



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUMA DE PROCESOS POISSON NO
INDEPENDIENTES CON EFECTOS DE SHOCKS
Y APLICACIONES EN SEGUROS Y RIESGO
CREDITICIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Carlos Emilio Olmos Romero

TUTORA:

Dra. María Asunción Begoña Fernández Fernández



Ciudad de México, 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Olmos
Romero
Carlos Emilio
55 74 41 05 37
Universidad Nacional Autónoma de México
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
310274140

2. Datos del tutor
Dra.
María Asunción Begoña
Fernández
Fernández

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Ana
Meda
Guardiola

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Fernando
Baltazar
Larios

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Luis Antonio
Rincón
Solís

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Arrigo
Coen
Coria

7. Datos del trabajo escrito
Suma de Procesos Poisson no Independientes con Efectos de Shocks y Aplicaciones en Seguros y Riesgo Crediticio
144 p
2018

*A mis padres, mi hermano, mis amigos, profesores y a todas las personas
maravillosas con las que compartí estos años.
Gracias.*

Índice general

Índice de figuras	v
Índice de tablas	vii
1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Las Medidas de Riesgo	5
2.2. El Proceso Poisson Homogéneo	8
2.3. La Propiedad de Filtración	17
2.4. El Teorema de Superposición	23
2.5. El Proceso Poisson Compuesto	27
2.6. Un Breve Repaso de Cópulas	34
3. Los Modelos de Shocks	39
3.1. El Modelo de Frecuencias	39
3.1.1. El Caso General de Filtración	41
3.1.2. El Caso MultiBernoulli	44
3.1.3. Usando el Teorema de Superposición	45
3.1.4. Modelo de Frecuencias (resumen)	47
3.2. El Modelo de Severidades	48
3.2.1. Modelo de Severidades (resumen)	51
3.2.2. Dos maneras de escribir el Modelo de Severidades	52
3.3. El Modelo de Frecuencias 2	54
4. Resultados Analíticos	61
4.1. La Distribución Conjunta	61
4.2. Los Tiempos de Llegada	69
4.3. Los Momentos de $\mathbf{Z}(t)$	76
4.4. Las Variables $\widetilde{\mathbf{N}}_s(t)$	81
4.5. Aplicando la Recursión de Panjer	84

ÍNDICE GENERAL

5. Aplicaciones en Seguros	89
5.1. Los Seguros y las Tormentas	89
5.2. Cálculo del VaR para $N_T(t)$	92
5.3. Cálculo del VaR y ES para $Z(t)$	98
6. Aplicaciones en Riesgo Crediticio	105
6.1. La Diversificación de Portafolios	105
6.2. El Modelo de Frecuencias en Portafolios	107
6.3. Simulaciones del Modelo y Cálculo del VaR	113
7. Conclusiones	121
A. Resultados útiles y Códigos	123
A.1. Capítulo 1	123
A.2. Capítulo 3	124
A.3. Capítulo 4	125
A.4. Capítulo 5	127
Bibliografía	131

Índice de figuras

2.1.	Comparación de la Esperanza, VaR_α y Expected Shortfall (ES_α) con $\alpha = 0.95$ para una distribución de pérdidas.	6
2.2.	Ocurrencia de eventos a tiempo continuo en los intervalos $[0, t]$ ó $[t_1, t_2]$	10
2.3.	Proceso Poisson con parámetro $\lambda = 3$. El tiempo ocurrido entre dos ocurrencias consecutivas se denota por T_i	16
2.4.	Cada evento de $N(t)$ es clasificado independientemente en Tipo 1 o 2.	17
2.5.	Filtración de un Proceso Poisson con intensidad λ en un proceso con intensidad λp	19
2.6.	La variable $N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t)$ representa el número total de eventos ocurridos hasta el tiempo t en ambos procesos.	24
2.7.	Dado un Proceso Poisson, el Proceso Poisson Compuesto resulta de aumentar una cantidad aleatoria X_i en cada ocurrencia.	28
2.8.	Resultado de 2000 simulaciones de cópulas Normal y Gumbel con correlación de Kendall $\tau = 0.5$, es decir $\rho = 0.707$ y $\theta = 2$	37
3.1.	Comparación de las funciones de probabilidad de $N_T(1)$ para v.a. Bernoulli independientes (rojo), el proceso original $N(1)$ (verde), y el proceso ' $N_1(1) + N_2(1)$ ' si aplicáramos el Teorema de Superposición (azul).	43
5.1.	Probabilidades $P(N_T(5) > k)$ para $k = 70, 71, \dots, 90$ para daños Individuales (verde), Independientes (azul) y Comonotonía (rojo).	96
5.2.	Proporción de las probabilidades $P(N_T(5) > k)$ entre los casos 1 – 2 (línea azul) y 1 – 3 (línea roja).	97
5.3.	Comparación entre la distribución F -Snedecor(4, 3) (rojo) y la distribución F -Generalizada(3/2, λ , 2) para $\lambda = 1$ (verde), $\lambda = 2$ (azul), $\lambda = 4$ (morado).	100
5.4.	Comparación del VaR ajustado de $Z(5)$ a la distribución F -Generalizada para varios casos de dependencia en el número de daños (Individuales, Independientes y Comonotonía) y para las diferentes elecciones de cópulas en el tamaño de las pérdidas (cópulas de Independencia, Gaussiana y Gumbel).	102

ÍNDICE DE FIGURAS

- 6.1. Histogramas resultantes de 10 000 simulaciones de la variable $N_T(1)$ del Modelo de Frecuencias aplicado a portafolios modificando las diferentes intensidades ajustadas mientras las probabilidades de incumplimiento permanecen fijas. . 116
- 6.2. Histogramas resultantes de 10 000 simulaciones de la variable $N_T(1)$ del Modelo de Frecuencias aplicado a portafolios modificando las intensidades y probabilidades de ocurrencia y manteniendo constante la proporción entre ellas. 119

Índice de tablas

5.1. Comparación de la esperanza y varianza de $N_T(5)$ y la covarianza y correlación entre $N_1(5)$ y $M_2(5)$ para los diferentes casos de dependencia.	94
6.1. Estimación del $VaR_{0.95}$ y $VaR_{0.99}$ para diferentes intensidades.	117
6.2. Estimación del $VaR_{0.95}$ y $VaR_{0.99}$ para diferentes elecciones de la constante f	120

Capítulo 1

Introducción

La Teoría del Riesgo es una rama de las matemáticas que esta profundamente ligada a los seguros y finanzas, la cual utiliza herramientas de probabilidad y estadística para representar la probabilidad de pago en los usuarios, estimar el valor de portafolios y sobre todo, para calcular el riesgo al que eventos futuros nos hacen estar continuamente expuestos. El *riesgo*, siendo un concepto intuitivo de toda la vida es representado en esta rama mediante los posibles *daños* y/o *pérdidas* que consideremos en cierto intervalo de tiempo.

Las Medidas de Riesgo son el principal referente al momento de tomar decisiones basadas en los modelos planteados, cuyo objetivo es establecer, bajo cierto nivel de confianza, un límite superior para las posibles pérdidas (en el caso del VaR) o una estimación de su tamaño en caso de superar dicho umbral (en el caso del Expected Shortfall). Estas dos medidas resultan ser las medidas de riesgo por excelencia, al ser utilizadas en innumerables instituciones y estar presentes en acuerdos internacionales relacionados con seguros y finanzas.

En este trabajo estudiaremos a fondo el artículo de Alexander McNeil y Filip Lindskog llamado *Common Poisson Shock Models: Applications to Insurance and Credit Risk Modelling*¹, donde proponen un modelo de daños y realizan una estimación de la medida de riesgo VaR en problemas relacionados a los seguros y al riesgo crediticio. En este artículo replicaremos los resultados obtenidos por los autores, usando los mismos datos y parámetros utilizados por ellos.

La herramienta principal del modelo es el Proceso Poisson Homogéneo $N(t)$ y la propiedad clásica de Filtración, la cual establece que si cada ocurrencia del proceso es clasificada en uno y sólo uno entre n diferentes tipos de manera inde-

¹Ver [7].

1. INTRODUCCIÓN

pendiente de las demás ocurrencias y del proceso inicial, los procesos resultantes $N_j(t)$, que representan el número eventos del j -ésimo tipo, son Procesos Poisson independientes. En [7] los autores generalizan este resultado permitiendo que cada evento pueda pertenecer a varios tipos de manera simultánea, ocasionando un efecto de *traslape y dependencia* entre los procesos $N_j(t)$. Si denotamos la pertenencia de un evento de $N(t)$ en los distintos tipos mediante un vector de la forma

$$\mathbf{I} = (i_1, i_2, \dots, i_n),$$

donde i_j es 1 si pertenece al Tipo j y 0 en otro caso, podemos representar esta pertenencia utilizando una distribución Bernoulli en cada entrada, por lo que establecer una estructura de dependencia en los vectores, resulta en una estructura de dependencia para los procesos $N_j(t)$.

Uno de los principales objetivos de este trabajo es estudiar la influencia que tiene la dependencia entre varios Procesos Poisson $N_j(t)$ en la suma total de ellos $N_T(t)$, por lo que abordaremos tres distintos enfoques:

- (i) *Individuales*: cuando representamos los daños con Procesos Poisson independientes. Enloba clásico de Filtración.
- (ii) *Independencia*: cuando cada entrada del vector \mathbf{I} toma valores de manera independiente.
- (iii) *Comonotonía*: el caso en que la probabilidad de éxito simultáneo en el vector \mathbf{I} es mayor.

Cada estructura conducirá a diferentes resultados y conclusiones sobre las variables $N_j(t)$ y sobre su suma $N_T(t) = \sum_{i=1}^n N_j(t)$. Estas dos variables compondrán lo que llamaremos el Modelo de Frecuencias y será utilizado para representar el *número* de daños o pérdidas ocurridos en cierto intervalo de tiempo.

Posteriormente, el modelo se complementa haciendo uso del Proceso Poisson Compuesto con el propósito de estimar el *tamaño* de las daños ocurridos. De manera similar al Modelo de Frecuencias, si representamos los daños ocurridos en los diferentes tipos mediante un vector

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

donde cada el valor de cada entrada es producido por una variable aleatoria continua, además de especificar su distribución será necesario establecer una estructura de dependencia para el vector aleatorio. Para este caso utilizaremos las llamadas *cóputas*, herramienta que permite utilizar la dependencia de ciertos vectores aleatorios continuos e implementarla con marginales de nuestra elección. En particular utilizaremos las siguientes:

-
- (i) *Cópula de Independencia*: variables independientes.
 - (ii) *Cópula Gaussiana*: estructura de un vector con distribución Gaussiana.
 - (iii) *Cópula Gumbel*

Es importante hacer saber que bajo el planteamiento, esta estructura de dependencia no sustituye a la de las variables $N_j(t)$ si no que la complementa, por lo que cada enfoque de dependencia para $N_j(t)$ será utilizada al mismo tiempo que alguna de las cópulas anteriores para \mathbf{X} . El resultado son las variables $Z_j(t)$ que representan el tamaño de pérdidas en cada tipo y su suma $Z(t) = \sum_{j=1}^n Z_j(t)$ que representa las pérdidas totales, las cuales componen el que llamaremos Modelo de Severidades.

Aunque la versión final de ambos modelos se alcanza al considerar varios procesos iniciales $N^{(e)}(t)$, la parte mas importante es la dependencia que existe entre el *número* y *tamaño* de los daños para los diferentes tipos. Este planteamiento permite que los modelos propuestos por McNeil y Lindskog tengan sentido en situaciones de seguros donde un fenómeno natural puede ocasionar daños en dos distintas regiones al mismo tiempo y en el caso de riesgo crediticio cuando el valor de un portafolio se ve afectado por el incumplimiento de varios usuarios de manera simultánea. De esta manera, calculando medidas de riesgo para estos modelos y variando la elección de parámetros obtendremos una estimación para el riesgo en diversas situaciones.

En el Capítulo 1 presentamos los conceptos preliminares de Medidas de Riesgo, Cópulas y todo lo relacionado al Proceso Poisson Homogéneo y sus propiedades, herramientas que serán la base de todo el trabajo. El Capítulo 2 aborda la motivación y el planteamiento del modelo sin hacer énfasis en sus propiedades matemáticas, tema que será tratado con todo detalle en el Capítulo 3. El Capítulo 4 plantea un problema de seguros donde aplicamos los modelos de Frecuencias y Severidades, realizando comparaciones para los diferentes casos de dependencia tanto en las distribuciones resultantes como en el cálculo de las medidas de riesgo VaR y Expected Shortfall. Finalmente, el Capítulo 5 aborda un problema de riesgo crediticio, más específicamente un portafolio de préstamos en el cual se pretende conocer el número de incumplimientos, problema que será atacado calculando la medida VaR para el Modelo de Frecuencias, esta vez por la vía de simulaciones computacionales.

Herramientas computacionales

Durante el trabajo nos apoyaremos en el lenguaje de programación R, lenguaje enfocado a los cálculos estadísticos tales como ajuste de modelos lineales y no lineales, simulación de distribuciones de probabilidad, análisis de series de tiempo así como diversas herramientas gráficas. Este software puede ser obtenido directamente de la página <https://www.r-project.org/> de manera gratuita para diversos sistemas operativos.

Especialmente durante los Capítulos 4 y 5 haremos uso de esta herramienta computacional para ajustar los parámetros requeridos, realizar las simulaciones y calcular nuestras medidas de riesgo. Todas las gráficas encontradas en este trabajo fueron realizadas usando el lenguaje R.

Abreviaciones

- i.i.d. \implies independientes e idénticamente distribuidas
- v.a. \implies variable aleatoria

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo introduciremos el concepto de Medidas de Riesgo y el Proceso Poisson como un Proceso de Contar, además desarrollaremos las propiedades de Filtración y Superposición para clasificar y combinar varios Procesos Poisson y veremos que estas propiedades darán lugar a nuevos procesos de contar. Abordaremos el Proceso Poisson Compuesto así como una expresión recursiva para calcular su función de probabilidad bajo ciertas condiciones. Finalmente haremos un breve repaso del tema de Cópulas para estudiar la dependencia entre variables aleatorias continuas. La mayor parte del capítulo está basado en [5], [6], [11], [12] y [13].

2.1. Las Medidas de Riesgo

El concepto de *riesgo* puede definirse como *la posibilidad de ocurrir consecuencias negativas, pérdidas o infortunios*. Por medio de las herramientas de probabilidad y estadística es posible estimar en cierto grado el *número* y *tamaño* de las pérdidas que estamos en peligro de padecer, es decir, podemos tener una medida que nos ayude a tomar decisiones a futuro dependiendo del nivel de peligro (o riesgo) que estemos dispuestos a aceptar.

Las *Medidas de Riesgo* son un intento de cuantificar la posible ocurrencia de una situación extrema, ya sea en la frecuencia o tamaño de daños provocados por algún siniestro. Por ejemplo, para una empresa aseguradora que se compromete a apoyar al individuo afectado con una cantidad económica aún sin conocer el tamaño del infortunio es importante cuantificar de alguna manera el número e intensidad de desastres que puedan ocurrir en un periodo de tiempo futuro con

2. PRELIMINARES

el objeto de modificar sus contratos o incrementar el número de asociados de la manera mas eficiente posible para así cumplir con la ayuda prometida.

El *Valor al Riesgo* (abreviado VaR) es posiblemente la medida de riesgo mas usada en instituciones financieras. Si suponemos que la cantidad que debe pagar la aseguradora esta dada por una variable aleatoria L conocida como *distribución de pérdidas*, el VaR es, de manera intuitiva, la mínima cantidad que puede tomar L de tal manera que la probabilidad de exceder esta cantidad sea pequeña. Esta medida varía de acuerdo a una cantidad α conocida como el *nivel de confianza* y es enunciada a continuación.

Definición 2.1. Dado $\alpha \in (0, 1)$ y una distribución de pérdidas L , el Valor al Riesgo al nivel de confianza α esta definido como

$$VaR_\alpha := \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) < 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\},$$

donde F_L es la función de distribución de L . Dicho de otro modo, el VaR es el cuantil α de la distribución L .

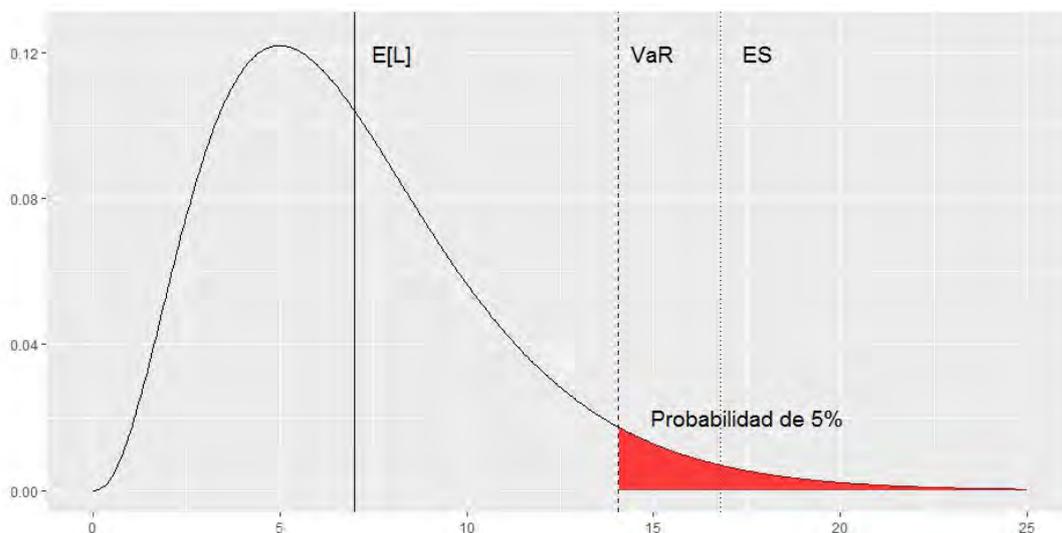


Figura 2.1: Comparación de la Esperanza, VaR_α y Expected Shortfall (ES_α) con $\alpha = 0.95$ para una distribución de pérdidas.

Otra medida de riesgo usada ampliamente es el *Expected Shortfall*, que es el promedio de los posibles valores que puede tomar el VaR_u para $u \geq \alpha$. Esta medida tiene la ventaja de darnos una aproximación del exceso que puede tomar la distribución de pérdidas. A diferencia del VaR que nos indica únicamente un cierto umbral, el Expected Shortfall nos indica, en promedio, el tamaño de las pérdidas en caso de superarse este umbral.

Definición 2.2. Dado $\alpha \in (0, 1)$ y una distribución de pérdidas L , el Expected Shortfall al nivel de confianza α está definido como

$$ES_\alpha := \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du.$$

Si la función de distribución F_L es continua, es posible probar que para cualquier $\alpha \in (0, 1)$ se satisface que

$$ES_\alpha = E[L | L \geq VaR_\alpha],$$

que es precisamente la interpretación que dimos anteriormente (ver [11], p.45). En la Figura 2.1 ilustramos gráficamente la Esperanza y las medidas de riesgo VaR_α y ES_α con $\alpha = 0.95$ para una distribución de pérdidas L tal que tenga distribución X_7^2 (Ji-cuadrada con 7 grados de libertad).

Ya que no cualquier función derivada de la distribución de pérdidas L puede utilizarse como una referencia del riesgo asociado ha sido necesario estipular las propiedades que una buena medida debería satisfacer. Dichas propiedades fueron propuestas por primera vez en [1], las cuales surgieron con base a los diferentes escenarios de riesgo estudiados, pretendiendo representar las situaciones más importantes de una manera efectiva. Estas propiedades son las siguientes:

Axiomas de Coherencia: Si \mathbf{M} es el conjunto de distribuciones de pérdida y ρ es una Medida de Riesgo Coherente debe satisfacerse

- (i) *Invarianza bajo traslación:* Para cualquier $L \in \mathbf{M}$ y $l \in \mathbb{R}$, $\rho(L+l) = \rho(L)+l$.
- (ii) *Subaditividad:* Para cualesquiera $L_1, L_2 \in \mathbf{M}$, $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$.
- (iii) *Homogeneidad positiva:* Para cualquier $L \in \mathbf{M}$ y $\lambda > 0$, $\rho(\lambda L) = \lambda\rho(L)$.
- (iv) *Monotonía:* Dadas $L_1, L_2 \in \mathbf{M}$ tales que $L_1 \leq L_2$ casi seguramente, $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$.

La propiedad (i) nos dice que si a nuestra posible pérdida le añadimos (o sustraemos) una cantidad fija, el riesgo total será el mismo mas dicha cantidad. El axioma (iii) establece que si la posible pérdida se multiplica por una cantidad, el riesgo lo hace de igual manera. Por otro lado, el axioma (iv) dice que si una pérdida tiende a ser mayor que otra, el riesgo de la primera también será mayor. Si pensamos en realizar una inversión, las propiedades anteriores resultan en cierto modo intuitivas si lo que buscamos es medir el riesgo. El axioma (ii) se refiere a la idea de que el riesgo puede reducirse mediante la diversificación (una idea que será abordada brevemente en el Capítulo 5).

De nuestras medidas de riesgo presentadas antes, únicamente el Expected Shortfall satisface los cuatro axiomas. El VaR por su lado satisface los axiomas (i), (ii) y (iv) pero no la propiedad de subaditividad, sin embargo, a pesar de no ser una medida coherente, continúa siendo muy utilizada en tratados internacionales (ver [11], p.37) y será nuestra meta calcularla para ciertos modelos en específico.

2.2. El Proceso Poisson Homogéneo

Cuando nos encontramos en la situación de clasificar un experimento que resulta en éxito o fracaso con una cierta probabilidad, inmediatamente pensamos en la distribución *Bernoulli*. De igual manera, la distribución *Binomial* surge cuando realizamos varios experimentos idénticos e independientes y queremos conocer el número total de éxitos. Si la variable aleatoria X denota el número de éxitos en n experimentos idénticos e independientes, la probabilidad de obtener un total de k éxitos estará dada por

$$P(X = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (2.1)$$

donde p es la probabilidad de éxito. En este caso decimos que X tiene una distribución *Binomial*(n, p).

La distribución Binomial es usada para modelar situaciones tales como juegos de dados, ruleta, problemas en genética, dispositivos defectuosos en un sistema, etc. Una manera muy peculiar de usar esta distribución es para conocer el número de eventos que ocurren en un cierto intervalo de tiempo. Para ver esto, consideremos el intervalo $[0, 1]$ y supongamos que en este ocurren en promedio λ eventos

cuya posición en el tiempo es uniforme. Si realizamos n divisiones de igual tamaño, la probabilidad de que cada división contenga al menos un evento será $\frac{\lambda}{n}$, entonces, si X_n denota el número de intervalos que tienen al menos un evento, X_n tiene una distribución *Binomial* $(n, \lambda/n)$. Además, se satisface que

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k (1 - \lambda/n)^n}{k! (1 - \lambda/n)^k}. \end{aligned}$$

Si incrementamos el número de divisiones, podemos suponer que cada subintervalo contiene a lo mas un solo evento, por lo que el valor de X_n coincidirá con el total de eventos en $[0, 1]$. Al hacer tender el parámetro n a infinito, tendremos que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}, \quad \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \rightarrow 1, \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \rightarrow 1.$$

Sustituyendo en la probabilidad anterior, tendremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Esta aproximación es la función de densidad de una conocida variable aleatoria que presentamos a continuación:

Definición 2.3. *Decimos que una variable aleatoria N tiene una distribución Poisson con parámetro $\lambda > 0$ si toma valores en los enteros no-negativos y su función de probabilidad esta dada por*

$$P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Cuando la probabilidad de obtener un éxito es muy pequeña y el número de ensayos que se desea examinar es muy grande, la distribución Poisson surge para representar el número de eventos *raros* que ocurren en un intervalo de tiempo. La distribución Poisson es usada para modelar el número de errores ortográficos que tiene un libro, el número de personas que viven más de 100 años en alguna comunidad, el número de accidentes automovilísticos al mes en alguna carretera, el número de lapices defectuosos fabricados en un día, el número de desastres naturales en una región etc. A diferencia de la distribución Binomial, en la distribución Poisson el nuevo parámetro λ representa el *promedio* de eventos raros bajo

2. PRELIMINARES

cierta unidad de medida que estemos usando, por lo que ocurrirán en promedio λ eventos en un intervalo.

En general, cuando nos encontramos con el problema de representar las ocurrencias en el tiempo de algún fenómeno que nos interese, podemos pensar para cada tiempo t en una variable aleatoria $N(t)$ que represente el número de eventos hasta ese tiempo, es decir, en el intervalo $[0, t]$ (si es que comenzamos a contar desde 0). Este planteamiento da origen a una clase de procesos estocásticos que definimos a continuación:

Definición 2.4. Decimos que una familia de variables aleatorias $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso de Contar si satisface que

(i) $N(t)$ toma valores en los enteros no-negativos.

(ii) Si $s < t$ entonces $N(s) \leq N(t)$, es decir, $N(t)$ es creciente respecto a t .

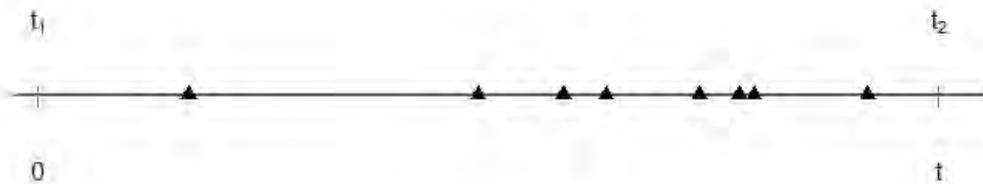


Figura 2.2: Ocurrencia de eventos a tiempo continuo en los intervalos $[0, t]$ ó $[t_1, t_2]$.

Las dos definiciones que hemos presentado hasta ahora pueden relacionarse de manera que la distribución Poisson nos indique el número de eventos en cualquier intervalo de tiempo. El *Proceso Poisson* resulta ser la combinación de estos conceptos y será la herramienta principal a lo largo de este trabajo, sin embargo, antes de presentarlo necesitamos un par de definiciones previas.

Definición 2.5. Decimos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $o(h)$ si satisface

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

De las propiedades del límite es fácil ver que la combinación lineal de funciones $o(h)$ también será $o(h)$. De aquí en adelante usaremos la misma notación $o(h)$ para referirnos a estas funciones, es decir, escribiremos en general que $ao(h) + bo(h) = o(h)$ para cualesquiera a, b números reales.

Definición 2.6. Diremos que el proceso de contar $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ tiene:

(i) Incrementos Independientes si para cualesquiera $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ se satisface que las variables aleatorias $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ son independientes.

(ii) Incrementos Estacionarios si para cualquier $t > 0$ se satisface que

$$N(t) - N(0) \stackrel{D}{=} N(s+t) - N(s), \quad \text{para todo } s > 0.$$

Observemos que la propiedad de Incrementos Estacionarios nos dice que el número de ocurrencias en un intervalo dependerá únicamente de la longitud del mismo. Con esto estamos preparados para definir al Proceso Poisson que, como mencionamos antes, será el eje principal de este trabajo.

Definición 2.7. Decimos que un proceso de contar $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson Homogéneo con intensidad λ si

(i) $N(0) = 0$.

(ii) Tiene incrementos independientes y estacionarios.

(iii) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$.

(iv) $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

Una definición alternativa es la siguiente:

Definición 2.8. Diremos que el proceso de contar $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson Homogéneo con intensidad λ si

2. PRELIMINARES

- (i) $N(0) = 0$.
- (ii) Tiene incrementos independientes.
- (iii) Dados $s, t > 0$ se satisface que

$$P(N(s+t) - N(s) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots,$$

es decir, el número de eventos en cualquier intervalo de longitud t se distribuye $Poisson(\lambda t)$.

Ya que en las definiciones 2.7 y 2.8 le llamamos Proceso Poisson Homogéneo al proceso descrito $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ se infiere que son equivalentes a pesar de parecer muy diferentes a primera vista. El siguiente resultado establece dicha relación:

Teorema 2.1. Las definiciones 2.7 y 2.8 del Proceso Poisson Homogéneo son equivalentes.

Demostración. Los puntos (i) de ambas definiciones son iguales, así como la hipótesis de incrementos estacionarios e independientes. Basta probar entonces que los puntos (iii) y (iv) de la Definición 2.7 son equivalentes a que $N(t)$ tenga una distribución $Poisson(\lambda t)$.

Supongamos primero que $N(t)$ se distribuye $Poisson(\lambda t)$. Usando la expansión en polinomios de Taylor de primer orden alrededor del 0 para $f(h) = e^{-\lambda h}$ se satisface que

$$f(h) = f(0) + f'(0)t + f''(c)\frac{h^2}{2}$$

para algún c en el intervalo $(0, h)$. El último término en la ecuación anterior es el llamado *Residuo de Lagrange*. Sustituyendo obtenemos

$$e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + \frac{e^{-\lambda c}(\lambda h)^2}{2}.$$

Del supuesto de la distribución Poisson y de la ecuación anterior se tiene que

$$P(N(h) = 1) = e^{-\lambda h} \lambda h = \lambda h - (\lambda h)^2 + \frac{e^{-\lambda c}(\lambda h)^3}{2}.$$

Como $(\lambda h)^m$ es una función $o(h)$ para cualquier $m = 2, 3, \dots$ entonces los dos últimos términos son funciones $o(h)$ multiplicadas por constantes. Por el comentario hecho antes, las funciones $o(h)$ son cerradas bajo combinaciones lineales. Por lo tanto

$$P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h),$$

estableciendo así el punto (iii) de la Definición 2.7. Por otro lado, se tiene que

$$P(N(h) \geq 2) = 1 - P(N(h) = 1) - P(N(h) = 0) = 1 - (\lambda h + o(h)) - e^{-\lambda h},$$

y como vimos hace un momento, se satisface que $e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h)$. Sustituyendo en lo anterior obtenemos

$$P(N(h) \geq 2) = 1 - (\lambda h + o(h)) - (1 - \lambda h + o(h)) = o(h),$$

probando así el punto (iv) de la Definición 2.7.

Suponiendo ahora los puntos (iii) y (iv) de la Definición 2.7, usaremos la relación biunívoca entre una variable aleatoria y su función generadora de momentos para probar que $N(t)$ sigue una distribución $Poisson(\lambda t)$. Sea x fijo, entonces la función característica de $N(t)$ evaluada en x está dada por

$$g(t) := M_{N(t)}(x) = E [e^{xN(t)}].$$

Se satisfacen entonces las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} g(t+h) &= E [e^{xN(t+h)}] \\ &= E [e^{xN(t)} e^{x(N(t+h)-N(t))}] \\ &= E [e^{xN(t)}] E [e^{x(N(t+h)-N(t))}] \quad \text{incrementos independientes} \\ &= E [e^{xN(t)}] E [e^{xN(h)}] \quad \text{incrementos estacionarios} \\ &= g(t) E [e^{xN(h)}]. \end{aligned}$$

2. PRELIMINARES

Usando las propiedades (iii) y (iv) de la Definición 2.7 tenemos que

$$o(h) = P(N(h) \geq 2) = 1 - P(N(h) = 1) - P(N(h) = 0),$$

por lo que

$$P(N(h) = 0) = 1 - P(N(h) = 1) - o(h) = 1 - \lambda h + o(h).$$

Usando esto calculamos lo siguiente

$$\begin{aligned} E [e^{xN(h)}] &= E [e^{xN(h)} | N(h) = 0] P(N(h) = 0) \\ &\quad + E [e^{xN(h)} | N(h) = 1] P(N(h) = 1) \\ &\quad + E [e^{xN(h)} | N(h) \geq 2] P(N(h) \geq 2). \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de $N(h)$ donde corresponde, y usando que el último término es una función $o(h)$ del supuesto que $P(N(h) \geq 2)$ lo es y la esperanza condicional esta acotada, obtenemos

$$\begin{aligned} E [e^{xN(h)}] &= P(N(h) = 0) + e^x P(N(h) = 1) + o(h) \\ &= 1 - \lambda h + o(h) + e^x (\lambda h + o(h)) + o(h) \\ &= 1 - \lambda h + e^x \lambda h + o(h). \end{aligned}$$

En lo anterior sustituimos el valor de $P(N(h) = 0)$ que encontramos antes y el de $P(N(h) = 1)$ que suponemos en el enunciado del teorema. Por lo tanto

$$\begin{aligned} g(t+h) &= g(t)(1 - \lambda h + e^x \lambda h) + o(h) \\ &= g(t) + g(t)\lambda h(e^x - 1) + o(h), \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = g(t)\lambda(e^x - 1) + \frac{o(h)}{h}.$$

Es posible reconocer en el término de la izquierda a la expresión que conduce a la derivada de una función, por lo que tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ se tiene

$$g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) = g(t)\lambda(e^x - 1),$$

obteniendo entonces

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda(e^x - 1).$$

Integrando y usando que $g(0) = E[e^0] = 1$ obtenemos

$$\int_0^t \frac{g'(y)}{g(y)} dy = \int_0^t \frac{d}{dy} \ln(g(y)) dy = \ln(g(t)).$$

Por otro lado, se cumple que

$$\int_0^t \lambda(e^x - 1) dy = \lambda t(e^x - 1).$$

Igualando ambas ecuaciones concluimos que

$$\ln(g(t)) = \lambda t(e^x - 1).$$

Finalmente, al tomar la función exponencial en ambos lados se tiene

$$E[e^{xN(t)}] = g(t) = \exp(\lambda t(e^x - 1)),$$

es decir, la función generadora de momentos de $N(t)$ coincide con la de una distribución *Poisson*(λt). Usando la hipótesis (ii) de los incrementos estacionarios para $N(t)$ se cumple que para cualesquiera $s, t \geq 0$

$$P(N(s+t) - N(s) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

estableciendo así el punto (iii) de la Definición 2.8. □

Las Definiciones 2.7 y 2.8 no son las únicas maneras de caracterizar este proceso. Para mostrar otra caracterización definiremos a los *Tiempos de Inter-arribo* de manera intuitiva, como el tiempo exacto que transcurre entre dos eventos consecutivos. Si denotamos estas cantidades por medio de las variables T_i en un

2. PRELIMINARES

proceso de contar $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, los Tiempos de Inter-arribo estarán caracterizados por la relación

$$N(t) \geq n \text{ si y sólo si } \sum_{i=1}^n T_i \leq t.$$

Ya que el tiempo es continuo, las T_i serán variables aleatorias continuas. El siguiente resultado es muy conocido en el estudio del Proceso Poisson.

Teorema 2.2. *Dado un Proceso Poisson Homogéneo con parámetro λ , los Tiempos de Inter-arribo T_n para $n = 1, 2, \dots$ son variables aleatorias i.i.d. con distribución exponencial y parámetro $1/\lambda$.*

Es sabido que la suma de k variables aleatorias i.i.d. con distribución $\exp(1/\lambda)$ tiene una distribución $\text{gamma}(k, \lambda)$. Entonces, ya que la suma de los primeros k Tiempos de Inter-arribo representa el momento en que ocurre la k -ésima ocurrencia, tenemos que esta variable aleatoria tiene una distribución $\text{gamma}(k, \lambda)$.

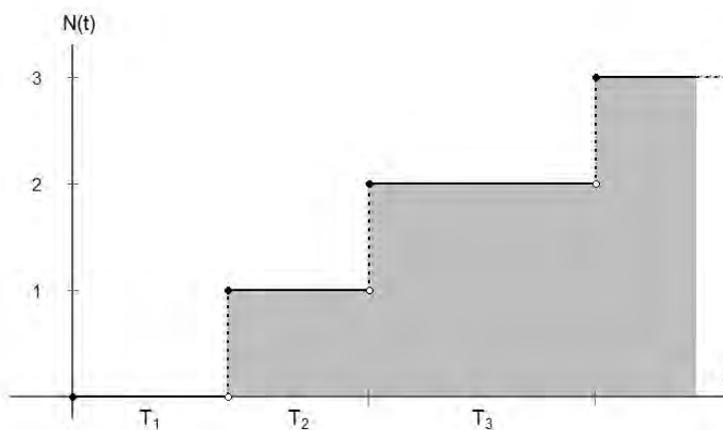


Figura 2.3: Proceso Poisson con parámetro $\lambda = 3$. El tiempo ocurrido entre dos ocurrencias consecutivas se denota por T_i .

Para definir un nuevo proceso de contar por medio de las variables T_i usaremos el teorema anterior de manera inversa, es decir, comenzando con una sucesión de variables aleatorias $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d. con distribución $\exp(1/\lambda)$ y definiendo el proceso $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ como

$$N(t) := \max\{n : \sum_{i=1}^n T_i \leq t\}.$$

Es posible demostrar que el proceso definido arriba es el mismo al que se refieren las Definiciones 2.7 y 2.8 del Proceso Poisson Homogéneo.

En lo siguiente nos referiremos al proceso $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ simplemente como Proceso Poisson y comúnmente lo denotaremos como *Proceso Poisson*(λ). Cabe mencionar que existen otros procesos derivados, algunos de los cuales abordaremos mas adelante en este capítulo.

2.3. La Propiedad de Filtración

Consideremos el siguiente problema: en cierto país, el número de terremotos que afectan una zona A ocurren de acuerdo a un Proceso Poisson. Una aseguradora pretende estimar el número de terremotos que puedan ocasionar daños severos en viviendas y construcciones, y ya que la intensidad de los terremotos puede ser medida con diversas escalas podemos considerar a un terremoto *fuerte* como aquel en donde se supera algún umbral en la medida. Sabiendo esto *¿es posible estimar el número de terremotos fuertes utilizando el número total?*

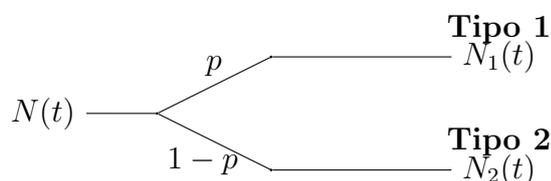


Figura 2.4: Cada evento de $N(t)$ es clasificado independientemente en Tipo 1 o 2.

Supongamos que $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es el *Proceso Poisson*(λ) que indica el número de terremotos totales que han ocurrido mientras que $\{N_1(t)\}_{t \geq 0}$ representa el número de terremotos fuertes y $\{N_2(t)\}_{t \geq 0}$ al número de terremotos restantes. Notemos que $N_i(t)$ para $i = 1, 2$ es también un Proceso de Contar que considera únicamente un subconjunto de las ocurrencias de $N(t)$, por lo que para encontrar una expresión de $N_i(t)$ será necesario realizar una *filtración* del proceso inicial. Una manera de hacerlo es clasificar las ocurrencias de $N(t)$ en Tipo 1 (terremotos fuertes) y Tipo 2 (terremotos restantes). Si clasificamos cada evento en Tipo 1 con probabilidad p , podemos usar variables aleatorias *Bernoulli*(p) denotadas por I_r para clasificar al r -ésimo evento dependiendo de si es Tipo 1 ó 2. De esta manera,

2. PRELIMINARES

podemos escribir al proceso $N_1(t)$ como

$$N_1(t) = \sum_{r=1}^{N(t)} I_r,$$

ya que las variables I_r tomarán el valor de 1 si el evento pertenece al Tipo 1 y 0 en otro caso. Por otro lado, el proceso $N_2(t)$ podrá ser representado como

$$N_2(t) = \sum_{r=1}^{N(t)} (1 - I_r),$$

pues cada evento es clasificado en uno y sólo un tipo.

En general, dado un Proceso Poisson donde cada evento puede ser clasificado en algún tipo con alguna probabilidad p , es posible *filtrar* las ocurrencias totales para obtener un nuevo Proceso de Contar. Si suponemos además que cada evento es clasificado de manera independiente a los demás eventos e independiente del proceso inicial, obtendremos el *Proceso Poisson Filtrado*, que será de enorme importancia a lo largo de este trabajo.

Definición 2.9. Dado $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ un Proceso Poisson con intensidad λ , definimos el Proceso Poisson Filtrado denotado por $\{N_i(t)\}_{t \geq 0}$ como

$$N_i(t) := \sum_{r=1}^{N(t)} I_r, \tag{2.2}$$

donde I_1, I_2, \dots son variables aleatorias *i.i.d.* con distribución Bernoulli(p) que además son independientes del proceso $\{N(t)\}_{t \geq 0}$.

Una manera de pensar al Proceso Poisson Filtrado es como el resultado de lanzar una moneda por cada ocurrencia del Proceso Poisson original y contar el número de caras o cruces obtenidas en algún intervalo de tiempo. Observemos que como las variables aleatorias $(1 - I_r)$ son también Bernoulli con probabilidad de éxito $(1 - p)$, ambos procesos $\{N_1(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{N_2(t)\}_{t \geq 0}$ que representan a los diferentes terremotos son también Procesos Poisson Filtrados.

El planteamiento anterior nos permite clasificar cada evento del proceso inicial únicamente en dos tipos, pero podemos ampliar este número reemplazando la variable aleatoria Bernoulli por la más general variable aleatoria Multinomial, la

cual representa el número de eventos que han sido clasificados en n diferentes tipos al realizar k experimentos idénticos e independientes. Es importante recordar que usando una variable aleatoria Multinomial, la probabilidad de que un ensayo sea clasificado en el tipo j es $p_j > 0$, y estas deben cumplir que $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, es decir, cada ensayo es clasificado en uno y sólo uno de los k tipos disponibles.

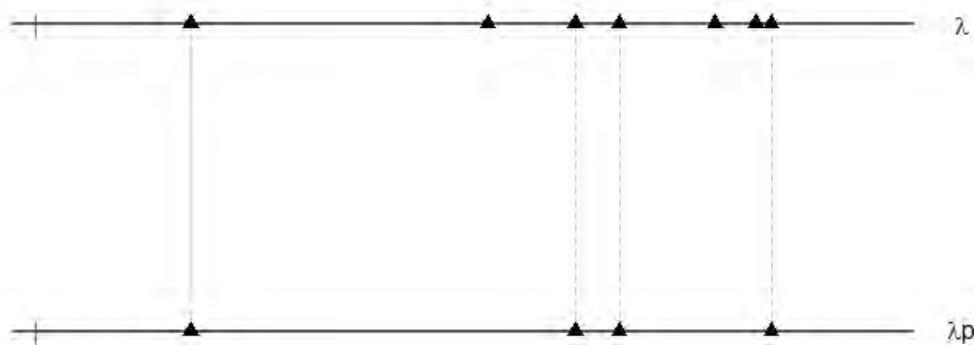


Figura 2.5: Filtración de un Proceso Poisson con intensidad λ en un proceso con intensidad λp .

Observemos que si un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ tiene una distribución Multinomial con $k = 1$, la j -ésima entrada denotará si el ensayo pertenece o no al Tipo j . Entonces, si denotamos por e_j al vector canónico j -ésimo se cumplirá que

$$P(X \cdot e_j = 1) = P(X = e_j) = p_j,$$

donde $X \cdot e_j$ representa la j -ésima entrada del vector X . De la ecuación anterior concluimos que tiene una distribución *Bernoulli*(p_j) y toma el valor de 1 si el ensayo pertenece al Tipo j .

Por lo tanto, si $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson con intensidad λ , usando el planteamiento anterior es posible representar el número de ocurrencias del proceso $N(t)$ que pertenecen al Tipo j de la misma manera que lo hicimos en la sección anterior pero usando una nueva familia de vectores aleatorios X_1, X_2, \dots i.i.d. con

2. PRELIMINARES

distribución Multinomial que además sean independientes de $N(t)$, es decir

$$N_j(t) = \sum_{r=1}^{N(t)} X_r \cdot e_j. \quad (2.3)$$

Lo anterior muestra que al aumentar la clasificación del proceso inicial a k diferentes tipos, obtenemos k diferentes Procesos Poisson Filtrados. En el siguiente teorema se resume todo lo mencionado hasta ahora, además de un resultado que establece una 'relación' entre el número de eventos para los diferentes tipos. Al igual que la misma definición del proceso filtrado, será uno de los resultados mas importantes que abordaremos.

Teorema 2.3 (Teorema de Filtración). *Sea $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ un Proceso Poisson con intensidad λ . Supongamos que cada ocurrencia puede ser clasificada en uno y sólo uno de n diferentes tipos con probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n de manera independiente de otras ocurrencias e independientemente del proceso $\{N(t)\}_{t \geq 0}$. Si $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ representa el número de eventos de Tipo j , entonces*

(i) $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson con intensidad λp_j .

(ii) Dado $t > 0$ fijo, las variables aleatorias $N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$ son independientes entre ellas.

Demostración. Sabemos que $N_j(t)$ es un Proceso Poisson Filtrado, por lo que nos basaremos en la ecuación 2.2 y para probar el punto (i) del Teorema de Filtración fijaremos $j = 1, 2, \dots, n$ y demostraremos que se satisfacen las condiciones de la Definición 2.8.

Para demostrar que $N_j(0) = 0$ basta notar que $N_j(0) \leq N(0)$ por considerar únicamente un subconjunto del total de eventos. Como $N(0) = 0$ por ser Proceso Poisson, $N_j(0) = 0$.

Para la condición de incrementos independientes consideraremos únicamente dos intervalos $(t_0, t_1]$ y $(t_1, t_2]$ donde $t_0 < t_1 < t_2$, aunque la misma idea se aplica para

un número de intervalos arbitrario. Además, usaremos la siguiente notación para representar las ocurrencias en cualquier intervalo $(a, b]$:

$$N_j(a, b) := N_j(b) - N_j(a), \quad N(a, b) := N(b) - N(a).$$

Sean $\{I_{r_1}\}_{r_1=1}^{\infty}$ y $\{I_{r_2}\}_{r_2=1}^{\infty}$ dos sucesiones i.i.d. de variables *Bernoulli*(p_j) que además sean independientes entre ellas e independientes de $N(t)$. Entonces, ya que la distribución del número de ocurrencias en los intervalos ajenos $(t_0, t_1]$ y $(t_1, t_2]$ puede ser escrita como la suma de variables Bernoulli independientes indexadas sobre el número de ocurrencias totales, se cumplirá que

$$N_j(t_0, t_1) \stackrel{D}{=} \sum_{r_1=1}^{N(t_0, t_1)} I_{r_1}, \quad N_j(t_1, t_2) \stackrel{D}{=} \sum_{r_2=1}^{N(t_1, t_2)} I_{r_2}.$$

Como $N(t)$ es un Proceso Poisson, $N(t_0, t_1)$ y $N(t_1, t_2)$ son independientes por ser intervalos ajenos. Ya que las sucesiones de variables Bernoulli también son independientes, concluimos que

$$\begin{aligned} P(N_j(t_0, t_1) = k_1, N_j(t_1, t_2) = k_2) &= P\left(\sum_{r_1=1}^{N(t_0, t_1)} I_{r_1} = k_1, \sum_{r_2=1}^{N(t_1, t_2)} I_{r_2} = k_2\right) \\ &= P\left(\sum_{r_1=1}^{N(t_0, t_1)} I_{r_1} = k_1\right) P\left(\sum_{r_2=1}^{N(t_1, t_2)} I_{r_2} = k_2\right) \\ &= P(N_j(t_0, t_1) = k_1) P(N_j(t_1, t_2) = k_2), \end{aligned}$$

es decir, $N_1(t_0, t_1)$ y $N_1(t_1, t_2)$ son independientes.

La propiedad de incrementos estacionarios puede ser demostrada de manera análoga. Dados $s, t > 0$ y considerando los intervalos $(0, t]$ y $(s, s+t]$, se cumplirá por los incrementos estacionarios de $N(t)$ que

$$\sum_{r_1=1}^{N(t)} I_{r_1} \stackrel{D}{=} \sum_{r_2=1}^{N(s, s+t)} I_{r_2},$$

2. PRELIMINARES

por lo que $N_j(t)$ y $N_j(s, s + t)$ tienen la misma distribución.

Para calcular la distribución explícita de $N_j(t)$ usaremos el Teorema de Probabilidad Total condicionando sobre el número total de eventos, es decir

$$P(N_j(t) = i) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_j(t) = i | N(t) = k) P(N(t) = k).$$

Al condicionar el número total de eventos a k , el número de eventos que pertenecen al Tipo j resulta en una distribución *Binomial*(k, p_j). Sustituyendo además la distribución de $N(t)$ y observando que el mínimo valor que puede tomar $N(t)$ es i , lo anterior resulta en

$$\begin{aligned} P(N_j(t) = i) &= \sum_{k=i}^{\infty} \frac{k!}{(k-i)!i!} p_j^i (1-p_j)^{k-i} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{p_j^i}{i!} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(1-p)^{k-i} (\lambda t)^k}{(k-i)!} = e^{-\lambda t} \frac{p_j^i}{i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k (\lambda t)^{k+i}}{k!}. \end{aligned}$$

Descomponiendo el término $(\lambda t)^{k+i}$ en $(\lambda t)^k (\lambda t)^i$ de lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} P(N_j(t) = i) &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p_j t)^i}{i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k (1-p_j)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p_j t)^i}{i!} e^{\lambda t(1-p_j)} = e^{-\lambda p_j t} \frac{(\lambda p_j t)^i}{i!}, \end{aligned}$$

entonces, $N_j(t)$ tiene una distribución *Poisson*($\lambda p_j t$) y se cumple la última condición de la Definición 2.8. Por lo tanto $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson con parámetro λp_j .

Para el punto (ii) del Teorema de Filtración tomaremos $t > 0$ fijo, entonces se cumple

$$\begin{aligned} P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n | N(t) = i) P(N(t) = i) \\ &= P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n | N(t) = k) P(N(t) = k), \end{aligned}$$

donde $k = \sum_{j=1}^n k_j$. Los sumandos donde $i \neq k$ son nulos ya que cada evento es clasificado en uno y sólo un tipo, entonces el número total de ocurrencias queda determinado por el número de ocurrencias en cada tipo. Por otro lado, ya que cada evento es clasificado de manera independiente de otras ocurrencias e independiente de $N(t)$, se cumple que la probabilidad condicional de arriba es una variable aleatoria Multinomial con parámetros (k, p_1, \dots, p_n) . Sabemos además que $N(t)$ sigue una distribución $Poisson(\lambda t)$. Sustituyendo todo lo anterior, la distribución conjunta resulta

$$P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n) = \left(\frac{k!}{k_1! \dots k_n!} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \right) \left(\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \right) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k \frac{p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!}.$$

Como $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ tenemos que $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda p_j$. Por otro lado $k = \sum_{j=1}^n k_j$ y entonces $(\lambda t)^k = \prod_{j=1}^n (\lambda t)^{k_j}$. De lo anterior podemos concluir las siguientes igualdades:

$$e^{-\lambda t} = \prod_{j=1}^n e^{-\lambda p_j t}, \quad (\lambda t)^k = \prod_{j=1}^n (\lambda t)^{k_j}.$$

Sustituyendo en la distribución conjunta obtenemos

$$\begin{aligned} \dots &= e^{-\lambda t} (\lambda t)^k \prod_{j=1}^n \frac{p_j^{k_j}}{k_j!} = \left(\prod_{j=1}^n e^{-\lambda p_j t} \right) \left(\prod_{j=1}^n (\lambda t)^{k_j} \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{p_j^{k_j}}{k_j!} \right) \\ &= \prod_{j=1}^n e^{-\lambda p_j t} \frac{(\lambda t)^{k_j} p_j^{k_j}}{k_j!} = \prod_{j=1}^n e^{-\lambda p_j t} \frac{(\lambda p_j t)^{k_j}}{k_j!} = \prod_{j=1}^n P(N_j(t) = k_j), \end{aligned}$$

pues por el teorema anterior $N_j(t)$ sigue una distribución $Poisson(\lambda p_j t)$. Por lo tanto $P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n) = \prod_{j=1}^n P(N_j(t) = k_j)$, entonces dichas variables son independientes. \square

2.4. El Teorema de Superposición

Consideremos el problema inverso al de la sección anterior: supongamos que la misma aseguradora de la sección anterior pretende estimar el número de terre-

2. PRELIMINARES

motos y de tormentas que afectan a una zona del país, donde cada uno de estos fenómenos ocurre de acuerdo a un Proceso Poisson de manera independiente. Ya que cada siniestro puede causar diferentes tipos de daños, es de importancia conocer el número de daños ocasionados por ambos fenómenos. Suponiendo que la ocurrencia de cada fenómeno ocasiona un daño en la zona de manera segura, ¿podemos representar el número total de daños?

Como uno se podría imaginar, el número total de daños sufridos puede representarse por medio de un Proceso Poisson. Dicho resultado es examinado en esta sección, comenzando por el caso de variables aleatorias y abordando después a los procesos estocásticos. Además, probamos el caso general para cuando tenemos m procesos independientes entre sí.

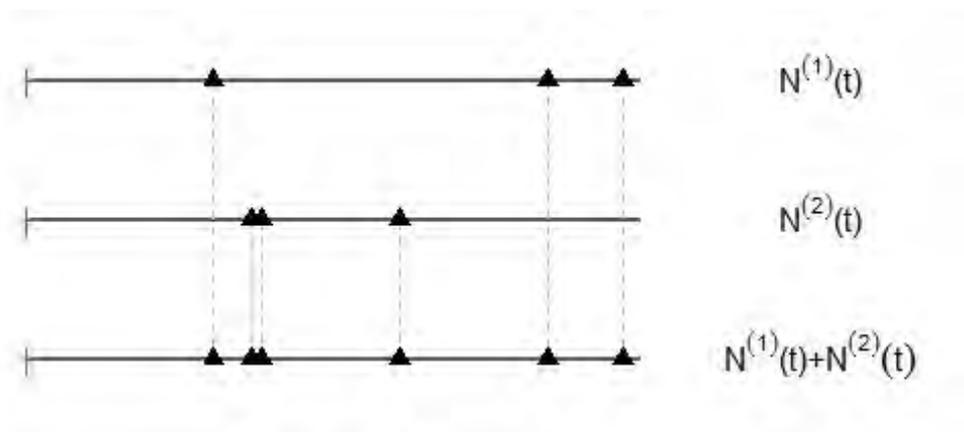


Figura 2.6: La variable $N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t)$ representa el número total de eventos ocurridos hasta el tiempo t en ambos procesos.

Si denotamos por $N^{(1)}(t)$ y $N^{(2)}(t)$ al número de terremotos y tormentas respectivamente que han ocasionado daños hasta el tiempo t , es claro que el número total estará dado por $N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t)$. Buscamos probar en un principio que para cualquier $t \geq 0$ la variable aleatoria $N^{(1)}(t) + N^{(2)}(t)$ sigue una distribución $Poisson(\lambda t)$ para algún parámetro $\lambda \geq 0$. A continuación abordaremos el caso general considerando una suma de m variables independientes. Al igual que en la prueba del Teorema de Equivalencia expuesto en la primera sección, nos auxiliaremos de la relación biunívoca entre una variable aleatoria y su función generadora de momentos.

Teorema 2.4. Sean $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(m)}$ variables aleatorias independientes con

distribución Poisson y parámetros $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(m)}$ respectivamente. Entonces $\sum_{e=1}^m N^{(e)}$ tiene una distribución Poisson $(\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)})$.

Demostración. Recordemos que la función generadora de momentos evaluada en x para una variable N con distribución Poisson(λ) esta dada por

$$E[\exp(xN)] = \exp(\lambda(e^x - 1)).$$

Para obtener la función generadora de la suma calculamos como sigue

$$E[\exp(x(N^{(1)} + N^{(2)} + \dots + N^{(m)}))] = E\left[\prod_{e=1}^m \exp(xN^{(e)})\right].$$

Por la independencia entre las variables $N^{(i)}$ lo anterior resulta

$$\prod_{e=1}^m E[\exp(xN^{(e)})] = \prod_{e=1}^m \exp(\lambda^{(e)}(e^x - 1)) = \exp\left(\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}(e^x - 1)\right).$$

Por lo tanto, $\sum_{e=1}^m N^{(e)}$ se distribuye Poisson $(\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)})$. □

Sabiendo que la suma de variables aleatorias Poisson independientes vuelven a tener una distribución Poisson, es posible extender este resultado a procesos estocásticos. Para probar lo anterior nos apoyaremos en la definición 2.8. Para esto será necesario probar que el nuevo proceso tiene incrementos independientes. En lo siguiente $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ denotará un *Proceso Poisson* $(\lambda^{(e)})$ para $e = 1, 2, \dots, m$. Supondremos también que estos m procesos serán independientes entre sí. Definimos además a la cantidad $S_k(t)$ como

$$S_k(t) := \sum_{e=1}^k N^{(e)}(t).$$

Con lo anterior, procedemos al siguiente resultado:

Teorema 2.5 (Teorema de Superposición). *El proceso dado por $\{S_m(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson con intensidad $\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}$.*

Demostración. Probaremos los puntos de la Definición 2.8.

Para ver que $S_m(0) = 0$, tenemos que $N^{(e)}(0) = 0$ para cada $e = 1, 2, \dots, m$ por

2. PRELIMINARES

ser Procesos Poisson, entonces $\sum_{e=1}^m N^{(e)}(0) = 0$.

Para probar que el proceso $\{S_m(t)\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes consideremos $t_0 < t_1 < t_2$ y los intervalos $(t_0, t_1]$ y $(t_1, t_2]$. El número total de eventos en el primer intervalo resulta

$$\begin{aligned} S_m(t_1) - S_m(t_0) &= \sum_{e=1}^m N^{(e)}(t_1) - \sum_{e=1}^m N^{(e)}(t_0) \\ &= \sum_{e=1}^m (N^{(e)}(t_1) - N^{(e)}(t_0)) \\ &= \sum_{e=1}^m N^{(e)}(t_0, t_1), \end{aligned}$$

usando la misma notación del Teorema de Filtración. Análogamente, se cumple que

$$S_m(t_2) - S_m(t_1) = \sum_{e=1}^m N^{(e)}(t_1, t_2).$$

Por hipótesis los procesos $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ son Procesos Poisson independientes para $e = 1, 2, \dots, m$, entonces por la propiedad de incrementos independientes se tiene que $N^{(e)}(t_0, t_1)$ y $N^{(e)}(t_1, t_2)$ son independientes. Sumando sobre el índice (e) , obtenemos que $S_m(t_1) - S_m(t_0)$ y $S_m(t_2) - S_m(t_1)$ también son independientes.

La distribución explícita de $S_m(t)$ fue calculada anteriormente en el teorema 2.4, donde se demostró que $S_m(t)$ tiene una distribución *Poisson* $(\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}t)$.

Además, por la propiedad de incrementos estacionarios para cada proceso se cumple que para cada $t, r \geq 0$

$$\begin{aligned} P(S_m(r+t) - S_m(r) = k) &= P\left(\sum_{e=1}^m N^{(e)}(r+t) - \sum_{e=1}^m N^{(e)}(r) = k\right) \\ &= P\left(\sum_{e=1}^m (N^{(e)}(r+t) - N^{(e)}(r)) = k\right) = P\left(\sum_{e=1}^m N^{(e)}(t) = k\right) \\ &= P(S_m(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \end{aligned}$$

donde $\lambda = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}$. Por lo tanto se cumple el punto (iii) de la Definición 2.8 y entonces $\{S_m(t)\}_{t \geq 0}$ es un *Proceso Poisson*(λ). \square

El resultado anterior establece que al sumar Procesos Poisson independientes obtenemos un nuevo Proceso Poisson. En lo posterior nos referiremos a este resultado como el teorema o la propiedad de *Superposición*. Retomando el problema inicial, tendremos que el número total de daños ocasionados esta representado por un *Proceso Poisson* con parámetro $\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}$.

2.5. El Proceso Poisson Compuesto

Al igual que las secciones anteriores, comenzamos retomando el problema de la aseguradora: ahora que podemos estimar el número de daños ocasionados por diversos fenómenos naturales en una zona del país mediante un Proceso Poisson, podemos realizar una estimación de costo para la reparación de cada uno de los daños, es decir, si por cada daño ocasionado por algún fenómeno se requiere una cantidad de dinero X_i y sabiendo que los daños ocurren de acuerdo a un Proceso Poisson, *¿es posible modelar la cantidad total que tendría que pagar la aseguradora por los daños totales?*

El problema anterior puede ser planteado usando el Proceso Poisson que conocemos, donde cada ocurrencia resulta en un incremento X_i a la cantidad total, es decir sumar las cantidades aleatorias X_1, \dots, X_r indexadas de acuerdo al número de eventos al tiempo t . En esta sección introduciremos un nuevo proceso que se deriva del Proceso Poisson, al cual llamaremos el Proceso Poisson Compuesto. Este surge cuando se añade una cantidad aleatoria por cada evento ocurrido del proceso $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ a la suma acumulada. En la siguiente definición se enuncia formalmente:

Definición 2.10. *Decimos que la familia de variables aleatorias $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson Compuesto si para cada t se satisface*

$$Z(t) := \sum_{r=1}^{N(t)} X_r, \quad (2.4)$$

donde $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson y las variables aleatorias X_1, X_2, \dots son *i.i.d.* e independientes de $N(t)$.

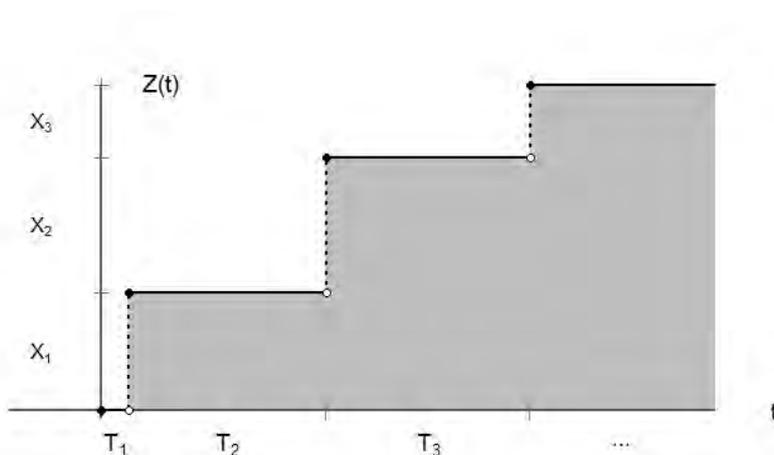


Figura 2.7: Dado un Proceso Poisson, el Proceso Poisson Compuesto resulta de aumentar una cantidad aleatoria X_i en cada ocurrencia.

Una observación importante es que el Proceso Poisson Filtrado es un caso particular del Proceso Poisson Compuesto, donde X_r son variables aleatorias con distribución *Bernoulli*(p). A pesar de que los procesos filtrados $N_j(t)$ tienen una distribución *Poisson*, el proceso compuesto $Z(t)$ en general *no* es Poisson, como veremos más adelante.

Un resultado que siempre es de interés al presentar una nueva distribución es el conocer la esperanza y la varianza.

Teorema 2.6. Para el Proceso Poisson Compuesto $Z(t)$ definido en la ecuación 2.4 se tiene que

(i)

$$E[Z(t)] = \lambda t E[X],$$

donde $E[X] = E[X_r]$ para $r = 1, 2, \dots$

(ii)

$$\text{Var}(Z(t)) = \lambda t E[X^2],$$

donde $E[X^2] = E[X_r^2]$ para $r = 1, 2, \dots$

Demostración. Para probar (i), suponemos que $N(t) = n$, entonces

$$E[Z(t)|N(t) = n] = E\left[\sum_{r=1}^n X_r\right] = \sum_{r=1}^n E[X_r] = nE[X].$$

Usando el Teorema de Esperanza Iterada tenemos que

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E[E[Z(t)|N(t)]] = E[N(t)E[X]] \\ &= E[N(t)]E[X] = \lambda t E[X]. \end{aligned}$$

Para el punto (ii), por el Teorema de la Varianza Iterada se cumple

$$Var(Z(t)) = E[Var(Z(t)|N(t))] + Var(E[Z(t)|N(t)]).$$

Para el primer término tenemos por la independencia entre las variables X_r que

$$Var(Z(t)|N(t)) = Var\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N(t)} Var(X_i) = N(t)Var(X).$$

Entonces

$$E[Var(Z(t)|N(t))] = E[N(t)Var(X)] = E[N(t)]Var(X) = \lambda t Var(X).$$

Luego, por las igualdades expuestas antes se cumple que

$$E[Z(t)|N(t)] = N(t)E[X].$$

Ya que $N(t)$ de distribuye *Poisson*(λt) entonces $Var(N(t)) = \lambda t$, por lo que

$$Var(E[Z(t)|N(t)]) = Var(N(t)E[X]) = Var(N(t))E[X]^2 = \lambda t E[X]^2.$$

Sustituyendo ambas igualdades obtenemos que

$$\begin{aligned} Var(Z(t)) &= \lambda t Var(X) + \lambda t E[X]^2 \\ &= \lambda t (E[X^2] - E[X]^2 + E[X]^2) \\ &= \lambda t E[X^2]. \end{aligned}$$

□

2. PRELIMINARES

Usando el resultado anterior podemos concluir que al usar variables aleatorias X tales que $E[X] \neq E[X^2]$, la distribución resultante $Z(t)$ *no* puede tener una distribución Poisson, pues de ser así debería cumplirse que

$$\lambda t E[X] = E[Z(t)] = \text{Var}(Z(t)) = \lambda t E[X^2].$$

A pesar de que el Proceso Poisson Compuesto parece ser una forma muy útil y natural de modelar problemas similares al que abordamos al inicio de la sección, el calcular la densidad de manera exacta puede resultar en todo un desafío. En el caso en que X_1, X_2, \dots es una colección de variables aleatorias *Bernoulli* fue posible dar una respuesta, sin embargo, a pesar de que muchas veces es posible conocer la distribución de una suma de variables independientes e idénticamente distribuidas, no es tan inmediato dar un resultado general cuando el número de sumandos está indexado por un Proceso Poisson. En esta sección introduciremos la llamada *Recursión de Panjer*, método introducido en 1981 por Harry Panjer. Aunque el resultado original es más general, en esta sección nos concentraremos únicamente en el caso cuando el número de variables aleatorias a sumar está determinado por una variable aleatoria *Poisson*.

Una limitante a tener en cuenta es que X_1, X_2, \dots debe ser una colección de variables que tomen valores en los enteros no negativos. Para la demostración de este resultado se requieren algunos detalles preliminares. Abordaremos el problema haciendo énfasis en las variables aleatorias y posteriormente aterrizaremos el resultado en los procesos estocásticos estudiados hasta ahora.

Definición 2.11. *Dada una variable aleatoria Z que toma valores en \mathbb{N} definimos su Función Generadora de Probabilidad o FGP como*

$$\mathbf{P}_Z(y) := \sum_{k=0}^{\infty} y^k P(Z = k).$$

De la definición concluimos también que $\mathbf{P}_Z(y) = E[y^Z]$.

Lema 2.1. *Para la variable aleatoria Z definida por $Z := \sum_{r=1}^N X_r$, donde X_1, X_2, \dots es una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas e independientes de la variable N , su FGP está dada por*

$$\mathbf{P}_Z(y) = \mathbf{P}_N(\mathbf{P}_X(y)),$$

donde $\mathbf{P}_X(y) = \mathbf{P}_{X_r}(y)$ para $r = 1, 2, \dots$

Demostración. Se cumplen las siguientes igualdades

$$\mathbf{P}_Z(y) = E[y^Z] = E\left[E\left[y^{\sum_{r=1}^N X_r} | N\right]\right] = E\left[E\left[\prod_{r=1}^N y^{X_r}\right]\right].$$

Por la independencia entre las variables X_r , lo anterior resulta en

$$\begin{aligned} \dots &= E\left[\prod_{r=1}^N E[y^{X_r}]\right] = E\left[\prod_{r=1}^N \mathbf{P}_X(y)\right] = E\left[(\mathbf{P}_X(y))^N\right] \\ &= \mathbf{P}_N(\mathbf{P}_X(y)). \end{aligned}$$

□

Lema 2.2. Dada N una variable aleatoria Poisson(λ) se cumple que

$$\frac{d}{dy} \mathbf{P}_N(y) = \lambda \mathbf{P}_N(y).$$

Demostración. Observemos que para la variable aleatoria Poisson(λ) se cumple que $P(N = k) = \frac{\lambda}{k} P(N = k - 1)$. Diferenciando término a término obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \mathbf{P}_N(y) &= \frac{d}{dy} \sum_{k=0}^{\infty} y^k P(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k y^{k-1} P(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda y^{k-1} P(N = k - 1) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} y^k P(N = k) \\ &= \lambda \mathbf{P}_N(y). \end{aligned}$$

□

Con estos resultados en mano procedemos al enunciado principal.

Teorema 2.7 (Recursión de Panjer). Sean N variable aleatoria Poisson(λ) y X_1, X_2, \dots una familia de variables aleatorias i.i.d. que además son independientes

2. PRELIMINARES

de N y toman valores en los enteros no negativos. Entonces, para la variable aleatoria Z definida como $Z := \sum_{r=1}^N X_r$ se cumple que

$$P(Z = k) = \begin{cases} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{k} P(X = i) P(Z = k - i) & \text{si } k \geq 1, \\ \mathbf{P}_N(P(X = 0)) & \text{si } k = 0, \end{cases}$$

donde $P(X = i) = P(X_r = i)$ para $r = 0, 1, \dots$

Observemos que es en efecto, una fórmula recursiva, al valerse de los valores previos de la distribución de Z para calcular los siguientes.

Demostración. Para el caso cuando $k = 0$ obtenemos lo siguiente

$$P(Z = 0) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Z = 0 | N = i) P(N = i) = \sum_{i=0}^{\infty} P\left(\sum_{r=1}^i X_r = 0\right) P(N = i).$$

Como las variables X_r toman valores en los enteros positivos, la única manera de que sumen 0 es que todas ellas sean 0. Ya que además estas variables son i.i.d. lo anterior resulta en

$$\begin{aligned} \dots &= P(N = 0) + \sum_{i=1}^{\infty} (P(X = 0))^i P(N = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (P(X = 0))^i P(N = i) = \mathbf{P}_N(P(X = 0)). \end{aligned}$$

En el caso en que $k \geq 1$, derivando la igualdad del Lema 2.1 con respecto a y obtenemos

$$\mathbf{P}'_Z(y) = \mathbf{P}'_N(\mathbf{P}_X(y)) \mathbf{P}'_X(y).$$

Aplicando la igualdad del Lema 2.2 en el término de la derecha resulta

$$\lambda \mathbf{P}_N(\mathbf{P}_X(y)) \mathbf{P}'_X(y) = \lambda \mathbf{P}_Z(y) \mathbf{P}'_X(y).$$

Por lo tanto, $\mathbf{P}'_Z(y) = \lambda \mathbf{P}_Z(y) \mathbf{P}'_X(y)$. Desarrollando las series en esta igualdad obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} k y^{k-1} P(Z = k) = \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty} y^k P(Z = k) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} k y^{k-1} P(X = k) \right).$$

Multiplicando la igualdad por y tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} ky^k P(Z = k) &= \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty} y^k P(Z = k) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} ky^k P(X = k) \right) \\ &= \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty} y^k P(Z = k) \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} ky^k P(X = k) \right). \end{aligned}$$

Haciendo uso del *Producto de Cauchy* (sección A.1 del Apéndice) para multiplicar series infinitas se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} ky^k P(Z = k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k iP(X = i)P(Z = k - i) \right) y^k.$$

Por la caracterización de funciones en series de potencias, tenemos que para cada $k = 0, 1, 2, \dots$ los coeficientes asociados a y^k deben ser iguales, es decir, debe cumplirse que

$$kP(Z = k) = \lambda \sum_{i=0}^k iP(X = i)P(Z = k - i).$$

Por lo tanto

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda i}{k} P(X = i)P(Z = k - i).$$

□

En el Capítulo 4 haremos uso de la Recursión de Panjer en el Proceso Poisson Compuesto definido en la ecuación 2.4 con variables X_r que sean estrictamente positivas. En este caso se cumplirá que

$$P(Z(t) = 0) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t},$$

mientras que aplicando directamente el resultado anterior en cierto tiempo t fijo obtenemos que la distribución del Proceso Poisson Compuesto estará dada por

$$P(Z(t) = k) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda i}{k} P(X = i)P(Z(t) = k - i).$$

En el siguiente capítulo combinaremos las propiedades del Proceso Poisson para construir modelos más generales haciendo énfasis únicamente en el planteamiento. El análisis de dichos modelos será abordado mas adelante.

2.6. Un Breve Repaso de Cópulas

A pesar de que las variables aleatorias X_i que conforman al Proceso Poisson Compuesto deben ser independientes, podemos preguntarnos por la ocurrencia de un nuevo proceso compuesto con variables asociadas Y_i que sí sean dependientes de X_i , en cuyo caso el nuevo Proceso Poisson Compuesto estará relacionado de alguna manera con el inicial. Sin embargo, a diferencia de las variables aleatorias Bernoulli donde podíamos especificar la estructura de dependencia fácilmente, para establecer la dependencia en el caso continuo resulta un poco más complicado y requiere de una nueva herramienta.

Las *Cópulas* son funciones que enlazan funciones de distribución multivariadas con funciones de distribución unidimensionales. Una de las características más conocidas de estas funciones es que son funciones de distribución multivariadas cuyas marginales son variables aleatorias *uniforme*(0, 1). Las Cópulas han resultado de interés por ser una forma de estudiar medidas de dependencia libres de escala, permitir la construcción de nuevas distribuciones conjuntas con marginales de nuestro interés y por lo ilustrativas que resultan las simulaciones hechas. Vale la pena recordar que la distribución conjunta entre dos variables aleatorias *no* está completamente determinada por su correlación.

Aunque la definición parece bastante simple y sin mucha relación con lo mencionado antes, la enunciamos a continuación.

Definición 2.12. *Una cópula d -dimensional es una función de distribución C en el conjunto $[0, 1]^d$ cuyas marginales son distribuciones uniforme(0, 1), es decir*

$$C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$$

para cualesquiera $i = 1, 2, \dots, d$ y $u_i \in [0, 1]$.

Un resultado importante y conocido es el siguiente:

Lema 2.3. *Dada una variable aleatoria X con función de distribución F , se satisface que $F(X)$ tiene una distribución uniforme(0, 1).*

El resultado más importante en la teoría de Cópulas es el teorema probado por el matemático americano Abe Sklar en 1959, el cual muestra que todas las

distribuciones multivariadas tienen cópulas asociadas y además que las cópulas pueden ser usadas junto con distribuciones marginales para crear nuevas distribuciones multivariadas.

Teorema 2.8 (Sklar). *Sea F una función de distribución conjunta con marginales F_1, \dots, F_d . Entonces existe una cópula $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ tal que para cualesquiera x_1, \dots, x_d en $[-\infty, \infty]$ se tiene*

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Además, si las marginales son continuas, C es única.

Algunos ejemplos de cópulas son los siguientes:

Cópula de Independencia: el ejemplo más simple es cuando las variables aleatorias son independientes, en cuyo caso la distribución conjunta es el producto de las marginales. En este caso la cópula estará dada por

$$\Pi(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i.$$

Aplicando el Teorema de Sklar tendríamos entonces que

$$F(x_1, \dots, x_d) = \Pi(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = \prod_{i=1}^d F_i(x_i),$$

que es la caracterización cuando las variables aleatorias X_i (con distribución F_i) son independientes.

Cópula de Comonotonía: El caso de Comonotonía es cuando las variables alcanzan su máximo nivel de dependencia, pues por la propiedad de monotonía en las medidas de probabilidad debe cumplirse que

$$F(x_1, \dots, x_d) \leq \min\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\}.$$

Entonces, el mayor valor que puede tomar la función de distribución conjunta está dado por la cópula

$$M(u_1, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_d\}.$$

2. PRELIMINARES

Cópula Gaussiana: Un hecho conocido en la teoría de la probabilidad es que la distribución *Normal Multivariada* no se caracteriza únicamente por tener marginales con distribución *Normal*, si no que esta tiene además su propia distribución conjunta definida por un vector $\boldsymbol{\mu}$ que representa las medias de las marginales y una matriz $\boldsymbol{\rho}$ de varianzas y covarianzas. En este caso, si tenemos un vector \mathbf{X} el cual tiene distribución $N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\rho})$ y su función de distribución conjunta está denotada por $\phi_{\boldsymbol{\rho}}$, entonces la cópula asociada será

$$C_{\boldsymbol{\rho}}^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \phi_{\boldsymbol{\rho}}(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_d)),$$

donde ϕ es la función de distribución de una variable aleatoria $N(0, 1)$. Mas concretamente, para el caso en que $d = 2$ la fórmula explícita resulta de la siguiente manera

$$\begin{aligned} C_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2) &= \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left(\frac{-(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

En la ecuación anterior, ρ denota la correlación entre las marginales que componen el vector bivariado $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$. Es importante observar que si la matriz de correlación es la matriz identidad (i.e. $\boldsymbol{\rho} = I_d$) o en este caso, si $\rho = 0$, la ecuación anterior resulta simplemente en $C_0^{Ga}(u_1, u_2) = u_1 u_2$, es decir, retomamos la *cópula de independencia*. Ya que ρ es la correlación entre las variables X_1 y X_2 las cuales al tener una distribución *Normal*, se satisface que $\rho = 0$ si y sólo si son independientes.

El anterior caso puede ser extendido a otras distribuciones multivariadas que tienen su origen en variables aleatorias unidimensionales como la *t-Student* o la *Gumbel*. A continuación presentamos esta última:

Cópula Gumbel: La fórmula explícita para el caso $d = 2$ con parámetro θ esta dada por

$$C_{\theta}^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\ln u_1)^{\theta} + (-\ln u_2)^{\theta}\right)^{1/\theta}\right), \quad \text{para } 1 \leq \theta \leq \infty.$$

Observemos que para el caso en que $\theta = 1$ la ecuación anterior resulta nuevamente en el caso de Independencia, mientras que si $\theta \rightarrow \infty$, la igualdad tiende al caso de Comonotonía. Este caso pertenece a una familia mas amplia conocida como *Cópulas Arquimedeanas*, sin embargo, estos y otros casos mas generales e igualmente importantes no serán abordados en este trabajo.

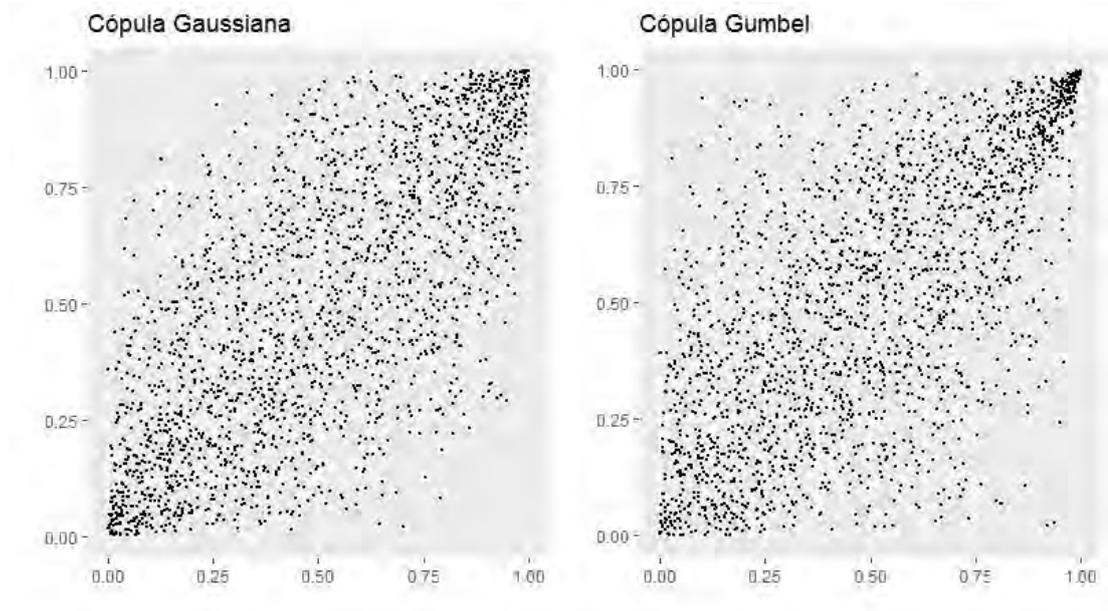


Figura 2.8: Resultado de 2000 simulaciones de cópulas Normal y Gumbel con correlación de Kendall $\tau = 0.5$, es decir $\rho = 0.707$ y $\theta = 2$.

Uno de los conceptos más importantes en el análisis de la dependencia entre variables aleatorias es el de *correlación*, definida como

$$\rho(X_1, X_2) := \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{var}(X_1)\text{var}(X_2)}},$$

la cual es una medida de dependencia *lineal* entre las variables X_1 y X_2 . Además de esta, existen otras medidas de dependencia que tienen propiedades y naturaleza distintas. Entre ellas, las *Correlaciones de Rango* dependen únicamente de la cópula de la distribución conjunta y no de las marginales (como en el caso de la correlación descrita arriba). Dada una muestra de un par de variables aleatorias, este tipo de correlaciones pueden ser calculadas ordenando los valores obtenidos en cada muestra, es decir, basándose en los *rangos*. Una de las medidas de este tipo más conocidas es la llamada *Tau de Kendall* presentada a continuación:

Definición 2.13. Dadas variables aleatorias X_1 y X_2 , la Tau de Kendall está definida como

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = E \left[\text{signo} \left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) \right) \right],$$

2. PRELIMINARES

donde $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ es una copia independiente de (X_1, X_2) pero con la misma distribución y la función $\text{signo}(x) = \pm 1$ de acuerdo al signo de x .

Observemos que si X_1 tiene a incrementar con X_2 , la probabilidad de que $(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2)$ sea positiva será alta, mientras que si X_1 tiene a incrementar cuando X_2 disminuye, la probabilidad de que sea negativa será mayor.

Ya que ρ_τ es una Correlación de Rango, su valor debe estar relacionado de algún modo con los parámetros de las cópulas que vimos anteriormente, sobre todo la Cópula Normal y Gumbel con parámetros ρ y θ respectivamente. El siguiente resultado indica esta relación. La demostración será omitida en este trabajo pero puede encontrarse en [11], p.215-222.

Teorema 2.9. *Si ρ_τ denota la Tau de Kendall y $X = (X_1, X_2)$ es un vector bivariado con marginales continuas, entonces*

(i) *Si la cópula asociada a X es Gaussiana con correlación ρ , se satisface*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsen \rho.$$

(ii) *Si la cópula asociada a X es Gumbel con parámetro θ , se satisface*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 - 1/\theta.$$

Usando el teorema anterior podemos encontrar parámetros ρ y θ para las cópulas Gaussiana y Gumbel que tengan la misma correlación de rango ρ_τ con la finalidad de estudiar la influencia que tienen sobre el vector X de una manera más objetiva.

Con estas herramientas en mano procederemos a presentar el Modelo de Frecuencias y el Modelo de Severidades propuestos por Alexander McNeil y Philip Lindskog, los cuales harán uso de los resultados expuestos hasta ahora.

Capítulo 3

Los Modelos de Shocks

La *Teoría de Confiabilidad* es un conjunto de ideas, modelos y métodos matemáticos orientados a la resolución de problemas tales como la predicción, estimación y optimización de la vida útil de los componentes que conforman algún sistema y en general todo lo referente al correcto funcionamiento del mismo. Los llamados *Modelos de Shocks* son usados para resolver esta clase de problemas, por lo que usaremos las mismas ideas para construir el *Modelo de Frecuencias* y el *Modelo de Severidades* para representar situaciones de seguros. Estos modelos serán versiones generalizadas de las propiedades de Filtración y Superposición del Proceso Poisson vistas en el capítulo anterior, así como del Proceso Poisson Compuesto, esta vez reflejando la dependencia entre el *número* y el *tamaño* de las posibles pérdidas de manera individual y su efecto en el total. En el presente capítulo nos enfocaremos únicamente en el planteamiento de dichos modelos, así como en su comparación con las ideas abordadas en el capítulo anterior. Los resultados analíticos serán estudiados posteriormente. El contenido de este capítulo esta basado en [2], [3] y el artículo principal [7].

3.1. El Modelo de Frecuencias

Consideremos el siguiente problema inspirado en la Teoría de Confiabilidad: una herramienta de perforación consta de n diferentes piezas las cuales tienden a romperse ocasionando un fallo en la máquina y haciendo que esta se detenga. Cuando esto ocurre, las piezas son reemplazadas y la máquina vuelve a ponerse en funcionamiento. Sabemos que cuando la perforadora se encuentra en uso puede romper varios de sus componentes al mismo tiempo. Si dichos fallos ocurren de acuerdo a un *ProcesoPoisson*(λ) y sabemos que la tarea que se pretende

3. LOS MODELOS DE SHOCKS

realizar con dicha máquina tardará alrededor de t horas de trabajo, ¿cuántas piezas adicionales de cada tipo se deberían llevar para poder terminar la tarea? Si cada componente cuesta la misma cantidad de dinero, la cantidad total requerida para los reemplazos estaría determinada por el número total de piezas que se reemplazaron. En ese caso, ¿cuántas piezas esperamos que se reemplacen en total?

Una manera de resolver dicho problema usando las herramientas del capítulo anterior sería utilizar el Teorema de Filtración de manera individual para cada tipo de pieza, obteniendo n diferentes Procesos Poisson, y posteriormente utilizar el Teorema de Superposición para obtener el número total de posibles reemplazos. Una desventaja de este enfoque es que no expresa el hecho más importante: varias piezas pueden romperse al mismo tiempo, un hecho que podría ocasionar una dependencia entre los procesos individuales, lo que imposibilita el uso del Teorema de Superposición.

Por esta razón, optaremos por usar técnicas inspiradas en los llamados *Modelos de Shocks* usados en la Teoría de Confiabilidad, usando las herramientas del capítulo anterior. En estos modelos, un *shock* es una intermitencia que causa errores en el sistema que se pretende estudiar, por lo que en este ejemplo dichos *shocks* serán los fallos sufridos por la máquina perforadora. Entonces, para responder la pregunta ¿cuántas piezas adicionales de cada tipo se deberían llevar? modelaremos la situación anterior usando el Teorema de Filtración visto en el capítulo anterior y el enfoque de los Modelos de Shocks de la siguiente manera:

Sabemos que el número de fallos en la perforadora ocurre de acuerdo a un *Proceso Poisson*(λ), el cual denotaremos por $\{N(t)\}_{t \geq 0}$. Ya que cada uno de estos *shocks* es provocado por la ruptura de una o varias piezas, podemos clasificar cada fallo en base a sus componentes dañados, es decir, *un fallo en la perforadora es Tipo j si es causado por la ruptura del componente j* . Si $N_j(t)$ denota el número de rupturas del componente j hasta el tiempo t , podemos escribirlo en base al número total de fallos como

$$N_j(t) = \sum_{r=1}^{N(t)} I_{j,r},$$

donde las variables $I_{j,r}$ son i.i.d. e independientes de $N(t)$ con distribución *Bernoulli*(p_j), las cuales toman el valor de 1 si el r -ésimo *shock* pertenece al *Tipo j* , es decir, si el r -ésimo fallo es causado por la ruptura del componente j . Por el Teorema de Filtración, sabemos que $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ es un *Proceso Poisson* con intensidad λp_j . Conociendo esto, es posible estimar ciertos resultados para responder la primer pregunta formulada, usando por ejemplo la esperanza y la varianza de $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$

al tiempo t .

Es fácil ver que si el número de piezas Tipo j que deberán ser reemplazadas para el tiempo t es $N_j(t)$, el número total de piezas extras que necesitaremos al tiempo t será

$$N_T(t) = \sum_{j=1}^n N_j(t),$$

por lo que conociendo la distribución de $N_T(t)$ sería posible dar alguna respuesta para la segunda pregunta del problema, sin embargo, no tenemos mucha información acerca de esta nueva variable.

Primero, no se satisface en general que el número total de *shocks* sea igual al número de piezas a reemplazar, pues como se dijo al inicio, una falla en el sistema puede ser causada por la ruptura de más de un componentes, dicho de otro modo

$$N(t) \neq N_T(t),$$

donde $N(t)$ representa el número total de fallos en la máquina. En este caso, ya que cada fallo es ocasionado por al menos una ruptura, se tiene que $N(t) \leq N_T(t)$.

Por otro lado, no podemos asegurar que las variables $N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$ sean independientes entre ellas. Recordemos que en el Teorema de Filtración teníamos la igualdad

$$\begin{aligned} P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n | N(t) = i) P(N(t) = i) \\ &= P(N_1(t) = k_1, \dots, N_n(t) = k_n | N(t) = k) P(N(t) = k), \end{aligned}$$

la cual resulta ser falsa para este problema, una vez mas por el hecho que *cada shock puede pertenecer a más de un tipo*. Lo anterior muestra que no es posible resolver el problema anterior con las herramientas expuestas hasta ahora, por lo que haremos una generalización del Teorema de Filtración para obtener un resultado que nos permita resolver este problema de manera más satisfactoria.

3.1.1. El Caso General de Filtración

En esta sección abordaremos un nuevo enfoque del Teorema de Filtración. Por simpleza, comenzaremos con el caso en que $n = 2$. Nuevamente, $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un

3. LOS MODELOS DE SHOCKS

ProcesoPoisson(λ), mientras que $\{I_{1,r}\}_{r=1}^{\infty}$ e $\{I_{2,r}\}_{r=1}^{\infty}$ son dos familias de variables aleatorias i.i.d. con distribución *Bernoulli* y parámetros p_1 y p_2 respectivamente que además son independientes de $N(t)$, las cuales indican el número de *shocks* que pertenecen a los tipos 1 y 2. Entonces, podemos representar al número de ocurrencias del Tipo j como

$$N_j(t) = \sum_{r=1}^{N(t)} I_{j,r}. \quad (3.1)$$

De aquí en adelante haremos la convención de usar indistintamente el término *shock* para referirnos a las ocurrencias del proceso inicial $N(t)$. Dicho esto, ya que cada *shock* tiene asociadas ambas variables $I_{1,r}$ e $I_{2,r}$ podemos pensar en una familia de vectores aleatorios $\{(I_{1,r}, I_{2,r})\}_{r=1}^{\infty}$ i.i.d. con distribución *MultiBernoulli* que además son independientes de $N(t)$. Es importante observar que estos vectores tienen cierta estructura de dependencia la cual quedará determinada por la probabilidad de ocurrencia simultánea. Para entender lo anterior tomaremos la siguiente notación

$$p(i_1, i_2) := P(I_{1,r} = i_1, I_{2,r} = i_2).$$

Notemos que, en principio, cada vector puede tomar todos los valores (i_1, i_2) para $i_1, i_2 \in \{0, 1\}$. Entonces, por el Teorema de Probabilidad Total se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} p_1 &= p(1, 0) + p(1, 1), \\ p_2 &= p(0, 1) + p(1, 1), \\ p(1, 0) + p(0, 1) + p(1, 1) + p(0, 0) &= 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Entonces, conociendo a p_1 , p_2 y $p(1, 1)$ es posible despejar a todas las demás cantidades para así conocer la probabilidad de cada resultado posible, determinando completamente la estructura de dependencia del vector.

En el capítulo anterior hemos analizado de manera separada a $N_1(t)$ y $N_2(t)$ concentrándonos en las probabilidades p_1 y p_2 respectivamente. Ahora que buscamos estudiar la dependencia entre ellos nos concentraremos en la probabilidad de ocurrencia simultánea, es decir, en $p(1, 1)$. Observemos que la covarianza entre dos variables *Bernoulli* esta dada por

$$\text{cov}(I_{1,r}, I_{2,r}) = p(1, 1) - p_1 p_2,$$

por lo que al estar fijos p_1 y p_2 , la cantidad que define la correlación entre $I_{1,r}$ e $I_{2,r}$ es precisamente $p(1, 1)$.

Observemos que debe satisfacerse por la propiedad de contención en la Probabilidad que

$$p(1, 1) \in [0, \min\{p_1, p_2\}],$$

por lo que la probabilidad de éxito simultáneo puede tomar cualquier valor en ese intervalo. Por ejemplo, ya que $p_1 p_2 \in [0, \min\{p_1, p_2\}]$, podemos fijar $p(1, 1) = p_1 p_2$, en cuyo caso tenemos por definición que las variables $I_{1,r}$ e $I_{2,r}$ del vector son independientes. El caso en que $p(1, 1) = p(0, 0) = 0$ coincide con el Teorema de Filtración, reflejando la clasificación exhaustiva en dos tipos. Además, en este caso debe satisfacerse por el sistema de ecuaciones 3.2 que $p_1 + p_2 = p(1, 0) + p(0, 1) = 1$.

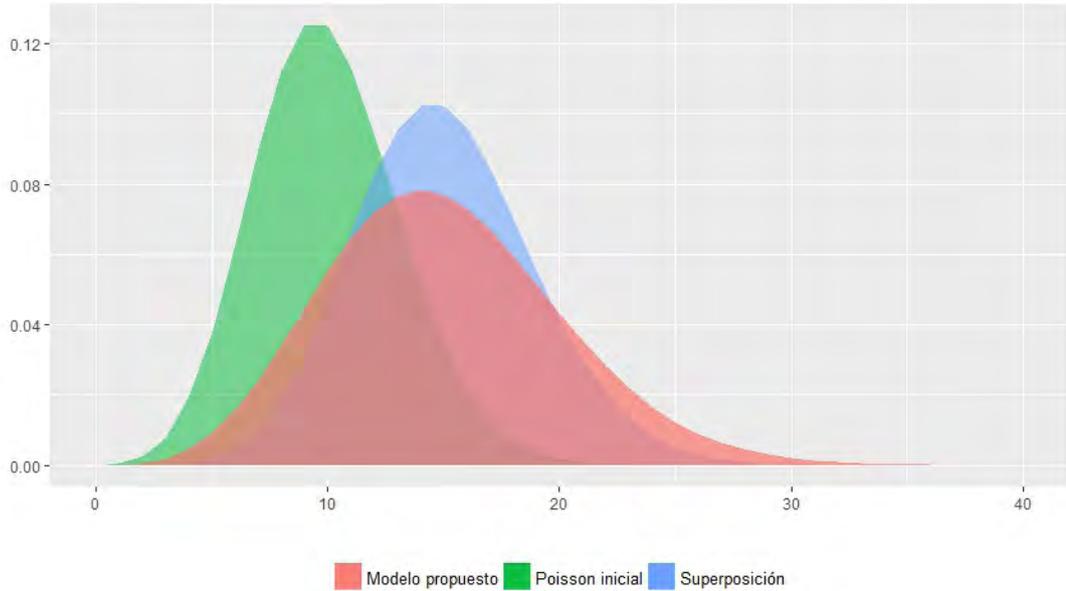


Figura 3.1: Comparación de las funciones de probabilidad de $N_T(1)$ para v.a. Bernoulli independientes (rojo), el proceso original $N(1)$ (verde), y el proceso ' $N_1(1) + N_2(1)$ ' si aplicáramos el Teorema de Superposición (azul).

Volviendo al problema inicial, solo tenemos como información que cada fallo en la máquina es causado por la ruptura de al menos un componente, es decir $(I_{1,r}, I_{2,r}) \neq (0, 0)$ para todo r , lo cual puede ser planteado como $p(0, 0) = 0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones 3.2 encontramos la probabilidad de ocurrencia simultánea, la cual resulta ser

$$p(1, 1) = p_1 + p_2 - 1.$$

Para que el modelo tenga sentido es necesario entonces que $p_1 + p_2 > 1$. A diferencia del *Caso 1*, ahora es posible fijar probabilidades que cumplan el sistema 3.2 además de la condición anterior. Entonces, ya que hemos encontrado un nuevo planteamiento que tiene como caso particular el Teorema de Filtración y es capaz de modelar el problema inicial para el caso $n = 2$, tenemos el principio de una generalización para dicho resultado.

En la Figura 3.1 se muestra la función de probabilidad del proceso $N_T(1)$ cuando $p(1, 2) = p_1 p_2$, con parámetros $\lambda = 10$ y $p_1 = p_2 = 0.75$. Además se muestra la probabilidad del Proceso Poisson inicial $N(1)$ y lo que resultaría de aplicar el Teorema de Superposición a las variables $N_1(1)$ y $N_2(1)$, es decir, un variable aleatoria con distribución $Poisson(\lambda p_1 + \lambda p_2)$. Podemos observar la diferencia entre estas distribuciones y nuestro nuevo planteamiento. La función de probabilidad de $N_T(t)$ será calculada en el siguiente capítulo.

3.1.2. El Caso MultiBernoulli

El siguiente paso en el planteamiento es introducir más variables como lo hicimos en el primer capítulo al usar una variable aleatoria *Multinomial* en reemplazo de la *Bernoulli*. Recordemos que una variable con distribución *Multinomial* y un único ensayo solo puede tomar el valor de los vectores canónicos e_j . Pensando en el problema de la máquina perforadora, si incrementamos el número de ensayos podríamos representar el caso en que un mismo fallo es ocasionado por la doble ruptura del mismo componente. Para corregir lo anterior usaremos un vector aleatorio \mathbf{I}_r que tenga distribución *MultiBernoulli*, es decir

$$\mathbf{I}_r = (I_{1,r}, \dots, I_{n,r}),$$

donde $I_{j,r} \sim Bernoulli(p_j)$. De igual manera, supondremos que la familia de vectores aleatorios $\{\mathbf{I}_r\}_{r=1}^{\infty}$ es i.i.d. e independiente de $N(t)$.

En lo posterior usaremos la siguiente notación para cualquier subvector de longitud p con la finalidad de simplificar los cálculos. Como los vectores son i.i.d., omitiremos el subíndice r sobreentendiendo que la igualdad se satisface para todos.

$$p_{j_1, \dots, j_p}(i_{j_1}, \dots, i_{j_p}) := P(I_{j_1} = i_{j_1}, \dots, I_{j_p} = i_{j_p}),$$

donde $i_{j_1}, \dots, i_{j_p} \in \{0, 1\}$. Adicionalmente, hacemos coincidir los parámetros de $I_{j,r}$ como $p_j(1) = p_j$. Usando esta notación, la probabilidad $P(I_2 = 1, I_3 = 0, I_5 = 1)$

se resume en $p_{2,3,5}(1, 0, 1)$. Otro ejemplo sería el caso de independencia para las $I_{j,r}$ donde se tiene

$$p_{1,\dots,n}(1, \dots, 1) = \prod_{j=1}^n p_j.$$

Entonces, dado $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ un *ProcesoPoisson*(λ) podemos definir para cada $j = 1, \dots, n$ los Procesos Filtrados $N_j(t) = \sum_{r=1}^{N(t)} I_{j,r}$ donde $I_{j,r}$ es la j -ésima entrada del vector aleatorio \mathbf{I}_r . Empleando nuevamente el Teorema de Filtración, sabemos que $N_j(t) \sim Poisson(\lambda t p_j)$, siendo p_j la probabilidad de éxito para $I_{j,r}$, sin embargo, en esta ocasión no conocemos la estructura de dependencia entre las variables aleatorias $N_j(t)$ ni la distribución de $N_T(t)$. De igual manera, a diferencia del Teorema de Filtración cuando $n = 2$, no basta con conocer a $p_{1,\dots,n}(1, \dots, 1)$ para determinar la estructura de dependencia del vector \mathbf{I}_r . En la última sección veremos que es basta conocer las probabilidades $p_s(1, \dots, 1)$ para todo $s \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ para conocer la estructura de este vector aleatorio.

Debido a la cantidad de subíndices utilizados y a la importancia de este nuevo planteamiento en el resto del trabajo, introducimos el siguiente diagrama para ilustrar el significado de cada subíndice en el Caso General de Filtración, el cual podrá ser referido como una pequeña síntesis del nuevo planteamiento:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{I}_1 & = & (I_{1,1} , & I_{2,1} , & \dots , & I_{n,1}) \\ \mathbf{I}_2 & = & (I_{1,2} , & I_{2,2} , & \dots , & I_{n,2}) \\ & & \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{I}_{N(t)} & = & (I_{1,N(t)}, & I_{2,N(t)}, & \dots , & I_{n,N(t)}) \\ & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & N_1(t) + & N_2(t) + & \dots + & N_n(t) \rightarrow \sum_{j=1}^n N_j(t) \end{array}$$

En resumen, este nuevo planteamiento propone que por cada ocurrencia del proceso $N(t)$, en lugar de girar una ruleta para clasificarla en alguno de los n tipos (Teorema de Filtración), lancemos n monedas distintas no necesariamente independientes entre sí y veamos en cuáles de ellas se obtuvo cara.

3.1.3. Usando el Teorema de Superposición

Como mencionamos al inicio del capítulo, buscamos combinar las técnicas de Filtración y Superposición con el propósito de construir un modelo más general.

3. LOS MODELOS DE SHOCKS

Hasta ahora hemos estudiado y ampliado el Teorema de Filtración pero sin ser posible aplicar el Teorema de Superposición a los procesos $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ debido a que estos no son necesariamente independientes. Sin embargo el Teorema de Superposición puede ser de utilidad en el siguiente planteamiento:

En el problema de la perforadora abordado al inicio teníamos como hipótesis que $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ era un *Proceso Poisson*(λ) el cual representaba el número de fallos que sufre la máquina. Para generalizar lo anterior, consideraremos m Procesos Poisson independientes $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ con parámetros $\lambda^{(e)}$, donde $e = 1, \dots, m$, los cuales representarán el número de fallos en m diferentes perforadoras con los mismos componentes. Podemos incluso pensar que cada perforadora tiene diferentes características que hacen mas vulnerables algunos de sus componentes dependiendo de diversos factores, como el tipo de terreno en que se utiliza, antigüedad, mantenimiento dado, etc. Por esto, si representamos a dichas fallas con los vectores *MultiBernoulli* $\mathbf{I}_r^{(e)}$ sus parámetros pueden variar de acuerdo al índice (e). Fijando dicho índice, podemos realizar el mismo desarrollo descrito en la sección anterior, es decir, considerando los vectores i.i.d. $\mathbf{I}_r^{(e)}$ que además sean independientes de $N^{(e)}(t)$ podemos representar el número de ocurrencias del Tipo j causadas por los shocks clase (e) como

$$N_j^{(e)}(t) := \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} I_{j,r}^{(e)},$$

donde los *shocks* clase (e) representan las fallas en la perforadora (e). Por otro lado, el *número total* de ocurrencias del Tipo j causados por las m diferentes clases de *shocks* estará dado por

$$N_j(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} I_{j,r}^{(e)}.$$

Usando la notación que introducimos anteriormente, para los vectores $\mathbf{I}_r^{(e)}$ tendremos que

$$p_{j_1, \dots, j_p}^{(e)}(i_{j_1}, \dots, i_{j_p}) := P\left(I_{j_1}^{(e)} = i_{j_1}, \dots, I_{j_p}^{(e)} = i_{j_p}\right), i_{j_1}, \dots, i_{j_p} \in \{0, 1\}$$

y

$$p_j^{(e)} = p_j^{(e)}(1).$$

Es en este momento cuando nuevamente podemos aplicar el Teorema de Superposición, pues del supuesto de independencia para los $N^{(e)}(t)$, tenemos que para j

fijo, las variables $N_j^{(e)}(t)$ también son independientes sobre el índice (e). Entonces siendo $N_j(t)$ el resultado de la Superposición de estas variables aleatorias, se tiene que

$$N_j(t) \sim \text{Poisson} \left(\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} t p_j^{(e)} \right).$$

En este momento podemos enunciar finalmente el primer modelo, al que llamaremos *Modelo de Frecuencias* el cual, como su nombre lo indica, representa el número de ocurrencias o *pérdidas* de diferentes tipos. Con el objeto de hacer una pequeña síntesis que podrá ser referida en lo posterior, resumiremos las hipótesis mencionadas a lo largo de todo el capítulo, mismas que mantendremos a lo largo de todo el trabajo con la misma notación.

3.1.4. Modelo de Frecuencias (resumen)

Supongamos que en cierto sistema se tienen m diferentes clases de *shocks*, los cuales representaremos con m Procesos Poisson independientes denotados por $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ cuyas intensidades son $\lambda^{(e)}$ para $e = 1, \dots, m$. Cada *shock* puede causar n diferentes tipos de daños o pérdidas y es clasificado independientemente de otras ocurrencias e independientemente de los procesos $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$. Entonces, el número total de pérdidas del Tipo j estará dado por

$$N_j(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} I_{j,r}^{(e)}, \quad (3.3)$$

donde los vectores aleatorios

$$\mathbf{I}_r^{(e)} = \left(I_{1,r}^{(e)}, \dots, I_{n,r}^{(e)} \right)$$

son i.i.d. con distribución *MultiBernoulli* (i.e. $I_{j,r} \sim \text{Bernoulli}$) para $r = 1, 2, \dots$ y que además son independientes de $N^{(e)}(t)$, y del índice (e). Además, el número total de pérdidas de todos los tipos resulta

$$N_T(t) = \sum_{j=1}^n N_j(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} I_{j,r}^{(e)}. \quad (3.4)$$

Las ecuaciones 3.3 y 3.4 junto con las hipótesis anteriores comprenden el *Modelo de Frecuencias*.

3. LOS MODELOS DE SHOCKS

Aterrizando el *Modelo de Frecuencias* al problema inicial tendremos que el proceso $N^{(e)}(t)$ representa el número de fallos que tiene la perforadora número (e) , para los cuales las variables *Bernoulli* $I_{j,r}^{(e)}$ indican si el r -ésimo *shock* es provocado por una ruptura en el componente j . Finalmente, el proceso filtrado $N_j(t)$ indica el número de rupturas o reemplazos totales del componente j mientras que $N_T(t)$ es el número de reemplazos totales hasta el tiempo t .

Es importante notar la importancia entre los subíndices $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $e \in \{1, 2, \dots, m\}$. En lo siguiente mantendremos la siguiente convención para su significado:

- $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ representa los *tipos* de pérdidas.
- $e \in \{1, 2, \dots, m\}$ representa las diferentes *clases* de shocks que pueden producir pérdidas.

Resulta nuevamente que el número de ocurrencias en el Tipo j resulta ser un Proceso Poisson, mientras que $N_T(t)$ resulta ser una suma de Procesos Poisson, pero a diferencia del Teorema de Filtración y de expresar el número total de ocurrencias en todos los tipos con un Proceso Poisson, las variables $N_j(t)$ que lo conforman *no* son independientes. Por lo que $N_T(t)$ es una suma de Procesos Poisson no independientes.

3.2. El Modelo de Severidades

Hasta ahora nos hemos concentrado en conocer el número de ocurrencias de cierto tipo en particular y en el número de ocurrencias totales. Otra cantidad relacionada con el problema de la perforadora resulta de asignar a cada ruptura el costo de su reemplazo, sin embargo, es factible pensar que esta es una cantidad fija para cada tipo de componente. Otro ejemplo útil para ilustrar este modelo, ahora en temas de *seguros* es el siguiente:

En una carretera del país y en las zonas cercanas ocurren accidentes automovilísticos de acuerdo a un *Proceso Poisson* (λ) . Sabemos que en esa zona circulan varios autos asegurados por una cierta compañía, donde a cada persona afiliada se le paga una cierta cantidad en caso de accidente y además, en caso de que éste resulte en la muerte de uno o mas acompañantes de la persona asegurada, la compañía le proporcionará cierta ayuda económica para gastos funerarios. Si

a dicha aseguradora le interesa estimar la cantidad total que pagará a sus afiliados en cierto tiempo t entonces con ayuda del *Modelo de Frecuencias* podemos plantear la situación anterior clasificando cada accidente en dos tipos:

- Tipo 1: donde alguno de los autos involucrados en el accidente esta asegurado por la compañía.
- Tipo 2: donde además de ser Tipo 1, el accidente resulta en la muerte de una o varias personas allegadas al asegurado.

A diferencia del problema de la máquina perforadora, el pago que debe realizar la aseguradora por cada auto involucrado en un accidente varía dependiendo de su clasificación (ya sea en Tipo 1 ó 2) así como de la intensidad del mismo. Por esta razón, el costo total por las reparaciones y demás inconvenientes *no* estará determinada por el número de accidentes en los tipos 1 y 2.

Para obtener un nuevo modelo buscamos usar tanto las propiedades del *Modelo de Frecuencias* como las del Proceso Poisson Compuesto. Pensando en las pérdidas relacionadas al Tipo j , podríamos usar a la variable X_j para representar la cantidad que tiene que pagar la aseguradora cada vez que ocurre un accidente en dicha categoría. Al aplicar de manera directa el proceso compuesto $\sum_{r=1}^{N(t)} X_{j,r}$ estamos suponiendo que todas las ocurrencias del proceso $N(t)$ contribuirán a las pérdidas en el Tipo j , es decir, que la aseguradora cubrirá todos los accidentes ocurridos, por lo que en su lugar buscamos una cantidad aleatoria que represente tanto la cantidad perdida como el si pertenece o no al Tipo j . Dicho de otro modo, queremos una variable aleatoria tal que satisfaga

$$\begin{aligned} X_{j,r}, & \text{ si la ocurrencia pertenece al Tipo } j, \\ 0, & \text{ si la ocurrencia } \textit{no} \text{ pertenece al Tipo } j. \end{aligned}$$

Ya que el evento 'pertener al Tipo j ' esta representado por las variables $I_{j,r}$, lo anterior puede ser descrito usando a $X_{j,r}I_{j,r}$, la cual satisface

$$X_{j,r}I_{j,r} = \begin{cases} X_{j,r}, & \text{si } I_{j,r} = 1, \\ 0, & \text{si } I_{j,r} = 0. \end{cases}$$

Entonces, aplicando la construcción del Proceso Poisson Compuesto tenemos que la cantidad perdida del Tipo j estará dada por

$$Z_j(t) = \sum_{r=1}^{N(t)} X_{j,r}I_{j,r}.$$

3. LOS MODELOS DE SHOCKS

Notemos que el planteamiento es el mismo para todos los otros tipos $j = 1, \dots, n$, pero recalcamos el hecho que $X_{j,r}$ y $X_{k,r}$ no son necesariamente independientes, es decir, un mismo accidente puede causar perdidas en diferentes tipos de manera similar (en el ejemplo, un accidente que resultó en la muerte de una persona seguramente resultará también en una reparación costosa del vehículo). Análogamente a los vectores *MultiBernoulli*, consideraremos los vectores aleatorios i.i.d.

$$\mathbf{X}_r := (X_{1,r}, \dots, X_{n,r}),$$

suponiendo además que son independientes de $N(t)$ y de \mathbf{I}_r .

Realizando un desarrollo similar al del *Modelo de Frecuencias*, aplicaremos la idea anterior a m Procesos Poisson independientes con parámetros $\lambda^{(e)}$ denotados por $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ los cuales representarán el número de accidentes ocurridos en m diferentes zonas del país. Entonces, la cantidad perdida del Tipo j ocasionada por los *shocks* clase e estará dada por

$$Z_j^{(e)}(t) := \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)},$$

mientras que la cantidad perdida total del Tipo j será

$$Z_j(t) := \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)}.$$

Es razonable pensar que la clase del *shock* que produce cierta pérdida puede influir en la cantidad misma, dicho de otro modo, que los vectores aleatorios $\mathbf{X}_r^{(e)}$ definidos análogamente en la parte de arriba tengan cierta distribución $F^{(e)}$, es decir, que dependan de su parámetro (e) . Sin embargo, en lo subsecuente supondremos que para cualesquiera índices r y (e) se satisface que

$$\mathbf{X}_r^{(e)} \sim F$$

y además

$$X_{j,r}^{(e)} \sim F_j$$

para cierta distribución F .

A continuación, resumimos los resultados de la sección en el planteamiento del *Modelo de Severidades*, nombrado así por el contexto de Teoría del Seguro, donde se les llama *severidades* a la cantidad perdida por diversos factores de riesgo.

3.2.1. Modelo de Severidades (resumen)

Supongamos que en cierto sistema se tienen m diferentes clases de *shocks*, los cuales serán representados por Procesos Poisson independientes denotados como $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ cuyas intensidades son $\lambda^{(e)}$ para $e = 1, \dots, m$. Cada *shock* puede causar n diferentes tipos de pérdidas de diferente tamaño y es clasificado independientemente de otras ocurrencias e independientemente de los procesos $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$. Entonces, la pérdida total del Tipo j estará dada por

$$Z_j(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} I_{j,r}^{(e)} X_{j,r}^{(e)}, \quad (3.5)$$

donde los vectores aleatorios

$$\mathbf{I}_r^{(e)} = \left(I_{1,r}^{(e)}, \dots, I_{n,r}^{(e)} \right)$$

son i.i.d. con distribución *MultiBernoulli* (i.e. $I_{j,r}^{(e)} \sim \text{Bernoulli}$) para $r = 1, 2, \dots$ y además son independientes de $N^{(e)}(t)$ y del índice (e) . Los vectores

$$\mathbf{X}_r^{(e)} = \left(X_{1,r}^{(e)}, \dots, X_{n,r}^{(e)} \right)$$

son i.i.d para los índices r y (e) , y además son independientes de los procesos $N^{(e)}$ y de los vectores $\mathbf{I}_r^{(e)}$. La cantidad total perdida estará dada por

$$Z(t) = \sum_{j=1}^n Z_j(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)}. \quad (3.6)$$

Las ecuaciones 3.5 y 3.6 componen al *Modelo de Severidades*.

El modelo anterior será el más general que estudiaremos en este trabajo. Notemos que en el particular caso donde $X_{j,r}^{(e)} = 1$, obtenemos al *Modelo de Frecuencias 1*. Retomando el ejemplo abordado al inicio de la sección tendríamos que los procesos $N^{(e)}(t)$ representan el número de accidentes que ocurren en la zona (e) en los cuales hay 2 tipos de pérdidas ($n = 2$): los gastos relacionados con el automóvil y los gastos funerarios. Para estos, $X_{1,r}^{(e)}$ representa la cantidad que tendría que pagar la aseguradora, de ser necesario, por las reparaciones del automóvil y $X_{2,r}^{(e)}$ representa la cantidad que tendría que pagar la aseguradora, de ser necesario, por los gastos funerarios.

3.2.2. Dos maneras de escribir el Modelo de Severidades

En esta sección mantendremos todas las hipótesis y notación expuestas hasta ahora para mostrar dos expresiones equivalentes al Modelo de Severidades que serán usadas mas adelante.

Manera 1: Recordemos de la notación matricial que el producto de dos vectores A y B de dimensión n esta dado por

$$A'B = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_j b_j.$$

A dicho producto se le suele referir también como *Producto Interno*, siendo denotado a veces como $\langle A, B \rangle$ o $A \cdot B$. Para el Modelo de Severidades podemos intercambiar los símbolos en la suma para obtener

$$Z(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} \sum_{j=1}^n I_{j,r}^{(e)} X_{j,r}^{(e)} = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} \mathbf{I}_r^{(e)} \mathbf{X}_r^{(e)}. \quad (3.7)$$

Manera 2: La primer hipótesis del modelo hace mención a los m procesos independientes que representan los *shocks* que causan uno o varios tipos de pérdidas. Por el supuesto de independencia entre ellos, es posible aplicar el Teorema de Superposición para obtener el proceso $S(t)$ como

$$S(t) = \sum_{e=1}^m N^{(e)}(t) \sim Poisson(\lambda),$$

el cual representará el número total de *shocks* que pueden causar pérdidas, siendo $\lambda = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}$. Es importante notar que cada ocurrencia de $S(t)$ es causada por uno y sólo un $N^{(e)}(t)$. De manera análoga al desarrollo del Modelo de Severidades podemos tratar de encontrar cierta variable Y tal que cumpla

$$Z(t) = \sum_{s=1}^{S(t)} Y_s,$$

es decir, indexando sobre el número total de ocurrencias.

Para esto será necesario que dicha variable Y considere tres cosas:

- Tome los valores de las variables X para representar las pérdidas, en caso de haberlas.
- Cada ocurrencia debe tomar en cuenta el total de los n tipos de pérdidas que puede ocasionar.
- Refleje la diferencia entre haber o no una pérdida causada por un *shock* de la clase (e) , pues las variables $I_{j,r}^{(e)}$ aunque son independientes, *no* son idénticamente distribuidas para el índice (e) .

Análogamente al desarrollo anterior, consideramos Y de la forma IX , siendo X el tamaño de las pérdidas e I la variable aleatoria que indica si hubo o no dicha pérdida. Como se deben tomar en cuenta las n posibles pérdidas tendríamos que Y debería tener la forma

$$Y = I_1X_1 + \dots + I_nX_n = \mathbf{I}'\mathbf{X}.$$

Con lo anterior hemos cubierto los primeros dos puntos que debe cumplir Y . Para el último necesitaríamos que el vector \mathbf{I} asuma la estructura de dependencia y parámetros de los vectores *MultiBernoulli* $\mathbf{I}^{(e)}$ en los casos en que la ocurrencia de $S(t)$ sea la de $N^{(e)}(t)$. Dicho de otro modo queremos que $P(\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_s^{(e)})$ sea la misma que la que tiene una ocurrencia $S(t)$ de ser causada por $N^{(e)}(t)$. Notemos que, al ser $S(t)$ construido a partir del Teorema de Superposición, podemos hacer uso del Teorema de Filtración para calcular esta probabilidad.

Lema 3.1. Si $S(t) := \sum_{e=1}^m N^{(e)}(t)$ donde $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ son Procesos Poisson independientes con parámetro $\lambda^{(e)}$, entonces la probabilidad de que una ocurrencia de $S(t)$ sea causada por $N^{(e)}(t)$ es $\lambda^{(e)}/\lambda$, donde $\lambda := \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}$.

Demostración. Para $e = 1, \dots, m$ se satisface que

$$N^{(e)}(t) \stackrel{D}{=} \sum_{s=1}^{S(t)} J_s,$$

donde J_s son variables aleatorias *Bernoulli*(p) que toman el valor de 1 si $S(t)$ es provocada por $N^{(e)}(t)$. Sabiendo que $N^{(e)}(t) \sim \text{Poisson}(\lambda^{(e)}t)$ y $S(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ por el Teorema de Superposición, aplicando el Teorema de Filtración obtenemos

$$N^{(e)}(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t p),$$

3. LOS MODELOS DE SHOCKS

por lo que $\lambda t p = \lambda^{(e)} t$ obteniendo así $p = \lambda^{(e)}/\lambda$, que es la probabilidad buscada.

□

Observemos que no es necesario tomar en cuenta esto para los vectores $\mathbf{X}_r^{(e)}$, pues estos son i.i.d para ambos subíndices.

Entonces, la *Manera 2* de representar al Modelo de Severidades sería como

$$Z(t) = \sum_{s=1}^{S(t)} Y_s, \quad (3.8)$$

donde se tiene que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un *Proceso Poisson*(λ), donde $\lambda = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}$. Las variables aleatorias Y_s son i.i.d. e independientes de $S(t)$ y tienen la representación

$$Y = \mathbf{I}' \mathbf{X}, \quad (3.9)$$

donde \mathbf{X} es el vector que representa el tamaño de las pérdidas e \mathbf{I} es un vector de indicadoras para las posibles pérdidas causadas por diferentes *shocks*, el cual satisface

$$P(\mathbf{I} = \mathbf{I}^{(e)}) = \frac{\lambda^{(e)}}{\lambda},$$

siendo $\mathbf{I}^{(e)}$ los vectores definidos en el Modelo de Severidades.

3.3. El Modelo de Frecuencias 2

En esta sección presentaremos una nueva manera de contar el número de pérdidas provocadas por cierta clase de *shocks*. En lo siguiente omitiremos nuevamente el índice (e) enfocándonos en un solo proceso de *shocks*.

Al formular este primer modelo la pregunta que buscábamos responder era ¿La ocurrencia del proceso pertenece al Tipo j ? y posteriormente la representamos haciendo uso de la variable *Bernoulli* $I_{j,r}$. Recordemos que cada ocurrencia del modelo puede causar de manera simultánea varios tipos de pérdidas. Para obtener este nuevo enfoque en el *Modelo de Frecuencias* sería posible preguntarnos por la cantidad de ocurrencias, no de un tipo sino de vector en particular.

Retomemos el problema ilustrativo de la segunda sección: supongamos que además de la clasificación hecha anteriormente, la aseguradora divide cada tipo de accidente dependiendo de su intensidad en tres niveles: choques menores, refacciones y aquellos donde el choque resulta en la pérdida total del automóvil. Podemos entonces ampliar los tipos de accidentes como

- Tipo 1: choques menores, donde uno o mas autos están asegurados por la compañía.
- Tipo 2: refacciones, donde uno o mas autos están asegurados por la compañía.
- Tipo 3: pérdida total, donde uno o mas autos están asegurados por la compañía.
- Tipo 4: donde además de estar uno o varios autos asegurados, resulta en la muerte de una o mas personas.

Notemos que la cantidad más alta que tendría que pagar la aseguradora es aquella en donde ocurren de manera simultánea los Tipos 3 y 4, es decir, cuando debe cubrirse la pérdida total del auto y los gastos funerarios. Entonces, podemos interesarnos por el número de ocasiones en que un accidente es clasificado en Tipos 3 y 4 de manera simultánea, o sea, el número de ocurrencias del vector $(0, 0, 1, 1)$. Es precisamente esta la situación que aborda el *Modelo de Frecuencias 2*. Lo anterior, puede ser representado por el proceso usando el Teorema de Filtración y la probabilidad $p_{1,2,3,4}(0, 0, 1, 1)$, sin embargo, en esta sección abordaremos una construcción diferente que nos será de utilidad mas adelante.

Análogamente al modo en que hemos procedido hasta ahora, nos apoyaremos en el Teorema de Filtración. Si denotamos al conjunto de posibles pérdidas como $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, buscamos aplicar el resultado a subconjunto $s \in S$, donde S denota a la clase de subconjuntos no vacíos de Ω . En el ejemplo anterior, buscaríamos las ocurrencias para $s = \{3, 4\}$. Para diferenciar los nuevos tipos de frecuencias a los descritos en los Modelos de Frecuencias y Severidades, denotaremos los de este caso como $\tilde{N}_s(t)$, obteniendo así

$$\tilde{N}_s(t) = \sum_{r=1}^{N(t)} J_{s,r},$$

donde $\{J_{s,r}\}_{r=1}^{\infty}$ son variables i.i.d. con distribución *Bernoulli*(p) independientes del proceso $N(t)$. Si denotamos al vector e_s como aquel que tiene valor 1 en la entradas que *sí* pertenecen al conjunto s y 0 en las restantes, se tendría que la probabilidad de éxito p sería

$$p = P(\mathbf{I}_r = e_s).$$

Es importante notar que $p \neq P(I_k = 1, \text{ para todo } k \in s)$, para ver esto, notemos que si buscamos únicamente las realizaciones del vector $(0, 0, 1, 1)$, el evento ' $I_k = 1$, para todo $k \in s$ ' consideraría además los casos $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, y $(1, 1, 1, 1)$. En su lugar, buscamos mas bien la probabilidad del evento ' $I_k = 1$, para todo $k \in s$, $I_k = 0$ para todo $k \in s^c$ '. Para poder expresar el evento anterior apoyándonos en las variables $I_{k,r}$ tenemos el siguiente resultado:

3. LOS MODELOS DE SHOCKS

Teorema 3.1. Dado $s \subseteq \Omega$ la expresión

$$J_{s,r} := \sum_{s': s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{k \in s'} I_{k,r}$$

satisface lo siguiente:

$$J_{s,r} = \begin{cases} 1, & \text{si } I_{k,r} = 1 \text{ para todo } k \in s \text{ y } I_{k,r} = 0 \text{ para todo } k \in s^c, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Antes de proceder a la prueba, será requerido un resultado previo.

Lema 3.2. Para cualesquiera números b_1, b_2, \dots, b_n y $A = \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que

$$\prod_{k \in A} (1 + b_k) = \sum_{A': A' \subseteq A} \prod_{k \in A'} b_k,$$

donde $\prod_{k \in \emptyset} b_k := 1$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n . Para el caso base en que $n = 1$ se obtiene que los subconjuntos de $A = \{1\}$ son \emptyset y $\{1\}$, por lo que

$$1 + b_1 = \prod_{k \in \emptyset} b_k + \prod_{k \in \{1\}} b_k = \sum_{A': A' \subseteq A} \prod_{k \in A'} b_k,$$

cumpliéndose así el resultado deseado. Supongamos ahora que la igualdad anterior es válida para cualquier conjunto con n elementos y consideremos b_1, \dots, b_{n+1} , $A = \{1, 2, \dots, n+1\}$. Aplicando la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned} \prod_{k \in A} (1 + b_k) &= \left(\prod_{k \in A - \{n+1\}} (1 + b_k) \right) (1 + b_{n+1}) \\ &= \prod_{k \in A - \{n+1\}} (1 + b_k) + \prod_{k \in A - \{n+1\}} [(1 + b_k)] b_{n+1} \\ &= \sum_{A' \subseteq A - \{n+1\}} \prod_{k \in A'} b_k + \sum_{A' \subseteq A - \{n+1\}} \prod_{k \in A'} b_k b_{n+1} \\ &= \sum_{A' \subseteq A - \{n+1\}} \prod_{k \in A'} b_k + \sum_{A' \subseteq A - \{n+1\}} \prod_{k \in A' \cup \{n+1\}} b_k. \end{aligned}$$

Observemos que el primer término contiene todos los subconjuntos de $A - \{n+1\}$, o dicho de otro modo, todos los subconjuntos de A que no contienen a $n+1$, mientras que el segundo término contiene a todos los subconjuntos de $A - \{n+1\}$ incluyendo además a $\{n+1\}$, es decir, a todos los subconjuntos de A que contienen a $n+1$. En total se consideran a todos los subconjuntos de A por lo que

$$\prod_{k \in A} (1 + b_k) = \sum_{A': A' \subseteq A} \prod_{k \in A'} b_k.$$

□

Usando este resultado procederemos a la prueba del Teorema 3.1

Demostración. Por simpleza, en la demostración omitiremos el subíndice r . Sabemos que se satisface

$$\prod_{k \in S} I_k \prod_{k \in S^c} (1 - I_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } I_k = 1 \text{ para todo } k \in s \text{ y } I_k = 0 \text{ para todo } k \in s^c, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Usando el Lema anterior con $A = s^c$ y $b_k = -I_k$ para cada k en el lado izquierdo de la igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \prod_{k \in s} I_k \prod_{k \in s^c} (1 - I_k) &= \prod_{k \in s} I_k \sum_{Z: Z \subseteq s^c} \prod_{k \in Z} (-I_k) \\ &= \sum_{Z: Z \subseteq s^c} (-1)^{|Z|} \prod_{k \in Z} I_k \prod_{k \in s} I_k \\ &= \sum_{Z: Z \subseteq s^c} (-1)^{|Z|} \prod_{k \in s \cup Z} I_k. \end{aligned}$$

Notemos que cada subconjunto s' tal que $s \subseteq s'$ tiene asociado un subconjunto en el complemento de s el cual es $s' - s$ que en las igualdades anteriores hemos denotado por Z . Entonces $Z = s' - s$ y $s \cup Z = s'$, además como $s \subseteq s'$, se tiene que $|Z| = |s'| - |s|$. Por lo tanto podemos reescribir la igualdad anterior como

$$\prod_{k \in s} I_k \prod_{k \in s^c} (1 - I_k) = \sum_{s': s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{k \in s'} I_k.$$

3. LOS MODELOS DE SHOCKS

Añadiendo nuevamente el subíndice r concluimos que

$$\sum_{s':s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{k \in s'} I_{k,r} = \begin{cases} 1, & \text{si } I_{k,r} = 1 \text{ para todo } k \in s \text{ y } I_{k,r} = 0 \text{ para todo } k \in s^c, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

□

Usando el resultado anterior podemos representar el número de ocurrencias de los Tipos s como

$$\tilde{N}_s(t) = \sum_{r=1}^{N(t)} \sum_{s':s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{k \in s'} I_{k,r}.$$

Nuevamente, involucrando las m clases de *shocks* tendríamos que el número total de pérdidas sería $\tilde{N}_s(t) = \sum_{e=1}^m \tilde{N}_s^{(e)}(t)$. Además, al estar considerando casos donde el subconjunto s es no-vacío, significa que estamos contando los *shocks* donde sí ocurren pérdidas, es decir, donde $\mathbf{I}_r^{(e)} \neq (0, \dots, 0)$. Sumando sobre la clase S tendríamos que la variable

$$\tilde{N}_T(t) = \sum_{s \in S} \tilde{N}_s(t)$$

denotaría el número de *shocks* que sí resultaron en alguna pérdida hasta el tiempo t .

Finalmente, hacemos el recuento para escribir al nuevo modelo de frecuencias.

Modelo de Frecuencias 2

Supongamos que en cierto sistema se tienen m diferentes clases de *shocks*, los cuales representaremos m Procesos Poisson independientes denotados por $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ cuyas intensidades son $\lambda^{(e)}$ para $e = 1, \dots, m$. Cada *shock* puede causar n diferentes tipos de pérdidas y es clasificado independientemente de otras ocurrencias e independientemente de los procesos $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$. Si S denota la clase de subconjuntos no vacíos de $\{1, \dots, n\}$, entonces el número pérdidas únicamente para el conjunto $s \in S$ estará dado por

$$\tilde{N}_s(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N(t)} \sum_{s':s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{k \in s'} I_{k,r}^{(e)}, \quad (3.10)$$

donde los vectores aleatorios

$$\mathbf{I}_r^{(e)} = \left(I_{1,r}^{(e)}, \dots, I_{n,r}^{(e)} \right)$$

son i.i.d. con distribución *MultiBernoulli* (i.e. $I_{j,r} \sim \text{Bernoulli}$) para $r = 1, 2, \dots$ y además son independientes de $N^{(e)}(t)$, y del índice (e) . Además, el número de *shocks* que sí resultaron en al menos un tipo de pérdida estará dado por

$$\tilde{N}_T(t) = \sum_{s \in S} \tilde{N}_s(t). \quad (3.11)$$

Las igualdades 3.10 y 3.11 comprenden el *Modelo de Frecuencias 2*.

Usando este nuevo modelo, podemos recuperar al Modelo de Frecuencias de la siguiente manera:

$$N_j(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{s: j \in s} \tilde{N}_s^{(e)}(t).$$

Al igual que con el Modelo de Frecuencias es posible ampliar este nuevo planteamiento a un nuevo Modelo de Severidades, sin embargo, no abordaremos ese caso en el presente trabajo.

En general, el Modelo de Frecuencias y el Modelo de Severidades pretenden representar pérdidas de diferentes tipos causadas por varias clases de *shocks*, de las cuales se tienen razones para creer que son dependientes entre ellas. Como vimos en la segunda sección, a pesar de que el planteamiento está pensado para resolver problemas de *Confiabilidad*, al abstraer las ideas empleadas podemos usar el modelo para representar pérdidas de seguros y, como veremos más adelante, en otro tipo de problemas. En el siguiente capítulo exploraremos los resultados analíticos de los modelos anteriores.

Capítulo 4

Resultados Analíticos

Una de las observaciones mas importantes hechas al presentar los Modelos de Frecuencias y Severidades en el capítulo anterior es que, a diferencia de caso clásico de Filtración, esta vez los procesos $N_j(t)$ que representan las pérdidas del Tipo j *no* son independientes entre ellos, además de que la suma total de estas variables, denotada por $N_T(t)$ resultaba ser distinta al proceso inicial $N(t)$, al ser una suma de Procesos Poisson no independientes. En este capítulo exploraremos resultados analíticos referentes a la dependencia entre las variables $N_j(t)$ y su efecto en $N_T(t)$, así como su análogo para $Z_j(t)$ y $Z(t)$. Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en el artículo principal [7].

4.1. La Distribución Conjunta

En el resto del capítulo nos referiremos al Modelo de Frecuencias y al Modelo de Severidades vistos anteriormente, por lo que usaremos la misma notación e hipótesis usadas en el capítulo anterior. Estas podrán ser referidas cuando sea necesario en su sección correspondiente.

El resultado mas importante en el cual será basado todo el trabajo ha sido ya mencionado en el capítulo previo, sin embargo, comenzamos la sección enunciándolo formalmente.

Teorema 4.1. *El proceso estocástico $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ definido en el Modelo de Frecuencias es un Proceso Poisson con intensidad*

$$\lambda_j = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)}.$$

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

Demostración. Es resultado de los Teoremas de Filtración y Superposición. \square

Antes de analizar la distribución de la nueva variable $N_T(t)$ del Modelo de Frecuencias es importante analizar el efecto de la dependencia entre los procesos filtrados $N_j(t)$. Como se mencionó en el capítulo anterior, el hecho de que una ocurrencia del proceso original $N(t)$ pueda ser clasificada de manera simultánea en dos distintos tipos j y k , provoca una influencia en las cantidades $N_j(t)$ y $N_k(t)$ debido al número de ocurrencias coincidentes.

Para entender lo anterior, retomemos el Modelo de Frecuencias con una sola clase de *shock* ($m = 1$) y consideremos dos subíndices $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ fijos. Entonces, dado un Proceso Poisson inicial $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ con intensidad λ , la pertenencia a los tipos j y k de cada *shock* puede ser representada usando las entradas j y k del vector aleatorio *MultiBernoulli* \mathbf{I}_r , es decir, usando $(I_{j,r}, I_{k,r})$. Clasificando cada ocurrencia de $N(t)$ con los valores de estas variables es posible definir a los procesos $M_{i_j, i_k}(t)$ como

$$M_{i_j, i_k}(t) \text{ es el número de shocks donde } I_{j,r} = i_j, I_{k,r} = i_k.$$

Por ejemplo, $M_{1,1}(t)$ representa las ocurrencias de $N(t)$ que pertenecen de manera simultánea a los tipos j y k . Usando la notación del capítulo pasado, tenemos que

$$p_{j,k}(i_j, i_k) = P(I_{j,r} = i_j, I_{k,r} = i_k).$$

Una forma de escribir a los nuevos procesos $M_{i_j, i_k}(t)$ sería la siguiente

$$M_{i_j, i_k}(t) = \sum_{r=1}^{N(t)} 1_{\{I_{j,r}=i_j, I_{k,r}=i_k\}},$$

donde la indicadora sobre la que está indexado $N(t)$ representa la pertenencia simultánea a los tipos j y k . Además ya que se cumple $1_{\{I_{j,r}=i_j, I_{k,r}=i_k\}} = 1$ si y sólo si $I_{j,r} = i_j, I_{k,r} = i_k$, entonces esta variable indicadora tiene distribución *Bernoulli* con probabilidad de éxito $p_{j,k}(i_j, i_k)$. Ya que cada entrada del vector aleatorio \mathbf{I}_r satisface las hipótesis del Teorema de Filtración, esta nueva variable también lo hace al ser una transformación de ellas. Entonces, se satisface que

$$M_{i_j, i_k}(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t p_{j,k}(i_j, i_k)).$$

Volviendo al Modelo de Frecuencias, podemos escribir a los procesos filtrados $N_j(t)$ y $N_k(t)$ como la suma de los *shocks* que pertenecen a ambos tipos simultáneamente y los que pertenecen a un tipo solamente, es decir

$$\begin{aligned} N_j(t) &= M_{1,0}(t) + M_{1,1}(t), \\ N_k(t) &= M_{0,1}(t) + M_{1,1}(t). \end{aligned}$$

Con las ecuaciones anteriores nos podemos dar cuenta de la dependencia entre ambas variables recae sobre el número de ocurrencias que son clasificadas en ambos tipos.

Lema 4.1. *Para las variables $N_j(t)$ y $N_k(t)$ del Modelo de Frecuencias con $m = 1$ y las cantidades $M_{i_j, i_k}(t)$ descritas arriba se cumple que*

(i) *Las variables $M_{i_j, i_k}(t)$ son independientes entre ellas, para $i_j, i_k \in \{0, 1\}$.*

(ii) *La covarianza entre $N_j(t)$ y $N_k(t)$ estará dada por*

$$\text{cov}(N_j(t), N_k(t)) = \lambda t p_{j,k}(1, 1).$$

Demostración. (i) Notemos que cada *shock* cumple uno y sólo uno de los cuatro posibles resultados para el vector $(I_{j,r}, I_{k,r})$, además de cumplirse que

$$p_{j,k}(1, 0) + p_{j,k}(0, 1) + p_{j,k}(1, 1) + p_{j,k}(0, 0) = 1,$$

entonces, por el Teorema de Filtración concluimos que las variables $M_{i_j, i_k}(t)$ son independientes entre ellas.

(ii) Por las propiedades de la covarianza, se satisface que

$$\begin{aligned} \text{cov}(N_j(t), N_k(t)) &= \text{cov}(M_{1,0}(t) + M_{1,1}(t), M_{0,1}(t) + M_{1,1}(t)) \\ &= \text{var}(M_{1,1}(t)) = \lambda t p_{j,k}(1, 1), \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es consecuencia del inciso (i) y la última porque $M_{1,1}(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t p_{j,k}(1, 1))$.

□

Si consideramos el caso en que $n = 2$ (haciendo $j = 1, k = 2$), tendríamos que la suma total en todos los tipos dada por $N_T(t)$ planteada en el Modelo de Frecuencias estaría dada por

$$\begin{aligned} N_T(t) &= N_1(t) + N_2(t) \\ &= M_{1,0}(t) + M_{0,1}(t) + 2M_{1,1}(t). \end{aligned}$$

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

A pesar de la independencia entre las variables $M_{i_j, i_k}(t)$ expuestas en el teorema anterior, *no* podemos aplicar el Teorema de Superposición para concluir que $N_T(t)$ tiene una distribución *Poisson*, pues como se cumple que

$$E[2M_{1,1}(t)] = 2\lambda t p_{j,k}(1, 1)$$

y

$$\text{var}(2M_{1,1}(t)) = 4\text{var}(M_{1,1}(t)) = 4\lambda t p_{j,k}(1, 1),$$

ya que $M_{1,1}(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t p_{j,k}(1, 1))$. Entonces tenemos que

$$E[2M_{1,1}(t)] \neq \text{var}(2M_{1,1}(t)),$$

concluyendo así que la variable aleatoria $2M_{i_j, i_k}(t)$ *no* tiene una distribución *Poisson*, por lo que $N_T(t)$ no es la suma de variables *Poisson* independientes.

El problema anterior no se presenta en el caso cuando $p_{j,k}(1, 1) = 0$, pues de este modo $M_{1,1}(t) = 0$ para cualquier t , obteniendo así que $N_T(t)$ es la suma de variables aleatorias *Poisson* independientes. Sin embargo, notemos que $E[N_T(t)]$ es constante para cualquier caso, siendo $N_T(t)$ suma de variables aleatorias *Poisson* con mismas intensidades. El efecto que pretendemos estudiar (Capítulos 5 y 6) es el de la dependencia entre los sumandos que la conforman y su efecto en la cola derecha de la distribución.

Ahora que estamos seguros de la *no* independencia entre las variables $N_j(t)$ y $N_k(t)$ para un solo proceso inicial, podemos retomar el caso general en que tenemos m procesos independientes $\{N^{(e)}(t)\}$, es decir, supondremos que

$$N_j(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} I_{j,r}^{(e)} \quad \text{y} \quad N_k(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} I_{k,r}^{(e)}$$

para cualquier m entero positivo.

Teorema 4.2. *Para las variables $N_j(t)$ y $N_k(t)$ del Modelo de Frecuencias se cumple que*

(i) *La covarianza entre $N_j(t)$ y $N_k(t)$ esta dada por*

$$\text{cov}(N_j(t), N_k(t)) = t \sum_{e=1}^m \lambda p_{j,k}^{(e)}(1, 1).$$

(ii) La correlación entre $N_j(t)$ y $N_k(t)$ esta dada por

$$\rho(N_j(t), N_k(t)) = \frac{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)}{\sqrt{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_k^{(e)}}}.$$

Demostración. (i) Por el Lema anterior, sabemos que para cada $e \in \{1, 2, \dots, m\}$ se cumple que

$$\text{cov}\left(N_j^{(e)}(t), N_k^{(e)}(t)\right) = \lambda^{(e)} t p_{j,k}^{(e)}(1, 1)$$

Entonces, la covarianza completa estará dada por

$$\begin{aligned} \text{cov}(N_j(t), N_k(t)) &= \text{cov}\left(\sum_{e=1}^m N_j^{(e)}(t), \sum_{f=1}^m N_k^{(f)}(t)\right) \\ &= \sum_{e=1}^m \sum_{f=1}^m \text{cov}\left(N_j^{(e)}(t), N_k^{(f)}(t)\right) \\ &= \sum_{e=1}^m \text{cov}\left(N_j^{(e)}(t), N_k^{(e)}(t)\right) + \sum_{e=1}^m \sum_{e \neq f} \text{cov}\left(N_j^{(e)}(t), N_k^{(f)}(t)\right). \end{aligned}$$

Como los procesos $N^{(e)}(t)$ son independientes, $\text{cov}\left(N_j^{(e)}(t), N_k^{(f)}(t)\right) = 0$ para $e \neq f$. Por lo tanto, lo anterior resulta

$$\begin{aligned} \text{cov}(N_j(t), N_k(t)) &= \sum_{e=1}^m \text{cov}\left(N_j^{(e)}(t), N_k^{(e)}(t)\right) \\ &= \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} t p_{j,k}^{(e)}(1, 1) \\ &= t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1). \end{aligned}$$

(ii) Usando la fórmula de la covarianza del inciso (i), podemos calcular fácilmente una expresión para la correlación. Notemos que

$$\text{var}(N_j(t)) = \text{cov}(N_j(t), N_j(t)) = t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,j}^{(e)}(1, 1).$$

Como se cumple además que

$$p_{j,j}^{(e)}(1, 1) = P(I_j^{(e)} = 1, I_j^{(e)} = 1) = P(I_j^{(e)} = 1) = p_j^{(e)},$$

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

la varianza esta dada por $var(N_j(t)) = t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)}$. Aplicando directamente la definición de correlación usando la fórmula de covarianza y varianza anteriores se tiene

$$\begin{aligned} \rho(N_j(t), N_k(t)) &= \frac{cov(N_j(t), N_k(t))}{\sqrt{var(N_j(t))var(N_k(t))}} \\ &= \frac{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)}{\sqrt{\left(\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)}\right) \left(\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_k^{(e)}\right)}}. \end{aligned}$$

□

Antes de proceder al resultado principal de esta sección, recordaremos que la construcción de los procesos $M_{i_j, i_k}(t)$ en base a un solo proceso $N(t)$ puede implementarse también para el caso en que hay m procesos diferentes de manera análoga a los $N_j(t)$ como

$M_{i_j, i_k}^{(e)}(t)$ representa el número de shocks donde $I_{j,r}^{(e)} = i_j$, $I_{k,r}^{(e)} = i_k$.

Entonces, las ocurrencias totales por los m procesos estarán dadas por

$$M_{i_j, i_k}(t) = \sum_{e=1}^m M_{i_j, i_k}^{(e)}(t).$$

Ya que los procesos $N^{(e)}(t)$ se suponen independientes entre ellos, aplicando el Lema 4.1 concluimos que los nuevos $M_{i_j, i_k}(t)$ descritos arriba son también independientes para $i_j, i_k \in \{0, 1\}$. Además, se cumple claramente que

$$N_j(t) = M_{1,0}(t) + M_{1,1}(t), \quad N_k(t) = M_{0,1}(t) + M_{1,1}(t). \quad (4.1)$$

Con estas observaciones procedemos al resultado principal de la sección.

Teorema 4.3. *Para las variables $N_j(t)$ y $N_k(t)$ del Modelo de Frecuencias se tiene que su distribución conjunta está dada por*

$$\begin{aligned} P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k) &= e^{-\lambda t(p_{j,k}(1,1) + p_{j,k}(1,0) + p_{j,k}(0,1))} \times \\ &\sum_{i=0}^{\min\{n_j, n_k\}} \frac{(\lambda t p_{j,k}(1, 1))^i (\lambda t p_{j,k}(1, 0))^{n_j - i} (\lambda t p_{j,k}(0, 1))^{n_k - i}}{i!(n_j - i)!(n_k - i)!}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $\lambda := \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}$ y

$$p_{j,k}(i_j, i_k) := \lambda^{-1} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(i_j, i_k), \quad i_j, i_k \in \{0, 1\}.$$

Demostración. Calcularemos la probabilidad anterior condicionando con el número de ocurrencias simultáneas, es decir, condicionando con el proceso $M_{1,1}(t)$. La probabilidad conjunta resulta

$$\begin{aligned} P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k | M_{1,1}(t) = i) P(M_{1,1}(t) = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\min\{n_j, n_k\}} P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k | M_{1,1}(t) = i) P(M_{1,1}(t) = i), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que el máximo número de coincidencias es el mínimo entre n_j y n_k . Para la probabilidad conjunta condicionada a $M_{1,1}(t)$ se tiene que

$$\begin{aligned} P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k | M_{1,1}(t) = i) &= P(M_{1,0}(t) = n_j - i, M_{0,1}(t) = n_k - i | M_{1,1}(t) = i) \\ &= P(M_{1,0}(t) = n_j - i) P(M_{0,1}(t) = n_k - i), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es resultado de la independencia entre las variables $M_{i_j, i_k}(t)$. Sustituyendo en la probabilidad buscada obtenemos

$$\begin{aligned} P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k) &= \sum_{i=0}^{\min\{n_j, n_k\}} P(M_{1,0}(t) = n_j - i) P(M_{0,1}(t) = n_k - i) P(M_{1,1}(t) = i). \end{aligned}$$

Sabiendo que $M_{i_j, i_k}^{(e)}(t) \sim \text{Poisson} \left(\lambda^{(e)} t p_{j,k}^{(e)}(i_j, i_k) \right)$, podemos usar el Teorema de Superposición para concluir que

$$M_{i_j, i_k}(t) \sim \text{Poisson} \left(t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(i_j, i_k) \right).$$

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

Tomando los valores de λ y $p_{j,k}(i_j, i_k)$ descritos en el enunciado del teorema, tenemos entonces que $M_{i_j, i_k}(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t p_{j,k}(i_j, i_k))$. Entonces, para i fijo y agrupando lo términos exponenciales obtenemos

$$\begin{aligned} & P(M_{1,1}(t) = i)P(M_{1,0}(t) = n_j - i)P(M_{0,1}(t) = n_k - i) \\ & = e^{-\lambda t(p_{j,k}(1,1)+p_{j,k}(1,0)+p_{j,k}(0,1))} \frac{(\lambda t p_{j,k}(1,1))^i (\lambda t p_{j,k}(1,0))^{n_j-i} (\lambda t p_{j,k}(0,1))^{n_k-i}}{i!(n_j-i)!(n_k-i)!}. \end{aligned}$$

Sumando sobre los posibles valores de i obtenemos el resultado deseado. \square

Para el caso $n = 2$ es posible expresar la distribución de pérdidas totales $N_T(t)$ usando la distribución bivariada como

$$\begin{aligned} P(N_T(t) = n_T) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(N_1(t) = i, N_2(t) = n_T - i) \\ &= \sum_{i=0}^{n_T} P(N_1(t) = i, N_2(t) = n_T - i), \end{aligned}$$

Recordando que $N_T(t)$ es la suma de v.a. Poisson, es notorio el efecto de la dependencia entre los sumandos y la ocurrencia de eventos múltiples si lo contrastamos con el Teorema de Superposición, en que la suma de v.a. Poisson independientes resultaba nuevamente en una v.a. Poisson.

Por otro lado, si consideramos el caso cuando $p_{j,k}(1,1) = 0$, los términos de la suma donde $i \neq 0$ son nulos, resultando

$$\begin{aligned} & P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k) \\ & = e^{-\lambda t(p_{j,k}(1,0)+p_{j,k}(0,1))} \frac{(\lambda t p_{j,k}(1,0))^{n_j} (\lambda t p_{j,k}(0,1))^{n_k}}{n_j! n_k!}. \end{aligned}$$

Del supuesto anterior y la definición de $p_{j,k}(1,1)$ concluimos que $p_{j,k}^{(e)}(1,1) = 0$ para cada superíndice $e \in \{1, 2, \dots, m\}$. Además, por el sistema de ecuaciones 3.2 obtenemos $p_{j,k}^{(e)}(1,0) = p_j^{(e)}$. Por lo tanto,

$$p_{j,k}(1,0) = \lambda^{-1} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)}.$$

Entonces, $\lambda t p_{j,k}(1,0)$ y $\lambda t p_{j,k}(0,1)$ resultan ser los parámetros de las variables $N_j(t)$ y $N_k(t)$ respectivamente, es decir, se cumple que

$$P(N_j(t) = n_j, N_k(t) = n_k) = P(N_j(t) = n_j)P(N_k(t) = n_k),$$

cumpléndose así la independencia en las ocurrencias de los tipos j y k . Lo anterior se puede resumir en la siguiente caracterización:

Corolario 4.1. *Las variables $N_j(t)$ y $N_k(t)$ del Modelo de Frecuencias son independientes si y sólo si $p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$ para todo $e = 1, \dots, m$.*

Más aún, tenemos también el siguiente resultado:

Corolario 4.2. *Las variables $N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$ del Modelo de Frecuencias no son independientes si se cumple que $\sum_{j=1}^n p_j^{(e)} > 1$ para algún $e \in \{1, 2, \dots, m\}$.*

Demostración. Usando argumento por contraposición, supongamos que $N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$ son independientes, entonces por el Corolario anterior tenemos que para cualesquiera $j \neq k$ se tiene que $p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$. Entonces, si $\mathbf{0}$ denota el vector de longitud n cuyas entradas son 0 tenemos

$$\begin{aligned} P\left(\mathbf{I}_r^{(e)} \neq \mathbf{0}\right) &= P\left(\bigcup_{j=1}^n \{I_{j,r}^{(e)} = 1\}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n P\left(I_{j,r}^{(e)} = 1\right) \\ &= \sum_{j=1}^n p_j^{(e)}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es producto de la hipótesis y la fórmula de unión finita en probabilidad (Teorema A.2 del apéndice). Se cumple entonces que

$$\sum_{j=1}^n p_j^{(e)} = P\left(\mathbf{I}_r^{(e)} \neq \mathbf{0}\right) \leq 1,$$

probando el resultado buscado. □

4.2. Los Tiempos de Llegada

Comenzaremos esta sección recordando la pregunta que nos hicimos en el primer capítulo: *¿qué son los Tiempos de Inter-arribo?* Intuitivamente, se trata del

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

tiempo que transcurre entre dos eventos consecutivos de algún proceso estocástico. De esta idea podemos definir el *Primer Tiempo de Inter-arribo*, es decir, el momento en que ocurre el primer evento de cierto proceso de la siguiente manera:

Definición 4.1. *Dado $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico, diremos que el Primer Tiempo de Llegada es la variable aleatoria T , la cual está definida como*

$$T := \inf\{t : N(t) > 0\}.$$

El resultado siguiente es muy conocido, pero lo enunciamos formalmente ya que será de suma importancia en esta sección.

Teorema 4.4. *Dado $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ un Proceso Poisson con intensidad λ , entonces que la función de densidad del Primer Tiempo de Llegada, denotado por la variable T , está dada por*

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

es decir, T tiene una distribución exponencial con parámetro $1/\lambda$ ($\exp(1/\lambda)$).

Como los procesos $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ definidos en el Modelo de Frecuencias son Procesos Poisson, por el Teorema anterior es fácil conocer la distribución para los primeros tiempos de llegada para cada j , sin embargo, ya que las variables $N_j(t)$ no son independientes (como hemos mencionado varias veces hasta ahora) es interesante preguntarnos por la distribución conjunta de sus tiempos de llegada. Al igual que en la sección anterior, nuestra meta es calcular la probabilidad de supervivencia conjunta para los primeros tiempos de llegada de los procesos $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{N_k(t)\}_{t \geq 0}$.

Dados $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $j \neq k$, denotaremos por T_j y T_k al los primeros tiempos de llegada para los procesos $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{N_k(t)\}_{t \geq 0}$ respectivamente. En este punto retomaremos los procesos $\{M_{i_j, i_k}(t)\}_{t \geq 0}$ de la sección anterior, los cuales son Procesos Poisson con intensidad $\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(i_j, i_k)$ y denotando sus primeros tiempos de llegada como Z_{i_j, i_k} . Estas variables indican el primer momento en que ocurre el vector (i_j, i_k) . Por ejemplo, $Z_{1,1}$ denotará el primer momento en que hubo ocurrencias simultáneas de tipos j y k .

De la definición y la ecuación 4.1 se cumple que

$$T_j = \inf\{t : N_j(t) > 0\} = \inf\{t : M_{1,0}(t) + M_{1,1}(t) > 0\} = \min\{Z_{1,0}, Z_{1,1}\}.$$

Análogamente, se tiene que

$$T_k = \min\{Z_{0,1}, Z_{1,1}\}.$$

Recordemos por el Lema 4.1 que las variables $M_{i_j, i_k}(t)$ son independientes entre ellas. Con estas herramientas enunciaremos el siguiente resultado:

Teorema 4.5. *Dados $\{N_i(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ con $i \neq j$ los procesos definidos en el Modelo de Frecuencias, se cumple que la probabilidad de supervivencia conjunta para los primeros tiempos de llegada T_j y T_k respectivamente, esta dada por*

$$\begin{aligned} P(T_j > t_j, T_k > t_k) \\ = \exp\left(-t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)} - t_k \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_k^{(e)} + \min\{t_j, t_k\} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)\right). \end{aligned}$$

Demostración. Por las igualdades anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} P(T_j > t_j, T_k > t_k) &= P(\min\{Z_{1,0}, Z_{1,1}\} > t_j, \min\{Z_{0,1}, Z_{1,1}\} > t_k) \\ &= P(Z_{1,0} > t_j, Z_{0,1} > t_k, Z_{1,1} > \max\{t_j, t_k\}) \\ &= P(Z_{1,0} > t_j)P(Z_{0,1} > t_k)P(Z_{1,1} > \max\{t_j, t_k\}), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por la independencia de las variables $M_{i_j, i_k}(t)$ (Lema 4.1). Aplicando el Teorema 4.4 a estas variables tenemos que

$$P(Z_{i_j, i_k} > t) = \exp\left(-t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(i_j, i_k)\right).$$

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

Sustituyendo lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
 P(T_j > t_j, T_k > t_k) &= \exp\left(-t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 0) - t_k \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(0, 1) \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \max\{t_j, t_k\} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)\right) \\
 &= \exp\left(-\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \left(t_j p_{j,k}^{(e)}(1, 0) + t_k p_{j,k}^{(e)}(0, 1) + \max\{t_j, t_k\} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)\right)\right).
 \end{aligned}$$

Del sistema de ecuaciones 3.2 del capítulo anterior sabemos que

$$p_{j,k}^{(e)}(1, 0) = p_j^{(e)} - p_{j,k}^{(e)}(1, 1)$$

y

$$p_{j,k}^{(e)}(0, 1) = p_k^{(e)} - p_{j,k}^{(e)}(1, 1),$$

entonces

$$\begin{aligned}
 &t_j p_{j,k}^{(e)}(1, 0) + t_k p_{j,k}^{(e)}(0, 1) + \max\{t_j, t_k\} p_{j,k}^{(e)}(1, 1) \\
 &= t_j p_j^{(e)} + t_k p_k^{(e)} - (t_j + t_k) p_{j,k}^{(e)}(1, 1) + \max\{t_j, t_k\} p_{j,k}^{(e)}(1, 1) \\
 &= t_j p_j^{(e)} + t_k p_k^{(e)} - \min\{t_j, t_k\} p_{j,k}^{(e)}(1, 1).
 \end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned}
 P(T_j > t_j, T_k > t_k) &= \exp\left(-\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \left(t_j p_j^{(e)} + t_k p_k^{(e)} - \min\{t_j, t_k\} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)\right)\right) \\
 &= \exp\left(-t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)} - t_k \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_k^{(e)} + \min\{t_j, t_k\} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)\right),
 \end{aligned}$$

probando el resultado buscado. \square

Una de las propiedades más conocidas de la distribución *exponencial* es la llamada *pérdida de memoria*. Si pensamos que la variable $T \sim \exp(1/\lambda)$ indica

la vida útil de algún dispositivo, esta propiedad nos diría que la probabilidad de que la vida útil sea mayor a un tiempo $s + t$ dado que ya ha funcionado al menos durante un tiempo t , será la misma probabilidad original de sobrevivir un tiempo s , es decir, el dispositivo, *no recuerda* que ha estado en funcionamiento durante el tiempo t . Lo anterior se expresa usando a la variable T de la siguiente manera

$$P(T > s + t | T > t) = P(T > s).$$

Ya que hemos encontrado una manera de expresar la función de supervivencia conjunta para los primeros tiempos de llegada, nos gustaría que se cumpliera una propiedad similar a la *pérdida de memoria*. Una forma de generalizar esta propiedad para el caso de la distribución conjunta de T_j y T_k podría ser

$$P(T_j > s_j + t_k, T_k > s_k + t_k | T_j > t_j, T_k > t_k) = P(T_j > s_j, T_k > s_k)$$

para cualesquiera $s_j, s_k, t_j, t_k \geq 0$. Sin embargo, la ecuación de arriba nos lleva a concluir la independencia entre las variables aleatorias T_j y T_k , lo cual no es correcto si sus procesos correspondientes *no* son independientes, como es este caso. La versión conjunta de la *pérdida de memoria* que se cumple es la enunciada a continuación.

Teorema 4.6. Sean $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{N_k(t)\}_{t \geq 0}$ con $i \neq j$ los procesos definidos en el Modelo de Frecuencias. Si T_j, T_k son los primeros tiempos de llegada respectivamente satisfacen

$$P(T_j > s_j + t, T_k > s_k + t | T_j > t, T_k > t) = P(T_j > s_j, T_k > s_k)$$

para cualesquiera $s_j, s_k, t \geq 0$.

Demostración. Por la demostración del teorema anterior, sabemos que se puede escribir a la probabilidad de supervivencia conjunta de T_j y T_k como

$$P(T_j > t_j, T_k > t_k) = P(Z_{1,0} > t_j)P(Z_{0,1} > t_k)P(Z_{1,1} > \max\{t_j, t_k\}),$$

donde las variables Z_{i_j, i_k} denotan el primer tiempo de llegada para los procesos $\{M_{i_j, i_k}(t)\}_{t \geq 0}$ del Teorema 4.1. Usando la definición de probabilidad condicional,

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

concluimos que

$$P(T_j > s_j + t, T_k > s_k + t | T_j > t, T_k > t) = \frac{P(T_j > s_j + t, T_k > s_k + t)}{P(T_j > t, T_k > t)}.$$

Sustituyendo las probabilidades de Z_{i_j, i_k} en la ecuación de arriba se obtiene

$$\frac{P(Z_{1,0} > s_j + t)}{P(Z_{1,0} > t)} \frac{P(Z_{0,1} > s_k + t)}{P(Z_{0,1} > t)} \frac{P(Z_{1,1} > \max\{s_j + t, s_k + t\})}{P(Z_{1,1} > t)}.$$

Debido a que $\max\{s_j + t, s_k + t\} = \max\{s_j, s_k\} + t$ y que las variables Z_{i_j, i_k} tienen la propiedad de *pérdida de memoria* por tener distribución *exponencial*, la probabilidad de supervivencia conjunta condicional resulta

$$\begin{aligned} &P(T_j > s_j + t, T_k > s_k + t | T_j > t, T_k > t) \\ &= P(Z_{1,0} > s_j + t | Z_{1,0} > t) P(Z_{0,1} > s_k + t | Z_{0,1} > t) \\ &\quad \times P(Z_{1,1} > \max\{s_j, s_k\} + t | Z_{1,1} > t) \\ &= P(Z_{1,0} > s_j) P(Z_{0,1} > s_k) P(Z_{1,1} > \max\{s_j, s_k\}) \\ &= P(T_j > s_j, T_k > s_k), \end{aligned}$$

obteniendo el resultado deseado. \square

Si definimos a la función de supervivencia $\bar{F}(t)$ para la variable T como sigue

$$\bar{F}(t) := P(T > t).$$

es fácil ver de la definición de probabilidad condicional que la propiedad de *pérdida de memoria* es equivalente a

$$\bar{F}(s + t) = \bar{F}(s) \bar{F}(t),$$

mientras que para la probabilidad conjunta, el resultado del teorema anterior es equivalente

$$\bar{F}(s_j + t, s_k + t) = \bar{F}(s_j, s_k) \bar{F}(t, t).$$

Si $\bar{F}_j(t)$ y $\bar{F}_k(t)$ son las funciones de supervivencia para T_j y T_k respectivamente se satisface que

$$\bar{F}_i(t) = P(T_i > t) = \exp\left(-t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_i^{(e)}\right) \quad (4.3)$$

para $i = j, k$. Sustituyendo esto en la probabilidad de supervivencia conjunta del Teorema 4.5 como

$$\begin{aligned} P(T_j > t_j, T_k > t_k) &= \bar{F}_j(t_j) \bar{F}_k(t_k) \exp\left(\min\{t_j, t_k\} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)\right) \\ &= \bar{F}_j(t_j) \bar{F}_k(t_k) \min\left(\exp\left(t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)\right), \exp\left(t_k \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)\right)\right), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por la monotonía de la función exponencial. Definiendo las cantidades α_j y α_k como

$$\alpha_j := \frac{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)}{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_j^{(e)}} \quad \text{y} \quad \alpha_k := \frac{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)}{\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_k^{(e)}}$$

tenemos de la ecuación 4.3 que

$$\bar{F}_j(t_j)^{-\alpha_j} = \exp\left(t_j \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)\right), \quad \bar{F}_k(t_k)^{-\alpha_k} = \exp\left(t_k \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1)\right).$$

Retomando la función de supervivencia conjunta, se tiene que

$$P(T_j > t_j, T_k > t_k) = \begin{cases} \bar{F}_j(t_j)^{1-\alpha_j} \bar{F}_k(t_k), & \text{si } \bar{F}_j(t_j)^{\alpha_j} \geq \bar{F}_k(t_k)^{\alpha_k}, \\ \bar{F}_j(t_j) \bar{F}_k(t_k)^{1-\alpha_k}, & \text{si } \bar{F}_j(t_j)^{\alpha_j} \leq \bar{F}_k(t_k)^{\alpha_k}, \end{cases}$$

o mas elegantemente

$$P(T_j > t_j, T_k > t_k) = C_{\alpha_j, \alpha_k}(\bar{F}_j(t_j), \bar{F}_k(t_k)),$$

donde

$$C_{\alpha_j, \alpha_k}(u, v) = \begin{cases} u^{1-\alpha_j} v, & \text{si } u^{\alpha_j} \geq v^{\alpha_k}, \\ uv^{1-\alpha_k}, & \text{si } u^{\alpha_j} \leq v^{\alpha_k}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Esta función es conocida como la *Cópula Marshall-Olkin*, la cual especifica una estructura de dependencia para cualesquiera variables aleatorias. En el artículo [10] se desarrolla un planteamiento similar al que hemos presentado resultando en la función $C_{\alpha_j, \alpha_k}(u, v)$.

4.3. Los Momentos de $Z(t)$

En esta sección nos concentraremos en el mas general *Modelo de Severidades* descrito en el capítulo anterior. Habiendo encontrado una expresión para la covarianza de la frecuencia de pérdidas, tenemos también una expresión para la covarianza de las severidades. Para esto, usaremos el siguiente resultado previo

Lema 4.2. *Sea N una variable aleatoria Poisson(λ) y $(A_r, B_r)_{r=1}^{\infty}$ familia de vectores aleatorios i.i.d. e independientes de N tales que A_r es independiente de B_s para todo $r \neq s$. Entonces para los Procesos Poisson Compuestos definidos por $N_1 := \sum_{r=1}^N A_r$ y $N_2 := \sum_{r=1}^N B_r$ se satisface que*

$$\text{cov}(N_1, N_2) = E[N]E[AB].$$

Con este resultado en mano podemos calcular la covarianza entre las variables $Z_j(t)$ y $Z_k(t)$.

Teorema 4.7. *La covariaza de las variables $Z_j(t)$ y $Z_k(t)$ del Modelo de Severidades estará dada por*

$$\text{cov}(Z_j(t), Z_k(t)) = E[X_j X_k] \text{cov}(N_j(t), N_k(t)).$$

Demostración. Haciendo a $A_r = I_{j,r}^{(e)} X_{j,r}^{(e)}$ y $B_r = I_{k,r}^{(e)} X_{k,r}^{(e)}$ en el lema anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{cov} \left(Z_j^{(e)}(t), Z_k^{(e)}(t) \right) &= E \left[N^{(e)}(t) \right] E \left[I_{j,r}^{(e)} X_{j,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} X_{k,r}^{(e)} \right] \\ &= E \left[N^{(e)}(t) \right] E \left[X_{j,r}^{(e)} X_{k,r}^{(e)} \right] E \left[I_{j,r}^{(e)} I_{k,r}^{(e)} \right], \end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta por la independencia entre las variables $I_{j,r}^{(e)}$ y $X_{j,r}^{(e)}$. Recordemos que las $X_{j,r}^{(e)}$ son i.i.d. para los subíndices r y e , mientras que las $I_{j,r}^{(e)}$ lo son para r , por lo que omitiendo subíndices innecesarios en la última ecuación se tiene

$$\text{cov} \left(Z_j^{(e)}(t), Z_k^{(e)}(t) \right) = E \left[X_j X_k \right] E \left[N^{(e)}(t) \right] E \left[I_j^{(e)} I_k^{(e)} \right].$$

Sustituyendo en la expresión para la covarianza deseada resulta lo siguiente

$$\begin{aligned}
cov(Z_j(t), Z_k(t)) &= cov\left(\sum_{e=1}^m Z_j^{(e)}(t), \sum_{f=1}^m Z_k^{(f)}(t)\right) \\
&= \sum_{e=1}^m cov\left(Z_j^{(e)}(t), Z_k^{(e)}(t)\right) \\
&= \sum_{e=1}^m E[X_j X_k] E[N^{(e)}(t)] E\left[I_j^{(e)} I_k^{(e)}\right] \\
&= E[X_j X_k] t \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j,k}^{(e)}(1, 1) \\
&= E[X_j X_k] cov(N_j(t), N_k(t)),
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad sustituimos la expresión para $cov(N_j(t), N_k(t))$ del Teorema 4.2. Notemos que nuevamente omitimos los términos con subíndices e y f con $e \neq f$ por la independencia entre los procesos $N^{(e)}(t)$. \square

Como el título lo indica, la meta de esta sección es encontrar los momentos de la variable $Z(t)$ presentada en el Modelo de Severidades, es decir, el tamaño de las pérdidas totales, las cuales estaban representadas como

$$Z(t) = \sum_{j=1}^n Z_j(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^{(e)} I_{j,r}^{(e)}.$$

En igualdad 3.8 del capítulo previo logramos escribir a $Z(t)$ de la siguiente manera

$$Z(t) = \sum_{s=1}^{S(t)} Y_s. \quad (4.5)$$

Ya que usaremos esta expresión para los resultados posteriores, será necesario tener en cuenta la sección correspondiente del capítulo anterior.

Teorema 4.8. *El p -ésimo momento de la variable aleatoria Y descrita en la ecuación 3.8 esta dado por*

$$E[Y^p] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_p=1}^n E[X_{j_1} \dots X_{j_p}] \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j_1, \dots, j_p}^{(e)}(1, \dots, 1).$$

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

Demostración. Ya que $P(\mathbf{I} = \mathbf{I}^{(e)}) = \frac{\lambda^{(e)}}{\lambda}$, entonces se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} E[Y^p] &= E[(\mathbf{I}'\mathbf{X})^p] \\ &= \sum_{e=1}^m E[(\mathbf{I}'\mathbf{X})^p | \mathbf{I} = \mathbf{I}^{(e)}] P(\mathbf{I} = \mathbf{I}^{(e)}) \\ &= \sum_{e=1}^m \frac{\lambda^{(e)}}{\lambda} E[(\mathbf{I}^{(e)}\mathbf{X})^p] \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} E \left[\sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_p=1}^n I_{j_1}^{(e)} \dots I_{j_p}^{(e)} X_{j_1} X_{j_p} \right], \end{aligned}$$

donde la última igualdad es resultado de que $(\mathbf{I}^{(e)}\mathbf{X})^p$ es de la forma $(i_1x_1 + \dots + i_nx_n)^p$. Usando la linealidad de la esperanza y la independencia entre las variables I y X obtenemos que

$$\begin{aligned} E[Y^p] &= \frac{1}{\lambda} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_p=1}^n E[I_{j_1}^{(e)} \dots I_{j_p}^{(e)}] E[X_{j_1} \dots X_{j_p}] \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_p=1}^n p_{j_1, \dots, j_p}^{(e)}(1, \dots, 1) E[X_{j_1} \dots X_{j_p}] \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_p=1}^n E[X_{j_1} \dots X_{j_p}] \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j_1, \dots, j_p}^{(e)}(1, \dots, 1). \end{aligned}$$

□

Un resultado conocido para el Proceso Poisson Compuesto es precisamente una expresión para su función generadora de momentos, la cual depende de la variable que compone sus sumandos. Usando la representación 4.5, si $M_Y(x)$ denota la función generadora de momentos de la variable Y descrita en la ecuación 3.8, la función generadora de momentos de $Z(t)$ estará dada por

$$M_{Z(t)}(x) = e^{\lambda t(M_Y(x)-1)}$$

Para calcular el p -ésimo momento de $Z(t)$ será necesario el siguiente resultado:

Lema 4.3. *Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ clase C^n , se tiene que la n -ésima*

derivada de $f(x)g(x)$ está dada por

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)g(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

Finalmente podemos proceder al resultado principal de la sección.

Teorema 4.9. *El p -ésimo momento de la variable $Z(t)$ del Modelo de Severidades esta dado por*

$$E[Z(t)^p] = \lambda t \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} E[Y^{k+1}] E[Z(t)^{p-k-1}],$$

donde

$$E[Y^p] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_p=1}^n E[X_{j_1} \dots X_{j_p}] \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j_1, \dots, j_p}^{(e)}(1, \dots, 1).$$

Demostración. Notemos que la primer derivada de $M_{Z(t)}(x)$ esta dada por

$$\frac{d}{dx} M_{Z(t)}(x) = \lambda t M_Y^{(1)}(x) M_{Z(t)}(x),$$

Para calcular la p -ésima derivada aplicamos el lema anterior para $n = p - 1$, $f(x) = M_Y^{(1)}(x)$ y $g(x) = M_{Z(t)}(x)$ obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dx^p} M_{Z(t)}(x) &= \lambda t \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} M_Y^{(1)}(x) M_{Z(t)}(x) \\ &= \lambda t \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} M_Y^{(k+1)}(x) M_{Z(t)}^{(p-k-1)}(x) \end{aligned}$$

ya que $\frac{d^k}{dx^k} M_Y^{(1)}(t) = M_Y^{(k+1)}(x)$. Evaluando en $x = 0$ y usando las propiedades de la función generadora de momentos concluimos que

$$\begin{aligned} E[Z(t)^p] &= \frac{d^p}{dx^p} M_{Z(t)}(0) \\ &= \lambda t \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} M_Y^{(k+1)}(0) M_{Z(t)}^{(p-k-1)}(0) \\ &= \lambda t \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} E[Y^{k+1}] E[Z(t)^{p-k-1}]. \end{aligned}$$

□

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

Ya que los momentos de la variable Y dependen de las probabilidades conjuntas de las $I_{j,r}^{(e)}$ y de los productos de las $X_{j,r}^{(e)}$, el efecto que tiene la estructura de dependencia en los vectores se verá reflejado en la forma de la distribución de $Z(t)$. En el siguiente capítulo estudiaremos dicho efecto comparando los resultados entre diversas estructuras de dependencia para los vectores $\mathbf{I}_r^{(e)}$ y $\mathbf{X}_r^{(e)}$, así como del caso base en que utilizamos sumas de Procesos Poisson independientes.

Para concluir esta sección enunciaremos un resultado importante que hemos pasado por alto hasta ahora.

Teorema 4.10. *Para la variable $Z(t)$ del Modelo de Severidades se satisface*

$$(i) \quad E[Z(t)] = \sum_{j=1}^n E[X_j]E[N_j(t)].$$

$$(ii) \quad \text{var}(Z(t)) = \lambda t E[Y^2].$$

donde $\lambda = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)}$.

Demostración. Para probar (i) se satisface por la definición de $Z(t)$ y por la independencia entre las variables X_j e $I_{j,r}^{(e)}$ que

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E \left[\sum_{j=1}^n \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} X_{j,r}^e I_{j,r}^e \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} E[X_{j,r}^e] E[I_{j,r}^e] \\ &= \sum_{j=1}^n E[X_j] \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} E[I_{j,r}^e] \\ &= \sum_{j=1}^n E[X_j] E[N_j(t)]. \end{aligned}$$

Para el punto (ii) haremos uso de la ecuación 4.5. Usando el Lema 4.2 para $A = B = Y$ tendremos que

$$\text{var}(Z(t)) = \text{cov}(Z(t), Z(t)) = \lambda t E[Y^2].$$

□

4.4. Las Variables $\widetilde{N}_s(t)$

En esta sección retomaremos el Modelo de Frecuencias 2, el cual nos ayudará a encontrar de manera explícita la probabilidad $P(N_T(t) = k)$ del Modelo de Frecuencias. Antes de abordar el tema, presentaremos algunos resultados sobre el Modelo de Frecuencias 2. Recordemos que S denota la clase de subconjuntos no vacíos de $\{1, 2, \dots, n\}$, es decir, de los tipos de ocurrencias.

Teorema 4.11. *Los procesos $\{\widetilde{N}_s(t)\}_{t \geq 0}$ descritos en el Modelo de Frecuencias 2 son Procesos Poisson con intensidad*

$$\lambda_s := \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{s': s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} p_{s'}^{(e)},$$

donde

$$p_{s'}^{(e)} = P \left(\prod_{k \in s'} I_{k,r}^{(e)} = 1 \right).$$

Demostración. Sea $s \in S$. Tomaremos la siguiente notación:

$$J_{s,r}^{(e)} := \sum_{s': s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{k \in s'} I_{k,r}^{(e)}.$$

Entonces para cualquier $s \in S$ tendremos que

$$\widetilde{N}_s(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} J_{s,r}^{(e)}.$$

Por el Teorema 3.1 del capítulo anterior, las variables $J_{s,r}^{(e)}$ son *Bernoulli* y además, usando que la esperanza de variables aleatorias *Bernoulli* coincide con la probabilidad de éxito se tiene que

$$\begin{aligned} P(J_{s,r}^{(e)} = 1) &= E[J_{s,r}^{(e)}] \\ &= E \left[\sum_{s': s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} \prod_{k \in s'} I_{k,r}^{(e)} \right] = \sum_{s': s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} E \left[\prod_{k \in s'} I_{k,r}^{(e)} \right] \\ &= \sum_{s': s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} P \left(\prod_{k \in s'} I_{k,r}^{(e)} = 1 \right) = \sum_{s': s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} p_{s'}^{(e)}, \end{aligned}$$

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

donde la tercer igualdad se cumple por la linealidad de la esperanza y $p_{s'}^{(e)}$ es la cantidad definida en el enunciado del teorema. Al ser una transformación lineal de las variables $I_{j,r}^{(e)}$, las variables $J_{s,r}^{(e)}$ cumplen las hipótesis del Teorema de Filtración, por lo que $\{\tilde{N}_s^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson con parámetro $\lambda^{(e)} \sum_{s':s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} p_{s'}^{(e)}$. Por la independencia entre los procesos $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ podemos aplicar el Teorema de Superposición y concluir que el proceso $\{\tilde{N}_s(t)\}_{t \geq 0}$ definido por $\tilde{N}_s(t) = \sum_{e=1}^m \tilde{N}_s^{(e)}(t)$ es un Proceso Poisson con intensidad $\lambda_s := \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{s':s \subseteq s'} (-1)^{|s'| - |s|} p_{s'}^{(e)}$. \square

A diferencia del Modelo de Frecuencias, estas variables sí resultan ser independientes entre ellas. Ya que podemos escribir al Modelo de Frecuencias a partir de las variables $\tilde{N}_s(t)$, este resultado será de gran utilidad.

Teorema 4.12. *Las variables $\tilde{N}_s(t)$ definidas en el Modelo de Frecuencias 2 son independientes para $s \in S$.*

Demostración. Dado $e \in \{1, \dots, m\}$, tenemos que cada ocurrencia del proceso $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ pertenecerá a uno y sólo un subconjunto $s \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Ya que las variables $J_{s,r}^{(e)}$ cumplen las hipótesis del Teorema de Filtración por el resultado anterior, tenemos que las variables aleatorias $\tilde{N}_s^{(e)}(t)$ son independientes para $s \in S \cup \{\emptyset\}$. Por lo tanto, son independientes para $s \in S$. Por la independencia entre los procesos $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ y el Teorema de Superposición obtenemos que las variables $N_s(t)$ son independientes para $s \in S$. \square

Usando esto podemos obtener una caracterización final para la independencia de las variables $N_j(t)$ del Modelo de Frecuencias.

Corolario 4.3. *Las variables $N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)$ definidas en el Modelo de Frecuencias son independientes si y sólo si $p_{j,k}^{(e)}(1, 1) = 0$ para cualesquiera (e) y $j \neq k$.*

Demostración. Si suponemos que $p_{j,k}^{(e)} = 0$ para cualesquiera (e) y $j \neq k$, por la expresión usada para las intensidades λ_s en el Teorema 4.11 se tiene por la

monotonía de la probabilidad que para cualquier $s \in S$ con $|s| \geq 2$, $\lambda_s = 0$, lo que implica que $\widetilde{N}_s(t) = 0$ para dichos subconjuntos s . Entonces se cumple que $N_{\{j\}}(t) = N_j(t)$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Por el teorema anterior, estas variables son independientes entre ellas. Suponiendo que $p_{j,k}^{(e)}(1, 1) > 0$ para algunos (e) y $j \neq k$, se cumple por el Corolario 4.1 que $N_j(t)$ y $N_k(t)$ *no* son independientes. \square

Finalmente, recordemos que la variable $\widetilde{N}_T(t)$ representa el número de *shocks* que resultaron en alguna pérdida para algún subconjunto $s \in S$. Por otro lado, dada su definición y el teorema anterior, usando el Teorema de Superposición podemos concluir que a diferencia de $N_T(t)$ en el Modelo de Frecuencias, $\{\widetilde{N}_T(t)\}_{t \geq 0}$ sí es un Proceso Poisson.

Teorema 4.13. *El proceso $\{\widetilde{N}_T(t)\}_{t \geq 0}$ definido en el Modelo de Frecuencias 2 es un Proceso Poisson con intensidad*

$$\widetilde{\lambda} := \sum_{s \in S} \lambda_s = \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} P\left(\mathbf{I}_r^{(e)} \neq \mathbf{0}\right),$$

donde λ_s son las intensidades de los procesos $\{\widetilde{N}_s(t)\}_{t \geq 0}$ y $\mathbf{0}$ es el vector cuyas entradas son todas 0.

Demostración. Como se cumple que $\widetilde{N}_T(t) = \sum_{s \in S} \widetilde{N}_s(t)$, por el Teorema 4.12 y el Teorema de Superposición se cumple que $\{\widetilde{N}_T(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson con intensidad $\sum_{s \in S} \lambda_s$. Por otro lado, por la interpretación de la variable $\widetilde{N}_T(t)$, esta puede ser escrita como

$$\widetilde{N}_T(t) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(t)} K_r^{(e)},$$

donde $K_{r,j}^{(e)}$ es una variable aleatoria *Bernoulli* que toma el valor de 1 si $\mathbf{I}_r^{(e)} \neq \mathbf{0}$. Ya que los vectores $\mathbf{I}_r^{(e)}$ son independientes para los índices r y (e) , y además son independientes de $N^{(e)}(t)$, las variables $K_r^{(e)}$ cumplen las hipótesis del Teorema de Filtración. Usando el Teorema de Superposición, concluimos que $\{\widetilde{N}_T(t)\}_{t \geq 0}$ es un Proceso Poisson con intensidad $\sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} P\left(\mathbf{I}_r^{(e)} \neq \mathbf{0}\right)$ ya que $P\left(\mathbf{I}_r^{(e)} \neq \mathbf{0}\right)$ es la probabilidad de éxito para las variables $K_r^{(e)}$. \square

4.5. Aplicando la Recursión de Panjer

Como se ha mencionado varias veces hasta ahora, las variables $N_j(t)$ del Modelo de Frecuencias *no* son independientes en general, por lo que es imposible aplicar el Teorema de Superposición para concluir que $N_T(t)$ tiene una distribución *Poisson*. Usando la expresión para la probabilidad conjunta de la primera sección (ecuación 4.2) es posible calcular la distribución de $N_T(t)$ para el caso en que $n = 2$, sin embargo, el caso general continúa pendiente.

En la última sección del capítulo anterior introducimos la Recursión de Panjer como un método para calcular la distribución de variables aleatorias Poisson-Compuestas que usan distribuciones discretas y no negativas, por lo que si logramos expresar a $N_T(t)$ como una variable Poisson-Compuesta será posible aplicar este resultado para calcular su distribución explícita.

Recordemos que el proceso $\{\tilde{N}_T(t)\}_{t \geq 0}$ del Modelo de Frecuencias 2 representa el número total de *shocks* que sí ocasionaron pérdidas u ocurrencias en alguno de los n tipos. Además, por la sección anterior sabemos que es un *Proceso Poisson*($\tilde{\lambda}$). Por lo tanto, podemos escribir a la variable $N_T(t)$ indexando sobre $\tilde{N}_T(t)$ el número de tipos al que pertenece cada ocurrencia, es decir, si la variable W_i denota el número de pérdidas causada por el i -ésimo *shock*, tendremos que

$$N_T(t) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_T(t)} W_i.$$

Si por ejemplo, la i -ésima ocurrencia del proceso $\{\tilde{N}_T(t)\}_{t \geq 0}$ resulta ser un *shock* de clase (e), entonces se cumplirá que

$$W_i = |\mathbf{I}_r^{(e)}| \tag{4.6}$$

para algún r , ya que $\mathbf{I}_r^{(e)}$ es un vector *MultiBernoulli* cuyas entradas son 0 ó 1 dependiendo de los tipos a los cuales pertenece el *shock*.

Para aplicar la Recursión de Panjer, es necesario que las variables W_i sean i.i.d. e independientes del proceso inicial $\{\tilde{N}_T(t)\}_{t \geq 0}$. Ya que los vectores $\mathbf{I}_r^{(e)}$ son independientes para r y (e), las variables W_i resultan ser independientes entre ellas. Además, ya que estos vectores son independientes de $N^{(e)}(t)$, tenemos también que las W_i son independientes de $\tilde{N}_T(t)$. Por otro lado, por la ecuación 4.6 podemos pensar que las W_i no son idénticamente distribuidas, ya que las diferentes clases de *shocks* tienen parámetros distintos en los vectores $\mathbf{I}_r^{(e)}$. Sin embargo,

tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.14. *Las variables aleatorias W son idénticamente distribuidas y además*

$$P(W = k) = \tilde{\lambda}^{-1} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{k+i}{k} \sum_{s:|s|=k+i} p_s^{(e)},$$

donde $p_s^{(e)}$ son las definidas en el Teorema 4.11.

Demostración. Sea k entero positivo. Por el Lema 3.1 del capítulo anterior, sabemos que la probabilidad de que una ocurrencia de $\tilde{N}_T(t)$ resulte únicamente en las pérdidas de un cierto conjunto s , es decir, una ocurrencia para $\tilde{N}_s(t)$, es $\lambda_s/\tilde{\lambda}$. Ya que cada ocurrencia de $\tilde{N}_T(t)$ afecta a uno y sólo un conjunto $s \in S$ se cumple que

$$P(W = k) = \tilde{\lambda}^{-1} \sum_{s:|s|=k} \lambda_s.$$

Por el Teorema 4.11 se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P(W = k) &= \tilde{\lambda}^{-1} \sum_{s:|s|=k} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{s':s \subseteq s'} (-1)^{|s'|-|s|} p_{s'}^{(e)} \\ &= \tilde{\lambda}^{-1} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{s:|s|=k} \sum_{s':s \subseteq s'} (-1)^{|s'|-|s|} p_{s'}^{(e)}. \end{aligned}$$

Notemos que $\sum_{s:|s|=k} \sum_{s':s \subseteq s'} (-1)^{|s'|-|s|} p_{s'}^{(e)}$ se compone de términos de la forma $(-1)^i p_s^{(e)}$ donde $|s| = k+i$ y además $i = 0, 1, \dots, n-k$. Entonces, cada uno de estos subconjuntos s contiene $\binom{k+i}{k}$ subconjuntos de tamaño k , por lo que aparecerá $\binom{k+i}{k}$ veces dentro de la suma. Entonces, para i fijo, sumando sobre los conjuntos s con $|s| = k+i$ obtendremos

$$\sum_{s:|s|=k+i} (-1)^i \binom{k+i}{k} p_s^{(e)}.$$

4. RESULTADOS ANALÍTICOS

Nuevamente, realizando la suma sobre $i = 0, 1, \dots, n - k$ y sustituyendo se tiene que

$$\begin{aligned} P(W = k) &= \tilde{\lambda}^{-1} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{s:|s|=k+i} (-1)^i \binom{k+i}{k} p_s^{(e)} \\ &= \tilde{\lambda}^{-1} \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{k+i}{k} \sum_{s:|s|=k+i} p_s^{(e)}. \end{aligned}$$

Ya que $P(W = k)$ no varía de acuerdo a los subíndices (e), tenemos que son variables idénticamente distribuidas. \square

Con este resultado es posible aplicar la Recursión de Panjer a la variable $N_T(t)$. Ya que el evento $\{N_T(t) = 0\}$ nos dice que no hubieron *shocks* que ocasionaron pérdidas en el intervalo $(0, t]$, es equivalente a $\{\tilde{N}_T(t) = 0\}$, por lo que se cumple

$$P(N_T(t) = 0) = P(\tilde{N}_T(t) = 0) = \exp(-\tilde{\lambda}t),$$

ya que $\tilde{N}_T(t)$ tiene una distribución *Poisson*($\tilde{\lambda}$). Para $r > 0$ se tiene entonces que

$$P(N_T(t) = r) = \sum_{k=0}^r \frac{\tilde{\lambda}k}{r} P(W = k) P(N_T(t) = r - k),$$

ya que el mayor número de pérdidas que puede causar un *shock* es n , $P(W = k) = 0$ para cualquier $n < k$. Finalmente, tendremos que la distribución de $N_T(t)$ estará dada por

$$P(N_T(t) = r) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\min\{k,n\}} \frac{\tilde{\lambda}k}{r} P(W = k) P(N_T(t) = r - k), & \text{si } r > 0, \\ \exp(-\tilde{\lambda}t), & \text{si } r = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

donde $P(W = k)$ esta dada por el Teorema 4.14.

A pesar de tener una expresión explícita, tenemos la dificultad de calcular $\sum_{s:|s|=k} p_s^{(e)}$ cuando n es muy grande, pues dicha suma se compone de $\binom{n}{k}$ términos. Bajo ciertos casos es posible tener una expresión mas intuitiva para esta cantidad:

Si suponemos que el vector *MultiBernoulli* $\mathbf{I}_r^{(e)}$ se compone de variables independientes, se tiene entonces que $p_s^{(e)} = \prod_{j \in s} p_j^{(e)}$, por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{s:|s|=k} p_s^{(e)} &= \sum_{s:|s|=k} \prod_{j \in s} p_j^{(e)} \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2 > j_1} \dots \sum_{j_k > j_{k-1}} \prod_{i=1}^k p_{j_i}^{(e)} \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2 > j_1} \dots \sum_{j_k > j_{k-1}} p_{j_1}^{(e)} p_{j_2}^{(e)} \dots p_{j_k}^{(e)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si se satisface

$$p_s^{(e)} = \min_{j \in s} \{p_j^{(e)}\},$$

conocido como el caso de *Comonotonía*, de manera similar al caso anterior, tenemos que

$$\sum_{s:|s|=k} p_s^{(e)} = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2 > j_1} \dots \sum_{j_k > j_{k-1}} \min\{p_{j_1}^{(e)}, p_{j_2}^{(e)}, \dots, p_{j_k}^{(e)}\}.$$

Conociendo a todas las probabilidades $p_j^{(e)}$ para $j = 1, 2, \dots, n$, es posible ordenarlas de la siguiente manera

$$p_{\pi_1}^{(e)} \leq p_{\pi_2}^{(e)} \leq \dots \leq p_{\pi_n}^{(e)}.$$

Entonces, la probabilidad $p_{\pi_i}^{(e)}$ aparecerá en la suma de arriba si i resulta ser el menor elemento en un subconjunto de tamaño k . Habiendo fijado a i como el menor elemento, entre los $n - i$ números mayores a i podemos escoger $k - 1$ elementos para conformar un subconjunto de tamaño k , por lo que $p_{\pi_i}^{(e)}$ aparecerá $\binom{n-i}{k-1}$ veces dentro de la suma. Ya que tenemos $n - k + 1$ posibles valores para el mínimo de un conjunto de tamaño k en el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ tenemos que

$$\sum_{s:|s|=k} p_s^{(e)} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \binom{n-i}{k-1} p_{\pi_i}^{(e)}.$$

En el siguiente capítulo abordaremos aplicaciones del Modelo de Frecuencias y el Modelo de Severidades en seguros, aplicando los resultados obtenidos hasta ahora y estudiando la sensibilidad de los modelos a ciertos parámetros.

Capítulo 5

Aplicaciones en Seguros

En este capítulo abordaremos un problema de seguros con el propósito de replicar los resultados obtenidos en [7]. Mas específicamente, estudiaremos un problema en seguros contra tormentas en el que cada tormenta puede ocasionar daños simultáneos a dos países distintos. En este capítulo compararemos los resultados de dicho problema utilizando el enfoque de daños Individuales (Procesos Poisson independientes) con dos diferentes casos de dependencia para el *número* de daños usando nuestro Modelo de Frecuencias: Independientes y Comonotonía. En estos dos últimos, el total de daños resulta en una suma de v.a. Poisson no independientes. Además, ajustaremos el Modelo de Severidades con tres elecciones de dependencia en el *tamaño* de los daños utilizando tres diferente cópulas: Independencia, Gaussiana y Gumbel, cada una de las cuales será utilizada al mismo tiempo que la dependencia en el *número* de daños. Finalmente calculamos las medidas de riesgo VaR y Expected Shortfall para los diferentes casos. Los conceptos referentes a los seguros fueron tomados de [8] y [9].

5.1. Los Seguros y las Tormentas

Algo que es aceptado por la gran mayoría de la población, ya sea por razones científicas, estadísticas, religiosas o por puro sentido común es que toda persona viviente esta continuamente expuesta al peligro. A pesar de que un individuo realiza sus actividades cotidianas con el objetivo de reducir este riesgo lo mas posible, ya sea con cosas tan simples como mirar a ambos lados de la calle, usar ropa adecuada en temporada de frío, no rebasar el límite de velocidad en la carretera, etc., es imposible que una persona alcance un estado de seguridad absoluta.

5. APLICACIONES EN SEGUROS

Aunque la principal preocupación que tenemos al ser víctima de alguna situación extrema es garantizar nuestra seguridad y la de nuestras personas cercanas, también existe la preocupación económica como un medio para impedir, arreglar o sobrellevar una fatalidad. Por ejemplo, si un familiar padece una enfermedad mortal para la cual es necesaria una costosa operación, necesitaríamos de una gran cantidad de dinero de la cual posiblemente no disponemos. Por otro lado, si un accidente automovilístico resultó en la pérdida de nuestro vehículo es muy difícil contar con la cantidad suficiente para reponerlo. Finalmente, si un padre de familia fallece por alguna razón, una preocupación que tendría su familia sería la de sobrevivir sin su principal fuente de ingresos. Entonces, ante el riesgo constante de padecer un evento que ponga en peligro nuestra vida, salud o patrimonio, los *seguros* aparecen como una opción de garantizar nuestra seguridad económica. Una definición del *seguro* que puede encontrarse en [9] es la siguiente:

El seguro es un contrato por el cual una de las partes, en consideración a un precio, que a ella se le paga, adecuado al riesgo, da la seguridad a la otra parte de que esta no sufrirá pérdidas, daño o perjuicio por el acaecimiento de los peligros especificados sobre ciertas cosas que puedan estar expuestas a tales peligros.

Al igual que en cualquier empresa que resulte prácticamente imposible de superar para un solo individuo, el seguro ayuda a que un gran número de personas contribuyan a apoyar de manera económica al miembro afectado, recordando que este hará lo mismo en una situación inversa. Esto se realiza mediante un contrato que especifique la cantidad monetaria con que apoyará esta asociación así como la participación regular que aportará cada miembro. Como se mencionó antes, el tipo de seguro que una persona contrate depende tanto de los peligros contra los que desee protegerse como de las posibilidades que se tengan para afrontar el problema. Dentro de los tipos de seguros se encuentran los de vida, médicos, contra incendios, para autos, entre otros.

Nuestro interés en este capítulo se centra en los *Seguros de Tormentas* los cuales, como su nombre lo indica, protegen a los asegurados de los daños a sus propiedades que han sido causados por tormentas, huracanes o ciclones, dependiendo de lo estipulado en el contrato. En algunas ocasiones, el Seguro Patrimonial cubre estos gastos cuando las rachas de viento y lluvias superan los umbrales establecidos, los cuales dependen de la velocidad del viento y la densidad de agua por hora, datos que son verificados en diversas agencias meteorológicas, sin embargo, los Seguros de Tormentas están diseñados para cubrir las pérdidas que el Seguro Patrimonial no suele tomar en cuenta, dependiendo del valor total de la casa. Ya

que en muchas ocasiones las tormentas suelen afectar a muchas personas aseguradas de manera simultánea, es importante tener una buena predicción acerca de los costos requeridos.

En particular, las Tormentas Europeas ¹ son conocidas por su capacidad de producir devastadores impactos económicos, debido al cierre de líneas de transporte, desarraigo de árboles y caída de diversas construcciones como muros y edificios. Entre los años 2005 y 2013 se registraron diez tormentas europeas extremas que causaron enormes daños por los cuales las aseguradoras pagaron en promedio 1.9 billones de dólares, afectando a países como Dinamarca, Suiza, Irlanda, Reino Unido, Francia, Alemania, España, etc. Sin embargo, desde el año 2000 se ha registrado la ocurrencia de 44 tormentas que igualmente han causado diferentes pérdidas en el continente. Por esto, dentro de los Seguros por Tormentas, las tormentas europeas tienen un especial lugar de atención al momento de pronosticar las pérdidas a las que su planificación tiene que hacer frente.

En este problema estudiaremos las pérdidas ocurridas en los países Francia y Alemania, causadas por tres clases de tormentas europeas que ocurren de manera independiente: oeste, centrales y pan-Europeas². Debido a la geografía del continente, sabemos que los daños ocasionados por estos tres tipos de tormentas en los países mencionados *tienden* a ser de la siguiente manera:

- Las *Tormentas del Oeste* suelen causar daños en Francia pero no en Alemania.
- Las *Tormentas Centrales* suelen causar daños en Alemania pero no en Francia.
- Las *Tormentas pan-Europeas* suelen causar daños en Alemania y Francia.

Ya que las pérdidas únicamente *tienden* a ser de esta manera, no descartamos la posibilidad de que una Tormenta del Oeste cause daños en Alemania, una Central cause daños en Francia o una pan-Europea no cause ningún tipo de daño, sin embargo, estas pérdidas ocurren con menor frecuencia que los casos enumerados arriba.

¹Los datos aquí mencionados fueron extraídos de la página <http://www.europeanwindstorms.org/>, base de datos donde participan la Universidad de Exeter, el servicio meteorológico del Reino Unido Met Office, entre otras.

²El término se refiere al sentido de identificación personal con Europa, ya sea en un sentido cultural, racial o político.

5.2. Cálculo del VaR para $N_T(t)$

En esta sección calcularemos la medida de riesgo VaR mencionada en el Capítulo 2 para el *número* total de daños en Francia y Alemania, suponiendo que las tormentas ocurren de acuerdo a Procesos Poisson independientes. En lo siguiente, $N_1(t)$ y $N_2(t)$ (notemos que $n = 2$) denotarán el número de daños en Francia y Alemania respectivamente, por lo que el número total de pérdidas será

$$N_T(t) = N_1(t) + N_2(t).$$

Para realizar este estudio estableceremos un horizonte de tiempo de 5 años ($t = 5$) y supondremos que los daños causados por tormentas en Francia ocurren en promedio 5 veces por año ($\lambda_1 = 5$), mientras que en Alemania lo hacen 6 veces por año ($\lambda_2 = 6$). Entonces, las pérdidas para Francia y Alemania en los siguientes 5 años de manera individual cumplirán que

$$N_1(5) \sim \text{Poisson}(25) \quad \text{y} \quad N_2(5) \sim \text{Poisson}(30).$$

Además, debido a la linealidad de la esperanza obtendremos que

$$E[N_T(5)] = E[N_1(5) + N_2(5)] = 55.$$

En lo siguiente estudiaremos el efecto que tiene la dependencia entre $N_1(t)$ y $N_2(t)$ usando tres diferentes enfoques, dos de los cuales utilizan el Modelo de Frecuencias. Estos enfoques serán los siguientes:

Caso 1 (Daños Individuales): En este caso conocemos la distribución de daños de manera individual, es decir, por lo dicho antes $N_1(5) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t)$ y $N_2(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_2 t)$ y además suponemos que estas son independientes, por lo que usando el Teorema de Superposición obtenemos que

$$N_T(5) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t + \lambda_2 t) = \text{Poisson}(55),$$

teniendo entonces que

$$E[N_T(5)] = \text{Var}(N_T(5)) = 55.$$

Este caso no utiliza el Modelo de Frecuencias.

En lo siguiente, $N^{(1)}(t)$ representará las Tormentas del Oeste, $N^{(2)}(t)$ las Tormentas Centrales y $N^{(3)}(t)$ las Tormentas pan-Europeas (notemos que $m = 3$), cuyas intensidades fijaremos como

$$\lambda^{(1)} = 4, \quad \lambda^{(2)} = 3 \quad \text{y} \quad \lambda^{(3)} = 3.$$

Las probabilidades de ocasionar pérdidas en Francia ($j = 1$) o Alemania ($j = 2$) para los diferentes tipos de tormentas serán los siguientes:

$$\text{Tormentas del Oeste: } p_1^{(1)} = 1/2, \quad p_2^{(1)} = 1/4.$$

$$\text{Tormentas Centrales: } p_1^{(2)} = 1/6, \quad p_2^{(2)} = 5/6.$$

$$\text{Tormentas pan-Europeas: } p_1^{(3)} = 5/6, \quad p_2^{(3)} = 5/6.$$

Ahora que hemos fijado los parámetros necesarios podemos utilizar el Modelo de Frecuencias, en particular el Teorema 4.1 para conocer las intensidades de los procesos $\{N_1(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{N_2(t)\}_{t \geq 0}$, las cuales resultan

$$\lambda_1 = \sum_{e=1}^3 \lambda^{(e)} p_1^{(e)} = 5, \quad \lambda_2 = \sum_{e=1}^3 \lambda^{(e)} p_2^{(e)} = 6,$$

es decir, coinciden con el promedio de pérdidas por tormentas al año propuestas arriba.

Vale la pena recordar que la varianza de $N_T(5)$ estará dada por

$$\text{var}(N_T(5)) = \text{var}(N_1(5)) + \text{var}(N_2(5)) + 2\text{cov}(N_1(t), N_2(t)).$$

Caso 2 (Daños Independientes):

$$p_{1,2}^{(e)}(1, 1) = p_1^{(e)} p_2^{(e)} \quad \text{para } e = 1, 2, 3.$$

A pesar de que en este caso las variables $I_{1,r}^{(e)}$ y $I_{2,r}^{(e)}$ son independientes, las variables $N_1(t)$ y $N_2(t)$ *no* lo son. Para ver lo anterior notemos que para el caso de las Tormentas pan-Europeas se satisface $p_1^{(3)} + p_2^{(3)} > 1$, entonces por el Corolario 4.2 nos indica que las variables $N_1(t)$ y $N_2(t)$ *no* son independientes.

Caso 3 (Comonotonía):

$$p_{1,2}^{(e)}(1, 1) = \min\{p_1^{(e)}, p_2^{(e)}\}, \quad \text{para } e = 1, 2, 3.$$

El caso de Comonotonía es donde la probabilidad de éxito simultáneo en $I_{1,r}^{(e)}$ e $I_{2,r}^{(e)}$ alcanza su valor máximo. Ya que se satisface por la contención de Probabilidad que

$$p_{1,2}^{(e)}(1, 1) \in [0, \min\{p_1^{(e)}, p_2^{(e)}\}]$$

5. APLICACIONES EN SEGUROS

Del sistema de ecuaciones 3.2 del Capítulo 2 concluimos que para esta elección de $p_{1,2}^{(e)}(1, 1)$ se satisface

$$\text{Tormentas del Oeste : } p_{1,2}^{(1)}(0, 1) = 0.$$

$$\text{Tormentas Centrales : } p_{1,2}^{(2)}(1, 0) = 0.$$

$$\text{Tormentas pan-Europeas : } p_{1,2}^{(3)}(1, 0) = p_{1,2}^{(3)}(0, 1) = 0.$$

En el contexto del problema, esta situación se puede traducir de la siguiente manera:

- Si una Tormenta del Oeste causa daños en Alemania, con certeza causará daños en Francia.
- Si una Tormenta Central causa daños en Francia, con certeza causará daños en Alemania.
- Si una Tormenta pan-Europea causa daños en alguno de los dos países, con certeza causará daños en el otro.

Lo anterior es distinto al enunciado: *Si causa un tipo de pérdida, causará también el otro*, en cuyo caso se tendría simplemente que $N_1(5) = N_2(5)$.

Es importante notar que en los tres casos propuestos $N_1(5)$ y $N_2(5)$ son v.a. Poisson con intensidades idénticos, por lo que la diferencia en el resultado de $N_T(5)$ será causado únicamente por la dependencia que exista entre estas variables.

Daños	Individuales	Independientes	Comonotonía
Covarianza	0	15	20
Correlación	0	0.548	0.73
$E[N_T(5)]$	55	55	55
$var(N_T(5))$	55	85	95

Tabla 5.1: Comparación de la esperanza y varianza de $N_T(5)$ y la covarianza y correlación entre $N_1(5)$ y $M_2(5)$ para los diferentes casos de dependencia.

Usando el Teorema 4.2 es posible conocer la covarianza y correlación entre las variables $N_1(5)$ y $N_2(5)$, así como la varianza de $N_T(5)$ para los tres casos expuestos arriba. Esta comparación se muestra en la Tabla 5.1. Al ser la covarianza una medida de dependencia entre dos variables aleatorias, esta aumentará conforme se incremente el número de *shocks* que causan pérdidas simultáneas, por lo que el caso de Comonotonía puede ser interpretado como *el más peligroso* en el sentido que las pérdidas pueden tomar valores mas lejanos a la media.

Como mencionamos en la primer sección del capítulo, una de las partes mas importantes del análisis de la distribución de pérdidas consiste en estudiar la probabilidad de ocurrencia para los valores extremos. En esta ocasión nos enfocaremos en el impacto que tiene la dependencia entre $N_1(t)$ y $N_2(t)$ en las colas de la distribución $N_T(5)$.

Recordemos del capítulo anterior que es posible usar la expresión de la distribución conjunta de $N_1(5)$ y $N_2(5)$ para obtener así una fórmula explícita para la distribución $N_T(5)$ de la siguiente manera

$$P(N_T(5) = n) = \sum_{k=0}^n P(N_1(5) = n - k, N_2(5) = k).$$

Usando la ecuación 4.2 con $\lambda = 10$, $t = 5$, $j = 1$ y $k = 2$ podemos calcular la función de probabilidad de $N_T(5)$. Observemos que las probabilidades $p_{1,2}^{(e)}(i_1, i_2)$ cambian de acuerdo a la dependencia entre las variables $I_{1,r}^{(e)}$ e $I_{2,r}^{(e)}$, ya sea el caso en que son Independientes o Comonótonas, la probabilidad conjunta y la distribución de las pérdidas totales $N_T(5)$ cambiarán de igual manera. En el Caso 1 (Individuales), sabemos que $N_T(5)$ resulta una v.a. Poisson con intensidad conocida.

En la Figura 5.1 se comparan los valores extremos de la función de supervivencia de $N_T(5)$ para los diferentes casos de dependencia entre el número de daños individuales $N_1(t)$ y $N_2(t)$. El gráfico muestra la probabilidad $P(N_T(5) > k)$ para $k = 70, 71, \dots, 90$. A pesar de que la expresión explícita que hemos encontrado para calcular esta probabilidad luce bastante complicada tanto por su extensión como por la necesidad de calcular número muy grandes (notemos que para calcular $P(N_T(5) > 90)$ sería necesario calcular $90!$), usando herramientas computacionales como *Rproject* es posible realizar estos cálculos de manera satisfactoria.

Como mencionamos antes, el caso de comonotonía es donde la probabilidad de pérdida simultánea en ambos países toma su máximo valor posible, por lo que es natural pensar que mientras mayor sea esta cantidad, mayor será la cantidad

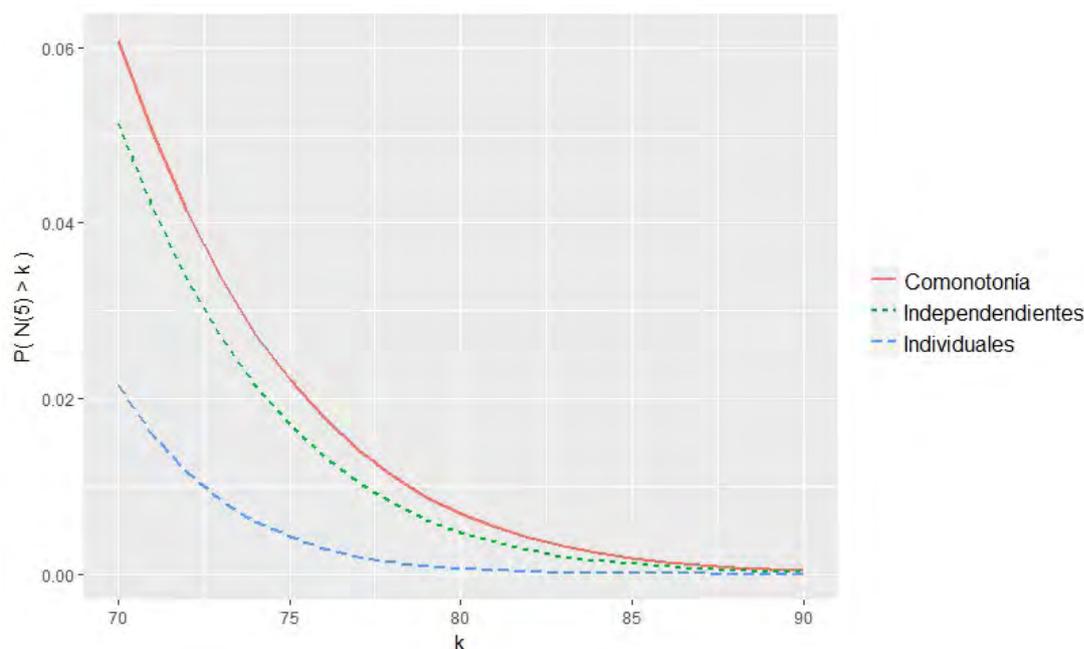


Figura 5.1: Probabilidades $P(N_T(5) > k)$ para $k = 70, 71, \dots, 90$ para daños Individuales (verde), Independientes (azul) y Comonotonía (rojo).

total de pérdidas, es decir la variable $N_T(5)$. En la Figura 5.1 se puede apreciar el impacto que tiene el nuevo planteamiento comparado con el Caso 1 de daños Individuales, pues en este caso $N_T(5)$ resulta ser simplemente una variable *Poisson*(55). Observemos por ejemplo que esta probabilidad para $k = 70$ prácticamente se triplica para el Caso 3 de Comonotonía.

La medida de riesgo VaR para $\alpha = 0.95$ y 0.99 con estos parámetros y bajo estos casos de dependencia resultan ser las siguientes:

$$\text{Individuales : } VaR_{0.95} = 67, \quad VaR_{0.99} = 73.$$

$$\text{Independientes : } VaR_{0.95} = 71, \quad VaR_{0.99} = 78.$$

$$\text{Comonotonía : } VaR_{0.95} = 72, \quad VaR_{0.99} = 79.$$

Una manera de comparar estos resultados es calculando la proporción entre las probabilidades $P(N_T(5) > k)$ para dos casos distintos de dependencia. Una proporción cercana a 1 significaría que las cantidades que se están comparando son muy similares, mientras que los valores $k > 1$ indican que la cantidad de arriba es k veces mayor a la de abajo y los valores $k < 1$ significan que el denominador es k veces mayor al numerador. En la Figura 5.2 comparamos la proporción de

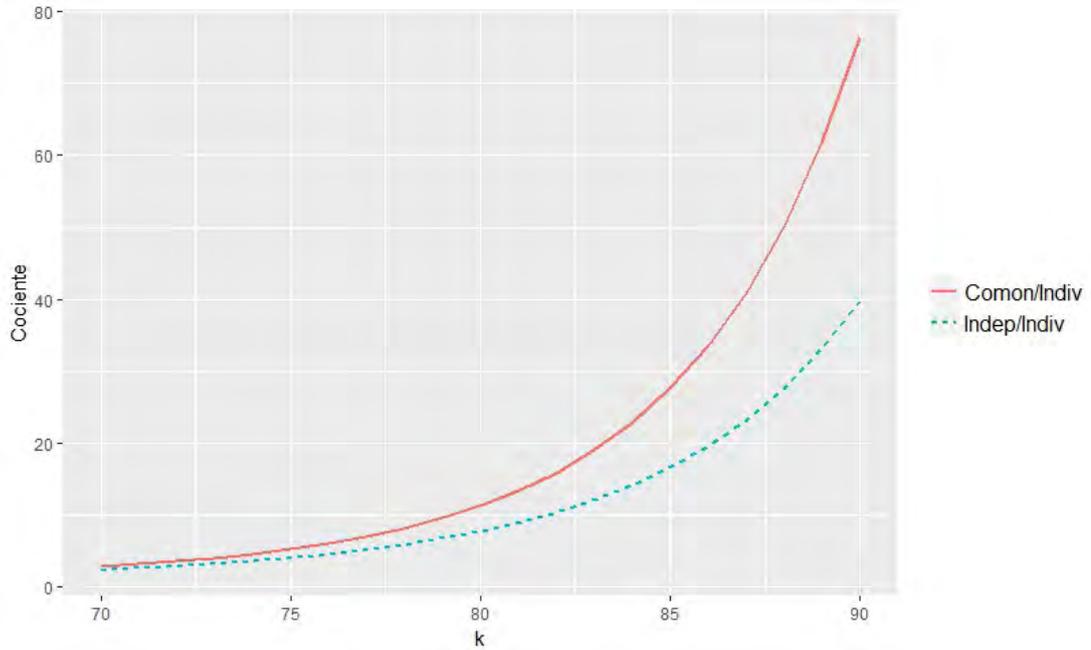


Figura 5.2: Proporción de las probabilidades $P(N_T(5) > k)$ entre los casos 1 – 2 (línea azul) y 1 – 3 (línea roja).

la probabilidad $P(N_T(5) > k)$ en los casos de Independencia y Comonotonía con respecto al caso de daños Individuales, es decir, donde $N_T(5)$ es una variable aleatoria *Poisson*. Como podemos apreciar, las probabilidades de obtener pérdidas mayores a 90 son 40 veces mayores para el caso de Independencia (línea roja) y mas de 60 veces mas grandes para el caso de Comonotonía (línea azul).

Por otro lado, ya que $N_T(5) = N_1(5) + N_2(5)$ es posible preguntarnos por la propiedad de subaditividad del *VaR*. Como $N_1(5)$ y $N_2(5)$ son variables aleatorias *Poisson* con intensidades 25 y 30 respectivamente, es posible calcular (con ayuda de programa Rproject) los cuantiles 0.95 y 0.99, independientemente uno de otro, resultando en lo siguiente:

$$VaR_{0.95}(N_1(5)) + VaR_{0.95}(N_2(5)) = 33 + 39 = 72 \geq VaR_{0.95}(N_T(5))$$

y

$$VaR_{0.99}(N_1(5)) + VaR_{0.99}(N_2(5)) = 37 + 43 = 80 \geq VaR_{0.99}(N_T(5))$$

en cualquiera de los casos de dependencia estudiados antes. Por lo tanto, la propiedad de subaditividad se cumple y el *VaR* resulta ser una medida de riesgo coherente para este planteamiento en particular.

5.3. Cálculo del VaR y ES para $Z(t)$

Para abordar el problema de cuantificar el *tamaño* de las pérdidas ocasionadas por tormentas en Francia y Alemania usando el Modelo de Severidades especificaremos una estructura de dependencia para el vector $\mathbf{X}_r^{(e)}$ fijando alguna cópula presentada en el Capítulo 2, así como el Teorema 2.9 para fijar el grado de correlación: En particular haremos uso de las cópulas de Independencia, Gaussiana y Gumbel. Además, será necesario utilizar una estructura de dependencia para el *número* de daños ocurridos, para lo cual retomaremos la estructuras de daños Individuales, daños Independientes y Comonotonía, estructuras que combinaremos a su vez con la elección de las cópulas. Recordemos que la variable $Z(t)$ del Modelo de Severidades estaba dada por

$$Z(5) = \sum_{e=1}^3 \sum_{r=1}^{N^{(e)}(5)} I_{1,r}^{(e)} X_{1,r}^{(e)} + \sum_{e=1}^3 \sum_{r=1}^{N^{(e)}(5)} I_{2,r}^{(e)} X_{2,r}^{(e)}.$$

Además de especificar la estructura de dependencia de los vectores de severidades $\mathbf{X}_r^{(e)}$ es también necesario elegir las distribuciones marginales $X_{j,r}^{(e)}$, es decir, el tamaño de las pérdidas para Alemania y Francia causados por la r -ésima tormenta de la clase (e) . En este caso nos inclinaremos por la muy conocida distribución $Pareto(\nu_1, \nu_2)$, cuyas funciones de densidad y distribución pueden consultarse en la sección A.3 del Apéndice A.

La distribución Pareto ha probado tener un ajuste de gran utilidad en problemas de seguros donde se pretende estimar el tamaño de las pérdidas resultantes de algún siniestro, esto debido a su propiedad de *colas pesadas*, la cual significa intuitivamente que esta distribución puede tomar valores grandes con mayor frecuencia que otras. Más formalmente, las distribuciones con colas pesadas se caracterizan por la existencia sus momentos $E[X^p]$. Una distribución cuyo p -ésimo momento no exista (es decir, que sea infinito) son consideradas de colas pesadas. En particular la distribución Pareto tiene varianza finita únicamente para los casos en que $\nu_1 \geq 2$. Por estas razones optaremos por fijar la distribución de severidades $X_{j,r}^{(e)}$ como una distribución $Pareto(4, 3)$, es decir

$$X_{j,r}^{(e)} \sim Pareto(3, 4), \quad \text{para } j=1,2.$$

Ya que las variables $X_{j,r}^{(e)}$ son i.i.d. respecto a los índices r y (e) , en lo siguiente las identificaremos únicamente como X_j .

Aún teniendo el conocimiento de la estructura de dependencia y parámetros del vector de severidades $\mathbf{X}_r^{(e)}$, calcular la distribución explícita de $Z(5)$ resulta

una tarea complicada. Aprovechando el Teorema 4.8, usaremos el *Método de Momentos* para ajustar $Z(5)$ a alguna distribución H conocida (ver la sección A.3 del Apéndice A), de esta manera es posible despejar los parámetros necesarios para incorporar el conocimiento que tenemos de $Z(5)$ a la distribución conocida H .

En esta ocasión escogeremos la distribución *F-Generalizada* también llamada en algunos libros como *Pareto Generalizada*. Si $G(x; d_1, d_2)$ denota la función de distribución de una variable *F de Snedecor* con grados de libertad d_1 y d_2 , la función de distribución dada por

$$H_{\alpha, \lambda, k}(x) = G\left(\frac{\alpha}{k\lambda}x; 2k, 2\alpha\right), \quad \text{para } \alpha > 0, \lambda > 0, k > 0$$

corresponderá a una distribución *F-Generalizada*. Para conocer de manera explícita la función G y algunos datos de la distribución *F de Snedecor* consultar la Sección A.3 en el Apéndice A.

En la Figura 5.3 comparamos la distribución *F-Snedecor* con la *F-Generalizada* usando grados de libertad equivalentes, de modo que el cambio que se observa en la gráfica se debe al cambio de escala $\frac{\alpha}{k\lambda}x$. A pesar de que la distribución *F-Snedecor* tiene la propiedad de colas pesadas, podemos apreciar que al incrementar el parámetro λ el cambio se hace mucho más notorio, por lo que pensamos que esta distribución puede ser una buena aproximación para la distribución $Z(5)$. Otra ventaja de usar la distribución *F-Generalizada* combinada con el Método de Momentos para aproximar $Z(5)$ es que al tener que estimar tres diferentes parámetros α , λ y k , ambas distribuciones coincidirán en media, varianza y en cierto modo la forma, la cual estará dada (en parte) por el tercer momento.

Para proceder a aplicar el Método de Momentos debemos recordar que el p -ésimo momento de una distribución *F-Generalizada*(α, λ, k) donde $\alpha > p$ estará dada por

$$\lambda^p \left(\prod_{i=0}^{p-1} (k+i) \right) / \left(\prod_{i=1}^p (\alpha-i) \right). \quad (5.1)$$

Del Teorema 4.8 tenemos que los momentos de $Z(5)$ están dados por

$$E[Z(5)^p] = \lambda t \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} E[Y^{k+1}] E[Z(5)^{p-k-1}],$$

donde

$$E[Y^p] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_p=1}^n E[X_{j_1} \dots X_{j_p=1}] \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j_1, \dots, j_p}^{(e)}(1, \dots, 1).$$

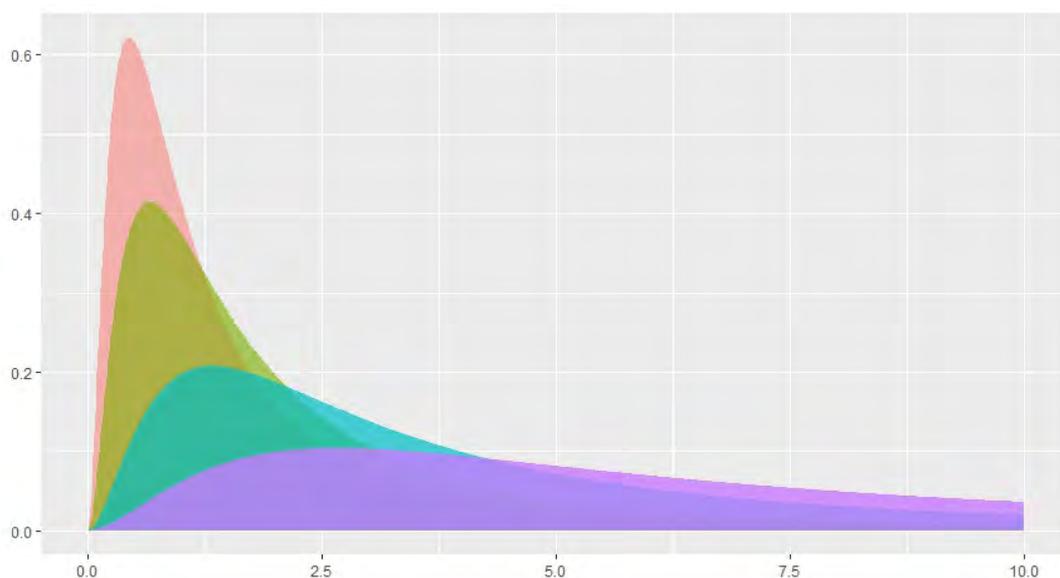


Figura 5.3: Comparación entre la distribución $F\text{-Snedecor}(4, 3)$ (rojo) y la distribución $F\text{-Generalizada}(3/2, \lambda, 2)$ para $\lambda = 1$ (verde), $\lambda = 2$ (azul), $\lambda = 4$ (morado).

De la ecuación anterior observamos que será necesario conocer los primeros tres momentos de la distribución de severidades X_j . Habiendo supuesto una distribución $Pareto(4, 3)$ para el tamaño de las pérdidas, dichos momentos estarán dados por

$$E[X_j^1] = 1, \quad E[X_j^2] = 3, \quad E[X_j^3] = 27, \quad \text{para } j=1,2.$$

Los datos anteriores pueden consultarse en la sección A.3 del Apéndice A. Para calcular el segundo y tercer momento de $Z(5)$ debemos obtener las esperanzas de productos entre X_1 y X_2 , en particular, necesitamos conocer $E[X_1 X_2]$ y $E[X_1^2 X_2]$. Sin embargo, recordemos que estas variables *no* son independientes pues conforman al vector aleatorio \mathbf{X} . Conociendo la función de densidad conjunta, las esperanzas anteriores resultan

$$E[X_1 X_2] = \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

y

$$E[X_1^2 X_2] = \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^2 x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Es en este momento donde podemos hacer uso de la sección anterior, en particular del Teorema de Sklar (Teorema 2.8), con el que es posible conocer la función de

densidad de manera explícita habiendo escogido una cópula con ciertos parámetros.

Una vez calculados los primeros tres momentos de $Z(5)$, por la ecuación 5.1, aplicando el Método de Momentos obtendremos

$$\begin{aligned} E[Z(5)] &= \frac{\lambda k}{\alpha - 1}, \\ E[Z(5)^2] &= \frac{\lambda^2(k+1)k}{(\alpha-2)(\alpha-1)}, \\ E[Z(5)^3] &= \frac{\lambda^3(k+2)(k+1)k}{(\alpha-3)(\alpha-2)(\alpha-1)}, \end{aligned}$$

el cual parece ser un sistema de ecuaciones bastante complicado. Para simplificarlo, definimos las cantidades

$$z_1 := E[Z(5)], \quad z_2 := \frac{E[Z(5)]}{E[Z(5)^2]}, \quad z_3 := \frac{E[Z(5)^2]}{E[Z(5)^3]}.$$

De esta manera, obtenemos un sistema equivalente, el cual está dado por

$$\lambda k = z_1(\alpha - 1), \tag{5.2}$$

$$\lambda(k+1) = z_2(\alpha - 2), \tag{5.3}$$

$$\lambda(k+2) = z_3(\alpha - 3), \tag{5.4}$$

Resolver este nuevo sistema es más accesible. Para encontrar el valor de α sustituimos la ecuación 5.2 en 5.3 obteniendo

$$\lambda = z_2(\alpha - 2) - z_1(\alpha - 1).$$

Reemplazando este valor para λ y la ecuación 5.2 en 5.4 se tiene

$$2z_2(\alpha - 2) - z_1(\alpha - 1) = z_3(\alpha - 3).$$

De donde podemos despejar el valor de α en función de los términos conocidos z_1 , z_2 y z_3 resultando

$$\alpha = \frac{4z_2 - z_1 - 3z_3}{2z_2 - z_1 - z_3}.$$

Conociendo este valor, λ y k estarán dados por

$$\lambda = z_2(\alpha - 2) - z_1(\alpha - 1), \quad k = \frac{z_1(\alpha - 1)}{\lambda}.$$

5. APLICACIONES EN SEGUROS

Usando las ecuaciones 5.2 y 5.3. Usando este procedimiento, tanto la estructura de dependencia del vector $\mathbf{X}_r^{(e)}$ como las de $N_1(t)$ y $N_2(t)$ representadas por el vector $\mathbf{I}_r^{(e)}$ se verá reflejada en los momentos de la distribución $Z(5)$, los cuales su vez se verán reflejados en los parámetros α , λ y k de la distribución F -Generalizada.

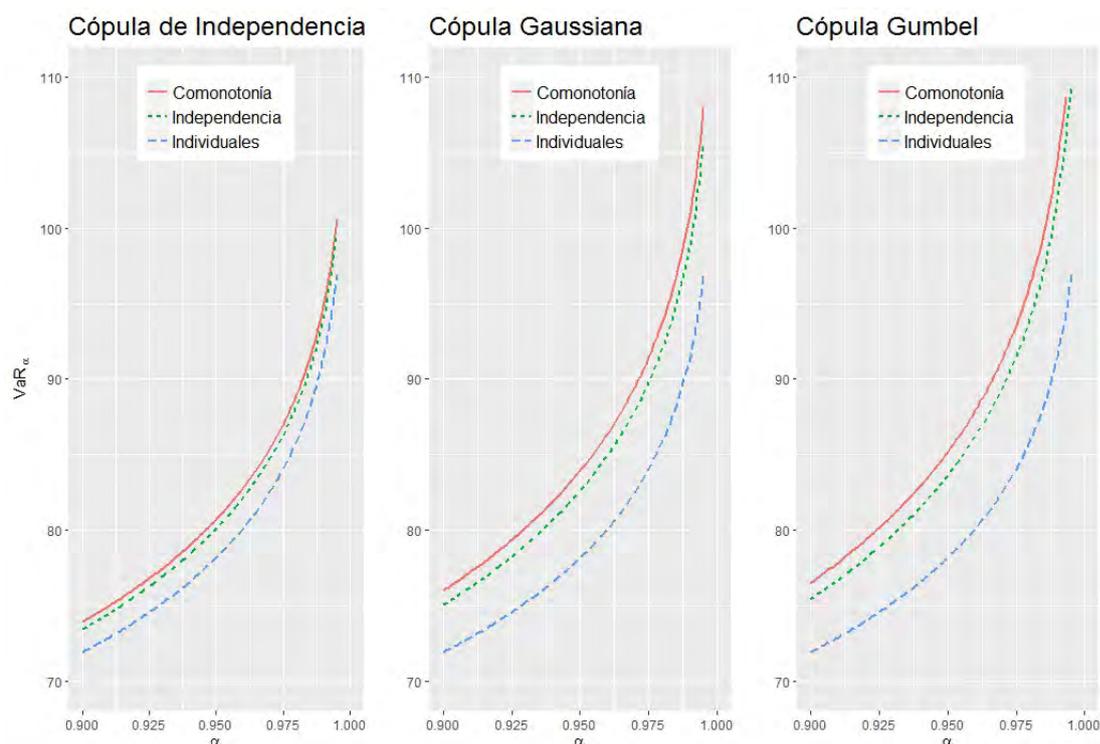


Figura 5.4: Comparación del VaR ajustado de $Z(5)$ a la distribución F -Generalizada para varios casos de dependencia en el número de daños (Individuales, Independientes y Comonotonía) y para las diferentes elecciones de cópulas en el tamaño de las pérdidas (cópulas de Independencia, Gaussiana y Gumbel).

En la Figura 5.4 comparamos la medida de riesgo VaR para los niveles de confianza $q \in [0.900, 0.995]$ obtenidos al realizar el ajuste de $Z(5)$ a la distribución F -Generalizada. En la primer gráfica comparamos esta medida para el caso en que X_1 es independiente de X_2 combinándolo con los tres diferentes casos de dependencia para $N_1(t)$ y $N_2(t)$ estudiados anteriormente (daños individuales, independientes y comonotonía). En la segunda y tercer gráfica modelamos la dependencia entre X_1 y X_2 por medio de una Cópula Gaussiana y Gumbel respectivamente, cuyos parámetros corresponden a una correlación Tau de Kendall $\rho_\tau = 0.5$ abordada en la sección anterior.

La medida de riesgo VaR para estos casos resultará ser:

Cópula de Independencia:

$$\text{Individuales : } VaR_{0.95} = 78.18351, \quad VaR_{0.99} = 91.45433.$$

$$\text{Independientes : } VaR_{0.95} = 80.11263, \quad VaR_{0.99} = 94.04241.$$

$$\text{Comonotonía : } VaR_{0.95} = 80.72339, \quad VaR_{0.99} = 94.85143.$$

Cópula Gaussiana:

$$\text{Individuales : } VaR_{0.95} = 78.18351, \quad VaR_{0.99} = 91.45433.$$

$$\text{Independientes : } VaR_{0.95} = 82.63069, \quad VaR_{0.99} = 98.88554.$$

$$\text{Comonotonía : } VaR_{0.95} = 83.94386, \quad VaR_{0.99} = 100.9531.$$

Cópula Gumbel:

$$\text{Individuales : } VaR_{0.95} = 78.18351, \quad VaR_{0.99} = 91.45433.$$

$$\text{Independientes : } VaR_{0.95} = 83.63071, \quad VaR_{0.99} = 101.7416.$$

$$\text{Comonotonía : } VaR_{0.95} = 85.17815, \quad VaR_{0.99} = 104.4252.$$

No es de sorprenderse que el caso de daños Individuales sea donde la distribución $Z(5)$ tiende a tomar valores grandes con menos frecuencia que en todos los casos por provocar daños únicamente en un país, ya sea Alemania o Francia. Observemos de hecho, que este caso es el mismo sin importar la elección de la cópula para X_1 y X_2 . Hablando de la dependencia entre los tamaños de las pérdidas, podemos notar que el caso en que X_1 y X_2 son independientes es considerablemente menos *peligroso* en el sentido de alcanzar los valores grandes con menor frecuencia. Con la elección de las cópulas Gaussiana y Gumbel se aprecia un incremento en las colas de la distribución $Z(5)$, siendo esta última ligeramente mayor.

Por otro lado, las medidas de riesgo Expected Shortfall estimada para los valores $\alpha = 0.95$ y $\alpha = 0.99$ en los diferentes casos de dependencia resultan ser las siguientes:

Cópula de Independencia:

$$\text{Individuales : } ES_{0.95} = 86.40731, \quad ES_{0.99} = 99.1811.$$

$$\text{Independientes : } ES_{0.95} = 88.72785, \quad ES_{0.99} = 101.9752.$$

$$\text{Comonotonía : } ES_{0.95} = 89.45569, \quad ES_{0.99} = 102.8386.$$

Cópula Gaussiana:

$$\text{Individuales : } ES_{0.95} = 86.40731, \quad ES_{0.99} = 99.1811.$$

$$\text{Independientes : } ES_{0.95} = 92.71347, \quad ES_{0.99} = 108.4659.$$

$$\text{Comonotonía : } ES_{0.95} = 94.49172, \quad ES_{0.99} = 110.9531.$$

Cópula Gumbel:

$$\text{Individuales : } ES_{0.95} = 86.40731, \quad ES_{0.99} = 99.1811.$$

$$\text{Independientes : } ES_{0.95} = 94.91404, \quad ES_{0.99} = 112.9173.$$

$$\text{Comonotonía : } ES_{0.95} = 97.17375, \quad ES_{0.99} = 116.3493.$$

A pesar de que la distribución *F-Generalizada* podría no ser la mejor opción para representar los valores reales de la distribución $Z(5)$, el propósito principal de este capítulo era ilustrar la influencia que tiene el considerar dependencia tanto en el número de pérdidas ocurridas como en el tamaño de estas. Como se puede observar en las Figuras 5.1, 5.2 y 5.4, este nuevo planteamiento tiende a presentar valores grandes con mayor frecuencia que los modelos basados únicamente en el Teorema de Superposición y el Proceso Poisson Compuesto.

Retomando finalmente el problema ilustrativo, es posible que una tormenta cause daños en ambos países de manera simultánea, siendo igualmente factible que el tamaño de las pérdidas causadas esté relacionado de alguna manera, por lo que pensamos que este planteamiento que se basa en la suma de Procesos Poisson no independientes, resulta en un modelo mas cercano al que resulte abordando al enfoque que no contempla la dependencia entre el número y tamaño de los diferentes daños.

Capítulo 6

Aplicaciones en Riesgo Crediticio

En este capítulo buscaremos aplicar alguno de los modelos que se han propuesto hasta ahora en riesgo crediticio. En la primer sección haremos una breve introducción a los portafolios en finanzas, en la segunda buscaremos representar el número de *defaults* en un portafolio de préstamos usando el Modelo de Frecuencias y finalmente, en la tercer sección estudiaremos este planteamiento por vía de simulaciones, comparando los resultados obtenidos para diferentes parámetros tanto en las intensidades del modelo como en las probabilidades de ocurrencia marginales y conjuntas. Nuevamente, el planteamiento del problema así como las elecciones de los parámetros están basados en el artículo principal [7].

6.1. La Diversificación de Portafolios

El término *portafolio* es usado en finanzas para referirse a un cierto agrupamiento de activos tales como inversiones, bonos, préstamos entre otros. Aunque podemos pensar en un portafolio como una gran cantidad de (por ejemplo) inversiones, es mas correcto pensarlo como una gran inversión dividida en pequeñas porciones, cada una con distinto tamaño y propósito, situación que influye de manera directa en el *riesgo* que supone realizar cada una de estas pequeñas inversiones. Por esta razón, las instituciones financieras realizan lo que se llama *diversificación* de portafolios, técnica que busca optimizar las ganancias empleando diferentes activos en distintos sectores de oportunidad.

La diversificación establece que no es buena idea realizar todas las inversiones en el mismo sector debido al riesgo que esto supone. Pensemos por ejemplo que una persona realiza todas sus inversiones en el comercio marítimo en una región

6. APLICACIONES EN RIESGO CREDITICIO

específica, principalmente en la compra de barcos de pesca. Si en unos meses esta región fuera azotada por un huracán ocasionando la pérdida de la mayoría de las naves, traería como consecuencia la ruina del inversionista, situación que pudiera haber sido evitada *diversificando* la inversión en diferentes regiones y/o en diferentes fuentes de ingresos de manera simultánea. De esta manera, aunque el huracán hubiera ocasionado algunas pérdidas, es menos probable que existan fenómenos simultáneos que resulten en la pérdida de la inversión total.

Usando un razonamiento similar podríamos pensar que entre mas diversifiquemos las inversiones menor será el riesgo que corremos y mayor será la ganancia, sin embargo, una división excesiva puede resultar contraproducente al no generar las ganancias suficientes como para solventar la inversión inicial, ocasionando pérdidas generales en el portafolio. Por esta razón, el problema de minimizar el riesgo y generar ganancias en los portafolios depende en gran medida de la manera en que éste se encuentre diversificado.

En la diversificación de portafolios es común que varios de los activos estén relacionados entre si por diversas razones, ya sean geográficas, económicas o corporativas. En el ejemplo anterior los comercios que se encuentren localizados en la misma región son propensos a ser víctimas del mismo fenómeno natural (un huracán por ejemplo) que puede resultar en diferentes pérdidas de forma simultánea. En otro ejemplo similar, un inversionista puede haber invertido en diversas regiones en el negocio de taxis, negocio que empezó a generar ganancias insuficientes por la aparición de nuevas aplicaciones digitales de transporte personal. De esta manera, las inversiones puestas en el negocio de los taxis se ven afectadas por pertenecer a una misma categoría a pesar de estar en regiones distintas.

Otras razones económicas que provocan la dependencia entre el valor de los diferentes activos que conforman un portafolio pueden ser crisis económicas en el país, compañías en quiebra y, por supuesto, razones personales de la persona responsable de la inversión. Por estas razones es de importancia tener herramientas suficientes para modelar la dependencia entre los posibles *shocks* que pueden resultar en la pérdida de un activo en el portafolio.

El problema de modelar las pérdidas ocurridas en un portafolio depende en gran medida de los objetivos propuestos como de las condiciones del mismo, es decir, considerar el tipo de activo, el tiempo de madurez en el caso de bonos, tiempo de préstamo e incluso el valor del portafolio en algún tiempo t determinado. En la siguiente sección buscaremos aplicar el Modelo de Frecuencias para modelar el número de incumplimientos en un portafolio de préstamos.

6.2. El Modelo de Frecuencias en Portafolios

En esta sección consideraremos un Portafolio de Préstamos, cuyos activos de los cuales esta conformado son, como su nombre lo indica, préstamos de distintos tamaños hechos por alguna institución a diferentes personas o compañías a los cuales les llamaremos *deudores*, los cuales están obligados a pagar la cantidad estipulada al termino de cierto periodo de tiempo. Además, cuando un deudor no cumpla con esta deuda diremos que ocurrió un *incumplimiento*.

Si buscamos aplicar alguno de los modelos para estimar las posibles pérdidas que pueden ocurrir en un portafolio de préstamos podríamos pensar en una versión ligeramente modificada del Modelo de Severidades donde cada deudor representa un tipo de pérdida, los *shocks* son las diferentes situaciones que pueden tener como resultado un incumplimiento y las variables aleatorias $X_{j,r}^{(e)}$ son cantidades fijas, cada una representando el monto correspondiente a cada persona afiliada. Sin embargo, en esta ocasión haremos uso del Modelo de Frecuencias para enfocarnos en el número de deudores que faltarán en cumplir su deuda en el periodo de tiempo establecido.

Para plantear el problema pensaremos en un portafolio que consiste en n deudores, cada uno de los cuales está sujeto a tres diferentes tipos de *shocks* que pueden causar un incumplimiento en su deuda:

- *Individuales*: cuando afecta únicamente al deudor en cuestión, ocasionado por una mala administración por parte del usuario.
- *Sectores*: aquellas situaciones que pueden afectar a diversas personas relacionadas entre sí de acuerdo al sector, los cuales pueden ser de tipo geográficos o por el tipo de compañía a la cual pertenezcan los deudores. Por ejemplo, si un grupo de personas afiliadas pertenece a una compañía que ha caído en bancarrota, es muy posible que todas ellas caigan en incumplimiento de la deuda.
- *Globales*: esta clase de *shocks* puede afectar a todas las personas afiliadas al portafolio. Estas situaciones pueden darse debido a problemas tales como una crisis económica en el país en que residen todos los deudores.

Si suponemos que cada deudor puede ser clasificado en alguno de los K diferentes sectores y que la ocurrencia de cada *shock* en un determinado intervalo de tiempo puede ser representada por medio de un Proceso Poisson $\{N^{(e)}(t)\}_{t \geq 0}$ con parámetro $\lambda^{(e)}$ tendríamos un total de $m = n + K + 1$ procesos, donde los primeros n representan los *shocks* individuales, los siguientes K los correspondientes a

los sectores y el m -ésimo es el *shock* global. De esta manera, usando el Modelo de Frecuencias y el Teorema 4.1 el número de incumplimientos que incurrirá el j -ésimo deudor en un periodo de tiempo será un Proceso Poisson con intensidad

$$\lambda_j = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{individual}}}{p_j^{(j)}} \lambda^{(j)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sector}}}{p_j^{n+k(j)}} \lambda^{(n+k(j))} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{global}}}{p_j^{(m)}} \lambda^{(m)},$$

donde $k(j)$ representa el sector al que pertenece el j -ésimo deudor. Además, podemos suponer que un *shock* individual causará con toda seguridad un incumplimiento en el deudor, es decir, con probabilidad 1, simplificando la ecuación anterior a

$$\lambda_j = \lambda^{(j)} + p_j^{n+k(j)} \lambda^{(n+k(j))} + p_j^{(m)} \lambda^{(m)}. \quad (6.1)$$

Sin embargo, este procedimiento podría no ser el más óptimo debido a la cantidad de personas que conforman el portafolio (en la siguiente sección fijaremos el número de deudores a $n = 100\,000$), pues la cantidad de parámetros que deberíamos estimar para calibrar al modelo sería muy elevada. Una manera de optimizar el ajuste es realizar una nueva clasificación de los deudores de acuerdo al historial de incumplimiento para cada persona y fijando la misma intensidad total λ_j a aquellas que tengan un historial parecido. Lo anterior significa que para cualesquiera deudores j_1 y j_2 que sean clasificados con base a su historial en la misma categoría l , para $l = 1, 2, \dots, L$, se cumplirá que $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2}$, o bien

$$\lambda_{total}^{l(j)} := \lambda_j, \quad (6.2)$$

donde $l(j) \in \{1, 2, \dots, L\}$ indica la categoría a la cual pertenece el deudor. Recordemos que la intensidad $\lambda_{total}^l(j)$ se refiere a la probabilidad total que tiene el j -ésimo deudor de faltar en su compromiso, ya sea por razones personales, institucionales o globales.

En lo siguiente optaremos por usar una notación mas intuitiva para referirnos a las intensidades por sectores y global, la cual es la siguiente:

$$\lambda_{sector}^k := \lambda^{(n+k(j))}, \quad \lambda_{global} := \lambda^{(m)}.$$

Además, para lograr que se cumpla la condición 6.2 suponemos que la intensidad correspondiente a un *shock* individual dependa únicamente de la categoría l a la cual pertenezca la persona, es decir

$$\lambda_{ind}^{l(j)} := \lambda^{(j)}.$$

Con este nuevo planteamiento necesitaremos establecer un total de $m = L + K + 1$ intensidades para los diferentes *shocks*. Observemos que el número de parámetros

puede reducirse drásticamente dependiendo del número de categorías que fijemos (es decir, de L). Con la nueva notación, la intensidad total para la persona j estará dada por

$$\lambda_{total}^{l(j)} = \lambda_{ind}^{l(j)} + p_j^{(n+k(j))} \lambda_{sector}^{k(j)} + p_j^{(m)} \lambda_{global}.$$

Notemos que para mantener las hipótesis del Modelo de Frecuencias es necesario suponer que tanto las ocurrencias entre los diferentes tipos de *shocks* como las variables que indican los incumplimientos en diferentes deudores son independientes entre ellas. El supuesto anterior significa en la interpretación que la ocurrencia de una crisis de nivel global es independiente de las crisis en empresas y/o personales, lo cual es incongruente con la realidad. Otra deficiencia que tiene este planteamiento es la posible ocurrencia de dos o más incumplimientos para un mismo deudor en el periodo de tiempo, situación que es imposible en un portafolio de préstamos, pues cada persona afiliada representa solamente un préstamo.

Los problemas anteriores pueden ser evadidos fijando las intensidades de los diferentes *shocks* lo suficientemente pequeñas como para que las situaciones anteriores ocurran con la menor frecuencia posible. Por ejemplo, considerando un único deudor y solamente un *shock* potencialmente peligroso, si el parámetro λp es del orden de 10^{-3} y recordando que

$$P(N(1) \geq 2) = 1 - \lambda p e^{\lambda p} - e^{\lambda p},$$

la probabilidad de tener mas de dos incumplimientos ocasionados por el mismo *shock* en un solo deudor sería del orden de 10^{-7} , es decir, alrededor de una ocasión en diez millones de casos.

Para utilizar el Modelo de Frecuencias en esta situación será necesario especificar las estructuras de dependencia para los vectores que indican los incumplimientos causados por los *shocks* por sectores y el global. Para tratar de hacer cumplir la condición 6.2 supondremos que el posible daño que cause un *shock* del sector k en el j -ésimo deudor dependa únicamente de la categoría $l(j)$ a la cual pertenece, es decir

$$p_j^{(n+k(j))} =: s_{l(j)}^{k(j)}.$$

Además, dado un *shock* en el sector k , la probabilidad de causar daños en diferentes personas que pertenezcan a dicho sector será independiente, es decir, la probabilidad de que este *shock* resulte en incumplimientos para los deudores j_1, j_2, \dots, j_p resultará

$$p_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{(n+k)}(1, 1, \dots, 1) = \prod_{i=1}^p s_{l(j_i)}^k,$$

6. APLICACIONES EN RIESGO CREDITICIO

cuando j_1, j_2, \dots, j_p pertenezcan al sector k . En otro caso, la probabilidad de arriba resultará nula.

Análogamente, supondremos que la probabilidad que tiene un *shock* global en causar daños al j -ésimo deudor dependerá tanto de la categoría $l(j)$ como del sector $k(j)$ a los cuales pertenece, por lo que usaremos la notación

$$p_j^{(m)} =: g_{l(j)}^{k(j)}.$$

De igual manera, supondremos que la probabilidad de causar daños en las personas j_1, j_2, \dots, j_p de manera simultánea será independiente, es decir

$$p_{j_1, j_2, \dots, j_p}^{(m)}(1, 1, \dots, 1) = \prod_{i=1}^p g_{l(j_i)}^{k(j_i)}.$$

Con la notación anterior finalmente tendremos que la intensidad del Proceso Poisson $\{N_j(t)\}_{t \geq 0}$ el cual representa los incumplimientos causados por diversas razones para el j -ésimo deudor en cierto periodo de tiempo estará dada por

$$\lambda_{total}^{l(j)} = \lambda_{ind}^{l(j)} + s_{l(j)}^{k(j)} \lambda_{sector}^{k(j)} + g_{l(j)}^{k(j)} \lambda_{global}. \quad (6.3)$$

Además, si buscamos que se cumpla la condición 6.2, por el hecho que $\lambda_{ind}^{l(j)} = \lambda^{(j)}$ esta condición es equivalente a que para cualquier $l = 1, 2, \dots, L$ se satisfaga que

$$s_l^k \lambda_{sector}^k + g_l^k \lambda_{global} = s_l^{k'} \lambda_{sector}^{k'} + g_l^{k'} \lambda_{global} \quad \text{para } k \neq k', \quad (6.4)$$

concluyendo el ajuste principal del Modelo de Frecuencias para el problema del portafolio de préstamos.

Con el propósito de estudiar a grandes rasgos la influencia que tienen los parámetros en la varianza de la distribución simplificaremos los parámetros aún más fijando el número de categorías $L = 1$, es decir, que la probabilidad que tiene cada deudor de causar un incumplimiento por motivos personales es exactamente la misma. Además, pediremos que la probabilidad que tiene cada persona de ser afectada por un *shock* de tipo global es independiente del sector en que se encuentren (recordemos que $L = 1$), a diferencia de lo que habíamos supuesto antes, esto es

$$g_l^k = g^k = g \quad \text{para cualquier } k = 1, 2, \dots, K.$$

Para conocer de primera mano los efectos que puede tener un cambio en los parámetros del modelo comenzaremos calculando la dispersión de la variable $N_T(1)$ la cual representa el número total de incumplimientos al término

de un periodo de tiempo (fijando $t = 1$) con respecto a su media, es decir $var(N_T(1)) - E[N_T(1)]$. Haciendo uso del Teorema 4.10 sabemos que para la varianza se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
 var(N_T(1)) &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n cov(N_{j_1}(1), N_{j_2}(1)) \\
 &= \sum_{j_1 \neq j_2} cov(N_{j_1}(1), N_{j_2}(1)) + \sum_{j=1}^n var(N_j(1)) \\
 &= \sum_{j_1 \neq j_2} cov(N_{j_1}(1), N_{j_2}(1)) + \sum_{j=1}^n E[N_j(1)] \quad \text{por tener dist. Poisson} \\
 &= \sum_{j_1 \neq j_2} cov(N_{j_1}(1), N_{j_2}(1)) + E[N_T(1)] \quad \text{por la definición de } N_T(1).
 \end{aligned}$$

De esta manera, la medida de dispersión que buscamos estará dada por

$$var(N_T(1)) - E[N_T(1)] = \sum_{j_1 \neq j_2} cov(N_{j_1}(1), N_{j_2}(1)). \quad (6.5)$$

Para calcular la ecuación 6.5 usando los parámetros del modelo hechos hasta ahora usaremos el Teorema 4.2 para calcular la covarianza entre $N_{j_1}(1)$ y $N_{j_2}(1)$ de manera explícita, la cual estará dada por

$$\begin{aligned}
 cov(N_{j_1}(1), N_{j_2}(1)) &= \sum_{e=1}^m \lambda^{(e)} p_{j_1, j_2}^{(e)}(1, 1) \\
 &= \lambda_{sector}^{k(j_1)} p_{j_1, j_2}^{(k(j_1))}(1, 1) + \lambda_{sector}^{k(j_2)} p_{j_1, j_2}^{(k(j_2))}(1, 1) + \lambda_{global} p_{j_1, j_2}^{(m)}(1, 1).
 \end{aligned}$$

Para el caso en que j_1 y j_2 pertenecen al mismo sector k , los dos primeros sumandos son el mismo (y aparece una sola vez) y la probabilidad de ocurrencia conjunta resulta $(s_k)^2$, mientras que en el caso contrario esta probabilidad será nula. Para el *shock* global, sabemos por la hipótesis de independenciam que la probabilidad de daños simultáneos será g^2 . Por lo tanto, la covarianza entre $N_{j_1}(1)$ y $N_{j_2}(1)$ resulta

$$cov(N_{j_1}(1), N_{j_2}(1)) = \begin{cases} g^2 \lambda_{global} & \text{para } k(j_1) \neq k(j_2), \\ g^2 \lambda_{global} + s_k^2 \lambda_{sector}^k & \text{para } k(j_1) = k(j_2) = k. \end{cases}$$

Si planeamos sustituir esta igualdad en la varianza central de $N_T(1)$ dada en la

6. APLICACIONES EN RIESGO CREDITICIO

ecuación 6.5 debemos notar que el término $g^2\lambda_{global}$ aparece en la covarianza para cualesquiera deudores j_1 y j_2 . Notemos también que en la suma expresada en la ecuación 6.5 existen $n^2 - n$ sumandos, por lo que esta varianza tendrá el término $(n^2 - n)g^2\lambda_{global}$ en un principio. Por otro lado, si n_k denota el número de deudores que pertenecen al sector k , el número de sumandos que tendrá la expresión será (análogamente) $n_k^2 - n_k$ multiplicado por el término correspondiente $s_k^2\lambda_{sector}^k$. Entonces, añadiendo esta información sobre los K diferentes sectores a la parte de los *shocks* globales, obtendremos que la ecuación 6.5 resulta ser

$$var(N_T(1) - E[N_T(1)]) = (n^2 - n)g^2\lambda_{global} + \sum_{k=1}^K (n_k^2 - n_k)s_k^2\lambda_{sector}^k.$$

De la condición 6.4 y del hecho que la probabilidad de que un *shock* global cause incumplimientos es igual para todos los sectores, concluimos que la intensidad $s_k\lambda_{sector}^k$ también debe ser la misma para cualquier $k = 1, 2, \dots, K$. Entonces, tomando la notación $\delta_{global} := g\lambda_{global}$ y $\delta_{sector} := s_k\lambda_{sector}^k$ para cualquier sector k , la igualdad de arriba se simplifica en

$$var(N_T(1) - E[N_T(1)]) = \delta_{global}(n^2 - n)g + \delta_{sector} \sum_{k=1}^K (n_k^2 - n_k)s_k.$$

Es importante observar que la diferencia que existe entre la esperanza y la varianza de $N_T(1)$ depende únicamente de los parámetros que representan los *shocks* que causan daños simultáneos en varios deudores (por sectores y global). Por esta razón, $N_T(1)$ puede tener una distribución Poisson únicamente si su intensidad esta compuesta únicamente por *shocks* individuales, observación que concuerda con el Corolario 4.3. Por otro lado, es importante notar que aunque fijáramos las intensidades δ_{sector} y δ_{global} de los diferentes *shocks*, la dispersión seguiría siendo dependiendo de las probabilidades de ocurrencias s_k y g , por lo que una baja intensidad en los *shocks* puede ser compensada con una alta probabilidad causar daños y obtener un modelo igualmente riesgoso (en el sentido de dispersión).

Recordemos que para este análisis hemos supuesto la existencia de una sola categoría en que pueden ser clasificados los deudores ($L = 1$), además de que la probabilidad de que un *shock* global cause daños sea independiente de la elección del sector ($g_k = g$ para cualquier k). No obstante, podemos llegar a conclusiones similares realizando simulaciones para la variable $N_T(1)$ comparando los resultados para diferentes intensidades y probabilidades de ocurrencia.

6.3. Simulaciones del Modelo y Cálculo del VaR

En esta sección estudiaremos el planteamiento del Modelo de Frecuencias vía simulaciones usando el programa *Rproject* mencionado anteriormente en este trabajo, con el objetivo de calcular la medida de riesgo VaR para distintos parámetros. Consideraremos un portafolio de préstamos conformado por un total de $n = 100\,000$ deudores, suponiendo que cada uno está sujeto a un periodo de un año ($t = 1$) para cumplir con su deuda. Además, consideraremos un total de $K = 4$ sectores y $L = 2$ distintas clasificaciones por historial a las que puede pertenecer cada deudor. De esta manera hay $LK = 8$ diferentes categorías totales dependiendo de su historial y del sector al que pertenecen.

En lo siguiente fijaremos un número específico para cada una de estas categorías. Si $n_{k,l}$ denota el número de deudores que pertenecen al sector k y fueron clasificados con respecto a su historial en la categoría l , entonces fijaremos que

$$\begin{aligned}n_{1,1} &= 10\,000, & n_{2,1} &= 20\,000, & n_{3,1} &= 15\,000, & n_{4,1} &= 5\,000, \\n_{1,2} &= 10\,000, & n_{2,2} &= 25\,000, & n_{3,2} &= 10\,000, & n_{4,2} &= 5\,000.\end{aligned}$$

Observemos que en cada categoría l hay exactamente 50 000 deudores, conformando un total de 100 000 como habíamos acordado. Finalmente fijaremos las intensidades totales para las categorías 1 y 2 para cualesquiera parámetros como

$$\lambda_{total}^1 = 0.005, \quad \lambda_{total}^2 = 0.02.$$

Recordemos que la intensidad total es la probabilidad que tiene cada deudor de resultar en un incumplimiento al término del periodo de un año. Además, por la condición 6.2 a cada persona se le asignará una de las dos probabilidades escritas arriba.

Es importante recordar un poco acerca de las hipótesis que hemos descrito en la sección anterior para realizar la simulación de manera exitosa:

- La probabilidad de incumplimiento dado un *shock* del sector k en el deudor j , depende únicamente de la categoría l y afecta de manera independiente a los deudores.
- La probabilidad de incumplimiento dado un *shock* global en el deudor j depende tanto del sector k como de la categoría l a la que pertenezcan y afecta de manera independiente a los deudores.

6. APLICACIONES EN RIESGO CREDITICIO

A continuación estudiaremos este planteamiento con dos enfoques distintos. Remarcamos el hecho que, pese a la variación de parámetros, las intensidades totales λ_{total}^1 y λ_{total}^2 permanecen constantes, por lo que, al igual que en el capítulo anterior tenemos que $N_T(t)$ es la suma de n v.a. Poisson con intensidades constantes, y la variación observada es causada por la dependencia entre los procesos individuales $N_j(t)$.

Caso 1: En este caso mantendremos constantes las probabilidades de causar incumplimientos dada la ocurrencia de algún *shock* por sector o global, es decir, fijaremos las cantidades s_l^k y g_k^l . Dados estos parámetros, realizaremos las simulaciones modificando gradualmente la intensidad de las diferentes clases de *shocks*, partiendo del caso en que todos los incumplimientos son ocasionados por razones personales (individuales) hasta llegar al punto en que cada daño es provocado por razones que puedan afectar a varios deudores de manera simultánea (por sectores y global).

El sistema de ecuaciones 6.3 en forma matricial resulta ser el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1^1 & 0 & 0 & 0 & g_1^1 \\ 1 & 0 & 0 & s_1^2 & 0 & 0 & g_1^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & s_1^3 & 0 & g_1^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1^4 & g_1^4 \\ 0 & 1 & s_2^1 & 0 & 0 & 0 & g_2^1 \\ 0 & 1 & 0 & s_2^2 & 0 & 0 & g_2^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s_2^3 & 0 & g_2^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s_2^4 & g_2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{ind}^1 \\ \lambda_{ind}^2 \\ \lambda_{sector}^1 \\ \lambda_{sector}^2 \\ \lambda_{sector}^3 \\ \lambda_{sector}^4 \\ \lambda_{global} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{total}^1 \\ \lambda_{total}^1 \\ \lambda_{total}^1 \\ \lambda_{total}^1 \\ \lambda_{total}^2 \\ \lambda_{total}^2 \\ \lambda_{total}^2 \\ \lambda_{total}^2 \end{pmatrix}.$$

Para tener libertad sobre la elección de las intensidades λ fijaremos las probabilidades de ocurrencia de manera que la columna 7 sea una combinación lineal de las otras 6. De esta manera el rango de la matriz de coeficientes resulta $6 < 7$ que es el número de incógnitas, obteniendo así diversas soluciones para el sistema 6.3¹. Las diferentes probabilidades que usaremos serán

$$(s_1^1, s_1^2, s_1^3, s_1^4, s_2^1, s_2^2, s_2^3, s_2^4) = (0.25, 0.08, 0.05, 0.1, 1, 0.3, 0.25, 0.25) 10^{-2}$$

y

$$(g_1^1, g_1^2, g_1^3, g_1^4, g_2^1, g_2^2, g_2^3, g_2^4) = (0.25, 0.1, 0.4, 0.1, 1, 0.5, 1.5, 1) 10^{-2}.$$

Por otro lado, el vector de intensidades para los distintos *shocks* estará ordenado de la siguiente manera

$$(\lambda_{ind}^1, \lambda_{ind}^2, \lambda_{sector}^1, \lambda_{sector}^2, \lambda_{sector}^3, \lambda_{sector}^4, \lambda_{global}).$$

¹Con las probabilidades de abajo, la columna 7 resulta ser combinación lineal de las otras 6 con coeficientes: $1/200, 1/50, -1, -5, -2, -4$, respectivamente.

Manteniendo constantes las probabilidades de incumplimiento, modificaremos las intensidades de la siguiente manera ¹

(a): (0.005, 0.02, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0).

(b): (0.004, 0.016, 0.2, 1.0, 0.4, 0.8, 0.2).

(c): (0.002, 0.008, 0.6, 3.0, 1.2, 1.2, 2.4, 0.6).

(d): (0.0, 0.0, 1.0, 5.0, 2.0, 4.0, 1.0).

Las intensidades anteriores cumplen la condición 6.4. Observemos que en el caso (a) las intensidades de los *shocks* por sectores y el global son nulas, mientras que las intensidades correspondientes a los *shocks* individuales coinciden con las intensidades totales que fijamos al inicio. En este punto, el número de incumplimientos es provocado en un 100 % por causas personales (para las categorías 1 y 2). En los casos (b) y (c) los incumplimientos en el total del portafolio serán causados por razones personales en un 80 % y 40 % de las veces respectivamente. Finalmente, el caso (d) expresa que todos los incumplimientos son provocados por *shocks* que ocasionan daños simultáneos entre varios deudores.

En el caso (a) nos encontramos en la situación cuando el número total de incumplimientos tiene una distribución Poisson, al ser una suma de Procesos Poisson independientes. Es fácil notar el aumento en las colas de la distribución conforme se incrementa el porcentaje de incumplimientos causados por *shocks* simultáneos (observemos que la escala en el eje horizontal es la misma en todos los casos), siendo el caso (d) en el que se puede observar un incremento muy grande en la parte central de la distribución.

Otra cosa que merece la pena observar es el cambio en la forma de la distribución entre casos (b) y (d) por ejemplo, notando en el primero un pequeño valle, fenómeno que también se observa en el caso (c) aunque de manera menos notoria. El caso (d) por su parte parece tener una forma mas común, al igual que el caso (a) que nos es bien conocido.

En la Tabla 6.1 podemos apreciar el aumento del $VaR_{0.95}$ y $VaR_{0.99}$ que ocurre al modificar los parámetros del modelo al incrementar el número de incum-

¹Las soluciones del sistema de ecuaciones 6.3 dado un número z fijo resultan ser: $1/200 - z/800, 1/50 - z/200, z/4, 5z/4, z/2, z, z/4$. Los casos siguientes fueron obtenidos con $z = 0, 0.8, 2.4, 4$ respectivamente.

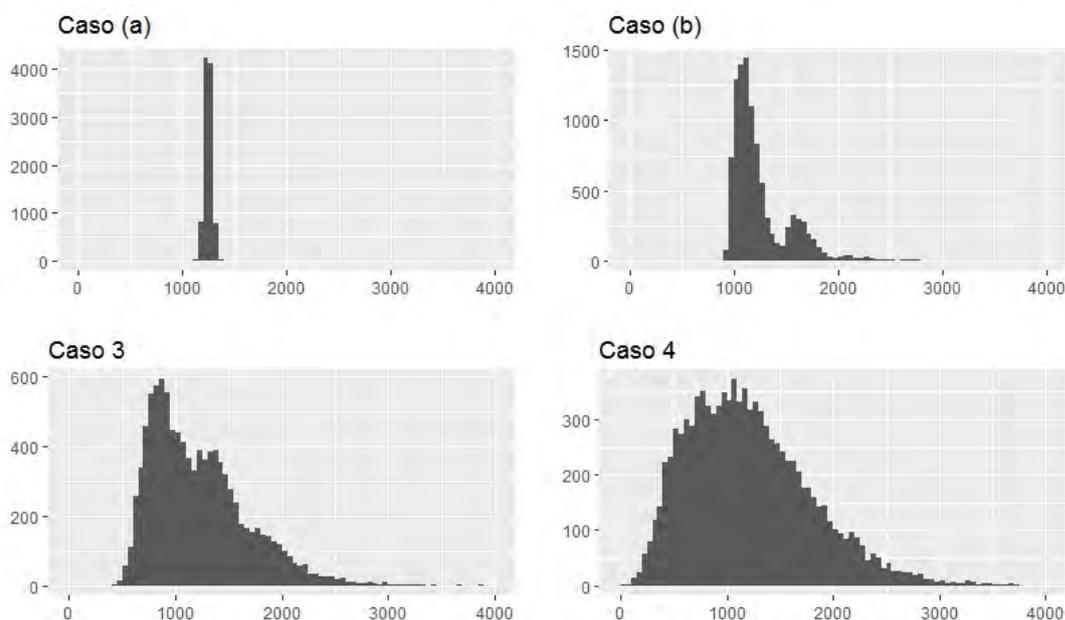


Figura 6.1: Histogramas resultantes de 10 000 simulaciones de la variable $N_T(1)$ del Modelo de Frecuencias aplicado a portafolios modificando las diferentes intensidades ajustadas mientras las probabilidades de incumplimiento permanecen fijas.

plimientos simultáneos. A excepción del caso (a) (donde los parámetros implican una distribución Poisson) para dichas estimaciones se realizaron 100 grupos de simulaciones idénticas e independientes donde el $VaR_{0.95}$ y $VaR_{0.99}$ fueron calculados para cada grupo, obteniendo una muestra de tamaño 100 para cada medida de riesgo y posteriormente calculando la media.

Esta es una nueva evidencia además de las gráficas en la Figura 6.1 que nos indican la enorme diferencia que existe (principalmente en las colas de la distribución) entre el caso inicial donde el número de incumplimientos en el portafolio se distribuye Poisson y la variable $N_T(1)$ construida en el Modelo de Frecuencias.

Caso 2: Para este nuevo caso mantendremos constantes las intensidades de los *shocks* individuales para que en las categorías $l = 1$ y $l = 2$ el 40% de los incumplimientos sean ocasionados por causas personales, es decir, sabiendo que $\lambda_{total}^1 = 0.005$ y $\lambda_{total}^2 = 0.02$, las intensidades para los *shocks* individuales serán

$$(\lambda_{ind}^1, \lambda_{ind}^2) = (0.002, 0.008).$$

Por otro lado, las intensidades correspondientes a los *shocks* por sectores y el

Caso 1				
	(a)	(b)	(c)	(d)
$VaR_{0.95}$	1308	1754	2067	2276
$VaR_{0.99}$	1333	2160	2554	2847

Tabla 6.1: Estimación del $VaR_{0.95}$ y $VaR_{0.99}$ para diferentes intensidades.

global, así como las respectivas probabilidades de ocasionar incumplimientos asociadas a cada tipo serán constantes únicamente en un sentido de *proporción*. Lo anterior se refiere a lo siguiente:

Si buscamos por ejemplo que el 20 % de los incumplimientos ocurridos en el sector 1 sean provocados precisamente por *shocks* en dicho sector, el 80 % restante será ocasionado por los diferentes *shocks* individuales y el global. Habiendo fijado la intensidad total en la categoría $l = 1$ es posible escoger los parámetros correspondientes para que se cumpla

$$\lambda_{sector}^1 s_1^1 = 0.2 \lambda_{total}^1 = 0.001.$$

De igual manera, para la categoría $l = 2$ los parámetros deben satisfacer

$$\lambda_{sector}^1 s_1^2 = 0.2 \lambda_{total}^2 = 0.004.$$

Análogamente, es posible suponer que en los incumplimientos provocados por los *shocks* del sector 2 resultaron en un 50 % del total, 10 % para el sector 3 y 40 % para el sector 4. Al igual que en el caso anterior, los supuestos anteriores implican que los parámetros correspondientes deben satisfacer

$$\lambda_{sector}^k s_k^1 = r_k \lambda_{total}^1 = 0.001$$

y

$$\lambda_{sector}^k s_k^2 = r_k \lambda_{total}^2 = 0.004,$$

donde r_k denota el porcentaje que establecimos para cada sector.

Sin embargo, de las ecuaciones anteriores podemos multiplicar y dividir por una constante f de tal manera que las intensidades totales permanezcan constantes, es decir, se tiene que

$$(f \lambda_{sector}^k) \left(\frac{1}{f} s_k^l \right) = \lambda_{sector}^k s_k^l.$$

6. APLICACIONES EN RIESGO CREDITICIO

Aunque esta modificación no afecta la intensidad final, provoca un cambio en la frecuencia de *shocks* y en la probabilidad de ocasionar un incumplimiento en el portafolio. Con este nuevo enfoque se pretende conocer si es mas *riesgoso* un modelo con *shocks* frecuentes (intensidades altas) y probabilidades bajas o un modelo con *shocks* menos frecuentes (intensidades bajas) y probabilidades altas.

En este caso, las intensidades que usaremos serán las siguientes:

$$(\lambda_{sector}^1, \lambda_{sector}^2, \lambda_{sector}^3, \lambda_{sector}^4, \lambda_{global}) = f(0.2, 1.0, 0.4, 0.8, 0.2).$$

En el vector anterior también esta incluida la intensidad global, a la cual puede aplicarse también el razonamiento hecho antes. Invariablemente de la elección de f , la proporción entre las intensidades se mantiene constante, la cual es

$$\lambda_{sector}^1 : \lambda_{sector}^2 : \lambda_{sector}^3 : \lambda_{sector}^4 : \lambda_{global} = 1 : 5 : 2 : 4 : 1.$$

Por otro lado, las probabilidades de ocurrencia para los *shocks* por sectores y global estarán dadas por

$$(s_1^1, s_1^2, s_1^3, s_1^4, s_2^1, s_2^2, s_2^3, s_2^4) = \frac{1}{f}(0.5, 0.25, 0.125, 0.25, 2, 1, 0.5, 1)10^{-2},$$

$$(g_1^1, g_1^2, g_1^3, g_1^4, g_2^1, g_2^2, g_2^3, g_2^4) = \frac{1}{f}(1, 0.25, 1.25, 0.5, 4, 1, 5, 2)10^{-2}.$$

Observemos que los parámetros que hemos elegido cumplen los porcentajes establecidos para cada sector que fijamos al inicio. Además, esta elección de parámetros cumple la condición 6.4 por construcción. En esta ocasión realizaremos 10000 simulaciones independientes para $f = 1, 2, 4, 8$, siendo $f = 1$ cuando las intensidades son menores y las probabilidades de incumplimiento mayores. Como se puede apreciar en la Figura 6.2, el caso en que $f = 1$ es donde un elevado número de incumplimientos es más frecuente (observemos nuevamente que todos los casos tienen el mismo intervalo en el eje horizontal), fenómeno que se reduce conforme aumenta el valor de f . Como mencionamos en la sección anterior, el estudio de la dispersión de $N_T(1)$ basado en la varianza del modelo nos hacía pensar en que la situación con *shocks* menos frecuentes pero mayor probabilidad de incumplimiento podría ser el modelo con colas mas pesadas, conjetura que gana firmeza con las simulaciones realizadas.

En la Tabla 6.2 comparamos nuevamente el $VaR_{0.95}$ y $VaR_{0.99}$ para diferentes elecciones del parámetro f . El método utilizado para dichas estimaciones es el mismo al del Caso 1. Podemos observar que para el caso $f = 1$ el riesgo es mas

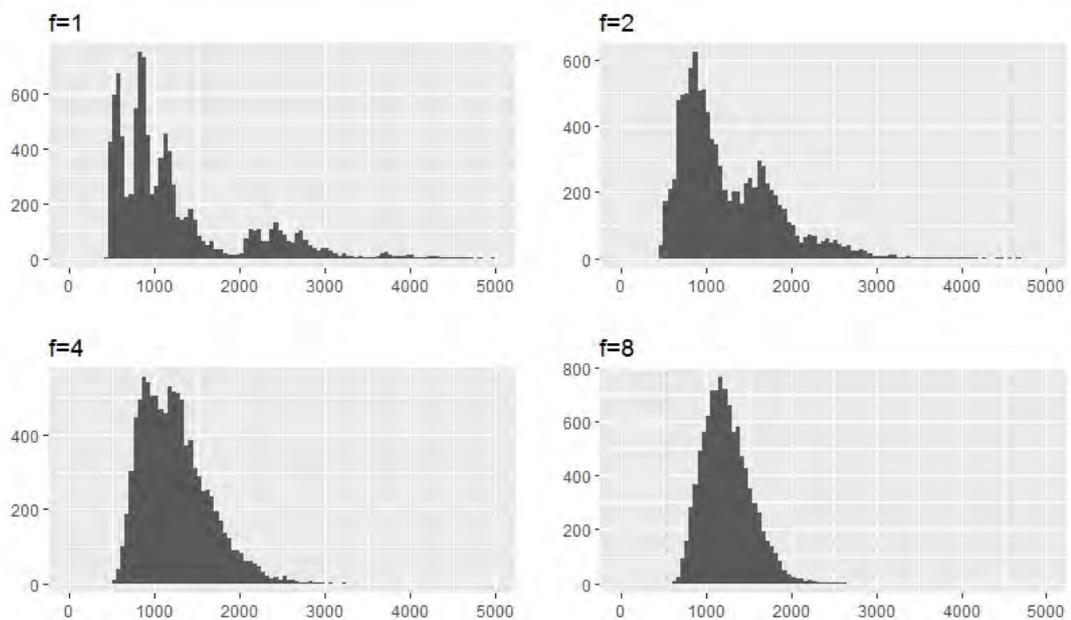


Figura 6.2: Histogramas resultantes de 10 000 simulaciones de la variable $N_T(1)$ del Modelo de Frecuencias aplicado a portafolios modificando las intensidades y probabilidades de ocurrencia y manteniendo constante la proporción entre ellas.

elevado. A pesar de que el $VaR_{0,99}$ para el caso $f = 1$ parece ser muy grande, en la Figura 6.2 podemos apreciar que de hecho existen valores mayores al 4 000 aunque con relativamente poca frecuencia, probando que este caso tiene, en efecto las colas más pesadas de los cuatro casos.

Otra cosa que podemos notar es que la distribución $N_T(1)$ para el caso $f = 1$ vuelve a tener una forma peculiar, la cual puede deberse en parte al proceso de simulación utilizado. Por su lado, el caso $f = 8$ en que las intensidades son grandes y la probabilidad de incumplimiento es pequeña tiene una forma más definida y común respecto a la de $f = 1$ o $f = 2$.

Usando el Modelo de Frecuencias podemos realizar un planteamiento intuitivo que respete los diferentes sectores en que ha sido diversificado el portafolio, así como las probabilidades correspondientes a los diferentes daños. Usando ideas similares se podría implementar el Modelo de Severidades para ampliar la aplicación a portafolios de inversiones tomando en cuenta el valor de cada una así como sus correspondientes retribuciones, sin embargo, ese problema no será abordado en este trabajo.

6. APLICACIONES EN RIESGO CREDITICIO

Caso 2				
	$f = 1$	$f = 2$	$f = 4$	$f = 8$
$VaR_{0.95}$	2777	2345	1972	1742
$VaR_{0.99}$	3992	2932	2374	2000

Tabla 6.2: Estimación del $VaR_{0.95}$ y $VaR_{0.99}$ para diferentes elecciones de la constante f .

Capítulo 7

Conclusiones

Como pudimos observar en los resultados anteriores, tanto en los resultados analíticos, las simulaciones y el ajuste de la distribución, el efecto de dependencia causa un efecto en la cola derecha de la distribución. La suma de Procesos Poisson no independientes (tanto homogéneo como compuesto) tiende a tomar valores grandes con mayor frecuencia que si consideramos Procesos Poisson clásicos.

Por esta razón, en el problema de ajuste de datos, cuando se tenga el efecto de daños simultáneos sería preferible optar por los Modelos de Frecuencias y Severidades en lugar del Proceso Poisson en el caso en que se lleguen a observar colas más pesadas.

Finalmente, ya que en nuestras aplicaciones mantuvimos los parámetros de los diferentes sumandos y estudiamos el efecto que la dependencia entre ellos causaba en la suma total, el cual resultó considerable, concluimos que el conocer la distribución de daños individuales no determina la distribución de daños totales.

Apéndice A

Resultados útiles y Códigos

A.1. Capítulo 1

Función Gamma:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy$$

Se cumple además para cualquier n entero positivo que

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Distribución X_k^2 :

Al parámetro k de la distribución se le conoce como *grados de libertad*.

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$E[X] = k$$

$$Var(X) = 2k$$

Teorema A.1 (Producto de Cauchy). Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones absolutamente convergentes, es decir, se satisface que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$$

son series convergentes. Entonces se tiene que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

Teorema A.2 (Propiedades de funciones $o(h)$). *Dadas $o_1(h)$ y $o_2(h)$ dos funciones $o(h)$ y constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ se satisface*

(i) *La función $ao_1(h) + b_2o(h)$ es una función $o(h)$*

(ii) *Si $0 \leq f(h) \leq o_1(h)$ para cualquier h , entonces $f(h)$ es una función $o(h)$.*

Demostración. Para el punto (i) basta ver que por las propiedades del límite tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{ao_1(h) + b_2o(h)}{h} = a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_1(h)}{h} + b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_2(h)}{h} = 0$$

Para el punto (ii), al dividir entre h la desigualdad obtenemos

$$0 \leq \frac{f(h)}{h} \leq \frac{o_1(h)}{h}$$

Tomando límite cuando $h \rightarrow 0$ se tiene

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \leq \frac{o_1(h)}{h} = 0$$

Usando las propiedades el límite, concluimos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

por lo que $f(h)$ es una función $o(h)$. □

A.2. Capítulo 3

Teorema A.3 (Probabilidad de la unión finita). *Dados E_1, E_2, \dots, E_n eventos en una σ -álgebra, se satisface que*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i < j} P(E_i E_j) + \dots \\ &\quad (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+1} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}) \end{aligned}$$

La prueba puede encontrarse en [12].

A.3. Capítulo 4

Pareto:

Usamos la distribución *Pareto* Tipo II, cuyos parámetros son (ν_1, ν_2) y su función de densidad, distribución y momentos resultan las siguientes:

$$f(x) = \frac{\nu_1}{\nu_2} \left(\frac{\nu_2}{\nu_2 + x} \right)^{\nu_1 + 1}$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\nu_2}{\nu_2 + x} \right)^{\nu_1}$$

$$E[X] = \frac{\nu_2}{\nu_1 - 1}$$

$$E[X^n] = \frac{\nu_2^n \Gamma(\nu_1 - n) \Gamma(1 + n)}{\Gamma(\nu_1)}$$

F de Snedecor:

La distribución surge cuando se realiza el cociente entre dos distribuciones U_1 y U_2 con distribución X^2 con d_1 y d_2 grados de libertad respectivamente como

$$X = \frac{U_1/d_1}{U_2/d_2}$$

La variable aleatoria X resultante tiene una distribución *F de Snedecor* con grados de libertad (d_1, d_2) .

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d_2}{2}\right)} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}} x^{\frac{d_1}{2}-1} \left(1 + \frac{d_1}{d_2}x\right)^{-\frac{d_1+d_2}{2}}$$

$$E[X] = \frac{d_2}{d_2 - 2} \quad \text{para } d_2 > 2$$

$$Var(X) = \frac{2d_2^2(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)^2(d_2 - 4)} \quad \text{para } d_2 > 4$$

F-Generalizada(Pareto Generalizada):

Si $F(x; d_1, d_2)$ denota la función de distribución de una variable F de *Snedecor* con grados de libertad d_1 y d_2 , la función de distribución dada por

$$H_{\alpha, \lambda, k}(x) = F\left(\frac{\alpha}{k\lambda}x; 2k, 2\alpha\right)$$

corresponderá a una distribución *F-Generalizada* cuyos parámetros son $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $k > 0$.

$$h(x) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)} \frac{\lambda^\alpha x^{k-1}}{(x + \lambda)^{\alpha+k}}$$

$$E[X^n] = \frac{\lambda^n \Gamma(k + n) \Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)} \quad \text{si } -k < n < \alpha$$

$$E[X^n] = \frac{\lambda^n k(k + 1)\dots(k + n - 1)}{(\alpha - 1)\dots(\alpha - n)} \quad \text{si } n \text{ es un entero positivo}$$

Método de Momentos

(El contenido basado en [4]) Propuesto a finales de 1800 por Karl Pearson, el Método de Momentos es uno de los más utilizados cuando se tiene la tarea de estimar parámetros de alguna distribución, aunque en algunas ocasiones ha demostrado que los resultados obtenidos con este procedimiento pueden ser mejorados. Dada X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria proveniente de una distribución con función de densidad $f(x|\theta_1, \dots, \theta_k)$, los parámetros que buscamos pueden ser hallados igualando los primeros k momentos muestrales a los k momentos correspondientes a la distribución hipotética. Mas precisamente, si tenemos que

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^1, \quad \mu'_1 = E[X_1]$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad \mu'_2 = E[X_2]$$

⋮

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad \mu'_k = E[X_k]$$

Entonces, ya que los momentos μ'_j de la distribución hipotética suelen ser una función de los parámetros $(\theta_1, \dots, \theta_k)$, el estimador $(\hat{\theta})$ obtenido por nuestro Método

de Momentos $(\tilde{\mu}'_1, \dots, \tilde{\mu}'_k)$ será obtenido resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}m_1 &= \mu'_1(\theta_1, \dots, \theta_k) \\m_2 &= \mu'_2(\theta_1, \dots, \theta_k) \\&\vdots \\m_k &= \mu'_k(\theta_1, \dots, \theta_k)\end{aligned}$$

para $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ en términos del vector conocido (m_1, \dots, m_k) .

A.4. Capítulo 5

Códigos de programación realizados en Rproject utilizados en las simulaciones del Capítulo 5 para diferentes parámetros, resultando en las Figuras 6.1 y 6.2. El primero código es el de una función auxiliar que calcula el número de *defaults* que ocurren en un total de n deudores con probabilidades idénticas *probs* dada un número de *shocks*. Con la ocurrencia de cada *shock* se consideran únicamente los deudores restantes y se suman a los ya existentes.

```
# simulacion de un tipo de shocks
sim.ind <- function(shocks , probs , n){
  total <- 0
  if(shocks > 0){
    for(k in 1:shocks) total <- total + sum(rbinom(1,n-total , probs))
  }
  return(total)
}
```

Especificamos las intensidades de los *shocks* así como las probabilidades de *default* y el número de deudores pertenecientes a cada categoría. Estos parámetros varían entre sí, por ejemplo en el Caso 1 se utilizamos una matriz de intensidades en lugar de un solo vector como en el Caso 2, sin embargo la idea es exactamente la misma. Los siguientes son los parámetros del Caso 2.

```
# Intensidades individuales(1-2), por sectores(3-6) y global(7)
inten <- c(0.002,0.008,0.2,1,0.4,0.8,0.2)
```

A. RESULTADOS ÚTILES Y CÓDIGOS

```
#probs. de default en sectores
sec.1 <- c(0.005,0.0025,0.00125,0.0025)
sec.2 <- c(0.02,0.01,0.005,0.01)
sector <- rbind(sec.1,sec.2)
#probs. de default global
glob.1 <- c(0.01,0.0025,0.0125,0.005)
glob.2 <- c(0.04,0.01,0.05,0.02)
global <- rbind(glob.1,glob.2)
#numero de prestadores
N1 <- c(10000,20000,15000,5000)
N2 <- c(10000,25000,10000,5000)
N <- rbind(N1,N2)
```

El siguiente es el programa de simulaciones para el Caso 2, requiriendo el parámetro f .

```
sim.f <- function(f){
  sim <- numeric(10000)
  for(k in 1:10000){
    # definimos una matriz de defaults cuyas entradas
    # son para cada grupo de deudores por clase y sector
    def <- matrix(ncol=4,nrow=2)
    # numero de shocks en cada sector
    S <- c(rpois(1,inten[3]*f),rpois(1,inten[4]*f),
          rpois(1,inten[5]*f),rpois(1,inten[6]*f))
    # numero de shocks globales
    G <- rpois(1,inten[7]*f)
    for(i in 1:2){
      for(j in 1:4){
        # Usamos la funcion sim.ind() para shocks por sectores
        def[i,j] <- sim.ind(S[j],sector[i,j]/f,N[i,j])
        # Para shocks globales
        def[i,j] <- def[i,j] + sim.ind(G,global[i,j]/f,N[i,j] - def[
          i,j])
      }
    }
  }
}
```

```
    # Shocks individuales para los restantes
    def[i,j] <- def[i,j]+ sum(rpois(N[i,j]-def[i,j],inten[i]))
  }
}
# sumamos todas las entradas de la matriz de defaults
sim[k] <- sum(def)
}
retur(sim)
}
```


Bibliografía

- [1] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., AND HEATH, D. Coherent measures of risk. *Mathematical finance* 9, 3 (1999), 203–228. [7](#)
- [2] BARLOW, R. E. *Engineering reliability*. SIAM, 1998. [39](#)
- [3] BARLOW, R. E., AND PROSCHAN, F. *Mathematical theory of reliability*. SIAM, 1996. [39](#)
- [4] CASELLA, G., AND BERGER, R. L. *Statistical inference*. Duxbury Pacific Grove, CA, 2002. [126](#)
- [5] GALLAGER, R. G. *Stochastic processes: theory for applications*. Cambridge University Press, 2013. [5](#)
- [6] KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H., AND WILLMOT, G. E. *Loss models: from data to decisions*, vol. 715. John Wiley & Sons, 2012. [5](#)
- [7] LINDSKOG, F., AND MCNEIL, A. J. Common poisson shock models: applications to insurance and credit risk modelling. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* 33, 2 (2003), 209–238. [1](#), [2](#), [39](#), [61](#), [89](#), [105](#)
- [8] MACLEAN JOSEP, B. *El Seguro de Vida*. Editorial Continental SA, Traducción de la 9^a edición en inglés, México, 1965. [89](#)
- [9] MAGEE, J. H. *General insurance*. RD Irwin, 1955. [89](#), [90](#)
- [10] MARSHALL, A. W., AND OLKIN, I. A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association* 62, 317 (1967), 30–44. [75](#)
- [11] MCNEIL, A. J., FREY, R., AND EMBRECHTS, P. *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton university press, 2015. [5](#), [7](#), [8](#), [38](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [12] ROSS, S. *A first course in probability*. Pearson, 2014. [5](#), [124](#)
- [13] ROSS, S. M. *Introduction to probability models*. Academic press, 2014. [5](#)