 = \langle R_p(u, v)v, u \rangle$ . En un caso particular, cuando  $\{u, v\}$  es una base ortonormal de  $(\Pi, g_p|_\Pi)$ , se tiene  $K(u \wedge v) = \kappa_p(u, v)$ . Con estas notaciones, si la curvatura seccional es constante (i.e., la curvatura seccional  $K(\Pi) = K \equiv \text{const.}$  para todos los planos  $\Pi \subseteq \mathcal{T}_p M$  y para todos los puntos  $p \in M$ ), tenemos la siguiente caracterización.

**Lema 2.4.4.** Dado  $p \in M$  un punto en la variedad riemanniana  $M$ , definimos  $R': \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dado por  $R'_p(v, u)w = \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v$ , para todo  $u, v, w \in \mathcal{T}_p M$ . Es decir,

$$\langle R'(X, Y)W, Z \rangle_p = \langle X, W \rangle_p \langle Y, Z \rangle_p - \langle Y, W \rangle_p \langle X, Z \rangle_p, \quad X, Y, W, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Entonces, si  $M$  tiene curvatura seccional constante igual a  $\kappa_0$ , donde  $\kappa_0 \in C^\infty(M)$ ; se tiene que para el tensor de curvatura  $R$ ,  $R = \kappa_0 R'$ .

Ahora consideramos la combinación de ciertas curvaturas seccionales que da nombre a la curvatura de Ricci:

**Definición 2.4.5.** Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , el *tensor de curvatura de Ricci* de la variedad riemanniana  $(M, g)$  es la función  $Ric(X, Y): M \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$Ric_p(X, Y) = \text{traza} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_p M & \longrightarrow & \mathcal{T}_p M \\ v & \longmapsto & R_p(v, X_p)Y_p \end{pmatrix},$$

donde  $R$  es el tensor de curvatura de  $M$ , y  $X_p = X(p)$ ,  $Y_p = Y(p) \in \mathcal{T}_p M$ .

*Observación.* Note que  $v \mapsto R_p(v, X_p)Y_p \in \text{End}(\mathcal{T}_p M)$  para cada  $p \in M$ , entonces tiene sentido su traza. Y obviamente que  $Ric_p$  es bilineal. Ahora si  $\{E_1, \dots, E_m\} \subset \mathfrak{X}(U)$  es una base local ortonormal de campos en  $M$ , entonces como  $Ric(X, Y) \in C^\infty(M)$ , se tiene que

$$Ric(X, Y)|_U = \sum_{i=1}^m \langle R(E_i, X)Y, E_i \rangle.$$



Además, se tiene que

$$Ric_p(X, X) = \sum_{i=1}^m \langle R(E_i, X)X, E_i \rangle_p.$$

En particular, si tomamos  $X = E_m$ , se tiene que

$$Ric_p(X, X) = \sum_{i=1}^{m-1} \kappa_p(X_p, E_i(p)), \quad (2.4.6)$$

donde  $\kappa_p(X_p, E_i(p))$  es la curvatura seccional del plano generado por los vectores  $X_p, E_i(p) \in \mathcal{T}_p M$ . Por lo tanto, la curvatura de Ricci  $Ric_p(X, X)$  es la suma de las curvaturas seccionales de los  $m - 1$  planos ortogonales que contienen al vector unitario  $X_p$ .

**Definición 2.4.6.** Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana, dado  $p \in M$  y  $\{e_1, \dots, e_m\}$  una base ortonormal del espacio tangente  $\mathcal{T}_p M$ , la *curvatura escalar* en el punto  $p$  es la contracción del tensor de Ricci, es decir, la función  $S: M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$S(p) = \sum_{i=1}^m Ric_p(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m-1} \kappa_p(e_i, e_j). \quad (2.4.7)$$

## 2.5. Geodésicas y campos de Jacobi

Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana de dimensión  $m$  junto con la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ .

**Definición 2.5.1.** Una curva parametrizada  $\gamma: I \rightarrow M$  se dice *geodésica* si y sólo si  $\frac{d\gamma}{dt}$  es paralelo, es decir

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Si  $[a, b] \subset I$  y  $\gamma: I \rightarrow M$  es una geodésica, la restricción de  $\gamma$  en  $[a, b]$  se llama un *segmento de geodésica* uniendo  $\gamma(a)$  con  $\gamma(b)$ .

*Observación.* Siendo  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita, si  $\gamma: I \rightarrow M$  es una geodésica, entonces

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) \right\rangle = 0$$

esto es, la longitud del vector tangente  $\frac{d\gamma}{dt}: \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle}$  es siempre constante, así que podemos suponer  $\|\gamma'(t)\| = c \neq 0$ . Consideremos la *longitud de arco*  $s$  de  $\gamma$ , relativo a un punto fijo  $t_0 \in I$  definida por

$$l(\gamma) := s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(x)\| dx = c(t - t_0), \quad \forall t \in I.$$

Entonces, el parámetro  $t$ , de una geodésica  $\gamma(t)$ , es proporcional a la longitud de arco. Cuando  $c = 1$ , la geodésica  $\gamma$  se dice *normalizada*.

En términos de una carta local  $(U, (x^i))$  de  $M$ , para las coordenadas de  $\gamma(t)$  dadas localmente en  $U$  por  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ ,  $t \in I$ , se tiene que  $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}$ , y por el sistema EDO (2.2.7) se deduce lo siguiente:

**Lema 2.5.2.** Una curva  $\gamma: I \rightarrow M$  es una geodésica si y sólo si

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad \forall k = 1, \dots, m, \quad t \in I. \quad (2.5.1)$$

Notemos que lo anterior es un sistema de EDO de segundo orden (también llamado ecuaciones locales de las geodésicas), luego definiendo las variables  $v^k = \frac{dx^k}{dt}$ , obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx^k}{dt} = v^k, \\ \frac{dv^k}{dt} = - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^i v^j, \quad \forall k = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (2.5.2)$$

lo cual es un sistema de EDO de primer orden, entonces con las condiciones iniciales  $\gamma(t_0), \gamma'(t_0)$ , existe una única solución del sistema para cada  $t_0 \in I$ . Así obtenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.5.3.** *Para cada punto  $p$  en la variedad riemanniana  $(M, g)$ ,  $v \in \mathcal{T}_p M$  y  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existe un intervalo abierto  $I_v \subseteq \mathbb{R}$  con  $t_0 \in I_v$  y una única geodésica  $\gamma_v: I_v \rightarrow M$  tal que  $\gamma_v(t_0) = p$ ,  $\gamma'_v(t_0) = v$ .*

*Observación.* La unicidad de la geodésica del teorema anterior nos dice que: si  $\alpha: I' \rightarrow M$  es una geodésica en  $(M, g)$  con  $t_0 \in I'$  tal que  $\gamma_v(t_0) = \alpha(t_0)$  y  $\gamma'_v(t_0) = \alpha'(t_0)$ , entonces  $\gamma_v = \alpha$  en  $I_v \cap I'$ . Sin pérdida de generalidad, en lo que sigue supondremos  $I_v = (-\delta, \delta)$  y  $t_0 = 0$ .

**Definición 2.5.4.** Una variedad riemanniana  $M$  se dice *completa* (o más precisamente, *geodésicamente completa*), si para todo vector tangente  $V \in \mathcal{T}M$ , existe una geodésica  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  tal que  $\gamma'(0) = V$ ; i.e., toda geodésica está definida sobre toda la recta real.

**Definición 2.5.5.** Para cada  $p \in M$  y  $v \in \mathcal{T}_p M$ , a la única geodésica  $\gamma_v$  con el dominio  $I_v$  maximal (i.e. no se puede extender), le denominamos la *geodésica maximal* con condiciones iniciales  $\gamma_v(0) = p$  y  $\gamma'_v(0) = v$ .

**Definición 2.5.6.** Para cada  $p \in M$ , sea  $\mathcal{U}(p)$  un subconjunto abierto de  $\mathcal{T}_p M$  dado por

$$\mathcal{U}(p) = \{v \in \mathcal{T}_p M \mid \gamma_v(1) \text{ está definida}\},$$

donde  $\gamma_v$  es la única geodésica maximal con condiciones iniciales  $\gamma_v(0) = p$  y  $\gamma'_v(0) = v$ . Entonces la función  $\exp_p: \mathcal{U}(p) \rightarrow M$  dada por

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1),$$

se llama la *aplicación exponencial* en  $\mathcal{U}(p)$ .

*Observación.* Para cada  $p \in M$ , se puede verificar que existe un entorno abierto  $B_\epsilon(o)$  del origen  $o$  del espacio tangente  $\mathcal{T}_p M$  tal que la aplicación exponencial es un difeomorfismo de  $B_\epsilon(o)$  sobre un entorno abierto  $U = \exp_p(B_\epsilon(o))$  de  $p$  en  $M$  (ver Do Carmo [4]). Luego si escogemos una base ortonormal  $\{E_i\}$  de  $\mathcal{T}_p M$  y usando el isomorfismo  $u_o: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{T}_p M$ , donde  $u_o(x^1, \dots, x^m) = \sum_{i=1}^m x^i E_i$ , obtenemos un sistema de coordenadas local  $(U, \varphi)$  dado por

$$\varphi := u_o^{-1} \circ (\exp_p)^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Estas coordenadas son llamadas *coordenadas normales* en  $p$ .

**Definición 2.5.7.** Si la aplicación exponencial  $\exp_p$  es un difeomorfismo de una vecindad  $V$  del origen  $o \in \mathcal{T}_p M$  sobre un conjunto abierto  $U = \exp_p(V)$ , entonces le llamamos a  $U$  una *vecindad normal* de  $p$ . Si  $B_\epsilon(o)$  es tal que  $\overline{B_\epsilon(o)} \subset V$ , decimos que  $\mathcal{B}_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(o))$  es la *bola normal* (o *bola geodésica*) con centro en  $p$  de radio  $\epsilon$ ; a la frontera de una bola geodésica le decimos la *esfera normal* (o *esfera geodésica*) en  $p$ , denotada por  $S_\epsilon(p)$ .

**Proposición 2.5.8.** *Sea  $p \in M$  un punto en la variedad riemanniana  $M$ , entonces existen una vecindad  $U \subset M$  de  $p$  y campos vectoriales  $E_1, \dots, E_m \in \mathfrak{X}(U)$ , ortonormales en cada punto de  $U$  tal que  $\nabla_{E_i} E_j = 0$  en el punto  $p$ . Esta familia  $\{E_i\}_{i=1}^m$  de campos vectoriales se llama un marco geodésico (local) en  $p$ .*

*Demostración.* Sean  $U = \exp_p(B_\epsilon(o))$  una vecindad normal de  $p$  suficientemente pequeña y  $\{e_i\}$  una base ortonormal de  $\mathcal{T}_p M$ . Para cualquier  $q \in U$ , sea  $\gamma$  la geodésica que une  $p$  con  $q$ . Usando el transporte paralelo, definimos

$$E_i(q) = P_{\gamma,p,q}(e_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Por la definición de transporte paralelo, tenemos que  $E_i \in \mathfrak{X}(U)$ , para cada  $i = 1, \dots, m$ ; y son ortonormales por ser el transporte paralelo un isomorfismo que preserva el producto interior. Más aún, como  $\gamma$  es una geodésica, para todo  $v \in \mathcal{T}_p M$ , se tiene que  $\nabla_v E_j(p) = 0$ ; por lo tanto  $\nabla_{E_i(p)} E_j(p) = 0$ .  $\square$

Ahora supongamos que  $M$  es una variedad riemanniana geodésicamente completa, entonces por el teorema de Hopf-Rinow (cf. do Carmo [4]), cualesquiera dos puntos  $p, q \in M$  pueden unirse por una geodésica minimizante  $\gamma$ ; es decir,

$$l(\gamma) = d(p, q) := \inf\{l(\alpha) : \alpha \text{ es una curva diferenciable a pedazos uniendo } p \text{ y } q\}.$$

Sea  $S_o M = \{v \in \mathcal{T}_p M : \|v\| = 1\}$  la esfera unitaria en  $\mathcal{T}_p M$  para  $o$  el origen de  $\mathcal{T}_p M$ , y definimos

$$\theta(v) = \max\{t > 0 : \text{la geodésica } \gamma_v|_{[0,t]} \text{ es minimizante}\}, \quad \forall v \in S_o M.$$

Esto define una función  $\theta: S_o M \rightarrow (0, \infty]$ , llamada la *distancia de corte*, la cual es continua (cf. do Carmo [4], pág. 272). Sea

$$C_o = \{tv : v \in S_o M, t \leq \theta(v)\}.$$

Esto es un subconjunto cerrado de  $\mathcal{T}_p M$ , y su frontera  $\tilde{C}_o = \{\theta(v)v : v \in S_o M\}$  (a veces también denotada por  $cut_p = \exp_p(\tilde{C}_o) \subset M$ ) se llama el *conjunto de corte* del punto  $p$  (i.e., el lugar geométrico de puntos de corte de  $p$  a lo largo de  $\gamma_v$ ). Se sigue de esta definición que

$$\mathcal{B}_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(o)) = \exp_p(B_\epsilon(o) \cap C_o), \quad \forall \epsilon > 0. \quad (2.5.3)$$

En efecto, si escogemos  $x \in \mathcal{B}_\epsilon(p)$ , entonces existe una geodésica minimizante  $\gamma_v$  uniendo  $p$  con  $x$ ; la longitud de  $\gamma_v$  tiene que ser menor o igual que  $\theta(v)$ , por tanto  $v \in C_o$ . En consecuencia, tenemos el siguiente resultado (cf. [11], Teorema 3.4.1).

**Teorema 2.5.9.** (a) *La aplicación exponencial  $\exp_p: C_o \setminus \tilde{C}_o \rightarrow \exp_p(C_o \setminus \tilde{C}_o)$  es un difeomorfismo.*

(b) *El conjunto de corte  $cut_p$  es un subconjunto cerrado de medida cero.*

(c) *Si  $x \in cut_y$ , entonces  $y \in cut_x$ .*

(d)  *$cut_p$  y  $E_p = \exp_p(C_o \setminus \tilde{C}_o)$  son disjuntos y  $M = cut_p \cup E_p$ .*

Ahora introducimos la definición del campo de Jacobi a lo largo de una geodésica y veremos un resultado que será útil más adelante.

**Definición 2.5.10.** Sea  $\gamma: I = [0, l] \rightarrow M$  una geodésica en la variedad riemanniana  $(M, g)$ . Un campo vectorial  $J$  a lo largo de  $\gamma$  se llama *campo de Jacobi* a lo largo de  $\gamma$  si satisface la *ecuación de Jacobi*; es decir,

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0, \quad \forall t \in I. \quad (2.5.4)$$

*Observación.* Se puede comprobar mediante expresiones locales que un campo de Jacobi está determinado totalmente por sus condiciones iniciales  $J(0)$  y  $\frac{DJ}{dt}(0)$  (ver Do Carmo [4]). Y por ser  $\gamma$  una geodésica en  $M$ , se verifica que  $t\gamma'(t)$  es un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$ . Otro ejemplo de campo de Jacobi es el siguiente en una variedad de curvatura seccional constante.

**Ejemplo 2.5.11.** Sea  $M$  una variedad riemanniana con curvatura seccional constante  $\kappa_0$ , y sea  $\gamma: [0, l] \rightarrow M$  una geodésica normalizada en  $M$ , tomamos  $J \in \mathfrak{X}(M)$  un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  y normal a  $\gamma'$ . Por la hipótesis que  $\|\gamma'\| = 1$  y el Lema 2.4.4, dado  $T \in \mathfrak{X}(M)$  un campo arbitrario a lo largo de  $\gamma$ , tenemos

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', T \rangle = \kappa_0 \{ \langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle J, \gamma' \rangle \langle \gamma', T \rangle \} = \kappa_0 \langle J, T \rangle.$$

Entonces, siendo  $T$  arbitrario, tenemos que  $R(\gamma', J)\gamma' = \kappa_0 J$ . Y como consecuencia, la ecuación de Jacobi para variedades de curvatura seccional constante tiene la forma

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + \kappa_0 J = 0. \quad (2.5.5)$$

△

**Proposición 2.5.12.** Sean  $\gamma: [0, l] \rightarrow M$  una geodésica en  $M$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ , y  $J$  un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  con  $J(0) = 0$  y  $\frac{DJ}{dt}(0) = w$ . Consideremos  $w$  como un elemento de  $\mathcal{T}_v(\mathcal{T}_p M)$ , construyamos una curva  $v(s)$  en  $\mathcal{T}_p M$  con  $v(0) = lv$ ,  $v'(0) = w$ . Sea  $f(t, s) = \exp_p(t v(s))$  y definamos un campo de Jacobi  $\tilde{J}$  dado por  $\tilde{J}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ . Entonces  $\tilde{J} = J$  en  $[0, l]$ .

*Demostración.* Es sencillo probar que  $\tilde{J}$  define un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma$  y además  $\tilde{J}(0) = 0$ . Notemos también que, por la definición de diferencial, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \exp_p(tv(s)) = d(\exp_p)_{tv}(tw).$$

Así, para  $s = 0$ , tenemos

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{D}{\partial t} (d(\exp_p)_{tv}(tw)) = \frac{D}{\partial t} (td(\exp_p)_{tv}(w)) = d(\exp_p)_{tv}(w) + t \frac{D}{\partial t} (d(\exp_p)_{tv}(w)).$$

Por lo tanto, para  $t = 0$ , se tiene

$$\frac{D\tilde{J}}{dt}(0) = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = d(\exp_p)_0(w) = w.$$

Es decir, tenemos  $J$  y  $\tilde{J}$  dos campos a lo largo de  $\gamma$  con  $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$  y  $\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D\tilde{J}}{dt}(0) = w$ . De la unicidad de campos de Jacobi concluimos que  $J = \tilde{J}$ . □

## 2.6. Operador de Laplace-Beltrami

En lo sucesivo, supondremos que  $(M, g)$  es una variedad riemanniana de dimensión  $m$  con la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . En esta sección veremos algunos operadores diferenciales importantes en la variedad riemanniana; en particular, un operador diferencial elíptico de segundo orden, llamado el *operador de Laplace-Beltrami*, que juega un papel importante en la definición del movimiento browniano en una variedad riemanniana. Al igual que el operador de Laplace en el espacio euclidiano, el operador de Laplace-Beltrami se define como la *divergencia del gradiente*; así que primero definimos el gradiente y la divergencia en  $M$ .

**Definición 2.6.1.** Sea  $f \in C^\infty(M)$ , para cada  $p \in M$ , se define el *gradiente de  $f$*  en  $p$  como el único vector de  $\mathcal{T}_p M$  denotado por  $(\text{grad } f)_p$  tal que

$$\langle (\text{grad } f)_p, v \rangle_p = df_p(v) = v(f), \quad \forall v \in \mathcal{T}_p M. \quad (2.6.1)$$

O equivalentemente,  $\langle \text{grad } f, X \rangle = X(f)$ ,  $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Dado  $(U, (x^i))$  un sistema de coordenadas local alrededor del punto  $p \in M$ , tenemos por la definición que para cada  $j = 1, \dots, m$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(f) = \left\langle (\text{grad } f)_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p = \left\langle \sum_{i=1}^m (\text{grad } f)_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_p = \sum_{i=1}^m (\text{grad } f)_p^i g_{ij},$$

donde  $(\text{grad } f)_p^i$  son los componentes de  $(\text{grad } f)_p$  en la base  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$  de  $\mathcal{T}_p M$ .

Multiplicando por  $g^{jk}$  ambos lados de la igualdad anterior y sumando sobre  $j$ , se tiene

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^j} g^{jk} = \sum_{i=1}^m (\text{grad } f)_p^i \left( \sum_{j=1}^m g_{ij} g^{jk} \right) = \sum_{i=1}^m (\text{grad } f)_p^i \delta_i^k = (\text{grad } f)_p^k.$$

Luego, obtenemos la expresión local de  $(\text{grad } f)_p$  dada por

$$(\text{grad } f)_p = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ji} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.6.2)$$

Además, de (2.6.2) concluimos que  $(\text{grad } f) \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definición 2.6.2.** Sea  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , la *divergencia de  $Y$*  es la aplicación  $\text{div } Y: M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$(\text{div } Y)_p = \text{tr} \left( \begin{array}{c} \mathcal{T}_p M \longrightarrow \mathcal{T}_p M \\ v_p \longmapsto \nabla_{v_p} Y \end{array} \right),$$

donde  $\text{tr}$  denota la traza del endomorfismo  $v_p \mapsto \nabla_{v_p} Y$  de  $\mathcal{T}_p M$  para cada  $p \in M$ .

En términos locales, dado  $(U, (x^i))$  una carta local en  $M$ , usando las notaciones de la Definición 2.2.5 y por (2.2.4), se tiene

$$\begin{aligned} \text{tr}(\nabla Y) &= \sum_{i=1}^m \left\langle \nabla_{X_i} Y, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \sum_{i=1}^m \nabla_{X_i} Y(x^i) = \sum_{i,j=1}^m \left( Y^j \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k X_k + X_i(Y^j) X_j \right) (x^i) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m Y^j \Gamma_{ij}^i + X_i(Y^i) \right) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial Y^i}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^m Y^i \sum_{j=1}^m \Gamma_{ji}^j. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Escribiendo los símbolos  $\Gamma_{ji}^j$  por la expresión (2.3.4), se tiene

$$\Gamma_{ji}^j = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ji} \right\} g^{kj} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial (g_{jk})}{\partial x^i} g^{kj}, \quad (2.6.4)$$

donde se cancelan el segundo y el tercer sumando anterior por ser la matriz  $(g_{kj})$  simétrica, así también es simétrica su inversa  $(g^{kj})$ .

Por otro lado, sean  $g = (g_{ij})$  y  $G = \det(g)$ , tenemos que

$$\frac{\partial G}{\partial x^i} = G \cdot \text{tr} \left( g^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^i} \right) = G \cdot \sum_{j,k} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} g^{kj}, \quad (2.6.5)$$

entonces  $\sum_j \Gamma_{ji}^j = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^i}$ , sustituyendo en (2.6.3), obtenemos

$$(\text{div } Y)|_U = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} (Y^i \sqrt{G}). \quad (2.6.6)$$

**Definición 2.6.3.** El *laplaciano* de  $f$  en  $M$  está definido como el operador diferencial de segundo orden  $\Delta_M: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  dado por

$$\Delta_M f \equiv \operatorname{div}(\operatorname{grad} f), \quad f \in C^\infty(M).$$

También llamado el *operador de Laplace-Beltrami*.

En un sistema local de coordenadas  $(U, (x^i))$ , (2.6.2) y (2.6.6) muestran que

$$\Delta_M f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right). \quad (2.6.7)$$

**Definición 2.6.4.** Para cada  $f \in C^\infty(M)$  y  $p \in M$ , el *hessiano* de  $f$  en  $p$  es la aplicación lineal  $(\operatorname{Hess} f)_p \equiv \nabla(df)_p: \mathcal{T}_p M \times \mathcal{T}_p M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(\operatorname{Hess} f)_p(v, w) = \langle \nabla_v(\operatorname{grad} f), w \rangle_p, \quad v, w \in \mathcal{T}_p M.$$

Notemos que  $(\operatorname{Hess} f)_p \in \mathcal{T}_p^* M \otimes \mathcal{T}_p^* M$ , entonces  $\operatorname{Hess} f: M \rightarrow \mathcal{T}^* M \otimes \mathcal{T}^* M$  es una forma bilineal, y para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  se tiene que  $(\operatorname{Hess} f)(X, Y) = \langle \nabla_X(\operatorname{grad} f), Y \rangle$ .

*Observación.* Para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f \in C^\infty(M)$ , por la definición de  $(\operatorname{grad} f)$  y la compatibilidad de  $\nabla$  con la métrica, tenemos que

$$\begin{aligned} XY(f) &= X \langle \operatorname{grad} f, Y \rangle = \langle \nabla_X(\operatorname{grad} f), Y \rangle + \langle \operatorname{grad} f, \nabla_X Y \rangle \\ &= (\operatorname{Hess} f)(X, Y) + \nabla_X Y(f), \end{aligned}$$

por tanto

$$(\operatorname{Hess} f)(X, Y) = XY(f) - \nabla_X Y(f). \quad (2.6.8)$$

Y por ser  $\nabla$  libre de torsión, se sigue que

$$(\operatorname{Hess} f)(X, Y) - (\operatorname{Hess} f)(Y, X) = [X, Y](f) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(f) = 0.$$

Es decir,  $\operatorname{Hess} f$  es una forma bilineal simétrica.

*Observación.* Si  $(U, (x^i))$  es un sistema de coordenadas local en  $M$ , podemos considerar las funciones  $(x^i)$  globalmente definidas. Así cada  $x^i$  tiene hessiano; por (2.6.8) y la caracterización de la conexión de Levi-Civita por los símbolos de Christoffel, la forma bilineal  $\operatorname{Hess} x^i$  se puede escribir en la forma única:

$$\operatorname{Hess} x^i = \sum_{j,k} -\Gamma_{jk}^i dx^j \otimes dx^k. \quad (2.6.9)$$

En general, para  $f \in C^\infty(M)$ , se tiene que

$$\operatorname{Hess} f = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) dx^i \otimes dx^j. \quad (2.6.10)$$

*Observación.* Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  campos vectoriales,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^p$  y  $\phi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables, entonces  $\phi \circ f \in C^\infty(M)$ ; por (2.6.8) y la regla de la cadena para campos vectoriales, se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}(\phi \circ f)(X, Y) &= XY(\phi \circ f) - \nabla_X Y(\phi \circ f) \\ &= \sum_{i=1}^p \left[ X \left( \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi \circ f) Y(f^i) \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi \circ f) \nabla_X Y(f^i) \right] \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial x^i \partial x^j} X(f^j) Y(f^i) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi \circ f) (XY(f^i) - \nabla_X Y(f^i)) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial x^i \partial x^j} df^i \otimes df^j(X, Y) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi \circ f) \operatorname{Hess} f^i(X, Y). \end{aligned}$$

Ahora, dados cualesquiera dos vectores  $v, w \in \mathcal{T}_p M$  tal que  $X(p) = v$  y  $Y(p) = w$ , se cumple lo anterior y por lo tanto,

$$\text{Hess}(\phi \circ f) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi \circ f) \text{Hess} f^i + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}(\phi \circ f) df^i \otimes df^j. \quad (2.6.11)$$

**Proposición 2.6.5.** *Sea  $\{E_i\}_{i=1}^m$  un marco en  $\mathfrak{X}(U)$  con  $U$  una vecindad de  $p \in M$  tal que  $\{E_i(p)\}_{i=1}^m$  es una base ortonormal de  $\mathcal{T}_p M$ . Entonces*

$$\Delta_M f = \text{tr}(\text{Hess} f) = \sum_{i=1}^m (\text{Hess} f)(E_i, E_i). \quad (2.6.12)$$

*Demostración.* En la base ortonormal  $\{E_i(p)\}$  de  $\mathcal{T}_p M$ , se tiene por la definición de laplaciano y de divergencia que

$$\Delta_M f = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{E_i}(\text{grad} f), E_i \rangle_p = \sum_{i=1}^m (\text{Hess} f)(E_i, E_i) = \text{tr}(\text{Hess} f).$$

Y por (2.6.8), equivalentemente se tiene que

$$\Delta_M f = \sum_{i=1}^m E_i E_i(f) - \nabla_{E_i} E_i(f). \quad (2.6.13) \quad \square$$

En consecuencia, de la definición  $\Delta_M f = \text{tr}(\text{Hess} f)$  y la expresión (2.6.10), también tenemos la siguiente expresión local de  $\Delta_M f$ :

$$\Delta_M f = \sum_{i,j} g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \quad (2.6.14)$$

Otra consecuencia de la proposición anterior es el siguiente resultado considerando  $M$  como una subvariedad cerrada de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.6.6.** *Supongamos que  $M$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$  con la métrica inducida. Sean  $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$  una base canónica ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  y  $P(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_x M$  la proyección ortogonal para cada  $x \in M$  tal que  $P_\alpha(x)$  es la proyección ortogonal de  $e_\alpha$  en  $\mathcal{T}_x M$ . Así,  $P_\alpha: M \rightarrow \mathcal{T}M$  es un campo vectorial en  $M$  y tenemos que  $\Delta_M = \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha^2$ .*

*Demostración.* Claramente,  $P_\alpha$  es un campo vectorial en  $M$ .

Sea  $x \in M$ , y consideremos  $\{E_i\}_{i=1}^m$  un marco geodésico local en  $x$ ; por la Proposición 2.5.8 y (2.6.13), tenemos que

$$\Delta_M f = \sum_{i=1}^m E_i E_i(f). \quad (2.6.15)$$

Además, tenemos que  $P_\alpha = \sum_{i=1}^m \langle e_\alpha, E_i \rangle E_i$  en cada punto  $x \in M$ , que es independiente de la base  $\{e_\alpha\}$  y el marco geodésico  $\{E_i\}$  en el punto  $x$ , así

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha^2(f) &= \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha(P_\alpha(f)) = \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha \left( \sum_{i=1}^m \langle e_\alpha, E_i \rangle E_i \right) (f) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^m \langle e_\alpha, E_j \rangle E_j \left( \sum_{i=1}^m \langle e_\alpha, E_i \rangle E_i(f) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^m \langle e_\alpha, E_j \rangle \left\{ \sum_{i=1}^m \left( E_j \langle e_\alpha, E_i \rangle E_i(f) + \langle e_\alpha, E_i \rangle E_j(E_i(f)) \right) \right\}, \end{aligned}$$

esta última igualdad es por la regla de Leibnitz, y notemos que para  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita,

$$E_j \langle e_\alpha, E_i \rangle = \langle \nabla_{E_j} e_\alpha, E_i \rangle + \langle e_\alpha, \nabla_{E_j} E_i \rangle;$$

como  $e_\alpha$  es paralelo y  $\{E_i\}$  es un marco geodésico en  $x$ ,  $E_j \langle e_\alpha, E_i \rangle = 0$  en el punto  $x$ . Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha^2(f) &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i,j=1}^m \langle e_\alpha, E_j \rangle \langle e_\alpha, E_i \rangle E_j(E_i(f)) = \sum_{i,j=1}^m \left\langle \sum_{\alpha=1}^n \langle e_\alpha, E_j \rangle e_\alpha, E_i \right\rangle E_j(E_i(f)) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \langle E_j, E_i \rangle E_j(E_i(f)) = \sum_{i,j=1}^m \delta_{ij} E_j(E_i(f)) \\ &= \sum_{i=1}^m E_i(E_i(f)) = \Delta_M f. \end{aligned} \quad \square$$

**Ejemplo 2.6.7.** Supongamos que  $M = \mathbb{R}^n$  con la métrica riemanniana estándar  $g_0$ , i.e.  $g_{ij} = \delta_i^j$ . Entonces para  $f$  función diferenciable en  $\mathbb{R}^n$  y  $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$  las siguientes fórmulas estándares son fáciles de verificar:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}, & \text{div } Y &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y^i}{\partial x^i}, \\ (\text{Hess } f)_{ij} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, & \Delta f &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}. \end{aligned} \quad \triangle$$



# Capítulo 3

## Extensión de conceptos estocásticos a variedades

### 3.1. Procesos de difusión en variedades

En el capítulo uno vimos que los conceptos de semimartingalas y de ecuaciones diferenciales estocásticas en un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  son invariantes bajo difeomorfismos, así que en esta sección veremos que estos conceptos pueden extenderse a una variedad diferenciable  $M$ .

Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  un espacio de probabilidad filtrado,  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$ , y consideremos el espacio  $\hat{W}(M)$  de trayectorias en  $M$  dado por la Definición 1.4.4. Además, sea  $i: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  un encaje que existe por el Teorema (2.1.8) de inmersión de Whitney, identificamos a la variedad  $M$  con la imagen  $i(M)$  en  $\mathbb{R}^n$  de manera que sea una subvariedad cerrada de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 3.1.1.** Sea  $\tau$  un  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempo de paro. Un proceso estocástico  $X: [0, \tau) \times \Omega \rightarrow M$  continuo y  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado con valores en  $M$  (i.e., una variable aleatoria  $X: \Omega \rightarrow \hat{W}(M)$  definida en  $[0, \tau)$ ) se llama una *semimartingala con valores en  $M$*  (o *semimartingala en  $M$* ) si para cada función  $f \in C^\infty(M)$ , el proceso  $f \circ X$  es una semimartingala con valores reales en  $[0, \tau)$ .

*Observación.* 1) Cuando  $M \equiv \mathbb{R}^m$ , la definición anterior coincide con la usual de semimartingalas por la fórmula de Itô.

2) Si  $\phi: M \rightarrow N$  es una función diferenciable entre las variedades  $M$  y  $N$ , y  $X$  es una semimartingala en  $M$ , entonces  $\phi \circ X$  es una semimartingala con valores en  $N$ .

**Definición 3.1.2.** Sean  $V_\alpha \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\alpha = 1, \dots, l$  campos vectoriales diferenciables en  $M$ ,  $Z$  una  $(\mathcal{F}_t)$ -semimartingala continua con valores en  $\mathbb{R}^l$  y  $X_0 \in \mathcal{F}_0$  una variable aleatoria con valores en  $M$ . Una *ecuación diferencial estocástica (de Stratonovich) en  $M$*  está definida por

$$X_t = X_0 + \sum_{\alpha} \int_0^t V_\alpha(X_s) \circ dZ_s^\alpha, \quad (3.1.1)$$

donde la integral es en el sentido de Stratonovich.

*Observación.* Si  $M \equiv \mathbb{R}^m$  en la definición anterior, por (1.3.9) y la fórmula de Itô, obtenemos la formulación equivalente de Itô de la ecuación (3.1.1):

$$X_t = X_0 + \sum_{\alpha=1}^l \int_0^t V_\alpha(X_s) dZ_s^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int_0^t \nabla_{V_\beta} V_\alpha(X_s) d[Z^\alpha, Z^\beta]_s, \quad (3.1.2)$$

donde  $\nabla_{V_\beta} V_\alpha$  es la derivada de  $V_\alpha$  lo largo de  $V_\beta$ . Y como consecuencia de la fórmula de Itô (1.3.20), tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.1.3.** Una semimartingala  $X$  con valores en  $M$  definida hasta un tiempo de paro  $\tau$  es una *solución de la ecuación diferencial estocástica* (3.1.1) hasta  $\tau$  si para todo  $f \in C^\infty(M)$ , se tiene

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{\alpha} \int_0^t V_{\alpha}(f)(X_s) \circ dZ_s^{\alpha}, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (3.1.3)$$

*Observación.* Si  $M$  es una subvariedad cerrada de  $\mathbb{R}^n$ , un punto  $x \in M$  tiene las coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  como un punto en  $\mathbb{R}^n$ . Sean  $f^i(x) = x^i$  las funciones coordenadas en  $M$ , un proceso  $X$  con valores en  $M$  es una semimartingala si y sólo si para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $X^i = f^i(X)$  es una semimartingala con valores reales (i.e.,  $X$  es una semimartingala con valores en  $\mathbb{R}^n$ ). Más aún, estas  $n$  funciones coordenadas sirven para la comprobación de la fórmula de Itô en  $M$  dada por (3.1.3) (cf. Hsu [11], Proposición 1.2.7).

Para la ecuación diferencial estocástica (EDE) (3.1.1) y  $M$  una subvariedad cerrada de  $\mathbb{R}^n$ , se tiene que cada campo vectorial  $V_\alpha$  es la restricción a  $M$  de un campo vectorial diferenciable  $\tilde{V}_\alpha$  en  $\mathbb{R}^n$ . La EDE en  $\mathbb{R}^n$  correspondiente a los campos vectoriales  $\tilde{V}_\alpha$  está dada por

$$X_t = X_0 + \sum_{\alpha} \int_0^t \tilde{V}_\alpha(X_s) \circ dZ_s^{\alpha}. \quad (3.1.4)$$

Por la relación (3.1.2) y el Teorema 1.4.6 de existencia y unicidad de soluciones, se tiene que existe una solución única a la ecuación (3.1.4) hasta su tiempo de explosión  $e(X)$ .

Ahora si  $X$  es una solución a la EDE (3.1.4) que empieza en  $M$ , i.e., con valor inicial  $X_0 \in M$ , como los campos vectoriales  $\tilde{V}_\alpha$  son tangentes a  $M$  en  $M$ , entonces  $X$  nunca sale de  $M$ , es decir,  $X_t \in M$  para todo  $0 \leq t < e(X)$  (ver Hsu [11], Proposición 1.2.8). Por lo tanto,  $e(X)$  también es el tiempo de explosión de  $X$  como una semimartingala en  $M$ .

En consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.4.** *Existe una solución única de la EDE (3.1.1) en la variedad  $M$  hasta su tiempo de explosión.*

Ahora la definición de un proceso de  $L$ -difusión en  $M$  es análoga a la Definición 1.5.5 para  $L$  un operador en  $M$  y de manera análoga a la construcción de un proceso de difusión en  $\mathbb{R}^n$ ; dados  $V_0, V_1, \dots, V_l \in \mathfrak{X}(M)$ , consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica en  $M$ :

$$dX_t = \sum_{\alpha=1}^l V_{\alpha}(X_t) \circ dB_t^{\alpha} + V_0(X_t) dt, \quad (3.1.5)$$

donde  $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^l)$  es un movimiento browniano de dimensión  $l$  con  $B_0 = 0$ .

**Teorema 3.1.5.** *Sea  $\mathbb{P}_x$  una distribución de probabilidad en  $\hat{W}(M)$  de la solución  $X = (X_t)_{0 \leq t < e}$  de la EDE (3.1.5) con valor inicial  $X_0 = x \in M$ . Entonces  $\{\mathbb{P}_x\}_{x \in M}$  es una difusión generada por el operador diferencial de segundo orden en  $M$  dado por*

$$Lf = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^l V_{\alpha}(V_{\alpha}(f)) + V_0(f), \quad f \in C_K^{\infty}(M). \quad (3.1.6)$$

*Demostración.* Como para cada  $f \in C_K^\infty(M)$ , se tiene que por (3.1.3) y (1.3.9),

$$\begin{aligned} df(X_t) &= \sum_\alpha V_\alpha(f)(X_t) \circ dB_t^\alpha + V_0(f)(X_t) dt \\ &= \sum_\alpha V_\alpha(f)(X_t) dB_t^\alpha + \frac{1}{2} \sum_\alpha d(V_\alpha(f))(X_t) \cdot dB_t^\alpha + V_0(f)(X_t) dt. \end{aligned}$$

Además,

$$d(V_\alpha(f))(X_t) = \sum_\beta V_\beta(V_\alpha(f))(X_t) \circ dB_t^\beta + V_0(V_\alpha(f))(X_t) dt,$$

entonces, tenemos por el Lema 1.2.5 que

$$d(V_\alpha(f))(X_t) \cdot dB_t^\alpha = V_\alpha(V_\alpha(f))(X_t) dt.$$

Por lo tanto,

$$df(X_t) = \sum_{\alpha=1}^l V_\alpha(f)(X_t) dB_t^\alpha + Lf(X_t) dt, \quad (3.1.7)$$

donde  $Lf$  está definida por (3.1.6). Como podemos extender cada campo vectorial  $V_\alpha$  a uno  $\tilde{V}_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$ , y extender  $f$  a una función diferenciable  $\tilde{f}$  en  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que  $\sum_\alpha V_\alpha(f)(X_t) dB_t^\alpha$  es una martingala. La propiedad markoviana fuerte de  $\{\mathbb{P}_x\}$  se sigue de la unicidad de soluciones de la EDE que se demuestra de manera análoga al Teorema 1.5.6.  $\square$

*Observación.* Por argumentos similares a los de la Sección 1.3, podemos deducir la unicidad de una  $L$ -difusión  $\{\mathbb{P}_x\}_{x \in M}$  en  $\tilde{W}(M)$  a partir de la unicidad de la solución de la EDE (3.1.5).

Sea  $(U, (x^i))$  un sistema de coordenadas local en  $M$ , entonces el operador diferencial  $L$  en  $M$  tiene una expresión local de la siguiente forma:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^m b^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.1.8)$$

donde las funciones  $a = (a^{ij}): U \rightarrow \mathcal{S}_m^+$  y  $b = (b^i): U \rightarrow \mathbb{R}^m$  son diferenciables.

Cuando  $M$  es una subvariedad cerrada de  $\mathbb{R}^n$ ,  $L$  puede extenderse a un operador  $\tilde{L}$  del mismo tipo en  $\mathbb{R}^n$ , por el Teorema 1.5.7, se tiene la existencia y unicidad de la  $\tilde{L}$ -difusión en  $\mathbb{R}^n$ , y por lo tanto la de  $L$ -difusión en  $M$ .

En efecto, sean  $y = \{y_1, \dots, y_n\}$  denota las coordenadas de  $\mathbb{R}^n$  y  $\{f^\alpha\}$  las funciones coordenadas en  $M$ , entonces  $f^\alpha \in C^\infty(M)$  para todo  $\alpha = 1, \dots, n$ . Para cada  $f, g \in C^\infty(M)$ , definimos  $\Gamma(f, g) = L(fg) - fL(g) - gL(f)$ .

Entonces, en expresión local se tiene

$$\Gamma(f, g) = \sum_{i,j} a^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Y se puede verificar que la matriz  $\{\Gamma(f^\alpha, f^\beta)\}$  es simétrica y definida positiva. Así, sean  $\tilde{a}^{\alpha\beta} = \Gamma(f^\alpha, f^\beta)$  y  $\tilde{b}^\alpha = L(f^\alpha)$ ; estas son funciones diferenciables en  $M$ , y podemos extenderlas a  $\tilde{a}$  y  $\tilde{b}$  funciones diferenciables en  $\mathbb{R}^n$  que toman valores en  $\mathcal{S}_n^+$  y  $\mathbb{R}^n$  respectivamente. Por lo tanto, tenemos la extensión de  $L$  al espacio ambiente  $\mathbb{R}^n$ , el operador

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^n \tilde{a}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} + \sum_{\alpha=1}^n \tilde{b}^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

Notemos que para cualquier  $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , extensión de  $f \in C^\infty(M)$  de  $M$  a  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $f(x) = \tilde{f}(f^1(x), \dots, f^n(x))$  para  $x \in M$ . Así tenemos que  $\tilde{L}(\tilde{f}) = L(f)$  en  $M$  calculando  $L(f)$  usando (3.1.8) y por la regla de la cadena.

## 3.2. Integrales de línea estocásticas

Hemos visto en el capítulo uno que la variación cuadrática juega un papel importante en los cálculos estocásticos, así vamos a definir algo similar para semimartingalas con valores en una variedad diferenciable.

Primero, notemos que de la sección anterior, la fórmula de Itô (3.1.3) muestra que la diferencial estocástica de Stratonovich se transforma bajo un cambio de coordenadas como un vector tangente. Como consecuencia, si  $M$  es una subvariedad cerrada de  $\mathbb{R}^n$ , se obtiene el siguiente resultado.

**Lema 3.2.1.** *Supongamos que  $M$  es una subvariedad cerrada de  $\mathbb{R}^n$  y que  $P(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_x M$  es una proyección ortogonal para cada  $x \in M$ . Si  $X$  es una semimartingala con valores en  $M$ , entonces*

$$X_t = X_0 + \int_0^t P(X_s) \circ dX_s. \quad (3.2.1)$$

*Demostración.* Consideremos  $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$  una base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y definamos

$$P_\alpha(x) = P(x)(e_\alpha), \quad Q_\alpha(x) = e_\alpha - P(x)(e_\alpha);$$

es decir,  $P_\alpha(x)$  es tangente a  $M$ ,  $Q_\alpha(x)$  es normal a  $M$ , y  $P_\alpha(x) + Q_\alpha(x) = e_\alpha$ . Además, sabemos que  $P_\alpha$  es un campo vectorial en  $M$ . Sea

$$Y_t = X_0 + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t P_\alpha(X_s) \circ dX_s^\alpha. \quad (3.2.2)$$

donde  $X^\alpha$  es la  $\alpha$ -ésima coordenada de  $X$  como una semimartingala en  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora sea  $d_{\mathbb{R}^n}(x, M)$  la distancia euclidiana entre  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $M$  con  $\infty \notin M$ . Siendo que  $M$  es cerrada, la función  $f(x) = d_{\mathbb{R}^n}(x, M)^2$  es diferenciable en una vecindad de  $M$ , por molificación, podemos suponer  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $f$  es no negativa y  $f(x) = 0$  si y sólo si  $x \in M$ . Luego, por la fórmula de Itô (3.1.3), se tiene

$$f(Y_t) = f(X_0) + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t P_\alpha(f)(X_s) \circ dX_s^\alpha. \quad (3.2.3)$$

Como para cada  $x \in M$ ,  $P_\alpha(x) \in \mathcal{T}_x M$  y  $P_\alpha(f)(x) = 0$ ; entonces  $P_\alpha(f)(X_s) = 0$  y  $f(Y_t) = 0$ , por lo tanto,  $Y_t \in M$ .

Definimos la función  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $h(x) \in M$  es el punto más cercano a  $x$ . Como  $M$  es cerrada,  $h$  está bien definida y diferenciable en una vecindad de  $M$ . Notemos que para cada segmento perpendicular a  $M$ ,  $h$  es una constante, y se tiene que  $Q_\alpha h(x) = 0$  para  $x \in M$  por  $Q_\alpha$  es normal a  $M$ . En consecuencia, considerando  $e_\alpha$  como un campo vectorial en  $\mathbb{R}^n$ , tenemos

$$P_\alpha(h)(x) = P_\alpha(h)(x) + Q_\alpha(h)(x) = e_\alpha h(x), \quad x \in M.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} Y_t = h(Y_t) &= X_0 + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t P_\alpha(h)(X_s) \circ dX_s^\alpha \\ &= X_0 + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t e_\alpha h(X_s) \circ dX_s^\alpha = h(X_t) = X_t. \end{aligned} \quad \square$$

Con el resultado anterior, se deduce las definiciones de las integrales de Stratonovich y cuadrática, que son integrales de línea a lo largo de una semimartingala  $X$  con valores en  $M$ . Antes de la definición, consideremos las siguientes notaciones:

Sea  $\alpha: M \rightarrow \mathcal{T}^* M$  una 1-forma en  $M$ , definimos  $\tilde{\alpha}: M \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$  dada por

$$\tilde{\alpha}(x)(v) \equiv \alpha(x)(P(x)v), \quad \text{para todo } x \in M, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad (3.2.4)$$

donde  $P(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_x M$  es la proyección ortogonal; y para  $\rho: M \rightarrow \mathcal{T}^* M \otimes \mathcal{T}^* M$  una forma bilineal en  $M$ , sea  $\tilde{\rho}: M \rightarrow \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*}$  definida por

$$\tilde{\rho}(x)(v, w) = \rho(x)(P(x)v, P(x)w), \quad \text{para todo } x \in M, \quad v, w \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2.5)$$

**Definición 3.2.2.** Sean  $M$  una subvariedad cerrada de  $\mathbb{R}^n$ ,  $X$  una semimartingala con valores en  $M$ ,  $\alpha$  una 1-forma en  $M$  y  $\rho$  una forma bilineal en  $M$ . Entonces la *integral de Stratonovich* de  $\alpha$  lo largo de  $X$  está dada por

$$\int \alpha(\circ dX) \equiv \int \tilde{\alpha}(X) \circ dX, \quad (3.2.6)$$

y la *integral de Itô* está dada por

$$\int \alpha(dX) \equiv \int \tilde{\alpha}(X) dX, \quad (3.2.7)$$

donde las integrales estocásticas del lado derecho de las dos ecuaciones anteriores son en el sentido de Stratonovich y de Itô respectivamente. También definimos la *integral cuadrática de  $\rho$  lo largo de  $X$*  (o  $\rho$ -variación cuadrática de  $X$ ) por

$$\int \rho(dX, dX) \equiv \int \tilde{\rho}(X)(dX, dX). \quad (3.2.8)$$

*Observación.* Por la definición y la notación (3.2.4), dada  $\{e_i\}_{i=1}^n$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ , tenemos la siguiente expresión de la integral de Stratonovich:

$$\int \alpha(\circ dX) \equiv \int \alpha(X)(P(X) \circ dX) \equiv \sum_{i=1}^n \int \tilde{\alpha}(X)(e_i) \circ dX^i. \quad (3.2.9)$$

También, por la notación (3.2.5), como la forma bilineal tiene la expresión (2.1.12), identificando a la base  $\{e_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$  como una base de  $\mathcal{T}_x M$ , obtenemos la siguiente expresión de la integral cuadrática:

$$\int \rho(dX, dX) \equiv \int \rho(X)(P(X)dX, P(X)dX) \equiv \sum_{i,j=1}^n \int \tilde{\rho}(X)(e_i, e_j) d[X^i, X^j], \quad (3.2.10)$$

donde  $X^i$  es la  $i$ -ésima coordenada de  $X$  como una semimartingala en  $\mathbb{R}^n$ , y  $[X^i, X^j]$  es la variación cuadrática de  $X^i$  y  $X^j$ .

*Observación.* Es claro por la ecuación (3.2.10) que la  $\rho$ -variación cuadrática  $\int \rho(dX, dX)$  es un proceso continuo con variación finita en compactos, y su valor en el tiempo  $t$  está denotado por  $\int_0^t \rho(dX_s, dX_s)$ .

*Observación.* Las definiciones anteriores pueden ser generalizadas como sigue: Supongamos ahora que  $\alpha = (\alpha_s)_{s \geq 0}$  es una semimartingala con valores en  $\mathcal{T}^* M$  sobre  $X = (X_s)_{s \geq 0}$ , una semimartingala en  $M$ , es decir,  $\alpha_s \in \mathcal{T}_{X_s}^* M$  para todo  $s \geq 0$ . Si definimos ahora que

$$\tilde{\alpha}_s(v) \equiv \alpha_s(P(X_s)(v)),$$

entonces tenemos que

$$\int_0^t \alpha_s(\circ dX_s) \equiv \int_0^t \tilde{\alpha}_s \circ dX_s, \quad (3.2.11)$$

$$\text{y} \quad \int_0^t \alpha_s(dX_s) \equiv \int_0^t \tilde{\alpha}_s dX_s. \quad (3.2.12)$$

Similarmente, si  $\rho = (\rho_t)_{t \geq 0}$  es un proceso predecible en  $\mathcal{T}^* M \otimes \mathcal{T}^* M$  sobre  $X$ , i.e.,  $\rho_s \in \mathcal{T}_{X_s}^* M \otimes \mathcal{T}_{X_s}^* M$  para todo  $s$ , sea

$$\int_0^t \rho_s(dX_s, dX_s) = \int_0^t \tilde{\rho}_s(dX, dX), \quad (3.2.13)$$

donde

$$\tilde{\rho}_s(v, w) \equiv \rho_s(P(X_s)v, P(X_s)w),$$

$$y \quad \tilde{\rho}(dX, dX) = \sum_{i,j=1}^n \tilde{\rho}(e_i, e_j) d[X^i, X^j]$$

como en la ecuación (3.2.10).

Las aproximaciones discretas (en el sentido de convergencia en probabilidad) a las integrales en la variedad  $M$ , se obtienen de manera similar a las aproximaciones discretas a las integrales en un espacio euclidiano que vimos en la Sección 1.3. Más detalles pueden consultarse en Emery [6].

**Lema 3.2.3.** *Sea  $X$  una semimartingala con valores en  $M$ , entonces para todo  $f, g, h \in C^\infty(M)$ , se tiene que*

$$\int (f dh \otimes dg) (dX, dX) = \int (f \circ X) d[h \circ X, g \circ X]. \quad (3.2.14)$$

*Demostración.* Sea  $\{e_i\}_{i=1}^n$  una base ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ , por el Lema 3.2.1, y la expresión (3.2.3) aplicada a las funciones coordenadas  $\{f^i\}$ , tenemos que

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{k=1}^n \int_0^t P_k(f^i)(X_s) dX_s^k + V.A.,$$

donde  $V.A.$  representa un proceso de variación acotada. Entonces,

$$d[X^i, X^j]_t = \sum_{k,l} (P_k(f^i)(X_t)) (P_l(f^j)(X_t)) d[X^k, X^l]_t. \quad (3.2.15)$$

Ahora sean  $H$  y  $G$  funciones diferenciables en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $h = H|_M$  y  $g = G|_M$ . Por la fórmula de Itô en  $\mathbb{R}^n$  y la ecuación (3.2.15), se tiene

$$\begin{aligned} d[h(X), g(X)]_t &= \sum_{i,j} \left[ (H'(X)e_i) dX^i, (G'(X)e_j) dX^j \right]_t \\ &= \sum_{i,j,k,l} (H'(X_t)e_i) (G'(X_t)e_j) (P_k(f^i)(X_t)) (P_l(f^j)(X_t)) d[X^k, X^l]_t \end{aligned}$$

donde  $H'(X_s)e_i$  y  $G'(X_s)e_i$  son las derivadas direccionales de  $H$  y  $G$  en la dirección de  $e_i$  respectivamente, y como  $f^i$  es la función coordenada  $i$ -ésima, entonces

$$d[h(X), g(X)]_t = \sum_{k,l} (H'(X_t) P_k(X_t)) (G'(X_t) P_l(X_t)) d[X^k, X^l]_t. \quad (3.2.16)$$

Sea  $\rho = f dh \otimes dg$ , entonces

$$\tilde{\rho}(x) = f(x) \cdot (H'(x)P(x)) \otimes (G'(x)P(x)),$$

se sigue de la ecuación (3.2.10) y las dos ecuaciones anteriores que

$$\begin{aligned} \int_0^t f(X_s) d[h(X), g(X)]_s &= \int_0^t \sum_{k,l} f(X_s) (H'(X_s) P_k(X_s)) (G'(X_s) P_l(X_s)) d[X^k, X^l]_s \\ &= \int_0^t \sum_{k,l} \tilde{\rho}(X_s)(e_k, e_l) d[X^k, X^l]_s \\ &= \int_0^t (f dh \otimes dg)(dX_s, dX_s). \end{aligned} \quad \square$$

*Observación.* Por el Lema 2.1.17, cualquier forma bilineal  $\rho$  en  $M$  puede escribirse como

la suma finita  $\sum_{i,j} \rho_{ij} dh^i \otimes dh^j$ , entonces el lema anterior muestra que la  $\rho$ -variación cuadrática está definida intrínsecamente independiente de la inmersión.

**Proposición 3.2.4.** *Sean  $X$  una semimartingala con valores en  $M$  y  $\rho: M \rightarrow \mathcal{T}^*M \otimes \mathcal{T}^*M$  una forma bilineal, entonces la  $\rho$ -variación cuadrática  $\int \rho(dX, dX)$  tiene las siguientes propiedades:*

- (a) *El proceso  $\int \rho(dX, dX)$  sólo depende de la parte simétrica de  $\rho$ ; si  $\rho$  es antisimétrica, entonces  $\int \rho(dX, dX) = 0$ .*
- (b) *Sea  $(U, (x^i))$  una carta local en  $M$ , si  $X$  toma sus valores sobre  $U$  en un intervalo aleatorio  $(S, T)$  y  $\rho$  tiene representación local dada por  $\sum_{i,j} \rho_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , entonces, en el intervalo  $(S, T)$ , se tiene que  $\rho(dX, dX) = \sum_{i,j} \rho_{ij}(X) d[X^i, X^j]$ .*

*Demostración.* (a) Notemos que la parte simétrica de  $\rho$  está definida por  $\rho^{sim}(V, W) = \frac{1}{2}(\rho(V, W) + \rho(W, V))$ , entonces para  $f, g, h \in C^\infty(M)$ ,  $(f dh \otimes dg)^{sim} = f(dg \otimes dh)$ , y como  $[h \circ X, g \circ X] = [g \circ X, h \circ X]$ , el lema y la observación anterior nos dice que  $\int \rho(dX, dX) = \int \rho^{sim}(dX, dX)$ .

(b) Sean  $K$  un conjunto compacto en  $U$  y  $\phi \in C^\infty(M)$  una función diferenciable con soporte  $sop(\phi)$  compacto en  $U$  e igual a 1 en  $K$ . Denotamos por  $y^i \in C^\infty(M)$  tal que  $y^i = x^i|_{sop(\phi)}$ , así tenemos que  $\phi\rho = \sum_{i,j} \phi\rho_{ij} dy^i \otimes dy^j$ ; por lo tanto, en  $(S, T)$ , se tiene

$$(\phi\rho)(dX, dX) = \sum_{i,j} (\phi \circ X)(\rho_{ij} \circ X) d[y^i \circ X, y^j \circ X] = \sum_{i,j} (\phi \circ X)(\rho_{ij} \circ X) d[X^i, X^j].$$

En consecuencia,  $\rho(dX, dX) = \sum_{i,j} \rho_{ij}(X) d[X^i, X^j]$  en el conjunto boreliano  $(S, T) \cap \{X \in K\}$ ; y como  $K$  es arbitrario, entonces se vale la igualdad en todo  $(S, T)$ .  $\square$

### 3.3. Martingalas en una variedad riemanniana

Al igual que las semimartingalas y las ecuaciones diferenciales estocásticas, las martingalas (locales) también se pueden extender de un espacio euclidiano a una variedad diferenciable dotada de una conexión afín  $\nabla$  (cf. Emery [6]). En esta sección sólo nos restringiremos al caso de martingalas en una variedad riemanniana  $(M, g)$  con la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ .

**Definición 3.3.1.** Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana con la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . Una semimartingala  $X$  con valores en  $M$  es una  $\nabla$ -martingala si y sólo si

$$N^f(X)_t \doteq f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess } f(dX_s, dX_s) \quad (3.3.1)$$

es una martingala local con valores reales para todo  $f \in C^\infty(M)$ .

*Observación.* Como vimos en la Sección 2.6, el hessiano  $\text{Hess } f$  es simétrico cuando la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  es libre de torsión. Por la propiedad (a) de la Proposición 3.2.4, está bien definida la  $\nabla$ -martingala.

Una propiedad del hessiano se puede obtener mediante la definición de  $\nabla$ -martingala, la cual también es consecuencia de (2.6.11):

$$\text{Hess}(f^2) = 2f \text{Hess } f + 2df \otimes df, \quad \forall f \in C^\infty(M). \quad (3.3.2)$$

En efecto, supongamos que  $X$  es una  $\nabla$ -martingala, y  $f \in C^\infty(M)$ ; por la definición, se tiene

$$\frac{1}{2} \int \text{Hess } f^2(dX, dX) + N^1 = f^2(X) - f^2(X_0),$$

por otro lado, de la fórmula de Itô y la integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned} f^2(X) - f^2(X_0) &= 2 \int f(X) d(f(X)) + [f(X), f(X)] \\ &= 2 \int f(X) \left( \frac{1}{2} \text{Hess } f(dX, dX) + N^2 \right) + \int (df \otimes df)(dX, dX) \\ &= \int (f \text{ Hess } f + df \otimes df)(dX, dX) + N^3, \end{aligned}$$

donde  $N^1$ ,  $N^2$  y  $N^3$  representan martingalas locales. La segunda igualdad de la ecuación anterior es por la definición de  $\nabla$ -martingala para  $f$  y la ecuación (3.2.14).

Notemos que las dos ecuaciones anteriores se hacen cero cuando  $t = 0$  ( $N_0^i = 0$ , c.s.,  $i = 1, 2, 3$ ), entonces los procesos con variación finita son iguales, y las formas bilineales  $\frac{1}{2} \text{Hess } f^2$  y  $f \text{ Hess } f + df \otimes df$  tienen la misma integral a lo largo de cualquier martingala. Por lo tanto, se obtiene (3.3.2).

*Observación.* Sabemos que si  $M = \mathbb{R}^n$  con la conexión usual (Ejemplo 2.3.4), entonces una martingala con valores en  $M$  es una martingala local en  $\mathbb{R}^n$ , y vemos que una  $\nabla$ -martingala también es local:

**Proposición 3.3.2.** *Sea  $X$  un proceso con valores en  $M$  y  $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempos de paro con  $\tau_0 = 0$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$ . Entonces  $X$  es una  $\nabla$ -martingala si y sólo si cada proceso parado  $X^{\lceil \tau_k}$  es una  $\nabla$ -martingala.*

*Demostración.* Para cada función  $f \in C^\infty(M)$  y  $X$  una semimartingala con valores en  $M$ , usando la notación de (3.3.1),  $X$  es una  $\nabla$ -martingala si y sólo si cada  $N^f(X)$  es una martingala local ordinaria; es decir, si y sólo si  $(N^f(X))^{\lceil \tau_k}$  es una martingala para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Por la Proposición 1.3.8,  $(N^f(X))^{\lceil \tau} = N^f(X^{\lceil \tau})$  para  $\tau$  un tiempo de paro. En consecuencia,  $N^f(X^{\lceil \tau_k})$  es una martingala local para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, cada proceso parado  $X^{\lceil \tau_k}$  es una  $\nabla$ -martingala.  $\square$

*Observación.* La proposición anterior muestra que si  $M$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $X$  es una  $\nabla$ -martingala en  $M$  si y sólo si para las funciones coordenadas  $f^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , se tiene que las  $N^{f^i}(X)$  definidas por (3.3.1) son martingalas locales. Así que es suficiente verificar la Definición 3.3.1 para el conjunto finito de funciones coordenadas  $\{f^1, \dots, f^n\}$ .

Ahora damos una expresión en coordenadas locales de una  $\nabla$ -martingala.

**Proposición 3.3.3.** *Sean  $(U, (x^i))$  una carta local en  $M$  y  $X = (X^1, \dots, X^m)$  una semimartingala con valores en  $M$ . Entonces  $X$  es una  $\nabla$ -martingala si y sólo si*

$$X^i = X_0^i + N^i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \int \Gamma_{jk}^i(X) d[X^j, X^k], \quad (3.3.3)$$

donde  $N^i$  es alguna martingala local con valores reales.

*Demostración.* Primero supongamos que  $(x^i)$  son coordenadas globalmente definidas. Por la observación anterior, sabemos que una semimartingala  $X$  es una  $\nabla$ -martingala si y sólo si para cada función coordenada  $x^i$ , se tiene

$$\begin{aligned} X_t^i &= X_0^i + N_t^i + \frac{1}{2} \int_0^t (\text{Hess } x^i)(dX_s, dX_s) \\ &= X_0^i + N_t^i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \int_0^t \Gamma_{jk}^i(X_s) d[X^j, X^k]_s. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$



donde  $N^i = (N_t^i)_{t \geq 0}$  es alguna martingala local con valores reales. La segunda igualdad se obtiene por la expresión local de Hess  $x^i$  dada por (2.6.9) y la propiedad (b) de la Proposición 3.2.4.

Cuando  $(U, (x^i))$  son coordenadas locales, para cada  $\nabla$ -martingala  $X$ , existe  $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de tiempos de paro con  $\tau_0 = 0$ ,  $\lim_{k \uparrow \infty} \tau_k = \infty$  tal que  $X_t \in U$  para todo  $t$  en un subintervalo  $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ . Entonces por la Proposición 3.3.2,  $X|_{\tau_k}$  es una  $\nabla$ -martingala, así que es posible caracterizar localmente las  $\nabla$ -martingalas por la ecuación (3.3.3) en el intervalo  $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ .  $\square$

*Observación.* Notemos de la expresión (3.3.4) que, como cada  $X^i$  es una semimartingala con valores reales, y  $N^i$  es una martingala local con valores reales, entonces por la Proposición 1.1.16, tenemos que

$$X^i = X_0^i + N^i - \frac{1}{2} \int \Gamma_{jk}^i(X) d[N^j, N^k]. \quad (3.3.5)$$

En otras palabras, dada una martingala local  $N$  con valores en  $\mathbb{R}^m$ , la solución  $X$  del sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (3.3.5) es una  $\nabla$ -martingala en  $M$ , y todas las martingalas son obtenidas de esta manera.

### 3.4. Movimiento browniano en una variedad riemanniana

Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  un espacio de probabilidad filtrado,  $(M, g)$  una variedad riemanniana con la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ , y  $\Delta_M$  el operador de Laplace-Beltrami en  $M$ . Consideremos el espacio  $\hat{W}(M)$  de trayectorias en  $M$  dado por la Definición 1.4.4, y  $\mathcal{B}_* = \mathcal{B}(\hat{W}(M))$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel del espacio  $\hat{W}(M)$ .

**Definición 3.4.1.** Un proceso estocástico  $X: [0, \tau) \times \Omega \rightarrow M$  continuo y  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado para  $\tau$  un  $(\mathcal{F}_t)$ -tiempo de paro se llama un *movimiento browniano en  $(M, g)$*  si

$$N^f(X)_t \doteq f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M f(X_s) ds, \quad t \in [0, \tau), \quad (3.4.1)$$

es una martingala local con valores reales para todo  $f \in C^\infty(M)$ ; donde  $s \equiv A_s$ , el proceso determinista con valores en  $\mathbb{R}$ , es de variación finita en compactos, y  $\int \Delta_M f(X) dA$  denota al proceso  $t \mapsto \int_0^t \Delta_M f(X_s) dA_s$ .

*Observación.* La definición implica que  $X$  es una semimartingala con valores en  $M$  (en el intervalo donde está definida). En esta definición también tenemos que  $X$  es un movimiento browniano con respecto de su filtración natural.

Notemos que si  $M$  es el espacio  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{R}^n$  con la estructura euclidiana estándar, entonces los movimientos brownianos en el sentido de la definición anterior coinciden con los movimientos brownianos usuales (Ejemplo 1.5.9).

*Observación.* Por la Sección 1.3 y el Teorema 3.1.5, un movimiento browniano  $X$  en  $M$  es un proceso de  $\Delta_M/2$ -difusión (i.e., proceso de difusión generado por el operador  $\Delta_M/2$ ). Si  $\mu = \mathbb{P} \circ X_0^{-1}$  es su distribución inicial, se tiene entonces que existe una única medida de  $\Delta_M/2$ -difusión  $\mathbb{P}_\mu = \mathbb{P} \circ X^{-1}$  en el espacio  $(\hat{W}(M), \mathcal{B}_*)$ .

**Definición 3.4.2.** Cualquier medida de  $\Delta_M/2$ -difusión en el espacio  $(\hat{W}(M), \mathcal{B}_*)$  se llama una *medida de Wiener* en  $\hat{W}(M)$ . Es decir, un movimiento browniano en la variedad riemanniana  $M$  es cualquier proceso estocástico  $X$  con valores en  $M$  cuya distribución es una medida de Wiener en el espacio de trayectorias  $\hat{W}(M)$ .

*Observación.* Como hemos discutido en la Sección 1.5, sea  $\mathbb{P}_x$  la distribución de probabilidad de un movimiento browniano  $X$  en  $M$  con valor inicial  $X_0 = x$ , es un markoviano con la función de densidad de transición  $p_M(t, x - y)$  (*núcleo de calor*) determinada por

$$\mathbb{P}_x\{X_t(\omega) = w_t \in C, t \leq e\} = \int_C p_M(t, x - y) dy, \quad C \in \mathcal{B}_*;$$

donde la integral es con respecto a la medida de volumen riemanniana, y  $e$  es el tiempo de explosión del movimiento browniano  $X$ , i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow e^-} X_t = \infty_M,$$

cuando  $\mathbb{P}_x\{e = \infty\} = 1$ , para todo  $x \in M$ ; o equivalentemente

$$\int_M p_M(t, x - y) dy = 1, \quad \forall x \in M, t > 0, \quad (3.4.2)$$

decimos que la variedad  $M$  es *estocásticamente completa*.

Ahora para  $X$  un movimiento browniano con valores en  $M$ , se tiene que la caracterización de Lévy para movimientos brownianos (Teorema 1.3.11) puede ser extendida a variedades. Antes de enunciarla, tenemos el siguiente resultado.

**Lema 3.4.3.** *Si  $X$  es una semimartingala con valores en  $M$  tal que para todo  $f \in C^\infty(M)$ ,*

$$[f(X), f(X)] = \int \|\text{grad } f(X)\|^2 ds.$$

*Entonces para cada  $\rho: M \rightarrow \mathcal{T}^*M \otimes \mathcal{T}^*M$  forma bilineal en  $M$ ,*

$$\int \rho(dX, dX) = \int \text{tr}(\rho(X)) ds. \quad (3.4.3)$$

*Demostración.* Para  $x \in M$  un punto fijo, denotamos por  $\{e_i\}_{i=1}^m$  una base ortonormal de  $\mathcal{T}_x M$ . Entonces, por (2.6.1) de la definición de gradiente, en  $x$ , se tiene

$$\begin{aligned} \text{tr}(df \otimes dg) &= \sum_{i=1}^m (df \otimes dg)(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^m df(e_i) \cdot dg(e_i) = \sum_{i=1}^m \langle \text{grad } f, e_i \rangle \cdot \langle \text{grad } g, e_i \rangle \\ &= \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle, \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

para todo  $x \in M$ . Entonces, para  $\rho = df \otimes dg$ , tenemos por el Lema 3.2.3 y (3.4.4), que

$$\int \rho(dX, dX) = [f(X), g(X)] = \int \text{tr}((df \otimes dg)(X)) ds.$$

Por lo tanto, como cualquier forma bilineal se puede expresar de la forma  $\rho = \sum \rho_{ij} df^i \otimes dg^j$ , esto se cumple para cualquier  $\rho$  por linealidad.  $\square$

**Proposición 3.4.4.** *Una semimartingala  $X$  con valores en  $M$  es un movimiento browniano si y sólo si  $X$  es una  $\nabla$ -martingala y para cualquier  $f \in C^\infty(M)$ ,*

$$[f(X), f(X)] = \int \|\text{grad } f(X)\|^2 ds. \quad (3.4.5)$$

*Demostración.*  $(\Rightarrow)$  Supongamos que  $X$  es un movimiento browniano. Sea  $f \in C^\infty(M)$ ; por la Proposición 2.6.5, (3.3.2) y (3.4.4), se tiene

$$\Delta_M(f^2) = \text{tr}(\text{Hess } f^2) = 2 \text{tr}(f \text{Hess } f + df \otimes df) = 2f \Delta_M f + 2 \|\text{grad } f\|^2.$$

Por ser  $X$  un movimiento browniano, se obtiene

$$\begin{aligned} f^2(X) - f^2(X_0) &= \frac{1}{2} \int \Delta_M f^2(X) ds + N^1 \\ &= \int f(\Delta_M f(X)) ds + \int \|\text{grad } f(X)\|^2 ds + N^1, \end{aligned}$$

donde  $N^1$  es una martingala local en  $\mathbb{R}$ . Por otro lado, de la fórmula de Itô y la integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned} f^2(X) - f^2(X_0) &= 2 \int f(X) d(f(X)) + [f(X), f(X)] \\ &= \int f(X)(\Delta_M f(X)) ds + N^2 + [f(X), f(X)], \end{aligned}$$

donde  $N^2$  es una martingala local en  $\mathbb{R}$ . Al comparar las dos expresiones anteriores ( $N_0^i = 0$ , c.s.), obtenemos que

$$[f(X), f(X)] = \int \|\text{grad } f(X)\|^2 ds.$$

Así, se puede aplicar el Lema 3.4.3, y en particular, para cada  $f \in C^\infty(M)$ ,

$$\int \text{Hess } f(dX, dX) = \int \text{tr}(\text{Hess } f(X)) ds = \int \Delta_M f(X) ds;$$

por lo tanto,  $X$  es una  $\nabla$ -martingala.

( $\Leftarrow$ ) Si  $X$  es una  $\nabla$ -martingala con la propiedad (3.4.5), entonces aplicando (3.4.3) a ( $\text{Hess } f$ ), obtenemos

$$f(X) - f(X_0) = \frac{1}{2} \int \text{Hess } f(dX, dX) + N^f = \frac{1}{2} \int \Delta_M f(X) ds + N^f,$$

para  $N^f$  alguna martingala local. Entonces,  $X$  es un movimiento browniano.  $\square$

*Observación.* Por la proposición anterior, vemos que si  $X$  es un movimiento browniano en  $M$  con tiempo de explosión  $e = e(X)$ , y  $N^f$  es la martingala local dependiendo en  $f \in C^\infty(M)$  tal que

$$N_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M f(X_s) ds, \quad 0 \leq t < e,$$

entonces tenemos que la variación cuadrática de  $N^f$  está dada por

$$\langle N^f \rangle_t = [f(X), f(X)]_t = \int_0^t \|\text{grad } f(X_s)\|^2 ds. \quad (3.4.6)$$

# Capítulo 4

## Construcción y aplicación de movimientos brownianos en variedades

### 4.1. Construcción de movimientos brownianos por proyección

Supongamos que  $M$  es una subvariedad cerrada de  $\mathbb{R}^n$  con la métrica inducida. En esta sección mostraremos que un movimiento browniano  $X$  con valores en  $M$  se puede construir a partir de un movimiento browniano  $B$  en  $\mathbb{R}^n$ , resolviendo una ecuación diferencial estocástica en  $M$ .

Para cada  $x \in M$ , sea  $P(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_x M$  la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathcal{T}_x M$ , y para  $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ ,  $P_\alpha(x)$  es la proyección ortogonal de  $e_\alpha$  en  $\mathcal{T}_x M$ . Como vimos en el Teorema 2.6.6, el operador de Laplace-Beltrami  $\Delta_M$  se puede escribir en la forma:

$$\Delta_M = \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha^2.$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.1.** *Supongamos que  $B = (B^1, \dots, B^n)$  es un movimiento browniano con valores en  $\mathbb{R}^n$ , entonces existe una única semimartingala  $X$  con valores en  $M$  que satisface la ecuación diferencial estocástica (de Stratonovich)*

$$dX_t = \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha(X_t) \circ dB_t^\alpha, \quad X_0 = o \in M, \quad (4.1.1)$$

y  $X$  es un movimiento browniano en  $M$  con valor inicial  $X_0 = o$  (ver Figura 4.1).

*Demostración.* Notemos que cada  $P_\alpha$  es un campo vectorial en  $M$ , entonces la ecuación (4.1.1) es una ecuación diferencial estocástica en la variedad  $M$ . Por el Teorema 3.1.4, existe una única solución  $X$  hasta su tiempo de explosión  $e = e(X)$ . Más aún, la solución  $X$  es un proceso de difusión generado por  $\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha^2 = \frac{1}{2} \Delta_M$ . Por lo tanto, es un movimiento browniano en el sentido de la Definición 3.4.2.

Por otro lado, podemos probar el teorema usando la caracterización de Lévy. Por la

fórmula de Itô y (3.1.7), tenemos que para todo  $f \in C^\infty(M)$ ,

$$f(X_t) = f(X_0) + N_t^f + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M f(X_s) ds, \quad 0 \leq t < e,$$

donde

$$N_t^f = \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t P_\alpha(f)(X_s) dB_s^\alpha,$$

es una martingala local. Luego se tiene su variación cuadrática dada por

$$\langle N^f \rangle_t = \int_0^t \sum_{\alpha=1}^n [P_\alpha(f)(X), P_\alpha(f)(X)]_s ds = \int_0^t \sum_{\alpha=1}^n df \otimes df (P_\alpha(X_s), P_\alpha(X_s)) ds.$$

Como sabemos que para cualquier  $\rho$  forma bilineal en  $M$  se tiene que

$$\sum_{\alpha=1}^n \rho(P_\alpha(v), P_\alpha(v)) = \sum_{\alpha=1}^n \rho(P(v), P(v)) e_\alpha \otimes e_\alpha,$$

es independiente de la elección de la base en  $\mathbb{R}^n$ , podemos escoger la base de modo que los primeros  $m$  vectores  $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$  forman una base ortonormal de  $\mathcal{T}_x M$ . Entonces,

$$\langle N^f \rangle_t = \int_0^t \text{tr}(df \otimes df)(X_s) ds = \int_0^t \|\text{grad } f(X_s)\|^2 ds.$$

Con esta propiedad, podemos verificar por el Lema 3.4.3 que  $X$  también es una  $\nabla$ -martingala. Entonces  $X$  es un movimiento browniano en  $M$  por la caracterización de Lévy.  $\square$

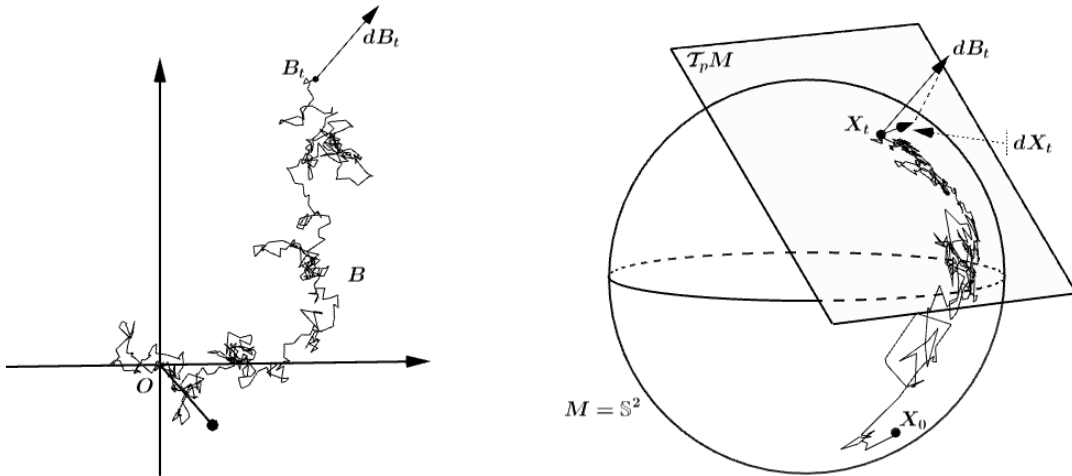


Figura 4.1: Construcción de un movimiento browniano en  $M = \mathbb{S}^2$  por la proyección:  $dX_t = P(X_t) \circ dB_t$ .

*Observación.* Notemos que la representación (4.1.1) es extrínseca porque el método de la construcción depende de la inmersión de  $M$  en algún espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Y una desventaja es que la dimensión del movimiento browniano  $B$  es la dimensión del espacio ambiente  $\mathbb{R}^n$ , que en general es más grande que la dimensión  $m$  de la variedad  $M$ , mientras que el movimiento browniano  $X$  en la variedad tiene que ser de dimensión  $m$ , así el movimiento browniano  $B$  contiene más información que lo provisto por un movimiento browniano  $X$  en la variedad. Como sólo se revela el movimiento browniano en la variedad  $M$ , en realidad consideramos  $X$  como un objeto de dimensión  $m = \dim M$ , es decir, como una solución de una ecuación diferencial estocástica con el movimiento browniano euclidiano  $B$  de dimensión  $m$ .

## 4.2. Ejemplos de movimientos brownianos

Ahora consideramos algunos ejemplos de movimientos brownianos en variedades.

**Ejemplo 4.2.1** (Movimiento browniano en una circunferencia). La variedad compacta más simple es la circunferencia

$$\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Sea  $B$  un movimiento browniano de dimensión uno, y apliquemos la función  $g: \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{ix} \in \mathbb{R}^2$  a  $B$ , entonces  $X_t = e^{iB_t} = (\cos(B_t), \sin(B_t))$  es una semimartingala en  $\mathbb{R}^2$  por la fórmula de Itô, más aún, es un movimiento browniano en  $\mathbb{S}^1$ .

Notemos que sus coordenadas  $X_t^1 = \cos(B_t)$  y  $X_t^2 = \sin(B_t)$  satisfacen

$$\begin{cases} dX^1 = -\sin(B) dB - \frac{1}{2} \cos(B) dt, \\ dX^2 = \cos(B) dB - \frac{1}{2} \sin(B) dt. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dX^1 = -X^2 dB - \frac{1}{2} X^1 dt, \\ dX^2 = X^1 dB - \frac{1}{2} X^2 dt. \end{cases}$$

En notación matricial, tenemos que

$$dX = K \cdot X dB - \frac{1}{2} X dt, \quad \text{donde} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sean  $b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$b(x^1, x^2) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \sigma(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el movimiento browniano  $X = (X^1, X^2)$  es la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX = \sigma(X) dB + b(X) dt.$$

En esta construcción de  $X$ , observemos que un movimiento browniano en la circunferencia unitaria  $\mathbb{S}^1$  es la proyección módulo  $2\pi$  de un movimiento browniano  $B$  con valores reales en la circunferencia  $\mathbb{S}^1$ .  $\triangle$

**Ejemplo 4.2.2** (Movimiento browniano en una esfera  $\mathbb{S}^n$ ). Consideremos

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

la esfera unitaria encajada en  $\mathbb{R}^{n+1}$  (ver Figura 4.1). Sabemos que la proyección ortogonal de cualquier vector  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$  al plano tangente a la esfera en  $x \in \mathbb{S}^n$  está dada por

$$P(x)\xi = \xi - \langle \xi, x \rangle x.$$

Entonces si escogemos  $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{n+1}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tenemos que la matriz  $P(x) = \{P_1(x), \dots, P_{n+1}(x)\}$  está dada por

$$P_\alpha(x)(e_\beta) = P(x)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta.$$

Por el Teorema 4.1.1, sean  $X_0 \in \mathbb{S}^n$  el valor inicial, y  $B = (B^1, \dots, B^{n+1})$  un movimiento browniano en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; entonces un movimiento browniano en la esfera  $\mathbb{S}^n$  es la solución  $X$  a la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} X_t^\alpha &= X_0^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n+1} \int_0^t P(X_s)_{\alpha\beta} \circ dB_s^\beta \\ &= X_0^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n+1} \int_0^t (\delta_{\alpha\beta} - X_s^\alpha X_s^\beta) \circ dB_s^\beta. \end{aligned}$$

Esta ecuación se llama la *representación de Stroock para un movimiento browniano esférico*.

Otra manera de construir un movimiento browniano en una variedad riemanniana es mediante la expresión de una ecuación diferencial estocástica en coordenadas locales; y podemos obtener las informaciones de tal movimiento browniano escribiéndolo en un sistema de coordenadas local elegido adecuadamente.

**Ejemplo 4.2.3** (Movimiento browniano en coordenadas locales). Como vimos en la Sección 2.6, dada una carta local  $(U, (x^i))$  de la variedad  $M$ , tenemos que el operador de Laplace-Beltrami se puede escribir en forma

$$\Delta_M f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{i,k,l} g^{kl} \Gamma_{kl}^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Si  $X$  es un proceso estocástico con valores en  $M$ , existe  $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de tiempos de paro con  $\tau_0 = 0$ ,  $\lim_{k \uparrow \infty} \tau_k = \infty$  tal que  $X_t \in U$  para todo  $t$  en un subintervalo  $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ . Así que en  $U$ , consideramos la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica para  $X$ :

$$dX_t^i = \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(X_t) dB_t^j - \frac{1}{2} \sum_{k,l} g^{kl}(X_t) \Gamma_{kl}^i(X_t) dt, \quad t \in [\tau_{k-1}, \tau_k), \quad (4.2.1)$$

donde  $\sigma_{ij}(X_t) = \sqrt{g^{ij}(X_t)}$  es la única raíz cuadrada simétrica de la matriz inversa  $g^{-1}(X_t)$ , siendo que  $g^{-1}(x)$  es una matriz simétrica y definida positiva.

Notemos que por lo discutido en la última parte de la Sección 3.1, vemos que efectivamente  $X$  es un proceso de difusión generado por el operador  $\Delta_M/2$ ; i.e.,  $X$  es un movimiento browniano en  $M$ .  $\triangle$

### 4.3. Movimiento browniano en una variedad rotacionalmente simétrica

Ahora estudiamos otro ejemplo de movimiento browniano en una variedad rotacionalmente simétrica. Tales variedades juegan un papel importante como modelos para la comparación de movimientos brownianos en variedades más generales.

Supongamos que  $(M, g)$  es una variedad riemanniana geodésicamente completa de dimensión  $m$ , con el punto  $o \in M$  que es el *centro* (*o polo*) de  $M$ , esto es, la aplicación exponencial  $exp_o: \mathcal{T}_o M \rightarrow M$  es un difeomorfismo. Si  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{m-1}$  ( $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$ ) son coordenadas polares en  $\mathbb{R}^m$ , identificando  $\mathcal{T}_o M$  con  $\mathbb{R}^m$  por un marco ortonormal, entonces a través de la aplicación exponencial  $exp_o: \mathbb{R}^m \rightarrow M$ , se obtiene un sistema de coordenadas polares en  $M \setminus \{o\}$  alrededor de  $o$ ; en este caso,  $(r, \theta)$  son las *coordenadas polares (geodésicas)* alrededor de  $o \in M$ . Para cualquier  $x \in M \setminus \{o\}$ , se tiene  $x = (r(x), \theta(x))$ , donde la función radial  $r(x) = d(o, x)$  es diferenciable en  $M \setminus \{o\}$  y Lipschitz en todo  $M$ . Más aún,  $\|\text{grad } r\| = 1$  dondequiera en  $M \setminus \{o\}$  (ver Cheeger & Ebin [2]).

**Definición 4.3.1.** Sea  $M$  una variedad riemanniana geodésicamente completa con polo  $o \in M$ . Para  $M \setminus \{o\} \cong (0, \infty) \times \mathbb{S}^{m-1}$ , la métrica riemanniana dada en coordenadas polares es

$$ds^2 = dr^2 + G^2(r) d\theta^2, \quad (4.3.1)$$

donde  $d\theta^2$  es la métrica riemanniana estándar en la esfera unitaria  $\mathbb{S}^{m-1}$ , y  $G: [0, D) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $0 \leq D \leq \infty$ ) es una función diferenciable que satisface

$$G(0) = 0, \quad G'(0) = 1, \quad 0 \leq r < D. \quad (4.3.2)$$

Entonces, decimos que  $M$  es una *variedad rotacionalmente simétrica* (o *radialmente simétrica*), también le denotaremos por  $(M_G, o)$  o simplemente  $M_G$ .

*Observación.* Equivalentemente, una variedad riemanniana  $M$  con polo  $o$  es rotacionalmente simétrica si dados cualesquiera vectores unitarios  $v_1, v_2$  en el espacio tangente  $\mathcal{T}_o M$ , existe una isometría  $\varphi: M \rightarrow M$  con  $\varphi(o) = o$  y  $T_o\varphi(v_1) = v_2$ . A  $(M, o)$  también se le llama un *modelo débil* en el sentido de Greene & Wu ([8], pág. 24).

Claramente, una variedad  $M_G$  rotacionalmente simétrica es difeomorfa a una bola abierta en  $\mathbb{R}^m$  de radio  $D$  (o  $\mathbb{R}^m$  si  $D = \infty$ ). En ciertas situaciones, podemos considerar a  $M_G$  como una superficie de revolución en  $\mathbb{R}^{m+1}$  (ver Figura 4.2).

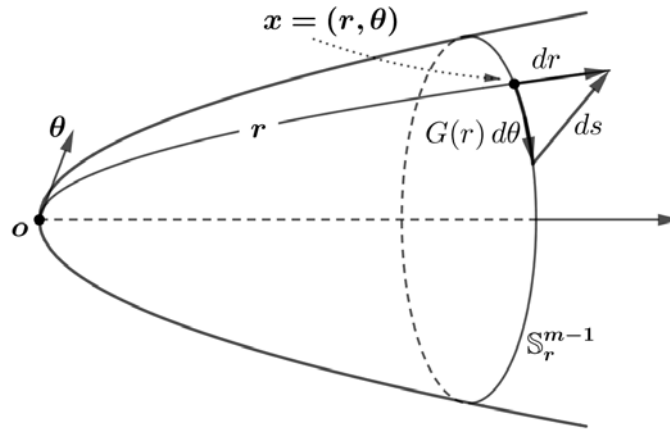


Figura 4.2: La superficie de revolución  $M_G$  y la métrica en coordenadas polares.

*Observación.* Sean  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M_G$  una geodésica en  $M_G$  saliendo de  $o$  (i.e.,  $\gamma(0) = o$ ), y  $W(t)$  un campo paralelo de vectores unitarios a lo largo de  $\gamma$  tal que  $W(t) \perp \gamma'(t)$ , para todo  $t$ . Entonces cualquier campo de Jacobi  $J(t)$  ortogonal a  $\gamma'$  y a lo largo de  $\gamma$  con  $J(o) = 0$  es un múltiplo escalar de  $W(t)$ ; es decir,  $J(t) = G(t)W(t)$ , para  $G$  una función diferenciable en  $[0, D]$  (Greene & Wu, [8], Corolario 2.13). Por lo tanto, del Ejemplo 2.5.11, tenemos que  $G$  es solución de la ecuación de Jacobi

$$G'' + \kappa G = 0, \quad G(0) = 0, \quad G'(0) = 1, \quad (4.3.3)$$

donde  $\kappa$  es la curvatura seccional de cualquier plano  $\Pi \subset \mathcal{T}_p M_G$  para cualquier  $p \in M_G$ , y tal plano contiene el vector radial  $\partial_r = \partial/\partial r$ . Por tanto,  $\kappa$  es una función que depende de  $r = r(x)$ . Así que  $\kappa(r) = -\frac{G''(r)}{G(r)}$ , y es llamada la curvatura radial de  $M_G$  (Greene & Wu [8]). Notemos que las variedades de curvatura constante  $K$  son ejemplos de variedades rotacionalmente simétricas, donde

$$G(r) = \begin{cases} \frac{\text{sen } \sqrt{K}r}{\sqrt{K}}, & \text{si } K \geq 0, \\ \frac{\text{senh } \sqrt{-K}r}{\sqrt{-K}}, & \text{si } K < 0. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

En términos de las coordenadas polares, escribimos la métrica (4.3.1) en forma matricial y su inversa, respectivamente, como

$$g_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G^2(r) \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad g^{-1} = g^{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G^2(r)} \end{pmatrix};$$

donde  $G^2(r)$  y  $\frac{1}{G^2(r)}$  en  $g_{(r,\theta)}$  y  $g^{-1}$  representan las submatrices diagonales de dimensión  $(m-1) \times (m-1)$  con  $G^2(r)$  y  $\frac{1}{G^2(r)}$  en la diagonal principal, respectivamente.



Por la representación (2.6.7) del operador de Laplace-Beltrami en coordenadas locales, sustituyendo  $\det(g) = [G^2(r)]^{m-1}$ , y  $g^{-1}$  dada por lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta_{M_G} &= \frac{1}{G(r)^{m-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( G(r)^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{G(r)^{m-1}} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( G(r)^{m-1} \frac{1}{G(r)^2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (m-1) \frac{G'(r)}{G(r)} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{G(r)^2} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2}.\end{aligned}$$

Entonces, en la variedad  $M_G$ , el operador de Laplace-Beltrami en coordenadas polares tiene la siguiente forma:

$$\Delta_M = L_r + \frac{1}{G(r)^2} \Delta_{\mathbb{S}^{m-1}}, \quad (4.3.5)$$

donde  $\Delta_{\mathbb{S}^{m-1}}$  es el operador de Laplace-Beltrami en  $\mathbb{S}^{m-1}$ , y  $L_r$  es el laplaciano radial:

$$L_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (m-1) \frac{G'(r)}{G(r)} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (4.3.6)$$

*Observación.* Es claro que cuando  $G(r) = r$ , la variedad  $M_G$  es el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^m$ .

**Ejemplo 4.3.2** (Movimiento browniano en una variedad rotacionalmente simétrica). Sea  $X_t = (r_t, \theta_t)$  un movimiento browniano en una variedad rotacionalmente simétrica  $M_G$  escrito en coordenadas polares geodésicas, donde  $r_t = r(X_t)$  es el componente radial de  $X_t$ , mientras que  $\theta_t = \theta(X_t)$  es el componente angular; cada uno se llama *proceso radial* y *proceso angular*, respectivamente.

Aplicando la caracterización de Lévy del movimiento browniano  $X$  a la función distancia  $f(r, \theta) = r$  y usando (4.3.5), tenemos que

$$r_t = r_0 + W_t + \frac{m-1}{2} \int_0^t \frac{G'(r_s)}{G(r_s)} ds, \quad (4.3.7)$$

donde  $W$  es una martingala local cuya variación cuadrática es

$$\langle W \rangle_t = \int_0^t \|\text{grad } r(X_s)\|^2 ds = t.$$

Por lo tanto,  $W$  es un movimiento browniano de dimensión uno por la caracterización de Lévy (Teorema 1.3.11); y por consiguiente, el proceso radial es solución de la ecuación diferencial estocástica (4.3.7) con  $W$  un movimiento browniano en  $\mathbb{R}$ ; es decir, un proceso de difusión generado por el laplaciano radial  $L_r/2$ .

Para describir el componente angular, sea  $f \in C^\infty(\mathbb{S}^{m-1})$ ; tenemos que

$$f(\theta_t) = f(\theta_0) + N_t^f + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\Delta_{\mathbb{S}^{m-1}} f(\theta_s)}{G(r_s)^2} ds,$$

donde  $N^f$  es alguna martingala local en  $\mathbb{R}$ . Si definimos una nueva escala de tiempo

$$\eta_t = \int_0^t \frac{1}{G(r_s)^2} ds, \quad (4.3.8)$$

sea  $z_t = \theta_{\tau_t}$ , donde  $\{\tau_t\}$  es la inversa de  $\{\eta_t\}$ ; tenemos entonces que

$$f(z_t) = f(z_0) + N_{\tau_t}^f + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_{\mathbb{S}^{m-1}} f(z_s) ds.$$

Como  $N_{\tau_t}^f$  sigue siendo una martingala local, entonces el proceso angular con el cambio de escala de tiempo  $t \mapsto z_t = \theta_{\tau_t}$  es un movimiento browniano en  $\mathbb{S}^{m-1}$ , más aún, es independiente de  $r_t$  (ver Hsu [11], pág. 84-85).

Por lo tanto, podemos construir un movimiento browniano en una variedad rotacionalmente simétrica como el producto  $X_t = (r_t, \theta_t = z_{\eta_t})$ , donde  $r_t$  es un proceso de difusión generado por el laplaciano radial  $L_r/2$ , y  $z_t$  un movimiento browniano en  $\mathbb{S}^{m-1}$  independiente de  $r_t$ , con  $\eta_t$  el cambio de escala de tiempo dado por (4.3.8).  $\triangle$

**Ejemplo 4.3.3.** Notemos que si consideramos el polo norte  $o$  de la esfera unitaria  $M = \mathbb{S}^n$  como el polo de la variedad  $M$ , entonces  $M^* = M \setminus \{-o\}$  es una variedad rotacionalmente simétrica con la métrica dada por (4.3.1), donde  $-o \in M$  es el punto antipodal de  $o$ ,  $r \in [0, \pi)$  es la colatitud, y  $G(r) = \text{sen } r$ . Además, como la esfera unitaria es de curvatura seccional constante  $1 > 0$ , por (4.3.5), el operador de Laplace-Beltrami  $M^*$  tiene la forma

$$\Delta_{M^*} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(n-1)}{\text{sen } r} \frac{\partial(\text{sen } r)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\text{sen}^2 r} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Entonces un movimiento browniano en  $\mathbb{S}^n$  también puede construirse como el producto:  $X_t = (r_t, \theta_t)$  donde  $r_t$  es un proceso de difusión generado por el operador

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(n-1)}{2} \cot r \frac{\partial}{\partial r}, \quad 0 \leq r < \pi; \tag{4.3.9}$$

y  $\theta_t = z_{\eta_t}$ , con  $z_t$  un movimiento browniano independiente en  $\mathbb{S}^{n-1}$  y  $\eta_t = \int_0^t (\text{sen } r_s)^{-2} ds$  el cambio de escala de tiempo.  $\triangle$

## 4.4. Proceso radial y teoremas de comparación

En esta sección veremos que con el uso de teoremas de comparación podemos analizar el comportamiento de movimientos brownianos en una variedad riemanniana general. Esta técnica está basada en la comparación con el proceso radial.

Un proceso radial puede ser introducido por un movimiento browniano en una variedad riemanniana general de manera análoga a la de sección anterior: Sea  $M$  una variedad riemanniana completa, dado  $o \in M$  un punto de referencia, y definimos la función radial  $r(x) = d(o, x)$  como la distancia entre  $x$  y  $o$  para todo  $x \in M$ . Entonces el proceso radial está definido por  $r_t = r(X_t)$  para  $X_t$  un movimiento browniano en  $M$ .

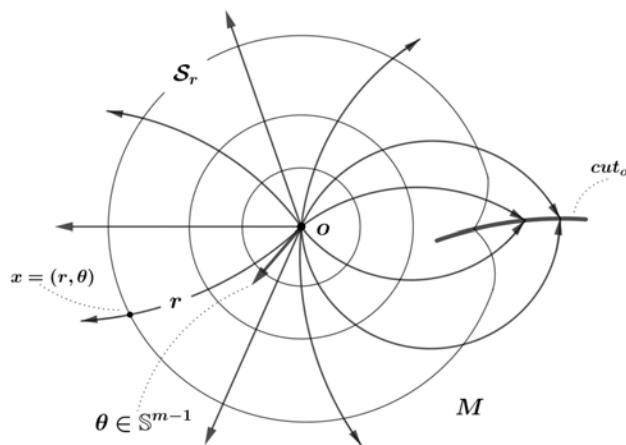


Figura 4.3: Coordenadas polares en  $M \setminus cut_o$ .

Notemos que en general la función radial  $r$  no es diferenciable en todo  $M$ ; en particular,  $r$  no es diferenciable en  $o$ . Si consideramos el conjunto de corte del punto  $o$  en  $M$ ,  $cut_o$  (ver Sección 2.5), denotamos por  $cut_o^* = cut_o \cup \{o\}$ , por el Teorema 2.5.9, si  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{m-1}$  son coordenadas polares en  $\mathbb{R}^m$ , como lo mencionamos en la sección anterior, se obtiene un sistema de coordenadas polares en  $M \setminus cut_o$  con centro en  $o$  mediante una aplicación exponencial (ver Fig. 4.3); además, la función radial  $r$  es diferenciable en  $M \setminus cut_o^*$ .

Ahora analizamos el proceso radial  $r(X)$  para  $X$  un movimiento browniano en  $M$ ; supongamos que  $X$  tiene valor inicial  $X_0$  en  $E_o = M \setminus cut_o$ , y que  $T_{cut_o}$  es el primer tiempo de entrada al conjunto de corte  $cut_o$ , es decir,  $T_{cut_o} = \inf\{t > 0 : X_t \in cut_o\}$ . Aplicando

la fórmula de Itô a la función radial  $r$ , tenemos

$$r(X_t) = r(X_0) + W_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M r(X_s) ds, \quad 0 \leq t < T_{cut_o}, \quad (4.4.1)$$

donde  $W$  es una martingala local cuya variación cuadrática es

$$\langle W \rangle_t = \int_0^t \|\text{grad } r(X_s)\|^2 ds = t.$$

En consecuencia,  $W$  es un movimiento browniano estándar por la caracterización de Lévy.

*Observación.* Notemos que cuando  $cut_o = \emptyset$ , entonces tenemos que la ecuación (4.4.1) está bien definida globalmente siendo que  $r$  es Lipschitz en todo  $M$ . Sin embargo,  $r$  no es diferenciable en el conjunto de corte  $cut_o$ , así no es posible aplicar la fórmula de Itô para  $r(X)$  en una variedad general; y en varias aplicaciones se considera que el proceso radial toma valores en el conjunto de corte; los detalles de estudio sobre este tema se pueden encontrar en Kendall ([16]), y se tiene el siguiente resultado importante.

**Teorema 4.4.1.** *Sean  $X$  un movimiento browniano en una variedad riemanniana completa  $M$ , y  $r(x) = d(x, o)$  la función de distancia al punto fijo  $o \in M$ . Entonces existen un movimiento browniano  $W$  con valores reales y un proceso no-decreciente  $L$ , localmente constante en  $\{X_t \notin cut_o\}$  con  $cut_o$  el conjunto de corte de  $o$  tal que*

$$r(X_t) = r(X_0) + W_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M r(X_s) ds - L_t, \quad 0 \leq t < e, \quad (4.4.2)$$

donde  $e = e(X) = \inf\{t > 0 : r(X_t) = \infty\}$  es el tiempo de explosión,  $\text{grad } r$  y  $\Delta_M r$  son definidas a cero en donde  $r$  no es diferenciable.

En particular, el proceso radial  $r(X)$  es una semimartingala.

*Observación.* Por el teorema anterior, para un proceso radial  $r_t = r(X_t)$ , siempre tenemos una cota superior

$$r_t \leq r_0 + W_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M r_s ds, \quad 0 \leq t < e. \quad (4.4.3)$$

Cuando el conjunto de corte es vacío, obtenemos la expresión (4.4.1).

*Observación.* Las expresiones (4.4.1) y (4.4.3) muestran que el comportamiento del proceso radial está controlado por el laplaciano de la función radial:  $\Delta_M r$ . En la práctica, es posible controlar  $r(X_t)$  comparándolo con un proceso de difusión uni-dimensional; como lo vimos en la sección anterior (en el caso de una variedad rotacionalmente simétrica, el proceso radial es un proceso de difusión), se necesita acotar a  $\Delta_M r$  por una función conocida  $f(r)$ ; en realidad, existen teoremas de comparación que lo hacen (cf. Schoen & Yau [24] y Greene & Wu [8]).

Antes de enunciar algunos de estos resultados, tenemos las siguientes notaciones:

Sean  $M$  y  $N$  variedades riemannianas que son completas y de la misma dimensión, denotamos por  $r_M, r_N$  las funciones radiales en  $M$  y  $N$  que son distancias relativas a  $o \in M$  y  $p \in N$  respectivamente; y denotamos por  $\partial_M = \partial/\partial r_M$  y  $\partial_N = \partial/\partial r_N$  campos radiales en  $M$  y  $N$  respectivamente. De las definiciones de curvatura en la Sección 2.4, denotamos la curvatura de Ricci en  $x \in M$  en la dirección radial  $\partial_M(x)$  por

$$Ric_M(x) = Ric(\partial_M(x), \partial_M(x));$$

similarmente se tiene  $Ric_N(y)$  para  $y \in N$ . Luego para todo  $x \in M$  y  $y \in N$ ,

$$Ric_M(x) \leq Ric_N(y)$$

significa que: para todo  $v \in \mathcal{T}_x M$  y todo  $w \in \mathcal{T}_y N$  tales que  $\|v\| = \|w\| = 1$  y  $\langle v, \partial_M(x) \rangle = \langle w, \partial_N(y) \rangle$ , siempre se tiene la desigualdad  $Ric(v, v) \leq Ric(w, w)$ .

**Teorema 4.4.2.** *Supongamos que  $M$  es una variedad rotacionalmente simétrica alrededor de  $o$  y  $N$  es una variedad de la misma dimensión tal que para algún punto  $p \in N$ , las curvaturas de Ricci de  $M$  y de  $N$  satisfacen*

$$Ric_M(x) \leq Ric_N(y),$$

*siempre y cuando  $x \in M \setminus cut_o^*$ ,  $y \in N \setminus cut_p^*$  con  $r_M(x) = r_N(y)$ . Entonces*

$$\Delta_M r_M(x) \geq \Delta_N r_N(y).$$

*Observación.* Un teorema similar se satisface para un caso más general, en que se pide una condición reforzada para la curvatura:

$$K_M(x) \leq K_N(y);$$

donde  $K_M(x) := \{K(\Pi) : \partial_M(x) \in \Pi \text{ y } \Pi \subseteq \mathcal{T}_x M \text{ es un plano de dimensión } 2\}$ , es el conjunto de curvaturas seccionales en  $x \in M$  para los planos radiales  $\Pi$  (i.e.,  $\partial_M(x) \in \Pi$ ). Esta desigualdad significa que  $K(\Pi) \leq K_N(y)$  para todo plano radial  $\Pi$  en  $\mathcal{T}_x M$ . Entonces, tenemos el siguiente corolario para el caso cuando una de las variedades es de curvatura seccional constante (Schoen & Yau [24]).

**Corolario 4.4.3.** *Sean  $M$  una variedad riemanniana completa de dimensión  $m$  y  $o \in M$  un punto de referencia, tal que la curvatura seccional en  $x \in M \setminus cut_o^*$  satisfice*

$$-K_2^2 \leq K_M(x) \leq K_1^2,$$

*donde  $K_1$  y  $K_2$  son constantes no negativas. Entonces, se tiene que*

$$(m-1)K_1 \cot(K_1 r) \leq \Delta_M r \leq (m-1)K_2 \coth(K_2 r). \quad (4.4.4)$$

Ahora, con estos resultados, analizamos los procesos radiales en una variedad riemanniana completa  $M$  comparando con aquellos en una variedad riemanniana de curvatura seccional constante; es decir, comparar las trayectorias brownianas en  $M$  con las trayectorias de un movimiento browniano en una variedad riemanniana especial (variedad con curvatura seccional constante):

1). Supongamos que la curvatura seccional de  $M$  está acotada inferiormente por  $-K^2$  y consideremos  $N$  una variedad riemanniana completa de la misma dimensión que  $M$  con curvatura seccional constante negativa  $-K^2$ ; por el teorema de Cartan-Hadamard (Cheeger & Ebin [2], Teorema 1.33), es posible establecer las coordenadas polares normales  $(\rho, \theta)$  en  $N$  sobre cualquier punto especificado (i.e., el conjunto de corte es vacío), donde  $\rho$  es la función distancia relativa al punto especificado en  $N$ . Además, por (4.3.4) y (4.3.6), el laplaciano radial en esta variedad es de la forma

$$\Delta_N \rho = (m-1)K \coth(K \rho).$$

Entonces, en la variedad  $N$ , el proceso radial  $\rho_t$  es solución de la ecuación

$$\rho_t = \rho_0 + \widetilde{W}_t + \frac{m-1}{2} \int_0^t K \coth(K \rho_s) ds, \quad 0 \leq t < e(\rho). \quad (4.4.5)$$

Por otro lado, del Teorema 4.4.1 y (4.4.3), el proceso radial  $r_t$  en la variedad  $M$  tiene una cota superior

$$r_t \leq r_0 + W_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M r_s ds, \quad 0 \leq t < e(X). \quad (4.4.6)$$

Notemos que en las dos ecuaciones anteriores, siempre tenemos  $\rho_0 = r_0$ , y podemos suponer que los procesos  $\widetilde{W}$  y  $W$  son el mismo movimiento browniano estándar; es decir,

$W \equiv \widetilde{W}$ , además, del Corolario 4.4.3, tenemos que  $\Delta_M r \leq (m-1)K \coth(K\rho)$ ; entonces para los procesos radiales  $r_t$  y  $\rho_t$  dados por (4.4.6) y (4.4.5), respectivamente, la deriva de  $r_t$  es menor que la de  $\rho_t$ . Por consiguiente, el teorema de comparación de procesos uni-dimensionales (Ikeda & Watanabe [12], Teorema VI, 1.1) afirma que  $r_t \leq \rho_t$ , para todo  $0 \leq t < e(\rho)$ .

2). Ahora supongamos que la curvatura seccional de  $M$  está acotada superiormente por  $K^2$ ; para  $0 \leq t < T_{cut_o}$ , tenemos que el proceso radial en  $M$  está dado por

$$r_t = r_0 + W_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M r_s ds; \quad (4.4.7)$$

y lo comparamos con el proceso  $\rho_t$  determinado por la ecuación

$$\rho_t = \rho_0 + W_t + \frac{m-1}{2} \int_0^t K \cot(K\rho_s) ds. \quad (4.4.8)$$

Por el Ejemplo 4.3.3, sabemos que  $\rho_t$  es un proceso radial en una esfera de dimensión  $(m-1)$  y de radio  $\frac{1}{K}$ . Entonces, un argumento similar al caso anterior implica que  $r_t \geq \rho_t$ , para todo  $0 \leq t < T_{cut_o}$ .

De aquí, hemos obtenido un teorema de comparación para el proceso radial.

**Teorema 4.4.4.** *Sean  $M$  una variedad riemanniana completa y  $r_t = r(X_t)$  el proceso radial de un movimiento browniano  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  en  $M$  dado por:*

$$r_t = r_0 + W_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M r_s ds - L_t, \quad 0 \leq t < e(X).$$

(i) *Supongamos que  $K_M(x) \geq -K^2$ , y  $\rho$  es la única solución de la ecuación (4.4.5); entonces  $e(\rho) \leq e(X)$  y  $\rho_t \geq r_t$  para todo  $0 \leq t < e(\rho)$ .*

(ii) *Supongamos que  $K_M(x) \leq K^2$ , y  $\rho$  es la única solución de la ecuación (4.4.8); entonces  $e(\rho) \geq e(X)$  y  $\rho_t \leq r_t$  para todo  $0 \leq t < T_{cut_o}$  con  $T_{cut_o}$  el primer tiempo de entrada al conjunto de corte  $cut_o$ .*

## 4.5. Aplicaciones

Muchos resultados sobre un movimiento browniano en una variedad riemanniana  $M$  dependen del análisis de  $r(X)$ , el proceso radial de un movimiento browniano  $X$  en  $M$ . Algunos resultados importantes son la completez estocástica de la variedad  $M$  y la recurrencia y transitoriedad del movimiento browniano  $X$  que se pueden obtener mediante el análisis del proceso radial, en el Capítulo 4 de Hsu [11] se muestran los detalles de estos resultados. En esta sección damos algunos de tales resultados básicos con la aplicación del teorema de comparación para el proceso radial que vimos en la sección anterior.

### 4.5.1. Completez estocástica

En la Sección 3.4 vimos que una variedad riemanniana  $M$  se dice *estocásticamente completa* si un movimiento browniano  $X$  con valores en  $M$  no explota. Ahora, con el teorema de comparación que vimos en la sección anterior, veremos que si las curvaturas seccionales de  $M$  están acotadas por abajo, entonces el movimiento browniano no explota; y por lo tanto,  $M$  es estocásticamente completa.

**Proposición 4.5.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana completa de dimensión  $m$  con la curvatura seccional tal que  $K_M(x) \geq -K^2$ , entonces  $M$  es estocásticamente completa.*

*Demostración.* Supongamos que  $N$  es una variedad riemanniana de la misma dimensión que  $M$  y con la curvatura seccional constante negativa  $-K^2$ ; denotamos por  $\rho$  la función radial en  $N$ , y el proceso radial  $\rho_t$  está dado por (4.4.5). Además, sabemos que

$$K\rho \leq K\rho \coth(K\rho) \leq (1 + K\rho),$$

entonces, por el teorema de comparación para procesos uni-dimensionales, se tiene

$$\rho_0 + W_t + \frac{m-1}{2}(Kt) \leq \rho_t \leq \rho_0 + W_t + \frac{m-1}{2}(Kt) + \frac{m-1}{2} \int_0^t \frac{1}{\rho_s} ds. \quad (4.5.1)$$

Notemos que para el lado izquierdo de la primera desigualdad, por la ley del logaritmo iterado para el movimiento browniano  $W_t$  (Øksendal [19], pág. 64),

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1,$$

tenemos que el término  $\rho_0 + W_t$  es de orden menor que la del último sumando  $\frac{m-1}{2}(Kt)$ , así que  $\rho_t \rightarrow \infty$  con probabilidad uno. Luego, con las dos desigualdades de (4.5.1), tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho_t}{t} = \frac{(m-1)K}{2}.$$

Es decir,  $\rho_t \sim (m-1)Kt/2$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , lo cual significa que  $\rho_t$  no explota; por el Teorema 4.4.4 de comparación para el proceso radial, sabemos que  $r_t \leq \rho_t$  para todo  $t \geq 0$  con  $r_t$  el proceso radial de un movimiento browniano en  $M$ ; en consecuencia,  $r_t$  tampoco explota, es decir,  $\mathbb{P}\{e = \infty\} = 1$ ; por la definición del proceso radial de un movimiento browniano  $X$  en la variedad  $M$ , se sigue que  $M$  es estocásticamente completa.  $\square$

## 4.5.2. Transitoriedad y recurrencia

Las propiedades de recurrencia y transitoriedad de movimientos brownianos en una variedad riemanniana son análogas al caso de un espacio euclidiano: Un movimiento browniano  $X$  en una variedad riemanniana  $M$  con valor inicial  $X_0 = x \in M$  se dice *recurrente* si regresará a un conjunto abierto fijo de  $M$  en una infinidad de tiempos no acotados; es decir, para cada conjunto abierto  $U \subset M$ , existe una sucesión creciente de tiempos  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $t_k \rightarrow e(X)$  con  $X_{t_k} \in U$  para cada  $k = 1, 2, \dots$ ; equivalentemente, se tiene que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} r(X_t) = 0.$$

En caso contrario, si el límite inferior es distinto de cero, la propiedad markoviana muestra que éste tiende al infinito cuando  $t \rightarrow \infty$ ; entonces el movimiento browniano  $X$  es *transitorio*, y se tiene que

$$\mathbb{P}_x \left\{ \lim_{t \rightarrow e^-} X_t = \infty_M \right\} = 1, \quad \text{para todo } x \in M.$$

Un criterio analítico para la recurrencia y transitoriedad de un movimiento browniano  $X$  en la variedad riemanniana consiste en considerar la función de Green de  $M$  dada por

$$G(x, y) = \int_0^\infty p_M(t, x - y) dt,$$

donde  $p_M(t, x - y)$  es el núcleo de calor en  $M$ . El movimiento browniano  $X$  en  $M$  es transitorio si y sólo si  $G(x, y) < \infty$  para alguna (toda) pareja de puntos  $x \neq y$  (Hsu [11], Proposición 4.4.8). En el caso del espacio euclidiano, sabemos del Ejemplo 1.5.12 que un movimiento browniano es recurrente si el espacio es de dimensión 2, y es transitorio si es de dimensión mayor que 2. Análogamente, por las propiedades de una función de Green (ver

Schoen & Yau [24], pág. 81-85), con argumentos de comparación como los que vimos en la sección anterior, se tiene un resultado similar en el caso de una variedad riemanniana: Así, los movimientos brownianos en variedades riemannianas de curvatura no-negativa de dimensión 2, son recurrentes; y en variedades riemannianas de curvatura no-positiva de dimensión mayor que 2, son movimientos brownianos transitorios. En particular, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.5.2.** *Supongamos que  $M$  es una variedad de Cartan-Hadamard (i.e., una variedad completa y simplemente conexa de curvatura seccional negativa) de dimensión  $m$  y mayor que 2. Entonces un movimiento browniano  $X$  en  $M$  es transitorio.*

*Demostración.* Como  $M$  es completa y  $K_M(x) \leq 0$ , por el teorema de Cartan-Hadamard, el conjunto de corte de cualquier punto  $x$  en  $M$  es vacío. Sin pérdida de la generalidad, para  $X$  un movimiento browniano en  $M$  con valor inicial  $X_0 = x$ , supongamos que  $r$  es la función distancia relativa al punto  $x$ , entonces el proceso radial  $r_t = r(X_t)$  está dado por

$$r(X_t) = W_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M r(X_s) ds, \quad 0 \leq t < e, \quad (4.5.2)$$

donde  $e$  es el tiempo de explosión del proceso radial.

Por otro lado, consideremos  $\rho_t$  el proceso radial de un movimiento browniano estándar en el espacio euclidiano  $\mathbb{R}^m$  (variedad de curvatura cero), entonces por el Teorema 4.4.4 de comparación para el proceso radial, tenemos que  $r_t \geq \rho_t$  para todo  $t \geq 0$ . Además, como  $m > 2$ , el movimiento browniano euclidiano es transitorio; es decir,  $\rho_t \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ; por lo tanto, también se tiene que  $r_t \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow e^-$ . Es decir, el movimiento browniano  $X$  en  $M$  es transitorio.  $\square$

## 4.6. Primer tiempo de entrada en una esfera geodésica

Ahora estudiamos el primer tiempo de entrada de un movimiento browniano  $X$  en una esfera geodésica de una variedad riemanniana  $M$ , y el primer tiempo de salida de una corona esférica. Estos resultados también se pueden obtener mediante el análisis del proceso radial  $r(X)$ , la técnica es considerar primero el proceso radial de un movimiento browniano en una variedad rotacionalmente simétrica, y después pasar a variedades generales por teoremas de comparación.

Sean  $(M_G, o)$  una variedad rotacionalmente simétrica de dimensión  $m$  con la métrica dada por (4.3.1),  $G: [0, D) \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función diferenciable que satisface la condición (4.3.2) y  $r$  es la función distancia en  $M_G$  relativo al punto  $o$ , y supongamos que  $X_t$  es un movimiento browniano en  $M_G$  con valor inicial  $X_0 = x \in M_G$ , denotamos por  $\mathbb{P}_x$  y  $\mathbb{E}_x$  su distribución de probabilidad y la esperanza correspondiente.

Para  $R > 0$ ,  $0 < R_1 < R_2 < D$ , definimos

$$\mathcal{S}_R := \{x \in M_G : r(x) = R\}, \quad \tau_R = \inf\{t \geq 0 : r(X_t) = R\};$$

y

$\mathcal{B}_{R_1, R_2} := \{x \in M_G : R_1 < r(x) < R_2\}$ ,  $\tau_{R_1, R_2} = \inf\{t \geq 0 : r(X_t) = R_1 \text{ ó } r(X_t) = R_2\}$ ; es decir,  $\tau_R$  es el primer tiempo de entrada a la esfera geodésica  $\mathcal{S}_R$  y  $\tau_{R_1, R_2}$  es el primer tiempo de salida de la corona esférica  $\mathcal{B}_{R_1, R_2}$  (ver Fig. 4.4). Estamos interesados en saber cuáles son los tiempos esperados  $\mathbb{E}[\tau_R]$ ,  $\mathbb{E}[\tau_{R_1, R_2}]$  para entrar a la esfera geodésica  $\mathcal{S}_R$

y salir de la corona esférica  $\mathcal{B}_{R_1, R_2}$  respectivamente y, también con qué probabilidad el proceso sale de la corona esférica  $\mathcal{B}_{R_1, R_2}$  por cada uno de sus “extremos”, es decir, sale por la esfera geodésica  $\mathcal{S}_{R_1}$  y por  $\mathcal{S}_{R_2}$ . Para estos resultados, analizamos el proceso radial  $r(X_t)$ . Como vimos en la Sección 4.3, el proceso radial  $r_t = r(X_t)$  de un movimiento browniano  $X_t$  en la variedad riemanniana  $M_G$  rotacionalmente simétrica es un proceso de difusión uni-dimensional generado por el operador  $\frac{1}{2} L_r$  dado por (4.3.6).

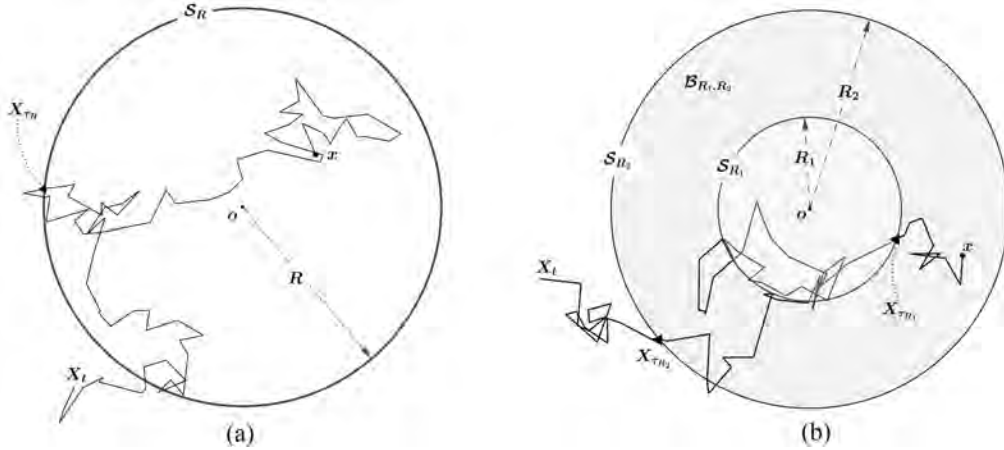


Figura 4.4: (a) Primer tiempo de entrada  $\tau_R$  a la esfera geodésica  $\mathcal{S}_R$  y (b) el primer tiempo de salida  $\tau_{R_1, R_2}$  de la corona esférica  $\mathcal{B}_{R_1, R_2}$  (aquí  $\tau_{R_1, R_2} = \tau_{R_1} \wedge \tau_{R_2} = \tau_{R_1}$ ).

Así, primero vemos algunos resultados adicionales de la Sección 1.5 para un proceso de difusión uni-dimensional sobre el tiempo de salida de un intervalo acotado; los detalles pueden encontrarse en Karlin & Taylor [15] y Darling & Siebert [3], aquí sólo mencionamos algunos resultados básicos.

Sea  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  un proceso de difusión uni-dimensional que toma valores en el intervalo  $[0, l)$  con  $l \in [0, \infty)$  y es generado por el operador

$$L := \frac{1}{2} a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx}, \quad (4.6.1)$$

donde  $a: [0, l) \rightarrow \mathbb{R}^+$  y  $b: [0, l) \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables. Sea  $\tau_{\alpha\beta} = \inf\{t \geq 0 : Y_t \notin (\alpha, \beta)\}$  el primer tiempo de salida del intervalo  $(\alpha, \beta) \subset [0, l)$ ; si el proceso  $Y_t$  empieza en  $x \in (\alpha, \beta)$  y  $\tau_{\alpha\beta}$  es finita con probabilidad 1, denotamos por  $\mathbb{P}_x$  y  $\mathbb{E}_x$ , la distribución de probabilidad del proceso  $Y_t$  y su esperanza correspondiente; entonces se tiene que  $u(x) = \mathbb{E}_x[\tau_{\alpha\beta}]$  es solución del problema de Dirichlet (ver Gard [7], pág. 103 - 106):

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \frac{1}{2} a(x) u''(x) + b(x) u'(x) = -1, & x \in (\alpha, \beta), \\ u(\alpha) &= 0, & u(\beta) = 0. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Notemos que la ecuación (4.6.2) es debido a la fórmula de Dynkin (1.5.8); además, es una ecuación diferencial de segundo orden con condiciones en la frontera, entonces se tiene la solución del problema (4.6.2):

$$u(x) = \frac{\varphi(x) \theta(\beta) - \varphi(\beta) \theta(x)}{\varphi(\beta)}, \quad (4.6.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{\alpha}^x \phi(s) ds, & \theta(x) &= \int_{\alpha}^x \xi(s) ds, \\ \phi(x) &= \exp \left\{ - \int_{\alpha}^x \frac{2b(s)}{a(s)} ds \right\}, & \xi(x) &= \phi(x) \int_{\alpha}^x \frac{2}{a(s)\phi(s)} ds. \end{aligned} \quad (4.6.4)$$



Ahora si consideramos la probabilidad de que la salida del proceso sea por el extremo  $\beta$ , es decir,  $\mathbb{P}_x(Y_{\tau_{\alpha\beta}} = \beta)$ ; entonces se tiene que  $\nu_\beta(x) = \mathbb{P}_x(Y_{\tau_{\alpha\beta}} = \beta)$  es solución del problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} L\nu_\beta(x) &= \frac{1}{2} a(x)\nu_\beta''(x) + b(x)\nu_\beta'(x) = 0, & x \in (\alpha, \beta), \\ \nu_\beta(\alpha) &= 0, & \nu_\beta(\beta) = 1. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Al resolver este problema con condiciones en la frontera, tenemos que las soluciones pueden escribirse en términos de las funciones (4.6.4):

$$\nu_\beta(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(\beta)}. \quad (4.6.6)$$

Notemos que la probabilidad  $\nu_\beta(x) = \mathbb{P}_x(Y_{\tau_{\alpha\beta}} = \beta)$  es la probabilidad de que el proceso  $Y_t$  que empieza en el interior del intervalo  $(\alpha, \beta)$  salga por el extremo  $\beta$  antes de que salga por el extremo  $\alpha$ , y tenemos que  $\nu_\alpha(x) = \mathbb{P}_x(Y_{\tau_{\alpha\beta}} = \alpha) = 1 - \nu_\beta(x)$ .

Más aún, también se tienen fórmulas para los momentos  $n$ -ésimos del primer tiempo de salida  $t^{(n)}(x) = \mathbb{E}_x[\tau_{\alpha\beta}^n]$  resolviendo el sistema de ecuaciones con condiciones en la frontera (ver Darling & Siebert [3]):

$$\begin{cases} Lt^{(n)}(x) = \frac{1}{2} a(x) \frac{d^2 t^{(n)}(x)}{dx^2} + b(x) \frac{dt^{(n)}(x)}{dx} = -nt^{(n-1)}, \\ t^{(0)}(x) \equiv 1, & t^{(n)}(\alpha) = t^{(n)}(\beta) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.6.7)$$

Se obtiene que las soluciones del sistema son determinadas por la fórmula

$$t^{(n)} = n \left[ \frac{\varphi(x) \theta_n(\beta) - \varphi(\beta) \theta_n(x)}{\varphi(\beta)} \right], \quad (4.6.8)$$

donde  $\phi, \varphi$  son dadas por (4.6.4), y

$$\theta_n(x) = \int_\alpha^x \xi_n(s) ds, \quad \xi_n(x) = \phi(x) \int_\alpha^x \frac{2t^{(n-1)}(s)}{a(s)\phi(s)} ds. \quad (4.6.9)$$

Por las fórmulas obtenidas anteriores, tenemos el siguiente resultado en general:

Supongamos que  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de difusión uni-dimensional que toma valores en  $[0, l)$  generado por el operador  $L$  dado por (4.6.1), sea  $\tau_\alpha = \inf\{t \geq 0 : Y_t = \alpha\}$ , el primer instante en el que el proceso  $Y_t$  es igual a  $\alpha \in [0, l)$ ; y definimos

$$\Phi(x) = \exp \left\{ - \int_\alpha^x \frac{2b(s)}{a(s)} ds \right\}. \quad (4.6.10)$$

**Lema 4.6.1** (Momentos de tiempo de salida de un intervalo). *Para  $0 < \alpha < \beta < l$ , sea  $\tau_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \wedge \tau_\beta$ , entonces para cualquier  $x \in (\alpha, \beta)$ , tenemos que*

$$(1). \quad \mathbb{P}_x(\tau_\alpha < \tau_\beta) = \frac{\int_x^\beta \Phi(s) ds}{\int_\alpha^\beta \Phi(s) ds};$$

(2). *Sea  $v_0(x) \equiv 1$ , y para cada  $n \geq 1$ , definimos*

$$v_n(x) = \int_x^\beta \Phi(s) ds \int_\alpha^s \frac{2n v_{n-1}(y)}{a(y)\Phi(y)} dy - \int_\alpha^\beta \Phi(s) ds \int_\alpha^s \frac{2n v_{n-1}(y)}{a(y)\Phi(y)} dy \mathbb{P}_x(\tau_\alpha < \tau_\beta),$$

*entonces, el momento  $n$ -ésimo del primer tiempo en el que el proceso  $Y_t$  sale del intervalo  $(\alpha, \beta)$  está dado por  $\mathbb{E}_x[\tau_{\alpha\beta}^n] = v_n(x)$ .*

Como  $Y_t$  es un proceso que toma valores en  $[0, l)$ , entonces para cualquier  $\alpha \in [0, l)$ , si  $x \in [0, \alpha]$ , tenemos que  $\mathbb{P}_x(\tau_0 < \tau_\alpha) = 0$ ; y si  $x > \alpha$ , se tiene que  $\mathbb{P}_x(\tau_\alpha < \tau_l) = 1$ . Por lo tanto, una consecuencia del lema anterior es lo siguiente:

**Lema 4.6.2.** Sea  $u_0(x) \equiv 1$ , y para todo  $n \geq 1$ , definimos

$$u_n(x) = \begin{cases} \int_x^\alpha \Phi(s) ds \int_0^s \frac{2n u_{n-1}(y)}{a(y)\Phi(y)} dy, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ \int_\alpha^x \Phi(s) ds \int_s^l \frac{2n u_{n-1}(y)}{a(y)\Phi(y)} dy, & x > \alpha. \end{cases} \quad (4.6.11)$$

Entonces, el momento  $n$ -ésimo del primer tiempo en el que el proceso  $Y_t$  es igual a  $\alpha$  es:  $\mathbb{E}_x[\tau_\alpha^n] = u_n(x)$ .

Ahora regresamos a considerar el proceso radial  $r_t = r(X_t)$  de un movimiento browniano  $X_t$  que toma valores en la variedad riemanniana  $M_G$  rotacionalmente simétrica con valor inicial  $X_0 = x$ ; sabemos que es un proceso de difusión uni-dimensional generado por el operador

$$\frac{1}{2} L_r = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m-1}{2} \frac{G'(r)}{G(r)} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (4.6.12)$$

Sea  $r(x) = s$ , entonces la función  $\Phi_r$  definida por (4.6.10) es

$$\begin{aligned} \Phi_r(s) &= \exp \left\{ - \int^s (m-1) \frac{G'(t)}{G(t)} dt \right\} = \exp \left\{ (1-m) \ln G(s) \right\} \\ &= G(s)^{1-m}. \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Además, notemos que si  $\tau_R$  es el primer tiempo en el que el movimiento browniano  $X_t$  en  $M_G$  entra a la esfera geodésica  $\mathcal{S}_R$  y  $\tau_{R_1, R_2}$  es el primer tiempo en el que sale de la corona esférica  $\mathcal{B}_{R_1, R_2}$  definidos anteriormente, entonces tenemos la siguiente equivalencia en relación del proceso radial  $r_t$ :

$$\begin{aligned} \tau_R &= \tilde{\tau}_R := \inf \{ t \geq 0 : r_t = R \}; \\ \tau_{R_1, R_2} &= \tilde{\tau}_{R_1, R_2} := \inf \{ t \geq 0 : r_t = R_1 \text{ ó } r_t = R_2 \}. \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

Entonces, tenemos que los momentos  $n$ -ésimos,  $\mathbb{E}_x[\tau_R^n]$  y  $\mathbb{E}_x[\tau_{R_1, R_2}^n]$  del primer tiempo de entrada a la esfera geodésica  $\mathcal{S}_R$  y del primer tiempo de salida de la corona esférica  $\mathcal{B}_{R_1, R_2}$ , respectivamente para el movimiento browniano  $X_t$  con valores en  $M_G$ , así como la probabilidad  $\mathbb{P}_x(\tau_{R_1} < \tau_{R_2})$  de que el movimiento browniano  $X_t$  sale por la esfera geodésica  $\mathcal{S}_{R_1}$  antes de que salga por la esfera  $\mathcal{S}_{R_2}$ , se pueden obtener mediante el análisis del proceso radial  $r_t$  aplicando los lemas anteriores; y en consecuencia, obtenemos los siguientes resultados.

**Teorema 4.6.3** (Momentos del primer tiempo de entrada a la esfera geodésica). *Dado  $R > 0$  fijo, sea  $u_0(s) \equiv 1$ , y para todo  $n \geq 1$ , definimos*

$$u_n(s) = \begin{cases} 2n \int_s^R G(t)^{1-m} dt \int_0^t u_{n-1}(y) G(y)^{m-1} dy, & 0 \leq s \leq R, \\ 2n \int_R^s G(t)^{1-m} dt \int_t^D u_{n-1}(y) G(y)^{m-1} dy, & s > R; \end{cases} \quad (4.6.15)$$

entonces para cualquier  $x \in M_G$ , tenemos que el momento  $n$ -ésimo del primer tiempo en el que el movimiento browniano  $X_t$  entra a la esfera geodésica  $\mathcal{S}_R$  es:  $\mathbb{E}_x[\tau_R^n] = u_n(r(x))$ .

*Observación.* Si  $M_G = \mathbb{R}^m$  es el espacio euclidiano, sabemos que  $G(r) = r$ , y  $r(x) = \|x\|$ , para  $x \in \mathcal{B}_R$ , de la ecuación (4.6.15), obtenemos que

$$\mathbb{E}_x[\tau_R] = \frac{R^2 - \|x\|^2}{m};$$

así, nuevamente obtenemos el resultado que vimos en el Ejemplo 1.5.11.

También es fácil de calcular el momento de segundo orden, y se tiene

$$\mathbb{E}_x[\tau_R^2] = \frac{\|x\|^4}{m(m-2)} - \frac{2R^2\|x\|^2}{m^2} + \frac{(m+4)R^4}{m^2(m+2)}. \quad (4.6.16)$$

**Teorema 4.6.4** (Momentos del primer tiempo de salida de una corona esférica). *Para cualquier  $x \in \mathcal{B}_{R_1, R_2}$ ,  $0 < R_1 < R_2$ , tenemos que*

$$(1). \quad \mathbb{P}_x(\tau_{R_1} < \tau_{R_2}) = \frac{\int_{r(x)}^{R_2} G(t)^{1-m} dt}{\int_{R_1}^{R_2} G(t)^{1-m} dt}; \quad (4.6.17)$$

(2). *Sea  $v_0(s) \equiv 1$ , y para cada  $n \geq 1$ ,  $R_1 \leq s \leq R_2$ , definimos*

$$\begin{aligned} v_n(s) = & 2n \int_s^{R_2} G(t)^{1-m} dt \int_{R_1}^t v_{n-1}(y) G(y)^{m-1} dy \\ & - 2n \int_{R_1}^{R_2} G(t)^{1-m} dt \int_{R_1}^t v_{n-1}(y) G(y)^{m-1} dy \mathbb{P}_x(\tau_{R_1} < \tau_{R_2}), \end{aligned} \quad (4.6.18)$$

entonces el momento  $n$ -ésimo del primer tiempo en el que el movimiento browniano  $X_t$  sale de la corona esférica  $\mathcal{B}_{R_1, R_2}$  es:  $\mathbb{E}_x[\tau_{R_1, R_2}^n] = v_n(r(x))$ .

*Observación.* Cuando la dimensión de la variedad  $M_G$  es  $m = 1$ , entonces para la ecuación (4.6.17), tenemos que

$$\mathbb{P}_x(\tau_{R_1} < \tau_{R_2}) = \frac{R_2 - r(x)}{R_2 - R_1}; \quad (4.6.19)$$

y por cálculos simples a partir de la ecuación (4.6.18), se tiene que

$$\mathbb{E}_x[\tau_{R_1, R_2}] = (R_2 - r(x))(r(x) - R_1). \quad (4.6.20)$$

Estas dos fórmulas son conocidas para el caso del espacio euclidiano de dimensión uno (ver Karlin & Taylor [15], pág. 205). Además, podemos calcular el momento de segundo orden, y se obtiene

$$\mathbb{E}_x[\tau_{R_1, R_2}^2] = \frac{1}{3}(R_2 - r(x))(r(x) - R_1) \left\{ (R_2 - R_1)^2 + (R_2 - r(x))(r(x) - R_1) \right\}.$$

*Observación.* Cuando  $M_G = \mathbb{R}^m$  es el espacio euclidiano, entonces  $G(r) = r$  y  $r(x) = \|x\|$ , para  $x \in \mathcal{B}_{R_1, R_2}$ , es fácil calcular la ecuación (4.6.17), y nuevamente obtenemos las fórmulas que vimos en el Ejemplo 1.5.12 :

$$\mathbb{P}_x(\tau_{R_1} < \tau_{R_2}) = \begin{cases} \frac{R_2 - \|x\|}{R_2 - R_1}, & \text{si } m = 1, \\ \frac{\ln R_2 - \ln \|x\|}{\ln R_2 - \ln R_1}, & \text{si } m = 2, \\ \frac{R_2^{2-m} - \|x\|^{2-m}}{R_2^{2-m} - R_1^{2-m}}, & \text{si } m > 2. \end{cases} \quad (4.6.21)$$

*Observación.* Como las variedades riemannianas con curvatura seccional constante son casos particulares de variedad rotacionalmente simétrica, y la función  $G(r)$  está dada por (4.3.4); entonces también podemos calcular fácilmente la probabilidad  $\mathbb{P}_x(\tau_{R_1} < \tau_{R_2})$  para este caso.

Ahora, supongamos que  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano en  $M$ , una variedad riemanniana completa de dimensión  $m$ , para  $o \in M$  un punto de referencia,  $r$  es la función

distancia relativa al punto  $o$ , sea  $cut_o$  el conjunto de corte de  $o$ ; para  $R > 0$  fijo, definimos la bola geodésica con centro en  $o$  y de radio  $R$  en  $M$  por

$$\mathcal{B}_R := \{x \in M : r(x) \leq R\} \subset M \setminus cut_o;$$

y consideremos el primer tiempo en el que el movimiento browniano  $X_t$  entra a la frontera  $\partial\mathcal{B}_R$  (es decir, la esfera geodésica)

$$\sigma_R := \inf\{t \geq 0 : X_t \in \partial\mathcal{B}_R\} = \inf\{t \geq 0 : r(X_t) = R\}.$$

Sin pérdida de la generalidad, supongamos que las curvaturas seccionales de  $M$  en la bola  $\mathcal{B}_R$  son acotadas, es decir,

$$-K_2^2 \leq K_M(x) \leq K_1^2, \quad x \in \mathcal{B}_R.$$

Por el Teorema 4.4.4 de comparación para el proceso radial y los dos teoremas anteriores, obtenemos una aproximación para los momentos del primer tiempo de entrada  $\sigma_R$ .

**Corolario 4.6.5.** *Para todo  $r \in [0, \infty)$ , definimos*

$$G_1(r) = \frac{\text{sen}(K_1 r)}{K_1}, \quad y \quad G_2(r) = \frac{\text{senh}(K_2 r)}{K_2}.$$

Y para cada  $n \geq 1$ ,  $i = 1, 2$ , sean  $u_0^{(i)}(s) \equiv 1$ ,

$$u_n^{(i)}(s) = \begin{cases} 2n \int_s^R G_i(t)^{1-m} dt \int_0^t u_{n-1}^{(i)}(y) G_i(y)^{m-1} dy, & 0 \leq s \leq R, \\ 2n \int_R^s G_i(t)^{1-m} dt \int_t^\infty u_{n-1}^{(i)}(y) G_i(y)^{m-1} dy, & s > R. \end{cases} \quad (4.6.22)$$

(i) Si  $X_t$  tiene valor inicial  $X_0 = x$  en el interior de  $\mathcal{B}_R$ , i.e.,  $x \in \mathcal{B}_R$ , entonces

$$u_n^{(2)}(r(x)) \leq \mathbb{E}_x[\sigma_R^n] \leq u_n^{(1)}(r(x)); \quad (4.6.23)$$

(ii) Si  $cut_o = \emptyset$ , y  $x \in M \setminus \mathcal{B}_R$ , entonces

$$u_n^{(1)}(r(x)) \leq \mathbb{E}_x[\sigma_R^n] \leq u_n^{(2)}(r(x)). \quad (4.6.24)$$

*Demostración.* Sea  $r_t = r(X_t)$  el proceso radial del movimiento browniano  $X_t$  en  $M$ , por el Teorema 4.4.4 de comparación del proceso radial, tenemos que

(i) Si  $x \in \mathcal{B}_R$ , entonces  $\rho_t^{(1)} \leq r_t \leq \rho_t^{(2)}$ , donde  $\rho_t^{(1)}$  es la única solución de la ecuación

$$\rho_t^{(1)} = \rho_0^{(1)} + W_t + \frac{m-1}{2} \int_0^t K_1 \cot(K_1 \rho_s^{(1)}) ds, \quad 0 \leq t < e(\rho^{(1)}),$$

con  $W_t$  un movimiento browniano estándar uni-dimensional; y  $\rho_t^{(2)}$  es la única solución de la ecuación

$$\rho_t^{(2)} = \rho_0^{(2)} + W_t + \frac{m-1}{2} \int_0^t K_2 \coth(K_2 \rho_s^{(2)}) ds, \quad 0 \leq t < e(\rho^{(2)}).$$

Es decir,  $\rho_t^{(1)}$  y  $\rho_t^{(2)}$  son procesos de difusión uni-dimensional generados por el operador (4.6.12) con  $G(r)$  dados por  $G_1(r)$  y  $G_2(r)$  respectivamente.

Sean  $\sigma_R^{(1)} := \{t > 0 : \rho_t^{(1)} = R\}$  el primer tiempo en el que el proceso  $\rho_t^{(1)}$  es igual a  $R$ , y  $\sigma_R^{(2)} := \{t > 0 : \rho_t^{(2)} = R\}$  el primer tiempo en el que el proceso  $\rho_t^{(2)}$  es igual a  $R$ . Por el Teorema 4.6.3, tenemos que los momentos de los tiempos  $\sigma_R^{(1)}$  y  $\sigma_R^{(2)}$  están dados por  $u_n^{(i)}(r(x))$ ; como  $\rho_t^{(1)} \leq r_t \leq \rho_t^{(2)}$ , entonces  $\sigma_R^{(2)} \leq \sigma_R \leq \sigma_R^{(1)}$ , y por lo tanto, se obtiene (4.6.23).

(ii) Cuando  $cut_o = \emptyset$ , de la misma manera tenemos que  $\rho_t^{(1)} \leq r_t \leq \rho_t^{(2)}$ , si  $x \in M \setminus \mathcal{B}_R$ , en este caso se tiene que  $\sigma_R^{(1)} \leq \sigma_R \leq \sigma_R^{(2)}$ , por lo tanto, obtenemos (4.6.24).  $\square$

*Observación.* Una mejor aproximación para los momentos del primer tiempo de entrada en una esfera geodésica es considerar las funciones  $\kappa_i$  diferenciables en  $[0, \infty)$ ,  $i = 1, 2$ , tales que

$$\begin{cases} \kappa_1(r) \geq \sup\{K_M(x) : r(x) = R\}, \\ \kappa_2(r) \leq \inf\{Ric_M(x) : r(x) = R\}(m-1)^{-1}. \end{cases}$$

Sea  $G_i$ ,  $i = 1, 2$  solución de la siguiente ecuación de Jacobi (Sección 4.3):

$$G_i''(r) + \kappa_i(r)G_i(r) = 0, \quad G_i(0) = 0, \quad G_i'(0) = 1. \quad (4.6.25)$$

Entonces por el teorema de comparación del proceso radial para este caso más general de variedad rotacionalmente simétrica (ver Hsu [11], Teorema 3.5.3), se obtiene el resultado del corolario anterior.

Entre otros estudios sobre procesos de difusión generales en una variedad riemanniana, con los métodos de comparación similares, se puede obtener una aproximación para los momentos del primer tiempo de entrada en una esfera geodésica (cf. Mao y Ouyang [18]), que estos resultados sirven para el estudio de la ergodicidad fuerte y decaimiento uniforme del proceso de Márkov; y entre otras aplicaciones se pueden consultar [23].

# Bibliografía

- [1] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons (1995).
- [2] Cheeger, Jeff y Ebin, David G., *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. North-Holland (1975).
- [3] Darling, D. A. y Siegert, A. J. F., *The first passage problem for a continuous Markov process*. Ann. Math. Statist., vol. 24 (1953), pp. 624-639.
- [4] do Carmo, Manfredo P., *Riemannian Geometry*. 2nd edition, Birkhäuser (1993).
- [5] Driver, Bruce K., *A primer on Riemannian geometry and stochastic analysis on path spaces*. ETH (Zürich, Switzerland) preprint series (1995).
- [6] Emery, Michel, *Stochastic Calculus in Manifolds* (With an appendix by P. A. Meyer). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1989)
- [7] Gard, Thomas C., *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker (1988).
- [8] Greene, R.E. y Wu, H., *Function Theory on Manifolds Which Possess a Pole*. Lecture Notes in Math, vol. 699, Springer-Verlag (1979).
- [9] Grigor'yan, Alexander, *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 36 (1999), pp. 135-249.
- [10] Hsu, Elton P., *A Brief Introduction to Brownian Motion on a Riemannian Manifold*. Summer School in Kyushu (2008).
- [11] Hsu, Elton P., *Stochastic Analysis on Manifolds*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 38, American Mathematical Society (2002).
- [12] Ikeda, Nobuyuki y Watanabe, Shinzo, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. 2nd edition, North-Holland/Kodansha (1989).
- [13] Itô, Kiyosi, *Stochastic Integral*. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20 (1944), pp. 519-524.
- [14] Jost Jürgen, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. 4th edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2005).
- [15] Karlin, Samuel y Taylor, Howard M., *A second course in stochastic processes*. Academic Press (1981).
- [16] Kendall, Wilfrid S., *The radial part of Brownian motion on a manifold : a semimartingale property*. The Annals of Probability, vol. 15 (1987), pp. 1491-1500.
- [17] Kolmogórov, Andrei N., *Fundamentos de la teoría de probabilidades*. Rev. colomb. estad., volumen 8, no 15,16 (1987).
- [18] Mao, Yong-hua y Ouyang, Shun-xiang, *Strong Ergodicity and Uniform Decay for Markov Processes*. Mathematica Applicata (2006), pp. 580-586.

- 
- [19] Øksendal, Bernt K., *Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications*. 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1989).
- [20] Ouyang, Shun-xiang, *Moments of hitting time of geodesic sphere by Brownian motion on Riemannian manifolds*. Journal of Qufu Normal University, vol. 33 (2007).
- [21] Revuz, Daniel y Yor, Marc, *Continuous martingales and Brownian motion*. 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1999).
- [22] Rincón, Luis, *Introducción a los procesos estocásticos*. Las Prensas de Ciencias, Fac. de Ciencias, UNAM (2012).
- [23] Sacerdote, L., *Some remarks on first-passage-time problems*, en: *Biomathematics and Related Computational Problems*, Ricciardi, Luigi M.(ed.). Kluwer Academic Publishers (1988), pp. 567-579.
- [24] Schoen, Richard y Yau, Shing-Tung, *Lectures on Differential Geometry*. International Press (1994).
- [25] Steele, J. Michael, *Stochastic Calculus and Financial Applications: Applications of mathematics: 45*. Springer-Verlag, New York (2001).
- [26] Stroock, Daniel W. y Varadhan, S. R. S., *Multidimensional Diffusion Processes*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1997).
- [27] Uribe B., Gerónimo, *Integración Estocástica*. (Curso Avanzado de Probabilidad). Instituto de Matemáticas, UNAM (2014).