



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESTUDIO DE LA RADIACIÓN EN ÁTOMOS DE DOS  
NIVELES EN INTERACCIÓN CON EL CAMPO  
ELECTROMAGNÉTICO CUANTIZADO EN EL  
MODELO SPIN-BOSON**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**LICENCIATURA EN FÍSICA**

**P R E S E N T A :**

**DIEGO ALEJANDRO INIESTA MIRANDA**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. MIGUEL ARTURO BALLESTEROS  
MONTERO  
CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX 2018.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## 1. Datos de alumno

Iniesta  
Miranda  
Diego Alejandro  
55 47580918  
Universidad Nacional Autónoma de  
México  
Facultad de Ciencias  
Física  
311064593

## 2. Datos del tutor

Dr  
Miguel Arturo  
Ballesteros  
Montero

## 3. Datos del sinodal 1

Dr  
Pablo  
Barberis  
Blostein

## 4. Datos del sinodal 2

Dr  
Carlos  
Ramírez  
Ramos

## 5. Datos del sinodal 4

Dr  
Luis Octavio  
Silva  
Pereyra

## 6. Datos del sinodal 5

Dr  
Carlos  
Villegas  
Blas

## 7. Datos del trabajo escrito

Estudio de la radiación en átomos de dos niveles  
en interacción con el campo electromagnético  
cuantizado en el modelo de spin-boson  
118 p.  
2018



## Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN108818. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida. De igual manera, agradezco el apoyo del proyecto SEP-CONACYT 254062.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por el extraordinario nivel de educación al que nos da acceso. De igual manera, por ofrecer una gran cantidad de actividades académicas, culturales y deportivas que junto a la comunidad universitaria hacen de la UNAM un lugar próspero para el conocimiento.

A mi madre, Maria, que siempre nos ha brindado a mí y a mis hermanos su amor, apoyo incondicional y sustento. A mi padre, Esteban, que en todo momento ha visto por nuestro bienestar. A mis hermanos, Vanesa y Rodrigo, que han estado para apoyarme toda la vida. A mi cuñada Wendy y mi sobrina Andrea por compartir momentos de felicidad. A mis tios, Elfego y Marcela, por su amor y por estar siempre con nosotros. A Cecilia, Tania, Gabriela y Carlos, mis primos que cada vez identifico más como mis hermanos. A mis abuelos, Celia y Elfego, que con su trabajo duro y amor nos han encaminado a ser una familia unida y feliz.

A Montserrat, mi compañera, quien me ha dado su ternura, amistad y amor incondicional. Me ha mostrado lo bonito de compartir la felicidad y con su ejemplo me motiva a ser mejor cada día. En esta ocasión, le agradezco por ocupar su conocimiento en el área de Letras para leer mi trabajo escrito y hacer sugerencias que ayudaron a mejorar mi tesis.

Al Dr. Miguel Ballesteros, por ser un gran tutor. Le agradezco por ayudarme a conocer lo fascinante de las matemáticas y la física a través del Análisis. De igual manera, por sus consejos académicos y personales que me han permitido ser un mejor estudiante y persona. Le agradezco por ser un profesor dedicado, por apoyarme para trabajar como ayudante de profesor y por la asignación de una beca de PAPIIT para la realización de esta tesis.

A los profesores y ayudantes de profesor que me han guiado adecuadamente a lo largo de mi educación. Especialmente a Ángeles Sandoval, Clotilde García, Gerardo y Angela Camacho, Natalia Mantilla, Jorge Moreno y Jorge Martínez. A Margarita, la secretaria del Departamento de Física-Matemática del IIMAS, por el apoyo que nos brinda a los estudiantes.

A los miembros del jurado: Dr. Luis Silva, Dr. Carlos Ramírez, Dr. Pablo Barberis, Dr. Carlos Villegas. Los comentarios y sugerencias que hicieron sobre mi trabajo escrito me permitieron mejorar la tesis, así como aprender más sobre la física y las matemáticas.

A mis amigos de siempre: Sonia, Sinuhe y Fernando. A mis amigos con los que comparto tiempo en fines de semana y de los que he recibido gran apoyo: Omar, Ingrid, Pedro, Gustavo y Samuel. A mis amigos y compañeros de la Facultad de Ciencias, con quienes he compartido momentos de felicidad, diversión y muchas horas de trabajo: Julio, Cristina y Humberto (a quien agradezco especialmente por su interés en leer fragmentos de mi tesis y darme consejos para mejorarla); Gabriela y Omar; Daniela, Rodrigo e Ilse; Jerónimo, Darío, Juan, Regina, Andrés, Luis, Juan José, Diego, Roberto, Liuba, Sebastián, Joaquin y Gerardo.

# Índice general

<b>Introducción</b> .....	1
<b>1. Resultados Preliminares</b> .....	9
1. Espacios de Banach y Espacios de Hilbert .....	10
2. Caracterización de Operadores Auto-adjuntos y su Espectro .....	13
3. Proyecciones de Riesz .....	21
4. Producto Tensorial y Suma Directa de Espacios de Hilbert .....	26
4.1. Producto Tensorial de Espacios de Hilbert .....	26
4.2. Producto Tensorial de Operadores .....	28
4.3. Suma Directa de Espacios de Hilbert .....	30
<b>2. Modelo Spin-Boson</b> .....	33
5. Espacios de Fock .....	34
6. Segunda Cuantización .....	37
7. Operadores de Creación y Aniquilación .....	43
8. Modelo spin-boson .....	51
9. Operadores de Creación y Aniquilación (puntuales) .....	56
<b>3. Sucesión de Energías y de Proyecciones asociadas al Estado Base</b> ....	65
10. Construcción de las Sucesiones .....	65
11. Estimaciones en el Modelo .....	68
11.1. Estimaciones sobre las Energías .....	68
11.2. Estimaciones sobre los Gaps .....	72
11.3. Estimaciones sobre las Proyecciones .....	74
11.4. Estimaciones sobre el Operador de Campo y Resolvente .	79
12. Subespacios invariantes .....	81
13. Convergencia de la Sucesión de Proyecciones del Estado Base ...	83
<b>Anexo: Dedución del modelo Spin-Boson</b> .....	97
Referencias .....	109



# Introducción

El presente trabajo está basado en el artículo *Existence of Ground State Eigenvalues for the Spin-Boson Model with Critical Infrared Divergence and Multiscale Analysis* (referencia [2]). El objetivo es exponer un tema de investigación actual a un nivel adecuado para que pueda ser estudiado por un alumno de licenciatura en física o matemáticas. En esta tesis se estudia la existencia del estado base (o estado fundamental) del sistema formado por un átomo, con dos niveles energéticos, acoplado al campo de radiación. Se investiga este sistema a través del modelo spin-boson. El acoplamiento entre el átomo y el campo de radiación (como es presentado en este trabajo) tiene un comportamiento infrarrojo singular, es decir, la función de acoplamiento se comporta como  $|k|^{-1/2}$  cuando el momento de los fotones,  $k$ , tiende a cero. El comportamiento infrarrojo singular en el modelo no hace posible la aplicación de los esquemas frecuentemente utilizados para estudiar la existencia del estado base en modelos similares, por lo que técnicas de renormalización o de escalas múltiples deben ser empleadas, aquí se utiliza el método de escalas múltiples. El estudio de diversos modelos, entre ellos el de spin-boson, está motivado por el interés de entender algunas características de la interacción entre luz y materia, por ejemplo, la forma en que la luz es radiada por la materia. El modelo spin-boson se ha convertido en el caballito de batalla de la óptica cuántica y es actualmente de gran importancia para la computación cuántica, con la interpretación del sistema de dos niveles como un qubit (cfr. [2]).

El inicio de un estudio matemático detallado de la interacción entre luz y materia tuvo que esperar hasta la segunda mitad del siglo XIX, cuando James Maxwell publicara una serie de ecuaciones (hoy llamadas ecuaciones de Maxwell) y Hendrik Lorentz formulara la ley de la fuerza electromagnética (la ley de Lorentz). Las ecuaciones de Maxwell describen las interacciones estáticas, así como las dependientes del tiempo, de los campos eléctricos y magnéticos con fuentes de carga eléctrica y corrientes de carga eléctrica dadas. En cambio, la ley de Lorentz explica el movimiento clásico de las fuentes de carga eléctrica que están sujetas a campos eléctricos y magnéticos dados. La relación entre las matemáticas y la física a lo largo del trabajo de Lorentz, Hermann Minkowski, Albert Einstein y otros tantos hacia el final del siglo XIX y el principio del siglo XX condujeron a la unificación de la fuerza

eléctrica y magnética en una sola: la fuerza electromagnética. Este desarrollo redujo a 2 ecuaciones las más de 20 ecuaciones propuestas originalmente por Maxwell y amplió la visión en el entendimiento de la estructura y las simetrías del espacio-tiempo. El campo eléctrico y el campo magnético ya no fueron considerados como entidades separadas sino como una misma entidad, el campo electromagnético. En las primeras décadas del siglo XX, con base en el trabajo de Paul Dirac, Vladimir Fock, Werner Heisenberg y Wolfgang Pauli, se realizó un estudio de la electrodinámica en el marco de la mecánica cuántica. Este estudio dio inicio al área de la electrodinámica cuántica que fue el prototipo de la teoría de campos cuánticos (cfr. [8]).

La invención del Laser, hace más de cincuenta años, requirió el desarrollo de un modelo simplificado, pero adecuado, para la explicación de su mecanismo en la física teórica. Este desarrollo demostró la eficacia de simplificar la descripción de la materia (por ejemplo, átomos y moléculas) a sistemas de dos niveles estudiados por el modelo spin-boson. Durante las últimas dos décadas, aproximadamente, se han investigado sistemas de partículas no relativistas acopladas a la radiación electromagnética cuantizada, a partir de la teoría electrodinámica cuántica no relativista, NR-QED (por sus siglas en inglés). Para la teoría NR-QED se han establecido las propiedades básicas del espectro del operador hamiltoniano (el cual describe la dinámica del sistema); por ejemplo, la existencia del estado base y la existencia de resonancias. Resultados previos sobre la inexistencia de valores propios asociados al estado base sugieren que en el caso más general no existe un estado base en el modelo spin-boson; es decir, la energía mínima del sistema acoplado no es un valor propio del operador de energía (cfr. [2]).

Utilizando técnicas del grupo de renormalización y estableciendo algunas hipótesis adicionales en la interacción entre el átomo y el campo de radiación, Hasler y Herbst [11] demostraron la existencia de un estado base para el modelo spin-boson. Bach, Ballesteros, Könenberg y Menrath [2] dieron una prueba alternativa del resultado de Hasler y Herbst. Bajo ciertas hipótesis sobre la interacción, demostraron que el ínfimo de la energía en el modelo spin-boson es un valor propio del sistema, correspondiente al estado base. La prueba consiste en incorporar un método de escalas múltiples (introducido por Pizzo en [14, 15]) e identificar una cantidad conservada en el sistema que fue usada para demostrar que los términos más singulares que aparecen en el análisis de escalas múltiples se desvanecen.

Con el fin de abordar el problema de la existencia del estado base del modelo spin-boson, es necesario establecer una relación entre los conceptos físicos que describen el problema y los conceptos matemáticos que serán de utilidad para estudiar el problema a fondo.

En modelos de la física, la cuantización es el procedimiento para ir de una teoría clásica a una teoría cuántica. Un ejemplo importante es la cuantización canónica, que permite ir de la mecánica clásica a la mecánica cuántica. Este procedimiento equivale a reemplazar las variables dinámicas clásicas y sus corchetes de Poisson por operadores de la mecánica cuántica y sus conmutadores, respectivamente. Considerando un sistema de partículas en un campo electromagnético externo, el procedimiento anterior conduce a la formulación original de la mecánica cuántica, en

la que el movimiento de las partículas está cuantizado, mientras que los campos aplicados son todavía tratados clásicamente (cfr. [23]).

Desde el punto de vista matemático, los sistemas de la mecánica cuántica son descritos por operadores y vectores en un espacio de Hilbert separable  $\mathfrak{h}_s$ , donde el subíndice  $s$  representa al sistema. Cada vector de norma unitaria  $\psi_s(t)$  en  $\mathfrak{h}_s$  representa un estado físico del sistema en cualquier tiempo  $t \in \mathbb{R}$ . A cada observable se le asocia un operador auto-adjunto actuando en un subconjunto denso contenido en  $\mathfrak{h}_s$ . El operador auto-adjunto  $H_s = H_s^*$  que genera la dinámica es de especial interés. Éste es conocido como el hamiltoniano del sistema y es el operador correspondiente al observable clásico de la energía (cfr. [3, 16]).

La dinámica del sistema, partiendo de un estado inicial  $\psi_s(0) \in \mathfrak{h}_s$  a otro estado en un tiempo arbitrario  $t > 0$ , está determinada por la ecuación de Schrödinger,

$$\dot{\psi}_s(t) = -iH_s\psi_s(t), \quad (0.1)$$

para todo  $t > 0$ . Esta ecuación es resuelta por  $\psi_s(t) = e^{iH_s t} \psi_s(0)$  [en el marco de Schrödinger], mostrando que la información de la Ecuación (0.1) está completamente contenida en la descomposición espectral de  $H_s$ . Si  $\psi_s(0)$  es un vector propio de  $H_s$  correspondiente a un valor propio  $E_s$ , la dinámica, mediante la Ecuación (0.1), deja sin cambios a  $\psi_s(0)$ , salvo la multiplicación por un factor de fase, es decir,  $\psi_s(t) = e^{iE_s t} \psi_s(0)$  [3].

Como la ecuación de Schrödinger sólo multiplica por un factor de fase a los vectores propios de  $H_s$ , ésta no explica ciertos fenómenos físicos. En nuestro caso es de gran interés estudiar la radiación, fenómeno que no está descrito por la ecuación de Schrödinger. Para superar este obstáculo es necesario recurrir a la teoría de campos cuánticos, en la que se modela la interacción entre la materia y el campo de radiación como creación y aniquilación de fotones. Con el objetivo de introducir dicho modelo es necesario presentar un formalismo matemático en el que se describa adecuadamente tanto la radiación como la creación y aniquilación de partículas. Este formalismo está dado por los espacios de Fock, los operadores en segunda cuantización y los operadores de creación y aniquilación.

El procedimiento de la cuantización canónica puede ser extendido a la teoría de campos (clásicos), de manera que los campos clásicos son reemplazados por operadores de campo, descritos en términos de operadores de creación y aniquilación. La formulación resultante de este procedimiento es referida comúnmente como segunda cuantización, ya que permite la cuantización de los campos electromagnéticos que fueron tratados clásicamente en la teoría cuántica original (cfr. [23]). La razón para introducir el lenguaje de la segunda cuantización es su utilidad en la formulación de una teoría cuántica en la que el número de partículas no es constante.

Sea  $\mathfrak{h}_f = L^2(\mathbb{R}^3)$ , mediante el producto tensorial se construye el espacio de Hilbert de  $n$  fotones,

$$\mathcal{F}_n := S_n \bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{h}_f, \quad \mathcal{F}_0 := \mathbb{C},$$

donde  $S_n$  denota la proyección ortogonal al subespacio de funciones totalmente simétricas. El espacio que representa al campo de radiación es el espacio de Fock

(simétrico),

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n.$$

Los elementos  $\psi$  de  $\mathcal{F}$  pueden ser identificados con sucesiones de la forma  $(\psi^{(n)})_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ , donde  $\psi^{(n)} \in \mathcal{F}_n$ . El hamiltoniano que describe al campo de radiación es el operador en segunda cuantización, que transforma un elemento  $\psi = (\psi^{(n)})_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \in \mathcal{F}$  en  $H_f(\omega)\psi$ , con

$$(H_f(\omega)\psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^n \omega(k_i) \psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n), \quad (0.2)$$

donde  $n \geq 1$  (cfr. [3, 16, 17]). La función  $\omega(k)$  es regularmente llamada relación de dispersión. En el caso de los fotones  $\omega(k)$  está dada por  $|k|$ . El operador  $H_f(\omega)$  es comúnmente escrito como

$$H_f(\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) a^*(k) a(k) dk. \quad (0.3)$$

Las expresiones (0.2) y (0.3) sólo coinciden en el sentido de formas cuadráticas, pues la segunda sólo tiene sentido como forma cuadrática y no como operador.

Sea  $\mathfrak{h}_p$  el espacio de Hilbert asociado a las partículas del sistema y  $H_p$  el hamiltoniano (auto-adjunto) que las describe.

El espacio que representa al sistema (completo) es  $\mathfrak{h}_s := \mathfrak{h}_p \otimes \mathcal{F}$ , si denotamos por  $V$  al operador que describe interacción entre la materia y el campo de radiación, llegamos al hamiltoniano que describe al sistema,

$$H_s = H_p \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}} + \mathbb{1}_{\mathfrak{h}_p} \otimes H_f(\omega) + V. \quad (0.4)$$

En este mismo contexto, los operadores de creación y aniquilación son construidos del siguiente modo:

Para cualquier función  $f \in \mathfrak{h}_f$ , el operador de  $a^*(f)$  mapea un elemento  $\psi \in \mathcal{F}_n$  a un vector

$$a^*(f)\psi := \sqrt{n+1} S_{n+1} f \otimes \psi \in \mathcal{F}_{n+1}.$$

Extendiendo a  $a^*(f)$  por linealidad y tomando su cerradura se define el operador de creación, denotado también por  $a^*(f)$ . El operador de aniquilación  $a(f)$  es el adjunto de  $a^*(f)$  [3].

Con base en el formalismo anterior nos interesa abordar un modelo dentro la teoría NR-QED que estudia sistemas de partículas no relativistas (con un comportamiento cuántico) acopladas con el campo electromagnético cuantizado. Los modelos en la teoría NR-QED están descritos por un hamiltoniano auto-adjunto y semi-acotado  $H_s = H_s^* \geq c > \infty$ , que actúa en el espacio  $\mathfrak{h}_s = \mathfrak{h}_p \otimes \mathcal{F}$  (cfr. [2]).

En el contexto de la teoría NR-QED, la existencia del estado base significa que el ínfimo del espectro del hamiltoniano,  $E_{gs} := \inf \sigma(H_s) > -\infty$ , es un valor propio, conocido como la energía del estado base, con vector propio  $\psi_{gs} \in \mathfrak{h}_s$  que es llamado estado base, es decir,  $H_s \psi_{gs} = E_{gs} \psi_{gs}$  [2].

Nos interesa la existencia del estado base en el modelo spin-boson. En este modelo, el hamiltoniano  $H_p$  tiene sólo dos valores propios, los cuales suponemos simples, por lo que podemos representarlo como

$$H_p := \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_0 \end{pmatrix},$$

con  $e_1 > e_0$ . El campo de radiación está descrito por  $H_f(\omega)$  (ver Ecuación (0.2)). Entonces, el hamiltoniano del modelo spin-boson es

$$H \equiv H(G) := H_p \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}} + \mathbb{1}_{\mathfrak{h}_p} \otimes H_f(\omega) + \sigma_1 \otimes (a(G) + a^*(G)), \quad (0.5)$$

donde la interacción en este caso está dada en términos de la primera matriz de Pauli,  $\sigma_1$ , y los operadores de creación y aniquilación evaluados en la función de acoplamiento,  $G$ . Primeros principios en física sugieren que la función de acoplamiento se comporta como  $|G(k)| \sim C|k|^{-1/2}$ , conforme  $k \in \mathbb{R}^3$  tiende a cero (conocido como comportamiento crítico infrarrojo) [2]. Por tal motivo suponemos que  $G$  tiene dicho comportamiento cerca del cero y, además, asumimos un corte ultravioleta: suponemos que  $G$  decae exponencialmente cuando  $|k|$  tiende a infinito. Para mayor detalle sobre una deducción informal del modelo spin-boson ver la última sección de este trabajo.

El hamiltoniano del modelo spin-boson sin interacción,

$$H_l := H_p \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}} + \mathbb{1}_{\mathfrak{h}_p} \otimes H_f(\omega),$$

tiene como valores propios a  $e_0$  y  $e_1$  y su espectro es  $\sigma(H_l) = [e_0, \infty)$ . El hecho de que  $e_0$  y  $e_1$  no son valores propios aislados se debe a que la relación de dispersión,  $\omega(k) = |k|$ , alcanza el cero. Entonces, la teoría estándar de perturbaciones para valores propios de multiplicidad finita no puede ser utilizada, por lo que deben ser empleadas técnicas de renormalización o de escalas múltiples (cfr. [21, 2]).

El método de escalas múltiples está basado en la construcción de una sucesión de hamiltonianos regulares,  $H_n := H(G_n)$ , con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Esta secuencia está elaborada a partir de la sucesión de funciones de acoplamiento,  $G_n(k) = \chi_{(|k| \geq \rho_n)} G(k)$ , donde  $\chi_{(|k| \geq \rho_n)}$  es la función característica del conjunto  $\{k \in \mathbb{R}^3 \mid |k| \geq \rho_n\}$ . La función  $\chi_{(|k| \geq \rho_n)}$  restringe a la función  $G$  a valores del momento de los fotones más grandes que  $\rho_n = \kappa \gamma^n$ , para valores fijos de  $\kappa, \gamma < 1$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Siguiendo la idea originalmente formulada por Pizzo, de manera inductiva, se prueba que para cada  $H_n$  existe un estado base con energía  $E_n$ , siendo un valor propio aislado y no degenerado que tiene asociado un vector propio  $\psi_n$  y una proyección de rango uno  $P_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ . Más aún, se prueba que cuando  $n$  tiende a infinito la sucesión  $(P_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  converge a una proyección,  $P_{gs}$ , cuyo rango está conformado por vectores propios de  $H$ . En otras palabras, los hamiltonianos regulares cortan por debajo el momento accesible a los fotones, pero progresivamente incorporan momentos más pequeños, de tal manera que eventualmente todos los momentos son tomados en cuenta (cfr. [2]).

## Organización del contenido y Referencias

Los resultados del primer capítulo son en su mayoría del análisis (real, complejo y funcional). Como estos resultados no son el tema principal de nuestro estudio y sus pruebas se encuentran en diversas fuentes de información, se enuncian los resultados sin demostración. En el segundo y tercer capítulo (a partir de la sección 6) se dan pruebas rigurosas de los resultados que se presentan.

En el primer capítulo, se presentan los conceptos matemáticos que serán empleados durante todo el trabajo, los cuales están basados principalmente en el contenido de [12, 16, 17, 18, 19, 20]. Se empieza con las definiciones básicas y la notación que se utiliza en el contexto de los espacios de Banach y Hilbert. A continuación, se da una serie de definiciones relacionadas a los operadores lineales actuando sobre espacios de Hilbert. Estos operadores se clasifican según su dominio de definición y la relación que tienen con su operador adjunto. La clasificación anterior permite enunciar tanto propiedades básicas que caracterizan a los operadores como algunos resultados de la teoría espectral y de la perturbación de operadores. Las pruebas detalladas de estos resultados se pueden encontrar en [16, 17, 18, 19]. Después, mediante elementos del análisis complejo y del análisis funcional, se construye la integral de Riesz. Esta construcción se hace siguiendo algunos resultados expuestos en [1, 12, 19]. La integral de Riesz, también conocida como proyección de Riesz, es una herramienta que sirve para estudiar la proyección al espacio propio de un valor propio aislado. Finalmente, se introduce el producto tensorial de espacios de Hilbert y el producto tensorial de operadores, que son las estructuras matemáticas donde se desarrolla el modelo. La construcción del producto tensorial que aquí se presenta está basada principalmente en [16, 17].

A lo largo del segundo capítulo, en el contexto de los espacios de Fock, se dan pruebas rigurosas y detalladas de propiedades de operadores empleados en la teoría de campos cuánticos. Algunas de estas pruebas se basan en [2, 5, 16, 17, 24]. En este capítulo se demuestra que los operadores de creación y aniquilación son uno el adjunto del otro y cumplen las relaciones canónicas de conmutación. Así mismo, se verifica que el operador de campo y el operador en segunda cuantización son auto-adjuntos. Los conceptos y resultados hasta aquí mostrados son utilizados para presentar el modelo spin-boson y demostrar que el hamiltoniano del modelo es un operador auto-adjunto. Al final de este capítulo, se exponen los operadores de creación y aniquilación (puntuales), el operador de campo y el operador en segunda cuantización como se encuentran comúnmente en libros de texto de física, y se indica su relación con los presentados al principio del capítulo en el sentido de formas cuadráticas.

Es importante mencionar que los operadores definidos en la última sección del segundo capítulo se muestran con el objetivo de establecer una relación entre el formalismo matemático y físico de dichos operadores, pero no son empleados en el tercer capítulo debido a los inconvenientes que surgen en la definición de los operadores de creación y aniquilación (puntuales).

El tercer capítulo tiene como objetivo ofrecer pruebas detalladas de los resultados encontrados en [2]. Mediante el método de escalas múltiples, se demuestra la

existencia del estado base en el modelo spin-boson para el caso de comportamiento infrarrojo singular. En este capítulo, se comienza construyendo la sucesión de hamiltonianos regulares y otras sucesiones que surgen naturalmente por el uso del método de Pizzo como las sucesiones de energías y proyecciones asociadas al estado base. Realizando estimaciones de las sucesiones construidas e identificando una simetría en el modelo se asegura la convergencia de la sucesión de proyecciones que resulta en la existencia del estado base.



# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos y las estructuras matemáticas en las cuales se desarrolla el modelo spin-bosón.

Con el propósito de presentar los objetos matemáticos y su notación de una manera constructiva, en la Sección 1 se definen los espacios de Banach y los espacios de Hilbert; así mismo se presentan los espacios  $L^p$ , donde destaca el caso con  $p = 2$  pues  $L^2$  es el espacio “ambiente” en el que se desarrollan algunos modelos de la mecánica cuántica. En seguida, en la Sección 2, se expone una serie de definiciones relacionadas a los operadores lineales (acotados y no-acotados) actuando sobre espacios de Hilbert. Los operadores se clasifican según su dominio de definición y la relación que guardan con su operador adjunto. Entre estos operadores es de nuestro especial interés los operadores auto-adjuntos, pues como mencionamos en la introducción, estos son los que representan los observables físicos. A continuación, se muestran resultados que se enuncian para operadores auto-adjuntos (algunos de estos resultados son igualmente válidos para operadores simétricos y normales). Después de presentar resultados de la teoría espectral, se concluye la sección con el teorema de Kato-Rellich y el teorema de vectores analíticos de Nelson, teoremas que serán de gran utilidad en el segundo capítulo. En la Sección 3 se construye la integral de Riesz, un concepto que es fruto de un cálculo funcional para funciones analíticas. Se muestra que el cálculo funcional mostrado en la Sección 2 y el aquí presentado coinciden para cierto tipo de funciones y operadores. A partir de esta relación, se exhiben resultados de la integral de Riesz que por una parte son producto de la teoría espectral y por otra parte son consecuencia del análisis complejo. Finalmente, en la Sección 4, se construye el producto tensorial de espacios de Hilbert y el producto tensorial de operadores, así como la suma directa de espacios de Hilbert. Las estructuras de suma directa y producto tensorial se usan en el segundo capítulo para construir los espacios de Fock.

## 1. Espacios de Banach y Espacios de Hilbert

En esta sección se presentan, de manera usual, los espacios de Banach y de Hilbert, con la excepción de que el producto interior mostrado es anti-lineal en la primera entrada y no en la segunda. La convención aquí presentada para el producto interior corresponde a la utilizada en textos de física. En la Definición 1.4, se muestra la notación que usamos para los espacios  $L^p(M)$  los cuales resultan ser espacios de Banach y en el caso de  $L^2(M)$  es un espacio de Hilbert. Finalmente, se presenta el espacio de funciones de rápido decaimiento, un subconjunto denso de  $L^2(M)$  que a diferencia de este último sus elementos están definidos en todo el espacio  $M$  y no sólo en “casi todo punto” de  $M$ . Una construcción detallada de los espacios de Banach y Hilbert se ofrece en [16] Cap. III y IV, [19] Cap. 3 y 4. En cuanto a una construcción de los espacios  $L^p(M)$  se recomienda [20] Cap. 3 o [24] Sec. 0.6 y Apéndice A. Las caracterización de la clase de Schwartz se pueden encontrar en [16] Sec. V.3. Finalmente, la transformada de Fourier y sus propiedades se derivan en [17] Sec. IX.1 y [24] Sec. 7.1.

**Definición 1.1** (Espacio de Banach). *Sea  $V$  un espacio vectorial con la norma*

$$\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

*Decimos que  $V$  es un espacio de Banach si es completo con respecto a  $\|\cdot\|_V$ .*

**Definición 1.2** (Espacio de Hilbert). *Sea  $\mathfrak{h}$  un espacio vectorial dotado de un producto interior,*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (1.2)$$

*que es lineal en la segunda entrada y anti-lineal en la primera entrada (los escalares en la primera entrada salen conjugados del producto interior). Decimos que  $\mathfrak{h}$  es un espacio de Hilbert si es completo con respecto a la norma*

$$\|\cdot\|_{\mathfrak{h}}^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}}. \quad (1.3)$$

No es difícil ver que, para  $\psi, \varphi \in \mathfrak{h}$  con  $\|\varphi\|_{\mathfrak{h}} = 1$ ,

$$\|\psi\|_{\mathfrak{h}} = \sup_{\|\varphi\|_{\mathfrak{h}}=1} |\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathfrak{h}}|, \quad (1.4)$$

donde, en general, identificamos  $\sup_{a \in A} f(a) := \sup \{f(a) \mid a \in A\}$ .

Si no existe ambigüedad o es claro cual es el espacio donde se toma la norma o producto interior, se omite el subíndice en las Expresiones (1.1) y (1.2).

**Definición 1.3** (Conjunto Generador). *Sea  $\mathfrak{h}$  un espacio de Hilbert, un conjunto  $S \subset \mathfrak{h}$  es llamado generador si el conjunto de combinaciones lineales finitas de elementos de  $S$  es denso en  $\mathfrak{h}$ .*

Desde ahora, a menos que se especifique lo contrario, el símbolo  $\mathfrak{h}$  denota a un espacio de Hilbert.

**Definición 1.4** (Espacio  $L^p$ ). Sea  $(M, \lambda)$  un espacio de medida, donde  $M$  es un conjunto medible y  $\lambda$  la medida de Lebesgue.

Para  $1 \leq p < \infty$ , denotamos por  $L^p(M, \lambda)$  o simplemente como  $L^p(M)$  al espacio de funciones  $p$ -integrables con dominio  $M$  y que su imagen es subconjunto de  $\mathbb{C}$ . De manera explícita, una función compleja  $f$  está en  $L^p(M)$  si y sólo si  $|f|^p$  es integrable en  $M$  con respecto a la medida de Lebesgue.  $L^p(M)$  es un espacio normado con la norma

$$\|f\|_{L^p(M)} := \left( \int_M |f|^p d\lambda \right)^{1/p}. \quad (1.5)$$

El caso  $p = \infty$  corresponde al espacio  $L^\infty(M)$ , conformado por las funciones complejas que son acotadas para casi todo punto en  $M$  (el conjunto donde no está acotada la función tiene medida cero de Lebesgue), con la norma

$$\|f\|_{L^\infty(M)} := \operatorname{ess\,sup}_{k \in M} |f(k)|, \quad (1.6)$$

donde

$$\operatorname{ess\,sup}_{k \in M} |f(k)| \equiv \inf \{a \geq 0 \mid \lambda(\{k \in M \mid |f(k)| \geq a\}) = 0\}.$$

En el marco de los espacios  $L^p(M)$ , es importante mencionar al rango esencial, definido como el conjunto

$$\operatorname{Ran}_{es}(f) := \{z \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0 : \lambda(\{k \in M \mid |f(k) - z| < \varepsilon\}) > 0\}.$$

Si, por el contexto, es claro que conjunto es  $M$  en la Definición 1.4, se identifica  $\|\cdot\|_{L^p(M)} \equiv \|\cdot\|_p$ .

Para  $1 \leq p \leq \infty$ , el espacio  $L^p(M)$  con la norma  $\|\cdot\|_p$  resulta ser un espacio de Banach. El caso  $p = 2$  es de particular importancia: el espacio  $L^2(M)$ , dotado del producto interior

$$\langle f, g \rangle_{L^2(M)} := \int_M \bar{f}g d\lambda, \quad (1.7)$$

definido para  $f$  y  $g$  funciones arbitrarias en  $L^2(M)$ , es un espacio de Hilbert.

En la definición anterior, se ha omitido la construcción completa de los espacios  $L^p$ , en la cual las funciones que son iguales para casi todo punto, con respecto a la medida de Lebesgue, son identificadas (tomando el cociente del espacio de funciones  $p$ -integrables con el núcleo de  $\|\cdot\|_p$ ).

Una de las características de los espacios  $L^p$  es que ciertas propiedades de sus elementos están únicamente definidas para casi todo punto, particularidad que convierte en sutil la forma en que se enuncian resultados, así como su prueba, para los espacios  $L^p$ . Entre estas propiedades está la evaluación de funciones. Con el objetivo de evadir este aspecto en uno de los espacios que más empleamos, a saber  $L^2(M)$ , construimos la clase de funciones de rápido decaimiento, un subconjunto denso en  $L^2(M)$ , cuyas funciones están bien definidas en todo el conjunto  $M$ .

Denotamos  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Un arreglo de la forma  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , donde  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , es llamado un multi-índice de orden

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Para cada multi-índice  $\alpha$  y función  $f$  definida sobre  $\mathbb{R}^n$ , denotamos a su derivada multi-índice como

$$D^\alpha f(x) := \left( \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \right) \dots \left( \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n} \right) f(x),$$

con

$$\left( \frac{\partial^0}{\partial x_i} \right) f(x) := f(x),$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Así mismo, para un vector  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , escribimos  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

**Definición 1.5** (Clase de Schwartz). *Definimos la clase Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , también conocida como la clase de funciones de rápido decaimiento, como el conjunto de funciones complejas que son infinitamente diferenciables sobre  $\mathbb{R}^n$  que satisfacen*

$$\|f\|_{\alpha, \beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \quad (1.8)$$

para  $\alpha$  y  $\beta$  multi-índices arbitrarios.

En otras palabras, la Ecuación (1.8) expresa que las funciones en la clase de Schwartz son aquellas que, junto con todas sus derivadas, decaen más rápidamente que el inverso de cualquier polinomio.

La clase de Schwartz tiene diversas propiedades, en nuestro caso, las que resultan de mayor interés están relacionadas a inclusiones con respecto a otros espacios. Por un lado, el conjunto de funciones complejas que son infinitamente diferenciables con soporte compacto,  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , está contenido en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ; por otro lado, tenemos la contención  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ . Esto nos garantiza, junto con el hecho de que  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un conjunto denso en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Para concluir esta sección presentamos la Transformada de Fourier en la clase de Schwartz y algunas de sus características más relevantes.

**Definición 1.6** (Transformada de Fourier). *La transformada de Fourier se define como la función  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dada por  $f \mapsto \mathcal{F}(f) \equiv \hat{f}$  donde*

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} f(x) dx. \quad (1.9)$$

*En este caso, decimos que  $f$  está representada en el espacio físico (o de posiciones) y que  $\hat{f}$  está representada en el espacio recíproco (o de momentos).*

La transformada de Fourier tiene diversas propiedades que la hacen una gran herramienta para el estudio de ecuaciones en derivadas parciales, entre las propiedades que nos interesan se encuentra que la transformada de Fourier es un isomorfismo y la relación que guarda con la derivada multi-índice:

**Proposición 1.7** (Propiedades de la Transformada de Fourier). Sean  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces

- (a)  $\mathcal{F}$  es una biyección con inversa  $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dada explícitamente por

$$\check{g}(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}(g)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} \hat{g}(k) dk. \quad (1.10)$$

- (b)  $\mathcal{F}$  se extiende a un operador unitario  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .  
(c) Se satisface la identidad de Parseval

$$\langle f, g \rangle_{L^2(M)} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2(M)}, \quad (1.11)$$

en particular se cumple la identidad de Plancherel:

$$\|f\|_{L^2(M)} = \|\hat{f}\|_{L^2(M)}. \quad (1.12)$$

- (d) Si  $h(x) = \overline{f(x)}$ , entonces

$$\hat{h}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}. \quad (1.13)$$

Si  $f$  sólo toma valores reales,  $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$ .

- (e) La transformada de Fourier convierte operadores diferenciales en operadores de multiplicación, pues dado  $\alpha$  un multi-índice

$$D^\alpha f(x) = ((ik)^\alpha \hat{f})^\vee(x). \quad (1.14)$$

## 2. Caracterización de Operadores Auto-adjuntos y su Espectro

Para dar una caracterización adecuada de los operadores auto-adjuntos actuando en un espacio de Hilbert, es necesario recordar algunos conceptos de la Teoría Espectral. Al principio de esta sección se clasifican los operadores como acotados y no-acotados, cerrados y cerrables, estos conceptos son empleados para dar una definición adecuada del operador adjunto. Posteriormente, se da una clasificación de los operadores en torno a la relación que guardan con su adjunto y se da un criterio básico para caracterizar a los operadores auto-adjuntos (ver Teorema 2.7). Con el objetivo de presentar el teorema espectral, se define el conjunto resolvente de un operador y su espectro. El teorema espectral, como lo presentamos (ver Teorema 2.14), es válido no sólo para operadores auto-adjuntos, sino también para operadores normales. Al final de esta sección se enuncian un par de resultados que son de gran utilidad para determinar si un operador es auto-adjunto, el Teorema de Kato-Rellich que indica bajo que condiciones la perturbación de un operador auto-adjunto sigue siendo un operador auto-adjunto y el Teorema de Nelson sobre vectores analíticos. Un par de referencias para los resultados presentados sobre operadores acotados y no acotados (propiedades, Teorema Espectral y Cálculo Funcional) son [19] Cap. 12 y 13, [16] Cap. VI-VIII. Para el Teorema de Kato-Rellich se recomienda [17]

Sec. X.6, mientras que la prueba del Teorema de vectores analíticos de Nelson se encuentra en la misma fuente en Sec. X.2. El resultado conocido como Principio del máximo-mínimo se construye en [18] Sec. XIII.1.

**Definición 2.1** (Operador Acotado). *Un operador acotado  $A$  es una transformación lineal definida entre dos espacios de Hilbert,  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$ , que satisface*

$$\|A\psi\|_{\mathfrak{h}_2} \leq C\|\psi\|_{\mathfrak{h}_1}, \quad (1.15)$$

con  $C \geq 0$ , para todo  $\psi \in \mathfrak{h}_1$ . Es importante destacar que la condición dada en la Ecuación (1.15) es equivalente a que el operador  $A$  es una transformación lineal continua.

El valor más chico de  $C$  es nombrado la norma de  $A$ , y es denotada por  $\|A\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)}$  o simplemente por  $\|A\|$ . Es útil observar que

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)} = \sup_{\|\psi\|_{\mathfrak{h}_1}=1} \|A\psi\|_{\mathfrak{h}_2}. \quad (1.16)$$

El conjunto de operadores acotados  $\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ , con la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)}$ , es un espacio de Banach. En caso de que  $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ , escribimos  $\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1)$  en vez de  $\mathcal{B}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1)$ .

Para dos elementos  $A$  y  $B$  de  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$  se define el producto  $AB : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  mediante la composición

$$[AB]\psi = A[B\psi], \quad (1.17)$$

para todo  $\psi \in \mathfrak{h}$ .

La norma del producto de dos operadores satisface la desigualdad

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|. \quad (1.18)$$

Existen transformaciones lineales que no son acotadas en el sentido de la Ecuación (1.16).

**Definición 2.2** (Operador). *Decimos que una transformación lineal,  $A$ , es un operador si*

$$A : D(A) \rightarrow \mathfrak{h}$$

con  $D(A)$  un subespacio de  $\mathfrak{h}$ .

Nos referimos al operador  $A$ , actuando en  $\mathfrak{h}$ , como densamente definido si  $D(A)$  es denso en  $\mathfrak{h}$ .

En este contexto, dados dos operadores  $A$  y  $B$ , decimos que  $B$  es una extensión de  $A$  si se satisface que  $D(A) \subset D(B)$  y  $B\psi = A\psi$ , para todo  $\psi \in D(A)$ . Es importante destacar que no hemos asumido que  $A$  sea un operador continuo. Si  $A$  es continuo, puede ser extendido a todo  $\mathfrak{h}$ , esto implica que  $A$  es la restricción a  $D(A)$  de algún elemento de  $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ .

Denotamos por  $\mathcal{G}(A)$  a la gráfica del operador  $A$  en  $\mathfrak{h}$  definida como

$$\mathcal{G}(A) := \{(\psi, A\psi) \mid \psi \in D(A)\}.$$

$\mathcal{G}(A)$  es un subconjunto de  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ , el cual es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\langle (\psi_1, \varphi_1), (\psi_2, \varphi_2) \rangle = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle,$$

donde  $\psi_i, \varphi_i \in \mathfrak{h}$ , con  $i = 1, 2$ .

Notamos que  $B$  es una extensión de  $A$  si y sólo si  $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$ ; inclusión que es comúnmente escrita como  $A \subset B$ .

**Definición 2.3** (Operador Cerrado). *Un operador cerrado definido en  $\mathfrak{h}$  es aquel cuya gráfica es un subespacio cerrado de  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ . Además, decimos que un operador  $A$  es cerrable si tiene una extensión cerrada. Todo operador cerrable tiene una extensión cerrada que resulta ser la más chica de todas, llamada su cerradura, la cual denotamos por  $\bar{A}$ .*

Si el operador  $A$  es cerrado, un subconjunto  $D \subset D(A)$  es conocido como dominio esencial de  $A$ , si  $\overline{A|_D} = A$ .

Debido al teorema de la gráfica cerrada, observamos que  $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  si y sólo si  $D(A) = \mathfrak{h}$  y  $A$  es cerrado. Por otro lado, tenemos que si  $A$  es cerrable, entonces  $\mathcal{G}(\bar{A}) = \mathcal{G}(A)$ .

**Definición 2.4** (Operador Adjunto). *Sea  $A$  un operador densamente definido en  $\mathfrak{h}$ . Sea  $D(A^*)$  el conjunto formado por los vectores  $\varphi \in \mathfrak{h}$  para los cuales existe  $\eta \in \mathfrak{h}$  tal que*

$$\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle,$$

con  $\psi$  un elemento arbitrario de  $D(A)$ .

Para cada  $\varphi \in D(A^*)$ , definimos  $A^*\varphi = \eta$ . No es difícil verificar que  $A^*$  es un operador bien definido en  $\mathfrak{h}$ , es decir,  $D(A^*)$  es un subespacio de  $\mathfrak{h}$  y  $A^*$  es una transformación lineal. El operador  $A^*$  es llamado el adjunto de  $A$ .

El hecho de que  $A^*$  sea único está garantizado por la densidad de  $D(A)$  en  $\mathfrak{h}$ . Además, notamos que  $A \subset B$  implica que  $B^* \subset A^*$ .

**Proposición 2.5.** *Sea  $A$  un operador densamente definido en  $\mathfrak{h}$ . Entonces:*

- (a)  $A^*$  es cerrado.
- (b)  $A$  es cerrable si y sólo si  $D(A^*)$  es denso, en tal caso  $\bar{A} = A^{**}$ .
- (c) Si  $A$  es cerrable, entonces  $(\bar{A})^* = A^*$ .

Como se ha mostrado hasta ahora, el dominio de los operadores no-acotados juega un papel muy importante cuando se trata de caracterizar a este tipo de operadores y a sus propiedades. Las operaciones algebraicas entre operadores no-acotados no son la excepción. Para dos operadores no-acotados,  $A$  y  $B$ , el dominio de la suma  $A + B : D(A + B) \subset \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  es

$$D(A + B) = D(A) \cap D(B). \quad (1.19)$$

Mientras que el producto  $AB : D(AB) \subset \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  tiene como dominio a

$$D(AB) = \{x \in D(B) \mid Bx \in D(A)\}. \quad (1.20)$$

**Definición 2.6** (Clasificación de Operadores). *Sea  $A$  un operador densamente definido en  $\mathfrak{H}$ . Decimos que:*

- (a)  *$A$  es normal si  $AA^* = A^*A$ , donde el dominio del producto se entiende según la Ecuación (1.20).*  
 (b)  *$A$  es simétrico si*

$$\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A\varphi, \psi \rangle,$$

con  $\varphi, \psi \in D(A)$ .

*De manera equivalente,  $A$  es simétrico si  $A \subset A^*$ .*

- (c)  *$A$  es auto-adjunto si  $A = A^*$ , es decir, si es simétrico y  $D(A) = D(A^*)$ .*  
 (d)  *$A$  es esencialmente auto-adjunto si es simétrico y  $\overline{A}$  es auto-adjunto. Si el operador  $A$  es cerrado, un subconjunto denso  $D \subset D(A)$  es conocido como dominio esencial de  $A$ , si  $\overline{A|_D} = A$ .*  
 (e)  *$A$  es acotado inferiormente si existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $\langle \psi, A\psi \rangle \geq M$ , para todo  $\psi \in D(A)$  y lo denotamos como  $A \geq M$ . Si  $M = 0$  decimos que  $A$  es un operador positivo.*

Es importante notar que para un operador acotado, las propiedades de ser simétrico y auto-adjunto coinciden.

El inciso (b) de la Proposición 2.5 nos asegura que los operadores simétricos son cerrables. Más aún, si  $A$  es un operador auto-adjunto, entonces es cerrado. Esto motiva el siguiente Teorema.

**Teorema 2.7** (Criterio Básico de Operadores Auto-adjuntos). *Sea  $A$  un operador simétrico definido en  $\mathfrak{H}$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a)  *$A$  es auto-adjunto.*  
 (b)  *$A$  es cerrado y  $\text{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$ .*  
 (c)  *$\text{Ran}(A \pm i) = \mathfrak{H}$ .*

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es un criterio para operadores esencialmente auto-adjuntos.

**Corolario 2.8.** *Sea  $A$  un operador simétrico definido en  $\mathfrak{H}$ . Entonces, las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:*

- (a)  *$A$  es esencialmente auto-adjunto.*  
 (b)  *$\text{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$ .*  
 (c)  *$\text{Ran}(A \pm i)$  es denso en  $\mathfrak{H}$ .*

Con el objetivo de enunciar adecuadamente el Teorema Espectral es necesario presentar una serie de conceptos y resultados, entre ellos el resolvente y el espectro de un operador.

**Definición 2.9** (Conjunto Resolvente). *Sea  $A$  un operador densamente definido en  $\mathfrak{H}$ . Decimos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  está en  $\rho(A)$ , el conjunto resolvente de  $A$ , si  $A - \lambda$  es una biyección de  $D(A)$  a  $\mathfrak{H}$  con inversa acotada.*

No es difícil ver que  $\rho(A)$  es un conjunto abierto. De igual manera, es de nuestro interés estudiar el complemento (en  $\mathbb{C}$ ) del resolvente.

**Definición 2.10** (Espectro y su Descomposición). *Sea  $A$  un operador densamente definido en  $\mathfrak{H}$ . El espectro de  $A$  está dado por*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \text{ no es invertible}\}. \quad (1.21)$$

*Examinando más detalladamente a  $\sigma(A)$ , existen básicamente tres motivos por los que, dado  $\lambda \in \sigma(A)$ ,  $A - \lambda$  no es invertible y esto genera una descomposición del espectro:*

(a)  $\text{Ker}(A - \lambda) \neq \{0\}$ .

*Cuando el núcleo de  $A - \lambda$  contiene elementos distintos del cero, decimos que  $\lambda$  es un valor propio o eigenvalor de  $A$ . Cualquier  $\psi \in \text{Ker}(A - \lambda)$  distinto de cero es un vector propio o eigenvector de  $A$  asociado a  $\lambda$ , que cumple  $A\psi = \lambda\psi$ . Nos referimos a  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda))$  como la multiplicidad geométrica de  $\lambda$ , mientras que denotamos por multiplicidad algebraica al menor  $k \in \mathbb{N}$  que satisface la siguiente igualdad entre conjuntos:*

$$\{\psi \in D(A^k) \mid (A - \lambda)^k \psi = 0\} = \{\psi \in D(A^{k+1}) \mid (A - \lambda)^{k+1} \psi = 0\}. \quad (1.22)$$

*El conjunto de todos los eigenvalores de  $A$  de multiplicidad (algebraica) finita, que son puntos aislados del espectro, es conocido como espectro discreto de  $A$ ,  $\sigma_d(A)$ .*

(b)  $\text{Ker}(A - \lambda) = \{0\}$  y  $\text{Ran}(A - \lambda)$  es denso en  $\mathfrak{H}$ .

*Cuando  $A - \lambda$  es un operador inyectivo y su rango es denso,  $A - \lambda$  tiene un inverso densamente definido pero no es acotado. Si es el caso, decimos que  $\lambda$  está en el espectro continuo de  $A$ ,  $\sigma_c(A)$ .*

(c)  $\text{Ker}(A - \lambda) = \{0\}$ , pero  $\text{Ran}(A - \lambda)$  no es denso en  $\mathfrak{H}$ .

*Si  $A - \lambda$  es un operador inyectivo, pero su rango no es denso,  $A - \lambda$  tiene un inverso que puede ser acotado, pero no es densamente definido, y por tanto, no puede ser extendido de manera única a un operador acotado sobre  $\mathfrak{H}$ . En esta circunstancia, decimos que  $\lambda$  se encuentra en el espectro residual de  $A$ ,  $\sigma_r(A)$ .*

Como  $\sigma(A) = \rho(A)^c$  y el conjunto  $\rho(A)$  es abierto, tenemos que  $\sigma(A)$  es cerrado. En caso de que  $A$  sea un operador acotado, su espectro resulta ser un conjunto compacto.

**Definición 2.11** (Proyección Ortogonal). *Un operador acotado  $P$  es una proyección si  $P^2 = P$ . Además, si  $P^* = P$ , entonces  $P$  es llamado proyección ortogonal.*

Para toda proyección  $P$ , denotamos a su complemento por  $P^\perp := (\mathbb{1}_{\mathfrak{H}} - P)$ , donde  $\mathbb{1}_{\mathfrak{H}}$  denota el operador identidad en  $\mathfrak{H}$ . Si  $P$  es una proyección ortogonal, no es difícil ver que  $P^\perp$  también lo es.

**Proposición 2.12.** *Sean  $P_1, P_2$  proyecciones definidas en  $\mathfrak{H}$ . Si  $\|P_1 - P_2\| < 1$ , entonces  $P_1$  y  $P_2$  son unitariamente equivalentes, es decir, existe un operador unitario  $U$  (que depende de  $P_1$  y  $P_2$ ) tal que  $P_2 = UP_1U^*$ .*

**Definición 2.13** (Resolución de la Identidad). *Sea  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel de un espacio topológico  $M$ . Una resolución de la identidad es una función*

$$E : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{h}),$$

con las siguientes propiedades:

- (a)  $E(\emptyset) = 0, E(M) = \mathbb{1}_{\mathfrak{h}}$ .
- (b)  $E(\omega)$  es una proyección ortogonal, para todo  $\omega \in \mathcal{B}$ .
- (c)  $E(\omega \cap \omega') = E(\omega)E(\omega')$ , para  $\omega$  y  $\omega'$  elementos arbitrarios de  $\mathcal{B}$ .
- (d) Si  $\omega \cap \omega' = \emptyset$ , entonces  $E(\omega \cup \omega') = E(\omega) + E(\omega')$ .
- (e) Para  $\varphi, \psi \in \mathfrak{h}$ , la función  $E_{\varphi, \psi}$ , definida en  $\mathcal{B}$ , como

$$E_{\varphi, \psi}(\omega) := \langle \varphi, E(\omega)\psi \rangle$$

es una medida (compleja) regular.

**Teorema 2.14** (Teorema Espectral). Para todo operador normal  $A$  definido en  $\mathfrak{h}$  existe una única resolución de la identidad,  $E^A$ , tal que

$$\langle \varphi, A\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} \lambda dE_{\varphi, \psi}^A(\lambda), \quad (1.23)$$

donde  $\lambda$  representa la función identidad sobre  $\sigma(A)$  y los vectores son tales que  $\psi \in D(A)$  y  $\varphi \in \mathfrak{h}$ . Más aún, para todo conjunto de Borel  $\omega \in \sigma(A)$  y para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  que conmuta con  $A$  (si  $A$  no es acotado, se entiende como  $AB \subset BA$ ), se cumple que  $E^A(\omega)B = BE^A(\omega)$ .

La resolución de la identidad asociada al operador  $A$  es conocida como la descomposición espectral de  $A$ , si la circunstancia no da lugar a ambigüedad se identifica  $E \equiv E^A$ .

En el contexto del Teorema 2.14, si el operador  $A$  es auto-adjunto el dominio de integración se restringe a un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , pues el espectro de un operador auto-adjunto está contenido en los números reales.

**Teorema 2.15** (Cálculo Funcional). Sea  $A$  un operador auto-adjunto definido en  $\mathfrak{h}$  y sea  $E$  su descomposición espectral. Entonces, existe un único mapeo del conjunto de las funciones complejas medibles y acotadas sobre el espectro de  $A$  al conjunto de los operadores acotados sobre  $\mathfrak{h}$ ,

$$\phi_A : L^\infty(E) \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{h}), \quad (1.24)$$

definido por la fórmula

$$\langle \varphi, \phi_A(f)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE_{\varphi, \psi}(\lambda). \quad (1.25)$$

Dados  $f, g \in L^\infty(E)$  y  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $\phi_A$  satisface las siguientes propiedades:

- (a)  $\phi_A$  es un \*-homomorfismo de álgebras, es decir,

$$\begin{aligned} \phi_A(fg) &= \phi_A(f)\phi_A(g), & \phi_A(\mu f) &= \mu\phi_A(f), \\ \phi_A(1) &= \mathbb{1}_{\mathfrak{h}}, & \phi_A(\bar{f}) &= \phi_A(f)^*. \end{aligned}$$

(b)  $\phi_A$  es una isometría

$$\|\phi_A(f)\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{h})} = \|f\|_\infty \leq \sup_{z \in \sigma(A)} |f(z)|. \quad (1.26)$$

En particular, si  $f \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$ , se cumple la igualdad:

$$\|\phi_A(f)\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{h})} = \sup_{z \in \sigma(A)} |f(z)|.$$

(c) El espectro de  $\phi_A(f)$  es el rango esencial de  $f$ ,

$$\sigma(\phi_A(f)) = \text{Ran}_{\text{ess}}(f). \quad (1.27)$$

(d) Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(E)$  converge puntualmente a  $f$ , se tiene que  $\phi_A(f_n)$  converge fuertemente a  $\phi_A(f)$ .

(e) Si  $A\psi = \mu\psi$ , entonces  $\phi_A(f)\psi = f(\mu)\psi$ .

(f) Si  $f \geq 0$ , se cumple que  $\phi_A(f) \geq 0$ .

(g) Si  $f \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$  y  $\omega_0 = f^{-1}(0)$ , entonces

$$\text{Ker}(\phi_A(f)) = \text{Ran}(E(\omega_0)). \quad (1.28)$$

(h) Un operador  $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  conmuta con toda proyección  $E(\omega)$  si y sólo si conmuta con todo operador  $\phi_A(f)$ .

Es común escribir  $f(A)$  en vez de  $\phi_A(f)$ . En general, a una función medible es posible asignarle un operador cerrado y densamente definido.

**Teorema 2.16** (Cálculo Funcional). *Sea  $E$  una resolución de la identidad. A cada función medible,  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ , corresponde un operador densamente definido en  $\mathfrak{h}$  y cerrado  $\phi(f)$ .*

*El operador  $\phi(f)$  está caracterizado por*

$$\langle \varphi, \phi(f)\psi \rangle = \int_M f(\lambda) dE_{\varphi, \psi}(\lambda), \quad (1.29)$$

con  $\varphi \in \mathfrak{h}$  y  $\psi \in D(\phi(f)) = D_f$ , donde

$$D_f = \left\{ \psi \in \mathfrak{h} \mid \int_M |f|^2 dE_{\varphi, \psi} \right\} < \infty. \quad (1.30)$$

*Dadas  $f$  y  $g$  funciones medibles, se satisfacen las propiedades enunciadas a continuación.*

(a) *Se satisface el teorema de multiplicación en el siguiente sentido:*

$$\phi(f)\phi(g) \subset \phi(fg), \quad D(\phi(f)\phi(g)) = D_g \cap D_{fg}.$$

*Entonces la igualdad  $\phi(f)\phi(g) = \phi(fg)$  se da si y sólo si  $D_{fg} \subset D_g$ .*

(b) *Se cumple que*

$$\phi(f)^* = \phi(\bar{f})$$

y

$$\phi(f)\phi(f)^* = \phi(|f|^2) = \phi(f)^*\phi(f).$$

(c) La norma de  $\phi(f)\psi$  está dada por

$$\|\phi(f)\psi\|^2 = \int_{\Omega} |f|^2 dE_{\psi, \psi}. \quad (1.31)$$

Los últimos teoremas de esta sección son la base para demostrar que el hamiltoniano del modelo spin-boson es un operador auto-adjunto. El Teorema de Nelson sobre vectores analíticos nos conduce a que la interacción en el modelo está descrita por un operador auto-adjunto. El Teorema de Kato-Rellich nos permite concluir que el hamiltoniano del modelo es un operador auto-adjunto bajo la condición de que la interacción es una perturbación del hamiltoniano libre.

**Definición 2.17** (Vector Analítico). *Sea  $A$  un operador densamente definido en  $\mathfrak{h}$ . Definimos el conjunto  $C^\infty(A) := \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ . Un vector analítico de  $A$  es un vector  $\psi \in C^\infty(A)$  que satisface*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n \psi\|}{n!} t^n < \infty, \quad (1.32)$$

para algún  $t > 0$ .

**Teorema 2.18** (Vectores Analíticos de Nelson). *Sea  $A$  un operador simétrico definido en  $\mathfrak{h}$ . Si  $D(A)$  contiene un conjunto generador de vectores analíticos de  $A$ , entonces  $A$  es esencialmente auto-adjunto.*

**Definición 2.19.** *Sean  $A$  y  $B$  operadores densamente definidos en  $\mathfrak{h}$ . Supongamos que:*

- (a)  $D(A) \subset D(B)$ .
- (b) Existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tales

$$\|B\varphi\| \leq \alpha \|A\varphi\| + \beta \|\varphi\|, \quad (1.33)$$

para todo  $\varphi \in D(A)$ .

En tal caso, decimos que  $B$  está acotado relativamente con respecto de  $A$  (en el sentido de Kato). El ínfimo de los valores que toma  $\alpha$  es nombrado cota relativa de  $B$  con respecto de  $A$ . Generalmente, se toma un valor grande de  $\beta$ , mientras que el valor de  $\alpha$  se toma pequeño. Si es posible elegir el valor de  $\alpha$  arbitrariamente cercano al cero, decimos que  $B$  es una perturbación infinitesimal de  $A$ .

**Teorema 2.20** (Teorema de Kato-Rellich). *Sean  $A$  y  $B$  operadores densamente definidos en  $\mathfrak{h}$ , con  $A$  auto-adjunto y  $B$  simétrico. Si  $B$  está acotado relativamente con respecto de  $A$  (en el sentido de Kato), con cota relativa  $a < 1$ , entonces  $A + B$  es auto-adjunto en  $D(A)$  y esencialmente auto-adjunto en cualquier dominio esencial de  $A$ . En caso de que  $A$  sea un operador acotado inferiormente, con cota inferior  $c$ , entonces  $A + B$  está acotado inferiormente por*

$$c - \text{máx} \{ \beta / (1 - \alpha), \alpha |c| + \beta \}, \quad (1.34)$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  dados por la Ecuación (1.33).

Finalmente presentamos un par de resultados que caracterizan el espectro de operadores auto-adjuntos que son acotados inferiormente.

**Teorema 2.21.** *Sea  $A$  un operador auto-adjunto definido en  $\mathfrak{h}$ . Entonces  $A$  es un operador positivo si y sólo si  $\sigma(A) \subset [0, \infty)$ .*

**Teorema 2.22** (Principio máx.-mín.). *Sea  $A$  un operador auto-adjunto y acotado inferiormente. Definimos*

$$\mu_n(A) := \sup_{\psi_1, \dots, \psi_{n-1} \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}} \inf_{\varphi \in V_{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}}} \langle \varphi, A\varphi \rangle, \quad (1.35)$$

donde  $V_{\psi_1, \dots, \psi_r} := \{ \varphi \in D(A) \mid \|\varphi\| = 1 \text{ y } \langle \varphi, \psi_i \rangle = 0, \text{ con } i = 1, \dots, r \}$ . Entonces, para un  $n$  fijo, se satisface sólo una de las siguientes condiciones:

- (a) Existen  $n$  eigenvalores (contando a los eigenvalores degenerados un número de veces igual a su multiplicidad (algebraica) ) debajo del ínfimo del espectro esencial de  $A$  y  $\mu_n(A)$  es el  $n$ -ésimo eigenvalor contando multiplicidad.
- (b)  $\mu_n(A)$  es el ínfimo del espectro esencial de  $A$  y en este caso,  $\mu_n = \mu_{n+1} = \dots$ . Como resultado hay a lo más  $n - 1$  eigenvalores (contando multiplicidad) debajo de  $\mu_n$ .

### 3. Proyecciones de Riesz

Las integrales de Riesz son una herramienta muy útil para el estudio del espectro de un operador. Constituyen un caso particular dentro de la Teoría de integración de funciones analíticas con dominio  $\mathbb{C}$  y que toman valores a espacios de Banach. Dicha teoría está basada en el cálculo funcional y en el análisis complejo. Una construcción detallada de las integrales de Riesz se encuentra en [12] Cap. 6. En [19] Sec. 3.4, 3.4 y 12.6 se derivan resultados similares.

Es útil recordar del análisis complejo lo siguiente: dada una curva cerrada  $\Gamma$  en  $\mathbb{C}$  y  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ , el índice (o número de vueltas) de  $\Gamma$  respecto a  $z_0$  se define como

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z_0) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z_0 - z}. \quad (1.36)$$

No es difícil ver que  $\text{Ind}_{\Gamma}(z_0)$  es un número entero.

**Definición 3.1** (Contorno). *Sea  $\Gamma$  una curva en  $\mathbb{C}$ , decimos que  $\Gamma$  es un contorno si es una curva simple, cerrada y parametrizada en sentido anti-horario.*

En caso de que  $\Gamma$  sea un contorno el índice de  $\Gamma$  respecto a  $z_0$  se restringe a dos valores:

$$Ind_{\Gamma}(z_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } z_0 \text{ no está en el interior de } \Gamma \\ 1 & \text{si } z_0 \text{ está en el interior de } \Gamma, \end{cases}$$

donde “interior de  $\Gamma$ ” hace referencia al conjunto acotado que está delimitado por  $\Gamma$ .

En este mismo contexto se satisface la fórmula integral de Cauchy para funciones analíticas; dada una función analítica  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$ , entonces

$$f(z_0)Ind_{\Gamma}(z_0) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z_0 - z} dz, \quad (1.37)$$

donde  $\Gamma$  es un contorno arbitrario y  $z_0 \in \Omega \setminus \Gamma$ . Observamos que si  $z_0$  no está en el interior de  $\Gamma$ , el integrando en la Ecuación 1.37 resulta ser analítico y su integral cero (resultado conocido como Teorema de Cauchy).

Bajo las mismas condiciones en las que se satisface la fórmula integral de Cauchy, es posible obtener una expresión explícita para la  $n$ -ésima derivada de  $f$ :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{(-1)^{(n+1)}n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z_0 - z)^{(n+1)}} dz. \quad (1.38)$$

Nos interesa extender parte de lo anterior para integrar funciones complejas y obtener operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ , cambiando adecuadamente en las expresiones anteriores el número complejo  $z_0$  por un operador  $A$ . Para lo cual es necesario introducir algunos resultados.

**Proposición 3.2** (Serie de Neumann). *Sean  $A, B \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ , con  $A$  invertible y  $B$  es tal que  $\|BA^{-1}\| < 1$ . Entonces  $A + B$  es invertible y su inverso está explícitamente dado por*

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-BA^{-1})^n. \quad (1.39)$$

En particular, si  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$  cumplen que  $\|A\| < |z|$ , entonces, identificando  $z \equiv z\mathbb{1}_{\mathfrak{h}}$ , tenemos que  $A - z$  es invertible y

$$(A - z)^{-1} = (-z)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{z}\right)^n. \quad (1.40)$$

El operador  $R_A(z) := (A - z)^{-1}$  es conocido como el operador resolvente de  $A$  en  $z$ . El operador  $R_A(z)$  está bien definido incluso cuando  $A$  no es acotado, en este caso con  $z \in \rho(A)$ .

En este punto es importante observar lo siguiente:

Dado  $z \in \rho(A)$ , la función  $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z}$  es continua en  $\sigma(A)$ . Entonces, por el Cálculo Funcional,

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\mathfrak{h}} &= \phi_A(1) \\
&= \phi_A\left((\lambda - z)\frac{1}{\lambda - z}\right) \\
&= (A - z)g(A),
\end{aligned}$$

por tanto, tenemos que  $g(A) = (A - z)^{-1}$ , es decir, ocupando el Cálculo Funcional,  $R_A(z) = (A - z)^{-1} = \frac{1}{A - z}$ , expresiones que empleamos de manera equivalente.

**Proposición 3.3.** *Sea  $A$  un operador densamente definido en  $\mathfrak{h}$ . Entonces la función  $z \mapsto R_A(z)$ , es analítica sobre  $\rho(A)$ .*

Además, el operador resolvente cumple las siguientes identidades, que relacionan la diferencia de operadores con su producto:

**Proposición 3.4** (Identidades Resolventes). *Sean  $A$  y  $B$  operadores densamente definidos en  $\mathfrak{h}$ .*

(a) *Si  $z, w \in \rho(A)$ , entonces*

$$R_A(z) - R_A(w) = (z - w)R_A(z)R_A(w), \quad (1.41)$$

*igualdad conocida como la primera identidad resolvente.*

(b) *Dado  $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$ , se nombra como la segunda identidad resolvente a*

$$R_A(z) - R_B(z) = R_A(z)(B - A)R_B(z), \quad (1.42)$$

*operador definido en  $D(A) \cap D(B)$*

Como resultado de las Proposición 3.3 y de la primera identidad resolvente, podemos obtener una expresión explícita para la derivada del operador resolvente, resultando en

$$\frac{d}{dz}R_A(z) = R_A^2(z). \quad (1.43)$$

**Definición 3.5** (Fórmula Integral de Cauchy). *Sea  $A$  un operador cerrado,  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , una función analítica. Supongamos que  $\sigma(A)$  se descompone en dos partes disconexas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Además, supongamos que  $\sigma_1$  es un conjunto no vacío, acotado y que  $\sigma_1 \subset \Omega$ , como las componentes de un conjunto cerrado son cerradas,  $\sigma_1$  es cerrado y lo podemos rodear con un contorno  $\Gamma \subset \Omega$  y que cumple  $\Gamma \cap \sigma(A) = \emptyset$ .*

*Bajo estas condiciones, definimos*

$$\tilde{f}(A) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{A - z} dz, \quad (1.44)$$

*integral se entiende como el límite de sumas de Riemann obtenidas a partir de la parametrización de  $\Gamma$ .*

Es conveniente hacer algunos comentarios sobre la Definición 3.5:

Si  $\sigma(A)$  es un conjunto no acotado no se puede rodear con un contorno, por tal motivo suponemos que se descompone en dos conjuntos disconexos con uno de

ellos,  $\sigma_1$ , acotado y contenido en  $\Omega$  para poder definir la integral sobre el contorno  $\Gamma$ . La condición sobre  $\sigma_1$  de no ser vacío se puede omitir, pero en el caso de que  $\sigma_1$  sea un conjunto vacío el integrando en la Ecuación (1.44) es analítico en el interior de  $\Gamma$  y por el Teorema de Cauchy, la integral es cero. Por último, la condición  $\Gamma \cap \sigma(A) = \emptyset$  y la analiticidad del operador resolvente,  $R_A(z)$ , implican que el integrando en la Ecuación (1.44) es continuo, por lo que la integral está bien definida y resulta ser un operador.

Más aún, la Proposición 3.3 nos garantiza que el integrando es analítico en  $\rho(A)$ . Entonces, usando el Teorema de Cauchy, tenemos que  $\tilde{f}(A)$  es independiente de la elección del contorno  $\Gamma$ , siempre que cumpla con rodear al menos a una parte de  $\sigma(A)$  y  $\Gamma \cap \sigma(A) = \emptyset$ .

**Observación 3.6.** Sean  $A$  un operador auto-adjunto que además cumple las condiciones de la definición anterior y  $f$  una función analítica definida sobre un subconjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Bajo estas condiciones, la Definición 3.5 determina un cálculo funcional que coincide con la Definición 2.15. Esto se debe al siguiente hecho:

Con estas hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \tilde{f}(A)\psi \rangle &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \langle \varphi, (A-z)^{-1} \psi \rangle dz \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \left( \int_{\sigma(A)} \frac{1}{\lambda - z} dE_{\varphi, \psi}(\lambda) \right) dz, \end{aligned} \quad (1.45)$$

ocupando el Teorema de Fubini y la Ecuación (1.37), llegamos a

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \tilde{f}(A)\psi \rangle &= \int_{\sigma(A)} \left( \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{\lambda - z} dz \right) dE_{\varphi, \psi}(\lambda) \\ &= \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE_{\varphi, \psi}(\lambda) \\ &= \langle \varphi, f(A)\psi \rangle, \end{aligned} \quad (1.46)$$

para todos  $\varphi, \psi \in D(A)$ .

En particular, tomando a  $\Gamma$  un contorno que rodea a  $\omega \subset \sigma(A)$  y reproduciendo los cálculos realizados en las Ecuaciones (1.45) y (1.46) podemos escribir,

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi, \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (A-z)^{-1} dz \psi \right\rangle &= \int_{\sigma(A)} \left( \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda - z} dz \right) dE_{\varphi, \psi}(\lambda) \\ &= \int_{\sigma(A)} \chi_{\omega}(\lambda) dE_{\varphi, \psi}(\lambda) \\ &= \langle \varphi, E(\omega)\psi \rangle, \end{aligned} \quad (1.47)$$

donde  $\chi_{\omega}$  denota la función indicadora del conjunto  $\omega$ , entonces

$$E(\omega) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (A - z)^{-1} dz. \quad (1.48)$$

Esto motiva la siguiente definición, que corresponde al caso donde  $\omega = \{z_0\}$ .

**Definición 3.7** (Integral de Riesz). *Sea  $A$  un operador cerrado y  $z_0 \in \sigma(A)$ , un punto aislado del espectro. Sea  $\Gamma_{A,z_0}$  un contorno alrededor de  $z_0$  tal que la cerradura de la región acotada por  $\Gamma_{A,z_0}$  interseca a  $\sigma(A)$  sólo en  $z_0$ . Nos referimos a tal contorno como admisible para  $z_0$  y  $A$ .*

*Para un contorno admisible,  $\Gamma_{A,z_0}$ , definimos*

$$P_{A,z_0} := \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{A,z_0}} R_A(z) dz, \quad (1.49)$$

*expresión conocida como integral de Riesz.*

Como las integrales de Riesz de  $A$  (un operador auto-adjunto) son parte de su descomposición espectral (según la Ecuación (1.48)) tenemos que conmutan con cualquier operador que conmute con  $A$ , en virtud del Teorema Espectral. En particular, por el Cálculo Funcional, las integrales de Riesz conmutan con  $f(A)$ , para cualquier  $f \in L^\infty(E)$ .

Por otra parte, de manera similar al Teorema de la Deformación (del análisis complejo), es posible verificar que el valor del operador  $P_{A,z_0}$  no depende del contorno.

**Proposición 3.8** (Deformación). *Sea  $A$  un operador cerrado y  $z_0 \in \sigma(A)$  un punto aislado del espectro. Entonces, el operador  $P_{A,z_0}$  resulta ser independiente del contorno empleado, siempre que este sea admisible para  $z_0$  y  $\sigma(A)$ . En otras palabras, dados  $\Gamma_{A,z_0}$  y  $\Gamma'_{A,z_0}$  contornos admisibles para  $z_0$  y  $\sigma(A)$ , tenemos que*

$$P_{A,z_0} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{A,z_0}} R_A(z) dz = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_{A,z_0}} R_A(z) dz. \quad (1.50)$$

Por la Proposición 3.8, podemos escoger el contorno admisible, para  $P_{A,z_0}$ , de manera conveniente. En este caso, buscando simplificar los cálculos, tomamos  $\Gamma_{A,z_0} = \partial D(z_0, r)$ , donde

$$D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \quad (1.51)$$

denota el disco de radio  $r > 0$  con centro en  $z_0 \in \mathbb{C}$  en el plano complejo, es decir,

$$\Gamma_{A,z_0} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}. \quad (1.52)$$

La siguiente proposición contiene propiedades de las integrales de Riesz que resultan ser un caso particular del Cálculo Funcional, pero es conveniente enunciarlas de manera explícita.

**Proposición 3.9.** *Sea  $P_{A,z_0}$  la integral de Riesz para  $z_0$  y  $A$ , con  $A$  un operador auto-adjunto. Entonces*

- (a)  $P_{A,z_0}$  es una proyección ortogonal.  
 (b)  $P_{A,z_0}$  es una proyección sobre el núcleo del operador  $A - z_0$ , es decir,

$$\text{Ran}(P_{A,z_0}) = \text{Ker}(A - z_0).$$

- (c)  $P_{A,z_0}$  conmuta con  $A$  en  $D(A)$ .  
 (d) Se cumplen las igualdades

$$\sigma(AP_{A,z_0}) = z_0, \quad \sigma(AP_{A,z_0}^\perp) = \sigma(A) \setminus z_0.$$

Como resultado de la Proposición 3.9,  $P_{A,z_0}$  resulta ser una proyección ortogonal sobre  $\text{Ker}(A - z_0)$ , debido a este hecho la integral de Riesz es también conocida como proyección de Riesz. Así mismo, el inciso (b) implica que los puntos aislados de  $\sigma(A)$  son eigenvalores de  $A$ .

## 4. Producto Tensorial y Suma Directa de Espacios de Hilbert

En esta sección se construye el producto tensorial de espacios de Hilbert arbitrarios y se presentan algunas de sus características. En particular, en el Teorema 4.3 se caracteriza el producto tensorial de espacios  $L^2$ . Sobre el producto tensorial de espacios de Hilbert se define un producto tensorial de operadores. Como se muestra en el Teorema 4.8 y el Corolario 4.9, el espectro de un producto tensorial de operadores está relacionado con los espectros de dichos operadores. Al final de esta sección se construye la suma directa de espacios de Hilbert y se caracteriza su espectro. La forma aquí presentada para construir el producto tensorial de espacios de Hilbert y la suma directa se basa en [16] Sec. II.4 y [24] Sec. 1.4. El producto tensorial de operadores se construye según [16] Sec. VIII.10 y [24] Sec. 4.6.

### 4.1. Producto Tensorial de Espacios de Hilbert

Existen distintas maneras de construir conjuntos con estructura de espacio de Hilbert a partir de una familia de espacios de Hilbert que cumplen ciertas propiedades. Una de esas construcciones, es la del producto tensorial.

**Definición 4.1** (Producto Tensorial de Espacios de Hilbert). Sean  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$  espacios de Hilbert. Dados  $\varphi_1 \in \mathfrak{h}_1$  y  $\varphi_2 \in \mathfrak{h}_2$ , denotamos por  $\varphi_1 \otimes \varphi_2$  a la forma bilineal conjugada definida sobre  $\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2$ , que actúa como

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\psi_1, \psi_2) = \langle \psi_1, \varphi_1 \rangle \langle \psi_2, \varphi_2 \rangle,$$

con  $(\psi_1, \psi_2) \in \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2$ .

Sea  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$  el conjunto de las combinaciones lineales finitas de tales formas:

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2} := \left\{ \sum_{j=1}^m \varphi_{1j} \otimes \varphi_{2j} \mid \varphi_{1j} \in \mathfrak{h}_1, \varphi_{2j} \in \mathfrak{h}_2, j \in \{1, \dots, m\} \text{ y } m \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1.53)$$

Dotamos a  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$  de un producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$ , dado por

$$\langle \varphi \otimes \psi, \eta \otimes \mu \rangle_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2} = \langle \varphi, \eta \rangle \langle \psi, \mu \rangle$$

y lo extendemos por linealidad a todo  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$ . No es difícil mostrar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$  está bien definido y es positivo.

Definimos a  $\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2$  como la completación de  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$  bajo el producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2}$ . El espacio  $\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2$  es conocido como el producto tensorial de  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$ .

**Proposición 4.2.** Sean  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$  y  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  bases ortonormales de  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$ , respectivamente. Entonces,  $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal de  $\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2$ .

**Teorema 4.3.** Sean  $(M_1, \lambda_1)$  y  $(M_2, \lambda_2)$  espacios de medida tales que  $L^2(M_1, \lambda_1)$  y  $L^2(M_2, \lambda_2)$  son separables. Entonces:

(a) Existe un único isomorfismo

$$\mathcal{J} : L^2(M_1, \lambda_1) \otimes L^2(M_2, \lambda_2) \rightarrow L^2(M_1 \times M_2, \lambda_1 \otimes \lambda_2),$$

tal que

$$f \otimes g \mapsto fg.$$

(b) Si  $\mathfrak{h}'$  es un espacio de Hilbert separable, entonces existe un único isomorfismo

$$\mathcal{J} : L^2(M_1, \lambda_1) \otimes \mathfrak{h}' \rightarrow L^2(M_1, \lambda_1; \mathfrak{h}'),$$

tal que

$$f(x) \otimes \varphi \mapsto f(x)\varphi.$$

(c) Existe un único isomorfismo

$$\mathcal{K} : L^2(M_1 \times M_2, \lambda_1 \otimes \lambda_2) \rightarrow L^2(M_1, \lambda_1; L^2(M_2, \lambda_2)),$$

tal que  $f(x, y)$  es mapeado en la función  $x \mapsto f(x, \cdot)$ .

**Observación 4.4.** La Definición de producto tensorial de espacios de Hilbert y los resultados anteriores pueden ser extendidos para una familia finita de espacios de Hilbert,  $\{\mathfrak{h}_i\}_{i=1}^n$ . Cada espacio de Hilbert,  $\mathfrak{h}_i$ , cuenta con un producto interior

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_i} : \mathfrak{h}_i \times \mathfrak{h}_i \rightarrow \mathbb{C}.$$

De manera similar a la definición del producto tensorial de dos espacios de Hilbert construimos el conjunto

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n} := \left\{ \sum_{j=1}^m \varphi_{1_j} \otimes \dots \otimes \varphi_{n_j} \mid \varphi_{i_j} \in \mathfrak{h}_i, j \in \{1, \dots, m\}, i \in \{1, \dots, n\} \text{ y } m \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1.54)$$

Definimos el producto interior de dos elementos de  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n}$  como

$$\langle \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n, \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \rangle_{\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n} := \prod_{i=1}^n \langle \psi_i, \varphi_i \rangle_{\mathfrak{h}_i},$$

con  $\psi_i, \varphi_i \in \mathfrak{h}_i$ , para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Extendemos por linealidad este producto interior a todo  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n}$ . Definimos el espacio  $\mathfrak{h}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{h}_n$  como la completación de  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n}$  respecto al producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n}$ .

## 4.2. Producto Tensorial de Operadores

Sobre los espacios tensoriales es posible definir operadores tensoriales a partir de operadores definidos en cada una de sus componentes. Dados  $A$  y  $B$  operadores densamente definidos en los espacios de Hilbert  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$ , respectivamente, denotamos

$$D(A) \otimes D(B) := \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i \mid \varphi_i \in D(A), \psi_i \in D(B) \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ya que  $A$  y  $B$  son operadores densamente definidos,  $D(A) \otimes D(B)$  es denso en  $\mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2$ .

Definimos a  $A \otimes B$  como

$$(A \otimes B)(\varphi \otimes \psi) = A\varphi \otimes B\psi$$

y lo extendemos a todo  $D(A) \otimes D(B)$  por linealidad. No es difícil ver que el operador  $A \otimes B$  está bien definido y que, si  $A$  y  $B$  son cerrables,  $A \otimes B$  resulta ser cerrable. Lo anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 4.5** (Producto Tensorial de Operadores). *Sean  $A$  y  $B$  operadores densamente definidos en los espacios de Hilbert  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$ , respectivamente. El producto tensorial de  $A$  y  $B$  es la cerradura del operador  $A \otimes B$  definido en  $D(A) \otimes D(B)$ . Denotamos a la cerradura también por  $A \otimes B$ .*

*De manera similar a la Definición 4.5, denotamos por  $A + B$  a la cerradura de  $A \otimes I_{\mathfrak{h}_2} + I_{\mathfrak{h}_1} \otimes B$ , definido en  $D(A) \otimes D(B)$ . Más aún, identificamos a los operadores:*

$$A \equiv A \otimes I_{\mathfrak{h}_2}, \quad B \equiv I_{\mathfrak{h}_1} \otimes B.$$

**Proposición 4.6.** *Sean  $A$  y  $B$  operadores acotados definidos en los espacios de Hilbert  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$ , respectivamente. Entonces  $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$ .*

**Observación 4.7.** *Tanto la Definición de Producto Tensorial de Operadores como la Proposición 4.6 se generalizan para un producto tensorial finito de operadores.*

En particular, estamos interesados en saber bajo que condiciones un producto tensorial de operadores es auto-adjunto. Con este objetivo es conveniente observar lo siguiente:

Sea  $\{A_k\}_{k=1}^n$  una familia de operadores, con  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $A_k$  es auto-adjunto en  $\mathfrak{h}_k$ , para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Denotamos a la cerradura del operador

$$I_{\mathfrak{h}_1} \otimes \cdots \otimes A_k \otimes \cdots \otimes I_{\mathfrak{h}_n},$$

definido en  $\mathfrak{h}_1 \otimes \cdots \otimes D(A_k) \otimes \cdots \otimes \mathfrak{h}_n$ , también por  $A_k$ .

Dado  $P(x_1, \dots, x_n)$  un polinomio con coeficientes reales de grado  $n_k$  en  $x_k$ , construimos el operador  $P(A_1, \dots, A_n)$ , el cual está bien definido sobre  $\bigotimes_k D(A_k^{n_k})$ , pues  $D(A_k^{n_k}) \subset D(A_k^{i_k})$ , para todo  $i_k \leq n_k$ . El siguiente teorema muestra que  $P(A_1, \dots, A_n)$  es esencialmente auto-adjunto y caracteriza su espectro.

**Teorema 4.8.** *Supongamos que  $A_k$  es un operador auto-adjunto sobre  $\mathfrak{h}_k$ , con  $k \in \{1, \dots, n\}$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $P(x_1, \dots, x_n)$  un polinomio con coeficientes reales de grado  $n_k$  en  $x_k$  y supongamos que  $D_k^e$  es un dominio esencial para  $A_k^{n_k}$ . Entonces,*

(a)  $P(A_1, \dots, A_n)$  es esencialmente auto-adjunto sobre

$$D^e = \bigotimes_{k=1}^n D_k^e.$$

(b) El espectro de  $P(A_1, \dots, A_n)$  es

$$\sigma(P(A_1, \dots, A_n)) = \overline{P(\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_n))}.$$

**Corolario 4.9.** *Sean  $A_1, \dots, A_n$  operadores auto-adjuntos definidos sobre  $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n$ , respectivamente. Supongamos que para cada  $k$ ,  $D_k^e$  es un dominio esencial para  $A_k$ . Entonces,*

(a) Los operadores

$$A_\pi = A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$$

y

$$A_\Sigma = A_1 + \cdots + A_n$$

son esencialmente auto-adjuntos sobre  $D^e = \bigotimes_{k=1}^n D_k^e$ .

(b) Se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\sigma(A_\pi) = \overline{\prod_{k=1}^n \sigma(A_k)}$$

y

$$\sigma(A_\Sigma) = \overline{\sum_{k=1}^n \sigma(A_k)}.$$

### 4.3. Suma Directa de Espacios de Hilbert

Otra manera de construir un conjunto con estructura de espacio de Hilbert, además del producto tensorial, es mediante la suma directa de espacios de Hilbert.

**Definición 4.10** (Suma Directa de Espacios de Hilbert). *Sean  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$  espacios de Hilbert. El conjunto de parejas  $(\psi, \varphi)$  con  $\psi \in \mathfrak{h}_1$  y  $\varphi \in \mathfrak{h}_2$  es un espacio de Hilbert con el producto interior definido por*

$$\langle (\psi_1, \varphi_1), (\psi_2, \varphi_2) \rangle = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\mathfrak{h}_1} + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathfrak{h}_2},$$

para  $\psi_i, \varphi_i$  elementos arbitrarios de  $\mathfrak{h}_i$ , con  $i \in \{1, 2\}$ .

A este espacio se le conoce como suma directa de los espacios  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$ , lo denotamos por  $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ .

Es posible construir sumas directas contables del siguiente modo:

Sea  $\{\mathfrak{h}_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de espacios de Hilbert, definimos  $\mathfrak{h}$  como el conjunto

$$\mathfrak{h} := \left\{ \psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty} \mid \psi_n \in \mathfrak{h}_n, \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\|_{\mathfrak{h}_n}^2 < \infty \right\}.$$

El espacio  $\mathfrak{h}$  con el producto interior

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{\mathfrak{h}} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi_n, \varphi_n \rangle_{\mathfrak{h}_n}, \quad (1.55)$$

es un espacio de Hilbert y lo denotamos por

$$\mathfrak{h} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_n. \quad (1.56)$$

**Definición 4.11** (Suma Directa de Operadores). *Sean  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$  espacios de Hilbert. Sean los operadores  $A_i : D(A_i) \rightarrow \mathfrak{h}_i$ , con  $i \in \{1, 2\}$ . Escribiendo  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ , se define el operador*

$$A_1 \oplus A_2 : D(A_1 \oplus A_2) \subset \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$$

de la siguiente manera (notar que  $D(A_1 \oplus A_2) = D(A_1) \oplus D(A_2)$ ):

$$(A_1 \oplus A_2)(\psi_1 + \psi_2) = A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2, \quad (1.57)$$

con  $\psi_1 \in D(A_1)$  y  $\psi_2 \in D(A_2)$ .

El operador  $A_1 \oplus A_2$  resulta ser cerrado si  $A_1$  y  $A_2$  lo son. De igual manera, si  $A_1$  y  $A_2$  son autoadjuntos,  $A_1 \oplus A_2$  es autoadjunto. Para una familia de operadores  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ , donde cada  $A_n$  es densamente definido en  $\mathfrak{h}_n$ , se puede construir una suma directa

$$A := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n,$$

con dominio (ver Ecuación (1.56))

$$D(A) = \{\psi \in \mathfrak{h} \mid \psi_n \in D(A_n), \quad A\psi \in \mathfrak{h}\}.$$

El operador  $A$  actúa como

$$A\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n,$$

con  $\psi \in D(A)$ .

**Teorema 4.12.** *Sea  $\mathfrak{h}$  la suma directa de una sucesión de espacios de Hilbert  $\{\mathfrak{h}_n\}_{n=0}^{\infty}$  y  $A$  la suma directa de una familia de operadores  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ , con  $A_n$  un operador autoadjunto definido en  $\mathfrak{h}_n$ . Entonces  $A$  es un operador autoadjunto en  $\mathfrak{h}$  y*

$$R_A(z) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_{A_n}(z), \quad (1.58)$$

con  $z \in \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ , donde

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma(A_n)}.$$



## Capítulo 2

# Modelo Spin-Boson

En este capítulo se dan pruebas rigurosas y detalladas de propiedades de operadores empleados en la teoría de campos cuánticos, estos operadores son utilizados para presentar el modelo spin-boson y sus características.

En la primera y segunda sección del capítulo, a través de los resultados de la Sección 4, se construye el espacio de Fock y el operador en segunda cuantización. Se demuestra que, para operadores auto-adjuntos, la segunda cuantización es un operador auto-adjunto y se presentan dos casos de gran relevancia, a saber el operador de número y el operador hamiltoniano que serán parte del tema principal de estudio en lo subsiguiente. En la sección 7, se prueba de manera cuidadosa que los operadores de creación y aniquilación son uno el adjunto del otro y cumplen las relaciones canónicas de conmutación. Así mismo, se verifica que el operador de campo, construido a partir de los operadores de creación y aniquilación, es auto-adjunto. Los conceptos y resultados hasta aquí mostrados son utilizados en la Sección 8 para presentar el modelo spin-boson. El principal objetivo de dicha sección es demostrar que el hamiltoniano del modelo es un operador auto-adjunto y acotado inferiormente. Para este fin se utilizan los resultados presentados a lo largo del capítulo y se destaca el uso del Teorema de Kato-Rellich (presentado en la Sección 2). Al final de este capítulo, en la Sección 9, se exponen los operadores de creación y aniquilación (puntuales). Estos operadores se emplean para construir el operador de campo y el operador en segunda cuantización como se encuentran comúnmente en libros de texto de física. Los operadores mostrados en la Sección 9 se relacionan con los presentados al principio del capítulo en el sentido de formas cuadráticas.

Es importante mencionar que los operadores definidos en la Sección 9 se muestran con el fin de establecer una relación entre el formalismo matemático y físico de dichos operadores, pero no son empleados en el tercer capítulo debido a los inconvenientes que surgen en la definición de los operadores de creación y aniquilación (puntuales).

## 5. Espacios de Fock

Como el producto tensorial de una familia finita de espacios de Hilbert,  $\{\mathfrak{h}_i\}_{i=0}^n$ , tiene estructura de espacio de Hilbert, es posible construir una suma directa de tales espacios. En particular, si  $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , obtenemos el producto tensorial de  $n$  copias de  $\mathfrak{h}$ , denotado por

$$\mathfrak{h}^{(n)} := \bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{h}.$$

La suma directa de tales espacios juega un papel muy importante. Esta sección está basada principalmente en el contenido de [10] Sec.5 y [16] Sec. II.4.

**Definición 5.1** (Espacio de Fock). *Sea  $\mathfrak{h}$  un espacio de Hilbert. Definimos el espacio de Fock como la suma directa de  $\mathfrak{h}^{(n)}$ , con  $n \in \mathbb{N}_0$ , es decir,*

$$\mathcal{F}(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}^{(n)},$$

donde  $\mathfrak{h}^{(0)} := \mathbb{C}$ .

El espacio  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$  resulta ser un espacio de Hilbert con el producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}(\mathfrak{h})}$ , definido de la siguiente manera (ver la Ecuación (1.55)):

Dados  $\psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\varphi = \{\varphi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  elementos de  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ , con  $\psi^{(n)}, \varphi^{(n)} \in \mathfrak{h}^{(n)}$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$  se define su producto interior como

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{\mathcal{F}(\mathfrak{h})} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle_{\mathfrak{h}^{(n)}}. \quad (2.1)$$

El espacio de Fock  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$  es separable, si  $\mathfrak{h}$  lo es.

Como ejemplo de la Definición 5.1, tenemos que si  $\mathfrak{h} = L^2(M)$ , entonces un elemento  $\psi \in \mathcal{F}(\mathfrak{h})$  es una sucesión de funciones

$$\psi = \left( \psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots \right),$$

donde  $\psi^{(n)} \in \mathfrak{h}^{(n)} = \bigotimes_{i=1}^n L^2(M)$ ; tal que su norma es finita,

$$\|\psi\|_{\mathcal{F}(\mathfrak{h})}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \|\psi^{(i)}\|_{\mathfrak{h}^{(i)}}^2 < \infty$$

o de manera explícita:

$$|\psi_0|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{M^i} |\psi^{(i)}|^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_i < \infty.$$

En la Teoría Cuántica de Campos, es más frecuente el uso de dos subespacios de  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ , que el espacio de Fock en sí mismo. Los cuales se construyen vía proyecciones ortogonales.

Sean  $\mathcal{P}_n$  el grupo de permutaciones de  $n$  elementos y  $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$  una base para  $\mathfrak{h}$ , un espacio de Hilbert separable. Para cada  $\tau \in \mathcal{P}_n$ , definimos un operador (también denotado por  $\tau$ ) sobre los elementos de la base de  $\mathfrak{h}^{(n)}$ , dado por

$$\tau(\psi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{i_n}) = \psi_{i_{\tau(1)}} \otimes \cdots \otimes \psi_{i_{\tau(n)}}.$$

El operador  $\tau$  se extiende por linealidad a un operador acotado (de norma uno) en  $\mathfrak{h}^{(n)}$ , lo que nos garantiza que los operadores de simetrización y antisimetrización estén bien definidos sobre todo  $\mathfrak{h}^{(n)}$ .

**Definición 5.2** (Operadores de Simetrización y Antisimetrización). *Sea  $\mathfrak{h}$  un espacio de Hilbert separable, definimos al operador de simetrización*

$$S_n : \mathfrak{h}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{h}^{(n)},$$

que actúa como

$$S_n(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_n} \psi_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\tau(n)},$$

para todo  $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \in \mathfrak{h}^{(n)}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , y  $S_0$  es la identidad en  $\mathbb{C}$ .

De manera similar, si  $\text{sgn}(\tau)$  denota el signo de la permutación  $\tau \in \mathcal{P}_n$ , definimos al operador de antisimetrización

$$A_n : \mathfrak{h}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{h}^{(n)},$$

dado por

$$A_n(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_n} \text{sgn}(\tau) \psi_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\tau(n)},$$

para todo  $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \in \mathfrak{h}^{(n)}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , y  $A_0$  es la identidad en  $\mathbb{C}$ .

No es difícil mostrar que el operador de simetrización satisface ser una proyección ortogonal, es decir,  $S_n^2 = S_n$  y  $S_n^* = S_n$ . Más aún, si definimos  $S = \bigoplus_{n=0}^\infty S_n$  en el espacio de Fock,  $S$  también es una proyección ortogonal. Las mismas afirmaciones se satisfacen para el operador de antisimetrización.

Retomando el ejemplo donde  $\mathfrak{h} = L^2(M)$  y empleando el Teorema 4.3, obtenemos que  $\mathfrak{h}^{(n)} = L^2(M) \otimes \cdots \otimes L^2(M) = L^2(M^n)$ . El espacio  $S_n \mathfrak{h}^{(n)}$  resulta ser el subespacio de  $L^2(M^n)$  formado por todas las funciones que permanecen invariantes bajo cualquier permutación de sus variables.

**Definición 5.3** (Espacio de Fock bosónico). *Sea  $\mathfrak{h}$  un espacio de Hilbert separable. Al rango de  $S_n$  sobre  $\mathfrak{h}^{(n)}$  se le conoce como el producto tensorial simétrico de  $n$  copias de  $\mathfrak{h}$ . Se define al espacio de Fock simétrico o bosónico sobre  $\mathfrak{h}$  como*

$$\mathcal{F}_s(\mathfrak{h}) := \mathcal{S}\mathcal{F}(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n \mathfrak{h}^{(n)}. \quad (2.2)$$

Al espacio  $\mathcal{S}_n \mathfrak{h}^{(n)}$  lo denotamos por  $\mathfrak{h}_s^{(n)}$ , con lo que  $\mathcal{F}_s(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{h}_s^{(n)}$ .

De manera análoga podemos definir el espacio de Fock antisimétrico o Fermiónico  $\mathcal{F}_a(\mathfrak{h})$ , pero queda fuera del contexto en el que se desarrolla este trabajo. A partir de este punto, se profundiza sólo en el estudio del espacio  $\mathcal{F}_s(\mathfrak{h})$ , al cuál identificamos con  $\mathcal{F}(\mathfrak{h}) \equiv \mathcal{F}_s(\mathfrak{h})$ , por simplicidad de la notación. Así mismo, omitimos el subíndice “s” en las componentes del espacio de Fock bosónico:  $\mathfrak{h}^{(n)} \equiv \mathfrak{h}_s^{(n)}$ .

**Definición 5.4** (Conjunto de Partículas Finitas). *Definimos al conjunto de partículas finitas  $F_0(\mathfrak{h})$ , como el subconjunto del espacio de Fock bosónico formado por los vectores  $\psi \in \mathcal{F}(\mathfrak{h})$  con  $\psi^{(n)} = 0$  para todas excepto un número finito de entradas, es decir,*

$$F_0(\mathfrak{h}) := \left\{ \psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathfrak{h}) \mid \exists r \in \mathbb{N} \text{ tal que } \psi^{(k)} = 0, \forall k > r \right\}. \quad (2.3)$$

Un elemento de  $F_0(\mathfrak{h})$  tiene un papel de gran importancia es el vector

$$\Omega = \{1, 0, 0, \dots\},$$

nombrado el vacío cuántico.

Es relevante notar que  $F_0(\mathfrak{h})$  es denso en  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ . Pues, como veremos,  $F_0(\mathfrak{h})$  (o un subconjunto adecuado de él) será el dominio de los operadores definidos a las próximas secciones (ver por ejemplo los operadores en segunda cuantización o los operadores de creación y aniquilación).

Antes de continuar es conveniente enunciar el resultado conocido como la ley exponencial de los espacios de Fock. Para esto es necesario presentar el operador  $\Gamma$ .

**Definición 5.5** (Operador  $\Gamma$ ). *Sean  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}_1$  espacios de Hilbert separables y  $A$  un operador cerrado de  $\mathfrak{h}$  a  $\mathfrak{h}_1$ . Asociado al operador  $A$  es posible definir un operador  $\Gamma(A) : \mathcal{F}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{h}_1)$  de la siguiente manera:*

*Sea  $A^{\otimes n}$  el producto tensorial de  $n$  copias de  $A$ ,*

$$A^{\otimes n} := A \otimes A \otimes \dots \otimes A.$$

*El cual está definido sobre  $\bigotimes_{k=1}^n D(A)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , y*

$$A^{\otimes 0} := \mathbb{1}.$$

*Se define el operador  $\Gamma(A)$  como*

$$\Gamma(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{\otimes n} \quad (2.4)$$

*en  $D_{\Gamma(A)} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{h})$  con*

$$D_A = \left\{ \psi \in F_0(\mathfrak{h}) \mid \psi^{(n)} \in \bigotimes_{k=1}^n D(A) \text{ para cada } n \geq 1 \right\}.$$

El operador  $\Gamma(A)$  resulta ser acotado si  $\|A\| \leq 1$ . Además, si  $A$  es un operador unitario,  $\Gamma(A)$  lo es.

Ahora, dados  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{h}_2$  espacios de Hilbert separables, definimos el operador

$$U : F_0(\mathfrak{h}_1) \otimes F_0(\mathfrak{h}_2) \rightarrow F_0(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2) \quad (2.5)$$

de la siguiente manera:

Sea  $j_i$  la inclusión del espacio  $\mathfrak{h}_i$  en  $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$  (con  $i \in \{1, 2\}$ ) y tomamos a los vectores  $\psi \in F_0(\mathfrak{h}_1)$  y  $\varphi \in F_0(\mathfrak{h}_2)$ . Como  $\psi \in F_0(\mathfrak{h}_1)$ , existe  $r \in \mathbb{N}_0$  tal que  $\psi^{(n)} = 0$ , para todo  $n > r$  y  $\psi^{(r)} \neq 0$ . De igual manera, existe  $p \in \mathbb{N}_0$  tal que  $\varphi^{(n)} = 0$ , para todo  $n > p$  y  $\varphi^{(p)} \neq 0$ . El operador  $U$  actúa como

$$U(\psi \otimes \varphi) := \sqrt{\frac{(r+p)!}{n!m!}} S[\Gamma(j_1)\psi \otimes \Gamma(j_2)\varphi], \quad (2.6)$$

donde recordamos que  $S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n$ .

Si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son los estados del vacío cuántico en los espacios  $\mathcal{F}(\mathfrak{h}_1)$  y  $\mathcal{F}(\mathfrak{h}_2)$ , respectivamente, el operador  $U$  satisface que

$$U(\Omega_1 \otimes \Omega_2) = \Omega, \quad (2.7)$$

con  $\Omega$  el vacío cuántico de  $\mathcal{F}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2)$ . Más aún, el operador  $U$  se extiende a un operador unitario:

$$U : \mathcal{F}(\mathfrak{h}_1) \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{h}_2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2). \quad (2.8)$$

A esta propiedad se le conoce como ley exponencial de los espacios de Fock. Más adelante ocuparemos esta propiedad en el caso  $\mathfrak{h}_1 = L^2(M_1)$  y  $\mathfrak{h}_2 = L^2(M_2)$ , con  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ . En esta circunstancia, el espacio  $L^2(M_1 \cup M_2)$  es isomorfo a  $L^2(M_1) \oplus L^2(M_2)$ , mediante el mapeo  $f \mapsto (f\chi_{M_1}, f\chi_{M_2})$ . Entonces, según la Ecuación (2.8) se tiene el siguiente resultado:

$$\mathcal{F}(L^2(M_1 \cup M_2)) \cong \mathcal{F}(L^2(M_1)) \otimes \mathcal{F}(L^2(M_2)). \quad (2.9)$$

## 6. Segunda Cuantización

En esta sección presentamos los operadores en segunda cuantización, entre los cuales se encuentra el hamiltoniano bosónico que describe al campo de radiación en el contexto de los espacios de Fock. Los resultados de esta sección se derivan principalmente del contenido en [10] Sec.5 y [16] Sec. X.7.

**Definición 6.1** (Segunda cuantización). *Sean  $\mathfrak{h}$  un espacio de Hilbert separable y  $A$  un operador densamente definido en  $\mathfrak{h}$ . Supongamos que  $A$  es auto-adjunto en su*

dominio,  $D(A)$ , y esencialmente auto-adjunto en  $D \subset D(A)$ . Asociado al operador  $A$  es posible definir un operador actuando sobre el espacio de Fock asociado a  $\mathfrak{h}$  del siguiente modo:

Sea

$$A^{(n)} := A \otimes I \otimes \cdots \otimes I + I \otimes A \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes I \otimes \cdots \otimes A,$$

definido sobre  $\bigotimes_{k=1}^n D$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , y

$$A^{(0)} := 0.$$

Sea  $D_A \subset \mathcal{F}(\mathfrak{h})$  el conjunto dado por

$$D_A = \left\{ \psi \in F_0(\mathfrak{h}) \mid \psi^{(n)} \in \bigotimes_{k=1}^n D \text{ para cada } n \geq 1 \right\}.$$

Se define la segunda cuantización de  $A$  como

$$d\Gamma(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^{(n)}, \quad (2.10)$$

o de manera equivalente

$$(d\Gamma(A)\psi)^{(n)} = A^{(n)}\psi^{(n)}, \quad (2.11)$$

para  $\psi \in D_A$  y  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Como  $D$  es denso en  $\mathfrak{h}$ , el conjunto  $D_A$  es denso en  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ , con lo que la segunda cuantización es un operador densamente definido. Además,  $d\Gamma(A)$  hereda características de gran relevancia del operador  $A$ . Entre ellas la propiedad de ser auto-adjunto, como se muestra a continuación.

**Teorema 6.2.** *Empleando la notación y los requerimientos de la Definición 6.1, la segunda cuantización,  $d\Gamma(A)$ , del operador  $A$  es esencialmente auto-adjunto sobre  $D_A$ .*

*Demostración.* Primero notamos, por el Teorema 4.8 y el Corolario 4.9, que el operador  $A^{(n)}$  es esencialmente auto-adjunto sobre  $\bigotimes_{k=1}^n D$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Este hecho y el criterio básico de operadores esencialmente auto-adjuntos (ver Corolario 2.8) implican que  $\text{Ran}(A^{(n)} \pm i)$  es denso en  $\mathfrak{h}^{(n)}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Sea  $\psi \in F_0(\mathfrak{h})$ , veamos que existe una sucesión  $\{\psi_m\}_{m=0}^{\infty}$ , contenida en el rango de  $d\Gamma(A) \pm i$ , que converge a  $\psi$ .

Como  $\psi \in F_0(\mathfrak{h})$ , existe  $r \in \mathbb{N}_0$  tal que  $\psi^{(n)} = 0$ , para todo  $n > r$ . Para  $n \in \{0, 1, \dots, r\}$  existe  $\{\psi_m^{(n)}\}_{m=0}^{\infty}$  en el rango de  $A^{(n)} \pm i$  que converge a  $\psi^{(n)}$ . En otras palabras, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M_n$  tal que

$$\left\| \psi^{(n)} - \psi_m^{(n)} \right\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{r+1}}, \quad (2.12)$$

con  $m \geq M_n$ .

Notamos que  $\psi_m = \{\psi_m^{(0)}, \dots, \psi_m^{(r)}, 0, \dots\}$  está en  $\text{Ran}(d\Gamma(A) \pm i)$ , para todo  $m \in \mathbb{N}_0$ . Tomando  $M := \max\{M_0, \dots, M_r\}$ , para  $m \geq M$  se cumple

$$\|\psi - \psi_m\|^2 = \sum_{n=0}^r \|\psi^{(n)} - \psi_m^{(n)}\|^2 < \varepsilon^2. \quad (2.13)$$

Por tanto,  $\text{Ran}(d\Gamma(A) \pm i)$  es denso en  $F_0(\mathfrak{h})$  y como  $F_0(\mathfrak{h})$  es denso en  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ , obtenemos que el operador  $d\Gamma(A) \pm i$ , definido en  $D_A$ , tiene rango denso en  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ .

Además, dados  $\varphi, \psi \in D_A$ , ocupando que  $A^{(n)}$  es esencialmente auto-adjunto, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \varphi, d\Gamma(A)\psi \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi^{(n)}, (d\Gamma(A)\psi)^{(n)} \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi^{(n)}, A^{(n)}\psi^{(n)} \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle A^{(n)}\varphi^{(n)}, \psi^{(n)} \rangle \\ &= \langle d\Gamma(A)\varphi, \psi \rangle, \end{aligned}$$

es decir,  $d\Gamma(A)$  es un operador simétrico en  $D_A$ .

Utilizando de nueva cuenta el Corolario 2.8, concluimos que  $d\Gamma(A)$  es esencialmente auto-adjunto en  $D_A$ .  $\square$

Se denota a la cerradura de la segunda cuantización de  $A$  también por  $d\Gamma(A)$ .

Es importante destacar que la segunda cuantización y el operador unitario  $U$  definido en la Ecuación (2.8) cumplen la siguiente propiedad: dado  $A$  un operador en  $\mathfrak{h}_1$  y  $B$  un operador en  $\mathfrak{h}_2$ , satisfaciendo los requerimientos de la Definición 6.1, entonces

$$U(d\Gamma(A) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes d\Gamma(A)) = d\Gamma(A \oplus B)U. \quad (2.14)$$

Un operador que resulta de gran interés es el operador de número. Definido como la segunda cuantización del operador identidad.

**Definición 6.3** (Operador de Número). *El operador de número se define como la segunda cuantización del operador identidad en  $\mathfrak{h}$ , es decir,  $N := d\Gamma(\mathbb{1}_{\mathfrak{h}})$ .*

Por el Teorema 6.2, el operador de número es auto-adjunto. Identificamos a  $N$  con su cerradura.

En este punto es apropiado describir el espectro de  $N$ . Con este objetivo, seleccionamos  $\psi = \{0, \dots, 0, \psi^{(n)}, 0, \dots\} \in F_0(\mathfrak{h})$ . Para la única entrada distinta de cero,  $\psi^{(n)} \in \mathfrak{h}^{(n)}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} N^{(n)}\psi^{(n)} &= (d\Gamma(\mathbb{1}_{\mathfrak{h}})\psi)^{(n)} \\ &= n\psi^{(n)}. \end{aligned}$$

Llegamos a que  $N\psi = n\psi$ . Como se cumple la igualdad

$$\sigma(N^{(n)}) = \{n\},$$

entonces, por el Teorema 4.12, obtenemos

$$\sigma(N) = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.15)$$

Otro operador relevante en el marco de la Teoría de Campos Cuánticos es el Hamiltoniano bosónico definido como la segunda cuantización de un operador de multiplicación en el espacio de las funciones cuadrado-integrables. En este caso la multiplicación es por una función medible, pero no necesariamente acotada, por lo que es conveniente definir que es un operador de multiplicación en tales circunstancias.

**Definición 6.4** (Operador de Multiplicación). *Sea  $\omega : M \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible. Definimos el operador de multiplicación,  $M_\omega$ , que actúa sobre un subconjunto de  $\mathfrak{h} = L^2(M)$  mediante la multiplicación por  $\omega$ :*

$$M_\omega : D(M_\omega) \subset L^2(M) \rightarrow L^2(M), \quad (2.16)$$

dado por

$$M_\omega \psi = \omega \psi, \quad (2.17)$$

para toda  $\psi \in D(M_\omega)$ . El dominio de  $M_\omega$  está dado por

$$D(M_\omega) = \{\psi \in L^2(M) \mid \omega \psi \in L^2(M)\}. \quad (2.18)$$

**Proposición 6.5.** *Sea  $\omega : M \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible. Entonces, el operador de multiplicación,  $M_\omega$ , es densamente definido. Además, el espectro de  $M_\omega$  es el rango esencial de  $\omega$  y si  $\omega$  toma valores en  $\mathbb{R}$ ,  $M_\omega$  es auto-adjunto.*

*Demostración.* Consideremos la familia de conjuntos  $G_n = \{k \in M \mid |\omega(k)| \leq n\}$ , donde la evaluación  $\omega(k)$  se entiende que está definida para casi todo punto  $k \in M$ . Sea  $\varphi \in L^2(M)$  un elemento arbitrario. Definimos la sucesión  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ , dada por  $\varphi_n = \chi_{G_n} \varphi$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Notamos que  $\varphi_n \in L^2(M)$ , y como  $\|\omega \varphi_n\| \leq n \|\varphi\|$ , tenemos que  $\varphi_n \in D(M_\omega)$ .

Por el Teorema de la Convergencia Monótona,  $\varphi_n$  converge a  $\varphi$ , cuando  $n$  tiende a infinito (respecto a la norma en  $L^2(M)$ ). Entonces,  $D(M_\omega)$  es denso en  $L^2(M)$ .

Supongamos, ahora, que  $\omega$  sólo toma valores reales, dados  $\varphi, \psi \in D(M_\omega)$ , observamos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \omega \psi \rangle &= \int_M \overline{\varphi} \omega \psi d\lambda \\ &= \int_M \overline{\omega \varphi} \psi d\lambda \\ &= \langle \omega \varphi, \psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Lo que implica la igualdad  $\langle \varphi, M_\omega \psi \rangle = \langle M_\omega \varphi, \psi \rangle$ , es decir,  $M_\omega$  es un operador simétrico.

Por otro lado, sea  $\eta \in D(M_\omega^*)$ , usando la Ecuación (1.4) y de nuevo el Teorema de la Convergencia Monótona, tenemos que

$$\begin{aligned} \|M_\omega^* \eta\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{G_n} M_\omega^* \eta\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle \varphi, \chi_{G_n} M_\omega^* \eta \rangle| \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

y ocupando que  $M_\omega$  es un operador simétrico, se sigue que

$$\begin{aligned} \|M_\omega^* \eta\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle M_\omega \chi_{G_n} \varphi, \eta \rangle| \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle \varphi, \chi_{G_n} \omega \eta \rangle| \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{G_n} \omega \eta\|. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por tanto,  $\|M_\omega^* \eta\| = \|\omega \eta\|$ . Esto nos dice que  $\omega \eta \in L^2(M)$ , entonces  $\eta \in D(M_\omega)$ . Al ser  $M_\omega$  simétrico con  $D(M_\omega) = D(M_\omega^*)$ , concluimos que es un operador auto-adjunto.

Resta ver que  $\sigma(M_\omega) = \text{Ran}_{\text{ess}}(\omega)$ .

Observamos que, según el Cálculo Funcional,  $(M_\omega - z)^{-1}$  corresponde al operador de multiplicación,

$$(M_\omega - z)^{-1} \psi = \frac{1}{\omega - z} \psi, \quad (2.22)$$

con dominio

$$D((M_\omega - z)^{-1}) = \left\{ \psi \in L^2(M) \mid \frac{1}{\omega - z} \psi \in L^2(M) \right\}. \quad (2.23)$$

Como  $z \in \rho(M_\omega)$  si y sólo si  $M_\omega - z$  es una biyección de  $D(M_\omega)$  a  $\mathfrak{h}$  con inversa acotada. Tenemos que  $z \in \rho(M_\omega)$ , si se cumple la condición

$$\|(M_\omega - z)^{-1}\| = \left\| \frac{1}{\omega - z} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

para algún  $\varepsilon > 0$ . Esta condición es equivalente a  $\lambda(\{k \in M \mid |\omega(k) - z| < \varepsilon\}) = 0$  y por tanto,

$$\rho(M_\omega) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } \lambda(\{k \in M \mid |\omega(k) - z| < \varepsilon\}) = 0\}.$$

Finalmente, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sigma(M_\omega) &= \{z \in \mathbb{C} \mid \text{para todo } \varepsilon > 0 : \lambda(\{k \in M \mid |\omega(k) - z| < \varepsilon\}) > 0\} \\ &= \text{Ran}_{es}(\omega).\end{aligned}$$

□

Como el operador de multiplicación por una función medible real resulta ser auto-adjunto, es posible definir su segunda cuantización. En particular, nos interesa el caso donde la función  $\omega$  es la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 6.6** (Hamiltoniano bosónico), *Sea  $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^3)$  y la función  $\omega(k) = |k|$  definida en  $\mathbb{R}^3$ . Por simplicidad, identificamos al operador de multiplicación,  $M_\omega$ , con  $\omega$ . Definimos al hamiltoniano bosónico como la segunda cuantización de  $\omega$ :*

$$H_{ph}(\omega) := d\Gamma(\omega), \quad (2.24)$$

o de manera explícita

$$(H_{ph}(\omega)\psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) := \left( \sum_{i=1}^n |k_i| \right) \psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n), \quad (2.25)$$

donde el vector  $\psi$  es elemento de  $D(H_{ph}(\omega))$  que está dado por

$$D(H_{ph}(\omega)) = \left\{ \psi \in \mathcal{F}(\mathfrak{h}) \mid \sum_{i=1}^{\infty} \int_{M_i} \left( \sum_{m=1}^i |k_m| \right)^2 |\psi^{(i)}(k_1, \dots, k_i)|^2 dk_1 \cdots dk_i < \infty \right\}. \quad (2.26)$$

En la Ecuación (2.25) la evaluación de las componentes de  $\psi$  se entiende que está definida para casi todo punto, pues  $\psi^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}^{3n})$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .

Destacamos que el vacío cuántico es un vector propio del hamiltoniano bosónico, con eigenvalor cero (ver Definición 6.1),

$$H_{ph}(\omega)\Omega = 0. \quad (2.27)$$

Como resultado del Teorema 6.2, el hamiltoniano bosónico resulta ser un operador auto-adjunto sobre  $D(H_{ph}(\omega))$ . Más aún, es un operador positivo y su espectro está contenido en el intervalo  $[0, \infty)$ , como se muestra a continuación.

**Proposición 6.7.** *El espectro de  $H_{ph}(\omega)$  está contenido en el intervalo  $[0, \infty)$ .*

*Demostración.* Sea  $\psi \in D(H_{ph}(\omega))$ , se tiene que

$$\begin{aligned}(\psi, H_{ph}(\omega)\psi) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{M_i} \left( \sum_{m=1}^i |k_m| \right) |\psi^{(i)}(k_1, \dots, k_i)|^2 dk_1 \cdots dk_i \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 2.21, se tiene que  $\sigma(H_{ph}(\omega)) \subset [0, \infty)$ . □

## 7. Operadores de Creación y Aniquilación

Al final de la sección pasada, en la Definición 6.6 fue necesario condicionar la evaluación de un elemento de  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ , pues sus componentes están en  $L^2(\mathbb{R}^{3i})$ , con  $i \in \mathbb{N}$ . Como mencionamos después de la definición de los espacios  $L^p$ , un camino para superar este obstáculo es recurrir a la clase Schwartz. El contenido de esta sección se basa principalmente en [17] Sec. X.12.

**Definición 7.1.** Definimos  $D_{\mathcal{F}}$  como el conjunto de los vectores  $\psi \in F_0(L^2(\mathbb{R}^3))$  tal que cada una de sus entradas está en la clase de Schwartz (del espacio correspondiente), es decir,

$$D_{\mathcal{F}} = \left\{ \psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_0(\mathfrak{h}) \mid \psi^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3n}), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como  $D_{\mathcal{F}}$  es denso en  $F_0(L^2(\mathbb{R}^3))$ , por transitividad,  $D_{\mathcal{F}}$  es denso en  $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

**Definición 7.2** (Operadores de Creación y Aniquilación). Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ . Definimos los siguientes operadores:

(a) El operador de aniquilación

$$a(f) : D_{\mathcal{F}} \rightarrow D_{\mathcal{F}},$$

está dado para todo  $n \in \mathbb{N}$  por

$$(a(f)\psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) := \sqrt{n+1} \int_M \bar{f}(k) \psi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) dk, \quad (2.28)$$

y

$$a(f)\Omega := 0. \quad (2.29)$$

(b) El operador de creación

$$a^\dagger(f) : D_{\mathcal{F}} \rightarrow D_{\mathcal{F}},$$

está dado para todo  $n \in \mathbb{N}$  por

$$(a^\dagger(f)\psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(k_i) \psi^{(n-1)}(k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n), \quad (2.30)$$

donde  $\hat{k}_i$  representa que la variable  $k_i$  es omitida, y

$$a^\dagger(f)\Omega := \{0, f, 0, \dots\}. \quad (2.31)$$

**Lema 7.3.** Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , entonces los operadores de creación y aniquilación contruidos a partir de  $f$  satisfacen la igualdad

$$\langle \psi, a(f)\varphi \rangle = \langle a^\dagger(f)\psi, \varphi \rangle, \quad (2.32)$$

con  $\varphi, \psi \in D_{\mathcal{F}}$ .

*Demostración.* Sean  $\varphi, \psi \in D_{\mathcal{S}}$  dados por

$$\varphi = \{0, \dots, 0, \varphi^{(n)}, 0, \dots\}$$

y

$$\psi = \{0, \dots, 0, \psi^{(n-1)}, 0, \dots\}.$$

Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \psi, a(f)\varphi \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi^{(n)}, (a(f)\varphi)^{(n)} \rangle \\ &= \langle \psi^{(n-1)}, (a(f)\varphi)^{(n-1)} \rangle \\ &= \int_{M^{n-1}} \bar{\psi}^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{n-1}) \\ &\quad \times \left[ \sqrt{n} \int_M \bar{f}(k) \varphi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_{n-1}) dk \right] dk_1 \cdots dk_{n-1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

y ocupando el Teorema de Fubini es posible llegar a

$$\langle \psi, a(f)\varphi \rangle = \sqrt{n} \int_{M^n} \bar{f}(k) \bar{\psi}^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{n-1}) \varphi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_{n-1}) dk dk_1 \cdots dk_{n-1}. \quad (2.34)$$

Por otro lado, observamos que

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(f)\psi, \varphi \rangle &= \langle (a^\dagger(f)\psi)^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{M^n} \bar{f}(k_i) \bar{\psi}^{(n-1)}(k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n) \\ &\quad \times \varphi^{(n)}(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n) dk_1 \cdots dk_i \cdots dk_n. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En cada sumando de la Ecuación (2.35) hacemos el cambio de variable  $k_i \mapsto k$  para obtener la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(f)\psi, \varphi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{M^n} \bar{f}(k) \bar{\psi}^{(n-1)}(k_1, \dots, \hat{k}, \dots, k_n) \\ &\quad \times \varphi^{(n)}(k_1, \dots, k, \dots, k_n) dk_1 \cdots dk \cdots dk_n. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Como  $\varphi^{(n)}$  está en  $\mathfrak{h}^{(n)}$  (recordar que identificamos  $\mathfrak{h}^{(n)} \equiv \mathfrak{h}_s^{(n)}$ ), permanece igual ante intercambio de coordenadas, entonces podemos escribir  $\varphi^{(n)}(k_1, \dots, k, \dots, k_n) =$

$\varphi^{(n)}(k, k_1, \dots, \hat{k}, \dots, k_n)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , usando esto y el Teorema de Fubini, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(f)\psi, \varphi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{M^n} \bar{f}(k) \bar{\psi}^{(n-1)}(k_1, \dots, \hat{k}, \dots, k_n) \\ &\quad \times \varphi^{(n)}(k, k_1, \dots, \hat{k}, \dots, k_n) dk dk_1 \cdots dk_n. \end{aligned} \quad (2.37)$$

En cada sumando de la Ecuación (2.37) renombramos las variables como  $k_j \mapsto k_{j-1}$  a partir de la omisión  $\hat{k}$ , es decir, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  hacemos el cambio de variable  $k_j \mapsto k_{j-1}$ , con  $i < j \leq n$ , resultando en que cada integral cumple

$$\begin{aligned} &\int_{M^n} \bar{f}(k) \bar{\psi}^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n) \\ &\quad \times \varphi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n) dk dk_1 \cdots dk_{i-1} dk_{i+1} \cdots dk_n \\ &= \int_{M^n} \bar{f}(k) \bar{\psi}^{(n-1)}(k_1, \dots, k_i, \dots, k_{n-1}) \varphi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_i, \dots, k_{n-1}) dk dk_1 \cdots dk_i \cdots dk_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Insertando esto en la Ecuación (2.37) observamos que todos los sumandos son iguales, entonces

$$\langle a^\dagger(f)\psi, \varphi \rangle = \sqrt{n} \int_{M^n} \bar{f}(k) \bar{\psi}^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{n-1}) \varphi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_{n-1}) dk dk_1 \cdots dk_{n-1}. \quad (2.39)$$

De las Ecuaciones (2.34) y (2.39), se obtiene que  $\langle \psi, a(f)\varphi \rangle = \langle a^\dagger(f)\psi, \varphi \rangle$ . Extendiendo el mismo argumento, por linealidad, se obtiene el resultado para elementos arbitrarios de  $D_{\mathcal{S}}$ .  $\square$

El Lema 7.3 nos permite obtener que los operadores de creación y aniquilación son cerrables. Más aún, sus cerraduras son adjuntos.

**Proposición 7.4.** *Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , entonces los operadores  $a(f)$  y  $a^\dagger(f)$  son cerrables. Además, la cerradura de los operadores de creación y aniquilación son uno el adjunto del otro,*

$$\left(\overline{a(f)}\right)^* = \overline{a^\dagger(f)}. \quad (2.40)$$

*Demostración.* Identificamos  $a^*(f) \equiv (a(f))^*$ . Por el Lema 7.3,  $a^*(f)$  es una extensión de  $a^\dagger(f)$ . De modo similar  $(a^\dagger(f))^*$  extiende a  $a(f)$ . Como sabemos, esto es equivalente a las desigualdades (identificando las gráficas de los operadores con los operadores mismos) dadas por

$$a^\dagger(f) \subset a^*(f) \quad (2.41)$$

y

$$a(f) \subset (a^\dagger(f))^* . \quad (2.42)$$

Como  $a^\dagger(f)$  es un operador densamente definido, por la Ecuación (2.41), tenemos que  $D(a^*(f))$  es denso en  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$ . Entonces, la Proposición 2.5 nos asegura que  $a(f)$  es cerrable; más aún, nos da una expresión explícita para su cerradura, resultando en  $\overline{a(f)} = (a(f))^{**}$ .

Utilizando el mismo argumento, la Ecuación (2.42) nos conduce a que  $a^\dagger(f)$  es cerrable, con  $\overline{a^\dagger(f)} = (a^\dagger(f))^{**}$ .

Resta ver que la cerradura de  $a(f)$  y de  $a^\dagger(f)$  son adjuntos. El hecho de que  $a(f)$  es cerrable junto con la Proposición 2.5 implican que  $(\overline{a(f)})^* = a^*(f)$ , es decir,  $a^*(f)$  es cerrado. Entonces, es suficiente probar la igualdad

$$a^*(f) = \overline{a^\dagger(f)} . \quad (2.43)$$

Sea  $\varphi \in D(a^*(f))$ , por definición existe  $\eta \in \mathcal{F}(\mathfrak{h})$  tal que

$$\langle \varphi, a(f)\psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle , \quad (2.44)$$

para todo  $\psi \in D(a(f))$ . Como  $(a^\dagger(f))^*$  es una extensión de  $a(f)$ , se cumple que

$$\langle \varphi, (a^\dagger(f))^* \psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle , \quad (2.45)$$

para todo  $\psi \in D(a(f))$ . Esto implica que  $\varphi \in D\left(\overline{(a^\dagger(f))^{**}}\right) = D\left(\overline{a^\dagger(f)}\right)$ . Así mismo, de las Ecuaciones (2.44) y (2.45) se sigue que  $\overline{a^\dagger(f)}\varphi = \eta = a^*(f)\varphi$ , en otras palabras  $\overline{a^\dagger(f)}$  extiende a  $a^*(f)$ . Por tanto, obtenemos que

$$a^*(f) \subset \overline{a^\dagger(f)} . \quad (2.46)$$

En cuanto a la otra contención, basta recordar que la cerradura de  $a^\dagger(f)$  es su extensión más chica,  $\overline{a^\dagger(f)}$ . Como  $a^*(f)$  es cerrado, por la Ecuación (2.41), tenemos

$$a^\dagger(f) \subset \overline{a^\dagger(f)} \subset a^*(f) . \quad (2.47)$$

De las Ecuaciones (2.46) y (2.47) se concluye la igualdad (2.43), y por tanto, el resultado.  $\square$

Denotamos a la cerradura de los operadores de creación y aniquilación también por  $a(f)$  y  $a^\dagger(f)$ , respectivamente. Con esta notación, la Proposición 7.4 implica que

$$a^*(f) = a^\dagger(f) .$$

Con lo que utilizamos de manera indistinta  $a^*(f)$  y  $a^\dagger(f)$  para denotar al operador de creación.

**Proposición 7.5** (Relaciones de Conmutación). *Dados  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  y los operadores de creación y aniquilación construidos a partir de  $f$  y  $g$ , se satisfacen las siguientes igualdades:*

(a)

$$[a(f), a(g)]\psi = [a^*(f), a^*(g)]\psi = 0$$

(b)

$$[a(f), a^*(g)]\psi = \langle f, g \rangle \psi$$

para todo  $\psi \in D_{\mathcal{S}}$ , y donde  $[A, B] := AB - BA$  denota el conmutador de los operadores  $A$  y  $B$ .

*Demostración.* La prueba del inciso (a) se sigue directamente de las expresiones (2.28) y (2.30), así como del Teorema de Fubini.

En cuanto a la prueba del inciso (b), se sigue del siguiente cálculo para  $\psi \in D_{\mathcal{S}}$ :

$$\begin{aligned} \left( [a(f), a^*(g)]\psi \right)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) &= \left( (a(f)a^*(g) - a^*(g)a(f))\psi \right)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) \\ &= \sqrt{n+1} \int_M \bar{f}(k) (a^*(g)\psi)^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) dk \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n g(k_i) (a(f)\psi)^{(n-1)}(k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Ocupando la definición del operador de creación se tiene que

$$\begin{aligned} (a^*(g)\psi)^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) \\ = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left( g(k)\psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n) + \sum_{i=1}^n g(k_i)\psi^{(n)}(k, k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n) \right), \end{aligned}$$

insertando esto en la Ecuación (2.48) llegamos a la igualdad

$$\begin{aligned} \left( [a(f), a^*(g)]\psi \right)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) \\ = \int_M \bar{f}(k) \left( g(k)\psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n) + \sum_{i=1}^n g(k_i)\psi^{(n)}(k, k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n) \right) dk \\ - \sum_{i=1}^n g(k_i) \int_M \bar{f}(k)\psi^{(n)}(k, k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n) dk. \end{aligned}$$

Finalmente, empleando la linealidad de la integral concluimos que

$$\begin{aligned} \left( [a(f), a^*(g)]\psi \right)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) &= \int_M \bar{f}(k)g(k)\psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n) dk \\ &= \langle f, g \rangle \psi^{(n)}. \end{aligned}$$

□

A partir de los operadores de creación y aniquilación es posible construir otros operadores de interés, entre ellos el operador de campo, definido como su suma.

**Definición 7.6** (Operador de Campo). *Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ . Definimos al operador de campo  $\Phi(f)$  en  $D_{\mathcal{F}}$  como*

$$\Phi(f) := a(f) + a^*(f).$$

Ya que los operadores de creación y aniquilación son uno el adjunto del otro, el operador de campo resulta ser simétrico. Más aún, el Teorema de Vectores Analíticos de Nelson, nos permite concluir que es auto-adjunto.

**Proposición 7.7.** *Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , el operador de campo  $\Phi(f)$  es esencialmente auto-adjunto en  $D_{\mathcal{F}}$ . Además, su dominio coincide con el de los operadores de creación y aniquilación,*

$$D(\Phi(f)) = D(a(f)) = D(a^*(f)). \quad (2.49)$$

*Demostración.* Como  $a(f)$  y  $a^*(f)$  son adjuntos, se sigue que  $\Phi(f)$  es un operador simétrico.

Sea  $\psi \in D_{\mathcal{F}}$ , dado por

$$\psi = \{0, \dots, 0, \psi^{(n)}, 0, \dots\}.$$

Debido a que  $\Phi(f) : D_{\mathcal{F}} \rightarrow D_{\mathcal{F}}$ , se tiene que  $\psi \in C^\infty(\Phi(f))$ .

Como  $\psi$  sólo tiene una entrada distinta de cero, tenemos que

$$\begin{aligned} \|a(f)\psi\|^2 &= \|(a(f)\psi)^{(n-1)}\|^2 \\ &= \int_{M^{n-1}} \left| \sqrt{n} \int_M \bar{f}(k) \psi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_{n-1}) dk \right|^2 dk_1 \cdots dk_{n-1} \end{aligned} \quad (2.50)$$

y la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite llegar a

$$\begin{aligned} \|a(f)\psi\|^2 &\leq n \|f\|^2 \int_{M^n} \left| \psi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_n) \right|^2 dk dk_1 \cdots dk_{n-1} \\ &= n \|f\|^2 \|\psi\|^2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Por otro lado, usando la Proposición 7.4, encontramos que

$$\begin{aligned} \|a^*(f)\psi\|^2 &= \langle a^*(f)\psi, a^*(f)\psi \rangle \\ &= \langle \psi, a(f)a^*(f)\psi \rangle. \end{aligned}$$

Empleando las relaciones de conmutación y la Ecuación (2.51), se sigue que

$$\begin{aligned}
\|a^*(f)\psi\|^2 &= \|f\|^2 \langle \psi, \psi \rangle + \langle a(f)\psi, a(f)\psi \rangle \\
&= \|f\|^2 \|\psi\|^2 + \|a(f)\psi\|^2 \\
&\leq (n+1)\|f\|^2 \|\psi\|^2.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Las Ecuaciones (2.51) y (2.52) implican de manera respectiva que

$$\|a(f)\psi\| \leq \sqrt{n+1}\|f\|\|\psi\| \tag{2.53}$$

y

$$\|a^*(f)\psi\| \leq \sqrt{n+1}\|f\|\|\psi\|. \tag{2.54}$$

Usando estas desigualdades es posible obtener que

$$\begin{aligned}
\| \underbrace{a^\#(f) \cdots a^\#(f)}_{k \text{ veces}} \psi \| &\leq \sqrt{n+1} \cdots \sqrt{n+k} \|f\|^k \|\psi\| \\
&\leq \sqrt{(n+k)!} \|f\|^k \|\psi\|,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

donde  $a^\#(f)$  representa cualquiera de los dos operadores  $a(f)$  o  $a^*(f)$ . Empleando la Ecuación (2.55) (junto con una propiedad del coeficiente binomial, a saber  $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 2^k$ ) se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\|(\Phi(f))^k \psi\| &= \|(a(f) + a^*(f))^k \psi\| \\
&\leq 2^k \sqrt{(n+k)!} \|f\|^k \|\psi\|,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Con la Ecuación (2.56) se obtiene que existe  $t > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \left\| (\Phi(f))^i \psi \right\| \frac{t^i}{i!} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \sqrt{(n+i)!} \|f\|^i \|\psi\| \frac{t^i}{i!} \\
&< \infty,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

donde la última desigualdad se puede comprobar, por ejemplo, con el criterio de la razón.

La Ecuación (2.57) implica que  $\psi$  es un vector analítico para  $\Phi(f)$ . Usando la densidad de  $D_{\mathcal{F}}$  en el espacio  $\mathcal{F}(\mathfrak{h})$  observamos que el dominio de  $\Phi(f)$  contiene un conjunto generador de vectores analíticos (ver Definición 4.12). Como  $\Phi(f)$  es simétrico, en virtud del Teorema 2.18, tenemos que  $\Phi(f)$  es un operador esencialmente auto-adjunto en  $D_{\mathcal{F}}$ .

Además, por las ecuaciones (2.53) y (2.54), obtenemos que  $D(\Phi(f)) = D(a(f)) = D(a^*(f))$ .  $\square$

Finalmente, identificamos a  $\Phi(f)$  con su cerradura.

En la siguiente proposición se demuestran dos igualdades que involucran el producto del operador de número  $N$  con  $a(f)$  y  $a^\dagger(f)$ .

**Proposición 7.8** (Pull-through Formulae). *Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ . Entonces, en  $D_{\mathcal{S}}$  se satisfacen las siguientes igualdades:*

$$a(f)N = (N + \mathbb{1})a(f) \quad (2.58)$$

y

$$a^\dagger(f)(N + \mathbb{1}) = Na^\dagger(f). \quad (2.59)$$

*Demostración.* Sea  $\psi \in D_{\mathcal{S}}$ , dado por

$$\psi = \{0, \dots, 0, \psi^{(n)}, 0, \dots\}.$$

Ocupando el Cálculo Funcional y la Definición 7.2, tenemos que

$$\begin{aligned} (a(f)N\psi)^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{n-1}) &= \sqrt{n} \int_M \bar{f}(k) (N\psi)^{(n)}(k, k_1, \dots, k_{n-1}) dk \\ &= \sqrt{n} \int_M \bar{f}(k) n\psi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_{n-1}) dk \\ &= (n-1+1)\sqrt{n} \int_M \bar{f}(k) \psi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_{n-1}) dk. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Notamos que parte del lado derecho de la Ecuación (2.60) es justamente la coordenada no trivial de  $a(f)\psi$ ,

$$\begin{aligned} (a(f)N\psi)^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{n-1}) &= (n-1+1)(a(f)\psi)^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{n-1}) \\ &= ((N + \mathbb{1})a(f)\psi)^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Extendiendo por linealidad, obtenemos que la Ecuación (2.58) se cumple en  $D_{\mathcal{S}}$ .

En cuanto a la prueba de la igualdad (2.59), podemos proceder directamente o utilizar que  $a^\dagger(f)$  es el adjunto de  $a(f)$  y el operador de número es auto-adjunto. Usamos el segundo razonamiento. Para elementos arbitrarios  $\psi, \varphi \in D_{\mathcal{S}}$ , por la Ecuación (2.58), tenemos

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(f)(N + \mathbb{1})\varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, (N + \mathbb{1})a(f)\psi \rangle \\ &= \langle \varphi, a(f)N\psi \rangle \\ &= \langle Na^\dagger(f)\varphi, \psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.62)$$

Como  $\psi, \varphi$  son elementos arbitrarios, se sigue la Ecuación (2.59).  $\square$

## 8. Modelo spin-boson

El modelo spin-boson es utilizado para estudiar a un sistema formado por un átomo, con dos niveles energéticos, acoplado al campo de radiación. Hay diversas propiedades de este modelo que son de gran interés estudiar como es la existencia del estado base, la existencia de resonancias y la dinámica. Para estudiar dichas características, en nuestro caso la existencia del estado base, es necesario estudiar el operador Hamiltoniano,  $H$ . Este operador es construido a partir del hamiltoniano atómico (ver Definición 8.2), el hamiltoniano bosónico y el operador de campo, presentados en la secciones 5, 6 y 7 respectivamente. En el Teorema 8.9 se demuestra que el Hamiltoniano del modelo spin-boson es un operador auto-adjunto y acotado inferiormente,  $H = H^* \geq c > -\infty$ .

Los resultados presentados en esta sección se basan principalmente en el contenido de [2] Sec. 1 y 2.

**Definición 8.1** (Matrices de Pauli). *Usamos la representación usual de las matrices de Pauli,*

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

actuando sobre  $\mathbb{C}^2$ .

**Definición 8.2** (Hamiltoniano Atómico). *Definimos el Hamiltoniano del átomo como el operador representado por la siguiente matriz*

$$H_{at} := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

El operador  $H_{at}$  actúa sobre el espacio de Hilbert del átomo,  $\mathfrak{h}_{at} := \mathbb{C}^2$ .

El hamiltoniano actuando sobre el campo de radiación está dado por la Definición 6.6: el hamiltoniano bósónico (total) es

$$H_{ph}(\omega) = d\Gamma(\omega),$$

con  $\omega(k) = |k|$ , para todo  $k \in \mathbb{R}^3$ ; actuando sobre el espacio de Fock  $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^3))$ .

Lo anterior motiva la definición del operador que describe la energía del sistema spin-boson sin interacción.

**Definición 8.3** (Hamiltoniano Libre). *A partir del hamiltoniano atómico y del bosónico podemos construir el hamiltoniano del sistema sin interacción, también conocido como hamiltoniano libre, el cual está definido por*

$$H_{free} := H_{at} + H_{ph}. \quad (2.65)$$

El operador  $H_{free}$  actúa sobre el espacio de Hilbert del sistema completo  $\mathcal{H}$ , formado por el producto tensorial de los espacios de Hilbert atómico y bosónico:

$$\mathcal{H} := \mathfrak{h}_{at} \otimes \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^3)). \quad (2.66)$$

Es importante destacar que en la Ecuación (2.65) se han obviado los factores triviales del producto tensorial, según la Definición 4.5.

**Definición 8.4** (Interacción Spin-boson). *Definimos la interacción entre el átomo y el campo de radiación, por medio del operador de campo,  $\sigma_1 \otimes \Phi(G)$ .*

*Con  $G$  definida, para todo  $k \in \mathbb{R}^3$ , por*

$$G(k) := g \frac{\chi_\Lambda(k)}{4\pi\sqrt{\omega(k)}} f(k) \quad (2.67)$$

*donde  $g > 0$  es una constante de acoplamiento cercana a cero;  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$  es una función que toma valores reales y está acotada por uno,  $\|f\|_\infty \leq 1$ ;  $\sigma_1$  es la primera matriz de Pauli (ver Definición 8.1);  $\Lambda$  es el conjunto  $\Lambda := \{k \mid |k| < \kappa\}$ , que representa el corte ultravioleta que tomamos, por conveniencia y sin pérdida de generalidad, con  $\kappa < 1$ .*

Las definiciones anteriores nos permiten establecer al Hamiltoniano que describe al sistema formado por el átomo y el campo de radiación interactuando, el cual es el objeto principal de nuestro estudio.

**Definición 8.5** (Hamiltoniano con Interacción). *Llamamos hamiltoniano con interacción o simplemente hamiltoniano a la suma del hamiltoniano libre y la interacción spin-boson, esto es*

$$H = H_{at} + H_{ph}(\omega) + \sigma_1 \otimes \Phi(G). \quad (2.68)$$

*El operador  $H$  actúa sobre el espacio de Hilbert del sistema completo  $\mathcal{H}$ .*

**Proposición 8.6.** *El Hamiltoniano libre  $H_{free} = H_{at} + H_{ph}(\omega)$  es un operador autoadjunto y acotado inferiormente.*

*Demostración.* Por el Teorema 6.2, el operador  $H_{ph}(\omega)$  es auto-adjunto en  $D(H_{ph}(\omega))$ . Además, como  $H_{at}$  es auto-adjunto en  $\mathbb{C}^2$ , es posible ocupar el Corolario 4.9 para obtener que  $H_{free} = H_{at} + H_{ph}(\omega)$  es auto-adjunto en  $D(H_{free}) = \mathbb{C}^2 \otimes D(H_{ph}(\omega))$ .

Más aún, como  $H_{at}$  y  $H_{ph}(\omega)$  son operadores positivos (ver Teorema 2.21 y Proposición 6.7), el Corolario 4.9 implica que  $\sigma(H_{free}) \subset [0, \infty)$  y por el Teorema 2.21 concluimos que  $H_{free}$  es un operador positivo.  $\square$

Con el objetivo de probar que el hamiltoniano con interacción es un operador auto-adjunto es necesario hacer una observación relacionada al Cálculo Funcional que define  $H_{ph}(\omega)$  y demostrar un lema que es pieza clave durante la prueba.

**Observación 8.7.** *Sea  $f$  la función dada por  $f(x) = \frac{1}{(x+\rho)^{1/2}}$ , con  $\rho > 0$ , definida en el espectro de  $H_{ph}(\omega)$ . Por el Lema 6.7,  $\sigma(H_{ph}(\omega))$  está contenido en  $[0, \infty)$ , esto implica que la función  $f$  es continua. Empleando el Cálculo Funcional, obtenemos que*

$$\left\| (H_{ph}(\omega) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \right\| = \sup_{z \in \sigma(H_{ph}(\omega))} |f(z)| \leq \rho^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.69)$$

Además, como  $f$  sólo toma valores reales en  $\sigma(H_{ph}(\omega))$ , usando de nueva cuenta el Cálculo Funcional, tenemos que  $(H_{ph}(\omega) + \rho)^{-1/2}$  es un operador auto-adjunto.

**Lema 8.8.** Sea  $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$  tal que  $\omega^{-\frac{1}{2}}g$  está en  $L^2(\mathbb{R}^3)$  y sólo toma valores en  $\mathbb{R}$ , entonces  $D(H_{ph}(\omega)) \subset D(\Phi(g))$  y se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left\| (\sigma_1 \otimes \Phi(g)) (H_{ph}(\chi_{supp(g)}\omega) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq 2 \left( \left\| \omega^{-\frac{1}{2}}g \right\| + \rho^{-\frac{1}{2}}\|g\| \right), \quad (2.70)$$

donde  $\rho > 0$ .

*Demostración.* Veamos primero que se satisface la desigualdad

$$\left\| \Phi(g) (H_{ph}(\chi_{supp(g)}\omega) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq 2 \left( \left\| \omega^{-\frac{1}{2}}g \right\| + \rho^{-\frac{1}{2}}\|g\| \right). \quad (2.71)$$

Aplicando el operador de aniquilación,  $a(g)$ , a un vector arbitrario  $\psi$  en  $D_{\mathcal{F}}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \|a(g)\psi\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\| (a(g)\psi)^{(n)} \right\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{M^n} \left| \sqrt{n+1} \int_M \bar{g}(k) \psi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) dk \right|^2 dk_1 \cdots dk_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{M^n} (n+1) \\ &\quad \left| \int_{supp(g)} \omega^{-\frac{1}{2}}(k) \bar{g}(k) \omega^{\frac{1}{2}}(k) \psi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) dk \right|^2 dk_1 \cdots dk_n. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\begin{aligned} \|a(g)\psi\|^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \omega^{-\frac{1}{2}}g \right\|^2 \\ &\quad \int_{M^n} \int_{supp(g)} (n+1) \left| \omega^{\frac{1}{2}}(k) \psi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) \right|^2 dk dk_1 \cdots dk_n \\ &= \left\| \omega^{-\frac{1}{2}}g \right\|^2 \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{M^{n+1}} (n+1) \chi_{supp(g)}(k) \omega(k) \left| \psi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) \right|^2 dk dk_1 \cdots dk_n. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Con el mismo orden de ideas utilizado en las ecuaciones (2.35)-(2.39) es posible obtener la igualdad

$$\begin{aligned}
& \int_{M^{n+1}} \left( \sum_{i=1}^{n+1} \chi_{\text{supp}(g)}(k_i) \omega(k_i) \right) \left| \psi^{(n+1)}(k_1, \dots, k_{n+1}) \right|^2 dk_1 \cdots dk_{n+1} \\
&= \int_{M^{n+1}} (n+1) \chi_{\text{supp}(g)}(k) \omega(k) \left| \psi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) \right|^2 dk dk_1 \cdots dk_n.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Insertando esto en la Ecuación (2.73) se sigue que

$$\begin{aligned}
\|a(g)\psi\|^2 &\leq \left\| \omega^{-\frac{1}{2}} g \right\|^2 \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{M^{n+1}} \left( \sum_{i=1}^{n+1} \chi_{\text{supp}(g)}(k_i) \omega(k_i) \right) \left| \psi^{(n+1)}(k_1, \dots, k_{n+1}) \right|^2 dk_1 \cdots dk_{n+1} \\
&\leq \left\| \omega^{-\frac{1}{2}} g \right\|^2 \langle \psi, H_{ph}(\chi_{\text{supp}(g)} \omega) \psi \rangle.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Por el Cálculo Funcional  $(H_{ph}(\chi_{\text{supp}(g)} \omega) + \rho)^{\frac{1}{2}}$  es un operador auto-adjunto, entonces de la Ecuación (2.75) se sigue que

$$\begin{aligned}
\|a(g)\psi\|^2 &\leq \left\| \omega^{-\frac{1}{2}} g \right\|^2 \langle \psi, (H_{ph}(\chi_{\text{supp}(g)} \omega) + \rho) \psi \rangle \\
&= \left\| \omega^{-\frac{1}{2}} g \right\|^2 \left\| (H_{ph}(\chi_{\text{supp}(g)} \omega) + \rho)^{\frac{1}{2}} \psi \right\|^2.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Tomando a  $\varphi = (H_{ph}(\chi_{\text{supp}(g)} \omega) + \rho)^{\frac{1}{2}} \psi$ , obtenemos de la Ecuación (2.76) que

$$\left\| a(g) (H_{ph}(\chi_{\text{supp}(g)} \omega) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq \left\| \omega^{-\frac{1}{2}} g \right\|. \tag{2.77}$$

Además, por las relaciones de conmutación de los operadores de creación y aniquilación (ver Proposición 7.5), tenemos que

$$\begin{aligned}
\|a^*(g)\psi\|^2 &= \langle a^*(g)\psi, a^*(g)\psi \rangle \\
&= \langle \psi, a(g)a^*(g)\psi \rangle \\
&= \langle \psi, a^*(g)a(g)\psi \rangle + \langle \psi, \|g\|^2 \psi \rangle \\
&= \|a(g)\psi\|^2 + \|g\|^2 \|\psi\|^2.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Las Ecuaciones (2.69), (2.77) y (2.78) implican

$$\left\| a^*(g) (H_{ph}(\chi_{\text{supp}(g)} \omega) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq \left\| \omega^{-\frac{1}{2}} g \right\| + \rho^{-\frac{1}{2}} \|g\|. \tag{2.79}$$

De las Ecuaciones (2.77) y (2.79), se concluye la Ecuación (2.71).

Como  $\sigma_1$  es un operador unitario (en particular  $\|\sigma_1\| = 1$ ), entonces la Proposición 4.6 y la Ecuación (2.71) implican que

$$\begin{aligned} \left\| (\sigma_1 \otimes \Phi(g)) (H_{ph}(\chi_{supp(g)}\omega) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \right\| &= \|\sigma_1\| \left\| \Phi(g) (H_{ph}(\chi_{supp(g)}\omega) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &\leq 2 \left( \left\| \omega^{-\frac{1}{2}} g \right\|_{L^2} + \rho^{-\frac{1}{2}} \|g\| \right). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Adicionalmente, la contención  $D(H_{ph}(\chi_{supp(g)}\omega)) \subset D(\Phi(g))$ , es resultado de las ecuaciones (2.76) y (2.78).  $\square$

**Teorema 8.9.** *El Hamiltoniano,*

$$H = H_{at} + H_{ph}(\omega) + \sigma_1 \otimes \Phi(G),$$

*es un operador auto-adjunto y acotado inferiormente.*

*Demostración.* Usando el Teorema de Kato-Rellich, veamos primero que  $H$ , es un operador auto-adjunto.

Como  $H_{ph}(\omega)$  y  $\Phi(G)$  son auto-adjuntos (ver Teorema 6.2 y Proposición 7.7). Entonces el Teorema 4.8 y la Proposición 8.6 implican de manera respectiva que  $\sigma_1 \otimes \Phi(G)$  y  $H_{at} + H_{ph}(\omega)$  son operadores auto-adjuntos.

Por otro lado, del Lema 8.8 se sigue de manera inmediata que

$$D(H_{at} + H_{ph}(\omega)) \subset D(\sigma_1 \otimes \Phi(G)). \quad (2.81)$$

Entonces, resta ver que  $\sigma_1 \otimes \Phi(G)$  está acotado relativamente con respecto a  $H_{at} + H_{ph}(\omega)$  en el sentido de Kato, para lo cual es necesario hacer la siguiente observación:

Sea  $\psi \in D(H_{at} + H_{ph}(\omega))$  y el vector auxiliar  $\varphi = (H_{ph}(\omega) + \rho)\psi$ , con  $\rho > 0$ ; haciendo uso de la Ecuación (2.69), obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| (\sigma_1 \otimes \Phi(G)) (H_{ph}(\omega) + \rho)^{-1} \varphi \right\| &\leq \left\| (\sigma_1 \otimes \Phi(G)) (H_{ph}(\omega) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \right\| \\ &\quad \times \left\| (H_{ph}(\omega) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \varphi \right\| \\ &\leq c(\rho) \left\| (H_{ph}(\omega) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \varphi \right\| \\ &\leq c(\rho) \rho^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|, \end{aligned} \quad (2.82)$$

donde el valor de  $c(\rho)$ , está dado por  $c(\rho) = 2 \left\| \omega^{-\frac{1}{2}} G \right\|_{L^2} + 2\rho^{-\frac{1}{2}} \|G\|_{L^2}$ , según el Lema 8.8.

Escribiendo  $\psi = (H_{ph}(\omega) + \rho)^{-1} \varphi$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|(\sigma_1 \otimes \Phi(G)) \psi\| &\leq c(\rho)\rho^{-\frac{1}{2}} \|(H_{ph}(\omega) + \rho)\psi\| \\ &\leq c(\rho)\rho^{-\frac{1}{2}} \|H_{ph}(\omega)\psi\| + c(\rho)\rho^{\frac{1}{2}} \|\psi\|, \end{aligned} \quad (2.83)$$

y como el Hamiltoniano atómico es un operador acotado,  $\|H_{at}\|_{B(\mathfrak{h}_{at})} \leq 2$ , llegamos a

$$\begin{aligned} \|(\sigma_1 \otimes \Phi(G)) \psi\| &\leq c(\rho)\rho^{-\frac{1}{2}} \|(H_{at} + H_{ph}(\omega))\psi\| + \|H_{at}\psi\| + c(\rho)\rho^{\frac{1}{2}} \|\psi\| \\ &\leq c(\rho)\rho^{-\frac{1}{2}} \|(H_{at} + H_{ph}(\omega))\psi\| + \left(2 + c(\rho)\rho^{\frac{1}{2}}\right) \|\psi\|. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Tomando a  $\rho \rightarrow \infty$ , obtenemos que  $\sigma_1 \otimes \Phi(G)$  es una perturbación infinitesimal de  $H_{at} + H_{ph}(\omega)$  en el sentido de Kato. Entonces, el Teorema de Kato-Rellich implica que  $H$  es un operador auto-adjunto en  $D(H_{at} + H_{ph}(\omega))$  y acotado inferiormente por  $-(2 + c(\rho)\rho^{\frac{1}{2}})$ , pues  $H_{at} + H_{ph}(\omega)$  es un operador positivo.  $\square$

## 9. Operadores de Creación y Aniquilación (puntuales)

En esta sección se relaciona los operadores en segunda cuantización con los operadores de creación y aniquilación, como son comúnmente presentados en la Teoría de Campos Cuánticos. Con este objetivo, es necesario presentar los operadores de creación y aniquilación puntuales que están definidos como formas cuadráticas.

Los operadores de creación y aniquilación puntuales como se presentan aquí, están construidos detalladamente en [17] Sec. X.7.

**Definición 9.1** (Forma Cuadrática). *Una forma cuadrática es una función*

$$q : Q(q) \times Q(q) \rightarrow \mathbb{C},$$

donde  $Q(q)$  es un subconjunto denso de un espacio de Hilbert  $\mathfrak{h}$ , tal que  $q(\cdot, \psi)$  es una función lineal conjugada y  $q(\varphi, \cdot)$  es una función lineal, con  $\varphi, \psi \in Q(q)$ .

Además, decimos que

- (a)  $q$  es una forma simétrica, si  $q(\varphi, \psi) = \overline{q(\psi, \varphi)}$ .
- (b)  $q$  es una forma positiva, si  $q(\varphi, \varphi) \geq 0$ , para todo  $\varphi \in Q(q)$ .
- (c)  $q$  una forma semiacotada, si  $q(\varphi, \varphi) \geq M\|\varphi\|^2$ , para algún  $M \in \mathbb{R}$ .

Dadas dos formas cuadráticas,  $q_1 : Q(q_1) \times Q(q_1) \rightarrow \mathbb{C}$  y  $q_2 : Q(q_2) \times Q(q_2) \rightarrow \mathbb{C}$ , decimos que  $q_1 \geq q_2$  en el sentido de formas cuadráticas, si  $q_1 - q_2 \geq 0$  en  $Q(q_1) \times Q(q_1) \cap Q(q_2) \times Q(q_2)$ .

**Definición 9.2** (Operadores de Creación y Aniquilación Puntuales). *Sea  $k \in \mathbb{R}^3$ , definimos el operador  $a(k) : D_{\mathcal{F}} \rightarrow D_{\mathcal{F}}$ , dado por*

$$(a(k)\psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \sqrt{n+1} \psi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n).$$

Relacionado al operador  $a(k)$ , tenemos el adjunto  $a^\dagger(k)$ , el cual no es densamente definido, pues involucra la multiplicación por funciones tipo  $\delta$ . A pesar de este hecho, es posible definir  $a(k)$  y  $a^\dagger(k)$  como formas cuadráticas sobre  $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$  del siguiente modo:

Dados  $\varphi, \psi \in D_{\mathcal{S}}$ , definimos la forma  $a^\dagger(k)$ , por medio de  $a(k)$ , como

$$\langle \varphi, a^\dagger(k)\psi \rangle := \langle a(k)\varphi, \psi \rangle. \quad (2.85)$$

A continuación se muestra una relación de los operadores de creación y aniquilación con  $a^*(k)$  y  $a(k)$ . Debido a este resultado,  $a^*(k)$  y  $a(k)$  son también conocidos, de manera respectiva, como operadores de creación y aniquilación puntuales.

**Proposición 9.3.** Sea  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , entonces se satisfacen las siguientes igualdades en el sentido de formas cuadráticas:

$$a(f) = \int_{\mathbb{R}^3} a(k)\bar{f}(k)dk \quad (2.86)$$

y

$$a^*(f) = \int_{\mathbb{R}^3} a^*(k)f(k)dk. \quad (2.87)$$

De manera explícita la Ecuación (2.86) expresa que dados  $\varphi, \psi \in D_{\mathcal{S}}$  se satisface

$$\langle \varphi, a(f)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \varphi, a(k)\psi \rangle \bar{f}(k)dk \quad (2.88)$$

y de modo similar para la Ecuación (2.87).

*Demostración.* Veamos que se cumple la Ecuación (2.86), la prueba de la Ecuación (2.87) es semejante. Sean  $\varphi, \psi \in D_{\mathcal{S}}$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle \varphi, a(f)\psi \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi^{(n)}, (a(f)\psi)^{(n)} \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \varphi^{(n)}, \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{f}(k)\psi^{(n+1)}(k, \cdot)dk \right\rangle. \end{aligned}$$

Ocupando el Teorema de Fubini, así como el hecho de que la suma tiene un número finito de terminos (existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $\varphi^{(s)} = 0 = \psi^{(s)}$ , con  $s > r$ ), para "intercambiar" los símbolos de integral, suma y producto interior,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, a(f)\psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \varphi^{(n)}, \sqrt{n+1}\psi^{(n+1)}(k, \cdot) \right\rangle \bar{f}(k)dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \varphi^{(n)}, (a(k)\psi)^{(n)} \right\rangle \bar{f}(k)dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle \varphi, a(k)\psi \rangle \bar{f}(k)dk, \end{aligned}$$

donde, finalmente, ocupamos la definición de producto interior en el espacio de Fock.  $\square$

La Proposición 9.3 nos permite expresar al operador de campo en términos de los operadores de creación y aniquilación puntuales,

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^3} a(k)\bar{f}(k) + a^*(k)f(k)dk, \quad (2.89)$$

relación que se entiende en el sentido de formas cuadráticas.

Los operadores en segunda cuantización también pueden ser expresados en términos de los operadores de creación y aniquilación puntuales, en este caso como un producto de dichos operadores. Debido a que  $a(k)$  mapea  $D_{\mathcal{S}}$  en  $D_{\mathcal{S}}$ , las potencias de  $a(k)$  están bien definidas como operadores en  $D_{\mathcal{S}}$ . En cuanto a las potencias de  $a^\dagger(k)$  las podemos definir, empleando la Ecuación (2.85), de manera recursiva, es decir,

$$\langle \varphi, (a^\dagger(k))^n \psi \rangle = \langle (a(k))^n \varphi, \psi \rangle,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Es importante notar que  $\langle \varphi, a^*(k_2)a(k_1)\psi \rangle$  expresa a una forma cuadrática bien definida, para todo  $k_2, k_1 \in \mathbb{R}^3$ . Mientras que  $\langle \varphi, a(k_1)a^*(k_2)\psi \rangle$ , no tiene sentido, pues  $a^*(k_2)$  es sólo una forma cuadrática.

**Proposición 9.4.** Sea  $k \in \mathbb{R}^3$ , entonces

$$H_{ph}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k)a^*(k)a(k)dk, \quad (2.90)$$

en el sentido de formas cuadráticas sobre  $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$ .

*Demostración.* Sean  $\varphi, \psi \in D_{\mathcal{S}}$  dados por

$$\varphi = \{0, \dots, 0, \varphi^{(n)}, 0, \dots\}$$

y

$$\psi = \{0, \dots, 0, \psi^{(n)}, 0, \dots\}.$$

Entonces, por la Definición (9.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) \langle \varphi, a^*(k)a(k)\psi \rangle dk &= \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) \langle (a(k)\varphi)^{(n-1)}, (a(k)\psi)^{(n-1)} \rangle dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) \langle \sqrt{n}\varphi^{(n)}(k, \cdot), \sqrt{n}\psi^{(n)}(k, \cdot) \rangle dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3n}} n\omega(k)\varphi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_{n-1}) \\ &\quad \times \psi^{(n)}(k, k_1, \dots, k_{n-1})dk_1 \cdots dk_{n-1}dk \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $k \mapsto k_n$  y ocupando que  $\varphi^{(n)}$  y  $\psi^{(n)}$  son invariantes ante intercambio de coordenadas es posible reordenar las variables del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) \langle \varphi, a^*(k)a(k)\psi \rangle dk &= \int_{\mathbb{R}^{3n}} n\omega(k_n) \bar{\varphi}^{(n)}(k_n, k_1, \dots, k_{n-1}) \\ &\quad \psi^{(n)}(k_n, k_1, \dots, k_{n-1}) dk_1 \cdots dk_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3n}} \sum_{i=1}^n \omega(k_i) \bar{\varphi}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) \\ &\quad \psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n) dk_1 \cdots dk_n. \end{aligned}$$

Finalmente, identificamos que en la última integral está la coordenada  $n$ -ésima de  $H_{ph}(\omega)\psi$  para obtener

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) \langle \varphi, a^*(k)a(k)\psi \rangle dk &= \langle \varphi^{(n)}, (H_{ph}(\omega)\psi)^{(n)} \rangle \\ &= \langle \varphi, H_{ph}(\omega)\psi \rangle. \end{aligned}$$

Extendiendo por linealidad a  $D_{\mathcal{F}} \times D_{\mathcal{F}}$ , se concluye en resultado.  $\square$

Con un procedimiento similar, incluso menos complicado, se verifica que el operador de número cumple

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} a^*(k)a(k)dk, \quad (2.91)$$

en el sentido de formas cuadráticas. Más aún, como se muestra a continuación, el operador de número y los operadores de creación y aniquilación puntuales satisfacen la pull-through formulae (ver Proposición 7.8) en el sentido de formas cuadráticas.

**Proposición 9.5** (Pull-through Formulae). *Sea  $k \in \mathbb{R}^3$ . Entonces se satisface la igualdad*

$$a(k)N = (N + \mathbb{1})a(k), \quad (2.92)$$

como operadores sobre  $D_{\mathcal{F}}$ , y

$$a^\dagger(k)(N + \mathbb{1}) = Na^\dagger(k), \quad (2.93)$$

en el sentido de formas cuadráticas sobre  $D_{\mathcal{F}} \times D_{\mathcal{F}}$ .

*Demostración.* Sean  $\psi, \varphi \in D_{\mathcal{F}}$ , aplicando el operador  $a(k)N$  a  $\psi$  se obtiene

$$\begin{aligned} (a(k)N\psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) &= \sqrt{n+1}(N\psi)^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) \\ &= \sqrt{n+1}(n+1)\psi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n). \end{aligned}$$

Reordenando los términos y ocupando el Cálculo Funcional se llega a que

$$\begin{aligned} (a(k)N\psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) &= (n+1)(a(k)\psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) \\ &= ((N + \mathbb{1})a(k)\psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n), \end{aligned}$$

lo que implica la primera igualdad.

Por otro lado, usando la igualdad (2.92), la definición de  $a^\dagger(k)$  como forma cuadrática y que el operador de número es auto-adjunto, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(k)(N + \mathbb{1})\varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, (N + \mathbb{1})a(k)\psi \rangle \\ &= \langle \varphi, a(k)N\psi \rangle \\ &= \langle Na^\dagger(k)\varphi, \psi \rangle, \end{aligned}$$

de donde se sigue que  $a^\dagger(k)(N + \mathbb{1}) = Na^\dagger(k)$  en el sentido de formas cuadráticas.  $\square$

Las ecuaciones (2.89), (2.90) y (2.91) expresan a operadores empleados en la teoría de campos cuánticos en términos de los operadores de creación y aniquilación puntuales. Está forma de relacionar los operadores de creación y aniquilación puntuales con operadores actuando en el espacio de Fock puede ser extendida.

Primero, notamos que cualquier producto  $\prod_{i=1}^{n_1} a(k_i)$ , con  $n_1 \in \mathbb{N}$ , está bien definido como operador de  $D_{\mathcal{S}}$  a  $D_{\mathcal{S}}$  y  $\prod_{i=1}^{n_2} a^*(k_i)$ , con  $n_2 \in \mathbb{N}$ , es una forma cuadrática bien definida en  $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$ . Entonces la expresión  $\prod_{i=1}^{n_2} a^*(k_i) \prod_{i=1}^{n_1} a(k_i)$ , también es una forma cuadrática bien definida, la cual permite establecer el siguiente resultado:

**Teorema 9.6.** *Sean  $n_1, n_2$  enteros no negativos y  $W \in L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$ . Entonces existe un único operador  $T_W$  en  $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^3))$  tal que  $D_{\mathcal{S}} \subset D(T_W)$  es un dominio esencial para  $T_W$  y cumple las siguientes propiedades:*

(a)  $T_W$  se expresa en términos de  $W$  como

$$\begin{aligned} T_W &= \int_{\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)}} W(k_1, \dots, k_{n_1}, p_1, \dots, p_{n_2}) \\ &\quad \times \left( \prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i) \right) \left( \prod_{i=1}^{n_2} a(p_i) \right) dk_1 \cdots dk_{n_1} dp_1 \cdots dp_{n_2}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

igualdad que se entiende en el sentido de formas cuadráticas sobre  $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$ .

(b) Si  $m_1$  y  $m_2$  son enteros no negativos tales que  $m_1 + m_2 = n_1 + n_2$ , entonces el operador  $(\mathbb{1} + N)^{-m_1/2} T_W (\mathbb{1} + N)^{-m_2/2}$  es acotado y cumple

$$\left\| (\mathbb{1} + N)^{-m_1/2} T_W (\mathbb{1} + N)^{-m_2/2} \right\| \leq C(m_1, m_2) \|W\|_{L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})}$$

En particular, si  $m_1 = n_1$  y  $m_2 = n_2$ , entonces  $C(m_1, m_2) = 1$ .

(c)  $T_W^*$  se expresa en términos de  $W$  como

$$\begin{aligned} T_W^* &= \int_{\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)}} \overline{W}(k_1, \dots, k_{n_1}, p_1, \dots, p_{n_2}) \\ &\quad \times \left( \prod_{i=1}^{n_2} a^\dagger(p_i) \right) \left( \prod_{i=1}^{n_1} a(k_i) \right) dk_1 \cdots dk_{n_1} dp_1 \cdots dp_{n_2}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

igualdad que se entiende en el sentido de formas cuadráticas sobre  $D_{\mathcal{S}} \times D_{\mathcal{S}}$ .

(d) Si  $W_n \rightarrow W$  en  $L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$ , entonces  $T_{W_n} \rightarrow T_W$  de manera fuerte en  $D_{\mathcal{S}}$ .

(e) El conjunto  $F_0(L^2(\mathbb{R}^3))$  está contenido en  $D(T_W)$  y en  $D(T_W^*)$ . Sobre los elementos de  $F_0(L^2(\mathbb{R}^3))$ , definimos los operadores  $T_W$  y  $T_W^\dagger$  a través del operador de simetrización,  $S$ . Para  $T_W$  tenemos

$$\begin{aligned} &(T_W \psi)^{(j-n_2+n_1)}(k_1, \dots, k_{j-n_2+n_1}) \\ &= K_{j,n_1,n_2} S_{j-n_2+n_1} \int W(k_1, \dots, k_{n_1}, p_1, \dots, p_{n_2}) \\ &\quad \times \psi^{(j)}(p_1, \dots, p_{n_2}, k_{n_1+1}, \dots, k_{j-n_2+n_1}) dp_1 \cdots dp_{n_2}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

donde

$$K_{j,n_1,n_2} = \left[ \frac{j!(j+n_1-n_2)!}{((j-n_2)!)^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

y para  $n < n_1 - n_2$ ,  $(T_W \psi)^{(n)} = 0$ .

Para  $T_W^\dagger$  tenemos

$$\begin{aligned} &(T_W^\dagger \psi)^{(j-n_1+n_2)}(p_1, \dots, p_{j-n_1+n_2}) \\ &= K_{j,n_2,n_1} S_{j-n_1+n_2} \int \overline{W}(k_1, \dots, k_{n_1}, p_1, \dots, p_{n_2}) \\ &\quad \times \psi^{(j)}(k_1, \dots, k_{n_1}, p_{n_2+1}, \dots, p_{j-n_1+n_2}) dk_1 \cdots dk_{n_1} \end{aligned} \quad (2.97)$$

y para  $n < n_2 - n_1$ ,  $(T_W^\dagger \psi)^{(n)} = 0$ .

*Demostración.* Para vectores en  $D_{\mathcal{S}}$ , definimos  $T_W \psi$  por la fórmula (2.96). Veamos que se satisface la desigualdad

$$\| (T_W \psi)^{(j-n_2+n_1)} \|_{j-n_2+n_1}^2 \leq K_{j,n_1,n_2}^2 \| W \|_{n_1+n_2}^2 \| \psi^{(j)} \|_j^2, \quad (2.98)$$

donde la notación  $\| W \|_{n_2+n_1}$  hace referencia a que se está tomando la norma de  $W$  en  $L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$  y del mismo modo para los demás vectores (notación que es usada, por simplicidad, a lo largo de esta demostración únicamente).

Para  $k_i$  fija, con  $i \in \{1, \dots, j-n_2+n_1\}$ , por la desigualdad de Schwarz, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^{3n_2}} W(k_1, \dots, k_{n_1}, p_1, \dots, p_{n_2}) \Psi^{(j)}(p_1, \dots, p_{n_2}, k_{n_1+1}, \dots, k_{j-n_2+n_1}) dp_1 \cdots dp_{n_2} \right|^2 \\ & \leq \|W(k_1, \dots, k_{n_1})\|_{n_2}^2 \|\Psi^{(j)}(k_{n_1+1}, \dots, k_{j-n_2+n_1})\|_{n_2}^2, \end{aligned} \quad (2.99)$$

donde  $\|W(k_1, \dots, k_{n_1})\|_{n_2}$  hace referencia a que  $k_i$  está fija (con  $i \in \{1, \dots, j - n_2 + n_1\}$ ), es decir, se toma la norma al integrar con respecto a las variables  $p_j$  (con  $j \in \{1, \dots, n_2\}$ ). De manera similar para  $\Psi^{(j)}$ .

Integrando sobre  $k_i$ , con  $i \in \{1, \dots, j - n_2 + n_1\}$ , se sigue, para el lado derecho de la Ecuación (2.99), que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{3(j-n_2+n_1)}} \|W(k_1, \dots, k_{n_1})\|_{n_2}^2 \|\Psi^{(j)}(k_{n_1+1}, \dots, k_{j-n_2+n_1})\|_{n_2}^2 dk_1 \cdots dk_{j-n_2+n_1} \\ & = \int_{\mathbb{R}^{3n_1}} \|W(k_1, \dots, k_{n_1})\|_{n_2}^2 dk_1 \cdots dk_{n_1} \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^{3(j-n_2)}} \|\Psi^{(j)}(k_{n_1+1}, \dots, k_{j-n_2+n_1})\|_{n_2}^2 dk_{n_1+1} \cdots dk_{j-n_2+n_1} \\ & = \|W\|_{n_1+n_2}^2 \|\Psi^{(j)}\|_j^2, \end{aligned} \quad (2.100)$$

donde se ocupó el Teorema de Fubini para separar la integral en dos partes y tomar la integral sólo en las variables correspondientes a cada función.

Ahora integrando el lado izquierdo de la Ecuación (2.99) sobre  $k_i$ , con  $i \in \{1, \dots, j - n_2 + n_1\}$  y comparando con la Ecuación (2.100) se concluye la desigualdad (2.98), usando que el operador de simetrización es una proyección ortogonal.

Por otra parte, se define  $T_W^\dagger$  sobre  $D_{\mathcal{S}}$ , mediante la fórmula (2.97), como  $D_{\mathcal{S}}$  es denso en  $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^3))$ , el operador  $T_W^\dagger$  es densamente definido. Observamos que se verifica

$$\langle \phi, T_W \psi \rangle = \langle T_W^\dagger \phi, \psi \rangle, \quad (2.101)$$

para todo  $\phi$  y  $\psi$  en  $D_{\mathcal{S}}$ .

Siendo el mismo orden de ideas empleadas en la Proposición 7.4, no es difícil ver que  $T_W$  es cerrable y  $T_W^\dagger$  corresponde a la restricción del adjunto de  $T_W$  en  $D_{\mathcal{S}}$ .

Utilizamos a  $T_W$  para denotar a su cerradura,  $\overline{T}_W$ , y a  $T_W^*$  para denotar a su adjunto. Con esta construcción  $D_{\mathcal{S}}$  es un dominio esencial. Como el lado derecho de la Ecuación (2.96) es acotado para cualquier  $\psi = \{0, \dots, \psi^{(j)}, 0, \dots\} \in F_0(L^2(\mathbb{R}^3))$ , extendiendo por linealidad, tal expresión representa a  $T_W$  sobre  $F_0(L^2(\mathbb{R}^3))$ . La prueba del inciso (e) sobre el operador  $T_W^*$  es similar y se sigue de la misma construcción.

Para probar el inciso (b), tomamos  $\psi$  en  $D_{\mathcal{S}}$ . Empleando la Ecuación (2.98) y el Cálculo Funcional, se muestra que

$$\begin{aligned} & \left\| \left( (\mathbb{1} + N)^{-m_1/2} T_W (\mathbb{1} + N)^{-m_2/2} \psi \right)^{(j-n_2+n_1)} \right\|_{j-n_2+n_1}^2 \\ & \leq \left( \frac{K_{j,n_1,n_2}}{(1+j-n_2+n_1)^{m_1/2} (1+j)^{m_2/2}} \right)^2 \|W\|_{n_1+n_2}^2 \|\psi^{(j)}\|_j^2, \end{aligned} \quad (2.102)$$

con lo que se sigue la desigualdad

$$\begin{aligned} & \left\| \left( (\mathbb{1} + N)^{-m_1/2} T_W (\mathbb{1} + N)^{-m_2/2} \psi \right) \right\| \\ & \leq \sup_{j < \infty} \frac{K_{j,n_1,n_2}}{(1+j-n_2+n_1)^{m_1/2} (1+j)^{m_2/2}} \|W\|_{n_1+n_2} \|\psi\| \quad (2.103) \\ & \leq C(m_1, m_2) \|W\|_{n_1+n_2} \|\psi\|, \end{aligned}$$

donde

$$C(m_1, m_2) = \sup_j \frac{K_{j,n_1,n_2}}{(1+j-n_2+n_1)^{m_1/2} (1+j)^{m_2/2}} < \infty.$$

La razón por la que  $C(m_1, m_2)$  es una constante finita se debe a la condición  $m_1 + m_2 = n_1 + n_2$  y a que podemos expresar a  $K_{j,n_1,n_2}$  como producto de  $n_1 + n_2$  factores,

$$\begin{aligned} K_{j,n_1,n_2} &= [(j-n_2+n_1) \cdots (j-n_2+1)]^{1/2} [j \cdots (j-n_2+1)]^{1/2} \\ &\leq (j-n_2+n_1)^{n_1/2} (j)^{n_2/2}. \end{aligned}$$

Como resultado, el operador  $(\mathbb{1} + N)^{-m_1/2} T_W (\mathbb{1} + N)^{-m_2/2}$  se puede extender a un operador acotado sobre  $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^3))$  con norma menor o igual a  $C(m_1, m_2) \|W\|_{n_1+n_2}$ . Si, además  $m_1 = n_1$  y  $m_2 = n_2$ , no es difícil mostrar que  $C(m_1, m_2) = 1$ .

Para probar (d) basta ver que si  $\psi = \{0, \dots, \psi^{(j)}, 0, \dots\}$  está en  $D_{\mathcal{F}}$  y existe una sucesión  $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$  que converge a  $W$  en  $L^2(\mathbb{R}^3(n_1+n_2))$ , entonces por la Ecuación (2.98),

$$\begin{aligned} \|T_{W_n} \psi - T_W \psi\| &= \|T_{W_n - W} \psi\| \\ &\leq K_{j,n_1,n_2} \|W_n - W\|_{n_1+n_2} \|\psi\|, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que  $T_{W_n} \psi$  converge a  $T_W \psi$ , cuando  $n$  tiende a infinito. Ya que los elementos de  $D_{\mathcal{F}}$  son combinaciones lineales finitas de tales vectores, obtenemos que  $T_{W_n}$  converge de manera fuerte a  $T_W$  en  $D_{\mathcal{F}}$ .

Para probar (a), sean  $\psi_1, \psi_2 \in D_{\mathcal{F}}$ , con  $\psi_1 = \{0, \dots, \psi_1^{(j-n_2+n_1)}, 0, \dots\}$  y  $\psi_2 = \{0, \dots, \psi_2^{(j)}, 0, \dots\}$ . Tomando  $W = (\prod_{i=1}^{n_1} f_i(k_i)) (\prod_{i=1}^{n_2} g_i(p_i))$ , debido a la definición de la forma  $(\prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i)) (\prod_{i=1}^{n_2} a(p_i))$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1, T_W \psi_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)}} W(k_1, \dots, k_{n_1}, p_1, \dots, p_{n_2}) \\
&\quad \times \left\langle \psi_1, \left( \prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i) \right) \left( \prod_{i=1}^{n_2} a(p_i) \right) \psi_2 \right\rangle dk_1 \cdots dk_{n_1} dp_1 \cdots dp_{n_2}
\end{aligned}
\tag{2.104}$$

Como ambos lados de (2.104) son lineales en  $W$ , la igualdad es válida para las  $W$ 's que son combinaciones lineales finitas de tales productos. Ya que

$$\left\langle \psi_1, \left( \prod_{i=1}^{n_1} a^\dagger(k_i) \right) \left( \prod_{i=1}^{n_2} a(p_i) \right) \psi_2 \right\rangle \in L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$$

y utilizando el inciso (d), ambos lados de la Ecuación (2.104) son funcionales continuos sobre  $L^2(\mathbb{R}^{3(n_1+n_2)})$ . Como coinciden en un subconjunto denso lo hacen en todo el conjunto. Finalmente, la Expresión (2.104) se extiende por linealidad a todo  $D_{\mathcal{G}} \times D_{\mathcal{G}}$ , con lo que se concluye la prueba de (a). La prueba de (c) se sigue de manera similar. □

## Capítulo 3

# Sucesión de Energías y de Proyecciones asociadas al Estado Base

Este capítulo tiene como objetivo demostrar, mediante el método de escalas múltiples, la existencia del estado base en el modelo spin-boson para el caso de comportamiento infrarrojo singular. En la Sección 10, se presenta el método de escalas múltiples: se define el corte infrarrojo en el momento de los fotones para, posteriormente, construir la sucesión de hamiltonianos regulares y otras sucesiones que surgen naturalmente como las sucesiones de energías y proyecciones asociadas al estado base. En la sección 11 se realizan estimaciones de las sucesiones construidas. Estas estimaciones por un lado exhiben que las sucesiones de energías y proyecciones asociadas al estado base están bien definidas y por otro lado dan las bases para la convergencia de la sucesión de proyecciones. En la Sección 12, se presenta una simetría en el modelo que es utilizada para probar la existencia de subespacios invariantes bajo la acción de los hamiltonianos regulares. Se utilizan los resultados de las secciones 11 y 12 para demostrar la convergencia de la sucesión de proyecciones asociadas al estado base en la Sección 13. La convergencia de la sucesión de proyecciones asegura la existencia del estado base. La fuente principal de información para llevar a cabo esta sección es el contenido de [2].

### 10. Construcción de las Sucesiones

Con el objetivo de construir las sucesiones de Hamiltonianos regulares  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , de energías de los estados base,  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , y de proyecciones asociadas a los espacios propios (de las energías de los estados base),  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , es necesario introducir algunos conceptos y notación.

**Definición 10.1** (Corte Infrarrojo). *Sea  $\gamma \in (0, 1)$  y  $\kappa < 1$  el corte ultravioleta (ver Definición 8.4), definimos la sucesión  $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , dada por*

$$\rho_n := \kappa \gamma^n, \quad (3.1)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Así mismo, si denotamos por  $B_n$  a la bola centrada en el origen y de radio  $\rho_n$ ,

$$B_n := \{k \in \mathbb{R}^3 \mid |k| < \rho_n\}, \quad (3.2)$$

definimos la función

$$\omega_n := \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3 \setminus B_n} \omega. \quad (3.3)$$

La función  $\omega_n$  representa el momento accesible para los fotones en el paso  $n$ , pues corta el momento por debajo de  $\rho_n$ . De manera similar, definimos

$$G_n := \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3 \setminus B_n} G, \quad (3.4)$$

que corta la interacción del átomo y el campo de radiación por debajo de  $\rho_n$ .

Como  $\kappa < 1$ , observamos que  $\rho_n < 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ; más aún,  $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por cero, de hecho converge a cero, cuando  $n$  tiende a infinito.

El valor de  $\gamma$  es un parámetro específico que será convenientemente elegido en las próximas secciones. Por otro lado, notamos que  $G_0 = 0$ , pues el soporte de la función  $G$  está contenido en  $B_0$ .

La Definición 10.1, nos permite construir la sucesión de hamiltonianos con corte infrarrojo  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

**Definición 10.2** (Hamiltoniano con Corte Infrarrojo). *Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos el Hamiltoniano con corte infrarrojo en el paso  $n$  como*

$$H_n := H_{at} + H_{ph}(\omega_n) + \sigma_1 \otimes \Phi(G_n), \quad (3.5)$$

actuando en  $\mathcal{H}_n := \mathfrak{h}_{at} \otimes \mathcal{F}_n$ , donde

$$\mathcal{F}_n := \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B_n)). \quad (3.6)$$

El vacío cuántico de  $\mathcal{F}_n$  es denotado por  $\Omega_n$ .

Como en el Teorema 8.9, obtenemos que  $H_n$  es auto-adjunto en  $D(H_n)$  y acotado inferiormente, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . En otras palabras,  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , define una sucesión de operadores auto-adjuntos. Esto hace posible construir la sucesión de energías,  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , donde cada energía está asociada al estado base del sistema descrito por el Hamiltoniano con corte infrarrojo en el paso  $n$ .

**Definición 10.3** (Energía del Estado Base). *Definimos la energía asociada al estado base como*

$$E_n := \inf \sigma(H_n), \quad (3.7)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Así mismo, construimos la sucesión de “gaps”, donde cada elemento es la distancia entre la energía asociada al estado base y el resto del espectro del hamiltoniano con corte infrarrojo, en el paso  $n$ .

**Definición 10.4** (Gap). Denotamos por  $gap_n$  a la separación que existe entre  $E_n$  y el resto del espectro de  $H_n$ ,

$$gap_n := \inf \{ \sigma(H_n) \setminus \{E_n\} \} - E_n, \quad (3.8)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

A continuación introducimos algunas definiciones auxiliares que serán de gran utilidad para la demostración de algunos resultados. De manera similar a la Definición 10.1, hacemos la siguiente construcción

**Definición 10.5.** Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos

$$\tilde{\omega}_n := \mathbb{1}_{B_n \setminus B_{n+1}} \omega \quad (3.9)$$

y

$$\tilde{G}_n := \mathbb{1}_{B_n \setminus B_{n+1}} G. \quad (3.10)$$

Así mismo, definimos la sucesión  $\{\tilde{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  como

$$\tilde{H}_n = H_n \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{F}}_n} + \mathbb{1}_{\mathcal{H}_n} \otimes H_{ph}(\tilde{\omega}_n), \quad (3.11)$$

actuando en un dominio adecuado contenido en  $\mathcal{H}_n \otimes \tilde{\mathcal{F}}_n$ , donde

$$\tilde{\mathcal{F}}_n := \mathcal{F}(L^2(B_n \setminus B_{n+1})), \quad (3.12)$$

con vacío cuántico denotado por  $\tilde{\Omega}_n$ .

**Observación 10.6.** Es útil notar que, según las ecuaciones (2.6) y (2.14), podemos relacionar a  $H_{n+1}$  y  $\tilde{H}_n$  como

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \tilde{H}_n + \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \\ &= H_n + H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n), \end{aligned} \quad (3.13)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Por otra parte, notamos que la Ecuación (3.11) y el Corolario 4.9 nos garantizan que el ínfimo del espectro de  $H_n$  y  $\tilde{H}_n$  son el mismo:

$$\tilde{E}_n := \inf \sigma(\tilde{H}_n) = \inf \sigma(H_n), \quad (3.14)$$

donde, además, empleamos que 0 es un valor propio de  $H_{ph}(\tilde{\omega}_n)$  asociado a  $\tilde{\Omega}_n$ , resultado que se obtiene (al igual que la Ecuación (2.27)) de la Definición 6.1.

La Ecuación (3.14) nos permite hacer la siguiente definición escribiendo  $E_n$  en lugar de  $\tilde{E}_n$ .

**Definición 10.7.** Denotamos por  $g\tilde{a}p_n$  a la separación que existe entre  $E_n$  y el resto del espectro de  $\tilde{H}_n$ ,

$$g\tilde{a}p_n := \inf \{ \sigma(\tilde{H}_n) \setminus \{E_n\} \} - E_n, \quad (3.15)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

En las definiciones pasadas construimos espacios de Fock, junto con las funciones y operadores correspondientes, a partir del espacio  $L^2(M)$ , con  $M = \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3 \setminus B_n, B_n \setminus B_{n+1}$ . Finalmente, definimos el espacio de Fock sobre el espacio  $L^2(B_n)$  de modo semejante.

**Definición 10.8.** Denotamos a las restricciones de las funciones  $\omega$  y  $G$  en la bola  $B_n$  por

$$\omega_n^\infty := \mathbb{1}_{B_n} \omega \quad (3.16)$$

y

$$G_n^\infty := \mathbb{1}_{B_n} G, \quad (3.17)$$

con  $n \in \mathbb{N}_0$ .

A partir de  $\omega_n^\infty$  y  $G_n^\infty$  construimos los operadores  $H_{ph}(\omega_n^\infty)$  y  $\sigma_1 \otimes \Phi(G_n^\infty)$  definidos en un dominio adecuado de

$$\mathcal{F}_n^\infty := \mathcal{F}(L^2(B_n)). \quad (3.18)$$

Así mismo, denotamos por  $\Omega_n^\infty$  al vacío cuántico en  $\mathcal{F}_n^\infty$ .

Observamos que podemos escribir al vacío cuántico en  $\mathcal{F}_n^\infty$  como

$$\Omega_n^\infty = \tilde{\Omega}_n \otimes \Omega_{n+1}^\infty. \quad (3.19)$$

## 11. Estimaciones en el Modelo

En esta sección se dan estimaciones para las sucesiones construidas en la sección 10. Algunas de estas estimaciones tienen resultados importantes en sí mismas como la convergencia de la sucesión de energías (ver Corolario 11.6) o la Proposición 11.8 que nos garantiza que las proyecciones asociadas al estado base pueden ser descritas por integrales de Riesz. El resto de las estimaciones presentadas en esta sección serán de gran utilidad para mostrar la convergencia de las proyecciones asociadas al estado base en la Sección 13.

### 11.1. Estimaciones sobre las Energías

En la Definición 10.3 construimos las sucesiones de energías asociadas al estado base generadas a partir de tomar distintos valores accesibles para la energía de los fotones, según la Ecuación (3.14), dichas energías coinciden para  $H_n$  y  $\tilde{H}_n$ . Como se muestra en la Proposición 11.5, la sucesión de energías asociadas al estado base es decreciente y la distancia entre sus elementos es cada vez más cercana a cero. Esto nos garantiza que es una sucesión convergente.

**Observación 11.1.** Como resultado del Lema 8.8, tenemos la siguiente estimación que se sigue de un cálculo directo y será de gran utilidad:

$$\begin{aligned} \left\| (\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n)^{-\frac{1}{2}} \right\| &\leq 2 \left( \left\| \tilde{\omega}_n^{-\frac{1}{2}} \tilde{G}_n \right\|_{L^2} + \rho_n^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{G}_n\|_{L^2} \right) \\ &\leq \frac{g}{\sqrt{\pi}} \rho_n^{\frac{1}{2}} + \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \rho_n^{\frac{1}{2}} \\ &\leq g \rho_n^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

De igual manera, se satisfacen la estimaciones

$$\left\| (\sigma_1 \otimes \Phi(G_n^\infty)) (H_{ph}(\omega_n^\infty) + \rho_n)^{-\frac{1}{2}} \right\| \leq g \rho_n^{\frac{1}{2}}, \quad (3.21)$$

$$\|\tilde{G}_n\| \leq g \rho_n, \quad (3.22)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Lema 11.2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se satisface la siguiente desigualdad:

$$H_{n+1} + \rho_n \geq H_n + (1-g) (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n), \quad (3.23)$$

en el sentido de formas cuadráticas (ver Definición 9.1).

*Demostración.* Sea  $\psi \in \mathcal{H}_{n+1}$  un vector de norma uno en  $D(H_{n+1})$ . Por la Observación 10.6, podemos escribir

$$\langle \psi | H_{n+1} \psi \rangle = \langle \psi | H_n \psi \rangle + \langle \psi | H_{ph}(\tilde{\omega}_n) \psi \rangle + \langle \psi | \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \psi \rangle. \quad (3.24)$$

Definimos, temporalmente, un operador  $A$  como

$$A := \mathbb{1} + (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n)^{-\frac{1}{2}} \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Como  $(H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n)^{\frac{1}{2}}$  es un operador auto-adjunto, por el Cálculo Funcional, se satisface la igualdad

$$\begin{aligned} \left\langle (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n)^{\frac{1}{2}} \psi | A (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n)^{\frac{1}{2}} \psi \right\rangle &= \langle \psi | (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n) \psi \rangle \\ &\quad + \langle \psi | \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \psi \rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por otro lado, empleando la Ecuación (2.69), así como la Observación 11.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|A - \mathbb{1}\| &= \left\| (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n)^{-\frac{1}{2}} \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n)^{-\frac{1}{2}} \right\| \\
&\leq \rho_n^{-\frac{1}{2}} \left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n)^{-\frac{1}{2}} \right\| \\
&\leq g.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Si empleamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz llegamos a

$$\begin{aligned}
|\langle \psi, A - \mathbb{1} \psi \rangle| &\leq \|A - \mathbb{1}\| \\
&\leq g.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Además, observamos que  $A - \mathbb{1}$  es auto-adjunto, pues es simétrico y acotado. Entonces,  $\langle \psi, A - \mathbb{1} \psi \rangle$  es un numero real, se sigue que  $-g \leq A - \mathbb{1}$  o dicho de otro modo  $1 - g \leq A$ . Luego, empleando la Ecuación (3.25),

$$(1 - g) \langle \psi | (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n) \psi \rangle \leq \langle \psi | (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n) \psi \rangle + \langle \psi | \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \psi \rangle. \tag{3.28}$$

El resultado se sigue de las ecuaciones (3.24) y (3.28).  $\square$

**Observación 11.3.** Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , el hamiltoniano bosónico cumple

$$H_{ph}(\omega_n^\infty) \geq H_{ph}(\tilde{\omega}_n)$$

en el sentido de formas cuadráticas.

Este resultado es producto de la desigualdad  $\omega_n^\infty \geq \tilde{\omega}_n$  en  $\mathbb{R}^3$ , pues ésta nos asegura que los operadores de multiplicación correspondientes cumplen la misma desigualdad como formas cuadráticas:  $\omega_n^\infty \geq \tilde{\omega}_n$ .

Entonces, usando la notación de la Definición 6.1, tenemos que  $\omega_n^{\infty(i)} \geq \tilde{\omega}_n^{(i)}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}_0$ . En otras palabras, dado  $\psi \in D(H_{ph}(\omega_n^\infty))$ ,

$$\begin{aligned}
\langle \psi^{(i)}, (H_{ph}(\omega_n^\infty) \psi)^{(i)} \rangle &= \langle \psi^{(i)}, \omega_n^{\infty(i)} \psi^{(i)} \rangle \\
&\geq \langle \psi^{(i)}, \tilde{\omega}_n^{(i)} \psi^{(i)} \rangle \\
&= \langle \psi^{(i)}, (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) \psi)^{(i)} \rangle,
\end{aligned}$$

para todo  $i \in \mathbb{N}_0$ .

Tomando la suma sobre  $i \in \mathbb{N}_0$  en ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos que

$$\langle \psi, H_{ph}(\omega_n^\infty) \psi \rangle \geq \langle \psi, H_{ph}(\tilde{\omega}_n) \psi \rangle,$$

de donde se concluye la desigualdad buscada.

**Lema 11.4.** Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se satisface la desigualdad

$$H + \rho_n \geq H_n + (1 - g) (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n), \tag{3.29}$$

en el sentido de formas cuadráticas.

*Demostración.* Escribiendo al hamiltoniano  $H$  como

$$H = H_n + H_{ph}(\omega_n^\infty) + \sigma_1 \otimes \Phi(G_n^\infty), \quad (3.30)$$

y utilizando el mismo argumento usado en el Lema 11.2, cambiando  $\tilde{\omega}_n$  por  $\omega_n^\infty$  y  $\tilde{G}_n$  por  $G_n^\infty$ , llegamos a que

$$H + \rho_n \geq H_n + (1 - g) (H_{ph}(\omega_n^\infty) + \rho_n). \quad (3.31)$$

Entonces, por la Observación 11.3, se sigue el resultado.  $\square$

**Proposición 11.5** (Diferencia de Energías). *Sea  $g < 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se cumple que*

$$|E_{n+1} - E_n| \leq g\rho_n.$$

*Demostración.* Dado un vector  $\varphi \in \mathcal{H}_n$  de norma uno en  $D(H_n)$ , definimos  $\psi = \varphi \otimes \tilde{\Omega}_n \in \mathcal{H}_{n+1}$ . Por el Teorema Espectral tenemos que

$$\langle \psi, H_{n+1} \psi \rangle_{\mathcal{H}_{n+1}} = \int_{\sigma(H_{n+1})} \lambda dE_{\psi, \psi}(\lambda)$$

Como  $E_{\psi, \psi}$  es una medida positiva y  $\lambda \geq E_{n+1} = \inf \sigma(H_{n+1})$ , con  $\lambda \in \sigma(H_{n+1})$ , podemos ocupar la monotonía de la integral para llegar a

$$\begin{aligned} \langle \psi, H_{n+1} \psi \rangle_{\mathcal{H}_{n+1}} &= \int_{\sigma(H_{n+1})} \lambda dE_{\psi, \psi}(\lambda) \\ &\geq \int_{\sigma(H_{n+1})} E_{n+1} dE_{\psi, \psi}(\lambda) \\ &= E_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde, además, usamos que  $E_{\psi, \psi}(\sigma(H_{n+1})) = \mathbb{1}$ .

De la Ecuación (3.32), se sigue que

$$\begin{aligned} E_{n+1} &\leq \langle \psi, H_{n+1} \psi \rangle_{\mathcal{H}_{n+1}} \\ &= \langle \varphi, H_n \varphi \rangle_{\mathcal{H}_n}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde la igualdad es resultado de expresar a  $H_{n+1}$  según la Ecuación (3.13) y posteriormente emplear las Ecuaciones (2.27), (2.29) y (2.31).

Tomando el ínfimo sobre  $\varphi$  en la Ecuación (3.33), obtenemos

$$E_{n+1} \leq E_n. \quad (3.34)$$

Por otro lado, usando el hecho de que  $H_{ph}(\tilde{\omega}_n)$  es un operador positivo (ver Proposición 6.7), tenemos que

$$(1-g)(H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n) \geq (1-g)\rho_n, \quad (3.35)$$

y por el Lema 11.2, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \Psi, H_{n+1} \Psi \rangle_{\mathcal{H}_{n+1}} &\geq \langle \Psi, H_n \Psi \rangle_{\mathcal{H}_n} - g\rho_n \\ &\geq E_n - g\rho_n. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Tomando el ínfimo sobre  $\Psi$  en la Ecuación (3.36), concluimos que

$$E_{n+1} \geq E_n - g\rho_n. \quad (3.37)$$

Finalmente, de las ecuaciones (3.34) y (3.37), se sigue el resultado.  $\square$

Según la Ecuación (3.34),  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  es una sucesión decreciente. Más aún, por la Proposición 11.5  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  es una sucesión de Cauchy, por lo que es convergente.

**Corolario 11.6.** *La sucesión de energías de los estados base,  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , es una sucesión convergente, denotamos su límite como*

$$E'_{gs} := \lim_{n \rightarrow \infty} E_n. \quad (3.38)$$

## 11.2. Estimaciones sobre los Gaps

En la Proposición 11.8 se prueba que  $gap_n \geq \frac{1}{2}\rho_n > 0$ , esto nos asegurará que  $E_n$  está aislado del resto del espectro de  $H_n$ . Dicho de otra manera, cortando la energía de los fotones por debajo de  $\rho_n$  nos garantiza que  $E_n$  es un eigenvalor aislado del resto del espectro de  $H_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Lema 11.7.** *Sea  $g < \frac{1}{4}\gamma$ , con  $\gamma \leq 1$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se satisface la siguiente desigualdad:*

$$gap_{n+1} \geq \min(gap_n, (1-g)\rho_{n+1}) - g\rho_n. \quad (3.39)$$

*Demostración.* Por el Principio máx.-mín. (ver Teorema 2.22), es posible estimar a  $gap_{n+1}$  como

$$gap_{n+1} = \sup_{\Psi \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}} \inf_{\Phi \in V_\Psi} \langle \Phi, (H_{n+1} - E_{n+1}) \Phi \rangle, \quad (3.40)$$

donde, en este caso,  $V_\Psi := \{\Phi \in D(H_{n+1}) \mid \|\Phi\| = 1 \text{ y } \langle \Phi, \Psi \rangle = 0\}$ . Debido al Lema 11.2, si tomamos  $\Phi \in V_\Psi$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \Phi, (H_{n+1} - E_{n+1}) \Phi \rangle &\geq \langle \Phi, (H_n + (1-g)(H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho_n) - \rho_n) \Phi \rangle - E_{n+1} \\ &= \langle \Phi, (H_n - E_n + (1-g)H_{ph}(\tilde{\omega}_n)) \Phi \rangle + E_n - E_{n+1} - g\rho_n, \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde, además, sumamos  $E_n - E_n$ , para obtener la última igualdad.

Definimos, temporalmente,  $Q_n := (H_n - E_n) + (1 - g)H_{ph}(\tilde{\omega}_n)$ . Observamos que  $H_n$  y  $H_{ph}(\tilde{\omega}_n)$  actúan sobre diferentes factores del espacio tensorial  $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_n \otimes \tilde{\mathcal{F}}_n$  (ver ecuaciones (2.6) y (2.14)). Además, notamos que

$$\sigma(H_n - E_n) \subset \{0\} \cup [gap_n, \infty), \quad \sigma(H_{ph}(\tilde{\omega}_n)) \subset \{0\} \cup [\rho_{n+1}, \infty). \quad (3.42)$$

Entonces, por el Teorema 4.8,

$$\sigma(Q_n) \subset \{0\} \cup [\text{mín}(gap_n, (1 - g)\rho_{n+1}), \infty). \quad (3.43)$$

Denotamos por  $gap(Q_n)$  a la distancia entre 0 y el resto del espectro de  $Q_n$ . Por la Ecuación (3.43), obtenemos

$$gap(Q_n) \geq \text{mín}(gap_n, (1 - g)\rho_{n+1}), \quad (3.44)$$

Usando las Ecuaciones (3.40), (3.41) y (3.44), concluimos que

$$\begin{aligned} gap_{n+1} &\geq gap(Q_n) + E_n - E_{n+1} - g\rho_n \\ &\geq \text{mín}(gap_n, (1 - g)\rho_{n+1}) - g\rho_n, \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde, además, usamos que  $E_n - E_{n+1} > 0$  (ver la Ecuación (3.34)).  $\square$

**Proposición 11.8.** *Sea  $g < \frac{1}{4}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se tiene que*

$$gap_n \geq \frac{1}{2}\rho_n, \quad g\tilde{a}\rho_n = \rho_{n+1}. \quad (3.46)$$

*Demostración.* Primero veamos que se satisface la desigualdad  $gap_n \geq \frac{1}{2}\rho_n$ , utilizando inducción matemática y el Lema 11.7:

Como  $G_0 = 0$ , es posible encontrar explícitamente el espectro de  $H_0$ , resultando

$$\sigma(H_0) = \{0\} \cup [\rho_0, \infty), \quad (3.47)$$

con lo que llegamos a  $gap_0 = \rho_0$ , de donde obtenemos  $gap_0 \geq \frac{1}{2}\rho_0$ .

Supongamos, ahora, que el resultado es válido para  $n$ ,

$$gap_n \geq \frac{1}{2}\rho_n. \quad (3.48)$$

Con el objetivo de probar el resultado de la Ecuación (3.48) para  $n + 1$ , conviene utilizar el Lema 11.7 para demostrar únicamente que

$$\text{mín}(gap_n, (1 - g)\rho_{n+1}) - g\rho_n \geq \frac{1}{2}\rho_{n+1}.$$

En caso de que  $\text{mín}(gap_n, (1 - g)\rho_{n+1}) = (1 - g)\rho_{n+1}$ , observando que  $\rho_{n+1} = \gamma\rho_n$  y empleando las hipótesis sobre  $g$  y  $\gamma$ , no es difícil llegar a

$$(1 - g)\rho_{n+1} - g\rho_n \geq \frac{1}{2}\rho_{n+1}.$$

En el otro caso,  $\min(gap_n, (1-g)\rho_{n+1}) = gap_n$ , utilizando adicionalmente la hipótesis de inducción, tenemos

$$gap_n - g\rho_n \geq \frac{1}{2}\rho_{n+1}.$$

Entonces, por el Lema 11.7, llegamos a  $gap_{n+1} \geq \frac{1}{2}\rho_{n+1}$ , es decir, se satisface

$$gap_n \geq \frac{1}{2}\rho_n, \quad (3.49)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Por otro lado, utilizando la expresión (3.11) y las estimaciones en (3.42), es posible escribir

$$g\tilde{a}p_n = \min(gap_n, \rho_{n+1}). \quad (3.50)$$

Más aún, como  $\gamma < \frac{1}{2}$  y  $\rho_{n+1} = \gamma\rho_n$ , se sigue de la Ecuación (3.49) que  $gap_n \geq \rho_{n+1}$ , y por tanto se concluye la segunda desigualdad buscada:

$$g\tilde{a}p_n = \rho_{n+1}. \quad (3.51)$$

□

### 11.3. Estimaciones sobre las Proyecciones

La Proposición 11.8 nos asegura que  $E_n$  es un punto aislado del espectro de  $H_n$ , esto nos permite definir la sucesión de las proyecciones asociadas al estado base,  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ , con integrales de Riesz.

**Definición 11.9** (Sucesión de Proyecciones). *Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos la proyección asociada al estado base como  $P_n := P_{H_n, E_n}$  con un contorno admisible  $\Gamma_n := \Gamma_{H_n, E_n}$  (ver Definición 3.7):*

$$P_n = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{1}{H_n - z} dz, \quad (3.52)$$

donde, por simplicidad, seleccionamos  $\Gamma_n = \partial D(E_n, \frac{1}{8}\rho_n)$  o en otros términos,

$$\Gamma_n := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - E_n| = \frac{1}{8}\rho_n\}. \quad (3.53)$$

Debido a la Proposición 3.9,  $P_n$  resulta ser una proyección ortogonal sobre  $\text{Ker}(H_n - E_n)$ , con  $n \in \mathbb{N}_0$ . Así mismo, es posible definir  $\tilde{P}_n$ , las proyecciones ortogonales que tienen rango igual a  $\text{Ker}(\tilde{H}_n - E_n)$ .

**Definición 11.10.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos la proyección  $\tilde{P}_n$  como  $P_{\tilde{H}_n, E_n}$ , es decir,*

$$\tilde{P}_n := \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{1}{\tilde{H}_n - z} dz. \quad (3.54)$$

donde el contorno  $\Gamma_{n+1}$  está dado por la Expresión (3.53).

**Observación 11.11.** *Notamos que se satisface igualdad,*

$$\left(P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}\right)^\perp = P_n^\perp + P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp, \quad (3.55)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

La prueba de la Ecuación (3.55), se sigue directamente del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n+1}} - P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n} &= P_n^\perp \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{F}}_n} + P_n \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{F}}_n} - P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n} \\ &= P_n^\perp \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{F}}_n} + P_n \otimes \left(\mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{F}}_n} - P_{\tilde{\Omega}_n}\right) \\ &= P_n^\perp \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{F}}_n} + P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp. \end{aligned} \quad (3.56)$$

La observación anterior es útil para comprobar el siguiente resultado, que relaciona a las proyecciones  $P_n$  y  $\tilde{P}_n$ .

**Proposición 11.12.** *Sea  $g < \frac{1}{8}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se cumple que*

$$\tilde{P}_n = P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}. \quad (3.57)$$

*Demostración.* Observamos, por la Ecuación (3.55), que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \left[ \left( \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n+1}} - P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n} \right) + P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n} \right] dz \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{1}{H_n + H_{ph}(\tilde{\omega}_n) - z} \left[ \left( P_n^\perp + P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right) + P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n} \right] dz, \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde utilizamos la Ecuación (3.11) para sustituir el valor de  $\tilde{H}_n$ . Veamos cual es el valor de esta integral calculando cada uno de sus sumandos:

Primero, recordamos que las integrales de Riesz de un operador auto-adjunto son parte de su descomposición espectral (según la Ecuación (1.48)). En este caso, es útil recordar que  $P_n = E(\{E_n\})$  y que  $P_n^\perp = E(\sigma(H_n) \setminus \{E_n\})$ . Para la integral correspondiente al primer sumando de la Ecuación (3.58) obtenemos, mediante el Cálculo Funcional, que

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{1}{H_n + H_{ph}(\tilde{\omega}_n) - z} P_n^\perp dz \\ = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \int_{\sigma(H_{ph}(\tilde{\omega}_n))} \int_{\sigma(H_n) \setminus \{E_n\}} \frac{1}{s+r-z} dE(s) dE(r) dz, \end{aligned} \quad (3.59)$$

Por la Proposición 11.8 y la Ecuación (3.34) se llega a

$$E_{n+1} + \frac{1}{8}\rho_{n+1} < E_n + g\tilde{a}p_n,$$

esto junto a la Ecuación (3.42) nos conduce a que  $s+r \notin D(E_{n+1}, \frac{1}{8}\rho_{n+1})$ , con  $s \in \sigma(H_n) \setminus \{E_n\}$  y  $r \in \sigma(H_{ph}(\tilde{\omega}_n))$ . Entonces, el integrando de la Ecuación (3.59) es una función analítica en el interior de  $\Gamma_{n+1}$ , por el Teorema de Cauchy obtenemos

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{1}{H_n + H_{ph}(\tilde{\omega}_n) - z} P_n^\perp dz = 0. \quad (3.60)$$

Por otro lado, como  $P_{\tilde{\Omega}_n}$  es la proyección al vacío cuántico, cuyo eigenvalor con respecto a  $H_{ph}(\tilde{\omega}_n)$  es cero; tenemos que el cálculo funcional nos permite obtener

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{1}{H_n + H_{ph}(\tilde{\omega}_n) - z} P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp dz = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \int_{\sigma(H_{ph}(\tilde{\omega}_n)) \setminus \{0\}} \frac{1}{E_n + r - z} dE(r) dz. \quad (3.61)$$

Como  $E_n + r \notin D(E_{n+1}, \frac{1}{8}\rho_{n+1})$ , para todo  $r \in [\rho_{n+1}, \infty)$ , se sigue que el integrando de la Ecuación (3.61) es una función analítica en  $D(E_{n+1}, \frac{1}{8}\rho_{n+1})$ , y por el Teorema de Cauchy, tenemos

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{1}{H_n + H_{ph}(\tilde{\omega}_n) - z} P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp dz = 0. \quad (3.62)$$

Para la integral restante tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{1}{H_n + H_{ph}(\tilde{\omega}_n) - z} P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n} dz &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{1}{E_n - z} P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n} dz \\ &= P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n} \end{aligned} \quad (3.63)$$

pues, en este caso, la integral no se anula debido a que  $E_n$  se encuentra en el interior de  $\Gamma_{n+1}$ . Las ecuaciones (3.60), (3.62) y (3.63), implican el resultado.  $\square$

Es claro que cada proyección  $P_n$  actúa sobre  $\mathcal{H}_n$ , con  $n \in \mathbb{N}_0$ . Es posible identificar a cada  $P_n$  con una proyección definida sobre el espacio  $\mathcal{H} (= \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{F}_n^\infty)$ , mediante la aplicación del producto tensorial con la proyección asociada al estado  $\Omega_n^\infty$  de  $\mathcal{F}_n^\infty$ . Definimos

$$P_n^\infty := P_n \otimes P_{\Omega_n^\infty} \quad (3.64)$$

actuando en  $\mathcal{H}$ . Por las Ecuaciones (3.19) y (3.57), se puede escribir

$$P_n^\infty = \tilde{P}_n \otimes P_{\Omega_{n+1}^\infty}, \quad (3.65)$$

donde, además, se emplean las ecuaciones (2.6) y (2.14) para llegar al resultado.

**Proposición 11.13.** *Sea  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Entonces*

$$\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| \leq \frac{16}{\gamma} g, \quad (3.66)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Demostración.* Las Ecuaciones (3.52) y (3.54), junto con la segunda identidad resolvente (ver Proposición 3.4) nos permiten obtener

$$P_{n+1} - \tilde{P}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} \frac{1}{H_{n+1} - z} \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} dz, \quad (3.67)$$

donde, además, usamos la Observación 10.6 para expresar a  $H_{n+1}$  en términos de  $\tilde{H}_n$  y  $\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)$ .

Veamos que es posible hacer una estimación para el integrando de la Ecuación (3.67)

Por un lado, usando la desigualdad (3.20), se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right\| &\leq \left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho)^{-\frac{1}{2}} \right\| \left\| (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right\| \\ &\leq g\rho_n^{\frac{1}{2}} \left\| (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right\|, \end{aligned} \quad (3.68)$$

Por la Ecuación (3.42) y recordando que  $\tilde{H}_n = H_n + H_{ph}(\tilde{\omega}_n)$ , via el Cálculo Funcional, podemos obtener que

$$\left\| (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right\| = \sup_{s \in \sigma(H_n)} \sup_{r \in \{0\} \cup [\rho_{n+1}, \infty)} |(r + \rho_n)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s + r - z}|. \quad (3.69)$$

Para hacer una estimación adecuada de la expresión (3.69), es conveniente realizar los siguientes cálculos:

Sea  $s \in \sigma(H_n)$  y  $z \in \Gamma_{n+1}$ , escribiendo la igualdad

$$|s - z| = |s - E_n + E_n - E_{n+1} + E_{n+1} - z|, \quad (3.70)$$

tenemos dos casos, uno con  $s = E_n$  y el otro con  $s \in \sigma(H_n) \setminus \{E_n\}$ . En ambos casos, empleando la Proposición 11.5 (en este caso  $g\rho_n < \frac{1}{64}\rho_{n+1}$ ), la Ecuación (3.46) y la definición de  $\Gamma_{n+1}$ , obtenemos que

$$|s - z| \geq \frac{1}{16}\rho_{n+1}, \quad (3.71)$$

para todo  $s \in \sigma(H_n)$ .

Ahora, para  $r \in \sigma(H_{ph}(\tilde{\omega}_n))$  podemos dar una estimación de  $|s - z + r|$ . De manera similar tenemos dos casos, uno con  $r = 0$  y el otro con  $r \geq \rho_{n+1}$  (ver Ecuación (3.42)). En ambos casos, la Ecuación (3.71) y la restricción  $\gamma < \frac{1}{2}$  nos conducen a que

$$\begin{aligned} |s - z + r| &\geq \frac{1}{8} \left( \frac{r}{2} + \frac{\rho_{n+1}}{2} \right) \\ &\geq \frac{1}{16} (r + \gamma\rho_n) \\ &\geq \frac{1}{16} \gamma (r + \rho_n), \end{aligned} \quad (3.72)$$

para todo  $s \in \sigma(H_n)$  y para todo  $r \in \{0\} \cup [\rho_{n+1}, \infty)$ .

Usando la Ecuación (3.72) para acotar (3.69), llegamos a

$$\left\| (H_{ph}(\tilde{\omega}_n) + \rho)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right\| \leq \frac{16}{\gamma\rho_n^{1/2}}, \quad (3.73)$$

que junto a la desigualdad (3.68), implican que

$$\left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right\| \leq \frac{16}{\gamma} g. \quad (3.74)$$

Por otro lado, la Ecuación (3.46) implica que para cualquier  $z \in \Gamma_{n+1}$  el punto más cercano en el espectro de  $H_{n+1}$  es  $E_{n+1}$ , este hecho y el Cálculo Funcional nos conducen a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{H_{n+1} - z} \right\| &= \sup_{s \in \sigma(H_{n+1})} \left| \frac{1}{s - z} \right| \\ &\leq \frac{8}{\rho_{n+1}}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Entonces, como resultado de las ecuaciones (3.74) y (3.75), tenemos

$$\left\| \frac{1}{H_{n+1} - z} \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right\| \leq \frac{128g}{\gamma \rho_{n+1}}. \quad (3.76)$$

Finalmente, de las Ecuaciones (3.67) y (3.76), así como la definición de  $\Gamma_{n+1}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{n+1}} \left\| \frac{1}{H_{n+1} - z} \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right\| dz \\ &= \frac{\rho_{n+1}}{8} \frac{128g}{\gamma \rho_{n+1}} \\ &= \frac{16}{\gamma} g. \end{aligned} \quad (3.77)$$

□

**Corolario 11.14.** *Sea  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , el operador  $P_n$  es una proyección ortogonal de rango uno.*

*Demostración.* El resultado se sigue por inducción. Nuestro primer objetivo es mostrar que  $P_0$  es de rango uno, es decir, demostrar que  $H_0 = H_{at} + H_{ph}(\omega_n)$  tiene como valor propio simple a 0, el cual está en el espectro según Ecuación (3.47).

Por la Ecuación (2.27), sabemos que 0 es valor propio de  $H_{ph}(\omega)$  asociado a  $\Omega$ , veamos que es un valor propio simple. Supongamos que no es así, es decir, existe un vector no nulo y distinto de  $\Omega$ ,  $\psi \in D(H_{ph}(\omega))$ , tal que

$$H_{ph}(\omega)\psi = 0. \quad (3.78)$$

Como  $\psi \neq 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\psi^{(n)} \neq 0$  para casi todo punto. Entonces, por la Ecuación (3.78),  $(H_{ph}(\omega)\psi)^{(n)} = 0$  o de manera explícita,

$$\left( \sum_{i=1}^n |k_i| \right) \psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = 0. \quad (3.79)$$

Definimos, temporalmente, al conjunto  $A_\psi := \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^{3n} \mid \psi^{(n)} \neq 0\}$ . Entonces, los elementos de  $A_\psi$  son precisamente los que satisfacen que  $\sum_{i=1}^n |k_i| = 0$ . Esto nos conduce a que  $A_\psi$  es un conjunto de medida cero, entonces  $\psi^{(n)} = 0$  para casi todo punto, lo que representa una contradicción. Concluimos que 0 es un valor propio simple de  $H_{ph}(\omega)$ .

En el procedimiento anterior, es posible reemplazar a  $\omega$  por  $\omega_n$  obteniendo el mismo resultado 0 es valor propio simple de  $H_{ph}(\omega_n)$ . Como suponemos que 0 es un valor propio simple de  $H_{at}$  asociado a  $\alpha \in \mathbb{C}^2$ , se sigue que 0 es un valor propio simple de  $H_0$  asociado a  $\alpha \otimes \Omega$ . Entonces  $P_0$  tiene rango uno.

Ahora, por la Ecuación (3.57), tenemos que  $\tilde{P}_0$  también es de rango uno. Empleando la Proposición 11.13, obtenemos que  $\|P_1 - \tilde{P}_0\| \leq \frac{16}{\gamma}g$ . En particular, como  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , tenemos la siguiente desigualdad de norma entre  $P_1$  y  $\tilde{P}_0$ :

$$\|P_1 - \tilde{P}_0\| < 1.$$

Entonces  $P_1$  y  $\tilde{P}_0$  son unitariamente equivalentes (ver Proposición 2.12), lo que implica que  $P_1$  es de rango uno. Ahora, suponiendo que  $P_n$  es de rango uno, tenemos que  $\tilde{P}_n$  lo es. Utilizando de nueva cuenta la Proposición 11.13, llegamos a

$$\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| < 1,$$

de donde obtenemos que  $P_{n+1}$  es de rango uno.

Concluimos que  $P_n$  es una proyección de rango uno, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Además, como  $H_n$  es un operador auto-adjunto, el Cálculo Funcional nos aseguran que  $P_n$  es una proyección ortogonal.  $\square$

#### 11.4. Estimaciones sobre el Operador de Campo y Resolvente

En esta sección se presentan estimaciones obtenidas a partir de los resultados de la sección pasada. Los resultados sobre el operador de campo y el operador resolvente aquí mostrados serán de utilidad en la sección 13.

**Lema 11.15.** *Sea  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $z \in \Gamma_{n+1}$ , se cumple que*

$$\left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{H_{n+1} - z} \right\| \leq \frac{32}{\gamma}g. \quad (3.80)$$

*Demostración.* Recordando que  $H_{n+1} = \tilde{H}_n + \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)$  (ver Observación 10.6), es posible ocupar la desigualdad (3.74) para obtener el resultado:

Para  $z$  un elemento arbitrario de  $\Gamma_{n+1}$  el operador  $\tilde{H}_n - z$  es invertible, por la Ecuación (3.74), tenemos que

$$\left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right\| < \frac{1}{2}. \quad (3.81)$$

En particular,  $\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z}$  está acotado en norma por uno. Entonces, escribiendo  $H_{n+1} - z = \tilde{H}_n - z - (-\sigma \otimes \Phi(\tilde{G}_n))$ , podemos expresar a  $H_{n+1} - z$  como una serie de Neumann (ver Proposición 3.2) para llegar a la siguiente igualdad:

$$\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{H_{n+1} - z} = \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right)^n. \quad (3.82)$$

Finalmente de las Ecuaciones (3.74), (3.81) y (3.82), se sigue que

$$\begin{aligned} \left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{H_{n+1} - z} \right\| &\leq \left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right\| \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \right)^n \right\| \\ &\leq \frac{16}{\gamma} g \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n \\ &= \frac{32}{\gamma} g. \end{aligned} \quad (3.83)$$

□

Como resultado del lema anterior obtenemos las siguientes estimaciones.

**Proposición 11.16.** *Sea  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Entonces, para cualquier  $z \in D(E_{n+1}, \frac{1}{8}\rho_{n+1})$ , se satisfacen las siguientes desigualdades:*

$$\left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \tilde{P}_n^\perp \right\| \leq \frac{16}{\gamma} g \quad (3.84)$$

y

$$\left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{H_{n+1} - z} P_{n+1}^\perp \right\| \leq \frac{32}{\gamma} g, \quad (3.85)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Demostración.* Como  $\tilde{P}_n$  es la proyección al espacio propio de  $E_n$ , entonces, por la Proposición 3.3,  $\frac{1}{\tilde{H}_n - z} \tilde{P}_n^\perp$  es una función analítica en el interior de  $\Gamma_{n+1}$ . Ya que  $D(E_{n+1}, \frac{1}{8}\rho_{n+1})$  es un dominio acotado, por el Principio del Módulo Máximo, tenemos que el valor máximo de la norma del operador en (3.84) se alcanza en la frontera. En otras palabras, existe  $z_0 \in \Gamma_{n+1}$  tal que para todo  $z \in \overline{D}(E_n, \frac{1}{8}\rho_{n+1})$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z} \tilde{P}_n^\perp \right\| &\leq \left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z_0} \tilde{P}_n^\perp \right\| \\
&\leq \left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z_0} \right\| \left\| \tilde{P}_n^\perp \right\| \\
&\leq \left\| \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) \frac{1}{\tilde{H}_n - z_0} \right\|.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Las Ecuaciones (3.74) y (3.86), implican la primera desigualdad buscada. La desigualdad (3.85) es resultado de un procedimiento similar, ocupando el Lema 11.15.  $\square$

## 12. Subespacios invariantes

De manera similar a las secciones pasadas, el método de escalas múltiples genera una sucesión de operadores de número que es de gran utilidad para mostrar una cantidad conservada en el modelo. En esta sección se prueba la igualdad  $P_n \sigma_1 P_n = 0$ , con  $n \in \mathbb{N}_0$ , que se interpreta como el hecho de que la sucesión de hamiltonianos regulares preserva que  $\sigma_1$  mapea el espacio propio asociado al estado base de  $H_{at}$  en su complemento ortogonal.

Definimos el operador  $N_n = H_{ph}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^3 \setminus B_n})$  en  $\mathcal{F}_n$ , con  $n \in \mathbb{N}_0$ . Entonces, por el Cálculo Funcional, podemos definir sobre el espectro de  $N_n$  (ver Ecuación (2.15)) el operador  $(-1)^{N_n}$ . El Cálculo Funcional nos garantiza que  $(-1)^{N_n}$  es un operador auto-adjunto y nos describe su espectro,  $\sigma((-1)^{N_n}) = \{-1, 1\}$ . Lo anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 12.1** (Operador de Paridad). *Definimos el operador de paridad como el producto tensorial de  $\sigma_3$  y  $(-1)^{N_n}$ , es decir,*

$$S_n := \sigma_3 \otimes (-1)^{N_n}, \tag{3.87}$$

actuando sobre  $\mathcal{H}_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Por el Corolario 4.9, obtenemos que  $S_n$  es un operador auto-adjunto. Más aún, el espectro de  $S_n$  está dado por

$$\sigma(S_n) = \{-1, 1\}. \tag{3.88}$$

**Lema 12.2.** *El operador de paridad y el Hamiltoniano con corte infrarrojo conmutan:*

$$[S_n, H_n] = 0, \tag{3.89}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Demostración.* Primero observamos que  $[\sigma_3, H_{at}] = 0$ , lo cual se sigue de un cálculo directo, con esto se tiene que

$$[S_n, H_{at}] = 0 \tag{3.90}$$

en  $D(H_n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Ahora, sea  $\psi \in \mathcal{F}_n$  dado por  $\psi := \{0, \dots, 0, \psi^{(j)}, 0, \dots\}$ .

Por un lado, ocupando el Cálculo Funcional, tenemos que

$$\begin{aligned} (-1)^{N_n} H_{ph}(\omega_n) \psi &= (-1)^j \sum_{i=1}^j |k_i| \psi^{(j)} \\ &= \sum_{i=1}^j |k_i| (-1)^j \psi^{(j)} \\ &= H_{ph}(\omega_n) (-1)^{N_n} \psi, \end{aligned}$$

de donde se obtiene, por linealidad, que  $[(-1)^{N_n}, H_{ph}(\omega_n)] \psi = 0$ , para todo  $\psi \in D_{\mathcal{S}}$ . Esto implica que

$$[\mathbb{S}_n, H_{ph}(\omega_n)] = 0 \quad (3.91)$$

en  $\mathbb{C}^2 \otimes D_{\mathcal{S}}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ; como  $D_{\mathcal{S}}$  es un dominio esencial para  $H_{ph}(\omega_n)$ , obtenemos que  $\mathbb{S}_n$  y  $H_{ph}(\omega_n)$ , conmutan en  $D(H_n)$ .

Por otro lado, utilizando la Proposición 7.8 y el Cálculo Funcional,  $(-1)^{N_n}$  y  $\Phi(G_n)$  cumplen la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \Phi(G_n) (-1)^{N_n} \psi &= (a(G_n) + a^*(G_n)) (-1)^{N_n} \psi \\ &= (-1)^{N_n+1} a(G_n) \psi + (-1)^{N_n-1} a^*(G_n) \psi \\ &= -(-1)^{N_n} (a(G_n) + a^*(G_n)) \psi \\ &= -(-1)^{N_n} \Phi(G_n) \psi. \end{aligned}$$

Esta igualdad, junto con la relación  $\sigma_3 \sigma_1 = -\sigma_1 \sigma_3$ , implican que

$$\begin{aligned} [\mathbb{S}_n, \sigma_1 \otimes \Phi(G_n)] \psi &= \sigma_3 \sigma_1 \otimes (-1)^{N_n} \Phi(G_n) \psi - \sigma_1 \sigma_3 \otimes \Phi(G_n) (-1)^{N_n} \psi \\ &= \sigma_3 \sigma_1 \otimes (-1)^{N_n} \Phi(G_n) \psi - \sigma_3 \sigma_1 \otimes (-1)^{N_n} \Phi(G_n) \psi \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Por linealidad se sigue de la Ecuación (3.92) que

$$[\mathbb{S}_n, \sigma_1 \otimes \Phi(G_n)] = 0 \quad (3.93)$$

en  $\mathbb{C}^2 \otimes D_{\mathcal{S}}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ ; como  $D_{\mathcal{S}}$  es un dominio esencial para  $\Phi(G_n)$ , obtenemos que  $\mathbb{S}_n$  y  $\sigma_1 \otimes \Phi(G_n)$ , conmutan en  $D(H_n)$ .

Las ecuaciones (3.90), (3.91) y (3.93) nos aseguran que  $[\mathbb{S}_n, H_n] = 0$  en  $D(H_n)$ .  $\square$

**Proposición 12.3.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se satisface que*

$$P_n \sigma_1 P_n = 0, \quad (3.94)$$

donde identificamos  $\sigma_1 \equiv \sigma_1 \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}_n}$ , y de manera semejante,

$$\tilde{P}_n \sigma_1 \tilde{P}_n = 0, \quad (3.95)$$

con  $\sigma_1 \equiv \sigma_1 \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}_{n+1}}$ .

*Demostración.* Como  $S_n$  es un operador auto-adjunto y  $S_n^2 = \mathbb{1}$ , entonces es unitario. Ya que la traza es invariante bajo transformaciones unitarias, obtenemos

$$Tr(S_n P_n \sigma_1 P_n S_n) = Tr(P_n \sigma_1 P_n). \quad (3.96)$$

Por otro lado, empleando el teorema espectral y el Lema 12.2, tenemos que  $S_n$  conmuta con todas las proyecciones de  $H_n$ , en particular tenemos

$$[S_n, P_n] = 0. \quad (3.97)$$

Además, por un cálculo directo observamos que  $S_n \sigma_1 = -\sigma_1 S_n$ , esto junto a la Ecuación (3.97) implican que

$$\begin{aligned} Tr(S_n P_n \sigma_1 P_n S_n) &= -Tr(S_n^2 P_n \sigma_1 P_n) \\ &= -Tr(P_n \sigma_1 P_n). \end{aligned} \quad (3.98)$$

De las ecuaciones (3.96) y (3.98), tenemos que  $Tr(P_n \sigma_1 P_n) = 0$  y como el rango de  $P_n$  es de dimensión uno (ver Corolario 11.14), concluimos que  $P_n \sigma_1 P_n = 0$ . La prueba de la Ecuación (3.95) se sigue del mismo argumento, escribiendo  $\tilde{P}_n$  en vez de  $P_n$  y  $\tilde{H}_n$  en lugar de  $H_n$ .  $\square$

### 13. Convergencia de la Sucesión de Proyecciones del Estado Base

En esta sección se prueba que la sucesión de proyecciones asociadas al estado base converge y su límite es una proyección de rango uno, denotada por  $P_{gs}$  (ver Teorema 13.6). En los teoremas 13.7 y 13.8 se prueba que el rango de  $P_{gs}$  consiste de los vectores propios de  $H$  (que representan al estado base) asociados a la energía  $E_{gs}$ , el ínfimo del espectro de  $H$ .

Para esta sección es conveniente, por simplicidad, introducir notación relacionada al operador resolvente. Denotamos al resolvente de los operadores  $H_n$  y  $\tilde{H}_n$  como

$$R_n(z) := (H_n - z)^{-1} \quad (3.99)$$

y

$$\tilde{R}_n(z) := (\tilde{H}_n - z)^{-1}, \quad (3.100)$$

con  $z \in \rho(H_n)$  y  $z \in \rho(\tilde{H}_n)$ , respectivamente. Si tomamos producto con el complemento de  $P_n$  y  $\tilde{P}_n$ , escribimos

$$R_n(z)^\perp := R_n(z)P_n^\perp \quad (3.101)$$

y

$$\tilde{R}_n(z)^\perp := \tilde{R}_n(z)\tilde{P}_n^\perp. \quad (3.102)$$

Más aún, si  $z = E_n$  identificamos

$$R_n(E_n)^\perp \equiv R_n^\perp \equiv R_n P_n^\perp \quad (3.103)$$

y de igual manera

$$\tilde{R}_n(E_n)^\perp \equiv \tilde{R}_n^\perp \equiv \tilde{R}_n \tilde{P}_n^\perp. \quad (3.104)$$

**Observación 13.1.** *Es útil observar que podemos encontrar cotas adecuadas para las normas de los operadores  $R_n^\perp$  y  $\tilde{R}_n^\perp$ , dadas por*

$$\|R_n^\perp\| \leq \frac{2}{\rho_n}, \quad \|\tilde{R}_n^\perp\| \leq \frac{1}{\rho_{n+1}}. \quad (3.105)$$

*Estas estimaciones se obtienen gracias al Cálculo Funcional y a la Proposición 3.9 del siguiente modo:*

*Para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que*

$$\begin{aligned} \|R_n P_n^\perp\| &= \sup_{s \in \sigma(H_n) \setminus \{E_n\}} \left| \frac{1}{s - E_n} \right| \\ &= \frac{1}{\text{gap}_n} \\ &\leq \frac{2}{\rho_n}, \end{aligned}$$

*donde empleamos la Proposición 11.8, para obtener la última desigualdad. En el caso  $n = 0$ , como  $\text{gap}_n = \rho_0 = \kappa$ , se da la igualdad  $\|R_0^\perp\| = \kappa^{-1}$ . Utilizando el mismo argumento encontramos la segunda desigualdad en la Ecuación (3.105).*

*Con el objetivo de probar que la sucesión de proyecciones asociadas a los estados base converge es necesario presentar una serie de lemas, cada uno de estos lemas consiste en un paso para dar una cota adecuada de  $\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\|$ .*

**Lema 13.2.** *Sea  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Entonces*

$$\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| \leq 4 \|P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n\|, \quad (3.106)$$

*para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .*

*Demostración.* Veamos primero que se satisface la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
P_{n+1} - \tilde{P}_n &= (P_{n+1} - \tilde{P}_n)^2 \left( \tilde{P}_n^\perp - \tilde{P}_n \right) \\
&\quad + \tilde{P}_n \left( \tilde{P}_n^\perp - P_{n+1}^\perp \right) \tilde{P}_n^\perp + \tilde{P}_n^\perp \left( \tilde{P}_n^\perp - P_{n+1}^\perp \right) \tilde{P}_n.
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Denotamos temporalmente por  $T$  al lado derecho de la Ecuación (3.107). Si expandemos  $T$ , empleando que los operadores involucrados son proyecciones ortogonales, obtenemos que

$$T = -\tilde{P}_n P_{n+1} \tilde{P}_n^\perp - \tilde{P}_n P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n^\perp + P_{n+1} \tilde{P}_n^\perp + \tilde{P}_n P_{n+1} \tilde{P}_n - \tilde{P}_n^\perp P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n - \tilde{P}_n, \tag{3.108}$$

donde hemos eliminado los factores triviales y reordenado los sobrantes.

Utilizando la identidad,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_n P_{n+1} \tilde{P}_n^\perp + \tilde{P}_n P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n^\perp &= \tilde{P}_n \left( P_{n+1} + P_{n+1}^\perp \right) \tilde{P}_n^\perp \\
&= \tilde{P}_n \tilde{P}_n^\perp = 0,
\end{aligned} \tag{3.109}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
T &= P_{n+1} \tilde{P}_n^\perp + \tilde{P}_n P_{n+1} \tilde{P}_n - \tilde{P}_n^\perp P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n - \tilde{P}_n \\
&= P_{n+1} \left( \mathbb{1} - \tilde{P}_n \right) + \left( \tilde{P}_n P_{n+1} - \left( \mathbb{1} - \tilde{P}_n \right) \left( \mathbb{1} - P_{n+1} \right) \right) \tilde{P}_n - \tilde{P}_n \\
&= P_{n+1} + \left( -\mathbb{1} + \tilde{P}_n \right) \tilde{P}_n - \tilde{P}_n \\
&= P_{n+1} - \tilde{P}_n.
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Ahora, usando que  $\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| \leq \frac{1}{4}$  (ver la Proposición 11.13) y la Ecuación (3.107), para estimar en norma la diferencia entre  $P_{n+1}$  y  $\tilde{P}_n$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| &\leq \|P_{n+1} - \tilde{P}_n\|^2 \left\| \tilde{P}_n^\perp - \tilde{P}_n \right\| + 2 \left\| \tilde{P}_n^\perp \left( P_{n+1}^\perp - P_{n+1} \right) \tilde{P}_n \right\| \\
&\leq 2 \|P_{n+1} - \tilde{P}_n\|^2 + 2 \left\| \tilde{P}_n^\perp P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n \right\| \\
&\leq \frac{1}{2} \|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| + 2 \left\| P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n \right\|,
\end{aligned} \tag{3.111}$$

de donde se sigue el resultado resolviendo para  $\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\|$ .  $\square$

**Lema 13.3.** *Sea  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se satisface la siguiente desigualdad:*

$$\left\| P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n \right\| \leq 2g\rho_n \left\| R_{n+1}^\perp P_{n+1}^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\|, \tag{3.112}$$

donde hemos identificado  $\sigma_1 \equiv \sigma_1 \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}_n}$ .

*Demostración.* Durante la prueba, con el objetivo de brindar mayor claridad, se escriben explícitamente algunos de los factores triviales en los productos tensoriales involucrados con  $\sigma_1$ .

Por el Cálculo Funcional, sabemos que  $R_{n+1}$  conmuta con  $H_{n+1}$  y por tanto con  $P_{n+1}$ . Entonces, multiplicando y dividiendo a  $P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n$  por  $H_{n+1} - E_{n+1}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n &= R_{n+1}^\perp (H_{n+1} - E_{n+1}) \tilde{P}_n \\ &= R_{n+1}^\perp (\tilde{H}_n + \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) - E_{n+1}) \tilde{P}_n, \end{aligned} \quad (3.113)$$

donde ocupamos la Observación 10.6, para reemplazar el valor de  $H_{n+1}$ .

Como resultado del Teorema 3.9, tenemos que  $\text{Ran}(\tilde{P}_n) = \text{Ker}(\tilde{H}_n - E_n)$ , en otras palabras,

$$(\tilde{H}_n - E_n)\tilde{P}_n = 0. \quad (3.114)$$

Sumando  $E_n - E_{n+1}$  a la Ecuación (3.113) y ocupando la Ecuación (3.114),

$$\begin{aligned} P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n &= R_{n+1}^\perp (\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) + E_n - E_{n+1}) \tilde{P}_n \\ &= R_{n+1}^\perp (\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{P}_n + (E_n - E_{n+1})R_{n+1}^\perp \tilde{P}_n. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Las estimaciones sobre la diferencia entre energías del estado base y los gaps (ver las Proposiciones 11.5 y 11.8), nos permiten dar la siguiente cota, utilizando la Ecuación (3.105):

$$\begin{aligned} \left\| (E_n - E_{n+1})R_{n+1}^\perp P_{n+1}^\perp P_{n+1} \tilde{P}_n \right\| &\leq |E_n - E_{n+1}| \left\| R_{n+1}^\perp \right\| \left\| P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n \right\| \\ &\leq g\rho_n \frac{2}{\rho_{n+1}} \left\| P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n \right\| \\ &\leq \frac{1}{32} \left\| P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n \right\|, \end{aligned} \quad (3.116)$$

donde ocupamos que  $\rho_{n+1} = \gamma\rho_n$  y las hipótesis sobre  $g$  y  $\gamma$ . Entonces de las Ecuaciones (3.115) y (3.116), resolviendo para la norma de  $P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n$ , obtenemos

$$\left\| P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n \right\| \leq 2 \left\| R_{n+1}^\perp (\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{P}_n \right\|. \quad (3.117)$$

Por otro lado, identificando  $P_n \equiv P_n \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{F}}_{n+1}}$ , se sigue de la Proposición 12.3, que  $P_n (\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) P_n = 0$ . Entonces, tenemos

$$(\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) P_n = P_n^\perp (\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) P_n. \quad (3.118)$$

Ocupando las Ecuaciones (2.29) y (2.31), observamos que  $P_{\tilde{\Omega}_n} \Phi(\tilde{G}_n) P_{\tilde{\Omega}_n} = 0$ , de donde

$$\Phi(\tilde{G}_n) P_{\tilde{\Omega}_n} = P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \Phi(\tilde{G}_n) P_{\tilde{\Omega}_n}. \quad (3.119)$$

Utilizando que  $\tilde{P}_n = P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}$  (ver la Ecuación (3.57)), obtenemos de las ecuaciones (3.118) y (3.119) que

$$\begin{aligned}
(\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{P}_n &= (P_n^\perp \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) (\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{P}_n \\
&= (P_n^\perp \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) (\sigma_1 \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{F}_{n+1}}) (\mathbb{1}_{\mathcal{H}_n} \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{P}_n
\end{aligned} \tag{3.120}$$

donde, además, usamos que  $\mathbb{1}_{\mathcal{F}_{n+1}} = \mathbb{1}_{\mathcal{F}_n} \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{F}}_{n+1}}$ .

Ocupando que  $P_n$  es una proyección y las Ecuaciones (3.119) y (3.120), tenemos que

$$(\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{P}_n = (P_n^\perp \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) \sigma_1 (P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) (\mathbb{1}_{\mathcal{H}_n} \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{P}_n, \tag{3.121}$$

donde, ahora, identificamos  $\sigma_1 \equiv \sigma_1 \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{F}}_{n+1}}$ .

Podemos estimar la norma de  $(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_n} \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{P}_n$ , empleando de nuevo las Ecuaciones (2.29) y (2.31) (ver también Observación 11.1):

$$\begin{aligned}
\left\| (\mathbb{1}_{\mathcal{H}_n} \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) (P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) \right\| &= \|P_n\| \left\| \Phi(\tilde{G}_n) P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\| \\
&\leq \left\| (a(\tilde{G}_n) + a^*(\tilde{G}_n)) P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\| \\
&= \|\tilde{G}_n\| \\
&\leq g\rho_n.
\end{aligned} \tag{3.122}$$

Por las ecuaciones (3.121) y (3.122), se llega a

$$\left\| R_{n+1}^\perp (\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{P}_n \right\| \leq g\rho_n \left\| R_{n+1}^\perp (P_n^\perp \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) \sigma_1 (P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) \right\|. \tag{3.123}$$

Por último, notamos que

$$(P_n^\perp \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) \sigma_1 (P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) = P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp, \tag{3.124}$$

con  $\sigma_1 \equiv \sigma_1 \otimes \mathbb{1}_{\tilde{\mathcal{F}}_{n+1}}$  en el lado derecho de la igualdad. Sustituyendo en la Ecuación (3.123) llegamos a

$$\left\| R_{n+1}^\perp (\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{P}_n \right\| \leq g\rho_n \left\| R_{n+1}^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\|. \tag{3.125}$$

Concluimos el resultado de las ecuaciones (3.117) y (3.125).  $\square$

**Lema 13.4.** *Sea  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se cumple que*

$$\begin{aligned}
&\left\| R_{n+1}^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\| \\
&\leq \left( 1 + \left\| P_{n+1} W_n \tilde{R}_n^\perp \right\| + \left\| R_{n+1}^\perp W_n \tilde{P}_n^\perp \right\| \right) \left\| \tilde{R}_n^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\|,
\end{aligned} \tag{3.126}$$

donde hemos identificado a  $W_n \equiv \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) + E_n - E_{n+1}$ .

*Demostración.* Por la fórmula integral de Cauchy es posible escribir

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n^\perp &= \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n+1}} - \tilde{P}_n \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} (E_n - z)^{-1} - (\tilde{H}_n - z)^{-1} dz.\end{aligned}\quad (3.127)$$

Entonces, por la segunda identidad resolvente, tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{P}_n^\perp &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} (E_n - z)^{-1} (\tilde{H}_n - E_n) (\tilde{H}_n - z)^{-1} dz \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1} - E_n} (-z)^{-1} (\tilde{H}_n - E_n) (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} dz,\end{aligned}\quad (3.128)$$

donde hicimos el cambio de variable  $z \rightarrow z - E_n$  para obtener la última igualdad. Si, además, empleamos el Teorema de la Deformación para cambiar el dominio de integración de  $\Gamma_{n+1} - E_n$  a  $\Gamma_{n+1} - E_{n+1}$  (posible gracias a las Proposiciones 11.5 y 11.8), obtenemos

$$\tilde{P}_n^\perp = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1} - E_{n+1}} (-z)^{-1} (\tilde{H}_n - E_n) (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} dz.\quad (3.129)$$

Multiplicando por la izquierda, ambos lados de la Ecuación (3.129), por  $\tilde{R}_n$  resulta en

$$\tilde{R}_n^\perp = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1} - E_{n+1}} -z^{-1} (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} dz.\quad (3.130)$$

Una construcción similar nos conduce a que

$$\begin{aligned}P_{n+1}^\perp &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}} (E_{n+1} - z)^{-1} - (H_{n+1} - z)^{-1} dz \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1} - E_{n+1}} (-z)^{-1} (H_{n+1} - E_{n+1}) (H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} dz,\end{aligned}\quad (3.131)$$

y por tanto,

$$R_{n+1}^\perp = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1} - E_{n+1}} -z^{-1} (H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} dz.\quad (3.132)$$

Utilizando la Observación 10.6 y de nueva cuenta la segunda identidad resolvente, obtenemos, denotando temporalmente  $W_n \equiv \sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n) + E_n - E_{n+1}$ ,

$$R_{n+1}^\perp - \tilde{R}_n^\perp = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1} - E_{n+1}} z^{-1} (H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} W_n (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} dz.\quad (3.133)$$

Usando la Ecuación (3.114) y el Cálculo Funcional asociado a  $\tilde{H}_n - E_n$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}(\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} &= (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} \tilde{P}_n^\perp + (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} \tilde{P}_n \\ &= (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} \tilde{P}_n^\perp - z^{-1} \tilde{P}_n\end{aligned}\quad (3.134)$$

y de manera similar

$$(H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} = (H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} P_{n+1}^\perp - z^{-1} P_{n+1}. \quad (3.135)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.134) y (3.135) en la expresión (3.133) y desarrollando llegamos a

$$\begin{aligned} R_{n+1}^\perp - \tilde{R}_n^\perp &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1} - E_{n+1}} z^{-1} [(H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} P_{n+1}^\perp W_n (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} \tilde{P}_n^\perp] \\ &\quad + z^{-3} [P_{n+1} W_n \tilde{P}_n] - z^{-2} [P_{n+1} W_n (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} \tilde{P}_n^\perp] \\ &\quad - z^{-2} [(H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} P_{n+1}^\perp W_n \tilde{P}_n] dz. \end{aligned} \quad (3.136)$$

La integral correspondiente al segundo sumando en (3.136) se anula, pues  $P_{n+1} W_n \tilde{P}_n$  no depende de  $z$  y  $z^{-3}$  es una función analítica sobre  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Por otro lado, utilizando la Proposición 3.9 como nos llevó a la Ecuación (??) y sus consecuencias, llegamos a que  $(\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} \tilde{P}_n^\perp$  y  $(H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} P_{n+1}^\perp$  son funciones analíticas en el interior de  $\Gamma_{n+1} - E_{n+1}$  (el disco  $D(0, \frac{1}{8}\rho_{n+1})$ ).

Entonces, para el primer sumando de la Ecuación (3.136), por la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1} - E_{n+1}} z^{-1} [(H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} P_{n+1}^\perp W_n (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} \tilde{P}_n^\perp] dz \\ = -[(H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} P_{n+1}^\perp W_n (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} \tilde{P}_n^\perp]_{z=0} \\ = -R_{n+1} P_{n+1}^\perp W_n \tilde{R}_n \tilde{P}_n^\perp. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Además, usando la fórmula integral de Cauchy para derivadas y la Ecuación (1.43), obtenemos para el tercer sumando de la Ecuación (3.136) que

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1} - E_{n+1}} -z^{-2} [P_{n+1} W_n (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} \tilde{P}_n^\perp] dz \\ = \frac{d}{dz} [P_{n+1} W_n (\tilde{H}_n - E_n - z)^{-1} \tilde{P}_n^\perp]_{z=0} \\ = P_{n+1} W_n \tilde{R}_n^2 \tilde{P}_n^\perp, \end{aligned} \quad (3.138)$$

y de manera similar para el último término de suma en la Ecuación (3.136),

$$\begin{aligned}
& \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n+1}-E_{n+1}} -z^{-2} [(H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} P_{n+1}^\perp W_n \tilde{P}_n] dz \\
&= \frac{d}{dz} [(H_{n+1} - E_{n+1} - z)^{-1} P_{n+1}^\perp W_n \tilde{P}_n]_{z=0} \\
&= R_{n+1}^2 P_{n+1}^\perp W_n \tilde{P}_n.
\end{aligned} \tag{3.139}$$

Las ecuaciones (3.136)-(3.139) implican que

$$R_{n+1}^\perp - \tilde{R}_n^\perp = P_{n+1} W_n (\tilde{R}_n^\perp)^2 + (R_{n+1}^\perp)^2 W_n \tilde{P}_n - R_{n+1}^\perp W_n \tilde{R}_n^\perp. \tag{3.140}$$

Sumando  $\tilde{R}_n^\perp$  en la Expresi3n (3.140) para posteriormente multiplicar por la derecha por  $(P_n^\perp \sigma_1 P_n) \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp$ , obtenemos

$$R_{n+1}^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp = \left[ \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n+1}} + P_{n+1} W_n \tilde{R}_n^\perp - R_{n+1}^\perp W_n \tilde{P}_n \right] \tilde{R}_n^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp, \tag{3.141}$$

pues  $\tilde{P}_n (P_n^\perp \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) = 0$ , lo que anula el t3rmino correspondiente a  $(R_{n+1}^\perp)^2 W_n \tilde{P}_n$ . Finalmente, estimando la norma de (3.141), llegamos al resultado.  $\square$

**Lema 13.5.** Sea  $g < \frac{1}{64} \gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , se sigue que

$$\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| \leq 48g\rho_n \|R_n^\perp \sigma_1 P_n\|. \tag{3.142}$$

*Demostraci3n.* Primero, estudiamos por separado los t3rminos que componen al lado derecho de la Ecuaci3n (3.126). Sustituyendo el valor de  $W_n$  en la expresi3n  $P_{n+1} W_n \tilde{R}_n^\perp$ , para posteriormente ocupar las Proposiciones 11.5 y 11.16, y la Observaci3n 13.1, nos permite llegar a

$$\begin{aligned}
\|P_{n+1} W_n \tilde{R}_n^\perp\| &\leq \|(\sigma_1 \otimes \Phi(\tilde{G}_n)) \tilde{R}_n^\perp\| + |E_n - E_{n+1}| \|\tilde{R}_n^\perp\| \\
&\leq \frac{16}{\gamma} g + g\rho_n \frac{1}{\rho_{n+1}} \\
&\leq \frac{16}{\gamma} g + \frac{1}{\gamma} g,
\end{aligned} \tag{3.143}$$

donde ocupamos que  $\rho_{n+1} = \gamma\rho_n$ . De manera similar

$$\|R_{n+1}^\perp W_n \tilde{P}_n^\perp\| \leq \frac{32}{\gamma} g + \frac{2}{\gamma} g. \tag{3.144}$$

Por otro lado, para obtener una cota adecuada para la norma de  $\tilde{R}_n^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp$  utilizamos la identidad,

$$\begin{aligned}
(\tilde{R}_n^{-1} - H_{ph}(\tilde{\omega}_n)) R_n &= (H_n + H_{ph}(\tilde{\omega}_n) - E_n - H_{ph}(\tilde{\omega}_n)) \frac{1}{H_n - E_n} \\
&= \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{n+1}}.
\end{aligned} \tag{3.145}$$

Escribiendo  $\tilde{R}_n^\perp = \tilde{R}_n \tilde{P}_n^\perp$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{R}_n \tilde{P}_n^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\| &= \left\| \tilde{R}_n \left[ (\tilde{R}_n^{-1} - H_{ph}(\tilde{\omega}_n)) R_n \right] \tilde{P}_n^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\| \\ &\leq \left\| R_n \tilde{P}_n^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\| + \left\| \tilde{R}_n H_{ph}(\tilde{\omega}_n) R_n \tilde{P}_n^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\|. \end{aligned} \quad (3.146)$$

La Observación 11.11 y la Ecuación (3.124) nos permiten obtener de la Ecuación (3.146) que

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{R}_n \tilde{P}_n^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\| &\leq \left\| R_n (P_n^\perp \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) \sigma_1 (P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) \right\| \\ &\quad + \left\| \tilde{R}_n H_{ph}(\tilde{\omega}_n) R_n (P_n^\perp \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) \sigma_1 (P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) \right\| \\ &\leq \left\| R_n^\perp \sigma_1 P_n \right\| + \left\| \tilde{R}_n H_{ph}(\tilde{\omega}_n) (P_n^\perp \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp) \right\| \left\| R_n^\perp \sigma_1 P_n \right\|. \end{aligned} \quad (3.147)$$

Por la Proposición 3.9 y la Ecuación (3.42), podemos escribir

$$\sigma \left( (H_n - E_n) P_n^\perp \right) = [gap_n, \infty), \quad \sigma \left( H_{ph}(\tilde{\omega}_n) P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right) = [\rho_{n+1}, \infty). \quad (3.148)$$

Entonces, usando las Ecuaciones (3.147) y (3.148), junto con el Cálculo Funcional, tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{R}_n^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\| &\leq \left( 1 + \left\| (H_n - E_n + H_{ph}(\tilde{\omega}_n))^{-1} H_{ph}(\tilde{\omega}_n) \left[ P_n^\perp \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right] \right\| \right) \left\| R_n^\perp \sigma_1 P_n \right\| \\ &\leq \left( 1 + \sup_{s \in [gap_n, \infty)} \sup_{r \in [\rho_{n+1}, \infty)} |(s+r)^{-1} r| \right) \left\| R_n^\perp \sigma_1 P_n \right\| \\ &\leq 2 \left\| R_n^\perp \sigma_1 P_n \right\|. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Insertando las Ecuaciones (3.143), (3.144) y (3.149) en la expresión (3.126), obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| R_{n+1}^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\| &\leq \left( 1 + (16 + 1 + 32 + 2) \frac{\xi}{\gamma} \right) \left\| \tilde{R}_n^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp \right\| \\ &\leq 6 \left\| R_n^\perp \sigma_1 P_n \right\|. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Concluimos, de los Lemas 13.2 y 13.3, y la Ecuación (3.150), que

$$\begin{aligned}
\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| &\leq 4 \|P_{n+1}^\perp \tilde{P}_n\| \\
&\leq 8g\rho_n \|R_{n+1}^\perp P_n^\perp \sigma_1 P_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_n}^\perp\| \\
&\leq 48g\rho_n \|R_n^\perp \sigma_1 P_n\|.
\end{aligned} \tag{3.151}$$

□

**Teorema 13.6.** *Sea  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{2}$ . Entonces, se cumple la siguiente desigualdad:*

$$\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| \leq 48g(\gamma + 147g)^n. \tag{3.152}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Además, si  $\gamma < \frac{1}{8}$ , tenemos que

$$\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{3.153}$$

y la sucesión de proyecciones  $(P_n^\infty)_{n \in \mathbb{N}_0}$  converge a una proyección de rango uno, denotada por  $P_{gs}$ .

*Demostración.* Observamos que podemos escribir

$$R_n^\perp \sigma_1 P_n = R_n^\perp \sigma_1 \tilde{P}_{n-1} + R_n^\perp \sigma_1 (P_n - \tilde{P}_{n-1}). \tag{3.154}$$

Ahora, utilizando la Ecuación (3.140) con  $n-1$  en vez de  $n$ , se sigue que

$$R_n^\perp \sigma_1 \tilde{P}_{n-1} = \left( \tilde{R}_{n-1}^\perp + P_n W_{n-1} (\tilde{R}_{n-1}^\perp)^2 + (R_n^\perp)^2 W_{n-1} \tilde{P}_{n-1} - R_n^\perp W_{n-1} \tilde{R}_{n-1}^\perp \right) \sigma_1 \tilde{P}_{n-1} \tag{3.155}$$

y recordando que  $\tilde{P}_{n-1} \sigma_1 \tilde{P}_{n-1} = 0$  (ver Lema 12.3), tenemos que el término correspondiente a  $(R_n^\perp)^2 W_{n-1} \tilde{P}_{n-1}$  se anula. Entonces, llegamos a

$$R_n^\perp \sigma_1 \tilde{P}_{n-1} = \left( 1 + P_n W_{n-1} \tilde{R}_{n-1}^\perp - R_n^\perp W_{n-1} \tilde{P}_{n-1}^\perp \right) \tilde{R}_{n-1} \tilde{P}_{n-1}^\perp \sigma_1 \tilde{P}_{n-1}. \tag{3.156}$$

Empleando la igualdad  $\tilde{P}_{n-1}^\perp \sigma_1 \tilde{P}_{n-1} = P_{n-1}^\perp \sigma_1 P_{n-1} \otimes P_{\tilde{\Omega}_{n-1}}^\perp$ , debida a la Observación 11.11 y al Lema 12.3, obtenemos de la Ecuación (3.156),

$$\begin{aligned}
R_n^\perp \sigma_1 \tilde{P}_{n-1} &= \left( 1 + P_n W_{n-1} \tilde{R}_{n-1}^\perp - R_n^\perp W_{n-1} \tilde{P}_{n-1}^\perp \right) \tilde{R}_{n-1} P_{n-1}^\perp \sigma_1 P_{n-1} \otimes P_{\tilde{\Omega}_{n-1}}^\perp \\
&= \left( 1 + P_n W_{n-1} \tilde{R}_{n-1}^\perp - R_n^\perp W_{n-1} \tilde{P}_{n-1}^\perp \right) \\
&\quad \times \left( H_{n-1} + H_{ph}(\tilde{\omega}_{n-1}) - E_{n-1} \right)^{-1} P_{n-1}^\perp \sigma_1 P_{n-1} \otimes P_{\tilde{\Omega}_{n-1}}^\perp.
\end{aligned} \tag{3.157}$$

Entonces, la Ecuación (2.27) y el Cálculo Funcional nos conducen a

$$\begin{aligned}
R_n^\perp \sigma_1 \tilde{P}_{n-1} &= \left(1 + P_n W_{n-1} \tilde{R}_{n-1}^\perp - R_n^\perp W_{n-1} \tilde{P}_{n-1}^\perp\right) \\
&\quad \times (H_{n-1} - E_{n-1})^{-1} P_{n-1}^\perp \sigma_1 P_{n-1} \otimes P_{\tilde{\Omega}_{n-1}} \\
&= \left(1 + P_n W_{n-1} \tilde{R}_{n-1}^\perp - R_n^\perp W_{n-1} \tilde{P}_{n-1}^\perp\right) R_{n-1}^\perp \sigma_1 P_{n-1} \otimes P_{\tilde{\Omega}_{n-1}}.
\end{aligned} \tag{3.158}$$

Por las Ecuaciones (3.143), (3.144) y (3.158), podemos estimar la norma de  $R_n^\perp \sigma_1 \tilde{P}_{n-1}$ , resultando en

$$\left\|R_n^\perp \sigma_1 \tilde{P}_{n-1}\right\| \leq \left(1 + 51 \frac{g}{\gamma}\right) \left\|R_{n-1}^\perp \sigma_1 P_{n-1}\right\|. \tag{3.159}$$

Las Ecuaciones (3.154) y (3.159), implican, junto con la Observación 13.1 y el Lema 13.5, que

$$\begin{aligned}
\left\|R_n^\perp \sigma_1 P_n\right\| &\leq \left\|R_n^\perp \sigma_1 \tilde{P}_{n-1}\right\| + \left\|R_n^\perp \sigma_1\right\| \left\|P_n - \tilde{P}_{n-1}\right\| \\
&\leq \left(1 + 51 \frac{g}{\gamma}\right) \left\|R_{n-1}^\perp \sigma_1 P_{n-1}\right\| + \frac{2}{\rho_n} 48g\rho_{n-1} \left\|R_{n-1}^\perp \sigma_1 P_{n-1}\right\| \\
&= \left(1 + (96 + 51) \frac{g}{\gamma}\right) \left\|R_{n-1}^\perp \sigma_1 P_{n-1}\right\|.
\end{aligned} \tag{3.160}$$

Procediendo de manera inductiva, obtenemos que

$$\left\|R_n^\perp \sigma_1 P_n\right\| \leq \left(1 + 147 \frac{g}{\gamma}\right)^n \left\|R_0^\perp \sigma_1 P_0\right\|. \tag{3.161}$$

Recordando que  $\rho_n = \kappa \gamma^n$  (Definición 10.1) y utilizando de nueva cuenta el Lema 13.5, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\right\| &\leq 48g\rho_n \left(1 + 147 \frac{g}{\gamma}\right)^n \left\|R_0^\perp \sigma_1 P_0\right\| \\
&\leq 48g\kappa(\gamma + 147g)^n \left\|R_0^\perp\right\|.
\end{aligned} \tag{3.162}$$

Ocupando que  $\left\|R_0^\perp\right\| = \kappa^{-1}$  (ver la Observación 13.1), obtenemos que

$$\left\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\right\| \leq 48g(\gamma + 147g)^n. \tag{3.163}$$

Además, si  $\gamma < \frac{1}{8}$ , de la Ecuación (3.152) se sigue directamente la desigualdad (3.153).

Finalmente, recordando las expresiones para  $P_n^\infty$  ( ver ecuaciones (3.64) y (3.65)) y ocupando la Ecuación (3.163) implican que

$$\begin{aligned}
\left\|P_{n+1}^\infty - P_n^\infty\right\| &= \left\|P_{n+1} \otimes P_{\tilde{\Omega}_{n+1}}^\infty - \tilde{P}_n \otimes P_{\tilde{\Omega}_{n+1}}^\infty\right\| \\
&\leq \left\|P_{n+1} - \tilde{P}_n\right\| \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n,
\end{aligned} \tag{3.164}$$

en otras palabras,  $(P_n^\infty)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es una sucesión de Cauchy en el espacio de operadores acotados,  $B(\mathcal{H})$ , que es completo. Entonces, existe  $P_{gs}$  tal que, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  (que depende de  $\varepsilon$ ),

$$\|P_{gs} - P_n^\infty\| < \varepsilon, \quad (3.165)$$

para todo  $n \geq N$ , es decir,

$$P_{gs} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^\infty. \quad (3.166)$$

Por el Corolario 11.14,  $P_n$  es una proyección ortogonal de rango uno, con  $n \in \mathbb{N}_0$ . Entonces,  $P_n^\infty$  también es de rango uno. Escogiendo  $\varepsilon \leq 1$ , de la Ecuación (3.165), tenemos que  $P_{gs}$  y  $P_n^\infty$  son unitariamente equivalentes, según la Proposición 2.12, lo que implica que  $P_{gs}$  es de rango uno.  $\square$

**Teorema 13.7.** *Sea  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{8}$ . Entonces, el rango de  $P_{gs}$  está contenido en  $D(H)$  y*

$$HP_{gs} = E'_{gs}P_{gs}. \quad (3.167)$$

*En otras palabras,  $E'_{gs}$  (ver Corolario 11.6) es un eigenvalor del Hamiltoniano  $H$ .*

*Demostración.* Primero, notamos que de las Ecuaciones (2.27) y (3.64), se sigue que

$$H_{ph}(\omega_n^\infty)P_n^\infty = 0. \quad (3.168)$$

Esto implica, junto con la Ecuación (3.30), que

$$\begin{aligned} HP_n^\infty &= H_n P_n^\infty + \sigma_1 \otimes \Phi(G_n^\infty)P_n^\infty \\ &= E_n P_n^\infty + \sigma_1 \otimes \Phi(G_n^\infty)P_n^\infty, \end{aligned} \quad (3.169)$$

pues, además, la Proposición 11.8 nos asegura que  $E_n$  (el ínfimo del espectro de  $H_n$ ) se encuentra aislado del resto del espectro y por tanto, es un eigenvalor de  $H_n$  (ver Proposición 3.9). Como resultado de las Ecuaciones (3.38) y (3.166), obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n P_n^\infty = E'_{gs}P_{gs}. \quad (3.170)$$

Adicionalmente, recordando que  $a(G_n^\infty)\Omega_n^\infty = 0$  y  $a^*(G_n^\infty)\tilde{\Omega}_n = \{0, G_n^\infty, 0, \dots\}$  (ver las Ecuaciones (2.29) y (2.31)), tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_1 \otimes \Phi(G_n^\infty)P_n^\infty\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n^\infty\| = 0. \quad (3.171)$$

Entonces, ocupando las Ecuaciones (3.170) y (3.171) en la Expresión (3.169), llegamos a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n P_n^\infty = E'_{gs}P_{gs}. \quad (3.172)$$

Ahora, tomamos  $\varphi \in D(H)$  tal que  $\psi := P_{gs}\varphi \neq 0$ , la Ecuación (3.165) implica que podemos encontrar  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|P_{gs}\varphi - P_n^\infty\varphi\| < \varepsilon, \quad (3.173)$$

para todo  $n \geq N$ .

Entonces, para una  $\varepsilon$  suficientemente chica ( $\varepsilon < \|\psi\|$ ),  $\varphi_n := P_n^\infty \varphi \neq 0$ , con  $n \geq N$ .

Por un lado, tenemos que la Ecuación (3.173) nos asegura que

$$\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n, \quad (3.174)$$

y por otro lado, como  $\varphi \in D(H)$ , usando la Ecuación (3.172), obtenemos

$$E'_{gs} \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} H \varphi_n. \quad (3.175)$$

Ya que  $H$  es un operador cerrado, las ecuaciones (3.175) y (3.175) implican que  $\psi \in D(H)$  y que

$$H \psi = E'_{gs} \psi. \quad (3.176)$$

El hecho de que el rango de  $P_{gs}$  se encuentre contenido en el dominio de  $H$  es resultado de que  $P_{gs}$  es de rango uno y la Ecuación (3.176).  $\square$

**Teorema 13.8.** Sea  $g < \frac{1}{64}\gamma$ , con  $\gamma < \frac{1}{8}$ . Entonces,  $E_{gs} := \inf \sigma(H)$ , es un eigenvalor de  $H$ .

*Demostración.* El Teorema 13.7 nos garantiza que  $E'_{gs} := \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  es un eigenvalor de  $H$ , y por tanto,

$$\inf \sigma(H) \leq E'_{gs}. \quad (3.177)$$

Además, el Teorema Espectral junto con el Lema 11.4 implican que

$$\inf \sigma(H) + \rho_n \geq E_n + (1 - g)\rho_n, \quad (3.178)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , donde adicionalmente usamos la Ecuación (3.35). Como  $\rho_n$  converge a cero cuando  $n$  tiende a infinito, obtenemos

$$\inf \sigma(H) \geq E'_{gs}. \quad (3.179)$$

Las Ecuaciones (3.177) y (3.179), implican que  $E'_{gs} = E_{gs}$ , es decir, el ínfimo del espectro de  $H$  es un eigenvalor de  $H$ .  $\square$



## Anexo: Deducción del modelo Spin-Boson

El propósito de este Anexo es dar una deducción del modelo spin-boson, al menos a un nivel “heurístico”. Hasta donde se sabe no hay una derivación rigurosa del modelo spin-boson a partir de un modelo matemático de la teoría NR-QED, por ejemplo, el modelo de Pauli-Fierz) (cfr. [13]). Se advierte al lector que en esta sección sólo se dan una serie de ideas no rigurosas con las que se puede llegar al modelo spin-boson.

Se parte del modelo de la electrodinámica clásica. Utilizando el proceso de la cuantización canónica, las condiciones del problema y ciertas aproximaciones se deriva el Hamiltoniano de spin-boson. Se inicia introduciendo las ecuaciones de Maxwell y la Ecuación de Newton-Lorentz que describen la interacción entre un sistema de partículas cargadas y el campo electromagnético. Después se describen algunos de los aspectos básicos de la teoría como son los potenciales que dan origen a los campos eléctricos y magnéticos así como las transformaciones de norma que satisfacen los potenciales. Para un tratamiento más adecuado de los campos y sus potenciales se realiza una transformada de Fourier para estudiar el problema desde el espacio recíproco. A continuación se introducen las variables normales: funciones de los campos que describen los modos normales de oscilación del campo electromagnético libre. Al invertir las relaciones que guardan las variables normales con los campos y los potenciales (ver las ecuaciones (3.215) y (3.221)) se obtienen expresiones para el potencial magnético, el campo eléctrico y el magnético en términos de estas variables. Con el objetivo de cuantizar las variables normales para obtener los operadores de creación y aniquilación, se introduce el lagrangiano de la electrodinámica clásica (ver Ecuación (3.230)). Al estudiar el lagrangiano en el espacio recíproco se identifican las variables dinámicas del sistema completo, partículas y campo electromagnético, lo que ayuda a construir el Hamiltoniano que describe la dinámica del problema. Al aplicar el proceso de la cuantización canónica al sistema de partículas y a las variables normales, se llega a las expresiones para los campos cuantizados y al Hamiltoniano de Pauli-Fierz, modelo que sirve para describir los sistemas de partículas no relativistas en interacción con el campo electromagnético cuantizado en el marco de la teoría NR-QED. Posteriormente, se realizan aproximaciones al suponer un campo electromagnético poco intenso y que la extensión

espacial del sistema de partículas es menor que la longitud de onda que caracteriza a la radiación. Imponiendo estas condiciones y suponiendo que el sistema de partículas tiene únicamente dos niveles energéticos se llega al Hamiltoniano del modelo spin-boson.

El contenido de este Anexo se basa principalmente en [6] Cap. I-III, [7] Apéndice 1, [22] Cap. 13 y 17, y [13].

### Ecuaciones de Maxwell

Como mencionamos en la introducción, en el marco de la electrodinámica clásica las interacciones de los campos eléctricos y magnéticos con fuentes de carga eléctrica y corrientes de carga eléctrica están descritas por las ecuaciones de Maxwell. Si denotamos por  $E(x, t)$  al campo eléctrico y por  $B(x, t)$  al campo magnético podemos escribir las ecuaciones de Maxwell como

$$\nabla \cdot E(x, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, t), \quad (3.180)$$

$$\nabla \cdot B(x, t) = 0, \quad (3.181)$$

$$\nabla \times E(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} B(x, t), \quad (3.182)$$

$$\nabla \times B(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} E(x, t) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j(x, t), \quad (3.183)$$

donde  $\rho(x, t)$  y  $j(x, t)$  representan a la densidad de carga y de corriente de las partículas, respectivamente. Para cada partícula  $\alpha$  con masa  $m_\alpha$ , carga  $q_\alpha$ , posición  $x_\alpha(t)$  y velocidad  $v_\alpha(t)$ , que se encuentra bajo la influencia de las fuerza eléctrica y magnética ejercida por los campos, su dinámica está dada por la ecuación de Newton-Lorentz:

$$m_\alpha \frac{d^2}{dt^2} x_\alpha(t) = q_\alpha (E(x_\alpha(t), t) + v_\alpha(t) \times B(x_\alpha(t), t)). \quad (3.184)$$

Las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de Newton-Lorentz están acopladas. La evolución de los campos depende de las partículas a través de  $\rho$  y  $j$ , mientras que el movimiento de las partículas depende de los campos  $E$  y  $B$ . Para un instante de tiempo  $t$ , el estado del sistema completo, partículas y el campo, se determina dando los campos  $E$  y  $B$  para todo punto  $x$  del espacio así como la posición  $x_\alpha(t)$  y velocidad  $v_\alpha(t)$  de cada partícula  $\alpha$ :

$$\{x_\alpha(t), v_\alpha(t), E(x, t), B(x, t)\}. \quad (3.185)$$

Cabe destacar que en las ecuaciones de Maxwell  $x$  no es una variable dinámica como lo es  $x_\alpha(t)$ , sino un parámetro continuo etiquetando las variables del campo.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden obtener a partir de un potencial vectorial,  $A(x, t)$  y un potencial escalar,  $V(x, t)$ , como

$$E(x, t) = -\nabla V(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} A(x, t), \quad (3.186)$$

$$B(x, t) = \nabla \times A(x, t). \quad (3.187)$$

Por la naturaleza de las ecuaciones (3.186) y (3.187), los campos  $E$  y  $B$  son invariantes bajo transformaciones de la forma

$$A(x, t) \rightarrow A'(x, t) = A(x, t) + \nabla F(x, t), \quad (3.188)$$

$$U(x, t) \rightarrow U'(x, t) = U(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} F(x, t), \quad (3.189)$$

con  $F(x, t)$  una función suave, estas transformaciones son conocidas como transformaciones de norma. En otras palabras, los mismos campos  $E$  y  $B$  pueden ser obtenidos a partir de distintos potenciales  $A'$  y  $V'$  que están relacionados mediante una transformación de norma con  $A$  y  $V$ . Una manera de reducir la cantidad de potenciales es imponer una condición de norma que determine a  $\nabla \cdot A$  (notar que el valor de  $\nabla \times A$  está determinado por la Ecuación (3.187)). Entre las normas más empleadas se encuentra la que usaremos en lo subsiguiente, la norma de Coulomb que está definida como

$$\nabla \cdot A(x, t) = 0. \quad (3.190)$$

Antes de continuar es oportuno hacer una simplificación en la notación. Escribimos  $\dot{x}_\alpha(t)$  en lugar de  $dx_\alpha(t)/dt$ ,  $\dot{E}(x, t)$  en lugar de  $dE(x, t)/dt$  y de manera similar para los campos, potenciales y variables dinámicas de las partículas.

### Ecuaciones de Maxwell en el Espacio Recíproco

Para profundizar de manera más cómoda en algunas características de los campos es conveniente aplicar la transformada de Fourier (ver Definición 1.6) a las ecuaciones de Maxwell y ocupando sus propiedades (ver Proposición 1.7) es posible escribir

$$ik \cdot \hat{E}(k, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \hat{\rho}(k, t), \quad (3.191)$$

$$ik \cdot \hat{B}(k, t) = 0, \quad (3.192)$$

$$ik \times \hat{E}(k, t) = -\dot{\hat{B}}(k, t), \quad (3.193)$$

$$ik \times \hat{B}(k, t) = \frac{1}{c^2} \dot{\hat{E}}(k, t) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \hat{j}(k, t). \quad (3.194)$$

Así como los campos  $E$  y  $B$  pueden ser obtenidos mediante los potenciales  $A$  y  $V$ , aplicando la transformada de Fourier a las Ecuaciones (3.186) y (3.187), los campos  $\hat{E}$  y  $\hat{B}$  pueden escribirse en función de los campos transformados  $\hat{A}$  y  $\hat{V}$  como

$$\hat{E}(k, t) = -ik\hat{V}(k, t) - \dot{\hat{A}}(k, t), \quad (3.195)$$

$$\hat{B}(k, t) = ik \times \hat{A}(k, t). \quad (3.196)$$

Las transformaciones de norma en el espacio recíproco se obtienen con ayuda de las Ecuaciones (3.188) y (3.189) resultando en

$$\hat{A}(k,t) \rightarrow \hat{A}'(k,t) = \hat{A}(k,t) + ik\hat{F}(k,t), \quad (3.197)$$

$$\hat{V}(k,t) \rightarrow \hat{V}'(k,t) = \hat{V}(k,t) - \hat{F}(k,t). \quad (3.198)$$

En el espacio recíproco se hacen evidentes ciertas características de los campos transformados, por ejemplo, el campo magnético en el espacio recíproco es perpendicular a  $\frac{k}{|k|}$ , según la Ecuación (3.192). Para hacer más clara esta última afirmación escribimos a los campos transformados como suma de sus componentes paralelas y perpendiculares a  $\frac{k}{|k|}$  como  $\hat{E} = \hat{E}_{\parallel} + \hat{E}_{\perp}$  y  $\hat{B} = \hat{B}_{\parallel} + \hat{B}_{\perp}$ . A estas componentes también se les conoce como longitudinales y transversales. Con los resultados mostrados hasta ahora existen dos caminos para obtener información de las componentes de los campos: mediante las ecuaciones de Maxwell en el espacio recíproco y a través de los potenciales en el espacio recíproco. Al compararar estos esquemas obtendremos información sobre las variables dinámicas del sistema.

Por un lado, podemos obtener las componentes transversales y longitudinales mediante las ecuaciones de Maxwell en el espacio recíproco.

Las componentes transversales de los campos se obtienen de las ecuaciones (3.193) y (3.194):

$$\hat{B}_{\perp}(k,t) = -ik \times \hat{E}_{\perp}(k,t), \quad (3.199)$$

$$\hat{E}_{\perp}(k,t) = ic^2 k \times \hat{B}(k,t) - \frac{1}{\epsilon_0} \hat{j}_{\perp}(k,t). \quad (3.200)$$

En cambio, la parte longitudinal de los campos se puede deducir de las ecuaciones (3.191) y (3.192):

$$\hat{E}_{\parallel}(k,t) = -\frac{ik}{\epsilon_0 |k|^2} \hat{\rho}(k,t), \quad (3.201)$$

$$\hat{B}_{\parallel}(k,t) = 0. \quad (3.202)$$

La Ecuación (3.202) expresan que el campo magnético en el espacio recíproco es únicamente transversal  $\hat{B} = \hat{B}_{\perp}$ , esta propiedad se preserva bajo la acción de  $\mathcal{F}^{-1}$ , es decir, en el espacio físico se tiene que  $B = B_{\perp}$ . De igual manera, al aplicar  $\mathcal{F}^{-1}$  a la Ecuación (3.201) notamos que la componente longitudinal del campo eléctrico coincide con el campo de Coulomb asociado a la distribución de carga  $\rho(k,t)$ :

$$E_{\parallel}(x,t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x',t) \nabla_x \frac{1}{|x-x'|} dx'. \quad (3.203)$$

Por otro lado, de las Ecuaciones (3.195) y (3.196) se derivan relaciones de las componentes de los campos con la componentes de los potenciales:

$$\hat{E}_{\perp}(k,t) = -\hat{A}_{\perp}(k,t), \quad (3.204)$$

$$\hat{E}_{\parallel}(k,t) = -\hat{A}_{\parallel}(k,t) - ik\hat{V}(k,t), \quad (3.205)$$

$$\hat{B}_{\perp}(k,t) = ik \times \hat{A}_{\perp}(k,t), \quad (3.206)$$

$$\hat{B}_{\parallel}(k,t) = 0. \quad (3.207)$$

Como en la norma de Coulomb  $\hat{A}_{\parallel} = 0$ , por la Ecuación (3.205) obtenemos

$$E_{\parallel}(x, t) = \nabla V, \quad (3.208)$$

donde ocupamos la transformada de Fourier inversa para pasar a la representación en el espacio físico.

Entonces, al comparar las Ecuaciones (3.203) y (3.208) se llega a que

$$V(x, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x', t) \frac{1}{|x - x'|} dx'. \quad (3.209)$$

Es importante notar que el resultado de la Ecuación (3.209) se obtiene de igual manera a partir de resolver una ecuación de Poisson para  $V$ , la cual se plantea a partir de las ecuaciones de Maxwell en el espacio físico y las Ecuaciones (3.186) y (3.187). La razón para emplear las ecuaciones de Maxwell en el espacio recíproco es que nos dan mayor información sobre las componentes de los campos.

Es importante notar que, según las Ecuaciones (3.197) y (3.198),  $\hat{A}_{\parallel}$  y  $\hat{V}$  sí cambian bajo transformaciones de norma, mientras que  $\hat{A}_{\perp}$  permanece invariante:

$$\hat{A}'_{\perp} = \hat{A}_{\perp}. \quad (3.210)$$

Las ecuaciones (3.201) y (3.202) nos permiten reconsiderar la Expresión (3.185). Como la parte longitudinal de los campos es una función de  $x_{\alpha}(t)$ , el estado del sistema completo en un instante de tiempo  $t$  está descrito por

$$\{x_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t), \hat{E}_{\perp}(k, t), \hat{B}(k, t)\}, \quad (3.211)$$

para todo  $k$  y  $\alpha$ , donde además hemos identificado  $B \equiv B_{\perp}$  para simplificar la notación. Más adelante, cuando abordemos el lagrangiano del sistema completo buscaremos otras variables dinámicas del campo que nos serán de ayuda para llegar al Hamiltoniano del sistema. Antes de esto es importante mencionar el concepto de variables normales.

### Variables Normales

Estudiando la evolución temporal de  $E_{\perp}$  y  $B$  descrita mediante el sistema formado por las ecuaciones (3.199) y (3.200), es posible introducir un par de combinaciones lineales de  $E_{\perp}$  y  $B$  que evolucionan de forma independiente una de la otra, al menos en el caso del campo libre donde  $j_{\perp} = 0$ .

Primero reescribimos las ecuaciones (3.199) y (3.200) como

$$k \times \hat{B}(k, t) = -i|k|^2 \times \hat{E}_{\perp}(k, t), \quad (3.212)$$

$$\hat{E}_{\perp}(k, t) = ikc^2 \times \hat{B}(k, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \hat{j}_{\perp}(k, t). \quad (3.213)$$

Ahora, buscando las soluciones propias del sistema en el caso  $j_{\perp} = 0$  se puede observar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \hat{E}_{\perp}(k, t) \pm c \frac{k}{|k|} \times \hat{B}(k, t) \right) = \pm i \omega(k) \left( \hat{E}_{\perp}(k, t) \pm c \frac{k}{|k|} \times \hat{B}(k, t) \right), \quad (3.214)$$

donde  $\omega(k) = c|k|$ . Entonces, naturalmente se definen dos nuevas variables  $\alpha(k, t)$  y  $\beta(k, t)$ , incluso si  $j_{\perp} \neq 0$ :

$$\alpha(k, t) = \lambda(k) \left( \hat{E}_{\perp}(k, t) - c \frac{k}{|k|} \times \hat{B}(k, t) \right), \quad (3.215)$$

$$\beta(k, t) = \lambda(k) \left( \hat{E}_{\perp}(k, t) + c \frac{k}{|k|} \times \hat{B}(k, t) \right), \quad (3.216)$$

donde  $\lambda(k)$  es un coeficiente de normalización que elegimos como  $\lambda(k) = -i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}}$  (elección que será de utilidad para hacer más simples las relaciones de conmutación entre los operadores correspondientes a  $\alpha$  y  $\bar{\alpha}$ ). Es importante notar que en realidad  $\alpha$  y  $\beta$  no son independientes, como  $E$  y  $B$  toman valores reales, entonces, según la Proposición 1.7 se verifica que

$$\overline{\hat{E}(k, t)} = \hat{E}(-k, t), \quad (3.217)$$

$$\overline{\hat{B}(k, t)} = \hat{B}(-k, t) \quad (3.218)$$

y por tanto

$$\beta(k, t) = -\bar{\alpha}(-k, t). \quad (3.219)$$

Utilizando esto en el sistema formado por las ecuaciones (3.215) y (3.216) se llega a

$$\hat{E}_{\perp}(k, t) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} (\alpha(k, t) - \bar{\alpha}(-k, t)), \quad (3.220)$$

$$\hat{B}(k, t) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 c}} \left( \frac{k}{|k|} \times \alpha(k, t) + \frac{k}{|k|} \times \bar{\alpha}(-k, t) \right). \quad (3.221)$$

Más aún, utilizando la ecuaciones (3.196) y (3.221) es posible obtener una expresión para  $\hat{A}_{\perp}$ :

$$\hat{A}_{\perp}(k, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}} (\alpha(k, t) + \bar{\alpha}(-k, t)). \quad (3.222)$$

Entonces, conocer el valor de  $\alpha(k, t)$  para todo  $k$  es equivalente a conocer a  $\hat{E}_{\perp}(k, t)$  y  $\hat{B}(k, t)$ . Más aún, como  $\alpha(k, t)$  no está sujeta a condiciones como las dadas en la ecuaciones (3.217) o (3.218) es una variable independiente del campo. Se sigue que el estado del sistema completo puede ser descrito por

$$\{x_{\alpha}(t), v_{\alpha}(t), \alpha(k, t)\}, \quad (3.223)$$

Ocupando las Ecuaciones (3.212), (3.213) y (3.215) se puede encontrar la evolución temporal de  $\alpha(k, t)$ :

$$\dot{\alpha}(k, t) + i\omega\alpha(k, t) = \frac{i}{2\varepsilon_0\hbar\omega} \hat{J}_\perp(k, t), \quad (3.224)$$

En el caso del campo libre, donde  $j_\perp = 0$ , las soluciones de (3.224) son osciladores armónicos que son unas independientes de otras, estas soluciones describen los modos normales de oscilación del campo libre, razón por la que  $\alpha(k, t)$  es conocida como variable normal.

Como  $\alpha$  es un campo vectorial transversal al igual que  $\hat{E}_\perp$  y  $\hat{B}$ , para cada valor de  $\frac{k}{|k|}$  se pueden introducir dos vectores unitarios  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$  perpendiculares entre si y ambos ortogonales a  $\frac{k}{|k|}$  tales que  $\alpha(k, t)$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \alpha(k, t) &= (\varepsilon \cdot \alpha(k, t))\varepsilon + (\varepsilon' \cdot \alpha(k, t))\varepsilon' \\ &= \sum_{\varepsilon} \alpha_{\varepsilon}(k, t)\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.225)$$

donde  $\alpha_{\varepsilon}(k, t) = \varepsilon \cdot \alpha(k, t)$ . Las componentes de  $\alpha(k, t)$  satisfacen una ecuación de evolución similar a (3.224) que se obtiene de tomar el producto interior de ésta con  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$ , respectivamente.

Las componentes transversales de los campos en el espacio físico  $E_\perp$  y  $B$  así como la componente  $A_\perp$  del potencial vectorial se pueden expresar en términos de  $\alpha$  y  $\bar{\alpha}$  aplicando la transformada de Fourier inversa a las ecuaciones (3.220)-(3.222) (cambiando  $-k$  por  $k$  en los últimos términos las integrales resultantes) se llega a

$$E_\perp(x, t) = \sum_{\varepsilon} \int i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2(2\pi)^3\varepsilon_0}} \left( \varepsilon e^{ik \cdot x} \alpha_{\varepsilon}(k, t) - \varepsilon e^{-ik \cdot x} \bar{\alpha}_{\varepsilon}(k, t) \right) dk, \quad (3.226)$$

$$B(x, t) = \sum_{\varepsilon} \int i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2(2\pi)^3\varepsilon_0 c}} \left( \frac{k}{|k|} \times \varepsilon e^{ik \cdot x} \alpha_{\varepsilon}(k, t) - \frac{k}{|k|} \times \varepsilon e^{-ik \cdot x} \bar{\alpha}_{\varepsilon}(k, t) \right) dk, \quad (3.227)$$

$$A_\perp(x, t) = \sum_{\varepsilon} \int \sqrt{\frac{\hbar}{2(2\pi)^3\varepsilon_0\omega}} \left( \varepsilon e^{ik \cdot x} \alpha_{\varepsilon}(k, t) + \varepsilon e^{-ik \cdot x} \bar{\alpha}_{\varepsilon}(k, t) \right) dk. \quad (3.228)$$

### Lagrangiano y Hamiltoniano de la Electrodinámica Clásica en la norma de Coulomb

El lagrangiano del sistema completo, partículas interactuando con el campo electromagnético, está dado en términos de las variables dinámicas relativas a cada subsistema. Las variables dinámicas del sistema de partículas forman un conjunto discreto conformado por la posición  $x_\alpha$  y la velocidad  $\dot{x}_\alpha$  de cada partícula  $\alpha$ . Para el campo electromagnético empleamos los potenciales como coordenadas generalizadas en el formalismo Lagrangiano. En cada punto  $x$ , las variables dinámicas del campo son:

$$\{A(x, t), V(x, t), \dot{A}(x, t), \dot{V}(x, t)\}. \quad (3.229)$$

La dinámica del sistema de las partículas interactuando con el campo se pueden derivar del siguiente lagrangiano:

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} + \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2(x) - c^2 B^2(x) + j(x) \cdot A(x) - \rho(x) \cdot V(x) dx. \quad (3.230)$$

Es importante mencionar que este lagrangiano efectivamente describe la dinámica del sistema, pues utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange se derivan las ecuaciones de Maxwell (3.180)-(3.183) y la ecuación de Newton-Lorentz (3.184) (ver sección B2, Capítulo II de [6] o sección 13.1 de [22]).

Al igual que el estudio de las ecuaciones de Maxwell en el espacio recíproco, estudiar el lagrangiano (3.230) en el espacio recíproco nos dará más información sobre el sistema. En particular, trabajar en el espacio recíproco nos permitirá identificar si hay variables “redundantes” describiendo la dinámica.

Ocupando la identidad de Parseval (ver Ecuación (1.11)) se puede escribir la Ecuación (3.230) como

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} + \frac{\epsilon_0}{2} \int |\hat{E}(k)|^2 - c^2 |\hat{B}(k)|^2 + \hat{j}(k) \cdot \hat{A}(k) - \bar{\rho}(k) \cdot \hat{V}(k) dk. \quad (3.231)$$

Antes de continuar es importante recordar que la transformada de Fourier convierte las cantidades reales en complejas, entonces las nuevas variables tienen el doble de grados de libertad que las anteriores. Para enfrentar este hecho utilizamos que los potenciales y los campos en el espacio físico son reales. Para los potenciales en el espacio recíproco se satisface que

$$\hat{A}(k) = \bar{\hat{A}}(-k), \quad (3.232)$$

$$\hat{V}(k) = \bar{\hat{V}}(-k). \quad (3.233)$$

Esto nos dice que si se conoce el valor de los potenciales en una mitad del espacio recíproco se puede saber su valor en todo el espacio. Además, ocupando que los campos así como las fuentes de carga y de corriente también son reales se llega a expresiones del siguiente tipo:

$$\hat{E}(-k) \bar{\hat{E}}(-k) = \bar{\hat{E}}(k) \hat{E}(k), \quad (3.234)$$

$$\bar{\hat{j}}(-k) \hat{A}(-k) = \hat{j}(k) \bar{\hat{A}}(k). \quad (3.235)$$

Las ecuaciones (3.232)-(3.235) y las correspondientes para los términos que involucran a  $\hat{B}(k)$ ,  $\hat{\rho}$  y  $\hat{V}$  nos permiten obtener

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} + \epsilon_0 \int_{+} |\hat{E}(k)|^2 - c^2 |\hat{B}(k)|^2 + \bar{\hat{j}}(k) \cdot \hat{A}(k) + \hat{j}(k) \cdot \bar{\hat{A}}(k) - \bar{\hat{\rho}}(k) \cdot \hat{V}(k) - \hat{\rho}(k) \cdot \bar{\hat{V}}(k) dk, \quad (3.236)$$

donde el subíndice + en la integral hace referencia a que la integral se evalúa sólo en la mitad del espacio recíproco. Expresando a los campos  $\hat{E}$  y  $\hat{B}$  en términos de los potenciales (ver ecuaciones (3.195) y (3.196)) se llega a

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} + \varepsilon_0 \int_{+} |\hat{A}(k) + ik\hat{V}(k)|^2 - c^2 |k \times \hat{A}(k)|^2 + \bar{\hat{j}}(k) \cdot \hat{A}(k) + \hat{j}(k) \cdot \bar{\hat{A}}(k) - \bar{\hat{\rho}}(k) \cdot \hat{V}(k) - \hat{\rho}(k) \cdot \bar{\hat{V}}(k) dk. \quad (3.237)$$

En la Ecuación (3.237) las variables dinámicas del campo electromagnético están representadas por los potenciales y sus derivadas temporales, dando un total de ocho variables dinámicas (tres para el potencial vectorial  $\hat{A}$ , tres para su derivada  $\dot{\hat{A}}$ , dos en total para  $\hat{V}$  y  $\dot{\hat{V}}$ ). En cambio, según la Ecuación (3.211), para describir al campo electromagnético se necesitan sólo cuatro variables dinámicas (dos para el campo transversal  $\hat{E}_{\perp}$  y dos para  $\hat{B}$ ). Al describir al campo electromagnético con los potenciales se han introducido variables dinámicas de sobra, lo que nos dice que deben existir constricciones entre estas variables. Es útil recordar que en la norma de Coulomb, la componente longitudinal de  $A$  es cero mientras que el potencial escalar  $V$  coincide con el potencial de Coulomb asociado a la distribución de carga  $\rho(x, t)$  en el mismo valor de  $t$ . Si en la Ecuación (3.237) expresamos a  $\hat{V}$  en términos de las otras variables dinámicas del campo y sustituimos el valor de la componente transversal del potencial vectorial,  $\hat{A}_{\parallel} = 0$ , es posible llegar a la siguiente forma del lagrangiano:

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} - \int_{+} \frac{|\hat{\rho}(k)|^2}{\varepsilon_0 k^2} dk + \int_{+} \varepsilon_0 \left( \bar{\hat{A}}(k) \cdot \dot{\hat{A}}(k) - c^2 k^2 \bar{\hat{A}}(k) \cdot \hat{A}(k) \right) + \bar{\hat{j}}(k) \cdot \hat{A}(k) + \hat{j}(k) \cdot \bar{\hat{A}}(k) dk. \quad (3.238)$$

En la norma de Coulomb las variables independientes del campo son la componente transversal del potencial,  $\hat{A}_{\perp}(k, t)$ , y su derivada temporal,  $\dot{\hat{A}}_{\perp}(k, t) = -\hat{E}_{\perp}(k, t)$ . Si identificamos a  $\hat{A}_{\perp}$  con  $\hat{A}$  y aplicamos la transformada de Fourier del espacio recíproco al espacio físico (y utilimos sus propiedades, ver Proposición 1.7) se llega a la siguiente forma del lagrangiano de la electrodinámica clásica en la norma de Coulomb:

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} - V(x) + \frac{\varepsilon_0}{2} \int \dot{A}^2(x) - c^2 (\nabla \times A(x))^2 + j(x) \cdot A(x) dx. \quad (3.239)$$

Para obtener el Hamiltoniano que describe el sistema completo resta introducir el momento canónico conjugado de  $x_{\alpha}$ ,

$$p_{\alpha} = m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} + q_{\alpha} A(x_{\alpha}). \quad (3.240)$$

Además del momento canónico conjugado al potencial vectorial,  $\Pi(x) = \epsilon_0 \hat{A}$ . Haciendo la transformada de Legendre que lleva del formalismo lagrangiano al formalismo hamiltoniano se obtiene

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} (p_{\alpha} - q_{\alpha} A(x_{\alpha}))^2 + V(x) + \frac{\epsilon_0}{2} \int E_{\perp}^2(x) - c^2 (\nabla \times A(x))^2 dx. \quad (3.241)$$

### Hamiltoniano de Pauli-Fierz (sin spin)

Para continuar es necesario introducir los operadores relacionados al sistema de partículas y al campo electromagnético. El proceso de cuantización canónica identifica a las variables dinámicas con operadores que satisfacen ciertas reglas de conmutación.

En la teoría cuántica, las variables dinámicas que describen a las partículas se transforman en observables que satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[r_{\alpha i}, p_{\beta j}] = i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}. \quad (3.242)$$

En cuanto a los observables relacionados a las variables  $\hat{A}$  y  $\hat{A}$  se cumplen las reglas de conmutación dadas por

$$[\hat{A}_{\epsilon}(k), \hat{A}_{\epsilon'}(k')] = i\hbar \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta(k - k'). \quad (3.243)$$

Los operadores  $a_{\epsilon}$  y  $a_{\epsilon}^{\dagger}$  asociados con las variables normales  $\alpha_{\epsilon}$  y  $\bar{\alpha}_{\epsilon}$  se expresa en términos de los operadores  $\hat{A}_{\epsilon}(k)$  y  $\hat{A}_{\epsilon}$  de manera análoga a la Ecuación (3.215):

$$a_{\epsilon}(k) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} \left( \omega \hat{A}_{\epsilon}(k) + i \hat{A}_{\epsilon'}(k) \right), \quad (3.244)$$

$$a_{\epsilon}^{\dagger}(k) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} \left( \omega \hat{A}_{\epsilon}(-k) + i \hat{A}_{\epsilon'}(-k) \right). \quad (3.245)$$

Entonces la relación dada por la Ecuación (3.243) implica que los operadores  $a_{\epsilon}$  y  $a_{\epsilon}^{\dagger}$  satisfacen las siguiente reglas de conmutación:

$$[a_{\epsilon}(k), a_{\epsilon'}(k')] = 0, \quad (3.246)$$

$$[a_{\epsilon}^{\dagger}(k), a_{\epsilon'}^{\dagger}(k')] = 0, \quad (3.247)$$

$$[a_{\epsilon}(k), a_{\epsilon'}^{\dagger}(k')] = \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta(k - k'). \quad (3.248)$$

Estas reglas de conmutación (muy semejantes a las de un oscilador armónico) muestran que los operadores  $a_{\epsilon}$  y  $a_{\epsilon}^{\dagger}$  son los operadores de aniquilación y creación para un oscilador armónico asociado al modo  $k\epsilon$  (cfr. [6]).

Cambiando las variables dinámicas por operadores que las representan en las ecuaciones (3.226)-(3.228) se llega a las siguientes expresiones para los campos cuantizados

$$E_{\perp}(x) = \sum_{\varepsilon} \int i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2(2\pi)^3\varepsilon_0}} \left( \varepsilon e^{ik \cdot x} a_{\varepsilon}(k) - \varepsilon e^{-ik \cdot x} a_{\varepsilon}^{\dagger}(k) \right) dk, \quad (3.249)$$

$$B(x) = \sum_{\varepsilon} \int i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2(2\pi)^3\varepsilon_0 c}} \left( \frac{k}{|k|} \times \varepsilon e^{ik \cdot x} a_{\varepsilon}(k) - \frac{k}{|k|} \times \varepsilon e^{-ik \cdot x} a_{\varepsilon}^{\dagger}(k) \right) dk, \quad (3.250)$$

$$A(x) = \sum_{\varepsilon} \int \sqrt{\frac{\hbar}{2(2\pi)^3\varepsilon_0\omega}} \left( \varepsilon e^{ik \cdot x} a_{\varepsilon}(k) + \varepsilon e^{-ik \cdot x} a_{\varepsilon}^{\dagger}(k, t) \right) dk. \quad (3.251)$$

Sustituyendo los operadores que representan a las variables dinámicas en la Ecuación (3.241) obtenemos el hamiltoniano de Pauli-Fierz (sin spin):

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} (p_{\alpha} - q_{\alpha} A(x_{\alpha}))^2 + V(x) + \sum_{\varepsilon} \int \hbar\omega(k) a_{\varepsilon}^{\dagger}(k) a_{\varepsilon}(k) dk. \quad (3.252)$$

Es importante mencionar que en la Ecuación (3.252) se ha tomado la energía del campo electromagnético respecto a la energía del vacío cuántico.

Ahora, asumimos que las partículas están cerca del origen formando un sistema cuya extensión espacial es pequeña respecto a la distancia que caracteriza la variación espacial del potencial  $A$ , por ejemplo, un átomo o una molécula (donde las dimensiones no exceden unos cuantos radios de Bohr) en interacción con radiación de longitud de onda larga en este caso mayor que la longitud de onda característica de la radiación ultravioleta (cfr. [7]). Bajo estas circunstancias, se puede expandir  $A(x)$  en potencias de  $x_{\alpha}$ . La aproximación de longitud de onda larga consiste en tomar solamente el primer término de esta expansión, es decir, aproximar el valor del potencial en la posición de las partículas por su valor en el origen:  $A(x) \approx A(0)$ .

Entonces, supongamos que estudiamos un átomo con un núcleo muy pesado que se encuentra en el origen del sistema coordenado y buscamos describir el movimiento de un electrón (sin spin) con el modelo de Paul-Fierz. Según la Ecuación (3.252), el hamiltoniano del problema bajo la aproximación de longitud de onda larga es

$$H = \frac{1}{2m} (p - eA(0))^2 + V(x) + H_{ph} \quad (3.253)$$

donde  $e$  es la carga del electrón y

$$H_{ph} = \sum_{\varepsilon} \int \hbar\omega(k) a_{\varepsilon}^{\dagger}(k) a_{\varepsilon}(k) dk. \quad (3.254)$$

El hamiltoniano de la Ecuación (3.253) se puede reescribir como

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + V(x) + H_{ph} - \frac{e}{m} p \cdot A(0) + \frac{e^2}{2m} A(0)^2. \quad (3.255)$$

En caso de que la intensidad de la radiación sea baja el término asociado a  $A(0)^2$  puede ser descartado (cfr. [7]). En la Ecuación (3.255) identificamos el operador de Schrödinger que describe a la materia,  $H_{at} = \frac{1}{2m} p^2 + V(x)$ . Supongamos que el estado de la materia puede ser descrito en términos de  $N$  estados propios de  $H_{at}$  denotados por  $\psi_1, \dots, \psi_N$  asociados a las energías  $e_1, \dots, e_N$ , respectivamente. Entonces, es posible llegar a la siguiente expresión del hamiltoniano:

$$H = H_{at} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{ph} - Q \cdot A(0), \quad (3.256)$$

donde  $H_{at}$  y  $Q$  son matrices simétricas de tamaño  $N \times N$ . En esta representación  $H_{at}$  es una matriz diagonal con los valores de las energías propias en la diagonal. Por otro lado, es posible escribir a  $Q$  de forma proporcional al momento dipolar:

Utilizando que  $p = \frac{im}{\hbar} [H_{at}, x]$  y  $H_{at} \psi_i = e_i \psi_i$ , con  $i \in \{1, \dots, N\}$ , los elementos de matriz de  $Q$  se pueden escribir como

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &= \langle \psi_i, p \psi_j \rangle \\ &= \frac{im}{\hbar} (e_i - e_j) \langle \psi_i, x \psi_j \rangle. \end{aligned} \quad (3.257)$$

El operador de momento dipolar se expresa en términos del operador de posición como  $D = -ex$ , lo que nos permite escribir los elementos de matriz de la matriz  $Q$  en términos de  $D$ :

$$Q_{i,j} = \frac{im}{e\hbar} (e_j - e_i) \langle \psi_i, D \psi_j \rangle. \quad (3.258)$$

Si  $N = 2$  hay solamente dos estados a los cuales denotamos por  $\psi_0$  y  $\psi_1$  con energías propias  $e_0$  y  $e_1$  que cumplen  $e_0 < e_1$  podemos escribir

$$H_{at} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_0 \end{pmatrix}, \quad (3.259)$$

Además, suponiendo que  $\psi_0$  y  $\psi_1$  son estados circulares de Rydberg, tenemos que el operador dipolar no tiene diagonal en la base  $\{\psi_0, \psi_1\}$ , es decir,

$$\langle \psi_0, D \psi_0 \rangle = 0, \quad \langle \psi_1, D \psi_1 \rangle = 0. \quad (3.260)$$

Si  $d = \langle \psi_0, D \psi_1 \rangle$  entonces podemos escribir a  $Q$  en respecto a la base  $\{\psi_0, \psi_1\}$  como

$$Q = \frac{m(e_1 - e_0)}{e\hbar} \begin{pmatrix} 0 & id \\ -i\bar{d} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.261)$$

Finalmente, omitiendo el caracter vectorial del potencial  $A(0)$  podemos escribir

$$A(0) = \int G' (a(k) + a^\dagger(k, t)) dk, \quad (3.262)$$

donde  $G' = \sqrt{\hbar/2(2\pi)^3 \epsilon_0 \omega}$ . Entonces, según la Proposición 9.3 podemos reescribir al hamiltoniano de la Ecuación (3.256) como

$$H = H_{at} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{ph} - Q \otimes (a(G') + a^\dagger(G')), \quad (3.263)$$

con  $H_{at}$  y  $Q$  dados por las ecuaciones (3.259) y (3.261), respectivamente. El hamiltoniano del modelo spin-boson como lo presentamos en esta tesis surge de la Ecuación (3.263) mediante la simplificación de la interacción entre la materia y el campo. Se sustituye  $Q$  por  $\sigma_1$ .

## Referencias

1. Ahlfors, L. V. (1979). *Complex analysis*. International series in pure and applied mathematics, McGraw Hill.
2. Bach, V., Ballesteros, M., Könenberg, M., & Menrath, L. (2017). *Existence of Ground State Eigenvalues for the Spin-Boson Model with Critical Infrared Divergence and Multiscale Analysis*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 453(2), 773-797.
3. Bach, V., Ballesteros, M., & Pizzo, A. (2017). *Existence and Construction of Resonances for Atoms Coupled to the Quantized Radiation Field*. *Advances in Mathematics*, 314, 540-572.
4. Bach, V., Fröhlich, J., & Sigal, I. M. (1998). *Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles*. *Advances in Mathematics*, 137(2), 299-395.
5. Bratteli, O., & Robinson, D. W. (1996). *Operator algebras and quantum statistical mechanics. Volume 2: Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics*. 2nd ed., Springer.
6. Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J., & Grynberg, G. (1997). *Photons and Atoms-Introduction to Quantum Electrodynamics*. Wiley-VCH.
7. Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J., & Grynberg, G. (1998). *Atom-photon interactions: basic processes and applications*. Wiley-VCH.
8. Deckert, D. A. (2010). *Electrodynamic absorber theory: a mathematical study*. Der Andere Verlag.
9. Dereziński, J., & Gérard, C. (1999). *Asymptotic completeness in quantum field theory: Massive Pauli-Fierz Hamiltonians*. *Reviews in Mathematical Physics*, 11(4), 383-450.
10. Dereziński, J. (2006). *Introduction to representations of the canonical commutation and anticommutation relations*. Springer, Berlin, Heidelberg. In *Large Coulomb Systems*, 63-143.
11. Hasler, D., & Herbst, I. (2011). *Ground states in the spin boson model*. *Annales Henri Poincaré*, 12(4), 621-677.
12. Hislop, P., Sigal, I. (1995). *Introduction to Spectral Theory: With Applications to Schrödinger Operators*. Applied Mathematical Sciences, Volume 113, Springer.
13. Boscain, U., Mason, P., Panati, G., & Sigalotti, M. (2015). *On the control of spin-boson systems*. *Journal of Mathematical Physics*, 56(9), 092101
14. Pizzo, A. (2003). *One-particle (improper) states in Nelson's massless model*. *Annales Henri Poincaré*, 4(3), 439-486.
15. Pizzo, A. (2005). *Scattering of an infraparticle: The one particle sector in Nelson's massless model*. *Annales Henri Poincaré*, 6(3), 553-606.
16. Reed, M., & Simon, B. (1980). *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis*, volume 1, Revised and Enlarged ed., Academic Press.
17. Reed, M., & Simon, B. (1975). *Methods of Modern Mathematical Physics: Fourier Analysis, Self-adjointness*, volume 2, 1st ed., Academic Press.
18. Reed, M., & Simon, B. (1978). *Methods of Modern Mathematical Physics: Analysis of Operators*. Volume 4, 1st ed., Academic Press.
19. Rudin, W. (1973). *Functional Analysis*. 3rd ed., McGraw Hill.

20. Rudin, W. (1976). *Real and Complex Analysis*. 3rd ed., McGraw Hill.
21. Sigal, I. M.(2011) *Renormalization group and problem of radiation*. arXiv preprint arXiv:1110.3841.
22. Spohn, H. (2004). *Dynamics of charged particles and their radiation field*.. Cambridge university press.  
Dynamics of charged particles and their radiation field. Cambridge university press.
23. Stoof, H., Gubbels, K., & Dickerscheid, D. (2009) *Ultracold Quantum Fields*, Springer.
24. Teschl, G. (2010). *Mathematical Methods in Quantum Mechanics with Applications to Schrödinger Operators*. Graduate Studies in Mathematics, Volume 157, 2nd ed., American Mathematical Society.