UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CAMPO DE KLEIN-GORDON EN UN UNIVERSO EN EXPANSIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
IVAN RODOLFO IBARRA FERNÁNDEZ

TUTOR PRINCIPAL

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER, INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. JERÓNIMO ALONSO CORTEZ QUEZADA , FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

DR. JOSÉ ANTONIO RAFAEL GARCÍA ZENTENO, INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2018

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer al Posgrado de Ciencias Físicas de la UNAM por abrirme las puertas para iniciar mis estudios de maestría, además del apoyo que recibí para poderlo llevar a cabo. Además, quiero agradecer al CONACyT por el apoyo económico que me brindó para poder efectuar esta misión.
Quiero agradecer al Dr. José Vergara por sus atenciones, por ser mi guía y mentor durante mis estudios y, por supuesto, por incluirme en su proyecto para realizar este trabajo. Quiero también agradecer al Dr. Jerónimo Cortez y al Dr. José García por sus valiosas observaciones y aportaciones a este trabajo para aumentar la calidad del mismo.

Quiero agradecer a mis padres por su amor, comprensión y apoyo durante toda mi vida y en mi estancia para realizar mis estudios. Con su ejemplo basta para poder llegar al éxito en cualquier ámbito de la vida. Todas estas enseñanzas quedan codificadas en este trabajo y en mi vida como herramientas para poderlas aplicar ante cualquier adversidad y reto. A mis abuelos, mis segundos padres, que me transmiten toda su sabiduría y amor para poder llevar a cabo mis planes y son la base de mi formación personal. A mis amados hermanos Alejandro, Marcos y Aranza por su apoyo y comprensión, además de los momentos de distracción y los increíbles momentos que pasamos juntos.
A mis mejores amigos, Valeria y Carlos, su apoyo y su amistad es fundamental en todos los aspectos de mi vida y en mis estudios no es la excepción, por su paciencia y por los buenos momentos de distracción. También quiero agradecer a mis amigos Edgar, Alex y Eduardo por su apoyo, tanto académico y emocional durante este periodo, y por la amistad que tenemos desde nuestros estudios de licenciatura.

Una vez más quiero expresar mi eterno agradecimiento a todos ustedes, no me alcanza la vida para demostrarles el profundi impacto que todos ustedes tuvieron en mi. Su apoyo fue, y es, escencial en este trabajo y en mi trabajo futuro.

Introducción

Uno de los problemas actuales más grandes en la física es la construcción de una teoría cuántica de la gravedad para poder empatar los dos cimientos de la física moderna, la relatividad general y la teoría cuántica de campos. En particular, en este trabajo nos enfocamos en la cosmología como una simplificación de la relatividad general y en los campos cuánticos que se propagan en el Universo. Es por esta razón que es importante contar con un marco teórico adecuado para el estudio de tales campos. Se han hecho varios intentos para hacer la conexión entre la cosmología y la teoría cuántica. Se han explorado varias técnicas como son integrales de trayectoria, gravedad cuántica de lazos, teoría de cuerdas, etc, para lograr esta tarea, pero hasta el momento no han arrojado resultados completamente satisfactorios [5]. Una primera guía para llevar a cabo esta tarea es la de construir una teoría cuántica de campos en un fondo clásico gravitacional. De hecho tal teoría existe y se le llama teoría cuántica de campos en espacio-tiempos curvos (QFTCS). Como ya mencionamos, tal teoría es una combinación de la relatividad general estándar con la teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo curvo, el cual satisface las ecuaciones de Einstein clásicas. Es obvio que esta descripción no podemos tomarla como fundamental ya que no estamos cuantizando el campo gravitacional, por lo que esta teoría es válida para estudiar efectos cuánticos del campo en donde los efectos cuánticos de la gravedad sean despreciables. El satélite Planck confirma este hecho en los resultados obtenidos en el año 2013 sobre las mediciones del fondo cósmico de microondas. Las observaciones y la teoría se ajustan perfectamente, pero a escalas más pequeñas en las fluctuaciones de temperatura este no es el caso, resaltando el hecho de que a estas escalas necesitamos una teoría fundamental para explicar este fenómeno. Dejando de lado tal situación, en este trabajo nos enfocaremos en la construcción de la QFTCS para el campo de Klein-Gordon y discutiremos algunas de sus propiedades. A continuación agregamos una pequeña descripción de las ideas y conceptos que vamos a tratar en cada capítulo.

En el primer capítulo presentamos una breve introducción a la cosmología moderna, en donde mostramos las ideas y resultados más importantes en este campo, comenzando por las ideas que dieron origen a tal campo de conocimiento y al marco teórico que se usó. En la primera sección presentamos las ideas principales para poder construir modelos que nos permitan describir el Universo donde vivimos. Todo esto lo hacemos desde el marco de la relatividad general; en particular, buscamos soluciones de las ecuaciones de Einstein que nos permitan realizar esta tarea. Dada esta situación y usando como guía las observaciones astrofísicas disponibles al momento, terminamos tal sección con las hipótesis claves para construir el modelo cosmológico estándar. En la segunda sección introducimos la propiedad de homogeneidad e isotropía del Universo, donde mencionamos que los datos observacionales más recientes nos sugieren tal hecho. A partir de aquí presentamos el principio de Copérnico y el principio cosmológico, los cuales explicamos con cierto grado de detalle y nos enfocamos en las consecuencias de cada uno. Dadas las consecuencias de ambos principios distinguimos que el principio de Copérnico es con el cual podemos construir un modelo del Universo observable, en el cual la isotropía ha sido verificada con precisión. Finalmente cerramos esta sección mencionando el rango de validez de ambos principios. En la tercera y última sección de este capítulo comenzamos por definir con mayor precisión los conceptos de homogeneidad e isotropía desde el punto de vista geométrico del espacio-tiempo en cuestión. Con estos conceptos bien definidos pasamos a considerar un espacio de cuatro dimensiones, homogéneo e isótropo, y después unificamos en un solo resultado los casos en que la geometría local de tal espacio sea esférica, hiperbólica o plana. Con este resultado en mano extendemos tal espacio de cuatro dimensiones a un espacio-tiempo, dando lugar al espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker. Culminamos esta sección, y el primer capítulo, con la métrica de Friedmann-Robertson-Walker escrita en coordenadas esféricas, la cual describe un Universo homogéneo, isótropo y esféricamente simétrico.

En el segundo capítulo presentamos los preliminares necesarios para poder construir la teoría cuántica de campos estándar. Comenzamos la primera parte de este capítulo con la mecánica clásica y el formalismo lagrangiano. Definimos el Lagrangiano clásico de un sistema en términos de la energía cinética y la energía potencial del sistema y con esto definimos la acción del sistema. Hacemos una variación arbitraria de tal acción con respecto a una de las coordenadas generalizadas para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema. A continuación definimos el momento canónico generalizado y hacemos una transformación de Legendre del Lagrangiano, dando origen al Hamiltoniano del sistema, y terminamos esta parte con la deducción de las ecuaciones canónicas de Hamilton y discutimos los puntos más básicos del espacio fase. A partir de tales ecuaciones, pasamos a definir los paréntesis de Poisson en donde resaltamos su importancia para el cálculo de constantes de movimiento. En la siguiente subsección comenzamos la discusión del espacio fase extendido, primero definiendo el concepto de constricciones primarias y extendiendo el Hamiltoniano canónico a partir de tales constricciones y después introducimos la idea principal del algoritmo de Dirac-Bergmann. Definimos las cantidades y constricciones de primera clase e imponemos que el nuevo Hamiltoniano cumpla con estas definiciones por consistencia de la teoría. Dados estos conceptos, definimos las condiciones de norma y el paréntesis de Dirac como una extensión de los paréntesis de Poisson para hacer todas las constricciones de segunda clase. Finalizamos esta subsección con el caso de una partícula clásica en $n-$dimensiones para cimentar las ideas y conceptos desarrollados anteriormente, y en donde podemos ver claramente como es que extendimos el espacio fase al tratar al tiempo t como una variable dinámica más y cerramos con la conjetura de Dirac, la cual establece que las constricciones de primera clase son los generadores de las transformaciones de norma del sistema. Terminamos la revisión de la mecánica clásica con las transformaciones canónicas, las cuales son transformaciones del espacio fase original (q, p) a un nuevo espacio fase; digamos (Q, P), donde Q y P son funciones del espacio fase original, tales que dejan invariante el Jacobiano simpléctico. Este hecho tiene como consecuencia que los paréntesis de Poisson fundamentales sean invariantes. Continuamos la discusión de las transformaciones canónicas con el método de construcción de tales transformaciones usando funciones generadoras. Deducimos la forma y ecuaciones de la función generadora de primer tipo y de segundo tipo, las cuales se relacionan mediante una transformada de Legendre. Mostramos la forma y las ecuaciones que satisfacen las funciones generadoras de tercer y cuarto tipo y cerramos esta revisión de la mecánica clásica con el comentario de que la función generadora de segundo tipo se relaciona directamente con la acción del sistema y por lo tanto es la más usada.

En la segunda parte del segundo capítulo discutimos los conceptos y resultados más importantes de la mecánica cuántica. En la primera subsección comenzamos con la formulación matemática de tal teoría, en donde nos enfocamos en las variables dinámicas y en como evolucionan los estados físicos en el espacio de Hilbert. Después introducimos el conmutador entre dos variables dinámicas y lo entendemos como un mapeo entre los observables clásicos y cuánticos a través del paréntesis de Poisson entre tales observables clásicos. La evolución dinámica de los estados cuánticos está dada por la ecuación de Schrödinger y terminamos esta subsección con el comentario de que las constricciones de primera clase clásicas, al promoverlas a un operador que actúa en el espacio de Hilbert, y generalizamos la conjetura de Dirac al caso cuántico. Esta conjetura establece que tales constricciones son las generadoras de las transformaciones de norma cuánticas y con este hecho obtenemos la ecuación de Schrödinger. En la siguiente subsección analizamos el caso del oscilador armónico cuántico, partiendo del Hamiltoniano clásico para después cuantizarlo canónicamente. Reescribimos la teoría en términos de los operadores de creación-aniquilación, pasamos a la representación de Heisenberg y escribimos los estados excitados del oscilador en términos del estado base. Terminamos esta subsección generalizando al caso de un conjunto de m osciladores armónicos cuánticos la cual es importante para la construcción de la teoría cuántica de campos. Finalmente presentamos la teoría de las transformaciones canónicas cuánticas como una extensión natural al caso clásico. Este método ha sido estudiado desde los inicios de la mecánica cuántica y ha recibido bastante atención, en particular al caso de transformaciones canónicas lineales. Este tipo de transformaciones ha sido estudiado por Moshinsky y puede revisarse en [10], en donde en particular resaltamos el hecho de que tales transformaciones canónicas lineales no garantizan la unitariedad de la teoría, sin embargo, en este trabajo no nos enfocaremos en tal problema. En esta parte nos enfocamos en definir las transformaciones canónicas en el espacio fase no conmutativo (q, p) y ver como se transforman los operadores que corresponden a los observables físicos. Después pasamos a implementar estas transformaciones, para diferentes tipos de transformaciones, al caso cuántico para obtener una expresión para las ecuaciones de transformación. Cerramos esta subsección y el capítulo con la aplicación de la teoría desarrollada al oscilador armónico cuántico.

En el tercer capítulo trabajamos con la teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo plano y en un espacio-tiempo curvo, en particular tratamos al campo de Klein-Gordon. En la primera sección de este capítulo demostramos que el campo de Klein-Gordon en el espacio-tiempo de Minkowski es una suma infinita de osciladores armónicos desacoplados con frecuencia constante, de tal manera que podemos generalizar los resultados que obtuvimos en el segundo capítulo para el caso del oscilador armónico cuántico y aplicarlos al campo de Klein-Gordon. En la siguiente sección desarrollamos la teoría de tal campo en un espacio-tiempo curvo. Comenzamos con una breve introducción sobre la situación actual con respecto a la construcción de una teoría cuántica de la gravedad e introducimos la idea principal de la teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo curvo (QFTCS) como una primera guía hacia una teoría fundamental de la gravedad. En este contexto tomamos la acción del campo de Klein-Gordon en el espacio-tiempo plano y lo generalizamos al caso de un espacio-tiempo curvo. Después discutimos las condiciones de existencia y unicidad para las soluciones de las ecuaciones de movimiento del campo, de tal manera que podamos plantear un problema de valores iniciales bien definido. Por otro lado trabajamos con ciertas condiciones que debe de cumplir el espacio-tiempo en cuestión para que lo anterior sea posible, en particular nos enfocamos en espacio-tiempos globalmente hiperbólicos para poder tener una evolución determinista y bien definida para el campo de Klein-Gordon. Tal situación la anunciamos en un teorema el cual detallamos en tal capítulo. Cerramos esta discusión mostrando el hecho de que podemos generalizar toda la estructura matemática de la teoría del campo de Klein-Gordon en el espacio-tiempo de Minkowski al caso de un espacio-tiempo curvo globalmente hiperbólico.

En el cuarto capítulo trabajamos el campo de Klein-Gordon acoplado mínimamente a la gravedad en un Universo de FRW. Primero obtenemos la ecuación de movimiento del campo y después descomponemos al campo en una base $u_{\vec{k}}(\vec{x}, \tau)$ para expresar al campo en términos de las funciones de modo $\phi_k(\tau)$. Al hacer esto obtenemos una ecuación para tales funciones de modo análoga al caso de un oscilador armónico amortiguado con frecuencia dependiente del tiempo. Después hacemos una transformación a las funciones de modo para transformar tal problema al caso de un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo sin amortiguamiento. Finalmente tratamos el problema clásico de tal oscilador con ayuda de una transformación canónica y un invariante $\mathcal{I}$ para convertir este problema en un oscilador armónico clásico con frecuencia constante. Para esto tenemos que trabajar en el espacio fase extendido.

En el quinto capítulo trabajamos con la cuantización del campo de Klein-Gordon en el Universo de FRW. Comenzamos con la cuantización del oscilador armónico, primero implementando cuánticamente la transformación canónica en el espacio fase extendido que usamos en el capítulo anterior para poder convertir el oscilador armónico cuántico con frecuencia dependiente del tiempo al caso con frecuencia constante y obtener la forma de la transformación canónica cuántica y la relación entre los estados del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo y el oscilador armónico con frecuencia constante. Finalmente generalizamos la transformación canónica para el campo de Klein-Gordon y trabajamos con las formulaciones clásica y cuántica hasta llegar a las soluciones en ambos contextos.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar que podemos llegar al invariante de Lewis [4] para el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo con ayuda de las transformaciones canónicas cuánticas lineales, ya que en ambos casos la teoría es consistente, y convertir tal sistema a un oscilador armónico con frecuencia constante. Todo esto lo hacemos en el espacio fase extendido. Otra cuestión importante es que podemos generalizar estos resultados a la teoría del campo de Klein-Gordon en el espacio-tiempo FRW; ya que, como demostraremos, podemos generalizar toda la estructura matemática de la teoría del campo de Klein-Gordon en el espacio-tiempo de Minkowski al caso de un espacio-tiempo curvo, y remover la dependencia temporal en la frecuencia de las funciones de modo del campo.

Capítulo 1

Cosmología

La cosmología es la rama de la física que se encarga del estudio de las propiedades y de las estructuras a gran escala del *Universo*. Actualmente es una de las áreas de investigación de más rápido crecimiento y con una creciente precisión en las observaciones. Desde el nacimiento de la teoría de la relatividad general de Einstein en 1915 fue posible tener un marco teórico consistente para formular matemáticamente las nociones de espacio y tiempo y poder construir, con mayor rigor, modelos para poder describir el Universo. Esto permitió a Edwin Hubble en 1924 observar y entender la recesión de las galaxias, sugiriendo que el Universo se encuentra en expansión, por lo que los primeros modelos del Universo se centraban en esta observación.

A gran escala, la interacción gravitacional es la que domina la estructura y evolución del Universo, por lo que necesitamos una teoría de la gravedad que nos permita describir al Universo. Como mencionamos en el párrafo anterior, la teoría de la relatividad general cumple con este requisito. Es la mejor teoría de la gravedad que tenemos actualmente y ha sido probada con una gran precisión, siendo la medición de las ondas gravitacionales en el año 2016 el éxito más actual de la teoría [1]. Las primeras soluciones cosmológicas las obtuvo el propio Einstein en 1917, quien introdujo una constante en sus ecuaciones para empatar su visión de un Universo estático y cerrado. Sin embargo, a la luz de las observaciones hechas por Hubble, Einstein retiró esta constante de sus ecuaciones y se comenzaron a construir modelos de un Universo en expansión. Existen muchas observaciones acerca del Universo que nos guían hacia la construcción de modelos (al menos idealizados) más precisos. Sin embargo, un problema importante y que distingue a la cosmología de otras ramas de la ciencia, es que solo conocemos el Universo (observable) en el que vivimos, por lo que no podemos hacer comparaciones con otro. Además de esto, nos encontramos en una cierta posición del espacio-tiempo de la cual no somos capaces de movernos con total libertad. Nos encontramos restringidos al cono de luz del pasado. Es importante mencionar que, a pesar de estas dificultades, somos capaces de desechar los modelos del Universo que no sean consistentes con las observaciones que hacemos, por lo que en este sentido, la cosmología es igual al resto de las ramas de la ciencia.

1.1. Construcción de un modelo del Universo

Dentro del marco teórico de la relatividad general podemos preguntarnos sobre las soluciones de las ecuaciones de Einstein que describan (al menos de forma idealizada, pero aún así realista) el Universo en el que vivimos, tomando en cuenta las observaciones astrofísicas y cosmológicas disponibles y más actuales posibles. Sin duda, esta es una tarea monumental y difícil de llevar a cabo ya que, como mencionamos en la introducción anterior, solo somos capaces de observar una parte finita del Universo desde una posición única en el espacio-tiempo.

Los datos astrofísicos se encuentran localizados en el cono de luz del pasado y en nuestra línea de universo de datos geofísicos del pasado, esto es, en una pequeña porción de una hipersuperficie tridimensional. Esto nos presenta dos cuestiones importantes. Primero, pueden existir varios espacio-tiempos que sean compatibles con los datos disponibles y, segundo, la interpretación de estos datos no son independientes de la estructura del espacio-tiempo. Es por esto que es importante distinguir el *Universo observable*, del cual si tenemos (o al menos suponemos que podemos extraer) datos y observaciones, del *Universo*, en donde pueden existir regiones a las cuales no tenemos acceso o influencia directa alguna. Entonces, necesitamos hipótesis que nos permitan inferir las propiedades geométricas del Universo, partiendo del Universo observable.

En su forma más simple, el modelo cosmológico estándar se basa en las siguientes hipótesis:

1.- La interacción gravitacional, a grandes escalas, la describimos correctamente con la teoría de la relatividad general. Tenemos bastante evidencia observacional que apoya esta idea a pequeñas escalas (como en el caso del Sistema Solar). Sin embargo, esto puede no ser cierto a grandes escalas o en el Universo temprano. El principio de equivalencia nos permite extrapolar esta idea y suponer que las leyes de la física son las mismas independientemente de la época en la que se encuentre el Universo. Podemos hacer esta suposición para interacciones no gravitacionales, hasta donde sea posible, y aplicar las leyes de la física que conocemos.

2.- Lo que observamos en el Universo (a gran escala) es radiación y objetos como galaxias, cúmulos galácticos, etc, los cuales son representativos del contenido total de materia. A estas escalas, asumimos que este contenido total de materia es una mezcla de radiación y de un fluido sin presión, junto con la existencia de una constante cosmológica. También asumimos que no existe materia fuera del modelo estándar de la física de partículas.

3.- Asumimos la existencia de simetrías del espacio-tiempo, las cuales nos van a permitir resolver las ecuaciones de Einstein con mayor facilidad.

4.- Las hipótesis anteriores nos permiten determinar la estructura local del modelo del Universo. Sin embargo existe la posibilidad de que diferentes variedades tengan la misma geometría local pero diferente topología global, lo que corresponde a la elección de diferentes condiciones de borde. Para un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, la elección de la topología se reduce a escoger la topología de las secciones espaciales.

Como en todo modelo físico, existen razones para cuestionarse tales hipótesis y suponer que existen extensiones u otras hipótesis válidas para construir modelos más realistas del Universo.

1.2. Principio cosmológico y principio de Copérnico

Los datos observacionales nos muestran que la distribución de galaxias en el Universo es isotrópica, de la misma manera que el fondo cósmico de microondas. Esto sugiere que el espacio-tiempo que describe al Universo observable es esféricamente simétrico alrededor de nosotros. Tenemos dos posibilidades: nuestra Galaxia se encuentra en un punto especial del Universo observable tal que no es homogéneo, o, el espacio-tiempo es homogéneo e isotrópico en cada punto. Dadas estas dos posibilidades, tenemos dos principios de uniformidad con los cuales podemos construir modelos cosmológicos.
El *principio cosmológico* establece que el Universo es espacialmente homogéneo e isotrópico, lo que implica que cualquier observador percibe un Universo isotrópico en cualquier dirección. No existen sistemas de referencia preferidos. El segundo principio lo llamamos *principio de Copérnico*, el cual establece que no existen puntos preferidos y que no existen lugares especiales en el Universo (homogeneidad espacial). Este principio, junto con la hipótesis de isotropía, dan origen al principio cosmológico.
El principio cosmológico hace predicciones acerca de las regiones no observadas del Universo observable, es decir, del Universo. Estas predicciones determinan completamente la estructura del Universo, incluyendo regiones que quizás no sean observables, lo que significa que no podemos probarlo. Esta es una hipótesis muy fuerte. Por otro lado, el principio de Copérnico no hace este tipo de predicciones para el Universo, solo para el Universo observable, en donde la isotropía ha sido verificada con precisión. Es importante mencionar que ambos principios son válidos a gran escala para el Universo y el Universo observable y debemos de interpretarlos en un contexto estadístico, en donde a gran escala nos referimos a distancias más grandes que el tamaño de las estructuras más grandes del Universo observable.

1.3. Principio cosmológico. Métrica FRW

A continuación, definiremos con mayor precisión los conceptos de homogeneidad e isotropía.
La homogeneidad del espacio hace referencia al hecho de que cada punto del espacio es similar a otro, en todo momento. Un espacio-tiempo es espacialmente homogéneo si existe una familia de un parámetro de hipersuperficies de tipo espacio Σ_t foleando al espacio-tiempo, tal que, para cualquier tiempo t y para cualquier par de puntos (Q, P) de Σ_t, existe una isometría en la métrica del espacio-tiempo que lleva al punto Q al punto P.
La isotropía hace referencia a que cada punto en el Universo es isotrópico. Un espacio-tiempo es espacialmente isotrópico a cada punto si existe una congruencia de líneas de mundo tipo tiempo con un vector tangente u^μ (llamado observador isotrópico) tal que, en un punto P y para cualquier par de vectores unitarios tipo espacio e_1^μ y e_2^μ que pertenecen al espacio tangente, existe una isometría en la métrica que deja al vector u^μ en P, para un punto P fijo, y que rota al vector e_1^μ al vector e_2^μ. Por lo tanto, es imposible construir un vector tangente preferido perpendicular a u^μ.
Dadas estas definiciones y, más importante aún, apoyándonos en las observaciones cosmológicas, podemos suponer que el Universo observable es homogéneo e isotrópico a grandes escalas, es decir, que el principio cosmológico es válido. Con esto en mente, podemos construir la métrica para estudiar un Universo (observable) con estas características. Este es el objetivo de la siguiente subsección.

1.3.1. Métrica FRW

Consideremos un espacio tridimensional, homogéneo e isótropo. La geometría de tal espacio se encuentra codificada en la métrica g_{ij} (donde $i, j = 1, 2, 3$), de tal manera que la distancia propia (o elemento de línea) es

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \tag{1.1}$$

donde sumamos sobre índices repetidos. Un espacio trivial con estas características y que además tenga longitud positiva ($ds^2 > 0$) es el espacio Euclidiano

$$ds^2 = d\vec{x}^2. \tag{1.2}$$

Las transformaciones que dejan invariante al elemento de línea son las rotaciones y traslaciones tridimensionales. Por otro lado, podemos considerar una superficie esférica de radio a en un espacio Euclidiano cuadridimensional con elemento de línea

$$ds^2 = d\vec{x}^2 + dz^2, \tag{1.3}$$

donde $z^2 + \vec{x}^2 = a^2$. En este caso, las transformaciones que dejan invariante al elemento de línea son las rotaciones en cuatro dimensiones. Podemos hacer una rotación de tres dimensiones para el vector $\vec{x}$ la cual no tiene efecto en z. Finalmente, existe la posibilidad de que podamos considerar una superficie hiperesférica en un espacio pseudo-Euclidiano de cuatro dimensiones con elemento de línea

$$ds^2 = d\vec{x}^2 - dz^2, \tag{1.4}$$

donde $z^2 - \vec{x}^2 = a^2$, con a^2 como una constante positiva, hasta el momento. Este elemento de línea es invariante ante pseudo-rotaciones de cuatro dimensiones, como las transformaciones de Lorentz.
Considerando estos dos últimos casos, podemos escribir el elemento de línea como

$$ds^2 = d\vec{x}^2 \pm dz^2 \tag{1.5}$$

con

$$z^2 \pm \vec{x}^2 = a^2. \tag{1.6}$$

Hacemos el siguiente escalamiento en las coordenadas

$$\vec{x} \to a\vec{x}, \quad z \to az \tag{1.7}$$

y el elemento de línea (1.5) junto con la condición (1.6) se vuelven

$$ds^2 = a^2 \left(d\vec{x}^2 \pm dz^2\right) \tag{1.8}$$

y

$$z^2 \pm \vec{x}^2 = 1. \tag{1.9}$$

Usando la condición anterior, podemos escribir la coordenada z en términos del vector $\vec{x}$ y reescribir el elemento de línea (1.8) en función del vector $\vec{x}$:

$$z = \sqrt{1 \mp \vec{x}^2} \quad \therefore \quad dz = \mp \frac{\vec{x} \cdot d\vec{x}}{\sqrt{1 \mp \vec{x}^2}} \tag{1.10}$$

y entonces

$$ds^2 = a^2 \left[d\vec{x}^2 \pm \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 \mp \vec{x}^2} \right]. \tag{1.11}$$

Si también consideramos el caso de un espacio Euclidiano de cuatro dimensiones, podemos escribir el elemento de línea como

$$ds^2 = a^2 \left[d\vec{x}^2 + k \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - k\vec{x}^2} \right], \tag{1.12}$$

donde

$$k = \begin{cases} 1 & \text{caso esférico} \\ -1 & \text{caso hiper-esférico} \\ 0 & \text{caso euclidiano.} \end{cases} \tag{1.13}$$

Escogemos $a^2 > 0$ ya que las distancias son positivas, es decir, $ds^2 > 0$ para todo punto $\vec{x}$.

Es sencillo extender esta idea al caso de un espacio-tiempo con estas características. Ahora tomamos $a = a(t)$ y el elemento de línea (1.12) para este espacio-tiempo es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\vec{x}^2 + k\frac{(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{1-k\vec{x}^2}\right], \tag{1.14}$$

en donde es claro que $g_{\mu\nu} = diag(-,+,+,+)$. A la función $a(t)$ se le llama factor de escala o factor de Robertson-Walker. Existe un teorema que nos dice que esta métrica es única (hasta una transformación de coordenadas) si el Universo es esféricamente simétrico y homogéneo para un conjunto de observadores en caída libre.

Las componentes de la métrica son

$$g_{00} = -1, \quad g_{i0} = 0, \quad g_{ij} = a^2(t)\left[\delta_{ij} + k\frac{x_i x_j}{1-k\vec{x}^2}\right]. \tag{1.15}$$

En coordenadas esféricas tenemos que

$$d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \quad d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \quad \vec{x}\cdot d\vec{x} = rdr \tag{1.16}$$

y el elemento de línea es

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t)\left[dr^2 + r^2 d\Omega + \frac{kr^2}{1-kr^2}dr^2\right] \\ &= -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{1-kr^2+kr^2}{1-kr^2}dr^2 + r^2 d\Omega\right] \\ &= -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega\right]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Entonces, las componentes de la métrica son

$$g_{00} = -1, \quad g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1-kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2(t)r^2\sin^2\theta. \tag{1.18}$$

Esta es la métrica que usaremos para construir la teoría de un campo escalar real en un espacio-tiempo curvo, con la particularidad de que $k = 0$ ya que los datos observacionales actuales del Universo sugieren que el espacio-tiempo en el que vivimos es plano. Esta construcción la presentaremos en los siguientes capítulos.

Capítulo 2

Preliminares. Mecánica clásica y cuántica

2.1. Mecánica clásica

2.1.1. Formalismo Lagrangiano

Supongamos un sistema dinámico de n grados de libertad, al cual lo describimos con el conjunto $\{q^i\}$ de coordenadas generalizadas, donde $i = 1, ..., n$. Definimos el *Lagrangiano* del sistema como la diferencia de la energía cinética y la energía potencial, en términos de estas coordenadas generalizadas, de las velocidades generalizadas y del tiempo t:

$$\mathcal{L}(q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n, t) \equiv T(\dot{q}^1, ..., \dot{q}^n) - V(q^1, ..., q^n, t), \tag{2.1}$$

donde $V(q^1, ..., q^n, t)$ es el potencial de interacción y depende del sistema en particular y la energía cinética es

$$T(\dot{q}^1, ..., \dot{q}^n) = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{n}(\dot{q}^i)^2. \tag{2.2}$$

Las ecuaciones de movimiento las podemos deducir del principio de Hamilton, en donde la acción del sistema se define como

$$\mathcal{S}\left[q^1, ..., q^n\right] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n, t), \tag{2.3}$$

la cual es una funcional de la posición del cuerpo al tiempo t. Consideramos todas las trayectorias (suaves) posibles que puede tomar el sistema, con la condición de que los extremos $q^i(t_1) = q^i_{inicial}$ y $q^i(t_2) = q^i_{final}$ estén fijos en todo momento. Esto es, que las variaciones arbitrarias con respecto a las coordenadas $q^i(t)$ de los extremos sean

$$\delta q^i(t_1) = 0, \qquad \delta q^i(t_2) = 0. \tag{2.4}$$

Entonces, el principio de Hamilton establece que la trayectoria real del sistema es aquella que extremiza a la acción $\mathcal{S}$, dada por la ecuación (2.3). Consideremos una variación arbitraria de la acción con respecto a las coordenadas $q^i(t)$, a un tiempo t fijo. De la ecuación (2.3) tenemos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta\mathcal{L} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i \right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

pero las variaciones y las derivadas conmutan, por lo tanto podemos usar identidad

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i}\delta q^i \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right)\delta q^i$$

en la ecuación anterior y tenemos

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i}\delta q^i \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right)\delta q^i \right].$$

Integramos el segundo término de la ecuación anterior, y de las condiciones (2.4) obtenemos

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) \right]\delta q^i$$

Finalmente, de la condición de que la acción sea una extremo para cualquier variación arbitraria de la trayectoria, $\delta\mathcal{S} = 0$, obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0, \qquad i = 1, ..., n. \tag{2.6}$$

Estas ecuaciones son llamadas las ecuaciones de Euler-Lagrange, o ecuaciones de Lagrange. Como el Lagrangiano es función de las velocidades generalizadas $\dot{q}^i$, las ecuaciones anteriores son ecuaciones diferenciales de segundo orden (aceleraciones), por lo que necesitamos $2n$ condiciones iniciales para poder resolverlas, sea $q^i(t_0)$ y $\dot{q}^i(t_0)$. Las ecuaciones (2.6) son equivalentes a las ecuaciones de Newton y las soluciones nos dan la trayectoria del sistema para todo tiempo t. Con las posiciones y las velocidades bien definidas, determinamos completamente el estado mecánico del cuerpo en cuestión.

2.1.2. Formalismo Hamiltoniano

Como mencionamos en la sección anterior, en el formalismo Lagrangiano tenemos n ecuaciones diferenciales de segundo grado para las coordenadas generalizadas q^i, para las cuales necesitamos $2n$ condiciones iniciales para resolverlas. En el formalismo Hamiltoniano queremos expresar las coordenadas generalizadas q^i y los momentos generalizados

p_i, definidos como

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}, \qquad i = 1, ..., n \quad , \tag{2.7}$$

en una manera más simétrica. Es decir, queremos eliminar las velocidades generalizadas $\dot{q}^i$ y escribir todo en términos de los momentos generalizados p_i.

Dada la definición anterior de momento generalizado p_i, podemos definir el *Hamiltoniano* del sistema mediante la transformada de Legendre del Lagrangiano del sistema

$$\mathcal{H}(q^i, p_i, t) \equiv \dot{q}^i p_i - \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i, t), \tag{2.8}$$

donde observamos que el Hamiltoniano es función de las coordenadas y momentos generalizados, y en general, del tiempo. Entonces, de la ecuación (2.7) podemos despejar la velocidad generalizada y expresarla en términos del momento generalizado y sustituirlo en la definición anterior del Hamiltoniano del sistema. De aquí, calculamos la diferencial del Hamiltoniano, y aprovechando la definición de momento generalizado, obtenemos la expresión

$$d\mathcal{H} = \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \tag{2.9}$$

Usando nuevamente la definición de momento generalizado (2.7) y usando las ecuaciones de Lagrange (2.6) obtenemos

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}$$

Así, usando la ecuación anterior en la expresión (2.9) obtenemos finalmente

$$d\mathcal{H} = \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt.$$

Por otro lado, también tenemos

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt.$$

Comparando las últimas dos expresiones, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \tag{2.10}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \tag{2.12}$$

Estas son las ecuaciones de Hamilton. Son un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer grado, para las cuales necesitamos $2n$ condiciones iniciales para resolver completamente el sistema. El estado mecánico del sistema lo especificamos mediante el par (q^i, p_i) para todo tiempo t, el cual define un espacio $2n$-dimensional llamado *espacio fase* y con el que estudiamos la evolución dinámica del sistema. El formalismo Hamiltoniano de la mecánica clásica es bastante útil para hacer la conexión con la mecánica cuántica, por lo que construiremos algunos conceptos útiles que podremos utilizar para hacer esta conexión.

Paréntesis de Poisson

Supongamos una función del espacio fase $F = F(q.p, t)$ y calculemos su derivada total, tenemos

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Usamos las ecuaciones de Hamilton (2.10) y (2.11) en la expresión anterior y queda

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{2.13}$$

Definimos los paréntesis de Poisson entre la función F y el hamiltoniano $\mathcal{H}$ como

$$\{F, \mathcal{H}\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i}, \tag{2.14}$$

de tal manera que la ecuación (2.13) queda

$$\frac{dF}{dt} = \{F, \mathcal{H}\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{2.15}$$

En general, para dos funciones F y G del espacio fase, los paréntesis de Poisson entre las dos funciones se define como

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i}. \tag{2.16}$$

Los paréntesis de Poisson son muy importantes dentro del formalismo Hamiltoniano por varias razones (mencionaremos algunas más en la siguiente sección), pero una de las más importantes a la hora de resolver problemas mecánicos, es la de que nos permite encontrar constantes de movimiento de una manera muy simple. Tomemos la ecuación (2.15) y supongamos que la función F sea una constante de movimiento ($\dot{F} = 0$), entonces, se cumple la condición

$$\{F, \mathcal{H}\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Si además la función F no depende explícitamente del tiempo, tenemos que

$$\{F, \mathcal{H}\} = 0.$$

Esta condición nos permite encontrar constantes de movimiento del sistema.

Espacio fase extendido

Como demostramos anteriormente, de la variación estacionaria de la acción obtuvimos las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.6). Si desarrollamos la derivada total en las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^i + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j \partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = 0. \tag{2.17}$$

Por otro lado, para trabajar en el formalismo Hamiltoniano primero debemos calcular los momentos p_i conjugados a la coordenada q^i. Esto lo hacemos usando la ecuación (2.7). En el formalismo Hamiltoniano supusimos una relación uno a uno entre las velocidades y momentos generalizados, por lo que podemos expresar las velocidades generalizadas en términos de los momentos generalizados; los cuales son independientes entre sí. Esto ocurre en los casos más sencillos pero en general no es así, debemos de considerar que puede presentarse el caso en el que existan relaciones entre las coordenadas y momentos generalizados.
Dada esta situación definimos las ***constricciones primarias*** como *aquellas constricciones que aparecen de las definiciones de los momentos y son relaciones entre ellos y las coordenadas generalizadas e indican que no todos los momentos son independientes.* Matemáticamente, estas constricciones son de la forma siguiente

$$\mathcal{G}_A(q^i, p_i) \approx 0, \tag{2.18}$$

donde $A = 1, ..., r$. Dichas constricciones son débilmente cero, es decir, solo podemos considerar que son cero después de haber calculado los paréntesis de Poisson necesarios para las ecuaciones de movimiento. Tales constricciones se originan a partir de que el primer término de la ecuación (2.17) es cero

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0, \tag{2.19}$$

lo que implica que no todas las ecuaciones de Euler-Lagrange son independientes. Por otro lado, sabemos que el Hamiltoniano es función de las coordenadas y de los momentos generalizados, además del tiempo en general, de tales variables dinámicas. Sin embargo, debido a la existencia de constricciones primarias de la forma de la ecuación (2.8) en el sistema, las variaciones de las velocidades generalizadas no son totalmente independientes de las variaciones de las coordenadas generalizadas (y por ende de los momentos generalizados). La relación (2.8) define una hipersuperficie en el espacio fase y la dinámica se encuentra restringida en tal hipersuperficie, en la cual el Hamiltoniano se encuentra bien definido y la relación (2.8) es idénticamente cero. Podemos extender la teoría fuera de tal hipersuperficie con el coste de introducir una arbitrariedad ya que existen muchos formas de hacer esto. Si definimos el nuevo Hamiltoniano total $\mathcal{H}_T$ como

$$\mathcal{H}_T \equiv \mathcal{H}_c + \lambda^A \mathcal{G}_A, \tag{2.20}$$

donde H_c es el Hamiltoniano canónico (2.8) y λ^A es un multiplicador de Lagrange, obtenemos las ecuaciones de movimiento (2.6) al variar la acción

$$\mathcal{S} = \int dt \left(\dot{q}^i p_i - \mathcal{H}_T \right),$$

por lo que debe de existir algún método adecuado para remover esta arbitrariedad.
De hecho, tal método se conoce como el algoritmo de Dirac-Bergmann. La idea de este algoritmo es que esta hipersuperficie sea constante con respecto al tiempo de tal manera que el método sea consistente. Esto quiere decir que debe de cumplirse que

$$\dot{\mathcal{G}}_A = \{\mathcal{G}_A, \mathcal{H}_T\} = V_A^B \mathcal{G}_B + V_A^C \varphi_C \approx 0, \tag{2.21}$$

donde φ_C son *constricciones secundarias* y $C = r+1, ..., s$. Además, requerimos que $\dot{\varphi}_C \approx 0$. Una vez que ya no tengamos más constricciones, podemos hacer las siguientes definiciones:

***Definición* 1. (Cantidad de primera clase)**. *R es una cantidad de primera clase si se tiene*

$$\{R, \mathcal{G}_A\} = V_A^B(q,p)\mathcal{G}_B,$$

con $A = 1, ..., r, r+1, ..., s$; donde s es el total de constricciones originadas por el procedimiento anterior.

Por consistencia del método, pedimos que el Hamiltoniano total $\mathcal{H}_T$ sea una cantidad de primera clase, es decir, que se cumpla

$$\{\mathcal{H}_T, \mathcal{G}_A\} = V_A^B(q,p)\mathcal{G}_B,$$

ya que en el caso contrario tendríamos constricciones adicionales. Las cantidades de segunda clase son aquellas que no satisfacen la relación anterior. Considerando el conjunto completo de constricciones primarias y secundarias $\mathcal{C}_A = (\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_r, \varphi_1, ..., \varphi_s)$ podemos reescribir la ecuación (2.21) de la siguiente manera

$$\{\mathcal{C}_A, \mathcal{H}_T\} = V_A^B(q,p)\mathcal{C}_B + \lambda^{A_1} \{\mathcal{C}_A, \mathcal{G}_{A_1}\} \approx 0,$$

donde $A_1 = 1, ..., r, r+1, ..., s$.

***Definición* 2. (Constricciones de primera clase)**. *Una constricción de primera* *clase $\mathcal{F}_a$ es aquella que cumple con la ecuación*

$$\{\mathcal{F}_a, \mathcal{G}_B\} = f_{aB}^C(q,p)\mathcal{G}_C, \quad a = 1, ..., m$$

.

Esto es, son aquellas cuyo paréntesis de Poisson con $\mathcal{G}_A$ es débilmente cero. Las cantidades $f_{aB}^C(q,p)$ son funciones definidas en el espacio fase, y si son constantes, corresponden a las constantes de estructura en un álgebra de Lie.

***Definición* 3. *(Constricción de segunda clase)*.** *Una constricción de segunda clase es una constricción χ_α que cumple*

$$\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = C_{\alpha\beta},$$

donde $detC_{\alpha\beta} \neq 0, C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}$, con $\alpha = 1, ..., \ell$.

Podemos distinguir las constricciones de primera clase $\mathcal{F}_a$ de las de segunda clase χ_α de la siguiente manera: supongamos que tenemos m constricciones de primera clase y ℓ de segunda clase, entonces el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \lambda^a \mathcal{F}_a + \mu^\alpha \chi_\alpha.$$

Podemos determinar el multiplicador de Lagrange μ^α si evolucionamos temporalmente la constricción χ_α

$$\begin{aligned}
\dot{\chi}_\alpha &= \{\chi_\alpha, \mathcal{H}_T\} \\
&= \{\chi_\alpha, \mathcal{H}_c\} + \lambda^a \{\chi_\alpha, \mathcal{F}_a\} + \mu^\beta \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \\
&= \{\chi_\alpha, \mathcal{H}_c\} + \lambda^a f_{\alpha a}^B \mathcal{G}_B + \mu^\beta C_{\alpha\beta} \\
&\approx 0.
\end{aligned}$$

Definimos $\{\chi_\alpha, \mathcal{H}_c\} \equiv N_\alpha$, y al haber evaluado los paréntesis de Poisson podemos hacer *fuertes* las constricciones y el cero, obteniendo

$$\mu^\alpha = -(C^{\beta\alpha})^{-1} N_\beta,$$

donde $(C^{\beta\alpha})^{-1}$ es el inverso de $C_{\beta\alpha}$. De manera similar, para las constricciones de primera clase tenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{F}}_b &= \{\mathcal{F}_b, \mathcal{H}_c\} + \lambda^a \{\mathcal{F}_b, \mathcal{F}_a\} + \mu^\beta \{\mathcal{F}_b, \chi_\beta\} \\
&= \{\mathcal{F}_b, \mathcal{H}_c\} + \lambda^a f_{ba}^C \mathcal{G}_C + \mu^\beta f_{b\beta}^C \mathcal{G}_C \\
&\approx 0.
\end{aligned}$$

Entonces, al hacer *fuertes* las constricciones nos quedamos sin la posibilidad de despejar el multiplicador de Lagrange indeterminado λ^a, por lo que la ambigüedad en las ecuaciones de movimiento no podemos removerla sin modificar, al menos, el álgebra que satisfacen las constricciones. Para remediar este problema debemos de imponer unas *condiciones de norma*, las cuales usamos para convertir las constricciones de primera clase en constricciones de segunda clase.

Definición 4. (Condición de norma). *Sea un conjunto de constricciones de primera clase $\mathcal{F}_a$, donde $a = 1, ..., m$, se añaden nuevas constricciones φ_a de modo tal que ahora tenemos $2m$ constricciones que cumplen con la ecuación*

$$\{\mathcal{F}_a, \varphi_b\} = C_{ab}.$$

Una vez que impongamos las condiciones de norma, todas las constricciones son de segunda clase y podemos redefinir el álgebra que satisfacen las variables dinámicas.

Definición 5. (Paréntesis de Dirac). *Sean A y B dos funciones del espacio fase, χ_a y χ_b dos constricciones de segunda clase y C_{ab} un elemento de su álgebra. Definimos el paréntesis de Dirac como*

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_a\} C^{ab} \{\chi_b, B\},$$

donde C^{ab} es la matriz inversa asociada a la condición de norma.

El paréntesis de Dirac es de suma importancia ya que nos da la siguiente regla de cuantización canónica

$$\{A, \chi_a\}^* \rightarrow \frac{1}{i}\left[\hat{A}, \hat{\chi}_a\right]$$

y además cumple con las propiedades básicas de los paréntesis de Poisson ya que está definido en términos de estos.

A continuación vamos a presentar un ejemplo para cimentar las ideas y conceptos anteriores, y lo más importante, asegurarnos de que el método es consistente. Supongamos la acción clásica para una partícula en n-dimensiones

$$\mathcal{S} = \int dt \left(\frac{1}{2} m \delta_{ab} \frac{dq^a}{dt}\frac{dq^b}{dt} - V(q^a, t)\right).$$

Haciendo la parametrización $t \rightarrow \tau(t)$ en la acción anterior, obtenemos

$$\mathcal{S} = \int d\tau \left(\frac{1}{2} m \delta_{ab} \frac{\dot{q}^a \dot{q}^b}{\dot{t}} - \dot{t} V(q^a, t)\right). \tag{2.22}$$

donde definimos $\dot{\sigma} \equiv \frac{d\sigma}{d\tau}$ y las funciones escalares se transforman bajo la parametrización anterior como $q^a(t) = q^a(\tau)$ y tenemos las relaciones

$$dt = \frac{dt}{d\tau}d\tau = \dot{t}d\tau, \quad \frac{dq^a}{dt} = \frac{dq^a}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{\dot{q}^a}{\dot{t}}.$$

El tiempo t toma el papel de una coordenada y la función τ es el nuevo tiempo. Volvemos a hacer una parametrización de la forma $\tau \to f(\tau)$ en la acción anterior, entonces, de la misma manera que en el caso anterior tenemos

$$d\tau = \tau' df, \quad \dot{q}^a = \frac{q'^a}{\tau'}, \quad \dot{t} = \frac{t'}{\tau'}$$

donde definimos $\sigma' \equiv \frac{d\sigma}{df}$, y la acción queda

$$\mathcal{S} = \int df \left(\frac{1}{2} m\delta_{ab} \frac{q'^a q'^b}{t'} - t'V(q^a, t) \right).$$

Observamos que la acción es de la misma forma que (2.22), entonces, la acción es invariante ante parametrizaciones subsecuentes. De la acción (2.22) obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\frac{\dot{q}^a}{\dot{t}} \right) + \dot{t}\frac{\partial V}{\partial q^a} = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{1}{2}\delta_{ab}\frac{\dot{q}^a\dot{q}^b}{\dot{t}^2} - V(q^a, t) \right) = 0.$$

Los momentos generalizados son

$$p_a = m\frac{\dot{q}_a}{\dot{t}}$$

y

$$p_t = -\frac{1}{2}m\delta_{ab}\frac{\dot{q}^a\dot{q}^b}{\dot{t}^2} - V(q^a, t).$$

Es fácil observar que los momentos no son independientes, agregar una coordenada más ha afectado la dinámica del sistema de manera dramática. De estas dos ecuaciones podemos obtener la ecuación de Schrödinger-Jacobi-Dirac (ver ecuaciones (2.37) y (2.42)) después de expresar la velocidad generalizada en términos del momento generalizado

$$p_t + \frac{p_a p^a}{2m} + V(q^a, t) = 0. \tag{2.23}$$

Esta ecuación muestra explícitamente la relación entre el momento espacial y temporal, por lo que esta es nuestra constricción

$$\varphi(q, p, t, p_t) = p_t + \frac{p_a p^a}{2m} + V(q^a, t) \approx 0.$$

Calculamos el Hamiltoniano canónico, tomando el Lagrangiano de la acción (2.22)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= p_t\dot{t} + p_a\dot{q}^a - \mathcal{L} \\
&= p_t\dot{t} + p_a\dot{q}^a - \left(\frac{1}{2}m\frac{\dot{q}^a\dot{q}_a}{\dot{t}} - \dot{t}V(q^a,t)\right) \\
&= p_t\dot{t} + p_a\dot{q}^a - \dot{t}\left(\frac{p^a p_a}{2m} - V(q^a,t)\right) \\
&= p_a\dot{q}^a + \dot{t}\left(p_t - \frac{p^a p_a}{2m} + V(q^a,t)\right) \\
&= p_a\left(\dot{q}^a - \frac{p^a\dot{t}}{m}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

en donde usamos la ecuación de Schrödinger-Jacobi-Dirac en la cuarta línea del desarrollo anterior. El Hamiltoniano canónico resulta igual a cero, entonces el Hamiltoniano total $\mathcal{H}_T$ es

$$\mathcal{H}_T = \lambda\left(p_t + \frac{p_a p^a}{2m} + V(q^a,t)\right)$$

y las ecuaciones de movimiento quedan

$$\dot{q}^a = \{q^a, \mathcal{H}_T\} = \lambda\{q^a,\varphi\} = \lambda\left\{q^a, \frac{p_a p^a}{2m}\right\} = \lambda\frac{p^a}{m},$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_a = \{p_a, \mathcal{H}_T\} = \lambda\{p_a,\varphi\} = \lambda\{p_a, V\} = -\lambda\frac{\partial V}{\partial q^a}, \\
\dot{t} = \{t, \mathcal{H}_T\} = \lambda\{t,\varphi\} = \lambda\{t, p_t\} = \lambda, \\
\dot{p}_t = \{p_t, \mathcal{H}_T\} = \lambda\{p_t,\varphi\} = -\lambda\frac{\partial V}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Este método debe de ser consistente, por lo que debemos de recuperar las ecuaciones de movimiento. Esto es fácil de observar si tomamos $\lambda = 1$ lo que implica que $\dot{t} = 1$ y por lo tanto $t = \tau$, recuperamos el tiempo t, y recuperamos las ecuaciones de movimiento originales

$$\frac{dq^a}{dt} = \frac{\dot{q}^a}{\dot{t}} = \frac{p^a}{m}, \quad \frac{dp_a}{dt} = \frac{\dot{p}_a}{\dot{t}} = -\frac{\partial V}{\partial q^a}.$$

Concluimos que el método es consistente.

Con este ejemplo podemos ver que el Hamiltoniano total $\mathcal{H}_T$ se encuentra en el espacio fase extendido, es decir, ahora consideramos a la pareja (t, p_t) como parte del espacio fase original (q, p). La acción

$$\mathcal{S} = \int d\tau\left(p_a\dot{q}^a + p_t\dot{t} - \mathcal{H}_T\right),$$

donde ahora las derivadas son con respecto al nuevo tiempo τ,se encuentra en tal espacio extendido ya que los multiplicadores de Lagrange son arbitrarios. Si partimos de un punto inicial, existen muchas trayectorias (una por cada multiplicador) que nos llevarán

a diferentes puntos iniciales, pero, si definimos el espacio fase extendido como la clase de equivalencia de las diferentes trayectorias, el punto final es único. Esto origina una nueva simetría que es la que media las diferentes trayectorias y que deja las ecuaciones de movimiento invariantes. Tal transformación está contenida en una transformación de norma y la creamos por agregar una nueva coordenada y por extender el espacio fase, es decir, la coordenada que agregamos es el multiplicador de Lagrange. Por esta razón podemos ver al sistema como un sistema con $n-s$ grados de libertad. Estas simetrías *internas* están asociadas a las constricciones de primera clase $\mathcal{F}_a$.
Dirac conjeturó que las constricciones de primera clase $\mathcal{F}_a$ son los generadores infinitesimales de las transformaciones de norma, es decir,

$$\delta_\epsilon T = \epsilon^a \{T, \mathcal{F}_a\}. \tag{2.24}$$

Esta es la conjetura de Dirac. Para determinar el multiplicador de Lagrange debemos evolucionar temporalmente con el Hamiltoniano principal $\mathcal{H}_p$, el cual se define como

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + \lambda^a \mathcal{F}_a, \tag{2.25}$$

a las constricciones originales y las que resulten de aplicar el algoritmo de Dirac-Bergmann $\mathcal{F}_a$. Estas simetrías internas deben de dejar invariante a la acción, de tal manera que el estado físico no dependa del multiplicador de Lagrange. Al ser generadas por las constricciones de primera clase, solo es importante el Hamiltoniano principal $\mathcal{H}_p$.

Transformaciones canónicas

Los paréntesis de Poisson determinan la estructura algebraica de la mecánica clásica, en el contexto del formalismo Hamiltoniano. Los paréntesis fundamentales dentro de la teoría son los que involucran a las variables del espacio fase. Estos paréntesis fundamentales son

$$\{q^i, q^j\} = 0, \tag{2.26}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \tag{2.27}$$

y

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j. \tag{2.28}$$

Por otro lado, existe una manera de escribir las ecuaciones de Hamilton de una manera mucho más simétrica. Para esto definimos el vector $2n$-dimensional

$$\mathbf{x} \equiv (q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)^T \tag{2.29}$$

y la matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

de dimensión $n \times n$. De esta manera, las ecuaciones de Hamilton (2.10) y (2.11) las podemos escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = J\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}. \tag{2.30}$$

Ahora, en muchos casos resulta complicado resolver las ecuaciones de Hamilton y es conveniente buscar transformaciones que nos simplifiquen el problema en cuestión. Sin embargo, queremos que la forma de las ecuaciones de Hamilton sea invariante bajo tal transformación, lo que nos restringe el tipo de transformaciones que podemos hacer. Sean

$$q(t) \to Q(q,p)$$

y

$$p(t) \to P(q,p)$$

tales transformaciones de las variables del espacio fase. Estas transformaciones cambian al vector $\mathbf{x}$ en, digamos, al vector $\mathbf{y}$, cuyas componentes son

$$x_i \to y_i(x),$$

donde $i = 1, ..., 2n$. De aquí

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} J_{jk} \frac{\partial y_\ell}{\partial x_k}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_\ell},$$

o bien

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{J} J \mathcal{J}^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{y}}, \tag{2.31}$$

en donde usamos la ecuación (2.30) y $\mathcal{J}$ es el Jacobiano de la transformación. Es fácil observar que las ecuaciones de Hamilton son invariantes bajo la transformación $x_i \to y_i(x)$ si se cumple

$$\mathcal{J} J \mathcal{J}^T = J, \tag{2.32}$$

entonces, decimos que el Jacobiano es simpléctico si se cumple lo anterior. Una transformación de variables del espacio fase con Jacobiano simpléctico se le llama *transformación canónica.*

Una consecuencia importante del resultado anterior es que los paréntesis de Poisson son invariantes bajo una transformación canónica, por lo que los paréntesis fundamentales en las nuevas variables (Q, P) son

$$\{Q^i, Q^j\} = 0, \{P_i, P_j\} = 0, \{Q^i, P_j\} = \delta^i_j.$$

Esto lo demostraremos de la siguiente manera. Supongamos dos funciones del espacio fase arbitrarias $F(x_i)$ y $G(x_i)$, el paréntesis de Poisson entre ellas es

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} \\ &= J_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Hacemos una transformación $x_i \to y_i(x)$ y tenemos que para cualquier función $f(x_i)$ del espacio fase

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_j}\mathcal{J}_{ji}$$

y por lo tanto, la ecuación (2.33) queda

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial y_k}\mathcal{J}_{ki}J_{ij}\mathcal{J}_{\ell j}\frac{\partial G}{\partial y_\ell}.$$

Suponiendo que la transformación es canónica, se cumple la ecuación (2.32), tenemos

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial y_k}J_{k\ell}\frac{\partial G}{\partial y_\ell},$$

entonces la forma de los paréntesis de Poisson entre las funciones F y G se preserva en una transformación canónica.

A continuación presentamos un método de construcción de transformaciones canónicas a partir de *funciones generadoras*. Supongamos un sistema en el espacio fase (q, p) con Hamiltoniano $\mathcal{H}(q, p, t)$. Hacemos una transformación canónica al nuevo espacio fase (Q, P) y el nuevo Hamiltoniano es $\mathcal{K}(Q, P, t)$. Por otro lado, sabemos que el Hamiltoniano es la transformada de Legendre, y viceversa, por lo tanto

$$\mathcal{L} = p_i\dot{q}^i - \mathcal{H}(q, p, t),$$

$$\bar{\mathcal{L}} = P_i\dot{Q}^i - \mathcal{K}(Q, P, t).$$

Ambos Lagrangianos describen al mismo sistema físico, son equivalentes, por lo que deben diferir por una derivada total

$$\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} + \frac{d\Lambda}{dt}.$$

Entonces, sustituyendo los Lagrangianos dados obtenemos

$$p_i\dot{q}^i - \mathcal{H}(q, p, t) = P_i\dot{Q}^i - \mathcal{K}(Q, P, t) + \frac{d\Lambda}{dt}$$

y de aquí

$$\frac{d\Lambda}{dt} = p_i\dot{q}^i - P_i\dot{Q}^i + \mathcal{K}(Q, P, t) - \mathcal{H}(q, p, t). \tag{2.34}$$

Observamos que la función Λ debe ser función de las coordenadas viejas y nuevas, y en general del tiempo, entonces tenemos

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial\Lambda}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial\Lambda}{\partial Q^i}\dot{Q}^i + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

Comparando con la ecuación (2.34), encontramos que se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial\Lambda}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial\Lambda}{\partial Q^i}, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}. \tag{2.35}$$

El primer par de ecuaciones determinan la transformación canónica y la tercera ecuación nos muestra como es que transforma el Hamiltoniano. A la función Λ se le llama función generadora de primer tipo (Λ_1), ya que podemos definir otras funciones generadoras a partir de sus transformadas de Legendre. Reescribimos la ecuación (2.34) de la siguiente manera

$$\frac{d\Lambda_1}{dt} = p_i\dot{q}^i - \frac{d}{dt}\left(P_iQ^i\right) + Q^i\dot{P}_i + \mathcal{K}(Q,P,t) - \mathcal{H}(q,p,t).$$

Pasamos el tercer término al lado izquierdo de la ecuación y tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\Lambda_1 + P_iQ^i\right) = p_i\dot{q}^i + Q^i\dot{P}_i + \mathcal{K}(Q,P,t) - \mathcal{H}(q,p,t).$$

Observamos que $\Lambda_1 + P_iQ^i$ es función de las coordenadas q^i y de los nuevos momentos P_i, por lo tanto, de la misma manera que en el caso de la función Λ_1, se satisfacen las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial\Lambda_2}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial\Lambda_2}{\partial P_i}, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial\Lambda_2}{\partial t}. \tag{2.36}$$

En donde definimos la función generadora de segundo tipo Λ_2 como $\Lambda_2 \equiv \Lambda_1 + P_iQ^i$, la cual es la transformada de Legendre de la función generadora de primer tipo. De manera similar podemos definir las funciones generadoras de tercer y cuarto tipo, donde, respectivamente, tenemos

$$\Lambda_3(p,Q,t) \equiv \Lambda_1 - p_iq^i, \quad q^i = -\frac{\partial\Lambda_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial\Lambda_3}{\partial Q^i},$$

$$\Lambda_4(p,P,t) \equiv \Lambda_1 - p_iq^i + P_iQ^i, \quad q^i = -\frac{\partial\Lambda_4}{\partial p_i}, \quad Q^i = \frac{\partial\Lambda_4}{\partial P_i}.$$

En ambos casos, el Hamiltoniano transforma de la misma manera que en (2.36). Para construir una transformación canónica primero debemos escoger el tipo de función generadora, la cual podemos escoger a nuestra conveniencia. Por lo general se trabaja con una función generadora de segundo tipo ya que se relaciona directamente con la acción del sistema. Con esta función y con otras consideraciones podemos llegar a la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Consideremos una función generadora de segundo tipo $\Lambda_2(q,P,t)$. Entonces en este caso, dados los resultados anteriores, tenemos que los momentos canónicamente conjugados son dados por la primera de las ecuaciones (2.36). Por otro lado, el momento canónicamente conjugado al tiempo es dado por la ecuación

$$p_t = \frac{\partial \Lambda_2}{\partial t}$$

de tal manera que la ecuación (2.23) queda

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial t} + \frac{p_a p^a}{2m} + V(q^a, t) = 0. \tag{2.37}$$

Esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi. Es por esto que, en parte y en el caso clásico, le llamamos ecuación de Jacobi a la ecuación (2.23).

2.2. Mecánica cuántica

2.2.1. Formulación matemática

El formalismo matemático en la mecánica cuántica es radicalmente diferente al de la mecánica clásica, además de la interpretación de los resultados que se derivan de tal teoría. En la mecánica cuántica representamos los estados como vectores $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ infinito en vez de un punto en el espacio fase. Por otro lado, los observables ya no son funciones sino operadores auto-adjuntos que actúan sobre vectores de $\mathcal{F}$, y la evolución dinámica es dada por una familia uni-paramétrica de transformaciones unitarias, en $\mathcal{F}$, generadas por un operador Hamiltoniano.

El primer problema que nos enfrentamos al construir la teoría cuántica es la de como escoger el espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ y los operadores $\hat{f}_i$, los cuales se definen como el mapeo $\hat{f}_i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, de tal manera que correspondan a los observables físicos f_i de interés. En la sección anterior mostramos que los paréntesis de Poisson determinan la estructura algebraica de la mecánica clásica, por lo que son una buena guía a seguir. Por otro lado, el conmutador entre dos operadores en el espacio de Hilbert determina la estructura algebraica de la mecánica cuántica. Entonces, la relación entre los observables cuánticos $\hat{f}_i$ y los observables clásicos f_i, para un par de observables f_i y g_i es a través del mapeo

$$[\hat{f}_i, \hat{g}_i] = i \{f_i, g_i\} \tag{2.38}$$

donde de aquí en adelante tomamos unidades en donde $\hbar = 1$ y entendemos el paréntesis de Poisson entre las funciones f_i y g_i como un operador, el cual actúa sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ también. En el caso del espacio fase (q, p) podemos escoger al espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ y al mapeo $\hat{f}_i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ de tal manera que se cumplan las relaciones de conmutación

$$[\hat{q}^i, \hat{q}^j] = 0, [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, [\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\delta^i_j \hat{I},$$

donde $\hat{I}$ es el operador identidad. Estas relaciones de conmutación determinan la estructura algebraica de la mecánica cuántica. De manera equivalente, todos los observables que sean, a lo mucho, lineales en el momento pueden representarse de tal forma que la ecuación (2.38) se cumpla.

En la imagen de Schrödinger tomamos el espacio de Hilbert como $\mathcal{F} = L^2(\mathcal{R}^3)$, donde L^2 son las funciones cuadrado integrable en $\mathcal{R}^3$. El operador de posición $\hat{q}^i$ actúa sobre estas funciones de manera multiplicativa, y el operador del momento se representa como $\hat{p}_i = -i\partial_i$. Por otro lado, el operador Hamiltoniano es función de estos dos operadores, y la forma la tomamos de la misma manera que en el caso clásico; es decir,

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V(\hat{q}^1, ..., \hat{q}^n), \tag{2.39}$$

donde n son los grados de libertad del sistema. La evolución dinámica de los estados $|\psi\rangle$ viene dada por el operador Hamiltoniano de la siguiente manera

$$i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle. \tag{2.40}$$

Esta es la ecuación de Schrödinger. Es la ecuación fundamental de la mecánica cuántica. La construcción de la teoría cuántica de campos se basa en la construcción de la mecánica cuántica, con algunas otras condiciones importantes como la invariancia de Poincaré, entre otras. Algunos conceptos de la mecánica cuántica se pueden generalizar de manera directa al caso de la teoría cuántica de campos.

El método de cuantización más sencillo que existe es la cuantización canónica. Como mencionamos anteriormente, las variables dinámicas pasan a ser operadores que actúan sobre los elementos del espacio de Hilbert. En la parte de la mecánica clásica encontramos que las constricciones de primera clase $\mathcal{F}_a$, con $a = 1, ..., m$, son las generadoras de las transformaciones de norma, esta es la conjetura de Dirac. Las constricciones de primera clase son funciones del espacio fase, por lo que al pasar las variables dinámicas a operadores, las constricciones de primera clase también son operadores que actúan en el espacio de Hilbert

$$\mathcal{F}_a \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_a.$$

Entonces, podemos generalizar la conjetura de Dirac al caso cuántico y conjeturar que los operadores $\hat{\mathcal{F}}_a$ son los generadores de las transformaciones de norma en la mecánica cuántica. En este caso la transformación de norma la implementamos mediante una función exponencial de la forma $e^{i\epsilon^a \hat{\mathcal{F}}_a}$, donde ϵ^a es un parámetro infinitesimal y $\hat{\mathcal{F}}_a$ son las constricciones clásicas, promovidas a operadores y los interpretamos como los generadores de la transformación de norma. Los generadores se encuentran definidos en el espacio de Hilbert, por lo que estos actúan sobre sus elementos.

En particular, la invariancia de norma demanda que los estados físicos $|\psi\rangle$ sean invariantes ante las transformaciones de norma. Dada la conjetura de Dirac en el caso cuántico tenemos que lo anterior se traduce matemáticamente a

$$e^{i\epsilon^a \hat{\mathcal{F}}_a}|\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

Suponemos que los parámetros ϵ^a son infinitesimales, por lo que podemos desarrollar la exponencial anterior, y a primer orden tenemos

$$\left(1 + i\epsilon^a \hat{\mathcal{F}}_a\right)|\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

De aquí

$$i\epsilon^a \hat{\mathcal{F}}_a|\psi\rangle = 0.$$

La ecuación anterior se cumple para cualquier parámetro arbitrario y asumiendo que todos ellos son independientes, obtenemos las ecuaciones

$$\hat{\mathcal{F}}_a|\psi\rangle = 0.$$

Al cuantizar las constricciones clásicas de primera clase, ecuación (2.23), y al aplicarlas sobre los estados físicos obtenemos las ecuaciones de evolución cuánticas para los estados cuánticos

$$\left[\hat{p}_t + \frac{\hat{p}_a\hat{p}^a}{2m} + V(\hat{q}^a, t)\right]|\psi\rangle = 0 \tag{2.41}$$

Consideremos los estados propios $|q, t\rangle$ del operador de posición $\hat{q}$. En este esquema (Schrödinger) tenemos que los momentos canónicamente conjugados a las coordenadas y al tiempo son

$$\hat{p}_t = -i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p}_a = -i\frac{\partial}{\partial q^a}.$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (2.41) obtenemos la ecuación de Schrödinger

$$-i\frac{\partial\psi(q,t)}{\partial t} - \frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi(q,t)}{\partial q^2} + V(\hat{q}^a, t)\psi(q,t) = 0. \tag{2.42}$$

Es en este sentido que, a la ecuación (2.23), se le llama de Schrödinger.

2.2.2. Oscilador armónico

En esta sección vamos a analizar el caso del oscilador armónico independiente del tiempo en la mecánica cuántica y escribir la teoría estándar de tal manera que podamos generalizarla al caso de un sistema de grados de libertad infinitos.

Consideremos la Lagrangiana clásica del oscilador armónico con masa unitaria y frecuencia ω

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2.$$

De aquí, el Hamiltoniano clásico es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2. \tag{2.43}$$

Como mencionamos en la sección anterior, podemos escoger el espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ correspondiente como $L^2(\mathcal{R})$, por lo tanto, representamos el momento p y la coordenada q como operadores en tal espacio. Así, el operador Hamiltoniano tiene la misma forma que el Hamiltoniano clásico del oscilador armónico (2.43) con el cambio $p \to \hat{p}$ y $q \to \hat{q}$. Esto especifica la teoría cuántica estándar del oscilador armónico.
Podemos reescribir esta teoría de una manera muy diferente ya que resulta de gran importancia en la teoría cuántica de campos. Los operadores de creación $\hat{a}^\dagger$ y aniquilación $\hat{a}$ tienen un papel central en la teoría del oscilador armónico. Estos se definen como

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{q} + i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\hat{p}$$

y

$$\hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{q} - i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\hat{p}.$$

Con estas definiciones es fácil demostrar que se cumplen las relaciones siguientes

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I},$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{I}\right)$$

y

$$[\hat{\mathcal{H}}, \hat{a}] = -\omega\hat{a}. \tag{2.44}$$

En la representación de Heisenberg los operadores tienen dependencia temporal y los estados se encuentran fijos. Esta dependencia temporal es en la forma

$$\hat{A}_H = e^{i\hat{\mathcal{H}}t}\hat{A}e^{-i\hat{\mathcal{H}}t},$$

donde $\hat{A}$ es un operador arbitrario, $\hat{\mathcal{H}}$ es el operador Hamiltoniano del sistema y el subíndice "H" hace referencia a la representación de Heisenberg, y además se satisface la ecuación

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt} = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_H].$$

En el caso del oscilador armónico tenemos que el operador de aniquilación $\hat{a}$ satisface la ecuación

$$\frac{d\hat{a}_H}{dt} = -i\omega\hat{a}_H,$$

donde usamos el conmutador (2.44). La solución de la ecuación anterior es

$$\hat{a}_H(t) = \hat{a}e^{-i\omega t}$$

de tal manera que la coordenada en la representación de Heisenberg es

$$\begin{aligned}\hat{q}_H(t) &= \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\hat{a}_H(t) + \hat{a}_H^\dagger(t)) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t})\end{aligned}$$

y el momento en esta representación es

$$\hat{p}_H = \frac{d\hat{q}_H}{dt} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}).$$

El estado base del oscilador armónico es tal que, al actuar el operador de aniquilación $\hat{a}$ se satisface

$$\hat{a}|\psi_0\rangle = 0 \tag{2.45}$$

y los estados excitados están dados por

$$|\psi_n\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|\psi_0\rangle.$$

Por otro lado, los estados satisfacen la ecuación de valores propios

$$\hat{\mathcal{H}}|\psi_n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega|\psi_n\rangle.$$

Los resultados anteriores podemos generalizarlos a una cadena de m osciladores armónicos cuánticos acoplados con frecuencias $\omega_1, ..., \omega_m$, entonces, el espacio de Hilbert asociado es igual al producto tensorial de cada uno de los espacios de Hilbert para cada oscilador

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{F}_m = L^2(\mathcal{M})$$

donde $\mathcal{M}$ es el espacio de configuración clásico para la colección de osciladores. Extendemos los operadores de coordenadas y de momentos de cada oscilador, $\hat{q}_i$ y $\hat{p}_k$, para cada oscilador de manera directa en el espacio de Hilbert $\mathcal{F}$. Podemos introducir los operadores de creación y aniquilación para cada oscilador y se satisfacen los resultados que deducimos en los párrafos anteriores. En particular se satisface la ecuación (2.45) para el i-ésimo oscilador, en donde $i = 1, ..., m$. En base a estos resultados podemos construir la teoría cuántica de campos.

2.2.3. Transformaciones canónicas cuánticas

Es bien conocido en la mecánica clásica que las transformaciones canónicas son una herramienta bastante poderosa en la solución de problemas, por lo que es natural preguntarse si esta herramienta puede emplearse en la mecánica cuántica. Clásicamente, una transformación canónica es el cambio en las variables dinámicas (q, p) del espacio fase conmutativo

$$(q, p) \longrightarrow (Q(q, p, t), P(q, p, t)),$$

la cual preserva los paréntesis de Poisson fundamentales

$$\{q_i, p_j\} = \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = \{P_i, P_j\} = 0.$$

Naturalmente, se define una transformación canónica cuántica como el cambio en las variables del espacio fase no conmutativo (q, p), la cual preserva las relaciones de conmutación cuánticas fundamentales

$$[q_i, p_j] = [Q_i, P_j] = i\delta_{ij},$$

$$[q_i, q_j] = [Q_i, Q_j] = 0$$

y

$$[p_i, p_j] = [P_i, P_j] = 0.$$

Esta transformación se implementa mediante un operador complejo y arbitrario $\hat{C}$ (el cual pertenece al grupo canónico cuántico), de las variables dinámicas q y p, de tal manera que

$$Q(q, p, t) = \hat{C}q\hat{C}^{-1}, \qquad P(q, p, t) = \hat{C}p\hat{C}^{-1},$$

donde $\hat{C}\hat{C}^{-1} = \hat{C}^{-1}\hat{C} = 1$. Cabe mencionar que esta definición es puramente algebraica y no se especifica ninguna condición sobre el espacio de Hilbert o sobre el producto interno asociado, por lo que la transformación no es unitaria en general. También es importante mencionar que el ordenamiento correcto de los factores se implementa mediante el ordenamiento correcto del operador $\hat{C}$, el cual es único al par (Q, P) que produce.
El operador de Schrödinger en el espacio fase extendido corresponde a la función

$$\hat{\mathcal{H}}(q, p) = \hat{p}_t + \hat{H}(q_1, ..., q_n, p_1, .., p_n, t),$$

donde $\hat{p}_t$ es el momento conjugado al tiempo, $\hat{H}$ es el Hamiltoniano del sistema y n son los grados de libertad del sistema. De aquí en adelante nos referimos a este operador como la función de Schrödinger. La transformación canónica C transforma a la función de Schrödinger de la siguiente manera

$$\hat{\mathcal{H}}'(q, p) = \hat{C}\hat{\mathcal{H}}(q, p)\hat{C}^{-1} = \hat{\mathcal{H}}(\hat{C}q\hat{C}^{-1}, \hat{C}p\hat{C}^{-1}). \tag{2.46}$$

Por otro lado, la función de onda ψ del sistema también debe de transformarse de manera correcta. Sabemos que la ecuación de Schrödinger original es

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = 0.$$

Multiplicamos por $\hat{C}$ el lado izquierdo de la ecuación anterior y usamos el hecho $\hat{C}^{-1}\hat{C} = 1$ para obtener

$$\hat{C}\hat{\mathcal{H}}\hat{C}^{-1}\hat{C}\psi = 0$$

y entonces, de la ecuación (2.46), tenemos que

$$\hat{\mathcal{H}}'\hat{C}\psi = 0.$$

Para que la ecuación de Schrödinger sea invariante, la función de onda debe transformar de la siguiente manera

$$\psi' = \hat{C}\psi, \tag{2.47}$$

y así se satisface la ecuación

$$\hat{\mathcal{H}}'\psi' = 0.$$

De la ecuación (2.47) podemos expresar la función de onda original ψ en términos de la función de onda transformada ψ'

$$\psi = \hat{C}^{-1}\psi'.$$

Una observación importante es que esto se cumple siempre y cuando el kernel de la transformación canónica $\hat{C}$ sea trivial, ya que el caso contrario no se ha estudiado con profundidad y requiere de más discusión. En este trabajo suponemos que el kernel es trivial.

Implementaciones cuánticas

Existen tres tipos de transformaciones canónicas elementales finitas las cuales se conoce muy bien como implementarlas cuánticamente. Estas transformaciones son las transformaciones lineales, transformaciones de punto y el intercambio de entre coordenadas y momentos. En este trabajo nos enfocaremos en las primeras dos ya que son las transformaciones que haremos al sistema de estudio.
Clásicamente podemos construir una transformación canónica infinitesimal mediante una función generadora $F(q, p, t)$, a la cual se le asocia el campo vectorial Hamiltoniano

$$v_F = (\partial_p F)\,\partial_q - (\partial_q F)\,\partial_p$$

y cuya acción sobre una función $u(q, p, t)$ en el espacio fase es la transformación infinitesimal

$$\delta_F u = \epsilon v_F u = -\epsilon\,\{F, u\}\,,$$

donde $\{F, u\}$ es el paréntesis de Poisson entre la función generadora $F(q, p, t)$ y la función $u(q, p, t)$. Mediante la correspondencia entre la teoría clásica y la teoría cuántica

$$[F, u] = i\,\{F, u\}\,,$$

donde $[F, u]$ es el conmutador entre las funciones F y u, podemos expresar la transformación canónica con el operador $e^{i\epsilon\hat{F}}$ como

$$e^{i\epsilon\hat{F}}\hat{u}e^{-i\epsilon\hat{F}} = \hat{u} + i\epsilon\left[\hat{F}, \hat{u}\right] - \epsilon^2\left[\hat{F}, \left[\hat{F}, \hat{u}\right]\right] + O(\epsilon^3). \tag{2.48}$$

Debido al correcto ordenamiento de los operadores cuánticos $\hat{F}$ y $\hat{u}$, las expresiones clásicas y cuánticas para la transformación canónica infinitesimal pueden ser diferentes en términos de mayor orden en ϵ.

Ahora podemos construir las transformaciones canónicas elementales infinitesimales e implementarlas cuánticamente. Primero tomamos el caso de una variable. Las transformaciones lineales para el momento $\hat{p}$ se implementan mediante la función $\hat{C} = e^{-\hat{f}(q)}$, donde $\hat{f}(q)$ es un operador complejo, arbitrario y es función de la coordenada $\hat{q}$. Usando la ecuación (2.48), con $\epsilon = 1$, obtenemos la transformación canónica

$$\begin{aligned} \hat{p} \rightarrow e^{-\hat{f}(q)}\hat{p}e^{\hat{f}(q)} &= \hat{p} - \left[\hat{f}(q), \hat{p}\right] \\ &= \hat{p} - i\partial_q\hat{f}(q), \end{aligned} \tag{2.49}$$

donde los términos de mayor orden son cero ya que en el término de segundo orden tenemos

$$\left[\hat{f}(q), \partial_q\hat{f}(q)\right] = 0.$$

Es claro que la coordenada no se transforma, por lo que la transformación canónica completa es

$$\hat{q} \rightarrow \hat{q} \qquad , \hat{p} \rightarrow \hat{p} - i\partial_q\hat{f}(q),$$

la cual transforma a la función de onda $\psi_0(q)$ de la siguiente manera

$$\psi'(\hat{q}) = e^{-\hat{f}(q)}\psi_0(\hat{q}).$$

Por otro lado, podemos implementar la transformación lineal para la coordenada $\hat{q}$ mediante el operador $\hat{C} = e^{-\hat{f}(p)}$ y dejar invariante el momento $\hat{p}$. De la misma manera que en el caso anterior obtenemos la transformación canónica

$$\hat{q} \rightarrow e^{-\hat{f}(p)}\hat{p}e^{\hat{f}(p)} = \hat{q} + i\partial_p\hat{f}(p), \qquad \hat{p} \rightarrow \hat{p},$$

y la función de onda $\psi_0(q)$ transforma

$$\psi'(\hat{q}) = e^{-\hat{f}(p)}\psi_0(\hat{q}).$$

En el caso de varias variables, podemos tener el caso en que la función f involucre las coordenadas y los momentos conjugados. Ya que las coordenadas conmutan, al igual que los momentos conjugados, estas actúan de la misma manera que en el caso de una variable, donde tratamos a las demás variables como parámetros. Por cada coordenada (o por cada momento conjugado) de la que f sea función, el momento conjugado correspondiente (o coordenada correspondiente) transforma como en el caso de una variable.
Las transformaciones de punto las representamos simbólicamente como $\hat{P}_{f(q)}$ y no como funciones exponenciales por razones que se discuten en [2]. El efecto de esta transformación sobre las variables del espacio fase es

$$\hat{q} \rightarrow \hat{P}_{f(\hat{q})}\hat{q}\hat{P}_{f^{-1}(\hat{q})} = f(\hat{q}),$$

$$\hat{p} \rightarrow \hat{P}_{f(\hat{q})}\hat{p}\hat{P}_{f^{-1}(\hat{q})} = \frac{1}{\partial_{\hat{q}} f(\hat{q})}\hat{p}$$

y la función de onda $\psi_0(q)$ se transforma como

$$\psi'(\hat{q}) = \hat{P}_{f(\hat{q})}\psi_0(\hat{q}) = \psi_0(f(\hat{q})).$$

Por otro lado, también podemos hacer la transformación

$$\hat{q} \rightarrow \hat{P}_{f(\hat{p})}\hat{q}\hat{P}_{f^{-1}(\hat{p})} = \frac{1}{\partial_{\hat{p}} f(\hat{p})}\hat{q},$$

$$\hat{p} \rightarrow \hat{P}_{f(\hat{p})}\hat{p}\hat{P}_{f^{-1}(\hat{p})} = f(\hat{p}).$$

En este caso tenemos

$$\hat{P}_{f(\hat{p})} = \hat{I}\hat{P}_{f(\hat{q})}\hat{I}^{-1}$$

donde definimos al operador $\hat{I}$ como

$$\hat{I} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dq' e^{iqq'}$$

y nos referimos a él como el operador de intercambio. La acción de este operador y su inversa sobre una función arbitraria $\phi(q)$ es

$$\hat{I}\phi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dq' e^{iqq'}\phi(q'),$$

$$\hat{I}^{-1}\phi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq' e^{-iqq'}\phi(q').$$

Con esto, la función de onda $\psi_0(\hat{q})$ transforma de la siguiente manera

$$\psi'(\hat{q}) = \hat{P}_{f(\hat{p})}\psi_0(\hat{q}) = \hat{I}\hat{P}_{f(\hat{q})}\hat{I}^{-1}\psi_0(\hat{q}).$$

Como aplicación de la teoría desarrollada anteriormente, vamos a hacer una transformación canónica al oscilador armónico cuántico. El Hamiltoniano de este sistema es

$$\hat{H}_0 = \hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2 \tag{2.50}$$

donde tomamos unidades tales que $m = 1$ y $\hbar = 1$. Para cancelar el término cuadrático en la coordenada, hacemos la transformación

$$\hat{C} = e^{\frac{\omega\hat{q}^2}{2}},$$

y en virtud de la ecuación (2.49) con $f(\hat{q}) = -\frac{\omega\hat{q}^2}{2}$ obtenemos la transformación canónica

$$\hat{q} \to \hat{q}, \qquad \hat{p} \to \hat{p} + i\omega\hat{q}.$$

El Hamiltoniano transforma como

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1 &= e^{\frac{\omega\hat{q}^2}{2}}\hat{p}^2 e^{-\frac{\omega\hat{q}^2}{2}} + \omega^2\hat{q}^2 \\
&= e^{\frac{\omega\hat{q}^2}{2}}\hat{p}e^{-\frac{\omega\hat{q}^2}{2}}e^{\frac{\omega\hat{q}^2}{2}}\hat{p}e^{-\frac{\omega\hat{q}^2}{2}} + \omega^2\hat{q}^2 \\
&= (\hat{p} + i\omega\hat{q})(\hat{p} + i\omega\hat{q}) + \omega^2\hat{q}^2 \\
&= \hat{p}^2 + i\omega(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) - \omega^2\hat{q}^2 + \omega^2\hat{q}^2 \\
&= \hat{p}^2 + i\omega(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}).
\end{aligned}$$

Usando el conmutador de $\hat{q}$ con $\hat{p}$ para reescribir $\hat{p}\hat{q} = \hat{q}\hat{p} - i$ en el Hamiltoniano anterior, obtenemos

$$\hat{H}_1 = \hat{p}^2 + 2i\omega\hat{q}\hat{p} + \omega.$$

De la misma manera, hacemos la transformación $\hat{C} = e^{-\frac{\hat{p}^2}{4\omega}}$ y obtenemos

$$\hat{q} \to \hat{q} + i\frac{\hat{p}}{2\omega}, \qquad \hat{p} \to \hat{p}.$$

El Hamiltoniano queda

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_2 &= \hat{C}\hat{H}_1\hat{C}^{-1} \\
&= \hat{p}^2 + 2i\omega\left(\hat{q} + i\frac{\hat{p}}{2\omega}\right)\hat{p} + \omega \\
&= \hat{p}^2 + 2i\omega\hat{q}\hat{p} - \hat{p}^2 + \omega \\
&= 2i\omega\hat{q}\hat{p} + \omega.
\end{aligned}
$$

Finalmente, hacemos la siguiente transformación de punto

$$\hat{q} \to e^{\hat{q}}, \qquad \hat{p} \to e^{-\hat{q}}\hat{p}$$

y el Hamiltoniano queda

$$\hat{H}_3 = 2i\omega\hat{p} + \omega.$$

Con este Hamiltoniano, la función de Schrödinger es

$$\hat{\mathcal{H}}_3 = p_t + 2i\omega\hat{p} + \omega$$

y la función de onda $\psi_3(\hat{q})$ es

$$\psi_3(\hat{q}, t) = \hat{P}_{e^{\hat{q}}} e^{-\frac{\hat{p}^2}{4\omega}} e^{\frac{\omega\hat{q}^2}{2}} \psi_0(\hat{q}, t),$$

la cual podemos invertir para escribir la función de onda original en términos de las eigenfunciones del operador Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_3$ y queda

$$\psi_0(\hat{q}, t) = e^{-\frac{\omega\hat{q}^2}{2}} e^{\frac{\hat{p}^2}{4\omega}} \hat{P}_{\ln\hat{q}} \psi_3(\hat{q}, t).$$

La función de onda de $\hat{\mathcal{H}}_3$ es

$$\psi_3(q, t) = e^{nq - i(2n+1)\omega t},$$

donde n es un número real, entero y no negativo ya que buscamos soluciones no divergentes en $q = 0$ para poder normalizar la función de onda. Con esto, la función de onda original $\psi_0(q, t)$ es

$$
\begin{aligned}
\psi_0(q, t) &= e^{-\frac{\omega q^2}{2}} e^{\frac{\hat{p}^2}{4\omega}} \hat{P}_{\ln\hat{q}} e^{nq - i(2n+1)\omega t} \\
&= e^{-\frac{\omega q^2}{2}} e^{\frac{\hat{p}^2}{4\omega}} q^n e^{-i(2n+1)\omega t} \\
&= e^{-i(2n+1)\omega t - \frac{\omega q^2}{2}} e^{-\frac{(\partial_q)^2}{4\omega}} q^n.
\end{aligned}
$$

Usando las propiedades de los polinomios de Hermite, podemos reescribir la función anterior en términos de la fórmula de Rodrigues para obtener la expresión familiar de la solución del oscilador armónico cuántico

$$\psi_0(q,t) = \left(\frac{-1}{2\omega}\right)^n e^{-i(2n+1)\omega t} e^{\frac{\omega q^2}{2}} (\partial_q)^n e^{-\omega q^2},$$

entonces, la transformación canónica completa nos lleva al resultado correcto.
En el siguiente capítulo presentaremos la construcción de la teoría de un campo de Klein-Gordon en el espacio-tiempo plano y una introducción sobre la teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo curvo, en donde vamos a construir la teoría del campo de Klein-Gordon.

Capítulo 3

Teoría cuántica de campos

3.1. Campo de Klein-Gordon en el espacio plano

En esta sección vamos a construir la teoría cuántica de un campo escalar real en el espacio-tiempo de Minkowski. Este campo corresponde al campo lineal de Klein-Gordon, al cual podemos descomponerlo como una suma infinita de osciladores armónicos desacoplados con frecuencias independientes del tiempo. Esto lo demostraremos a continuación. Consideremos la acción de Klein-Gordon

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\int d^4x \left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + m^2\phi^2\right) \tag{3.1}$$

donde ϕ es el campo de Klein-Gordon, m es la masa del campo y $\mu = 1, .., 4$. La densidad Lagrangiana del sistema es

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + m^2\phi^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2\right].\end{aligned} \tag{3.2}$$

Si hacemos una variación en la acción (3.1) con respecto al campo obtenemos la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0. \tag{3.3}$$

Esta es la ecuación de Klein-Gordon. Ahora, cambiamos el espacio Euclidiano infinito $\mathcal{R}^3$ por un toro plano y tridimensional T^3 de lado L; esto es, el campo se encuentra en una “caja”de lado L con condiciones de borde periódicas. Así, expandimos el campo en la siguiente serie de Fourier

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\phi_{\vec{k}}(t) \tag{3.4}$$

donde el vector $\vec{k}$ tiene la forma

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$$

con n_1, n_2 y n_3 como números enteros reales y positivos. Como el campo de Klein-Gordon es real, es fácil observar que esto implica $\phi^*_{\vec{k}} = \phi_{-\vec{k}}$. Calculamos las siguientes derivadas de la expansión (3.4)

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \dot{\phi}_{\vec{k}}(t),$$

$$\nabla\phi = \frac{i}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k}} \vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi_{\vec{k}}(t).$$

De aquí, calculamos los cuadrados de las derivadas anteriores

$$\dot{\phi}^2 = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k},\vec{k}'} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \dot{\phi}_{\vec{k}}(t) \dot{\phi}_{\vec{k}'}(t),$$

$$(\nabla\phi)^2 = -\frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k},\vec{k}'} (\vec{k}\cdot\vec{k}') e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \phi_{\vec{k}}(t) \phi_{\vec{k}'}(t)$$

y el cuadrado del campo es

$$\phi^2 = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k},\vec{k}'} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \phi_{\vec{k}}(t) \phi_{\vec{k}'}(t).$$

Usando la siguiente representación de la función delta de Dirac

$$\delta(\vec{k}+\vec{k}') = \frac{1}{L^3} \int d^3x \, e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}},$$

e integrando sobre el espacio las ecuaciones anteriores quedan

$$\int d^3x \, \dot{\phi}^2 = \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \delta(\vec{k}+\vec{k}') \dot{\phi}_{\vec{k}}(t) \dot{\phi}_{\vec{k}'}(t),$$

$$\int d^3x \, (\nabla\phi)^2 = -\sum_{\vec{k},\vec{k}'} (\vec{k}\cdot\vec{k}') \delta(\vec{k}+\vec{k}') \phi_{\vec{k}}(t) \phi_{\vec{k}'}(t),$$

$$\int d^3x \, \phi^2 = \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \delta(\vec{k}+\vec{k}') \phi_{\vec{k}}(t) \phi_{\vec{k}'}(t).$$

Sumando con la delta de Dirac y usando el hecho $\phi^*_{\vec{k}} = \phi_{-\vec{k}}$, las ecuaciones anteriores quedan

$$\int d^3x \, \dot{\phi}^2 = \sum_{\vec{k}} |\dot{\phi}_{\vec{k}}(t)|^2,$$

$$\int d^3x \, (\nabla\phi)^2 = \sum_{\vec{k}} k^2 |\phi_{\vec{k}}(t)|^2,$$

$$\int d^3x \, \phi^2 = \sum_{\vec{k}} |\phi_{\vec{k}}(t)|^2.$$

Sustituimos los resultados anteriores en la densidad Lagrangiana (3.2) y obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \left(|\dot{\phi}_{\vec{k}}|^2 - \omega_k^2 |\phi_{\vec{k}}|^2 \right) \tag{3.5}$$

donde definimos la frecuencia ω_k^2 como

$$\omega_k^2 \equiv k^2 + m^2. \tag{3.6}$$

Es claro observar que la densidad lagrangiana anterior corresponde a una suma infinita de osciladores armónicos desacoplados con frecuencia independiente del tiempo, concluyendo que podemos descomponer al campo de Klein-Gordon como una suma de osciladores armónicos independientes. Es importante notar que, aunque estamos sumando sobre todos los valores de los modos, la frecuencia ω_k del campo $\phi_{\vec{k}}$ solo depende de la magnitud del modo k. Entonces, la construcción de la teoría cuántica del campo libre de Klein-Gordon en el espacio plano la hacemos generalizando los resultados obtenidos en el capítulo anterior para el caso de una serie infinita de osciladores armónicos independientes.

3.2. Espacio curvo

3.2.1. Introducción

En el primer capítulo de este trabajo presentamos las ideas más importantes de la cosmología actual y mostramos las evidencias que nos sugieren que nuestro Universo lo podemos describir (de manera ideal) a través de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Por otro lado, la teoría cuántica de campos es la teoría más exitosa que tenemos para explicar el comportamiento de los campos cuánticos en el espacio-tiempo de Minkowski. Esta teoría unifica las ideas de la teoría de campos y las ideas de la teoría de la relatividad especial.

Uno de los problemas actuales más importantes en la física moderna es la de construir una teoría que incorpore la teoría de campos y la teoría de la relatividad general de una manera exitosa y que produzca predicciones que podamos observar y/o medir en un laboratorio. Sin embargo, el problema de obtener una teoría cuántica de la gravedad ha resultado bastante complicado y hasta el día de hoy no hemos encontrado ninguna teoría completa que satisfaga los requisitos teóricos y este en completo acuerdo con el experimento; aunque se tienen algunos candidatos como la teoría de cuerdas, la teoría de gravedad cuántica de bucles (loop quantum gravity), entre otras. Esta teoría debe tener un carácter fundamental y debe ser tal que podamos aplicarla en el Universo temprano cuando las escalas de distancias se encontraban en el régimen Planckiano y que nos permita explicar las singularidades que ocurren dentro de un agujero negro.

Un primer paso y una primera guía hacia la construcción de esta teoría fundamental es tratar a los campos fundamentales propagándose en un espacio-tiempo curvo clásico y cuantizar estas teorías. Esta es, precisamente, la idea de la *teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo curvo* (QFTCS). Debido a la naturaleza clásica del espacio-tiempo no podemos considerar a la QFTCS como una teoría fundamental de la naturaleza, sin embargo, esta teoría debe de ser capaz de describir los fenómenos cuánticos en regiones donde los efectos gravitatorios sean importantes y donde los efectos cuánticos de la gravedad puedan ser despreciados. Por esta razón pensamos que QFTCS pueda aplicarse en los procesos cuánticos durante el Universo temprano y dentro de un agujero negro, evitando las singularidades. En principio la QFTCS debe ser el resultado de tomar un límite apropiado en la teoría fundamental de la gravedad en donde tratamos a la métrica de acuerdo a los principios de la teoría cuántica, lo cual no se ha hecho de manera formal. Para construir la QFTCS debemos de combinar las ideas básicas de la teoría de la relatividad general y los principios básicos de la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo de Minkowski. Los principios básicos del tratamiento de la gravedad de manera clásica son

1.- Toda la estructura del espacio-tiempo es descrita por una métrica Lorentziana g en una variedad $\mathcal{M}$.

2.- La métrica g y los campos de materia son dinámicos y su evolución se determina de manera local.

De manera más precisa, la métrica y los campos de materia satisfacen ecuaciones diferenciales parciales. Esto es, las ecuaciones de Einstein para la métrica junto con las ecuaciones de movimiento adecuadas para el campo de materia en particular, las cuales tienen un problema de valores iniciales bien formulados y por lo cual estos campos se encuentran determinados de manera única por los datos iniciales. Por otro lado, resulta complicado determinar los principios básicos de la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo de Minkowski. Estos problemas se explican con más detalle en [5]. Sin embargo, en este trabajo vamos a omitir tales problemas ya que nos enfocaremos en los efectos de la gravedad en los campos cuánticos, en particular, en un campo escalar real.

3.2.2. Campo de Klein-Gordon

El campo escalar libre de Klein-Gordon en el espacio plano es el ejemplo más sencillo de la teoría de campos. La acción de este sistema es

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\int d^4x \left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\right)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$ es la métrica de Minkowski, ϕ es el campo de Klein-Gordon y m es su masa. Generalizamos este sistema al caso de un espacio-tiempo curvo de la siguiente manera

- Cambiamos la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por la métrica $g_{\mu\nu}$, la cual es solución de las ecuaciones de Einstein.

- Cambiamos las derivadas ordinarias por derivadas covariantes. Sin embargo, en el caso de un campo escalar, la derivada covariante coincide con la derivada ordinaria.

- Cambiamos el elemento de volumen del espacio plano d^4x por el elemento de volumen covariante $\sqrt{-g}\,d^4x$ en el espacio curvo, donde $g = det\, g_{\mu\nu}$.

Con esto, la acción del campo de Klein-Gordon en el espacio curvo es

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\right),$$

la cual depende explícitamente de la métrica $g_{\mu\nu}$ y describe a un campo escalar acoplado mínimamente a la gravedad.
En principio pueden existir términos adicionales en la acción anterior en donde se manifieste el acoplamiento de los campos con el tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta}$. Este tipo de acoplamientos se llaman *no mínimos* y violan el principio de equivalencia fuerte, el cual nos dice que todos los efectos locales de la gravedad deben de desaparecer en un sistema de referencia inercial. Por otro lado, la curvatura no se desvanece en un sistema de referencia inercial local y afecta al campo en particular. Esto no es problema ya que el máximo criterio de veracidad de estas teorías es que concuerden con los experimentos, por lo que vale la pena considerar este tipo de escenarios. El ejemplo más sencillo de este caso es el siguiente

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2 + \xi R\phi^2\right),$$

donde ξ es un parámetro constante arbitrario y R es el escalar de curvatura de Ricci. Este término adicional induce una corrección a la masa del campo debido a la presencia de la curvatura. Al hacer una variación de la acción anterior con respecto a variaciones arbitrarias del campo de Klein-Gordon, obtenemos la ecuación de movimiento que satisface el campo

$$\frac{-1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,\partial^\mu\phi\right) + (m^2 + \xi R)\phi = 0. \tag{3.7}$$

Por otro lado, las ecuaciones de Euler-Lagrange no cambian de forma

$$\partial_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \tag{3.8}$$

si consideramos que el Lagrangiano es $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\mathcal{L}'$, donde $\mathcal{L}'$ es el Lagrangiano físico y que en este caso corresponde al Lagrangiano del campo de Klein-Gordon. Con ambos métodos aseguramos que se tome en cuenta el efecto de la métrica en las ecuaciones de movimiento, ya que tenemos términos adicionales en tales ecuaciones.

En un espacio-tiempo arbitrario, la existencia y unicidad de las soluciones clásicas de la ecuación de Klein-Gordon (3.7) puede diferir con respecto al caso del espacio plano. Por ejemplo, supongamos que un espacio-tiempo es un toro plano de cuatro dimensiones con periodicidad espacial L y periodicidad temporal T, con $\frac{T^2}{L^2}$ irracional. En este espacio-tiempo, la ecuación de Klein-Gordon con $m = 0$ y $\xi = 0$ solo admite la solución $\phi = constante$. Otro ejemplo seria considerar un espacio-tiempo con una singularidad de tipo tiempo, como en el caso del espacio-tiempo de Minkowski o la solución de Schwarschild con masa negativa. Como la ecuación (3.7) no restringe lo que emerja de la singularidad, no existe unicidad en las soluciones, dadas las condiciones iniciales sobre una hipersuperficie de tipo espacio.

Nos restringimos al caso en el que la dinámica clásica del sistema (3.7) tenga un problema de valores iniciales bien definido. Además consideramos espacio-tiempos que sean orientables en el tiempo, es decir, que podamos hacer una elección continua sobre todo el espacio-tiempo en donde la mitad del cono de luz constituye la dirección del futuro y la otra mitad constituye la dirección del pasado. Sea $\Sigma \subset \mathcal{M}$ un conjunto cerrado acronal, es decir un conjunto donde un par de puntos $p, q \in \Sigma$ no pueden unirse por una curva de tipo tiempo. Definimos el *dominio de dependencia* de Σ como

$$D(\Sigma) = \{p \in \mathcal{M} | \gamma(p)\, intersecta\, \Sigma\}$$

donde p es un punto y γ representa a todas las curvas causales e inextensibles (pasado y futuro). En el caso $D(\Sigma) = \mathcal{M}$, se dice que Σ es una hipersuperficie de Cauchy en el espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{ab})$, la cual es una hipersuperficie tridimensional C^0. Un espacio-tiempo que admita una hipersuperficie de Cauchy se dice *globalmente hiperbólico.*

A continuación mostramos dos teoremas importantes concernientes a espacio-tiempos globalmente hiperbólicos.

Teorema **1.** *Si* $(\mathcal{M}, g_{ab})$ *es un espacio-tiempo globalmente hiperbólico con hipersuperficie de Cauchy* Σ*, entonces,* $\mathcal{M}$ *tiene la topología* $\mathcal{R} \times \Sigma$*.*

La variedad $\mathcal{M}$ puede ser foleada por una familia de superficies de Cauchy suaves y de un parámetro Σ_t; una coordenada temporal suave puede escogerse en $\mathcal{M}$ de tal manera que cada hipersuperficie con t constante sea una superficie de Cauchy.

Cada curva se 'registra' sobre la superficie de Cauchy Σ, por lo que esperamos tener una evolución clásica, determinista y bien definida dadas las condiciones iniciales en tal superficie. Esto se cumple en el caso de la ecuación de Klein-Gordon (3.7), y podemos enunciar esta situación en el siguiente teorema:

Teorema **2.** *Sea* $(\mathcal{M}, g_{ab})$ *un espacio-tiempo globalmente hiperbólico con una superficie de Cauchy suave y de tipo espacio* Σ*. Entonces, la ecuación de Klein-Gordon (3.7) tiene un problema de valores iniciales bien formulado en el siguiente sentido: Dado un par de funciones suaves* (C^∞) $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$ *en* Σ*, existe una solución única* ϕ *a la ecuación de Klein-*

Gordon definida en toda la variedad $\mathcal{M}$, tal que sobre Σ tenemos $\phi = \phi_0$ y $n^a\nabla_a\phi = \dot{\phi}_0$, donde n^a es un vector unitario y normal (dirigido al futuro) en Σ. Para cualquier subconjunto $S \subset \Sigma$ la solución, ϕ, restringida a $D(S)$ depende solo de los datos iniciales en S. Además, el campo ϕ evoluciona de manera continua y suave con los datos iniciales.

Este teorema es válido para el caso en el que una fuente J, suave y fija, se introduzca en la ecuación de Klein-Gordon. Entonces, de la propiedad de dominio de dependencia, tenemos que existen soluciones avanzadas y retardadas únicas para la ecuación de Klein-Gordon con una fuente. En un espacio-tiempo globalmente hiperbólico existen funciones de Green avanzadas y retardadas únicas para la ecuación de Klein-Gordon.

3.2.3. Construcción de la teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo curvo

Sea $(\mathcal{M}, g_{ab})$ un espacio-tiempo globalmente hiperbólico. Introducimos una superficie de Cauchy de tipo tiempo $\Sigma_t \in \mathcal{M}$ y un campo vectorial de evolución temporal $t^a \in \mathcal{M}$ que satisface $t^a\nabla_a t = 1$, el cual descomponemos de la siguiente manera

$$t^a = Nn^a + N^a \tag{3.9}$$

donde n^a es un vector unitario y normal a Σ_t, N^a es tangente a Σ_t y N es una función, a la cual nos referimos como función de lapso. Introducimos un sistema de referencia local con coordenadas (t, x^1, x^2, x^3), tal que $t^a\nabla_a x^\alpha = 0$ donde $\alpha = 1, 2, 3$ y de tal manera que $t^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$. Entonces el Lagrangiano L del campo de Klein Gordon mínimamente acoplado es

$$L = \int_{\Sigma_t} N\sqrt{h}\left[(n^a\nabla_a\phi)^2 - h^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi - m^2\phi^2\right] d^3x \tag{3.10}$$

donde h_{ab} es la métrica inducida en Σ_t. Usando la relación (3.9) podemos escribir

$$n^a\nabla_a\phi = \frac{1}{N}(t^a - N^a)\nabla_a\phi = \frac{1}{N}(\dot{\phi} - N^a\nabla_a\phi),$$

de tal manera que el Lagrangiano (3.10) queda

$$L = \int_{\Sigma_t} N\sqrt{h}\left[\left(\frac{\dot{\phi} - N^a\nabla_a\phi}{N}\right)^2 - h^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi - m^2\phi^2\right] d^3x.$$

La densidad de momento π canónicamente conjugada al campo de Klein-Gordon ϕ en Σ_t la calculamos haciendo una variación de la acción anterior con respecto a $\dot{\phi}$ y obtenemos

$$\pi = \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\dot{\phi}} = \sqrt{h}(n^a\nabla_a\phi).$$

Un punto en el espacio fase clásico M de la teoría del campo de Klein-Gordon en un espacio-tiempo curvo consiste en especificar el valor del campo ϕ y de la densidad de momento π en x sobre la superficie de Cauchy Σ_0, las cuales requerimos que sean suaves y de soporte compacto para que todas las estructuras en el espacio fase M se encuentren bien definidas matemáticamente. Definimos el espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon como S, las cuales surgen de los datos iniciales en M.

Por el segundo teorema de la sección anterior, cada $[\phi, \pi] \in M$ arroja un elemento único en S, por lo que podemos identificar M y S. Además este teorema implica que S es independiente de la elección de la superficie de Cauchy Σ_0 ya que $[\phi, \pi]$ son suaves y de soporte compacto en la superficie de Cauchy Σ_0 si son suaves y de soporte compacto en todas las superficies de Cauchy. La evolución dinámica en el espacio fase M por el 'tiempo' t corresponde a la evaluación del elemento asociado de S en la superficie de Cauchy Σ_t. Entonces, toda la estructura matemática de la teoría del campo de Klein-Gordon en el espacio-tiempo de Minkowski la podemos generalizar de manera directa en un espacio-tiempo curvo globalmente hiperbólico. Primero construimos el espacio de Hilbert asociado y los observables clásicos los promovemos a operadores que actúan en tal espacio. Esto es lo que haremos en los capítulos subsecuentes.

Capítulo 4

Campo de Klein-Gordon

4.1. Campo de Klein-Gordon en un Universo de FRW

Consideremos un universo de Friedmann-Roberston-Walker cuyo elemento de línea al cuadrado es

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)\delta_{ij}dx^i dx^j$$

donde $a = a(\tau)$ es el factor de escala y la métrica es

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Ahora consideremos un campo escalar real, masivo y clásico $\Phi = \Phi(\vec{x}, \tau)$ descrito por la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{1}{2}\left(\mu^2 + \xi R\right)\Phi^2 \tag{4.1}$$

donde μ es la masa del campo, ξ una constante y R es el escalar de curvatura de Ricci. En general, la acción en un espacio-tiempo curvo es de la forma

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}\sqrt{-g}\, d^4x,$$

por lo que en nuestro caso tenemos que la acción es

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= -\frac{1}{2}\int a^3 \left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + \left(\mu^2 + \xi R\right)\Phi^2\right] d^4x \\ &= -\frac{1}{2}\int a^3 \left[-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(\nabla\Phi\right)^2 + \left(\mu^2 + \xi R\right)\Phi^2\right] d^4x, \end{aligned}$$

o bien

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\int \left[a^3\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)^2 - a\left(\nabla\Phi\right)^2 - m^2a^3\Phi^2\right]d^4x$$

donde $m^2 \equiv \mu^2 + \xi R$. De las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = 0$$

obtenemos la ecuación que satisface el campo escalar

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} + \frac{3\dot{a}}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\Phi + m^2\Phi = 0. \tag{4.2}$$

Hacemos la siguiente transformada de Fourier en el campo de Klein-Gordon

$$\Phi(\vec{x},\tau) = \frac{1}{\sqrt{2V}}\sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(\tau)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{4.3}$$

donde $\phi_{\vec{k}}(\tau)$ es una función compleja; a la cual le llamamos función de modo, la cual satisface la condición $\phi^*_{\vec{k}} = \phi_{-\vec{k}}$ ya que el campo de Klein-Gordon es real, y normalizamos la base a un volumen V finito. Sustituimos la descomposición anterior en la ecuación (4.2) y obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2V}}\sum_{\vec{k}}\left[\ddot{\phi}_{\vec{k}} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\phi}_{\vec{k}} + \left(\frac{k^2}{a^2} + m^2\right)\phi_{\vec{k}}\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0.$$

La única solución posible a la ecuación anterior es que la función $\phi_{\vec{k}}$ satisfaga la siguiente ecuación

$$\ddot{\phi}_{\vec{k}} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\phi}_{\vec{k}} + \left(\frac{k^2}{a^2} + m^2\right)\phi_{\vec{k}} = 0,$$

o bien

$$\ddot{\phi}_{\vec{k}} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\phi}_{\vec{k}} + \omega_k^2\phi_{\vec{k}} = 0 \tag{4.4}$$

donde $\omega_k^2 \equiv \frac{k^2}{a^2} + m^2$. Postulamos que la variación de la acción

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\int a^3\left(\dot{\phi}^2_{\vec{k}} - \omega_k^2\phi^2_{\vec{k}}\right)d\tau \tag{4.5}$$

con respecto a la función de modo $\phi_{\vec{k}}$ nos lleva a la ecuación anterior. De aquí

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\int a^3\delta\left(\dot{\phi}^2_{\vec{k}} - \omega_k^2\phi^2_{\vec{k}}\right)d\tau \\ &= \sum_{\vec{k}}\int a^3\left(\dot{\phi}_{\vec{k}}\delta\dot{\phi}_{\vec{k}} - \omega_k^2\phi_{\vec{k}}\delta\phi_{\vec{k}}\right)d\tau. \end{aligned}\tag{4.6}$$

Usando la siguiente identidad

$$a^3\dot{\phi}_{\vec{k}}\delta\dot{\phi}_{\vec{k}} = \frac{d}{d\tau}\left(a^3\dot{\phi}_{\vec{k}}\delta\phi_{\vec{k}}\right) - a^3\ddot{\phi}_{\vec{k}}\delta\phi_{\vec{k}} - 3a^2\dot{a}\dot{\phi}_{\vec{k}}\delta\phi_{\vec{k}}$$

en la ecuación (4.6) tenemos que

$$\delta\mathcal{S} = \sum_{\vec{k}}\int\left[\frac{d}{d\tau}\left(a^3\dot{\phi}_{\vec{k}}\delta\phi_{\vec{k}}\right) - \left(a^3\ddot{\phi}_{\vec{k}} + 3a^2\dot{a}\dot{\phi}_{\vec{k}} + a^3\omega_k^2\phi_{\vec{k}}\right)\delta\phi_{\vec{k}}\right]d\tau.$$

Suponemos que las variaciones de las funciones de modo $\phi_{\vec{k}}$ se encuentran fijas en los extremos de integración; esto es $\delta\phi_{\vec{k}}(\tau_1) = \delta\phi_{\vec{k}}(\tau_2) = 0$, por lo que el término de derivada total se anula. Además suponemos que la acción es estacionaria ($\delta\mathcal{S} = 0$), entonces queda

$$\sum_{\vec{k}}\int\left(a^3\ddot{\phi}_{\vec{k}} + 3a^2\dot{a}\dot{\phi}_{\vec{k}} + a^3\omega_k^2\phi_{\vec{k}}\right)\delta\phi_{\vec{k}}d\tau = 0.$$

Como las variaciones de las funciones de modo son arbitrarias, se debe de cumplir la ecuación

$$a^3\ddot{\phi}_{\vec{k}} + 3a^2\dot{a}\dot{\phi}_{\vec{k}} + a^3\omega_k^2\phi_{\vec{k}} = 0$$

y dividiendo entre el cubo del factor de escala obtenemos la ecuación de movimiento (4.4).

4.2. Campo escalar auxiliar. Transformación de Mukhanov

Supongamos la siguiente transformación de las funciones de modo

$$\phi_{\vec{k}}(\tau) = a^{-\frac{3}{2}}(\tau)\chi_{\vec{k}}(\tau) \tag{4.7}$$

y calculamos la primera derivada con respecto a la coordenada temporal τ

$$\dot{\phi}_{\vec{k}} = a^{-\frac{3}{2}}\dot{\chi}_{\vec{k}} - \frac{3}{2}a^{-\frac{5}{2}}\dot{a}\chi_{\vec{k}}.$$

Elevamos al cuadrado

$$\dot{\phi}_{\vec{k}}^2 = a^{-3}\dot{\chi}_{\vec{k}}^2 - 3a^{-4}\dot{a}\dot{\chi}_{\vec{k}}\chi_{\vec{k}} + \frac{9}{4}a^{-5}\dot{a}^2\chi_{\vec{k}}^2$$

y sustituyendo lo anterior en la acción (4.5) obtenemos

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\int\left[\dot{\chi}_{\vec{k}}^2 - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\chi}_{\vec{k}}\chi_{\vec{k}} + \left(\frac{3\dot{a}}{2a}\chi_{\vec{k}}\right)^2 - \omega_k^2\chi_{\vec{k}}^2\right]d\tau.$$

Por otro lado, usamos la siguiente identidad

$$\frac{3\dot{a}}{a}\dot{\chi}_{\vec{k}}\chi_{\vec{k}} = \frac{3}{2a}\frac{d}{d\tau}\left(\dot{a}\chi_{\vec{k}}^2\right) - \frac{3\ddot{a}}{2a}\chi_{\vec{k}}^2$$

y la expresión anterior de la acción queda

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\int\left[\dot{\chi}_{\vec{k}}^2 - \frac{3}{2a}\frac{d}{d\tau}\left(\dot{a}\chi_{\vec{k}}^2\right) + \frac{3\ddot{a}}{2a}\chi_{\vec{k}}^2 + \left(\frac{3\dot{a}}{2a}\chi_{\vec{k}}\right)^2 - \omega_k^2\chi_{\vec{k}}^2\right]d\tau.$$

Finalmente, usando la siguiente identidad

$$\frac{3}{2a}\frac{d}{d\tau}\left(\dot{a}\chi_{\vec{k}}^2\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{3\dot{a}}{2a}\chi_{\vec{k}}^2\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\chi_{\vec{k}}\right)^2,$$

la acción queda

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\int\left[\dot{\chi}_{\vec{k}}^2 - \omega_k^2\chi_{\vec{k}}^2 + \frac{3\ddot{a}}{2a}\chi_{\vec{k}}^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{a}}{a}\chi_{\vec{k}}\right)^2 - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{3\dot{a}}{2a}\chi_{\vec{k}}^2\right)\right]d\tau.$$

Definimos la frecuencia Ω_k^2 como

$$\Omega_k^2 \equiv \omega_k^2 - \frac{3\ddot{a}}{2a} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \tag{4.8}$$

y entonces podemos reescribir la acción anterior de la siguiente manera

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\int\left[\dot{\chi}_{\vec{k}}^2 - \Omega_k^2\chi_{\vec{k}}^2 - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{3\dot{a}}{2a}\chi_{\vec{k}}^2\right)\right]d\tau.$$

Integramos el término de derivada total, al evaluar la función de modo $\chi_{\vec{k}}$ en los extremos este se anula debido a las condiciones de borde que escogimos, por lo tanto, la acción resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\int\left(\dot{\chi}_{\vec{k}}^2 - \Omega_k^2\chi_{\vec{k}}^2\right)d\tau\\ &= \sum_{\vec{k}}\mathcal{S}_{\vec{k}}\end{aligned}$$

donde es claro que

$$\mathcal{S}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\int\left(\dot{\chi}_{\vec{k}}^2 - \Omega_k^2\chi_{\vec{k}}^2\right)d\tau. \tag{4.9}$$

De aquí en adelante trabajaremos con la acción anterior.

Para obtener la ecuación que satisface la función de modo hacemos una variación de la acción con respecto a $\chi_{\vec{k}}$

$$\delta\mathcal{S}_{\vec{k}} = \int \left(\dot{\chi}_{\vec{k}}\delta\dot{\chi}_{\vec{k}} - \Omega_k^2\chi_{\vec{k}}\delta\chi_{\vec{k}}\right) d\tau.$$

Usando la identidad

$$\dot{\chi}_{\vec{k}}\delta\dot{\chi}_{\vec{k}} = \frac{d}{d\tau}\left(\dot{\chi}_{\vec{k}}\delta\chi_{\vec{k}}\right) - \ddot{\chi}_{\vec{k}}\delta\chi_{\vec{k}}$$

en la expresión anterior de la acción obtenemos

$$\delta\mathcal{S}_{\vec{k}} = \int \left[\frac{d}{d\tau}\left(\dot{\chi}_{\vec{k}}\delta\chi_{\vec{k}}\right) - \ddot{\chi}_{\vec{k}}\delta\chi_{\vec{k}} - \Omega_k^2\chi_{\vec{k}}\delta\chi_{\vec{k}}\right] d\tau.$$

Las variaciones de la función de modo evaluadas en los extremos se encuentran fijas, por lo que el término de la derivada total se anula. Como las variaciones de $\chi_{\vec{k}}$ son arbitrarias y la acción es estacionaria, obtenemos la ecuación de movimiento que satisfacen las funciones de modo para el modo $\vec{k}$

$$\ddot{\chi}_{\vec{k}} + \Omega_k^2\chi_{\vec{k}} = 0. \tag{4.10}$$

Obtenemos una ecuación análoga al caso de un oscilador armónico clásico con frecuencia dependiente del tiempo, donde suponemos que la frecuencia Ω_k^2 es positiva. En la siguiente sección hacemos el estudio de tal sistema bajo una transformación canónica dependiente del tiempo.

4.3. Oscilador armónico clásico

4.3.1. Transformación canónica

Supongamos un oscilador armónico clásico con frecuencia dependiente del tiempo. El Lagrangiano que describe este sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{q}^2 - \omega^2(t)q^2\right)$$

y el Hamiltoniano del sistema es

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2.$$

En [4] se demuestra la existencia de un invariante $\mathcal{I}$ dependiente del tiempo el cual es cuadrático en las coordenadas y momentos para tal sistema. Este invariante tiene la forma

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2m}\left(\rho p - m\dot{\rho}q\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\frac{q^2}{\rho^2}$$

donde ω_0 es una constante con unidades de frecuencia y ρ es una función adimensional, dependiente del tiempo y satisface la ecuación

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{\omega_0^2}{\rho^3}. \tag{4.11}$$

Consideremos la transformación canónica (En el apéndice se demuestra que tal transformación es canónica)

$$P = \rho p - m\dot{\rho}q \qquad Q = \frac{q}{\rho} \tag{4.12}$$

y la sustituimos en el Hamiltoniano, resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(Q,P) &= \frac{1}{2m\rho^2}\left(P + m\dot{\rho}\rho Q\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\rho^2 Q^2 \\
&= \frac{1}{2m\rho^2}\left(P^2 + 2m\rho\dot{\rho}PQ + m^2\dot{\rho}^2\rho^2Q^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\rho^2Q^2 \\
&= \frac{P^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \omega^2(t)\rho^2\right)Q^2 + \frac{\dot{\rho}}{\rho}PQ.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por otro lado, escogemos que la función generadora F de tal transformación canónica sea de segundo tipo, $F = F(q,P,t)$, por lo que se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P}. \tag{4.14}$$

Despejando el momento p de la primera ecuación en (4.13) y sustituyendo Q en las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{1}{\rho}\left(P + m\dot{\rho}q\right) \qquad \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{q}{\rho}. \tag{4.15}$$

Integramos la primera ecuación suponiendo que la dependencia temporal explícita de la función generadora F viene dada por la función ρ, entonces obtenemos

$$F(q,P,t) = \frac{1}{\rho}\left(qP + \frac{1}{2}m\dot{\rho}q^2\right) + g(P).$$

Derivando la función anterior con respecto al momento P y comparando con la segunda de las ecuaciones (4.15) es fácil ver que $\frac{\partial g}{\partial P} = 0$ y por lo tanto $g(P) = c$, donde c es una constante de integración arbitraria la cual tomamos igual a cero. Ahora integramos la segunda ecuación en (4.15), suponiendo también que la dependencia temporal explícita de la función generadora es depositada en la función ρ y obtenemos

$$F(q,P,t) = \frac{qP}{\rho} + f(q,t).$$

Derivando la función anterior con respecto a la coordenada q y comparando con la primera ecuación en (4.15) encontramos la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial q} = m\frac{\dot{\rho}}{\rho}q.$$

Integrando tenemos

$$f(q,t) = \frac{1}{2}m\frac{\dot{\rho}}{\rho}q^2 + \beta(t)$$

donde $\beta(t)$ es una función arbitraria del tiempo la cual suponemos igual a cero por simplicidad, entonces la función generadora queda

$$F(q,P,t) = \frac{qP}{\rho} + \frac{1}{2}m\frac{\dot{\rho}}{\rho}q^2.$$

Por otro lado, el nuevo Hamiltoniano es en las nuevas coordenadas

$$K(Q,P,t) = \mathcal{H}(Q,P,t) + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{4.16}$$

por lo que tenemos que calcular la derivada parcial con respecto al tiempo de la función generadora, la cual es

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -qP\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} + \frac{1}{2}mq^2\left[\frac{\ddot{\rho}}{\rho} - \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2\right].$$

Sustituimos la coordenada q por la nueva coordenada Q según las ecuaciones de transformación (4.12) en la expresión anterior y tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -PQ\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{1}{2}mQ^2\left[\ddot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2\right].$$

Finalmente sustituimos la expresión anterior junto con el Hamiltoniano (4.13) en la expresión (4.16) del nuevo Hamiltoniano y resulta

$$K(Q,P,t) = \frac{P^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m\rho\left(\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho\right)Q^2.$$

Usando la ecuación (4.11) en el segundo término del nuevo hamiltoniano, obtenemos

$$\begin{aligned} K(Q,P,t) &= \frac{P^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m\frac{\omega_0^2}{\rho^2}Q^2 \\ &= \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2Q^2\right) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la transformación canónica (4.13) en el invariante $\mathcal{I}$, es fácil observar que el Hamiltoniano anterior puede escribirse de la siguiente manera

$$K(Q,P,t)=\frac{\mathcal{I}(Q,P)}{\rho^2}. \tag{4.17}$$

Ahora veamos que ocurre con el Lagrangiano de oscilador bajo la transformación canónica (4.12). Es fácil observar que $q=\rho Q$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\left[\left(\rho\dot{Q}+\dot{\rho}Q\right)^2-\omega^2(t)\rho^2Q^2\right]\\
&= \frac{1}{2}m\left[\rho^2\dot{Q}^2-\omega^2(t)\rho^2Q^2+\dot{\rho}\left(2\rho Q\dot{Q}+\dot{\rho}Q^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}m\left[\rho^2\dot{Q}^2-\omega^2(t)\rho^2Q^2+\dot{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho Q^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la identidad

$$\dot{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho Q^2\right)=\frac{d}{dt}\left(\rho\dot{\rho}Q^2\right)-\rho\ddot{\rho}Q^2$$

en el Lagrangiano anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\left[\rho^2\dot{Q}^2-\left(\ddot{\rho}+\omega^2(t)\rho\right)\rho Q^2+\frac{d}{dt}\left(\rho\dot{\rho}Q^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}m\left(\rho^2\dot{Q}^2-\frac{\omega_0^2}{\rho^2}Q^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2\right)
\end{aligned}$$

donde usamos las ecuación (4.11) en el segundo término del Lagrangiano. Encontramos que el Lagrangiano en las variables (Q,P) es equivalente al Lagrangiano en las variables (q,p) ya que difieren por una derivada total, bajo la transformación canónica. Esta derivada total no afecta a las ecuaciones de movimiento y deja invariante a la acción. Por lo tanto, tenemos la relación

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}'+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2\right),$$

o en términos de los Hamiltonianos tenemos

$$p\dot{q}-\mathcal{H}=P\dot{Q}-\frac{\mathcal{I}}{\rho^2}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2\right)$$

donde usamos el resultado (4.17). Finalmente, la acción del sistema es

$$\mathcal{S}=\int dt\left[P\dot{Q}-\frac{\mathcal{I}}{\rho^2}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2\right)\right], \tag{4.18}$$

donde podemos omitir la derivada total ya que este término no afecta a las ecuaciones de movimiento. Como puede verse, la acción depende del tiempo a través de la función $\rho(t)$.

Nos interesa remover esta dependencia temporal para poder resolver el problema de una forma más sencilla. Esto lo haremos en la siguiente sección.

4.3.2. Espacio fase extendido

Hacemos la siguiente transformación de contacto en la acción

$$T(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{\rho^2(t')}, \tag{4.19}$$

de tal manera que, para una función arbitraria $f(t)$ del tiempo

$$f(t) = f(T), \quad \dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{\rho^2(T)}\frac{df(T)}{dT} = \frac{1}{\rho^2(T)}f'(T),$$

donde es claro que $f'(T) \equiv \frac{df(T)}{dT}$. Bajo esta transformación, la acción (4.18) queda

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int dT\,\rho^2\left[\frac{PQ'}{\rho^2} - \frac{\mathcal{I}}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2\right)\right] \\ &= \int dT\left[PQ' - \mathcal{I} + \frac{d}{dT}\left(\frac{1}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

La acción es independiente del tiempo t. La transformación canónica nos llevó del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo en el espacio fase (q,p) al oscilador armónico con frecuencia constante en el espacio fase (Q,P), por lo que podemos usar en tal espacio fase las soluciones conocidas del oscilador armónico con frecuencia constante en el espacio fase original (q,p) y, al hacer la transformación inversa, resolver el problema original.

Sin embargo, la transformación de contacto (4.19) es una parametrización del tiempo, en donde el nuevo tiempo es T. Como vimos en el segundo capítulo, esto tiene como consecuencia que los momentos no sean independientes. Esto podemos verlo a partir de la acción en forma Hamiltoniana en las variables (q,p)

$$\mathcal{S} = \int dt\left[p\dot{q} - \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2\right)\right].$$

Al hacer la transformación (4.19) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int dT\,t'\left[\frac{pq'}{t'} - \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2\right)\right] \\ &= \int dT\left[pq' - t'\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2\right)\right]. \end{aligned}$$

donde $t' = \rho^2$. Si calculamos el momento conjugado a t obtenemos la siguiente constricción

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t'} = -\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2\right) \\ \therefore \quad \phi(p_t, p, q, t) &= p_t + \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2 = 0 \\ &= p_t + \mathcal{H} = 0, \end{aligned}$$

es decir, obtenemos una relación entre el momento p_t, el momento p, la coordenada q y el tiempo t. Del formalismo desarrollado en el segundo capítulo tenemos que al hacer tal parametrización el tiempo t es una nueva coordenada y T toma el papel del tiempo. Sabemos que la acción es invariante bajo parametrizaciones subsecuentes, entonces hacemos la parametrizacion $T \to \tau(T)$ y ahora tenemos que T es una nueva coordenada y el parámetro arbitrario τ toma el papel del tiempo. Dada esta situación la constricción anterior se cumple, donde hacemos los cambios $p_t \to p_T$ y $t \to T$. En otras palabras, extendimos el espacio fase. El Hamiltoniano canónico del sistema es

$$\mathcal{H}_c = pq' + p_T T' - \mathcal{L} = 0,$$

por lo que el Hamiltoniano total es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_T &= -\lambda\phi \\ &= -\lambda(p_T + \mathcal{H}) \end{aligned} \tag{4.21}$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange correspondiente y las derivadas son con respecto al nuevo parámetro τ. La acción del sistema en el espacio fase extendido es

$$\mathcal{S} = \int d\tau \left[pq' + p_T T' - \lambda\left(p_T + \mathcal{H}\right)\right]. \tag{4.22}$$

Por otro lado, es importante notar que primero hicimos la transformación canónica (4.12). Al extender el espacio fase con la transformación (4.18) también debemos de transformar al momento p_t. Esta transformación debe ser canónica para no alterar al sistema en el espacio fase extendido, entonces, la transformación canónica debe ser

$$(q, p, t, p_t) \to (Q, P, T, P_T).$$

Matemáticamente, la transformación canónica completa es

$$Q = \frac{q}{\rho}, \quad P = \rho p - m\dot{\rho}q, \quad T = \int \frac{dt'}{\rho^2}, \quad P_T = \rho^2 p_t + \rho\dot{\rho}\,pq - \frac{1}{2}mq^2\frac{d}{dt}\left(\rho\dot{\rho}\right). \tag{4.23}$$

En el apéndice se demuestra que tal transformación es canónica. Por lo tanto, siguiendo el procedimiento para llegar a la acción (4.22) y haciendo la transformación canónica (4.23) la acción en es espacio fase extendido (Q, P, T, P_T) es

$$\mathcal{S} = \int d\tau \left[PQ' + P_T T' - \lambda' \left(P_T + \mathcal{I}\right)\right] \tag{4.24}$$

donde λ' es un nuevo multiplicador de Lagrange. Bajo la transformación canónica, la dependencia temporal τ de la acción se remueve.

Ahora nos interesa calcular la función generadora en el espacio fase extendido. Vamos a usar una función generadora de segundo tipo, $F_2 = F_2(q, t, P, P_T)$, la cual satisface las ecuaciones

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{q}{\rho}, \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{P + m\dot{\rho}q}{\rho}, \quad T = \frac{\partial F_2}{\partial P_T}, \tag{4.25}$$
$$p_t = \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho^2}P_T - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}qP + \frac{1}{2}mq^2\frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho}).$$

Integrando la cuarta expresión de las ecuaciones (4.25) tenemos

$$F_2(q, t, P, P_T) = \frac{qP}{\rho} + T(t)P_T + \frac{1}{2}m\frac{\dot{\rho}}{\rho}q^2 + f(q, P, P_T)$$

en donde expresamos la dependencia explícita de T. Derivamos la función anterior con respecto a la coordenada q y tenemos

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{P}{\rho} + m\frac{\dot{\rho}}{\rho}q + \frac{\partial f}{\partial q},$$

al comparar con la segunda ecuación de (4.25) concluimos que la función f no depende de la coordenada q, $f = f(P, P_T)$. De manera similar, calculamos la derivada de la función generadora con respecto al momento P y obtenemos

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{q}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial P},$$

y al comparar con la primera ecuación de (4.25), obtenemos que $f = f(P_T)$. Finalmente, tomamos la derivada de la función generadora con respecto al momento P_T y tenemos

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_T} = T + \frac{\partial f}{\partial P},$$

y comparando con la tercera de las ecuaciones (4.25) obtenemos que $f = cte.$, la cual podemos tomar igual a cero. Entonces, la función generadora en el espacio fase extendido es

$$F_2(q, t, P, P_T) = \frac{qP}{\rho} + T(t)P_T + \frac{1}{2}m\frac{\dot{\rho}}{\rho}q^2. \tag{4.26}$$

Con esta función generamos la transformación canónica (4.23). Todos estos resultados los vamos a generalizar al caso del campo de Klein-Gordon que vimos en las secciones anteriores, para poder resolver el sistema de manera exacta.

Capítulo 5

Cuantización del campo de Klein-Gordon

5.1. Cuantización del oscilador armónico

En este capítulo vamos a cuantizar canónicamente el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo, dada la transformación canónica que vimos en la sección anterior, usando la teoría que presentamos en la sección de las transformaciones canónicas del segundo capítulo, para posteriormente generalizar estos resultados al caso del campo de Klein-Gordon en el Universo de FRW.
En el capítulo anterior demostramos que podemos transformar al oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo al caso independiente del tiempo bajo una transformación canónica. En esta sección vamos a generar la transformación canónica cuántica para tal sistema y resolverlo en términos del oscilador armónico independiente del tiempo.
Para cuantizar tal sistema vamos a usar el método de cuantización canónica, el cual consiste en pasar todas las variable dinámicas a operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert correspondiente e imponemos las relaciones de conmutación fundamentales. Tales variables dinámicas son las del espacio fase extendido (q, p, t, p_t), entonces la cuantización canónica es

$$q \to \hat{q}, \quad p \to \hat{p}$$

$$t \to \hat{t}, \quad p_t \to \hat{p}_t$$

las cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[\hat{q}, \hat{t}\right] = 0, \quad [\hat{q}, \hat{p}_t] = 0, \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i, \tag{5.1}$$

$$\left[\hat{t}, \hat{p}\right] = 0, \quad [\hat{p}, \hat{p}_t] = 0, \quad \left[\hat{t}, \hat{p}_t\right] = i. \tag{5.2}$$

Vamos a trabajar en el espacio de coordenadas, por lo que el operador de coordenada $\hat{q}$ y el operador de tiempo $\hat{t}$ actúan de manera multiplicativa en el espacio de Hilbert del oscilador armónico y por esta razón vamos a escribirlos como q y t de aquí en adelante. Entonces, el operador Hamiltoniano $\hat{H}$ del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo $\omega(t)$ es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2 + m^2\omega^2(t)q^2\right) \tag{5.3}$$

y la función de Schrödinger correspondiente a este sistema es

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \hat{p}_t + \hat{H} \\ &= \hat{p}_t + \frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2 + m^2\omega^2(t)q^2\right).\end{aligned} \tag{5.4}$$

Los estados propios del operador Hamiltoniano (5.3) los representamos con el vector $\psi(q,t)$ y los del oscilador armónico con frecuencia constante los representamos con el vector $\psi_0(q,t)$.

Por otro lado, la transformación canónica clásica es

$$Q = \frac{q}{\rho}, \quad P = \rho p - m\dot{\rho}q, \quad T = \int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{\rho^2(t')}, \quad P_T = \rho^2 p_t + \rho\dot{\rho}\,pq - \frac{1}{2}mq^2\frac{d}{dt}\left(\rho\dot{\rho}\right),$$

entonces, al cuantizar canónicamente el sistema tenemos que la transformación canónica anterior es

$$Q = \frac{q}{\rho}, \quad \hat{P} = \rho\hat{p} - m\dot{\rho}q, \quad T = \int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{\rho^2(t')}, \tag{5.5}$$

$$\hat{P}_T = \rho^2\hat{p}_t + \frac{1}{2}\rho\dot{\rho}\left(q\hat{p} + \hat{p}q\right) - \frac{1}{2}mq^2\frac{d}{dt}\left(\rho\dot{\rho}\right)$$

y la función ρ satisface la ecuación

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{\omega_0^2}{\rho^3}. \tag{5.6}$$

Ahora pasamos a generar tales transformaciones canónicas cuánticas. Para esto resulta conveniente usar la fórmula de Baker-Haussdorf-Campbell

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \cdots. \tag{5.7}$$

Vamos a implementar la transformación canónica en tres pasos ya que resulta más sencillo hacerlo de esta manera que en un solo paso. Entonces el operador $\hat{C}$ que genera la transformación canónica total (5.5) es igual al producto de tres operadores

$$\hat{C} = \hat{C}_3\hat{C}_2\hat{C}_1 \tag{5.8}$$

donde

$$\hat{C}_1 = e^{-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho},$$

$$\hat{C}_2 = e^{\frac{im\dot{\rho}}{2\rho}q^2}$$

y

$$\hat{C}_3 = \hat{P}_{f(t,p_t)}, \quad f(t,p_t) = \rho^2 \hat{p}_t.$$

Primero hacemos la transformación $\hat{C}_1$, la cual nos lleva del espacio (q,p,t,p_t) al espacio (Q,p',t,p'_t), esto es

$$\hat{p}_t \to \hat{p}'_t, \quad q \to Q, \quad \hat{p} \to \hat{p}',$$

esquemáticamente. El momento $\hat{p}_t$ transforma de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1 \hat{p}_t \hat{C}_1^{-1} &= e^{-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho} \hat{p}_t e^{\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho} \\
&= \hat{p}_t + \left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, \hat{p}_t\right] + \frac{1}{2!}\left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, \left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, \hat{p}_t\right]\right] + \cdots \\
&= \hat{p}_t - \frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\left[\ln\rho, \hat{p}_t\right] + \frac{1}{2!}\left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, \left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, \hat{p}_t\right]\right] + \cdots \\
&= \hat{p}_t - \frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\left(i\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) \\
&= \hat{p}_t + \frac{\dot{\rho}}{2\rho}(q\hat{p}+\hat{p}q) \equiv \hat{p}'_t
\end{aligned}$$

donde usamos la formula (5.7) y notamos que el término de segundo orden es cero ya que tenemos el conmutador entre dos funciones de variables que conmutan, por lo que los términos de orden mayor son cero también. La coordenada q transforma

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1 q\, \hat{C}_1^{-1} &= e^{-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho} q\, e^{\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho} \\
&= q + \left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, q\right] + \frac{1}{2!}\left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, \left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, q\right]\right] + \cdots \\
&= q - \frac{i}{2}\ln\rho\left[q\hat{p}+\hat{p}q, q\right] + \frac{1}{2!}\left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, \left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, q\right]\right] + \cdots \\
&= q - \frac{i}{2}\ln\rho\left[q\hat{p}+\hat{p}q, q\right] + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\ln\rho\right)^2 \left[q\hat{p}+\hat{p}q, \left[q\hat{p}+\hat{p}q, q\right]\right] + \cdots.
\end{aligned}$$

Calculamos el conmutador

$$\left[q\hat{p}+\hat{p}q, q\right] = q\left[\hat{p}, q\right] + \left[\hat{p}, q\right] q = -2iq$$

y entonces el resultado anterior queda

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1 q\, \hat{C}_1^{-1} &= q - \frac{i}{2}\ln\rho(-2iq) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\ln\rho\right)^2 (-2i)\left[qp+pq, q\right] + \cdots \\
&= q - q\ln\rho + \frac{1}{2!}q(\ln\rho)^2 - \frac{1}{3!}q(\ln\rho)^3 + \cdots \\
&= q\left[1 - \ln\rho + \frac{1}{2!}(\ln\rho)^2 - \frac{1}{3!}(\ln\rho)^3 + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Observamos que tenemos el desarrollo de la exponencial $e^{-\ln\rho}$, entonces queda

$$\hat{C}_1 q\,\hat{C}_1^{-1} = qe^{-\ln\rho} = \frac{q}{\rho} \equiv Q.$$

Por último, el momento p transforma

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1\hat{p}\,\hat{C}_1^{-1} &= e^{-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho} p\, e^{\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho} \\
&= \hat{p} + \left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, p\right] + \frac{1}{2!}\left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, \left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, p\right]\right] + \cdots \\
&= \hat{p} - \frac{i}{2}\ln\rho\,[q\hat{p}+\hat{p}q, p] + \frac{1}{2!}\left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, \left[-\frac{i}{2}(q\hat{p}+\hat{p}q)\ln\rho, p\right]\right] + \cdots \\
&= \hat{p} - \frac{i}{2}\ln\rho\,[q\hat{p}+\hat{p}q, p] + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\ln\rho\right)^2 [qp+pq, [q\hat{p}+\hat{p}q, p]] + \cdots .
\end{aligned}$$

Calculamos el conmutador

$$[q\hat{p}+\hat{p}q, \hat{p}] = q\,[q,\hat{p}] + [q,\hat{p}]\,q = 2i\hat{p},$$

y entonces el resultado anterior queda

$$\begin{aligned}
\hat{C}_1\hat{p}\,\hat{C}_1^{-1} &= \hat{p} - \frac{i}{2}(2i\hat{p}) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\ln\rho\right)^2 (2i)\,[q\hat{p}+\hat{p}q, \hat{p}] + \cdots \\
&= \hat{p} + \hat{p}\ln\rho + \frac{1}{2!}\hat{p}(\ln\rho)^2 + \frac{1}{3!}\hat{p}(\ln\rho)^3 + \cdots \\
&= \hat{p}\left[1 + \ln\rho + \frac{1}{2!}(\ln\rho)^2 + \frac{1}{3!}(\ln\rho)^3 + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Observamos que tenemos el desarrollo de la exponencial $e^{\ln\rho}$, entonces queda

$$\hat{C}_1\hat{p}\,\hat{C}_1^{-1} = \hat{p}e^{\ln\rho} = \rho\hat{p} \equiv \hat{p}'.$$

La transformación canónica que genera el operador $\hat{C}_1$ es

$$t = t, \quad \hat{p}_t' = \hat{p}_t + \frac{\dot{\rho}}{2\rho}(q\hat{p}+\hat{p}q), \quad Q = \frac{q}{\rho}, \quad \hat{p}' = \rho\hat{p} \tag{5.9}$$

y las transformaciones inversas son

$$q = \rho Q, \quad \hat{p} = \frac{\hat{p}'}{\rho}, \quad \hat{p}_t = \hat{p}_t' - \frac{\dot{\rho}}{2\rho}(Qp' + p'Q). \tag{5.10}$$

En este espacio se satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[Q, t] = 0, \quad [Q, \hat{p}_t'] = 0, \quad [Q, \hat{p}'] = i,$$

$$[t, \hat{p}'] = 0, \quad [\hat{p}', \hat{p}_t'] = 0, \quad [t, \hat{p}_t'] = i.$$

La función de Schrödinger (5.4) en las variables (Q, p', t, p'_t) es

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_1 &= \hat{C}_1 \hat{\mathcal{H}}(\hat{p}_t, \hat{p}, q, t) \hat{C}_1^{-1} \\
&= \hat{p}'_t - \frac{\dot{\rho}}{2\rho}(Q\hat{p}' + \hat{p}'Q) + \frac{\hat{p}'^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\rho^2 Q^2 \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

donde usamos las transformaciones inversas (5.10). Antes de realizar la segunda transformación canónica debemos expresar correctamente el operador $\hat{C}_2$ en el espacio (Q, p', t, p'_t). Esto es sencillo ya que tal operador depende de la coordenada q y del tiempo t, el cual queda invariante bajo la transformación $\hat{C}_1$, entonces solo hacemos el cambio $q \to Q$ en la expresión del operador $\hat{C}_2$

$$
\hat{C}_2 = e^{\frac{im\dot{\rho}}{2\rho}q^2} = e^{\frac{i}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2}.
$$

Es claro que esta transformación deja invariante a la nueva coordenada Q y al tiempo t, entonces, solo afecta a los momentos. Esquemáticamente esto es

$$
Q \to Q, \quad t \to t, \quad \hat{p}' \to \hat{P}, \quad \hat{p}'_t \to \hat{p}''_t.
$$

El momento $\hat{p}'$ transforma

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_2 \hat{p}' \hat{C}_2^{-1} &= e^{\frac{i}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2} \hat{p}' e^{-\frac{i}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2} \\
&= \hat{p}' + \frac{im}{2}\rho\dot{\rho}\left[Q^2, \hat{p}'\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{im}{2}\rho\dot{\rho}Q^2, \left[\frac{im}{2}\rho\dot{\rho}Q^2, \hat{p}'\right]\right] + \cdots \\
&= \hat{p}' + \frac{im}{2}\rho\dot{\rho}(2iQ) \\
&= \hat{p}' - m\rho\dot{\rho}Q \equiv P
\end{aligned}
$$

donde el término de segundo orden es cero, y por lo tanto los de orden superior también, ya que es igual al conmutador entre dos funciones de variables que conmutan. El momento $\hat{p}'_t$ transforma

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_2 \hat{p}'_t \hat{C}_2^{-1} &= e^{\frac{i}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2} \hat{p}'_t e^{-\frac{i}{2}m\rho\dot{\rho}Q^2} \\
&= \hat{p}'_t + \left[\frac{i}{2}mQ^2\rho\dot{\rho}, \hat{p}'_t\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{i}{2}mQ^2\rho\dot{\rho}, \left[\frac{i}{2}mQ^2\rho\dot{\rho}, \hat{p}'_t\right]\right] + \cdots \\
&= \hat{p}'_t - \frac{1}{2}mQ^2\frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho}) \equiv \hat{p}''_t
\end{aligned}
$$

donde el término de segundo orden es cero, y por lo tanto los términos de orden mayor también, ya que es igual al conmutador de dos funciones de variables que conmutan. La transformación canónica que genera el operador $\hat{C}_2$ es

$$
t = t, \quad Q = Q, \quad \hat{P} = \hat{p}' - m\rho\dot{\rho}Q, \quad \hat{p}''_t = \hat{p}'_t - \frac{1}{2}mQ^2\frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho}) \qquad (5.12)
$$

y la transformación inversa es

$$t = t, \quad Q = Q, \quad \hat{p}' = \hat{P} + m\rho\dot{\rho}Q, \quad \hat{p}'_t = \hat{p}''_t + \frac{1}{2}mQ^2\frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho}). \tag{5.13}$$

En este espacio se satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[Q,t] = 0, \quad [Q,\hat{p}''_t] = 0, \quad \left[Q,\hat{P}\right] = i,$$

$$\left[t,\hat{P}\right] = 0, \quad \left[\hat{P},\hat{p}''_t\right] = 0, \quad [t,\hat{p}''_t] = i.$$

La función de Schrödinger $\hat{\mathcal{H}}_1$ en las variables (Q,P,t,p''_t) es

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_2 &= \hat{C}_2\hat{\mathcal{H}}_1\hat{C}_2^{-1} \\
&= \hat{p}''_t + \frac{1}{2}mQ^2\frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho}) - \frac{\dot{\rho}}{2\rho}\left[Q\left(\hat{P}+m\rho\dot{\rho}Q\right) + \left(\hat{P}+m\rho\dot{\rho}Q\right)Q\right] + \frac{1}{2m\rho^2}\left(\hat{P}+m\rho\dot{\rho}Q\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\rho^2Q^2 \\
&= \hat{p}''_t + \frac{1}{2}m\rho\left(\ddot{\rho}+\omega^2(t)\rho\right)Q^2 + \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2Q^2 - \frac{\dot{\rho}}{2\rho}\left(Q\hat{P}+\hat{P}Q+2m\rho\dot{\rho}Q^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2m\rho^2}\left[\hat{P}^2 + m\rho\dot{\rho}\left(Q\hat{P}+\hat{P}Q\right) + m^2\rho^2\dot{\rho}^2Q^2\right].
\end{aligned}$$

Usando la ecuación (5.6) en el segundo término de la tercera línea y reduciendo términos, la función de Schrödinger $\hat{\mathcal{H}}_2$ queda

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = \hat{p}''_t + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2Q^2\right). \tag{5.14}$$

Observamos que ya eliminamos la dependencia temporal en la frecuencia y ahora se encuentra depositada en la función ρ. Finalmente hacemos la transformación de contacto $\hat{C}_3$, la cual deja invariante a la coordenada Q y al momento $\hat{P}$ y afecta al tiempo t y al momento $\hat{p}''_t$. Esquemáticamente esto es

$$Q \to Q, \quad \hat{P} \to \hat{P}, \quad t \to T(t), \quad \hat{p}''_t \to \hat{P}_T.$$

Esta transformación de contacto es tal que transforma al momento $\hat{p}''_t$ de la siguiente manera

$$\hat{C}_3\hat{p}''_t\hat{C}_3^{-1} = \hat{P}_{f(t,\hat{p}''_t)}\hat{p}''_t\hat{P}^{-1}_{f^{-1}(t,\hat{p}''_t)} = f(t,\hat{p}''_t) = \rho^2\hat{p}''_t \equiv \hat{P}_T.$$

Por otro lado, vamos a considerar la transformación de un diferencial del tiempo dt, entonces tenemos

$$\hat{C}_3 dt\,\hat{C}_3^{-1} = \hat{P}_{f(t,\hat{p}''_t)}dt\,\hat{P}^{-1}_{f^{-1}(t,\hat{p}''_t)} = \frac{dt}{\partial_{\hat{p}''_t}f} = \frac{dt}{\rho^2} \equiv dT.$$

$$\therefore \quad T(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{\rho^2(t')}$$

donde t_0 es una constante arbitraria. La transformación canónica que genera el operador $\hat{C}_3$ es

$$Q = Q, \quad \hat{P} = \hat{P}, \quad \hat{P}_T = \rho^2 \hat{p}_t'', \quad T(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{\rho^2(t')}, \tag{5.15}$$

la transformación inversa es

$$Q = Q, \quad \hat{P} = \hat{P}, \quad \hat{p}_t'' = \frac{\hat{P}_T}{\rho^2}, \quad t = \int_{T_0}^{T} \rho(T) dT \tag{5.16}$$

y en este espacio se satisfacen las relaciones de conmutación

$$[Q, T] = 0, \quad \left[Q, \hat{P}_T\right] = 0, \quad \left[Q, \hat{P}\right] = i,$$

$$\left[T, \hat{P}\right] = 0, \quad \left[\hat{P}, \hat{P}_T\right] = 0, \quad \left[T, \hat{P}_T\right] = i.$$

La función de Schrödinger $\hat{\mathcal{H}}_2$ en las variables (Q, P, T, P_T) es

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_0 &= \hat{C}_3 \hat{\mathcal{H}}_2 \hat{C}_3^{-1} \\
&= \frac{\hat{P}_T}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 Q^2\right) \\
&= \frac{1}{\rho^2}\left(\hat{P}_T + \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 Q^2\right)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

donde $\rho = \rho(T)$ y usamos la transformación inversa (5.16). Encontramos que la función de Schrödinger anterior corresponde a la función de Schrödinger de un oscilador armónico con frecuencia constante ω_0 en el espacio (Q, P, T, P_T), y por lo tanto sus estados propios corresponden a tal sistema, ya que se satisface la ecuación

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\hat{P}_T + \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 Q^2\right) \psi_0(Q, T) = 0$$

$$\therefore \quad \left(\hat{P}_T + \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 Q^2\right) \psi_0(Q, T) = 0, \tag{5.18}$$

en el espacio de coordenadas correspondiente. Entonces, la transformación canónica completa $\hat{C}$, junto con la función ρ que satisface la ecuación (5.6), nos lleva del espacio (q, p, t, p_t) del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo $\omega(t)$ al espacio (Q, P, T, P_T) del oscilador armónico con frecuencia independiente del tiempo ω_0. Tomando las transformaciones (5.9), (5.12) y (5.15), la transformación canónica total es

$$Q=\frac{q}{\rho},\quad \hat{P}=\rho\hat{p}-m\dot{\rho}q,\quad T(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{\rho^2(t')},\quad \hat{P}_T=\rho^2\hat{p}_t+\frac{1}{2}\rho\dot{\rho}(q\hat{p}+\hat{p}q)-\frac{1}{2}mq^2\frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho}). \tag{5.19}$$

Por otro lado, las funciones de onda $\psi(q,t)$ y $\psi_0(Q,T)$ se relacionan mediante la ecuación

$$\psi(q,t)=\hat{C}^{-1}\psi_0(Q,T)=\hat{C}_1^{-1}\hat{C}_2^{-1}\hat{P}_{f^{-1}}\psi_0(Q,T). \tag{5.20}$$

En su forma más general, la función de onda $\psi_0(Q,T)$ la expresamos como

$$\psi_0(Q,T)=\sum_n A_n\psi_n(Q)e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 T},$$

donde $\psi_n(Q)$ es la función de onda del oscilador armónico con frecuencia ω_0 en el $n-$ésimo estado estacionario, A_n es una constante y tenemos $n=0,1,2,...$, y la función de onda (5.20) queda

$$\psi(q,t)=\sum_n A_n\hat{C}_3^{-1}\hat{C}_2^{-1}\hat{P}_{f^{-1}}^{-1}\psi_n(Q)e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 T}. \tag{5.21}$$

El operador $\hat{P}_{f^{-1}}^{-1}$ cambia al tiempo T al tiempo físico t, por lo que expresamos al tiempo T en función del tiempo original t, $T\to T(t)$, y sabemos que tal dependencia viene dada por

$$T(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{\rho^2(t')}.$$

Este operador no afecta a la función de onda $\psi_n(Q)$ ya que, a este nivel, no depende explícitamente del tiempo T. Entonces la función de onda (1,3) resulta

$$\psi(q,t)=\sum_n A_n\hat{C}_3^{-1}\hat{C}_2^{-1}\psi_n(Q)e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 T(t)}. \tag{5.22}$$

El operador $\hat{C}_2^{-1}$ depende de la coordenada Q y, a este nivel, del tiempo físico t, por lo que no hace ninguna transformación a la función de onda, y solo la expresamos como una fase

$$\begin{aligned}\psi(q,t) &= \sum_n A_n\hat{C}_3^{-1}\psi_n(Q)e^{-i\frac{m}{2}\rho\dot{\rho}Q^2}e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 T(t)}\\ &= \sum_n A_n\hat{C}_3^{-1}\psi_n(Q)e^{-i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 T(t)+\frac{m}{2}\rho\dot{\rho}Q^2\right]}.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Finalmente, la acción del operador $\hat{C}_3^{-1}$ es de pasar la coordenada Q a la coordenada original q, y la ecuación de transformación correspondiente es $Q=\frac{q}{\rho}$, por lo tanto, la función de onda anterior queda

$$\psi(q,t) = \sum_n A_n \psi_n \left(\frac{q}{\rho}\right) e^{-i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0 T(t) + \frac{m\dot{\rho}}{2\rho}q^2\right]}. \tag{5.24}$$

A continuación vamos a generalizar estos resultados al caso del campo de Klein-Gordon que vimos anteriormente.

5.2. Campo de Klein-Gordon

5.2.1. Formulación clásica

En el capítulo anterior vimos que podemos descomponer el campo de Klein-Gordon en una suma infinita de osciladores armónicos con frecuencia dependiente del tiempo $\Omega_k(\tau)$ en el Universo de FRW. Demostramos que la acción de tal sistema es

$$\mathcal{S}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\int \left(\dot{\chi}_{\vec{k}}^2 - \Omega_k^2(\tau)\chi_{\vec{k}}^2\right) d\tau, \tag{5.25}$$

dada la transformación del campo $\chi_{\vec{k}}(\tau) = a^{\frac{3}{2}}(\tau)\phi_{\vec{k}}(\tau)$. Es claro que el Lagrangiano del sistema es

$$\mathcal{L}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\chi}_{\vec{k}}^2 - \Omega_k^2(\tau)\chi_{\vec{k}}^2\right), \tag{5.26}$$

del cual podemos calcular el momento canónico conjugado

$$\pi_{\vec{k}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{\vec{k}}}{\partial \dot{\chi}_{\vec{k}}} = \dot{\chi}_{\vec{k}}. \tag{5.27}$$

y de aquí, el Hamiltoniano del sistema es

$$\mathcal{H}_{\vec{k}} = \pi_{\vec{k}}\dot{\chi}_{\vec{k}} - \mathcal{L}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\left(\pi_{\vec{k}}^2 + \Omega_k^2(\tau)\chi_{\vec{k}}^2\right), \tag{5.28}$$

donde es pertinente mencionar que no estamos sumando sobre ninguno de los dos índices en las expresiones anteriores. Generalizamos los resultados que obtuvimos en el capítulo anterior, en donde hacemos las siguientes sustituciones en el espacio fase extendido (q, p, t, p_t)

$$q \to \chi_{\vec{k}}, \quad p \to \pi_{\vec{k}}, \quad \omega \to \Omega_k, \quad p_t \to \pi_{\tau,\vec{k}}, \quad t = \tau$$

y el Hamiltoniano del sistema lo cambiamos por el Hamiltoniano (5.28). También generalizamos la transformación canónica $(q, p, \tau, p_\tau) \to (Q, P, T, P_T)$ haciendo las sustituciones

$$Q \to \Psi_{\vec{k}}, \quad P \to \Pi_{\vec{k}}, \quad \rho \to \rho_k, \quad \tau \to T(\tau), \quad P_T \to \Pi_{T,\vec{k}},$$

de tal manera que, siguiendo el mismo procedimiento que hicimos en el capítulo anterior, la transformación canónica es

$$\Psi_{\vec{k}} = \frac{\chi_{\vec{k}}}{\rho_k}, \quad \Pi_{\vec{k}} = \rho_k \pi_{\vec{k}} - \dot{\rho}_k \chi_{\vec{k}}, \quad T(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\rho_k^2}, \tag{5.29}$$

$$\Pi_{T,\vec{k}} = \rho_k^2 \pi_{\tau,\vec{k}} + \frac{1}{2}\rho_k \dot{\rho}_k \chi_{\vec{k}} \pi_{\vec{k}} - \frac{1}{2}\chi_{\vec{k}}^2 \frac{d}{d\tau}\left(\rho_k \dot{\rho}_k\right).$$

Tal transformación canónica la construimos con la función generadora

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}\left(\tau, \chi_{\vec{k}}, \Pi_{\vec{k}}, \Pi_{T,\vec{k}}\right) = T(\tau)\Pi_{T,\vec{k}} + \frac{\chi_{\vec{k}}\Pi_{\vec{k}}}{\rho_k} + \frac{\dot{\rho}_k}{2\rho_k}\chi_{\vec{k}}^2, \tag{5.30}$$

donde la función ρ_k satisface la ecuación

$$\ddot{\rho}_k + \Omega_k^2 \rho_k = \frac{\Omega_{0,k}^2}{\rho_k^3} \tag{5.31}$$

Finalmente, el nuevo Hamiltoniano $\mathcal{K}_{\vec{k}}$ resulta

$$\mathcal{K}_{\vec{k}}\left(\Pi, \Pi_T, \Psi\right) = \Pi_{T,\vec{k}} + \frac{1}{2}\Pi_{\vec{k}}^2 + \frac{1}{2}\Omega_{0,k}^2 \Psi_{\vec{k}}^2, \tag{5.32}$$

del cual obtenemos la ecuación de movimiento

$$\psi_{\vec{k}}'' + \Omega_{0,k}^2 \psi_{\vec{k}} = 0 \tag{5.33}$$

donde $f'' = \frac{d^2 f}{dT^2}$. La solución de la ecuación de movimiento anterior es

$$\psi_{\vec{k}}(T) = b_{\vec{k}} e^{-i\Omega_{0,k}T} + b_{-\vec{k}}^* e^{i\Omega_{0,k}T} \tag{5.34}$$

donde $b_{\vec{k}}$ y $b_{-\vec{k}}^*$ son constantes que dependen del modo $\vec{k}$. Usaremos esta solución más adelante.

5.2.2. Formulación cuántica

Ahora vamos a cuantizar la teoría del campo de Klein-Gordon de la misma manera que en el caso del oscilador armónico cuántico. En el espacio de "coordenadas", cuantizamos al sistema promoviendo los momentos conjugados $\pi_{\vec{k}}(\tau)$ y $\pi_{\tau,\vec{k}}(\tau)$ a operadores, y el campo $\chi_{\vec{k}}(\tau)$ y el tiempo τ actúan de forma multiplicativa

$$\chi_{\vec{k}} \to \chi_{\vec{k}},\ \pi_{\vec{k}} \to \hat{\pi}_{\vec{k}},$$

$$\tau \to \tau,\ \pi_{\tau,\vec{k}} \to \hat{\pi}_{\tau,\vec{k}}$$

y se cumple la siguiente relación de conmutación

$$\left[\chi_{\vec{k}}(\tau), \hat{\pi}_{\vec{k}'}(\tau)\right] = i\delta_{\vec{k},\vec{k}'} \tag{5.35}$$

en el espacio fase extendido. Notemos que estas relaciones se cumplen para todos los modos $\vec{k}$, ya que estos resultaron independientes entre sí. Al cuantizar el Hamiltoniano (5.32) del campo, obtenemos la función de Schrödinger del sistema

$$\hat{\mathcal{H}}_{\vec{k}} = \hat{\pi}_{\tau,\vec{k}} + \frac{1}{2}\hat{\pi}^2_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\Omega^2_k(\tau)\chi^2_{\vec{k}}. \tag{5.36}$$

Generalizamos la transformación canónica cuántica (5.29)

$$\Psi_{\vec{k}} = \frac{\chi_{\vec{k}}}{\rho_k}, \quad \hat{\Pi}_{\vec{k}} = \rho_k\hat{\pi}_{\vec{k}} - \dot{\rho}_k\chi_{\vec{k}}, \quad T(\tau) = \int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\rho^2_k}, \tag{5.37}$$

$$\hat{\Pi}_{T,\vec{k}} = \rho^2_k\hat{\pi}_{\tau,\vec{k}} + \frac{1}{2}\rho_k\dot{\rho}_k\left(\chi_{\vec{k}}\hat{\pi}_{\vec{k}} + \hat{\pi}_{\vec{k}}\chi_{\vec{k}}\right) - \frac{1}{2}\chi^2_{\vec{k}}\frac{d}{d\tau}\left(\rho_k\dot{\rho}_k\right)$$

la cual generamos con el operador

$$\hat{C} = \hat{P}_{\rho^2_k\pi_{\tau,\vec{k}}}e^{\frac{i\dot{\rho}_k}{2\rho_k}\chi^2_{\vec{k}}}e^{-\frac{i}{2}\ln\rho_k\left(\chi_{\vec{k}}\hat{\pi}_{\vec{k}}+\hat{\pi}_{\vec{k}}\chi_{\vec{k}}\right)} \tag{5.38}$$

donde

$$\Psi_{\vec{k}} = \hat{C}\chi_{\vec{k}}\hat{C}^{-1},\ \hat{\Pi}_{\vec{k}} = \hat{C}\hat{\pi}_{\vec{k}}\hat{C}^{-1},\ dT = \hat{C}dt\,\hat{C}^{-1},\ \hat{\Pi}_{T,\vec{k}} = \hat{C}\hat{\pi}_{\tau,\vec{k}}\hat{C}^{-1}. \tag{5.39}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en la primera sección de este capítulo, la función de Schrödinger (5.36) bajo la transformación canónica cuántica anterior resulta

$$\hat{\mathcal{H}}_{0,\vec{k}} = \hat{\Pi}_{T,\vec{k}} + \frac{1}{2}\hat{\Pi}^2_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\Omega^2_{0,k}\Psi^2_{\vec{k}}, \tag{5.40}$$

la cual es análoga a la de un oscilador armónico con frecuencia independiente del tiempo. Dado este resultado podemos generalizar los estadios propios del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo (5.24), que obtuvimos en la primera sección de este capítulo, para el Hamiltoniano anterior.

Recordemos que el campo de Klein-Gordon, en términos del tiempo T, lo expresamos de la siguiente manera

$$\Phi(\vec{x}, T) = \frac{a^{-\frac{3}{2}}(T)}{\sqrt{2V}}\sum_{\vec{k}}\rho_k(T)\Psi_{\vec{k}}(T)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{5.41}$$

donde usamos la relación $\phi_{\vec{k}}(T) = a^{-\frac{3}{2}}(T)\chi_{\vec{k}}(T)$ y la transformación canónica inversa $\chi_{\vec{k}}(T) = \rho_k(T)\Psi_{\vec{k}}(T)$. Sustituimos la solución de $\Psi_{\vec{k}}(T)$, ecuación (5.34), en la expresión anterior y tenemos

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x},T) &= \frac{a^{-\frac{3}{2}}(T)}{\sqrt{2V}}\sum_{\vec{k}}\rho_k(T)\left[b_{\vec{k}}e^{-i\Omega_{0,k}T}+b^*_{-\vec{k}}e^{i\Omega_{0,k}T}\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\\ &= \frac{a^{-\frac{3}{2}}(T)}{\sqrt{2V}}\sum_{\vec{k}}\rho_k(T)\left[b_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{-i\Omega_{0,k}T}+b^*_{-\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{i\Omega_{0,k}T}\right].\end{aligned}$$

Finalmente hacemos el cambio $\vec{k}\to-\vec{k}$ en el segundo término de la expresión anterior y queda

$$\Phi(\vec{x},T)=\frac{a^{-\frac{3}{2}}(T)}{\sqrt{2V}}\sum_{\vec{k}}\rho_k(T)\left[b_{\vec{k}}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega_{0,k}T\right)}+b^*_{\vec{k}}e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega_{0,k}T\right)}\right]. \tag{5.42}$$

Esta es la expresión clásica del campo de Klein-Gordon. Al cuantizar canónicamente promovemos las constantes $b_{\vec{k}}$ y $b^*_{\vec{k}}$ a operadores

$$b_{\vec{k}}\to\hat{b}_{\vec{k}},\qquad b^*_{\vec{k}}\to\hat{b}^\dagger_{\vec{k}} \tag{5.43}$$

y la expresión (5.42) del campo de Klein-Gordon resulta

$$\hat{\Phi}(\vec{x},T)=\frac{a^{-\frac{3}{2}}(T)}{\sqrt{2V}}\sum_{\vec{k}}\rho_k(T)\left[\hat{b}_{\vec{k}}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega_{0,k}T\right)}+\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\Omega_{0,k}T\right)}\right]. \tag{5.44}$$

Los operadores dados por (5.43) son los operadores de creación-aniquilación usuales que encontramos en la teoría cuántica, con la diferencia de que en nuestro caso, estos se encuentran en el contexto de un espacio-tiempo curvo. Aun así podemos generalizar la estructura matemática de estos operadores en el espacio-tiempo de Minkowski al caso de un espacio-tiempo FRW. Tal y como mencionamos en el tercer capítulo.
Al observar el resultado (5.44) es fácil darse cuenta de que es una generalización del resultado que encontramos en el espacio-tiempo de Minkowski. Si tomamos el factor de escala $a(\tau)=1$, regresamos a tal espacio-tiempo y recuperamos el resultado para un "oscilador armónico" con frecuencia dependiente del tiempo. De la misma manera, si tomamos $\rho_k=1$ tenemos que $\Omega_k(\tau)=\Omega_{0,k}$ y recuperamos el caso de un "oscilador armónico" con frecuencia constante por lo que nuestro resultado se reduce al usual en tal espacio-tiempo. En ambos casos, desaparece la dependencia temporal en la frecuencia de oscilación de los modos (y también de la masa del campo).

En el sexto capítulo de [9] se muestra el siguiente resultado para el mismo sistema en el espacio-tiempo de FRW, pero en el caso de que los modos $\vec{k}$ son continuos

$$\hat{\Phi}(\vec{x},\eta)=\frac{1}{\sqrt{2}a(\eta)}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left[\hat{b}_{\vec{k}}v^*_k(\eta)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\hat{b}^\dagger_{\vec{k}}v_k(\eta)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \tag{5.45}$$

donde η es el tiempo conforme dado por

$$\eta(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau'}{a^2(\tau')}$$

y $v_k(\eta)$ son las funciones de modo y satisfacen la ecuación

$$v_k'' + \omega_k^2(\eta) v_k = 0.$$

La razón de introducir el tiempo conforme es para demostrar que la métrica de FRW, para este tiempo, es conformemente equivalente a la métrica de Minkowski. Es por esta razón que en nuestro resultado aparece una potencia diferente en el factor de escala.
Dejando de lado el hecho de que este resultado es para el caso continuo y en un sistema de referencia diferente, con nuestro método fuimos capaces de encontrar la forma explícita de las funciones de modo v_k, primero removiendo la dependencia temporal de la frecuencia ω_k. Comparando las expresiones (5.44) y (5.45), observamos que tales funciones de modo son

$$v_k = \rho_k e^{i\Omega_{0,k} T}. \tag{5.46}$$

Probando con éxito, una vez más, el hecho de que las transformaciones canónicas son herramientas muy poderosas en el tratamiento de problemas un poco más complicados.
Es pertinente hacer la observación de que nuestro conjunto de operadores de creación-aniquilación lo asociamos a un oscilador armónico independiente del tiempo. En el caso del resultado que se muestra en el sexto capítulo de [9], el conjunto de operadores de creación-aniquilación es asociado a un oscilador armónico dependiente del tiempo, por lo que ambos conjuntos de operadores son diferentes. Es por esta razón que nuestro conjunto de operadores nos permite definir un vacío independiente del tiempo, mientras que el conjunto de operadores de [9] define un vacío dependiente del tiempo, lo que puede llevar a ambigüedades en tal definición ya que pueden existir estados de menor energía en diferentes instantes de tiempo. Esto se discute con más detalle en tal referencia.

Conclusiones

Gracias a la correspondencia entre el paréntesis de Poisson y el conmutador de dos observables físicos podemos implementar las transformaciones canónicas a nivel cuántico. Sin embargo, debemos de tener especial cuidado con el ordenamiento de los observables físicos ya que por lo general no conmutan. Esto tiene como consecuencia que el resultado cuántico difiera del resultado clásico. En el caso de tener más de una transformación canónica cuántica, es importante tener cuidado con el orden en el que se aplican para obtener el resultado correcto ya que en caso contrario podemos obtener diferentes resultados que no son los que uno busca.
Esta herramienta nos permitió remover la dependencia temporal de la frecuencia para un oscilador armónico clásico y, al hacer una transformación canónica lineal en el espacio fase extendido, llegamos al invariante de Lewis clásico. Con este hecho demostramos que la teoría desarrollada de las transformaciones canónicas es consistente. Por otro lado, tal transformación en el espacio fase extendido convirtió al sistema original en un oscilador armónico clásico con frecuencia constante, cuya solución es bien conocida y el problema lo damos por resuelto. Esto demuestra que las transformaciones canónicas son herramientas muy poderosas para resolver problemas más complicados.
Dado el caso clásico, utilizamos la teoría cuántica de las transformaciones canónicas para resolver el equivalente cuántico de tal sistema. A pesar de las diferencias entre la teoría clásica y la teoría cuántica; en particular nos referimos al hecho de que las variables dinámicas no conmutan, los resultados cuánticos son generalizaciones de los resultados clásicos, con la particularidad de que debemos de tener especial cuidado con el ordenamiento de variables que no conmutan. Esto resulta en el hecho de que la función de Schrödinger asociada a tal sistema se transforme a la función de Schrödinger del oscilador armónico con frecuencia constante en el espacio fase extendido (Q, P, T, P_T). El operador Hamiltoniano que resulta es igual al invariante de Lewis en su versión cuántica, demostrando que la teoría cuántica de las transformaciones canónicas es también consistente. Esto tiene como consecuencia que los estados cuánticos del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo se relacionan con los estados del oscilador con frecuencia constante.

Dado el éxito de esta transformación canónica, generalizamos los resultados encontrados al caso del campo de Klein-Gordon; concretamente en las funciones de modo $\phi_{\vec{k}}(\tau)$ que aparecen en la expansión de Fourier del campo. Esto nos permitió encontrar la forma explícita de las funciones de modo y poder construir una expresión explícita del campo de Klein-Gordon en función de una solución particular de la función ρ_k, el factor de escala a y del tiempo T. Todo esto en el caso clásico. Utilizando el método de cuantización canónica llegamos a la expresión del campo de Klein-Gordon como operador en términos de los operadores de creación-aniquilación $(\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}})$ usuales, y con ayuda de la generalización de la transformación canónica cuántica en el contexto de la teoría de campos encontramos que los estados propios de este campo son proporcionales a los de un "oscilador armónico" con frecuencia constante, tal como en el caso de la mecánica cuántica.

Dadas las conclusiones del tercer capítulo, generalizamos la estructura matemática del campo de Klein-Gordon en el caso del espacio-tiempo de Minkowski, al caso del espacio-tiempo FRW. Entonces el campo de Klein-Gordon satisface la relación de conmutación usual con su momento conjugado, y esto tiene como consecuencia que los operadores $(\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}})$ satisfagan las relaciones de conmutación usuales de la teoría cuántica en el caso del espacio-tiempo de Minkowski. También es importante señalar que el conjunto de operadores de creación-aniquilación $(\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}})$ son asociados a un "oscilador armónico" independiente del tiempo, y por las razones anteriores, podemos definir un vacío, el cual tomamos como el estado de menor energía del sistema, independiente del tiempo. En el caso de la referencia [9], tal conjunto de operadores de creación-aniquilación son asociados a un "oscilador armónico" dependiente del tiempo por lo que si definimos al vacío de la misma manera que en el caso anterior resultaría en una ambigüedad ya que podemos tener estados de menor energía en diferentes instantes de tiempo. En este caso se debe tener especial cuidado al definir el vacío.

Por otro lado, la expresión del campo de Klein-Gordon que encontramos es una simple generalización del resultado en el caso plano ya que es proporcional a una potencia del factor escala, el cual recuperamos imponiendo que el factor de escala sea igual a la unidad.

Apéndice A

Transformación canónica

En este apéndice vamos a demostrar que la siguiente transformación del espacio fase extendido

$$Q = \frac{q}{\rho}, \quad P = \rho p - m\dot{\rho} q, \quad T(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{\rho^2(t')}, \quad P_T = \rho^2 p_t + \frac{1}{2}\rho\dot{\rho}\, pq - \frac{1}{2} m q^2 \frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho}) \quad (A.1)$$

es canónica. Entonces, deben cumplirse los siguientes paréntesis de Poisson

$$\{Q, T\} = 0, \quad \{Q, P_T\} = 0, \quad \{Q, P\} = 1, \tag{A.2}$$

$$\{T, P\} = 0, \quad \{P_T, P\} = 0, \quad \{T, P_T\} = 1, \tag{A.3}$$

los cuales calculamos sobre el espacio fase extendido original (q, p, t, p_t).
El paréntesis de Poisson entre la coordenada Q y el tiempo T es

$$\{Q, T\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial p_t} - \frac{\partial Q}{\partial p_t}\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Las únicas derivadas diferentes de cero son

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho^2},$$

por lo que al sustituir en el paréntesis anterior, este resulta cero, como puede verse claramente

$$\{Q, T\} = 0.$$

Ahora calculamos el paréntesis de Poisson entre la coordenada Q y el momento P_T

$$\{Q, P_T\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P_T}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P_T}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{\partial P_T}{\partial p_t} - \frac{\partial Q}{\partial p_t}\frac{\partial P_T}{\partial t}.$$

Pero el segundo y cuarto término son cero ya que la coordenada Q no depende de los momentos p y p_t, entonces, de la transformación (A.1) tenemos

$$\begin{aligned}\{Q, P_T\} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P_T}{\partial p} + \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{\partial P_T}{\partial p_t} \\ &= \frac{1}{\rho}\left(\rho\dot{\rho}q\right) + \left(-\frac{\dot{\rho}}{\rho^2}q\right)\left(\rho^2\right) \\ &= \dot{\rho}q - \dot{\rho}q = 0.\end{aligned}$$

Ahora calculamos el paréntesis de Poisson entre la coordenada Q y el momento P, el cual está dado por

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{\partial P}{\partial p_t} - \frac{\partial Q}{\partial p_t}\frac{\partial P}{\partial t}.$$

Sin embargo, el único término diferente de cero es el primero ya que la coordenada Q no depende de los momentos p y p_t, y el momento P no depende del momento p_t. Usando las transformaciones (A.1) queda

$$\begin{aligned}\{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} \\ &= \frac{1}{\rho}(\rho) = 1.\end{aligned}$$

Obtenemos que los tres paréntesis de Poisson en (A.2) se cumplen.
Ahora pasamos a calcular los paréntresis de Poisson (A.3). Primero calculamos el paréntesis de Poisson entre el tiempo T y el momento P, dado por

$$\{T, P\} = \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial P}{\partial p_t} - \frac{\partial T}{\partial p_t}\frac{\partial P}{\partial t}.$$

Pero el primero, segundo y cuarto término son cero ya que el tiempo T solo depende de t. El término restante, el tercer término, es cero ya que el momento P no depende del momento p_t. Por lo tanto

$$\{T, P\} = 0.$$

El paréntesis de Poisson entre los momentos P y P_T es

$$\{P, P_T\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P_T}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P_T}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial P_T}{\partial p_t} - \frac{\partial P}{\partial p_t}\frac{\partial P_T}{\partial t}.$$

El último término es cero ya que el momento P no depende de p_t, entonces, usando la transformación (A.1) tenemos

$$\begin{aligned}
\{P, P_T\} &= \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P_T}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P_T}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial P_T}{\partial p_t} \\
&= (-m\dot{\rho})(\rho\dot{\rho}q) - \rho\left[\rho\dot{\rho}p - mq\frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho})\right] + (\dot{\rho}p - m\ddot{\rho}q)(\rho^2) \\
&= -m\rho\dot{\rho}^2 q - \rho^2\dot{\rho}p + mq\rho\frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho}) + \rho^2\dot{\rho}p - m\rho^2\ddot{\rho}q \\
&= mq\rho\frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho}) - mq\rho\frac{d}{dt}(\rho\dot{\rho}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos el paréntesis de Poisson entre el tiempo T y el momento P_T, dado por

$$\{T, P_T\} = \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial P_T}{\partial p} - \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial P_T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial P_T}{\partial p_t} - \frac{\partial T}{\partial p_t}\frac{\partial P_T}{\partial t}.$$

Pero el primero, segundo y cuarto término son cero ya que el tiempo T solo depende de t. Usando las transformaciones (A.1) resulta

$$\begin{aligned}
\{T, P_T\} &= \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial P_T}{\partial p_t} \\
&= \frac{1}{\rho^2}(\rho^2) = 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los paréntesis de Poisson (A.3) se cumplen y entonces, la transformación (A.1) es canónica.

Bibliografía

[1] B.P. Abbott *et al.* *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger.* Phys. Rev. Letters, **116** 061102 (2016).

[2] Arlen Anderson. *Canonical Transformations in Quantum Mechanics.* Annals of Phys. **232**, 292-331 (1994)

[3] C. Bertoni, F. Finelli, G. Venturi. *Adiabatic invariants and scalar fields in a de Sitter space-time.* Phys. Letters A **337** 331-336 022121 (1998).

[4] H. R. Lewis Jr. *Classical and Quantum Systems with Time-Dependent Harmonic-Oscillator-Type Hamiltonians.* Phys. Rev. Letters, **18** 510 (1967).

[5] Stefan Hollands, Robert M. Wald. *Quantum fields in curved space-time.* Physics Reports **574** I-35 (2015)

[6] Diana Battefeld, Patrick Peter *A critical review of classical bouncing cosmologies.* Physics Reports **571** I-66 (2015).

[7] Robert M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics.* The University of Chicago Press (1994).

[8] Patrick Peter, Jean-Phillipe Uzan. *Primordial Cosmology.* Oxford University Press (2009)

[9] V. Mukhanov, S. Winitzki. *Quantum Effects in Gravity.* Cambridge University Press (2007)

[10] M. Moshinsky, *Groups in physics.* Les Presses de L'Université de Montréal, Montréal (1979).