

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS



BIBLIOTECA



Instituto de Ciencias Nucleares

LA SISTEMÁTICA DE LAS MASAS NUCLEARES
Y EL MODELO DE CAPAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)
P R E S E N T A

JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ

MEXICO, D. F.

1979



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres.

A G R A D E C I M I E N T O S

La elaboración de un trabajo científico es una experiencia en la que intervienen muchas personas e instituciones, dejando cada una de ellas su propia huella. Como justo testimonio de este hecho, es un placer escribir los siguientes párrafos.

En primer lugar, deseo agradecer al Dr. Mariano Bauer, quien propuso el tema de esta investigación, y cuyas ideas y paciente guía hicieron posible llevarla a cabo.

También agradezco al Dr. Vittorio Canuto del Instituto Goddard de Estudios Espaciales (NASA), en Nueva York, al Dr. Nisan Zeldes de la Universidad Hebrea de Jerusalén y al Dr. Lütz Dohnert de la Universidad Central de Venezuela su interés y sus sugerencias siempre valiosas. Muy especialmente, deseo agradecer a los Dres. Canuto y Zeldes la enorme hospitalidad que me brindaron en sus instituciones respectivas, en donde se realizó parte de este trabajo.

Al Programa de Formación de Personal Académico de la UNAM y al Programa Nacional de Ciencias Básicas del CONACYT (PNCB-00025) deseo agradecer la ayuda económica que proporcionaron a lo largo de la elaboración del trabajo, y al Convenio Científico Mexicano-Israelí la ayuda proporcionada para facilitar las visitas del Dr. Zeldes

a México, así como la nuestra a Jerusalén.

En un lugar muy especial, agradezco al Departamento de Física Teórica del Instituto de Física de la UNAM (el eterno 10^o piso), a través de los Dres. Jorge Flores (director del instituto) y Pier A. Mello (jefe del departamento), por su hospitalidad y el ambiente, siempre estimulante, que enmarcó mi formación durante los últimos cuatro años.

Finalmente, agradezco al Dr. Marcos Rosenbaum, director del Centro de Estudios Nucleares su apoyo brindado durante la conclusión del trabajo.

I N D I C E

página No.

CAPITULO I

Introducción.

CAPITULO II

Energía de Amarre Total y Cálculos Autoconsistentes.

- | | |
|--|------|
| 2.1 El método de Hartree-Fock. | 2.2 |
| 2.2 El desarrollo de gráficas eslabonadas y el método de Brueckner-Hartree-Fock. | 2.11 |
| 2.3 Reacciones de expulsión (Knock-out) y la energía de amarre total. | 2.23 |
| 2.4 El método de Brueckner-Hartree-Fock-Renormalizado. | 2.34 |

CAPITULO III

Niveles de Energía de Partícula Independiente.

- | | |
|--|------|
| 3.1 Conexión entre el modelo de capas y el modelo óptico fenomenológico. | 3.3 |
| 3.2 Niveles de energía para un potencial de oscilador armónico modificado. | 3.14 |
| 3.3 Niveles de energía para un potencial de pozo cuadrado. | 3.18 |
| 3.4 Resultados numéricos. | 3.23 |

CAPITULO IV

Cálculo de la Fórmula de Masas Nucleares.

- | | |
|---|------|
| 4.1 Cálculo de la energía total E_A . | 4.3 |
| 4.2 Cálculo de la fórmula I. | 4.11 |
| 4.3 Cálculo de la fórmula II. | 4.17 |

CAPITULO V

Ajuste Numérico de la Fórmula de Masas.

- | | |
|-------------------------------------|-----|
| 5.1 Procedimiento. | 5.2 |
| 5.2 Resultados. | 5.6 |
| 5.3 Comparación con otras fórmulas. | 5.8 |

CAPITULO VI

Conclusiones y Perspectivas.

- | | |
|-----------------------------|-----|
| 6.1 Resumen y conclusiones. | 6.1 |
| 6.2 Perspectivas. | 6.4 |

APENDICE I

Consideraciones Sobre la Masa Efectiva.

APENDICE II

Raíz Real del Polinomio (4.10).

APENDICE III

Coefficientes de la Fórmula (4.54).

APENDICE IV

Coefficientes de la Fórmula (4.73).

APENDICE V

Parámetros del Potencial Optico Fenomenológico.

REFERENCIAS

CAPITULO I

INTRODUCCION

Es un hecho bien conocido que en la naturaleza existen únicamente 300 especies nucleares estables, y que durante la última mitad de este siglo se han identificado y estudiado unas 1300 especies adicionales. A partir de ellas se ha obtenido un conocimiento razonablemente amplio de la estructura nuclear y se han ideado diversos modelos con los que es posible describir, entre otras cosas, las energías de amarre de los núcleos en su estado base (ó equivalentemente, sus masas).

Por otro lado, recientemente se ha desarrollado la tecnología necesaria para producir reacciones entre iones pesados como uranio contra uranio. Cuando se consiga elevar las energías de bombardeo a 2 GeV por nucleón, se estima que pueden llegar a aparecer hasta 6000 nuevas especies, con las que se pondrán a prueba los conocimientos actuales.

Las fórmulas de masas nucleares juegan un papel muy importante en este sentido tanto bajo el punto de vista de la teoría como de las aplicaciones. Bajo el primero permiten establecer la validez y las limitaciones de los modelos. Ayudan a mejorar la visión teórica

de la materia nuclear, la estructura de capas y los núcleos deformados. Bajo el punto de vista práctico predicen propiedades de los núcleos, que son de especial interés para la química nuclear y sus aplicaciones. Además, permiten evaluar masas de núcleos que no han sido medidas, ó que es imposible medir. También son útiles para resolver problemas experimentales, tales como saber si una nueva masa medida corresponde al estado base del núcleo en cuestión, ó a un estado excitado.

Debido a que aún no se cuenta con una teoría nuclear completa, sino más bien con un conjunto de modelos complementarios, es difícil que una misma fórmula sea simultáneamente "la mejor" ante los dos aspectos antes mencionados (Cohen 1975), lo cual representa un reto que imprime interés al tema.

Este trabajo representa una revisión y continuación del trabajo realizado antes por Bauer y Canuto (1967) y conserva su antigua motivación. En el se muestran algunos resultados parciales que tienden a enlazar, bajo un punto de vista fenomenológico al modelo de la gota de líquido con el modelo de capas, y a este último con el modelo óptico. La investigación se enfoca hacia la elaboración de una fórmula de masas nucleares que pueda extrapolarse con confianza y un mínimo de esfuerzo a núcleos lejanos de la línea de estabilidad.

A pesar de que el carácter de los tres modelos mencionados es distinto, encontrar su conexión no sólo es deseable bajo el punto de vista estético, sino que como

ahora se verá, es necesario bajo el punto de vista práctico.

Como es bien sabido, al analizar algunas propiedades globales de los núcleos, tales como la energía de amarre por nucleón y la densidad, es factible establecer una analogía entre el núcleo y una gota de líquido. Esta analogía fué empleada por von Weizsäcker (1935) y Bethe y Bacher (1936) para desarrollar una famosa fórmula de masas, que para la energía de amarre EA tiene la forma

$$EA = a_v A - a_s A^{2/3} - a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A} - \frac{3}{5} \frac{Ze^2}{r_c A^{1/3}} + \Delta \quad (1.1)$$

en donde a_v , a_s , a_{sym} y r_c son parámetros ajustables, y Δ es un término de apareamiento que toma en cuenta el efecto que, en la estabilidad, produce el hecho de que N ó Z sean pares ó impares. Esta fórmula se inspira, así pues, en un modelo macroscópico, en que el primer término representa la energía de volúmen, el segundo una corrección debida a efectos de superficie, y el cuarto toma en cuenta la repulsión de Coulomb. El tercer término toma en cuenta que los neutrones y los protones pertenecen a gases de Fermi distintos, y proporciona la línea de estabilidad correcta.

El éxito de la fórmula (1.1) es notable, pues consigue ajustar las masas nucleares con un error de un 1%, y aún en este error proporciona información importante.

En la figura (1.1) (tomada de Bohr y Mottelson 1969),

se muestra la energía de amarre por nucleón en función del número de masa A . La línea continua es la predicción de la fórmula (1.1) con $a_v = 15.56$ MeV, $a_s = 17.23$ MeV, $a_{SYM} = 46.57$ MeV y $r_c = 1.24$ fm., para los isóbaros más estables. Los puntos son los valores experimentales. Como puede verse, la pequeña diferencia entre ambas curvas muestra una energía de amarre adicional para núcleos que tienen ciertos números "mágicos" de neutrones y protones (20, 28, 50, 82 y 126), revelando así una estructura de capas, como la conocida en el caso de los átomos.

En la figura (1.2) (tomada de Kümmel et al 1966), dicha estructura resalta con mayor claridad. En la absisa se muestra la diferencia que existe entre las energías de amarre ajustadas por la fórmula (1.1) y las experimentales. En la ordenada, se da el número de neutrones de cada núcleo. Los coeficientes ajustados son en este caso $a_v = 16.09$ MeV, $a_s = 19.04$ MeV, $a_{SYM} = 23.89$ MeV y $r_c = 1.16$ fm. La desviación estandar es 2.78 MeV. Puede verse claramente que la diferencia entre los valores teóricos y experimentales es sistemática, y que aquellos núcleos cuyo número de neutrones corresponde a los números "mágicos" antes señalados muestran mayor energía de amarre que la que se esperaría de la fórmula (1.1).

Si bien la diferencia mostrada en las figuras (1.1) y (1.2) es pequeña, es importante para evaluar con precisión propiedades de los decaimientos alfa y beta, y barreras de fisión, así como para determinar si existen núcleos superpesados estables (Köhler 1971a, 1971b, Fiset y

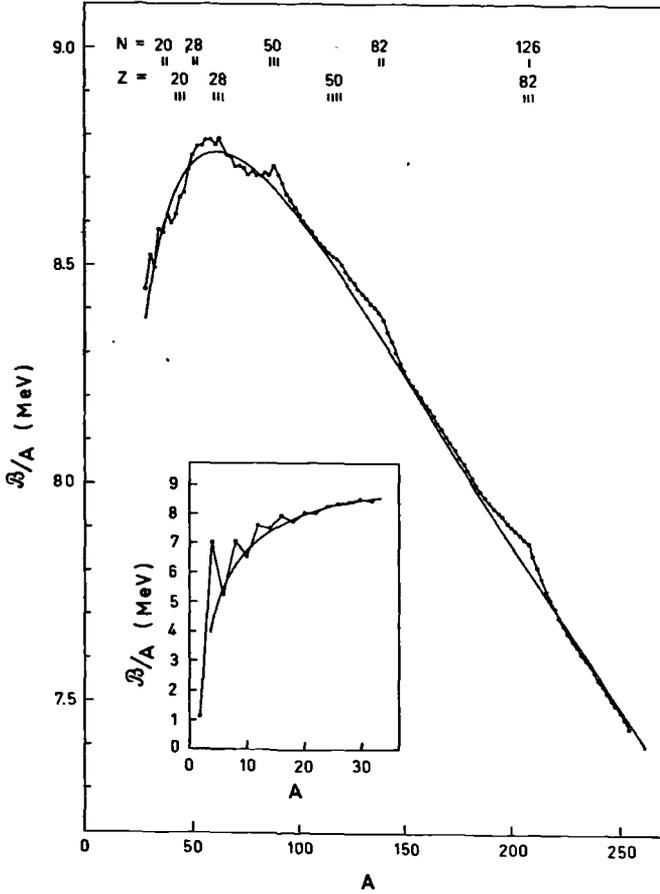


Figura 1.1. Energía de amarre por nucleón, en función del número de masa para los isóbaros más estables (tomada de Bohr y Mottelson (1969)).

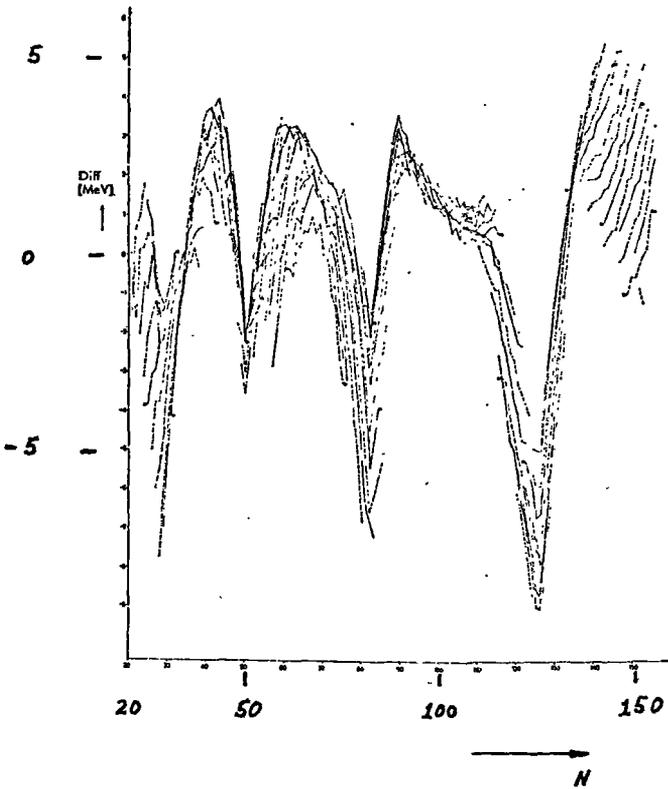


Figura 1.2: Diferencia entre las energías de amarre ajustadas por la fórmula 1.1 y los valores experimentales, en función del número de neutrones (tomada de Kümmel et al 1966).

Nix 1972, Nix 1972).

De acuerdo con el modelo de capas, que se sugiere tan claramente de la figura 1.2, se puede considerar al núcleo como un conjunto de nucleones que pueden tratarse, en primera aproximación, como partículas independientes que se encuentran en un potencial promedio. Dicho potencial W se produce en forma colectiva por el resto de los nucleones. Así pues, a cada nucleón ligado corresponde una eigenfunción de onda Ψ_n y una eigenenergía E_n determinados por la ecuación de Schrödinger

$$(\vec{p}^2 + W) \Psi_n = E_n \Psi_n . \quad (1.2)$$

Mayer y Jensen (1955) encontraron que escogiendo para W un potencial de oscilador armónico, y tomando en cuenta la interacción spin-órbita, es posible agrupar a los niveles de energía de tal modo que se reproducen los números mágicos antes mencionados (ver figura 1.3). Tomando en cuenta "interacciones residuales" que no se incluyen en el potencial de partícula independiente, este modelo ha permitido comprender numerosas propiedades de la estructura nuclear, incluyendo la sistemática de las masas nucleares (Liran y Zeldes 1976).

En relación con lo anterior cabe mencionar que el modelo óptico, usado en reacciones nucleares, parte de la misma idea que el modelo de capas, pero con la diferencia de que en él, la energía E se fija arbitrariamente y la función de onda debe cumplir las condiciones a la frontera propias del problema de dispersión.

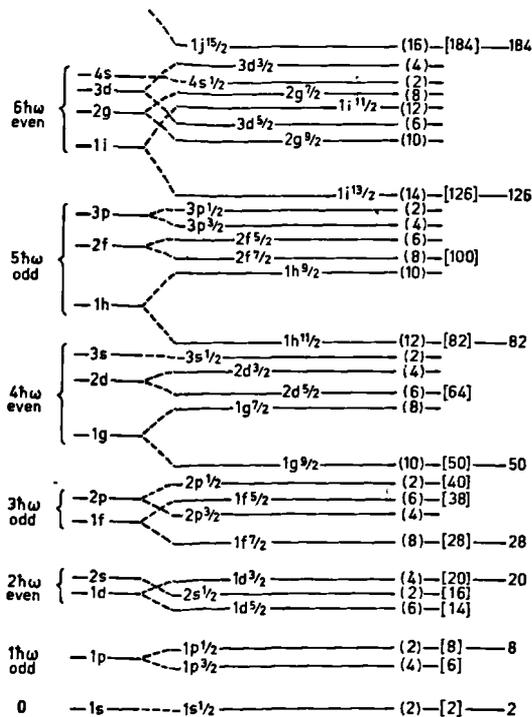


Figura 1.3. Esquema de niveles de energía para el modelo nuclear de capas. Se observa como se reproducen los números "mágicos" 20, 28, 50, 82 y 126 (Tomada de Mayer y Jensen (1955)).

Ahora bien, en fórmulas de masas que se usan frecuentemente, como la de Myers y Swiatecki (1969, 1974), intervienen el modelo de la gota de líquido y el de capas en forma complementaria. Se supone que la energía de amarre está dada en principio por una suma de términos $e_i(\epsilon_i)$ que dependen de cada nivel de partícula independiente. Pero la energía de amarre se puede escribir

$$EA = \int e f(\epsilon) d\epsilon + \left(\sum_i e_i - \int e f(\epsilon) d\epsilon \right), \quad (1.3)$$

en donde $f(\epsilon)$ es una distribución alisada de los niveles de energía. Puesto que el primer término es liso, así como la fórmula (1.1), se le substituye por esta. Los efectos de capas quedan supuestamente aislados en la fluctuación dada por el segundo término, para el cual se da una fórmula semiempírica, ó bien se hacen cálculos numéricos detallados. Este procedimiento está justificado bajo el punto de vista teórico por el trabajo de Balian y Bloch (1970, 1971, 1972) y el método de Strutinsky (Brack et al 1972). Sin embargo, en ningún caso se obtiene la fórmula de masas enteramente a partir del modelo de capas. Esta última posibilidad es la que se estudia en este trabajo.

El respaldo formal está dado por la teoría de muchos cuerpos. En ella se parte de las interacciones nucleón-nucleón, y mediante cálculos autoconsistentes se obtiene un potencial promedio que permite tratar a los nucleones como partículas independientes influenciadas por este. Es precisamente la misma idea que existe atrás del modelo de

capas y el modelo óptico, para los cuales existe evidencia experimental independiente.

A partir del potencial autoconsistente se obtienen los niveles de energía de partícula independiente, con los que a su vez se calcula la energía de amarre del núcleo. Este último paso es el que impone a los resultados de la teoría de muchos cuerpos como la guía formal de este trabajo.

Si bien mediante cálculos autoconsistentes es posible obtener las energías de amarre, éstos son complejos y no proporcionan una fórmula analítica*. Puesto que aquí se desea encontrar una expresión de tipo general para las masas nucleares, se substituye al potencial autoconsistente por uno fenomenológico, y a partir de este se obtiene una expresión analítica para los niveles de energía. Finalmente, esta se emplea para construir la expresión de la energía de amarre.

Sumando adecuadamente las expresiones obtenidas, se encuentra una fórmula para las energías de amarre, que consiste en un desarrollo en serie de potencias de $A^{1/3}$. Los coeficientes son funciones de los parámetros del modelo de partícula independiente, y para los núcleos cuya última capa no está llena, dependen de un parámetro

* Tondeur (1978) ha desarrollado un sistema mediante el cual se pueden calcular autoconsistentemente energías de amarre de una forma precisa y más simple, pero no proporciona una fórmula analítica.

de llenamiento, que se define por el número de partículas en ésta, y de la deformación del potencial autoconsistente.

Debido a que el cálculo de la fórmula completa requiere de un esfuerzo considerable, para poner a prueba las ideas en que se basa este trabajo, se ha empezado por construir una fórmula de masas que no toma en cuenta el parámetro de llenamiento y la deformación. Esto es razonable, pues la parte ignorada corresponde a una fracción mínima de la energía total, como se puede ver de la figura 1.1, en donde se aprecia la discrepancia debida a efectos de deformación y de capas. Si el camino que se sigue es correcto, habrán de obtenerse resultados semejantes a los de la fórmula de Bethe-Weizsäcker-Bacher al comparar con valores experimentales.

Con objeto de que el potencial fenomenológico tenga un carácter suficientemente general, como para que pueda emplearse sobre toda la tabla nuclear y permita hacer extrapolaciones, debe depender de parámetros que cumplan con las mismas propiedades. En este sentido se cuenta con los parámetros del modelo óptico fenomenológico, el cual ha sido estudiado ampliamente.

Consecuentemente ha sido necesario establecer la conexión que existe entre el modelo de capas fenomenológico y el modelo óptico fenomenológico. Esto se consigue mostrando que ambos surgen de una misma ecuación de Schrödinger con un potencial no local. La no localidad, por su parte, queda justificada también por la teoría de

muchos cuerpos.

En cuanto al potencial esférico fenomenológico que substituye al autoconsistente, se han estudiado dos posibilidades distintas, teniendo en cuenta que deben permitir soluciones analíticas para los niveles de energía. Por un lado, se ha empleado un potencial de oscilador armónico modificado, como el que Nilsson et al (1969) han propuesto para cálculos de estructura nuclear. Por otro lado se ha tomado un conjunto de pozos cuadrados infinitos, con cuyos niveles, calculados a partir de un desarrollo analítico, se ha pretendido representar a los de un pozo cuadrado finito. La razón para hacer esto último, es que un pozo cuadrado representa mejor al potencial nuclear que un oscilador armónico. En ambos casos se ha procurado que las expresiones obtenidas sean tan realistas, como la restricción de que sean analíticas lo permita.

En trabajos posteriores se incluirán los efectos de deformación también en el contexto del modelo de capas, posiblemente siguiendo el mismo procedimiento empleado antes por Bauer y Canuto (1967), ó bien el de Zeldes (Liran y Zeldes 1976).

En el capítulo II se exponen algunos de los aspectos más relevantes de la teoría de muchos cuerpos, que constituyen la base formal de este trabajo. En el capítulo III se muestra la congruencia que existe entre el modelo de capas fenomenológico y el modelo óptico. A partir de esto, se describe la forma como se obtienen expresiones

analíticas para los niveles de partícula independiente, en base a la información obtenida del modelo óptico fenomenológico. En el capítulo IV se construyen dos fórmulas para la energía de amarre del núcleo, de las que se selecciona una de ellas para ajustar a los valores experimentales de las masas. Los resultados de dicho ajuste se muestran y discuten en el capítulo V. Finalmente, en el capítulo VI se resumen las conclusiones obtenidas y se señalan las perspectivas de este programa de investigación.

CAPITULO II

ENERGIA DE AMARRE TOTAL Y CALCULOS AUTOCONSISTENTES

En la teoría de muchos cuerpos se han ideado métodos que entre sus objetivos cuentan con el de calcular la energía de amarre de los núcleos en su estado base. En ellos se construye un potencial autoconsistente de partícula independiente que se relaciona con el modelo de capas y aproxima al potencial exacto del hamiltoniano. El interés que tienen tales cálculos para este trabajo proviene de que, en principio, permiten tender un puente entre los niveles de energía del modelo de capas y la energía de amarre total que se desea obtener.

Puesto que dichos métodos constituyen la base formal de lo que se hará en los siguientes capítulos, se les describirá esquemáticamente, de modo que se tenga presente el terreno sobre el que se pisa. Este, por cierto, no es completamente firme como se verá. El propósito que se tiene es hacer un análisis crítico que destaque los resultados relevantes para los siguientes capítulos. Sin embargo, no se pretende de ningún modo hacer un tratamiento detallado, el que se puede encontrar en textos como el de Brown (1971), el de de Shalit y Feshbach (1974) y

artículos de investigación, a los que se hará referencia oportunamente.

Se empezará por describir el método de Hartree-Fock (HF), que si bien no es adecuado para emplear en cálculos de física nuclear, es un buen punto de partida que permite comprender los conceptos más importantes del problema. Posteriormente se mostrará la forma como el método de Brueckner-Hartree-Fock (BHF) mejora el potencial autoconsistente y resuelve en parte los problemas que hacen inaplicable el método de HF a la física nuclear. En ese momento se ve hasta que punto los resultados de BHF son consistentes con los obtenidos en reacciones de expulsión (knock-out), y como de sus secciones eficaces se obtiene cierta información respecto a los niveles de partícula independiente. Esto llevará a la necesidad de incluir la llamada energía de reacomodo, que finalmente desaparecerá al mejorar el potencial autoconsistente de acuerdo con el método de Brueckner-Hartree-Fock-Renormalizado (BHFR).

2.1 El método de Hartree-Fock.

En el método de Hartree-Fock se encuentran las ideas fundamentales que llevan al concepto de potencial autoconsistente. Aquí se presenta una exposición simplificada de éste en la cual se destacan los resultados más relevantes.

Considérese el hamiltoniano del sistema

dado por

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \quad (2.1)$$

en el que se ignoran interacciones entre tres y más cuerpos. En segunda cuantización éste toma la forma

$$H = \sum_{k, k_2} (k, 1 | T | k_2) a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ + \sum_{k, k_2, k_3, k_4} (k, k_2 | V | k_3, k_4) a_{k_2}^+ a_{k_1}^+ a_{k_3} a_{k_4} \quad (2.2)$$

en donde a_i^+ y a_i son operadores de creación y aniquilación que cumplen las reglas de conmutación propias de un sistema de fermiones:

$$\{a_i^+, a_j^+\} = 0 = \{a_i, a_j\} \quad (2.3)$$

$$\{a_i^+, a_j\} = 1 \delta_{ij} \quad (2.4)$$

en donde, de acuerdo con la notación usual

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (2.5)$$

Pero una forma alternativa de escribir el hamiltoniano (2.1) es

$$H = \sum_i (T_i + U_i) + \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} v_{ij} - \sum_i U_i \right) \quad (2.6)$$

en donde U_i es un potencial de partícula independiente para el que se obtiene un conjunto de funciones de onda $\{\varphi_i\}$. Si U_i se escoge de tal modo que el segundo término no sea pequeño, se tendrá esencialmente un Hamiltoniano que consiste en la suma de los Hamiltonianos de partícula independiente. Se sigue que la forma de construir tal potencial es minimizando el valor de expectación de H para la función de onda Φ del sistema. Esta se deberá construir a partir del conjunto $\{\varphi_i\}$ generado por U_i , lo que origina la autoconsistencia, como a continuación veremos.

Del método de separación de variables, se sugiere que en el espacio de configuración, la función de onda Φ para un sistema de fermiones cuyos primeros estados están ocupados, tiene la forma de un determinante de Slater

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varphi_1(\vec{r}_1) & \dots & \varphi_1(\vec{r}_A) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_A(\vec{r}_1) & \dots & \varphi_A(\vec{r}_A) \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

En segunda cuantización, siguiendo las reglas (2.3) y (2.4), la función de onda se puede escribir como

$$\Phi = a_A^\dagger \dots a_1^\dagger |0\rangle. \quad (2.8)$$

Así pues, al pedir que

$$\delta(\bar{\Phi}, H\bar{\Phi}) = 0, \quad (2.9)$$

se puede tomar para una variación de $\bar{\Phi}$ a primer orden

$$\delta\bar{\Phi} = \gamma a_m^+ a_i \bar{\Phi} \quad (2.10)$$

en donde $i \in A$, $m \in A$ y γ es un número infinitesimal.

Para (2.9) se obtiene de aquí que

$$\gamma(a_m^+ a_i \bar{\Phi}, H\bar{\Phi}) = \gamma(\bar{\Phi}, a_i^+ a_m H\bar{\Phi}) = 0 \quad (2.11)$$

Substituyendo H de (2.2) esta condición queda

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, k_2} (k_1 | T | k_2)(\bar{\Phi}, a_i^+ a_m a_k^+ a_{k_2} \bar{\Phi}) + \\ & + \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} (k_1, k_2 | V | k_3, k_4)(\bar{\Phi}, a_i^+ a_m a_k^+ a_{k_2}^+ a_{k_4} a_{k_3} \bar{\Phi}) = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

que simplificando apropiadamente se reduce a

$$(m | T | i) + \sum_{j=1}^A [(j | m | V | j | i) - (m | j | V | j | i)] = 0, \quad (2.13)$$

en donde debe recordarse que $m \in A$ e $i \in A$.

Así pues, si se define el operador de partícula independiente

$$H_{pi} \equiv \sum_{m,i} \left\{ (m | T | i) + \sum_{j=1}^A [(j | m | V | j | i) - (m | j | V | j | i)] \right\} a_m^+ a_i, \quad (2.14)$$

sin restricciones sobre m e i , se ve que, debido a la

condición (2.13), los elementos de matriz entre estados ocupados y desocupados se anulan. Por lo tanto, H_p se puede diagonalizar independientemente en el espacio de estados ocupados dando lugar a

$$(\langle m | T | i \rangle) + \sum_{j=1}^A [(j | m | V | j | i) - (\langle m | j | V | j | i)] = \epsilon_i \delta_{mi}, \quad (2.15)$$

en donde ahora $m \leq A$ e $i \leq A$. En el espacio de configuración se puede escribir como

$$\int \varphi_i^*(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \varphi_i(\vec{r}) d\vec{r} + \sum_{j=1}^A \iint \varphi_j^*(\vec{r}) \varphi_i(\vec{r}) V(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_j(\vec{r}') \varphi_i(\vec{r}) d\vec{r} d\vec{r}' - \sum_{i=1}^A \iint \varphi_i^*(\vec{r}) \varphi_j^*(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_j(\vec{r}') \varphi_i(\vec{r}) d\vec{r} d\vec{r}' = \epsilon_i. \quad (2.16)$$

Se puede ver que esta es la ecuación de Schrödinger con potencial no local

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi_i(\vec{r}) + \left[\sum_{j=1}^A \int \varphi_j^*(\vec{r}') V(\vec{r}', \vec{r}) \varphi_j(\vec{r}') d\vec{r}' \right] \varphi_i(\vec{r}) - \sum_{j=1}^A \int \varphi_j^*(\vec{r}') V(\vec{r}', \vec{r}) \varphi_j(\vec{r}') \varphi_i(\vec{r}') d\vec{r}' = \epsilon_i \varphi_i(\vec{r}), \quad (2.17)$$

multiplicada a la izquierda por $\varphi_i^*(\vec{r})$ e integrada sobre \vec{r} . Para mayor claridad, conviene observar que (2.17) tiene la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi_i(\vec{r}) + \int U(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_i(\vec{r}') d\vec{r}' = \epsilon_i \varphi_i(\vec{r}) \quad (2.18)$$

en donde el potencial no local $U(\vec{r}, \vec{r}')$ está definido por

$$\begin{aligned}
 U(\vec{r}, \vec{r}') &= \left[\sum_{j=1}^A \int \psi_j^*(\vec{r}'') V(\vec{r}'', \vec{r}') \psi_j(\vec{r}'') d\vec{r}'' \right] \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \\
 &- \sum_{j=1}^A \psi_j^*(\vec{r}') V(\vec{r}', \vec{r}) \psi_j(\vec{r}).
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Este último es autoconsistente, pues como puede verse está definido por el conjunto $\{\psi_j\}$ de funciones de onda, que es el mismo que genera.

Por otra parte, es posible conocer la energía del estado base del sistema simplemente calculando el valor de expectación de \hat{H} para el hamiltoniano (2.2),

$$\begin{aligned}
 \epsilon_0 &= (\Phi | H | \Phi) = \sum_{i=1}^A (i | T | i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A [(j | i | V | j | i) - (i | j | V | i | j)] = \\
 &= \sum_{i=1}^A T_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A V_i.
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Pero comparando con (2.15) se observa que ϵ_0 puede expresarse en términos de las energías de partícula independientes,

$$\epsilon_0 = \sum_{i=1}^A \epsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A [(j | i | V | j | i) - (i | j | V | i | j)] = \sum_{i=1}^A \epsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A V_i. \tag{2.21}$$

De lo expuesto hasta aquí se han obtenido dos resultados significativos para el propósito de este trabajo:

a) Las energías de partícula independiente en un sistema de fermiones se obtienen resolviendo una ecuación de Schrödinger con un potencial no local, como puede verse de la ec. (2.18). Debe aclararse, sin embargo, que las interacciones nucleón-nucleón pueden ser no lo-

cales por sí mismas, y por lo tanto la no localidad también se sigue de este hecho.

b) Se ha obtenido una cota superior de ϵ_0 para la energía del estado base del núcleo que se relaciona con la suma de las energías de partícula independiente (ec. (2.21)).

Una vez que se ha llegado a este punto, aún queda un problema por resolver. Recordando la ec.(2.6)

$$H = \sum_i (T_i + U_i) + \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} v_{ij} - \sum_i U_i \right), \quad (2.6)$$

se observa que si bien se ha encontrado la energía debida al término de partícula independiente en el hamiltoniano, falta estimar la contribución del segundo término conocido como "interacción residual".

En principio se puede plantear el problema en términos de la teoría de perturbaciones:

Sea

$$H_0 = \sum_i (T_i + U_i) \quad (2.22)$$

el operador de partícula independiente y

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} v_{ij} - \sum_i U_i \quad (2.22a)$$

una perturbación de éste. Si

$$H_0 \Phi_0 = \epsilon_0 \Phi_0 \quad (2.23)$$

y

$$H \Psi_0 = (H_0 + V) \Psi_0 = E \Psi_0, \quad (2.24)$$

y se pide que $\Psi_0 \rightarrow \Phi_0$ cuando $V \rightarrow 0$, desea encontrarse

$$\Delta E = E - \epsilon_0. \quad (2.25)$$

Los desarrollos en series de Wigner-Brillouin y de Rayleigh-Schrödinger representan dos formas de resolver el problema (de Shalit y Feshbach 1974).

Para encontrar la primera se emplea la identidad

$$\Psi_0 = \Phi_0 + \frac{Q_0}{E - H_0} V \Psi_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Q_0}{E - H_0} V \right)^n \right] \Phi_0, \quad (2.26)$$

en donde Q_0 es un operador de proyección tal que

$$Q_0 f \equiv f - \Phi_0 \langle \Phi_0 | f \rangle, \quad (2.27)$$

y se obtiene que

$$\Delta E = \frac{\langle \Phi_0 | V \Psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} = \left\langle \Phi_0 \left| \sum_{n=0}^{\infty} V \left(\frac{Q_0 V}{E - H_0} \right)^n \right| \Phi_0 \right\rangle, \quad (2.28)$$

siempre que $\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle = 1$. Aunque la ec.(2.28) no es una solución explícita ya que contiene a E en el denominador, es posible cortar la serie para una potencia finita y extraer E . La convergencia de esta serie es muy lenta y la situación empeora al aumentar el número de par-

tículas, por lo que resulta impráctica.

La serie de Rayleigh- Schrödinger se obtiene cambiando V por λV en la ec.(2.24), tomando $0 < \lambda \leq 1$. Suponiendo que E y Ψ_0 pueden expresarse como series de potencias de λ .

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \lambda^n \quad (2.29)$$

$$\Psi_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} U_n \lambda^n \right] \Phi_0, \quad (2.30)$$

en donde U_n son operadores que quedan por determinarse. Substituyendo en la ecuación $(H_0 + \lambda V)\Psi_0 = E\Psi_0$ e igualando términos del mismo orden,

$$\epsilon_0 = \langle \Phi_0 | H_0 | \Phi_0 \rangle$$

$$\epsilon_1 = \langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle$$

$$\epsilon_2 = \langle \Phi_0 | V \frac{Q_0}{\epsilon_0 - H_0} V | \Phi_0 \rangle$$

$$\epsilon_3 = \langle \Phi_0 | V \frac{Q_0}{\epsilon_0 - H_0} (V - \langle \Phi_0 | V | \Phi_0 \rangle) \frac{Q_0}{\epsilon_0 - H_0} V | \Phi_0 \rangle \quad (2.31)$$

También esta serie tiene problemas de convergencia en el sentido de que $\epsilon_{n+1} / \epsilon_n$ no necesariamente es menor que 1, Aunque algunos términos superiores compensen a términos de menor orden, el efecto neto puede ser de convergencia, pero esta no es satisfactoria.

Independientemente de lo anterior, la aplicación de este método en física nuclear tiene obstáculos adi-

cionales que se refieren a la naturaleza de las fuerzas nucleares. En efecto, pues los resultados de la dispersión nucleón-nucleón sugieren que el potencial que las describe tiene un carozo duro. Debido a la singularidad, los elementos de matriz de estos potenciales con respecto a funciones no correlacionadas

$$\varphi(ij) \sim \varphi_a(i) \varphi_b(j)$$

son infinitos. Como consecuencia, ni el método de Hartree-Fock ni la teoría de perturbaciones son aplicables.

Sin embargo, esta situación puede salvarse, ya que es posible idear potenciales de carozo suave que, aunque más complejos que los de carozo duro, también ajusten apropiadamente los resultados de dispersión nucleón-nucleón. Entre ellos se cuenta con el de Shao, Bassichis y Lomon (1972), basado en la teoría de intercambio de un bosón, y el de Riihimaki (mencionado en de Shalit y Feshbach(1974)), que es una mezcla de potenciales locales y no locales. De este modo se pueden realizar cálculos de Hartree-Fock, y haciendo correcciones significativas de orden superior, obtener resultados razonablemente buenos en comparación con los valores experimentales para la energía de amarre de varios núcleos.

2.2 El desarrollo de gráficas eslabonadas y el método de Brueckner-Hartree-Fock.

En la sección anterior se ha mencionado que para poder hacer cálculos de Hartree-Fock en física nuclear es

necesario renunciar a potenciales fenomenológicos simples, debido a que estos presentan un carozo duro. Para hacer el método aplicable es necesario idear potenciales con carozo suave que son considerablemente más complicados. Cuando se realizan estos cálculos, se encuentra que es necesario agregar correcciones de orden superior importantes.

Brueckner (1954,1955) propuso un método con el cual se pueden realizar cálculos con potenciales singulares, y que al mismo tiempo incorpora efectos de la interacción residual, dada por el segundo término de la ec. (2.6). A continuación se explican brevemente las bases de dicho método, empezando por el desarrollo de gráficas eslabonadas, que es una alternativa a los métodos perturbativos de Wigner-Brillouin y Rayleigh-Schrödinger.

Recordando la notación de la sección anterior se propone

$$U(\beta) = \exp(\beta H_0) \exp(-\beta H) \quad (2.32)$$

Si Ψ_n son eigenestados del hamiltoniano completo H y Φ_0 es el estado base del hamiltoniano H_0 , se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | U(\beta) | \Phi_0 \rangle &= \sum_n \langle \Phi_0 | \exp(\beta H_0) | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \exp(-\beta H) | \Phi_0 \rangle = \\ &= \sum_n \exp[\beta(\epsilon_0 - \epsilon_n)] |\langle \Phi_0 | \Psi_n \rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.33)$$

en donde ϵ_n es eigenvalor de H para el eigenestado Ψ_n .

Cuando $\beta \rightarrow \infty$, en la suma (2.33) predomina el término pa
ra el cual $n=0$, y si se toma $\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle = 1$, se obtiene que

$$\Delta E = E_0 - \epsilon_0 = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \langle \Phi_0 | U(\beta) | \Phi_0 \rangle. \quad (2.34)$$

Ahora bien, de (2.32) se demuestra que $U(\beta)$ puede escribirse

$$U(\beta) = 1 - \int_0^\beta V(\beta_1) U(\beta_1) d\beta_1, \quad (2.35)$$

en donde

$$V(\beta) = e^{\beta H_0} V e^{-\beta H_0}. \quad (2.36)$$

La ecuación (2.35) se resuelve iterativamente dando lugar a la serie

$$U(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta \dots \int_0^\beta T[V(\beta_n) V(\beta_{n-1}) \dots V(\beta_1)] d\beta_1 \dots d\beta_n, \quad (2.37)$$

en donde $T[]$ es un operador de orden que indica que $\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_1$. Si se usa esta serie para evaluar (2.34), se tendrá, por ejemplo, para términos de segundo orden

$$\langle \Phi_0 | V(\beta_2) V(\beta_1) | \Phi_0 \rangle = \sum_n \langle \Phi_0 | V(\beta_2) | \Phi_n \rangle \langle \Phi_n | V(\beta_1) | \Phi_0 \rangle. \quad (2.38)$$

Se puede tomar la interacción V en segunda cuantización y escribirla de la forma

$$V = \langle k, k_2 | w | k', k_2' \rangle a_{k'}^+ a_{k_2'}^+ a_{k_2} a_k. \quad (2.39)$$

Por convención llamaremos $k = i, j$ para estados ocupados y $k = m, n$ para estados desocupados de Φ_0 . Entonces, para un elemento de matriz $\langle \Phi_n | V(\lambda) | \Phi_i \rangle$ se dará lugar a elementos del tipo $\langle i_j | w | i_j \rangle$ ó $\langle i_j | w | j_i \rangle$ si $n = 0$, ó bien del tipo $\langle m_n | w | i_j \rangle$, $\langle i_n | w | i_j \rangle$, ó $\langle m_i | w | i_j \rangle$ si $n \neq 0$. Para describir todas las posibilidades con mayor comodidad, se acostumbra representar estos elementos de matriz mediante gráficas. Así pues,

$$\langle i_j | w | i_j \rangle \longrightarrow \begin{array}{c} i \quad \text{---} \quad j \\ \circ \quad \text{---} \quad \circ \end{array} \quad (2.40)$$

$$\langle i_j | w | j_i \rangle \longrightarrow \begin{array}{c} j \\ \circ \text{---} \circ \\ i \end{array} \quad (2.41)$$

$$\langle m_n | w | i_j \rangle \longrightarrow \begin{array}{c} i \quad \text{---} \quad j \\ \cup \quad \text{---} \quad \cup \\ m \quad \quad n \end{array} \quad (2.42)$$

$$\langle i_n | w | i_j \rangle \longrightarrow \begin{array}{c} i \quad \text{---} \quad j \\ \cup \quad \text{---} \quad \cup \\ \circ \quad \quad \circ \\ n \end{array} \quad (2.43)$$

$$\langle m_i | w | i_j \rangle \longrightarrow \begin{array}{c} m \quad \quad j \\ \cup \quad \text{---} \quad \cup \\ i \end{array} \quad (2.44)$$

Como se puede ver, las gráficas a la derecha se pueden interpretar de la siguiente forma:

- 1.) La interacción w corresponde a una línea finita punteada.

2.) Los agujeros se indican por líneas continuas que entran a los extremos de la línea punteada.

3.) Las partículas se indican por líneas continuas que salen de los extremos de la línea punteada.

Ahora bien, cuando se combinan varios de estos elementos de matriz, se da lugar a gráficas eslabonadas, como por ejemplo $\langle i j | W(\beta_2) | m n \rangle \langle m n | W(\beta_1) | i j \rangle$:

$$(2.45)$$

ó desligadas, como por ejemplo $\langle i' j' | W(\beta_2) | i' j' \rangle \langle i j | W(\beta_1) | i j \rangle$:

$$(2.46)$$

Goldstone (1957) demostró que para evaluar

$$\mathcal{L}_n \langle \Phi_0 | U(\beta) | \Phi_0 \rangle = \mathcal{L}_n \langle \Phi_0 | x$$

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta \dots \int_0^\beta T[V(\beta_n) \dots V(\beta_1)] d\beta_1 \dots d\beta_n | \Phi_0 \rangle \quad (2.47)$$

basta con tomar los diagramas ligados, lo que se indica por $\langle \rangle_L$, y se obtiene

$$\mathcal{L}_n \langle \Phi_0 | U(\beta) | \Phi_0 \rangle =$$

$$= \langle \Phi_0 | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta \dots \int_0^\beta T[V(\beta_n) \dots V(\beta_1)] d\beta_1 \dots d\beta_n | \Phi_0 \rangle_L, \quad (2.48)$$

en donde ya no es necesario tomar el logaritmo.

Substituyendo la expresión completa para $V(\beta)$ de (2.36) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m \langle \Phi_0 | U(\beta) | \Phi_0 \rangle &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^\beta d\beta_n \dots \int_0^{\beta_{n-1}} d\beta_n x \\ &\quad \times \langle \Phi_0 | V \exp[-\gamma_n (H_0 - \epsilon_0)] V \exp[-\gamma_{n-1} (H_0 - \epsilon_0)] x \dots \\ &\quad \dots x \exp[-\gamma_2 (H_0 - \epsilon_0)] V | \Phi_0 \rangle_L, \end{aligned} \quad (2.49)$$

en donde $\gamma_m \equiv \beta_m - \beta_{m-1}$. Tras integrar apropiadamente en el límite cuando $\beta \rightarrow \infty$, que es el que interesa, se llega a

$$\mathcal{L}_m \langle \Phi_0 | U(\beta) | \Phi_0 \rangle = -\beta \langle \Phi_0 | V \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\epsilon_0 - H_0} V \right)^n | \Phi_0 \rangle_L. \quad (2.50)$$

Substituyendo este último resultado en (2.34) se tiene

$$\Delta E = \langle \Phi_0 | V \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\epsilon_0 - H_0} V \right)^n | \Phi_0 \rangle_L, \quad (2.51)$$

que es una expresión exacta, y se llama "desarrollo de gráficas eslabonadas" para ΔE .

Entre mejor sea el potencial de partícula independiente V_i en la ec.(2.6), menor será el valor de ΔE . Así pues, se demuestra que si V_i se escoge en forma auto consistente como el potencial de Hartree-Fock que aparece en la ec.(2.15)

$$U_i = \sum_{j=1}^A [(j m | V | j i) - (m j | V | j i)], \quad (2.52)$$

en el desarrollo de gráficas eslabonadas se cancelan los términos de la forma

(2.53)

con los de la forma

(2.54)

en donde }--x representa dispersiones de partícula independiente en el potencial U_i .

Esto sugiere buscar potenciales tales que produzcan más cancelaciones en el desarrollo de gráficas eslabonadas, reduciendo así δE . El método de Brueckner-Hartree-Fock y el de Brueckner-Hartree-Fock-Renormalizado se pueden interpretar como renormalizaciones al potencial tendientes a conseguir este objetivo.

Se pasa ahora a exponer que es la matriz de reacción, la cual permite llevar a la práctica esta idea.

La teoría de Brueckner parte de la observación de que en (2.51) existe un conjunto de gráficas que se puede agrupar en forma casi directa. Dicho conjunto es el de las gráficas llamadas de "escalera" que corresponden a las correlaciones de dos cuerpos y tienen la forma

$$i \circ \text{---} \circ j, \quad i \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} j, \quad i \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} j \quad (2.55)$$

y sus correspondientes elementos de matriz antisimétricos, como por ejemplo

$$\begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \\ i \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \dots \quad (2.56)$$

Para entender esto claramente, se define

$$\langle k, k_2 | v | k_3, k_4 \rangle \equiv \langle k, k_2 | w | k_3, k_4 \rangle - \langle k, k_2 | w | k_4, k_3 \rangle \quad (2.57)$$

y se escribe la suma ΔE_{esc} de estas gráficas:

$$\begin{aligned} \Delta E_{esc} = & \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle ij | v | ij \rangle + \frac{1}{4} \sum_{ijmn} |\langle ij | v | mn \rangle|^2 \frac{1}{\epsilon_i + \epsilon_j - \epsilon_m - \epsilon_n} + \\ & + \frac{1}{8} \sum_{ij, mn, m'n'} \langle ij | v | m'n' \rangle \frac{1}{\epsilon_i + \epsilon_j - \epsilon_m - \epsilon_{m'}} \langle m'n' | v | mn \rangle \times \\ & \times \frac{1}{\epsilon_{m'} + \epsilon_n - \epsilon_m - \epsilon_n} \langle mn | v | ij \rangle + \dots \quad (2.58) \end{aligned}$$

Se puede ver claramente que si se define una matriz G cuyos elementos están dados por

$$\langle k\ell | G | ij \rangle = \langle k\ell | v | ij \rangle + \frac{1}{2} \sum_{mn} \langle k\ell | v | ij \rangle \frac{1}{\epsilon_i + \epsilon_j - \epsilon_m - \epsilon_n} \langle mn | G | ij \rangle \quad (2.59)$$

para k y ℓ cualesquiera, entonces ΔE_{esc} podrá escribirse simplemente como

$$\Delta E_{esc} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle ij | G | ij \rangle. \quad (2.60)$$

En la literatura se conoce a G como la matriz de reacción de Brueckner, ó simplemente como la matriz de reacción.

Como operador toma la forma

$$G = v + v \frac{Q_F}{\epsilon_0 - H_0} G, \quad (2.61)$$

en donde Q_F proyecta fuera del mar de Fermi los estados ocupados en Φ_0 .

Ahora bien, si para una función de onda no correlacionada de dos partículas $\varphi(ij) = \varphi(i) \varphi(j)$ se tiene que

$$H_0 \varphi(ij) = \epsilon_0 \varphi(ij), \quad (2.62)$$

y se define

$$\mathcal{K}_{ij} \equiv v^{-1} G \varphi(ij) = \varphi(ij) + \frac{Q_F}{\epsilon_0 - H_0} G \varphi(ij), \quad (2.63)$$

aplicando el operador $(\epsilon_n - H_0)$ sobre (2.61) y reacomodando términos se obtiene

$$(H_0 + Q_r v) \psi(ij) = \epsilon_n \psi(ij) \quad (2.64)$$

que no es más que la ecuación de Bethe-Goldstone. Así pues, el problema de sumar la serie infinita (2.55) para ΔE_{esc} se transforma en el de resolver la ec.(2.61). Una vez que se encuentre la solución $\psi(ij)$ se podrá calcular

$$\Delta E_{esc} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle \psi(ij) | G | \psi(ij) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ij} \langle \psi(ij) | v | \psi(ij) \rangle. \quad (2.65)$$

De aquí que la suma infinita de las gráficas de escalera (2.55) se acostumbra escribir como una sola gráfica con una línea ondulada en lugar de punteada



$$\text{Wavy line} = \text{Dashed line} + \text{Dashed line with 2 loops} + \text{Dashed line with 3 loops} + \dots \quad (2.66)$$

y esto se interpreta como el elemento de matriz $\langle i_j | G | i_j \rangle$.

La primera ventaja que se sigue de la adopción de la matriz G es que a pesar de que se consideren interacciones nucleón-nucleón con carozo duro, sus elementos de matriz pueden ser finitos. En efecto, pues el efecto de un potencial de carozo duro es dispersar un par de nucleones a estados de momento alto. Lo que se consigue al substituir G por v es sumar todas estas dispersiones para un par dado proporcionando una interacción efectiva que las toma en cuenta. La substitución de la que se

habla, no es estricta, por supuesto, pues si se tomaran gráficas de escalera para G , como por ejemplo

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots, \quad (2.67)$$

se estarían repitiendo interacciones ya consideradas en .

En lo que se refiere al cálculo del potencial de partícula independiente aparece una ventaja adicional, pues si se escoge

$$U_i = \sum_{j=1}^A \langle i j | G(\omega) | i j \rangle, \quad (2.68)$$

en donde $\omega = \epsilon_i + \epsilon_j$ es la suma de las dos energías de partícula independiente, se cancelan para A^2 términos de la forma

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \gamma \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \times, \quad (2.69)$$

que ahora quedan incorporados al potencial.

Estas ventajas, por otra parte, deben pagarse con la complicación que traen a la autoconsistencia, pues ahora toma la siguiente forma: Se empieza por escoger un conjunto completo de funciones de onda de partícula independiente, y con ellas se calculan los elementos de matriz de G . Con ellos se construye un potencial según

la ec.(2.68), y se encuentran las funciones de onda para este nuevo potencial. Con estas se reinicia el proceso hasta conseguir la convergencia.

El procedimiento se puede mejorar aún si se pide que exista autoconsistencia en la energía inicial ω con que se calculan los elementos de G (Bethe et al 1963). Si la energía total está dada por

$$E = \sum_{i=1}^A \langle i | T | i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A \langle i j | G(\epsilon_i + \epsilon_j) | i j \rangle, \quad (2.70)$$

en donde

$$\epsilon_i = \langle i | T | i \rangle + \sum_{j=1}^A \langle i j | G(\epsilon_i + \epsilon_j) | i j \rangle, \quad (2.71)$$

se cancelan diagramas de la forma



En resumen, el método de Brueckner-Hartree-Fock permite realizar cálculos autoconsistentes en física nuclear, tomando en cuenta las correlaciones de corto alcance entre dos partículas. Sin embargo, deben hacerse un par de advertencias que conviene tener en mente en el futuro. En primer lugar, no se ha demostrado que el desarrollo de gráficas eslabonadas efectivamente converja. En segundo lugar, también existen problemas de convergencia debidos a la componente tensorial de las fuerzas

nucleares, los cuales no se han resuelto.

El interés que se tiene en la exposición anterior proviene de la relación entre la energía total (2.76) y las energías de partícula independiente (2.71). Por lo tanto conviene estudiar su validez; propósito de la siguiente sección.

2.3 Reacciones de expulsión (knock-out) y la energía de amarre total.

En los cálculos autoconsistentes descritos anteriormente, se parte de una forma u otra de un potencial entre dos nucleones, el cual debe ajustarse a resultados experimentales. Como un producto final se espera encontrar la energía de amarre total del núcleo, la cual también se puede comparar con valores experimentales. Se puede considerar que la teoría es buena en la medida en que ambos extremos sean consistentes con las observaciones. Pero además, como un producto intermedio ha aparecido un potencial autoconsistente, y con él, niveles de energía de partícula independiente. Aunque la estructura de capas, que se asocia con estos, se ha reconocido ampliamente desde el trabajo de Mayer y Jensen (1955), es necesario revisar hasta que límites se puede llevar su validez, conscientes de que para el propósito de este trabajo basta considerar al núcleo en su estado base.

Así pues, en esta sección se propone estudiar hasta que punto es válido el concepto de energía de partícula independiente para nucleones ligados profundamente,

y ver muy específicamente si es posible encontrar la energía de amarre total mediante una relación del tipo (2.70)

$$E = \sum_{i=1}^A (T_i + \frac{1}{2} V_i) = \sum_{i=1}^A (\epsilon_i - \frac{1}{2} V_i). \quad (2.73)$$

Las herramientas experimentales que se pueden emplear para estudiar estos problemas, son las llamadas reacciones cuasielásticas de expulsión (knock-out). Estas se han realizado con protones a energías del orden de 400 MeV (James et al 1969a,1969b) y más recientemente con electrones a energías que varían entre los 500 y los 2500 MeV (Bernheim et al 1974, Hiramatsu et al 1973, Nakamura et al 1974, Kölberg et al 1974, Antoufiev et al 1972). Jacob y Maris han publicado excelentes artículos de revisión sobre el tema (Jacob y Maris 1966,1973). Se trata en cada caso de reacciones directas del tipo (p,2p) ó (e,e'p) en que se expulsa a un nucleón del núcleo que se desea estudiar dejándolo en un estado de un agujero. De este modo es posible obtener información sobre el estado en que se encontraba el nucleón expulsado.

Dieperink y de Forest (1975) han publicado un artículo de revisión sumamente claro y conciso sobre las reacciones cuasielásticas y su relación con la teoría de muchos cuerpos, en la cual se basa la exposición que sigue.

Por comodidad, se supondrá en adelante que el proyectil incidente es un electrón. En la figura 2.1 se muestra el diagrama asociado a esta reacción. De este (ignorando spin e isospin), se puede obtener en forma in-

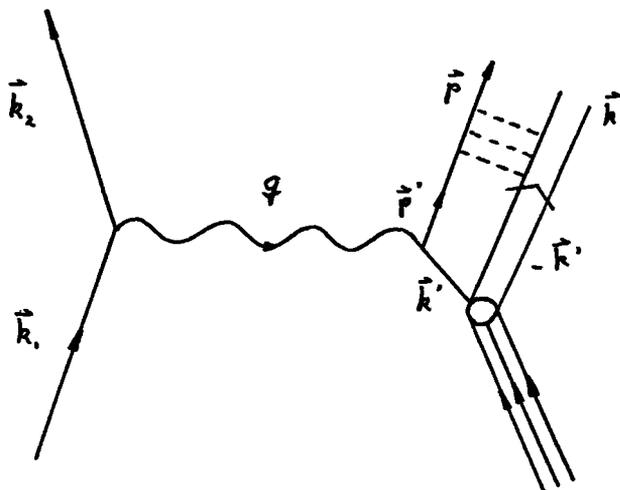


Figura 2.1. Diagrama de una reacción de expulsión.

Suponiendo que el proyectil es un electrón, \vec{k}_1 es el momento del electrón incidente, \vec{k}_2 el del electrón saliente, \vec{q} el momento transferido $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$, \vec{p} el momento del nucleón expulsado y \vec{k} el momento de retroceso del núcleo residual. Las líneas punteadas indican que en el estado final pueden haber interacciones que den lugar a un "momento distorsionado".

tuitiva la sección eficaz de la reacción, a saber

$$\frac{d^4\sigma}{d\varepsilon_2 d\varepsilon_p d\Omega_2 d\Omega_e} = K \sum_f |\hat{T}_{ep} M_{fi}|^2 \times \delta[\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_p - (E_{A-1}^f - E_A)] \quad (2.74)$$

Aquí ε_1 , ε_2 y ε_p son las energías asociadas a los momentos \hat{k}_1 , \hat{k}_2 y \hat{p} del diagrama, E_A la energía de amarre del núcleo blanco y E_{A-1}^f son las energías de los posibles estados finales del núcleo residual. \hat{T}_{ep} es la amplitud de dispersión entre electrón y protón fuera de la capa de energía. Las M_{fi} son los elementos de matriz entre el estado inicial y el final del núcleo que contienen la información sobre la estructura nuclear. Para extraerla, se definen las coordenadas relativas $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{A-1}$, respecto al centro de masa \vec{R}_{A-1} del núcleo residual, y se toma

$$\begin{aligned} M_{fi}(\vec{p}, \vec{q}) &= (A)^{1/2} \langle \psi_{A-1}^f(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_{A-1}) \chi_{p'}(\vec{r}'_A) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{R}_A) | x \\ &\times | \exp(i\vec{p} \cdot \vec{r}_A) \psi_A(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \rangle = \\ &= \int d\vec{r}'_A \chi_{p'}^*(\vec{r}'_A) \exp(i\frac{A-1}{A}\vec{q} \cdot \vec{r}'_A) \Phi_{fi}(\vec{r}'_A), \end{aligned} \quad (2.75)$$

en donde

$$\Phi_{fi}(\vec{r}'_A) = A^{1/2} \langle \psi_{A-1}^f(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_{A-1}) | \psi_A(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \rangle \quad (2.76)$$

es la llamada integral de traslape. Con objeto de simplificar el problema, se supone que la función de onda del protón expulsado se puede representar mediante una onda

plana

$$\chi_{p'}(\vec{r}'_A) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \exp(i\vec{p}' \cdot \vec{r}'_A) \quad (2.77)$$

en donde $\vec{p}' = \vec{p} - \vec{q}/A$. En estas condiciones se puede escribir

$$M_{fi}(\vec{p}, \vec{q}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\vec{r}'_A \exp[i(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{r}'_A] \Phi_{fi}(\vec{r}'_A) \equiv \tilde{\Phi}_{fi}(\vec{p} - \vec{q}). \quad (2.78)$$

O sea que el elemento de matriz de interés es la transformada de Fourier de la integral de traslape. En estos términos, se reescribe la sección eficaz como

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_2 d\epsilon_p d\Omega_2 d\Omega_p} = \left. \frac{d\sigma}{dp} \right|_{\epsilon_p} P(\vec{k}, \epsilon), \quad (2.79)$$

en donde $\left. \frac{d\sigma}{dp} \right|_{\epsilon_p}$ es la sección de dispersión electrón-protón fuera de la capa de energía, y toda la información sobre la estructura nuclear está en

$$P(\vec{k}, \epsilon) = \sum_f |\tilde{\Phi}_{fi}(\vec{k})|^2 S[E - (\epsilon_{A-1}^f - \epsilon_A)], \quad (2.80)$$

que sólo depende del momento $\vec{k} = \vec{p} - \vec{q}$ transferido al núcleo residual, y de la energía $E = \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_p - \epsilon_R$. Esta función, conocida como la función espectral es equivalente a

$$P(\vec{k}, \epsilon) = \langle \Psi_A | a_{\vec{k}}^+ S(E - \epsilon_R - H + \epsilon_A) a_{\vec{k}} | \Psi_A \rangle, \quad (2.80a)$$

como puede comprobarse.

Si fuera estrictamente válido un modelo de partícula independiente, suponiendo que las funciones de onda estuvieran dadas por $\psi_i(\vec{r})$, la función espectral tomaría la forma

$$P(\vec{k}, E) = \sum_{i=1}^A |\tilde{\psi}_i(\vec{k})|^2 \delta(E - \epsilon_i), \quad (2.81)$$

representando así una suma de niveles discretos. En la práctica se puede probar la consistencia del modelo de partícula independiente calculando la distribución de carga a partir de la parte radial de la función de onda. En este caso se calcula para el protón expulsado una función de onda realista basada en el potencial del modelo óptico. Así, ha sido posible ajustar con éxito distribuciones de carga obtenidas de experimentos de dispersión elástica de electrones (Elton y Swift 1967).

Por otro lado, sin embargo, la función espectral está lejos de ser una suma de niveles discretos como aparece en la ec.(2.81). Como ejemplo, en la figura 2.2 se muestra el espectro de la energía faltante para la reacción $^{12}\text{C}(e, e'p)$ que en el modelo de partícula independiente se describe por la configuración $(1s_{1/2})^4 (1p_{3/2})^8$ (Bernheim et al 1974).

Por un lado, la distribución de momentos en función de la energía de retroceso del núcleo residual se puede describir bien mediante el modelo de partícula independiente, como se muestra en la figura 2.3 (Bernheim et al 1974). Por el otro, el modelo de partícula indepen

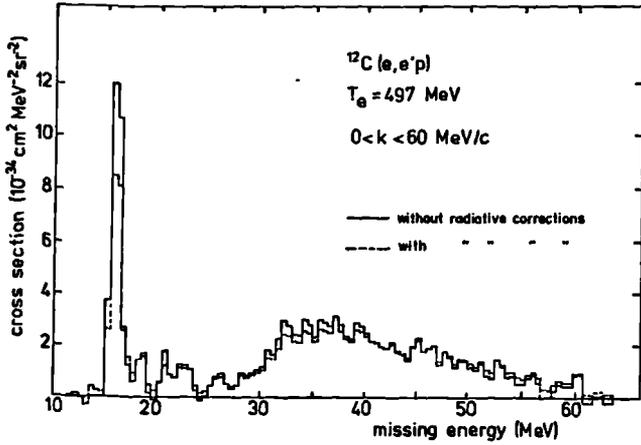


Figura 2.2. Espectro de energía faltante para la reacción $^{12}\text{C}(e, e'p)$ (tomada de Bernheim et al 1974).

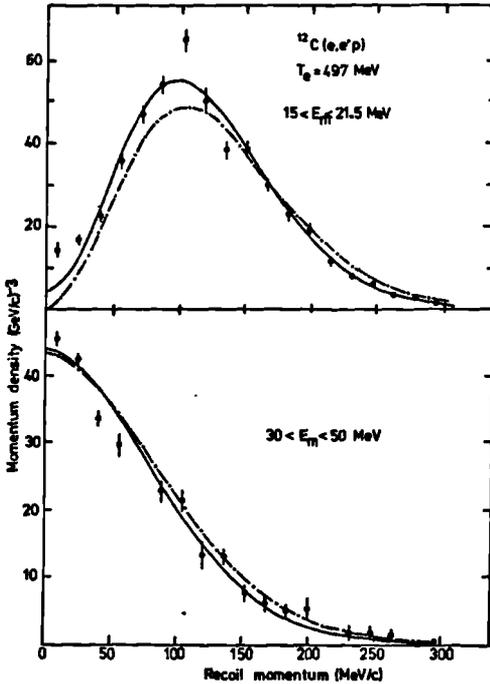


Figura 2.3. Distribución de momentos de retroceso para la reacción $^{12}\text{C}(e, e'p)$. Se muestran dos regiones distintas de la energía de remoción E_m , que corresponden a las capas $1s$ y $1p$. La línea sólida corresponde a cálculos de onda distorsionada y la punteada a cálculos de onda plana.

te no puede describir la anchura de los picos, la que se debe a que las interacciones residuales impiden que el núcleo quede en un estado puro de un agujero. Tomando es to en cuenta conviene generalizar la función espectral. Una forma de hacerlo es escribiéndola en términos de un conjunto completo de orbitales ortogonales:

$$P(\vec{k}, E) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} P_{\alpha\beta}(E) \psi_{\alpha}^*(\vec{k}) \psi_{\beta}(\vec{k}). \quad (2.82)$$

en donde

$$P_{\alpha\beta}(E) \equiv P_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta} \delta_{\alpha\beta} = \langle \psi_{\alpha} | a_{\alpha}^{\dagger} \delta(E-H+E_{\alpha}) a_{\beta} | \psi_{\alpha} \rangle. \quad (2.83)$$

De este modo es posible aproximarse al modelo de partícula independiente en la medida en que se consiga diagonalizar $P_{\alpha\beta}(E)$. Así pues

$$P(\vec{k}, E) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} P_{\alpha\alpha}(E) |\psi_{\alpha}(\vec{k})|^2 \quad (2.84)$$

viene a ser semejante a la ec.(2.81), pero ahora la suma es infinita, y $P_{\alpha\alpha}(E)$ no es necesariamente una δ de Dirac.

En la figura 2.4 se muestran algunas funciones extraídas del experimento (James et al 1969a). Inmediatamente se observan dos aspectos importantes. En primer lugar, los picos se ensanchan gradualmente a medida que los niveles que se estudian son más profundos. De acuerdo con esto, la validéz del modelo de partícula independiente se va perdiendo. En la figura 2.5 (Jacob y Maris

1973) se muestra una recopilación de las funciones para varios núcleos. Puede verse que la anchura aumenta con el número de partículas, hasta que el máximo no puede identificarse más. En segundo lugar, volviendo a la figura 2.4, se observa una pequeña ocupación en niveles que se esperaría que estuvieran vacíos para el estado base, de acuerdo con el modelo de partícula independiente. Esto se presenta en el caso del nivel $2s$ para el ^{28}Si .

Ahora bien, se puede pensar en las funciones como distribuciones normalizadas a la probabilidad de ocupación para cada nivel

$$\rho_{\alpha} \equiv \int dE \mathcal{P}_{\alpha\alpha}(E) = \langle \Psi_A | a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} | \Psi_A \rangle. \quad (2.85)$$

Entonces se define la energía de remoción de un nucleón en el estado α como el primer momento de la distribución

$$\epsilon_{\alpha} \equiv \frac{1}{\rho_{\alpha}} \int dE (-E) \mathcal{P}_{\alpha\alpha}(E) = - \frac{1}{\rho_{\alpha}} \langle \Psi_A | [a_{\alpha}^{\dagger}, H] a_{\alpha} | \Psi_A \rangle, \quad (2.86)$$

que es un valor experimental que se ocurre comparar con las energías de partícula independiente. Para establecer esta equivalencia, sin embargo, hay que proceder con cuidado como se verá más adelante. Es importante observar que las energías de remoción así definidas son cantidades híbridas en el sentido de que si bien se obtienen de resultados experimentales, para extraerlas es necesario

recurrir a un modelo de partícula independiente como se ve en la ec.(2.82) (Friedman 1975).

De las definiciones (2.85) y (2.86) se siguen dos resultados interesantes. De la primera se observa que

$$\int d\bar{k} \int dE P(\bar{k}, E) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} = A, \quad (2.87)$$

de modo que el método que se emplee para extraer $P(\bar{k}, E)$ de la sección eficaz podría ponerse a prueba con esta relación. Sin embargo, en la práctica es difícil calcular (2.87) debido a que es necesario conocer la sección eficaz con mucha precisión. De la ec.(2.86), por otro lado, es posible demostrar que si el hamiltoniano $H = T + V$ sólo tiene interacciones de dos cuerpos, entonces

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda} = \langle \psi_A | T | \psi_A \rangle + 2 \langle \psi_A | V | \psi_A \rangle, \quad (2.88)$$

de modo que la energía total del sistema estará dada por

$$E_A = \frac{1}{2} \langle \psi_A | T | \psi_A \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}. \quad (2.89)$$

Esta última regla de suma es de la forma de la obtenida por la teoría de Hartree-Fock y de Brueckner-Hartree-Fock, como se ve en la ec.(2.73). Koltun (1974) ha demostrado que efectivamente las energías de remoción corresponden a energías de niveles de partícula indepen-

diente del cálculo de Brueckner-Hartree-Fock. Cuando en el cálculo de las energías de remoción se desea incluir una corrección debida a interacciones residuales, deben considerarse esencialmente las mismas gráficas que en el caso de Brueckner-Hartree-Fock. Así pues, si en Brueckner-Hartree-Fock se considera la gráfica , al calcular las energías de remoción debe considerarse equivalentemente . Conviene enfatizar que para obtener (2.89) se ha supuesto que sólo existen interacciones de dos cuerpos, y que si se consideraran interacciones de tres y más cuerpos, se llegaría a un resultado distinto.

Una forma alternativa de escribir la ec.(2.89), en términos de la función espectral es

$$E_A = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(\frac{k^2}{2m} - E \right) P(\vec{k}, E) \quad (2.90)$$

en donde $E = \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_p = E_{A-1}^f - E_A + E_R$. Conviene señalar que en la práctica es preferible tomar $E = \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_p - E_R = E_{A-1}^f - E_A$, en cuyo caso

$$E_A = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left(\frac{A-2}{A-1} \frac{k^2}{2m} - E \right), \quad (2.91)$$

(Dieperink y de Forest 1974).

Varios autores han calculado la energía de amarre por protón E_x / Z empleando en la ec.(2.90) las funciones espectrales obtenidas de reacciones $(p, 2p)$ y $(e, e'p)$, y haciendo las correcciones de energía de Coulomb apropiadas.

El primero fué Koltun (1972) quién empleó resultados de reacciones (p,2p) y obtuvo un acuerdo razonable con los valores experimentales. Cuantitativamente esto significa que obtuvo una energía de amarre 1.7% mayor para ^{12}C , 5% mayor para ^{40}Ca , 15.2% menor para ^{120}Sn , y 18% menor para ^{208}Pb . Posteriormente, un grupo en Saclay (Bernheim et al 1974) empleó sus resultados de la reacción $^{12}\text{C}(e,e'p)$, con la cual se obtienen funciones espectrales más limpias, y encontró que la regla de suma (2.90) sólo puede dar razón del 60% de la energía de amarre.

Este último resultado es muy importante para el propósito de este trabajo, pues dice que las energías de remoción definidas según (2.86) no pueden emplearse en una relación del tipo (2.73), tal como lo indica la teoría de Brueckner-Hartree-Fock, para obtener la energía de amarre total.

Pueden haber varias causas que provoquen la falla observada. Una que puede parecer interesante es que sea necesario considerar fuerzas de tres cuerpos en el hamiltoniano, en cuyo caso la ec.(2.90) perdería su validez. Sin embargo, esta no es más que una especulación, y no se han hecho cálculos en esta dirección, principalmente por que se prefiere agotar antes otras posibilidades más simples.

Otra posibilidad, que parece bastante razonable, es que al extraer la función espectral de entre el fondo no se haya distinguido la ocupación, debil pero importante, de algunos niveles sobre el nivel de Fermi. En la si

guiente sección se explora esta posibilidad. Por otra parte, es imposible ignorar el hecho de que la anchura de las funciones espectrales para los niveles más profundos es tan grande, que extraer alguna información de ellos es muy difícil. En este caso deben distinguirse dos posibilidades: Por un lado, que el modelo de partícula independiente simplemente pierda su validez para los niveles profundos. Por el otro, que aunque conserve su validez, haya efectos de dispersión múltiple que enmascaren los niveles de partícula independiente. Si es así, no debe esperarse que sea posible probar la validez de la ec.(2.73) por este método.

Reconociendo las limitaciones antes señaladas en el modelo de partícula independiente, se puede definir una energía de reacomodo, que viene a ser una medida de éstas. Se empieza por definir la energía de separación, que para protones es

$$\mathcal{E}_s \equiv E(A, Z) - E(A-1, Z-1) \quad (2.92a)$$

y para neutrones

$$\mathcal{E}_s = E(A, Z) - E(A-1, Z). \quad (2.92b)$$

Si la energía de remoción del nivel de Fermi es \mathcal{E}_F (la cual coincide con la energía de partícula independiente), se define la energía de reacomodo \mathcal{E}_r como

$$\mathcal{E}_r \equiv \mathcal{E}_s - \mathcal{E}_F. \quad (2.93)$$

La razón por la cual esta cantidad sirve para evaluar las limitaciones de un modelo de partícula independiente es que desaparece cuando en el hamiltoniano (2.6) las interacciones residuales tienden a cero (Friedman 1975).

Si se calculan las energías de amarre y el nivel de Fermi a partir de la teoría de Brueckner-Hartree-Fock, se encuentra que la energía de reacomodo ϵ_v tiene un valor considerable que puede variar desde 6 MeV, como en ^{16}O , hasta 13 MeV, como en el ^{32}S (Becker 1979a, 1979b).

2.4 El método de Brueckner-Hartree-Fock-Renormalizado.

Bajo el punto de vista de la teoría de muchos cuerpos, existe todavía la posibilidad de que, al incluir en el potencial de partícula independiente más términos del desarrollo de gráficas eslabonadas, desaparezcan los problemas señalados en la sección anterior. Brandow (1970) ha propuesto que se consideren ciertas interacciones que tomen en cuenta la autocenergía, y que pueden incluirse en el potencial de partícula independiente. Esto equivale a realizar una renormalización del potencial, cuyo efecto neto es vaciar parcialmente los niveles ocupados; es decir, que la probabilidad de ocupación f_α resulta ahora ser menor que 1.

El formalismo de Brandow es bastante complejo, lo que hace difícil llevarlo a la práctica. Sin embargo, se ha desarrollado una versión simplificada conocida como método de Brueckner-Hartree-Fock-Renormalizado (Becker 1970a, 1970b, Becker y Fatterson 1971, Davies y Mc. Carthy

1971, Becker, Davies y Fatterson 1974).

En este se consigue cancelar dentro del desarrollo de gráficas eslabonadas diagramas del tipo



incluyendo simplemente las probabilidades de ocupación en la definición del potencial autoconsistente. Así pues, si se toma $\omega = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta$, en donde ϵ_α y ϵ_β son las energías de partícula independiente de los estados α y β , se demuestra que las probabilidades de ocupación están dadas por

$$f_\alpha = \left[1 - \sum_{\beta=1}^A \langle \alpha\beta | \frac{\partial G(\omega)}{\partial \omega} | \alpha\beta \rangle f_\beta \right]^{-1} \quad (2.95)$$

y el potencial autoconsistente para la partícula en el estado α toma la forma

$$U_\alpha = \sum_{\beta=1}^A \langle \alpha\beta | G(\omega) | \alpha\beta \rangle f_\beta \quad (2.96)$$

Las energías de partícula independiente serán ahora

$$\epsilon_\alpha = \langle \alpha | T | \alpha \rangle + \sum_{\beta=1}^A \langle \alpha\beta | G(\omega) | \alpha\beta \rangle f_\beta. \quad (2.97)$$

pero un cambio de suma importancia con respecto a los formalismos descritos anteriormente es que ahora la energía de amarre total estará dada por

$$E_A = \sum_{\alpha=1}^A \left[\langle \alpha | T | \alpha \rangle + \left(1 - \frac{1}{2} f_{\alpha}\right) U_{\alpha} \right]. \quad (2.98)$$

Si se define un factor de vaciamiento $d_{\alpha} = 1 - f_{\alpha}$ se podrá escribir alternativamente

$$E_A = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^A \left[\langle \alpha | T | \alpha \rangle + \epsilon_{\alpha} \right] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^A d_{\alpha} U_{\alpha}. \quad (2.99)$$

Las energías de partícula independiente calculadas por este método corresponden a las energías de remoción definidas en la sección anterior (Koltun 1974).

La renormalización complica más aún el problema, pues además de la doble autoconsistencia que se pedía antes (para el potencial y para la energía ω), ahora debe incluirse una autoconsistencia en las probabilidades de ocupación.

Puede observarse que si $f_{\alpha} = 1$ para todos los estados α bajo el nivel de Fermi, se recuperan las ecuaciones de Brueckner-Hartree-Fock.

La primera ventaja que se obtiene es que la energía de reacomodo definida en la ec.(2.93), se cancela en este formalismo. Esto se ha demostrado tanto numéricamente (Becker 1970a, 1970b), como analíticamente (Becker y Patterson 1971). En este último caso se ha supuesto que el cambio en la parte radial de las funciones de onda de los estados de partícula independiente, cuando se pasa de un núcleo con A nucleones a uno con $A \pm 1$ nucleones es

despreciable. Este resultado indica que mediante la renormalización se ha tomado en cuenta apropiadamente una buena parte de las interacciones residuales.

Se han realizado cálculos detallados con este método para ^{16}O , ^{40}Ca , ^{48}Ca , y ^{208}Pb (Davies y Mc. Carthy 1971) y para ^4He y ^{16}O incluyendo una corrección de centro de masa (Becker, Davies y Fatterson 1974). En términos generales sus resultados se pueden resumir en los siguientes puntos:

1.) Las probabilidades de ocupación de los estados que están bajo el nivel de Fermi son del orden de 0.85 ($\alpha_d = 0.15$) en forma prácticamente independiente del estado de que se trate.

2.) Los niveles de partícula independiente están menos ligados que en el caso de Brueckner-Hartree-Fock.

3.) No ha sido posible ajustar simultáneamente las energías de amarre de los núcleos y sus radios. Si se ajustan las primeras, se obtienen radios demasiado pequeños, y si se ajustan los segundos, no se obtiene suficiente energía de amarre.

De este último punto se ve que el formalismo de Brueckner-Hartree-Fock-Renormalizado tampoco es completamente satisfactorio. Sin embargo, por el hecho de que al menos en teoría permite una identificación directa entre las energías de remoción y los niveles de partícula independiente, y además la energía de reacondo se cancela

la, se le adoptará para el resto de este trabajo, conscientes del riesgo que se corre. Concretamente, lo que se adoptará es la relación entre los niveles de partícula independiente dados por la ec.(2.97) y la energía de amarre total dada por la ec.(2.99).

Para finalizar este capítulo debe agregarse algo que, si bien no está en línea con este trabajo conviene tener presente.

Existe un método alternativo en la teoría de muchos cuerpos conocido como Hartree-Fock dependiente de la densidad, que es otra generalización del método de Brueckner-Hartree-Fock, y que ha dado resultados excelentes para núcleos finitos (Vautherin y Brink 1972, Campi y Sprung 1972). En este formalismo no se toman en cuenta los efectos de muchos cuerpos de ordenes superiores bajo un punto de vista fundamental, sino que se simulan tomando a las interacciones residuales como dependientes de la densidad. Las energías de partícula independiente que se obtienen también pueden identificarse con las energías de remoción, y la energía total aparece de la siguiente forma

$$E_A = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^A [\langle \alpha | T | \alpha \rangle + \epsilon_\alpha] + \Delta E_{DD} \quad (2.100)$$

en donde ΔE_{DD} es una corrección debida a la dependencia de la densidad de la interacción residual. Con este método ha sido posible ajustar simultáneamente las energías de amarre y las distribuciones de carga.

Existe un trabajo del que se espera obtener una fórmula de masas nucleares siguiendo esta línea (Tondeur 1978), aunque los cálculos de dicha fórmula de masas son en gran parte numéricos, y no se ha dado una expresión analítica del tipo de la que se busca en este trabajo.

CAPITULO III

NIVELES DE ENERGÍA DE PARTICULA INDEPENDIENTE

En el capítulo anterior quedó establecido el concepto de potencial autoconsistente y se mostró que, a partir de los niveles de energía de partícula independiente que genera, es posible obtener la energía de amarre total del núcleo. Una forma como puede obtenerse información sobre este potencial es mediante reacciones nucleares, en las que se le puede identificar con la parte real del potencial óptico. Esta última afirmación ha sido aclarada por Dover y Van Giai (1972), por ejemplo, quienes demostraron la equivalencia entre ambos potenciales basándose en cálculos autoconsistentes de Vautherin y Brink (1970, 1972). El problema también ha sido estudiado bajo el punto de vista formal por Vinh Mau (1970) y por Lejeune y Mahaux (1976).

Así pues, en este capítulo se propone imitar el potencial autoconsistente mediante un potencial fenomenológico cuyas propiedades puedan determinarse por los parámetros del potencial óptico. Existen dos razones para proceder de este modo. Por un lado, se desea contar con un potencial suficientemente general como para que sea posible aplicarlo sobre una gran extensión de la tabla nuclear, y el potencial óptico ciertamente cumple con esta pro-

piedad. Por otro lado, substituyendo al potencial auto-consistente por un potencial fenomenológico se facilitará la tarea de obtener expresiones analíticas para los niveles de energía. Esto tiene una importancia fundamental en este trabajo, puesto que sólo de este modo podrá exhibirse la energía de amarre total mediante una fórmula del tipo de la de Bethe-Weizsäcker-Bacher.

Para implementar esta idea en la obtención de los niveles de energía, se empezará por encontrar la conexión que existe entre la parte real del potencial óptico y el potencial del modelo de partícula independiente. Dicha conexión podrá obtenerse partiendo de la ecuación de Schrödinger con un potencial no local, y aplicando la aproximación de masa efectiva de acuerdo con el trabajo de Frahn y Lemmer (1957a, 1957b)(sección 3.1).

Posteriormente se pasará a obtener expresiones analíticas para los niveles de energía empleando dos potenciales distintos:

a) Un potencial de oscilador armónico al que se le agrega un término que rompe la degeneración en el momento angular. Este término es el mismo que ha sido empleado por Nilsson et al (1969).

b) Un conjunto de pozos cuadrados infinitos de radio variable, con los que se pretende simular a un pozo finito con bordes redondeados.

3.1 Conexión entre el modelo de capas y el
modelo óptico fenomenológico.

Se supondrá que los estados de partícula independiente $\bar{\Phi}(\vec{r})$ deben satisfacer una ecuación de Schrödinger con un potencial no local, que en el espacio de configuración toma la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \bar{\Phi}(\vec{r}) + \int K_n(\vec{r}, \vec{r}') \bar{\Phi}(\vec{r}') d\vec{r}' = E \bar{\Phi}(\vec{r}). \quad (3.1a)$$

La no localidad aparece en forma natural en la teoría de muchos cuerpos, como se vió en la ec.(2.18) del capítulo anterior, de la antisimetrización de la función de onda. Conviene agregar que la no localidad del potencial puede surgir también del carácter de intercambio y la dependencia de la velocidad de las interacciones nucleares (Negels(1970) y Manweiler(1975)).

Si se desea incluir un potencial de Coulomb $V_c(\vec{r})$, esto podrá hacerse en forma independiente y se tendrá

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \bar{\Phi}(\vec{r}) + V_c(\vec{r}) \bar{\Phi}(\vec{r}) + \int K_n(\vec{r}, \vec{r}') \bar{\Phi}(\vec{r}') d\vec{r}' = E \bar{\Phi}(\vec{r}). \quad (3.1b)$$

La razón es que la fuerza de Coulomb no es una interacción de intercambio en el mismo sentido que la interacción nucleón-nucleón en un núcleo complejo, por lo que da lugar predominantemente a un potencial local.

Para determinar la forma general que debe tener el kernel $K_n(\vec{r}, \vec{r}')$ se hacen las siguientes suposiciones acerca de éste:

- a) Es hermiteano, ó equivalentemente, si es real,

simétrico en su dependencia en \vec{r} y \vec{r}' .

b) La no localidad no es muy grande, ya que sabemos que los potenciales locales dan resultados que se aproximan a los experimentales.

c) En materia nuclear infinita, el kernel debe ser invariante ante translaciones.

Así pues, puede proponerse que

$$K_N(\vec{r}, \vec{r}') = W_N\left(\frac{\vec{r} + \vec{r}'}{2}\right) f_a(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.2)$$

en donde $f_a(\vec{r} - \vec{r}')$ es tal que

$$f_a(\vec{s}) = f_a(|\vec{s}|) \quad (3.3)$$

y

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_a(\vec{s}) = \delta(\vec{s}), \quad (3.4)$$

en donde $\delta^{\vec{a} \rightarrow 0}$ es la función delta de Dirac.

Ahora se toma la transformada de Fourier de $f_a(|\vec{s}|)$,

$$g_a(k^2) = \int f_a(|\vec{s}|) e^{i\vec{k} \cdot \vec{s}} d\vec{s}, \quad (3.5a)$$

y se desarrolla en serie de Taylor alrededor de un valor K^2 :

$$g_a(k^2) = g_a(K^2) + g_a'(K^2)(k^2 - K^2) + \dots \quad (3.5b)$$

Empleando este desarrollo hasta primer orden para eliminar la integral en la ec.(3.1) se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{8m_0} \left[\nabla^2 \frac{1}{M(\vec{r}, K^2)} + \nabla \cdot \frac{2}{M(\vec{r}, K^2)} \nabla + \frac{1}{M(\vec{r}, K^2)} \nabla^2 \right] \bar{\Psi}(\vec{r}) +$$

$$+ \left[\{ g_a(K^2) - K^2 g_a'(K^2) \} W_N(\vec{r}) + W_c(\vec{r}) - E \right] \bar{\Psi}(\vec{r}) = 0, \quad (3.6)$$

en donde

$$M(\vec{r}, K^2) = \frac{m}{1 + \frac{2m}{\hbar^2} g_a'(K^2) W_N(\vec{r})}. \quad (3.7)$$

Si se escoge

$$f_c(s) = \frac{1}{\sqrt{(\pi a^2)^3}} e^{-\left(\frac{s}{a}\right)^2}, \quad (3.8)$$

entonces

$$g_a(k^2) = e^{-\frac{a^2 k^2}{4}}. \quad (3.9)$$

Frahn(1975) ha demostrado que si se escoge

$$K^2 = K^2(\tau) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - W_N(\tau)], \quad (3.11)$$

se obtiene la aproximación de Perey y Buck(1962).

En este trabajo es preferible tomar el caso más simple en que $K^2 \equiv 0$ y corresponde a la aproximación de masa efectiva propuesta por Frahn y Lemmer (1957a, 1957b). Como resultado se obtiene

$$\frac{1}{8} \left[\vec{p}^2 \frac{1}{M(\vec{r})} + 2\vec{p} \cdot \frac{1}{M(\vec{r})} \vec{p} + \frac{1}{M(\vec{r})} \vec{p}^2 \right] \bar{\Psi}(\vec{r}) + W_N(\vec{r}) \bar{\Psi}(\vec{r}) = E \bar{\Psi}(\vec{r}), \quad (3.13a)$$

en donde $\bar{\Psi}(\vec{r})$ es la función de onda aproximada y

$$M(\vec{r}) = \frac{m_0}{1 - \frac{e^2 m_0}{2 \hbar^2} W_N(\vec{r})} \quad (3.14)$$

puede interpretarse como una masa efectiva que depende del potencial $W_N(\vec{r})$ y del parámetro de no localidad a .

Si se incluye un potencial de Coulomb como la ec.(3.1b), en lugar de la ec.(3.13a) se tendrá

$$\frac{1}{8} \left[\vec{p}^2 \frac{1}{M(\vec{r})} + 2\vec{p} \cdot \frac{1}{M(\vec{r})} \vec{p} + \frac{1}{M(\vec{r})} \vec{p}^2 \right] \bar{\Psi}(\vec{r}) + [W_C(\vec{r}) + W_N(\vec{r})] \bar{\Psi}(\vec{r}) = E \bar{\Psi}(\vec{r}). \quad (3.13b)$$

Ahora bien, en adelante se considerarán únicamente potenciales esféricos, y se tomará

$$W_N(\vec{r}) = -W_0^n f_n(r) \quad (3.15a)$$

$$W_C(\vec{r}) = W_0^c f_c(r) \quad (3.15b)$$

en donde $f_n(0) = 1 = f_c(0)$ y $W_0^n, W_0^c > 0$. Se espera que el factor de forma nuclear $f_n(r)$ permanezca prácticamente constante hasta el borde del radio nuclear, y ahí decaiga rápidamente a cero. El factor de forma de Coulomb se toma generalmente como el de una distribución uniforme de carga, de modo que también es aproximadamente constante hasta la superficie del núcleo, y más allá de ella decae con una dependencia de r^{-1} .

Se puede reescribir

$$W_N(r) = -W_0^n + W_0^n [1 - f_n(r)], \quad (3.16)$$

de modo que entonces la masa efectiva se separa como

$$M(\tau) = m_0 \left\{ 1 + \beta - \beta [1 - f_N(\tau)] \right\}^{-1} \quad (3.17)$$

en donde se define

$$\beta \equiv \frac{a^2 m_0}{2 \hbar^2} W_0'' > 0. \quad (3.18)$$

Al substituir la ec.(3.17) en la ec.(3.13a) se obtiene

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} (1+\beta) \nabla^2 + W_N(\tau) + W_C(\tau) + W'(\tau, \nabla) \right] \bar{\Psi}(\vec{r}) = E \bar{\Psi}(\vec{r}), \quad (3.19)$$

en donde

$$W'(\tau, \nabla) = \frac{\hbar^2 \beta}{2m_0} \left[(1 - f_N(\tau)) \nabla^2 + 2 \nabla \cdot (1 - f_N(\tau)) \nabla + \nabla^2 (1 - f_N(\tau)) \right] \quad (3.20)$$

que, como se verá más adelante, es esencialmente un término de superficie.

Ahora se procede a analizar la ec.(3.19) para el caso de estados desligados, ó de dispersión, y el de estados ligados. En el primero el propósito es encontrar las funciones de onda que satisfagan la ec.(3.19) cuando la energía E ha sido fijada, digamos, por el operador de un acelerador de partículas, cumpliendo con las condiciones a la frontera propias del caso. En el segundo, por otra parte, lo que interesa es obtener las eigenfunciones y los eigenvalores del operador en la ec.(3.19).

3.1a) Estados de dispersión.

De la ec.(3.19) se puede despejar la energía cinética y obtener

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \bar{\Psi}(\vec{r}) = \frac{E - W_n(\vec{r}) - W_c(\vec{r}) - W'(\vec{r}, \nabla)}{1 + \beta} \bar{\Psi}(\vec{r}). \quad (3.21)$$

Substituyendo esta expresión en la misma ecuación para el término $-\frac{\hbar^2}{2m_0} \beta \nabla^2 \bar{\Psi}(\vec{r})$ se consigue

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + \mathcal{W}(\vec{r}, E, \nabla) + W_c(\vec{r}) \right] \bar{\Psi}(\vec{r}) = E \bar{\Psi}(\vec{r}), \quad (3.22)$$

en donde aparece ahora un potencial que depende de la velocidad y la energía

$$\mathcal{W}(\vec{r}, E, \nabla) = \frac{W_n(\vec{r}) + W'(\vec{r}, \nabla) + \beta(E - W_c(\vec{r}))}{1 + \beta}. \quad (3.23)$$

Si se aplicara este análisis a un sistema infinito, lo que equivaldría a tomar $f_n(\vec{r}) \equiv 1 \equiv f_c(\vec{r})$, se obtendría $W'(\vec{r}, 0) = 0$, y no quedaría más que

$$\mathcal{W}(E) = -\frac{1}{1 + \beta} [W_0^n - \beta E + \beta W_0^c]. \quad (3.24)$$

En el modelo óptico fenomenológico, la profundidad del potencial se obtiene precisamente de este modo (Ferey 1963) y el potencial para núcleos finitos se toma como

$$\mathcal{V}(\vec{r}, E) \equiv \mathcal{W}(E) f_n(\vec{r}) = -\frac{1}{1 + \beta} [W_0^n - \beta E + \beta W_0^c] f_n(\vec{r}). \quad (3.25)$$

La ecuación que se resuelve entonces, no es la (3.22), sino

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + \mathcal{V}(\gamma, E) + W_c(\gamma) \right] \Psi'(\gamma) = E \Psi'(\gamma). \quad (3.26)$$

Cabe preguntarse que tan importante es la diferencia entre ambos potenciales

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}(\gamma, E, \nabla) &= \mathcal{W}(\gamma, E, \nabla) - \mathcal{V}(\gamma, E) = \\ &= \frac{1}{1+\beta} \left[W'(\gamma, \nabla) + \beta E(1 - f_n(\gamma)) + \beta W_0^c(f_n(\gamma) - f_c(\gamma)) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para empezar puede observarse que en la región interior, en donde $f_n(\gamma) \approx 1$, se tiene $\delta \mathcal{W} \approx 0$ para los neutrones, y $\delta \mathcal{W} = \frac{\beta}{1+\beta} W_0^c(f_c(\gamma) - f_n(\gamma))$ para protones. En este último caso la diferencia puede absorberse en W_0^c , considerando que su dependencia de γ es suave.

En la región exterior (γ mayor que el radio R del núcleo), por otra parte, $f_n(\gamma) = 0$ y se tiene

$$\delta \mathcal{W} = \frac{\beta}{1+\beta} \left[E + \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 - W_c(\gamma) \right], \quad \gamma > R. \quad (3.28)$$

Pero ocurre que precisamente en esta región se cumple que

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + W_c(\gamma) \right] \Psi'(\gamma) = E \Psi'(\gamma), \quad \gamma > R, \quad (3.29)$$

por lo que $\delta \mathcal{W} = 0$.

Por lo tanto, $\delta \mathcal{W}(\gamma, E, \nabla)$ es un potencial de super-

ficie cuya contribución a los corrimientos de fase se espera que sea despreciable.

Comparando el potencial (3.25) con la parte real del potencial óptico fenomenológico

$$V_{op}(\gamma, E) = - \left[V_{op} - \alpha E + \alpha_d \frac{Z}{\lambda^{1/2}} \right] f_n(\gamma) \quad (3.30)$$

en donde V_{op} , α y α_d son parámetros ajustables, se observa que para los potenciales $W_x(\gamma)$ y $W_c(\gamma)$ definidos en las ecs.(3.15a) y (3.15b) se tiene

$$W_o'' = (1+\beta) V_{op} , \quad (3.31a)$$

$$\frac{\beta}{1+\beta} = \alpha \quad , \quad \beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} , \quad (3.31b)$$

$$\alpha W_o'' = \alpha_d \frac{Z}{\lambda^{1/2}} . \quad (3.31c)$$

De la definición (3.18) para β se encuentra entonces que el parámetro de no localidad α se puede obtener a partir de los valores experimentales V_{op} y α :

$$\alpha = \sqrt{\frac{2 \hbar^2}{m V_{op}}} \alpha . \quad (3.31d)$$

Se deja para más adelante la discusión sobre los valores de estos parámetros.

3.1b) Estados ligados.

En la región interna del potencial nuclear $1 - f_c(r) \approx 0$, por lo que $W'(r, \nabla)$ será un término pequeño en comparación con el resto del potencial. Por lo tanto, podrá tratarse como una perturbación a los estados que se obtienen de la ecuación

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + W_N(r) + W_C(r) \right] \bar{\Psi}_v^{(0)} = E_v \bar{\Psi}_v^{(0)}, \quad (3.32)$$

en donde se define una masa efectiva

$$m^* \equiv \frac{m_p}{1 + \beta} = M(r=0) \quad (3.33)$$

a partir de las ecuaciones (3.14) y (3.18).

La ecuación (3.33) sólo difiere de la ecuación de Schrödinger ordinaria en que la masa m_p del nucleón se reemplaza por una masa efectiva m^* menor (ya que $\beta > 0$). El resultado de esto es que aumenta la energía cinética en comparación con la del caso local, y con ella la separación entre los niveles de energía. Como consecuencia, si se desea que el potencial de la ec.(3.32) contenga la misma cantidad de niveles que un potencial en el caso local, deberá ser más profundo.

Para ilustrar esto, se puede dividir la ec.(3.32) por $(1 + \beta)$ de modo que se escriba como una ecuación de Schrödinger ordinaria

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_p} \nabla^2 + V_L(r) + W_C'(r) \right] \bar{\Psi}_v^{(0)} = E_v \bar{\Psi}_v^{(0)}, \quad (3.34)$$

en donde aparece un potencial "local"

$$V_L(r) = -\frac{W_0''}{1+\beta} f_n(r), \quad (3.35a)$$

un potencial de Coulomb modificado

$$W_c'(r) = \frac{W_0^c}{1+\beta} f_c(r), \quad (3.35b)$$

y una energía

$$E_v = \frac{\mathcal{E}_v^{(0)}}{1+\beta} = \frac{\mathcal{E}_v^{(0)}}{m_0/m^*} \quad (3.35c)$$

Comparando (3.35a) con (3.31a) se observa que

$$V_L(r) = V_{op} f_n(r), \quad (3.36)$$

de modo que la profundidad de $V_L(r)$ no es más que la del potencial óptico fenomenológico, la cual se obtiene experimentalmente.

Así pues, los niveles de energía $\mathcal{E}_v^{(0)}$ correspondientes a la función de onda no perturbada se pueden obtener resolviendo la ecuación (3.34) y usando la relación

$$\mathcal{E}_v^{(0)} = \frac{m_0}{m^*} E_v^{(0)}. \quad (3.37)$$

La información sobre la masa efectiva m^* también se puede obtener del potencial óptico fenomenológico

gico a través del parámetro α , como se puede ver de la ec.(3.33):

$$\frac{m_p}{m^*} \equiv \frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \beta. \quad (3.38)$$

En la tabla 3.1 se muestran los resultados obtenidos para un ejemplo concreto, empleando las ideas expuestas en esta subsección. En él se comparan los eigenvalores exactos ϵ_ν de la ec.(3.19), y los correspondientes valores aproximados $\epsilon_\nu^{(0)}$ de la ec.(3.32). Para hacerlo se tomó un potencial óptico fenomenológico cuyos parámetros son parecidos a los deducidos en la literatura para ^{58}Ni (Manweiler 1975 y Negele (1970)). Se trata de un potencial Woods-Saxon

$$V_\nu(r) = \frac{-V_{op}}{1 + e^{(r-R)/b}}$$

con parámetro de profundidad $V_{op} = 55.5$ MeV, de alcance $R = 1.3 A^{1/3}$ fm. y de difusividad $b = 0.65$ fm. El parámetro α es 0.32, que de acuerdo con la ec.(3.38) corresponde a una masa efectiva $m^* = 0.68m$ y $\beta = 0.47$.

Con estos valores, se calculan numéricamente ϵ_ν y $E_\nu^{(0)}$, y empleando la ec.(3.37), los eigenvalores aproximados $\epsilon_\nu^{(0)}$. Como puede verse, las mayores diferencias entre ϵ_ν y $\epsilon_\nu^{(0)}$ se dan para estados menos ligados, y de mayor momento angular. En estos casos los eigenvalores aproximados resultan menos ligados por 2 ó 3 MeV.

Tabla 3.1. Eigenvalores exactos ϵ_y y aproximados $\epsilon_y^{(0)}$ para un potencial de Woods-Saxon, en MeV. Se muestran también los eigenvalores auxiliares $E_y^{(0)}$. Los parámetros del potencial son los siguientes: profundidad $V_{op} = 55.5$ MeV, alcance $R = 1.3 \text{ \AA}^{1/3}$ fm. y difusividad $b = .65$ fm. Se ha tomado $\alpha = .32$, que corresponde a $\frac{m}{m_0} = 1.47$.

NIVEL	$E_y^{(0)}$	$\epsilon_y^{(0)} = \frac{m}{m_0} E_y^{(0)}$	ϵ_y
1s	42.98	63.19	63.48
2s	20.04	29.47	30.73
3s	0.76	1.12	2.83

1p	32.82	48.24	49.07
2p	8.90	13.08	15.21

1d	21.70	31.90	33.69
2d	-	-	2.56

1f	10.08	14.82	18.15

1g	-	-	3.37

3.2 Niveles de energía de un potencial de oscilador armónico (Bauer y Herrera 1978).

Una forma de obtener una expresión analítica para los niveles de energía es proponiendo un potencial de oscilador armónico. Para aplicarlo al problema nuclear es necesario modificarlo agregando un término que rompa la degeneración en el momento angular y otro que tome en consideración la interacción spin-órbita. Así pues, se tomará la parte esférica del potencial usado por Nilsson et al (1969):

$$W(r) = -W_0'' + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{D}{\hbar^2} (l^2 - \langle l^2 \rangle_n) - \frac{2C}{\hbar^2} \vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (3.39)$$

El término

$$- \frac{D}{\hbar^2} (l^2 - \langle l^2 \rangle_n) = -D \left[l(l+1) - \frac{1}{2} n(n+3) \right], \quad (3.40)$$

en donde D es un parámetro y $\langle \rangle_n$ denota promedio sobre la capa n , rompe la degeneración en el momento angular dejando fijo el centro de gravedad del multiplete. En lo subsecuente se llamará a la ec.(3.40) el término de Nilsson.

Se ha incluido también un término de spin-órbita

$$- \frac{2C}{\hbar^2} \vec{l} \cdot \vec{s} = -C \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right], \quad (3.41)$$

en donde C es un nuevo parámetro.

Obviamente en este caso no es válido suponer que $f_4(r) \approx 1$ en el interior del núcleo, y por lo tanto no es aplicable la relación simple (3.37) para obtener los eigenvalores a partir de la ec.(3.34). Esto, sin embargo, no representa ningún obstáculo, pues para el oscilador armónico es posible resolver analíticamente la ecuación original (3.13a), como ha sido demostrado por Frahn y Lemmer (1957a,b). Tomando esta solución para los niveles de energía y tratando perturbativamente los dos últimos términos de la ec.(3.39) se tiene

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{n\ell j} = & -W_0'' + (n + \frac{3}{2}) \left(\frac{m_0}{m^*}\right)^{1/2} \hbar \omega \\
 & - \frac{(\hbar \omega)^2}{8W_0''} \frac{m_0}{m^*} \left(1 - \frac{m^*}{m_0}\right) \left[n(n+3) + \ell(\ell+1) + \frac{9}{2}\right] - \\
 & - D \left[\left[1 - \frac{\hbar \omega}{2W_0''} \left(\frac{m_0}{m^*}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{m^*}{m_0}\right) \left(n + \frac{3}{2}\right) \right] \left[\ell(\ell+1) - \frac{1}{2}n(n+3) + \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} \right] - \\
 & - C \left[1 - \frac{\hbar \omega}{2W_0''} \left(\frac{m_0}{m^*}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{m^*}{m_0}\right) \left(n + \frac{3}{2}\right) \right] \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.42}$$

La dependencia de n del 4^o y del 5^o término puede despreciarse como puede verse de una estimación simple.

Una vez obtenida la expresión (3.42) se pasa a determinar la dependencia de A de los parámetros $\hbar \omega$, D y C .

3.2a) Dependencia de A de la frecuencia angular.

La frecuencia amplificada

$$\hbar \omega^* = \hbar \omega \left(\frac{m_0}{m^*}\right)^{1/2}
 \tag{3.43}$$

debe ajustarse de modo que se obtenga el radio nuclear correcto. Para hacerlo, se sigue el procedimiento de Moszkowski (1957). Se ignora el efecto de los términos de Nilsson y de spin-órbita, considerando que actúan sólo como una corrección a los niveles de oscilador armónico.

Puesto que los valores de expectación de la energía cinética y la energía potencial para un oscilador armónico son iguales, la suma de los promedios de las energías de N partículas es

$$\sum_{i=0}^N \bar{\epsilon}_i = N m^* \omega^2 \langle r^2 \rangle_i . \quad (3.44)$$

Tomando para el radio nuclear $R = r_0 A^{1/3}$, el radio cuadrado medio para una distribución esférica de carga está dado por

$$\langle r^2 \rangle \approx \frac{3}{5} r_0^2 A^{2/3} . \quad (3.45)$$

Por otro lado, considerando dos estados posibles para el spin, la degeneración del oscilador armónico para el número cuántico principal π , se puede escribir

$$\sum_{i=0}^N \bar{\epsilon}_i = \sum_{\pi=0}^{\pi_F} (\pi+1)(\pi+2) \left(\pi + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega^2 \quad (3.46)$$

Al efectuar la suma se considera sólo el primer término

$$\sum_{i=0}^N \bar{\epsilon}_i \approx \frac{1}{4} \hbar \omega^2 \pi_F^4 . \quad (3.47)$$

En forma semejante se encuentra que el número total de partículas va como

$$N \approx \frac{1}{3} n_p^3, \quad (3.48)$$

y de aquí se puede despejar n_p para sustituirlo en la ec.(3.47). Igualando el resultado con la ec.(3.44) se encuentra que

$$\hbar \omega^* = \frac{5}{6} \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \frac{(\hbar c)^2}{m c^2} \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{2N}{A}\right)^{1/3} \frac{m_0}{m^*}. \quad (3.49)$$

Para el caso general puede escribirse

$$\hbar \omega_{n,p}^* = \frac{5}{6} \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \frac{(\hbar c)^2}{m c^2} \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{A} - z \frac{N-Z}{A^2}\right)^{1/3} \left(\frac{m_0}{m^*}\right)_{n,p} \quad (3.50)$$

en donde $z = 1$ para protones y $z = -1$ para neutrones.

3.2 b) Dependencia de A del factor D .

Se puede demostrar que para un pozo cuadrado infinito la dependencia de \mathcal{L} de los niveles de energía va en primera aproximación como $(\hbar^2/2mR^2) \mathcal{L}(\mathcal{L}+1)$ (ver la siguiente sección). Por lo tanto es razonable afirmar que el coeficiente D en el término de Nilsson va como

$$D = y \frac{(\hbar c)^2}{m c^2} \frac{1}{r_0^2} \frac{1}{A^{2/3}}, \quad (3.51)$$

en donde y es un parámetro ajustable. Este no debe en-

tenderse como un parámetro libre, pues se espera que sea consistente con los valores obtenidos por Nilsson et al(1969).

3.2c) Dependencia de A del factor C .

El término de interacción spin-órbita se puede tomar con la forma de la energía de Thomas-Frenkel

$$V_{so} = - \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial W_c(r)}{\partial r} 2 \frac{\vec{l} \cdot \vec{s}}{\hbar^2} = - \frac{2c}{\hbar^2} \vec{l} \cdot \vec{s}, \quad (3.52)$$

en donde λ es un parámetro fenomenológico sin dimensiones. Por lo tanto, para un potencial de oscilador armónico se encuentra que

$$C_{n,p} = \frac{\lambda (\hbar \omega)^2}{2 m_0 c^2} = \left[\frac{5}{6} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \right]^2 \frac{(\hbar c)^4}{2 (m_0 c^2)^2} \frac{\lambda}{r_0^4} \left(\frac{1}{A} - 2 \frac{N-Z}{A^2} \right)^{2/3} \left(\frac{m_0}{\hbar^2} \right)_{n,p}, \quad (3.53)$$

que va esencialmente como $A^{-2/3}$. Esta dependencia debe compararse con la que se obtiene de los resultados experimentales: $A^{-\alpha}$ con $\alpha = 0.53 \pm 0.09$ (Cohen et al 1962). En la sección 3.4 se muestran algunos resultados numéricos.

3.3 Niveles de Energía para un potencial de pozo cuadrado.

Es bien sabido que para los niveles de energía de un pozo cuadrado infinito no existe una expresión analítica exacta. Sin embargo, en esta sección se mostrará que sí es posible encontrar una expresión analítica aproximada que se puede llevar a la práctica con buenos resultados.

Primero se dará la solución para un potencial lo-

cal, y después se la modificará, de acuerdo con el procedimiento señalado en la subsección 3.1 b, para tomar en consideración el efecto de la no localidad.

Considérese un potencial de pozo cuadrado infinito

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_{op} & \text{si } |\vec{r}| \leq R \\ \infty & \text{si } |\vec{r}| > R. \end{cases} \quad (3.54)$$

La ecuación de Schrödinger a resolver será simplemente

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (3.55)$$

en donde

$$k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} (E + V_{op}), \quad (3.56)$$

con las condiciones a la frontera

$$\Psi(0) = 0, \quad (3.57a)$$

$$\Psi(R) = 0. \quad (3.57b)$$

Las soluciones para las funciones de onda radiales, como es bien sabido, son las funciones de Bessel esféricas que se cancelan tanto en el origen como en $r=R$.

Fuesto que su argumento es kr , se tiene la condición

$$k_{n,\ell} R = \left[\frac{2m_0}{\hbar^2} (E_{n,\ell} + V_{op}) \right]^{1/2} R = \omega_{n,\ell}. \quad (3.58)$$

en donde $\omega_{n\ell}$ es el cero correspondiente a la función de Bessel en cuestión.

Para representar a $\omega_{n\ell}$ se puede usar el siguiente desarrollo asintótico (Gradshteyn y Rizhik 1965)

$$\omega_{n\ell} = \frac{1}{2}(n+2)\pi - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}{\frac{1}{2}(n+2)\pi} - \frac{1}{16} \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)[28\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)-24]}{\left[\frac{1}{2}(n+2)\pi\right]^3} + \dots \quad (3.59)$$

En esta expresión el número cuántico principal corresponde al del oscilador armónico, y se relaciona con el número de nodos m por

$$n = 2(m-1) + \mathcal{L}. \quad (3.60)$$

En la tabla (3.2) se compara el valor exacto de varios ceros de las funciones de Bessel esféricas con los valores aproximados obtenidos de los primeros dos términos de la expresión (3.59). Se observa que el error porcentual es razonablemente pequeño, incluso cuando se toman únicamente dos términos.

Así pues, los niveles de energía se pueden escribir como

$$E_{n\ell} = -V_{op} + \frac{\hbar^2}{2m_0 R^2} \left\{ \left(\frac{n+2}{2} \right)^2 \pi^2 - \mathcal{L}(\mathcal{L}+1) \right\}, \quad (3.61)$$

despreciando términos de orden superior. Puesto que esto supone una nueva aproximación, en la tabla 3.3 se com-

Tabla 3.2. Comparación entre algunos ceros exactos de las funciones esféricas de Bessel y los proporcionados por los dos primeros términos de la ec.(3.59).

l	m	n	CERO EXACTO	CERO APROXIMADO	ERROR PORCENTUAL
0	1	0	3.1416	3.1416	0.00
0	2	2	6.2832	6.2832	0.00
0	3	4	9.4248	9.4248	0.00
0	4	6	12.5664	12.5664	0.00
1	1	1	4.4934	4.5002	-0.15
1	2	3	7.7253	7.7267	-0.18
1	3	5	10.9041	10.9046	-0.0046
1	4	7	14.0662	14.0664	-0.0014
2	1	2	5.7635	5.8057	-0.73
2	2	4	9.0950	9.1065	-0.13
2	3	6	12.3229	12.3276	-0.038
2	4	8	15.5146	15.5170	-0.016
3	1	3	6.9879	7.0900	-1.46
3	2	5	10.4171	10.4499	-0.31
3	3	7	13.6980	13.7128	-0.11
4	1	4	8.1826	8.3637	-2.21
4	2	6	11.7049	11.7706	-0.56
5	1	5	9.3558	9.6314	-2.95
5	2	7	12.9665	13.0761	-0.85
6	1	6	10.5128	10.8952	-3.64
7	1	7	11.6570	12.1566	-4.285

Tabla 3.3. Comparación entre algunos niveles de energía exactos para un pozo cuadrado infinito, y los proporcionados por la ec.(3.61) ($V_{op} = 0$). Los resultados se dan en unidades de $\hbar^2/(2m r_0^2)$.

l	n	VALOR EXACTO	VALOR APROXIMADO	ERROR PORCENTUAL
0	0	9.8696	9.8696	0.00
0	2	39.4784	39.4784	0.00
0	4	88.8264	88.8264	0.00
0	6	157.9137	157.9137	0.00
1	1	20.1906	20.2066	-0.079
1	3	59.6803	59.6850	-0.0080
1	5	118.8994	118.9027	-0.0027
1	7	197.8580	197.8595	-0.0008
2	2	33.2179	33.4784	-0.78
2	4	82.7190	82.8264	-0.13
2	6	151.8539	151.9137	-0.039
2	8	240.7028	240.7401	-0.016
3	3	48.8307	49.6850	-1.75
3	5	108.5160	108.9027	-0.36
3	7	187.6352	187.8595	-0.12
4	4	66.9549	68.8264	-2.80
4	6	137.0047	137.9137	-0.66
5	5	87.5310	90.9027	-3.85
5	7	168.1301	169.8595	-1.03
6	6	110.5190	115.9137	-4.8812
7	7	135.8856	143.8595	-5.87

ra para varios casos el valor de $\omega_{n,l}^2$ con el del término entre llaves en la ec.(3.61). El error cometido sigue siendo pequeño y por lo tanto se puede afirmar que la expresión (3.61) constituye una buena base de donde partir.

Aún deben hacerse por lo menos dos correcciones importantes a la expresión para $E_{n,l}$.

En primer lugar, debe considerarse que no es posible representar al potencial nuclear mediante un pozo infinito. Es más adecuado un pozo finito en el cual el espaciamiento entre los niveles decrece con la energía, precisamente al contrario de como ocurre con un pozo infinito. Más aún, un potencial que reproduzca bien los resultados de dispersión debe tener cierta difusividad, tal como ocurre con un Woods-Saxon.

Para corregir este defecto, se observa que las soluciones a la ecuación de Schrödinger con un potencial de pozo cuadrado finito siguen siendo funciones de Bessel esféricas, excepto que en vez de anularse en R se acoplan a una función de Neumann.

Por lo tanto, los niveles de energía de un pozo finito corresponden a los que se obtienen de funciones de onda que se anulan en radios R' mayores que el radio R del potencial. Entonces, es posible emplear la expresión (3.61) si se aumenta el radio R en proporción a la energía. Para incluir esta corrección en la forma más simple posible se propone

$$R = (\gamma_0 + \Delta\gamma_0 \pi) A^{1/3}, \quad (3.62)$$

de modo que, en primera aproximación

$$\frac{1}{R^2} \approx \left(1 - 2 \frac{\Delta r_0}{r_0} \pi\right) \frac{1}{r_0^2 A^{2/3}} \quad (3.63)$$

Se propondrá además que

$$\frac{\Delta r_0}{r_0} = \varphi A^{p/3}, \quad (3.64)$$

en donde φ es un parámetro ajustable y p un entero menor ó igual que -1. Aunque en este momento se trata de una proposición completamente arbitraria, se verá justificada en el siguiente capítulo al construir la fórmula de masas. Los valores del parámetro φ y del entero π se pueden conocer al ajustar la expresión resultante a valores experimentales, lo cual se hará en la siguiente sección.

Otra modificación importante que debe hacerse a la expresión (3.61) consiste en incluir un término que tome en consideración la interacción spin-órbita. Así pues, se propone, al igual que en la sección anterior

$$V_{so} = - \frac{2}{\hbar^2} C \vec{l} \cdot \vec{s} = - C [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}], \quad (3.65)$$

pero ahora el coeficiente C se define como

$$C \equiv \frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \Lambda, \quad (3.66)$$

en donde Λ es un parámetro sin dimensiones que se puede ajustar a los rompimientos de spin-órbita experimental

les ΔE_{sp} .

La forma completa para los niveles de energía está dada por

$$E_{n\ell j} = -V_{op} + \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} (1 - 2\alpha A^{p/2}) \left\{ \left(\frac{n+2}{2} \right)^2 - \mathcal{L}(\mathcal{L}+1) - \mathcal{A}[j(j+1) - \mathcal{L}(\mathcal{L}+1) - \frac{3}{4}] \right\} \quad (3.67)$$

Ahora bien, la ec.(3.67) corresponde a los eigenvalores de una ecuación de Schrödinger con un potencial local, como en (3.34). Para obtener los eigenvalores de interés es necesario multiplicar $E_{n\ell j}$ por m_e/m^* .

3.4 Resultados numéricos.

En esta sección se comparan los resultados numéricos de las expresiones obtenidas en las dos secciones anteriores con valores experimentales y cálculos de Hartree-Fock.

Se empieza por hacer algunas observaciones acerca de cómo deben tomarse la profundidad del potencial y la masa efectiva. Con ellas en mente se pasa a calcular los niveles de energía para el potencial de oscilador armónico y del pozo cuadrado respectivamente.

El problema que se tiene al comparar con otros resultados es encontrar un espectro que muestre suficiente información. Los espectros experimentales ayudan poco en la práctica debido a que, en los núcleos pesados, sólo se conocen con precisión los niveles menos ligados, y los núcleos ligeros no tienen una cantidad de niveles suficientemente grande. Por otro lado, existen cálculos de Hartree-Fock en los que, usando interac-

ciones de Skyrme, se han reproducido satisfactoriamente los espectros experimentales junto con otros resultados de estructura nuclear. Por lo tanto, las comparaciones que se hacen en esta sección son contra espectros dados por Ko et al (1974) para ^{208}Pb , obtenidos con una interacción Skyrme III. Los parámetros empleados en esta comparación se usan para calcular los niveles de energía de núcleos más ligeros.

3.4 a) De la profundidad del potencial y la masa efectiva.

La profundidad V_{op} del potencial óptico fenomenológico (3.30) se acostumbra escribir como

$$V_{op} = V_0 + \tau \frac{N-Z}{A} V_1 \quad (3.68)$$

en donde V_0 y V_1 son parámetros ajustables y el valor de τ es 1 para protones y -1 para neutrones. En la literatura se encuentra que V_0 varía entre 48 MeV y 60 MeV, y el parámetro de asimetría V_1 varía entre 24 MeV y 38 MeV. El parámetro α del mismo potencial (3.30), por su parte, varía entre 0.22 y 0.55 (Bechetti y Greenlees 1969, Hornyak 1975). Del valor señalado para α se obtiene que el valor de β está entre .28 y 1.22, lo que a su vez corresponde a una masa efectiva $m^* = .78 m_0$ y $m^* = .45 m_0$ respectivamente. El parámetro de no localidad a , estimado según (3.31d) varía entre .6 y .9 fm., ignorando el segundo término de V_{op} en la ec.(3.68).

La parametrización (3.68) para V_{op} produce un efecto importante sobre la masa efectiva. De la defini-

ción (3.33), la expresión (3.18) para β , y la equivalencia (3.31a) entre V_{op} y W_0'' , se tiene

$$\frac{m_0}{m^*} = \left(1 - \frac{a^2 m_0}{2 \hbar^2} V_{op} \right)^{-1}. \quad (3.69)$$

Puesto que V_{op} es mayor para protones que para neutrones, m_0/m^* será también mayor para protones que para neutrones:

$$\left(\frac{m_0}{m^*} \right)_p > \left(\frac{m_0}{m^*} \right)_n. \quad (3.70)$$

En vista de esto conviene definir un parámetro promedio

$$\frac{m}{m^*} \equiv \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_0}{m^*} \right)_p + \left(\frac{m_0}{m^*} \right)_n \right], \quad (3.71)$$

que se identifique, mediante la ec.(3.38), con el valor único de α que se obtiene experimentalmente. En el apéndice I se demuestra que $\left(\frac{m_0}{m^*} \right)_p$ y $\left(\frac{m_0}{m^*} \right)_n$ se pueden expresar en términos de $\frac{m}{m^*}$ y el cociente $\frac{V_i}{V_0}$ como

$$\left(\frac{m_0}{m^*} \right)_p = \frac{m}{m^*} \left[1 + \frac{V_i}{V_0} \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) I \right], \quad (3.72)$$

$$\left(\frac{m_0}{m^*} \right)_n = \frac{m}{m^*} \left[1 - \frac{V_i}{V_0} \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) I \right], \quad (3.73)$$

en donde

$$I \equiv \frac{N-Z}{A}. \quad (3.74)$$

En el caso de los protones debe incluirse el po-

tencial de Coulomb en la ecuación de Schrödinger (3.34). En los cálculos de potencial óptico se acostumbra proponer el potencial producido por una distribución esférica de carga de radio R :

$$W_c(r) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{Ze^2}{R} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{si } r < R \\ \frac{Ze^2}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases} \quad (3.75)$$

Sin embargo, tal potencial impide resolver la ecuación de Schrödinger analíticamente, por lo que para el propósito de este trabajo es preferible tomar sólo el promedio de (3.75) en el interior del núcleo

$$\overline{W_c(r)} = \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{R}, \quad (3.76)$$

y así, a los eigenvalores obtenidos del potencial nuclear $W_n(r)$ simplemente se les agregará una constante. Para com pensar el error cometido al substituir el potencial exacto por el promedio es conveniente dar una ligera libertad a $\overline{W_c(r)}$, por lo que se le multiplica por un parámetro ajustable γ_c que no debe diferir mucho de 1. Así pues, se tomará

$$V_c \equiv \gamma_c \overline{W_c(r)} = \gamma_c \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{R}. \quad (3.77a)$$

En la parametrización del modelo óptico fenomenológico se acostumbra tomar el radio nuclear como $R_0 = r_0 A^{1/3}$,

en donde γ_0 es un parámetro que toma valores entre 1.10 y 1.30 fm. por lo general (Barret y Jackson 1977). Aunque quizá una expresión del tipo $R = \gamma_0 A^{1/3} + c$, en donde se incluye un parámetro adicional c sería más correcto, según se sabe de los experimentos de dispersión de electrones (ver figura 3.1), en este trabajo se optará por la forma más simple. Por lo tanto se tiene

$$V_c = \gamma_c \frac{6}{5} \frac{e^2}{r_0} \frac{Z}{A^{1/3}} \quad (3.77b)$$

Para tener una idea del valor de $(6e^2/5r_0)$, se puede tomar

$\gamma_0 = 1.25$ fm. y se encuentra 1.38 MeV. En el apéndice V se muestran algunos valores de los parámetros del potencial óptico fenomenológico. Para una discusión amplia de estos, ver Hodgson (1971).

3.4 b) Resultados numéricos para los niveles de oscilador armónico.

La expresión que se desea ajustar es

$$\begin{aligned} \epsilon_{n\ell j} = & -V_{op} + \left(\frac{1+\kappa}{2}\right) V_c + \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega^* - \\ & - \frac{(\hbar \omega^*)^2}{8 W_0''} \left[1 - \left(\frac{m^*}{m_0}\right)\right] \left[n(n+3) + \ell(\ell+1) + \frac{9}{2}\right] - \\ & - D \left[\ell(\ell+1) - \frac{1}{2} n(n+3)\right] - \\ & - C \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}\right], \end{aligned} \quad (3.78)$$

en donde, según se ha visto, intervienen la profundidad del potencial V_0 , el potencial de asimetría V_1 , la masa efectiva m^* , y los siguientes parámetros: el del potencial de Coulomb V_c , el del radio nuclear γ_0 , el del término de Nilsson γ y el de spin-órbita λ . Se tiene así pues, un total de siete parámetros.

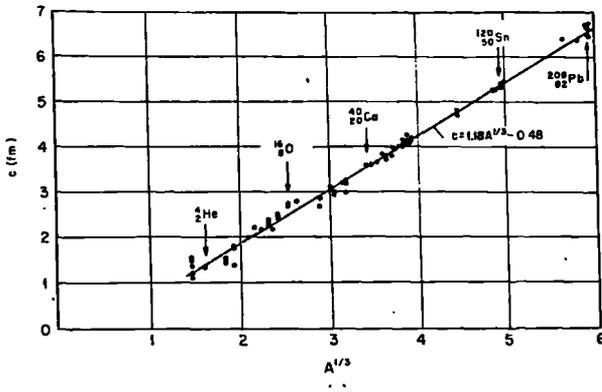


Figura 3.1. Variación de los radios nucleares a media densidad c , en función de $A^{1/3}$ (tomada de Schopper 1967).

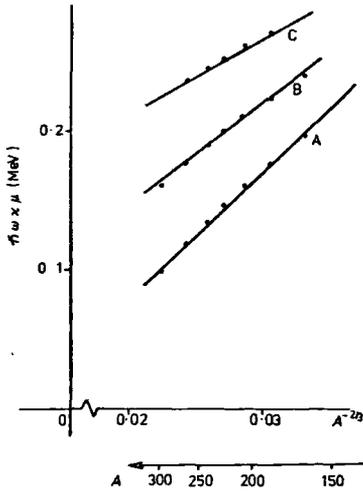


Figura 3.2. Ajuste de los valores $\hbar^2 \omega_K \mu \equiv D$.

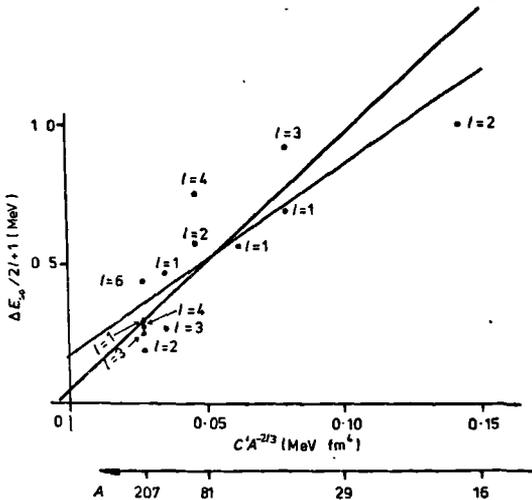


Figura 3.3. Ajuste de la interacción spin-órbita.

Con objeto de ajustar γ , debe observarse que la dependencia de $\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)$ de la expresión (3.78) va esencialmente como

$$\left\{ \gamma \frac{(\hbar c)^2}{2m_0 c^2} \frac{1}{r_0^2} + \left[\frac{5}{6} \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \frac{(\hbar c)^2}{m_0 c^2} \frac{1}{r_0^2} \right]^2 \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{1}{8V_0} \right\} \bar{A}^{-2/3} \quad (3.79)$$

si se ignoran las diferencias que existen para protones y neutrones en la masa efectiva y la profundidad del potencial. Si se compara la ecuación (3.79) con la dependencia de \bar{A} del término de Nilsson, la cual se muestra en la figura 3.2, se encuentra que ambos resultados son consistentes. En la figura, el producto $\hbar \omega \kappa \mu$ es simplemente el coeficiente de \mathcal{L}^2 en el hamiltoniano de Nilsson tal como se ha dado en Nilsson et al (1969). Las líneas A y C describen los casos de protones y neutrones respectivamente, mientras que la línea B se obtiene de promediar las dos anteriores. De este modo, el parámetro γ se puede determinar para valores específicos de V_0 , r_0 y m/m^* substituyéndolos en la ec.(3.79) e igualando el coeficiente entre paréntesis con la pendiente de la línea B (7.4 MeV).

El parámetro de spin-órbita λ se puede ajustar empleando el rompimiento experimental $4E_{so}$ entre niveles con $j = \mathcal{L} + \frac{1}{2}$ y $j = \mathcal{L} - \frac{1}{2}$. Ignorando la diferencia entre protones y neutrones señalada en (3.53), se encuentra que

$$\frac{4E_{so}}{2\mathcal{L}+1} = C = \left(\frac{2\mathcal{L}}{r_0^2} \frac{m}{m^*} \right) \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{5}{6} \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \right]^2 \frac{(\hbar c)^4}{2(m_0 c^2)^3} \right\} \bar{A}^{-2/3} \quad (3.80)$$

De aquí que convenga ajustar ambos lados de la ec.(3.80) a una línea recta por el método de mínimos cuadrados, pa

ra obtener la pendiente $2\lambda(\frac{m}{m^*})/\tau_0^4$:

$$\frac{\Delta E_{50}}{2l+1} = \frac{2\lambda}{\tau_0^4} \frac{m}{m^*} [C' A^{-2/3}] . \quad (3.81)$$

Las dos soluciones de tal ajuste se muestran en la figura 3.3. Puesto que existe una dispersión considerable en el ajuste es conveniente tomar el promedio (8.15 fm⁻⁴). Como las líneas no pasan por el origen, se produce una subestimación de un 17% que debe compensarse para poder reproducir los resultados experimentales.

Tomando estos ajustes en consideración, se puede demostrar que la fórmula (3.78) proporciona esquemas de niveles comparables con los obtenidos de los cálculos de Hartree-Fock con interacción de Skyrme III, y valores experimentales. En las figuras 3.4 y 3.5 se comparan esquemas de niveles de neutrones y protones* tomando $V_0 = 55$ MeV, $V_1 = 30$ MeV, $m/m^* = 1.4$ y $\tau_0 = 1.3$ fm. Los valores consistentes de γ y λ son 0.51 y 16.6 respectivamente. En las figuras 3.6 y 3.7 se muestran los

* Para el cálculo del esquema de niveles de los protones se tomó en consideración un efecto del potencial de Coulomb sobre la masa efectiva, el cual no es necesario y se ha ignorado en esta exposición (Bauer y Herrera 1978).

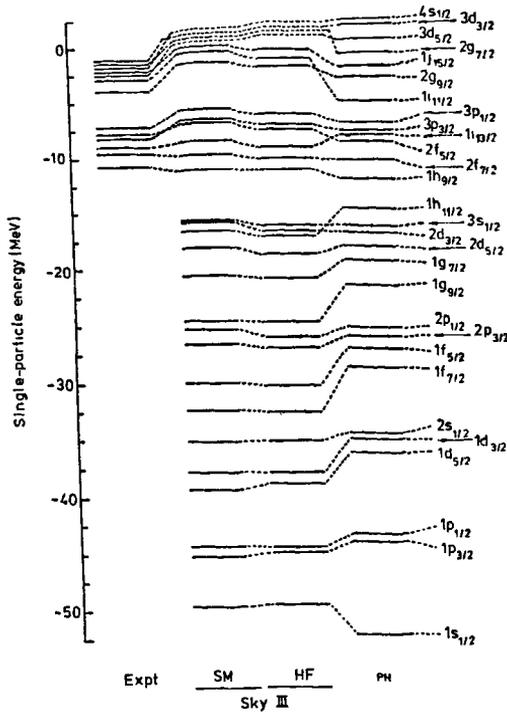


Figura 3.4. Niveles de energía de partícula independiente para neutrones en ^{208}Pb . Las tres primeras columnas se han tomado de Ko et al (1974). Expt se refiere a energías experimentales, HF y SM representan energías obtenidas con la interacción Skyrme III, y eigenenergías de un Woods-Saxon consistentes con ellas. Finalmente PH denota las energías de partícula independiente obtenidas en esta sección.

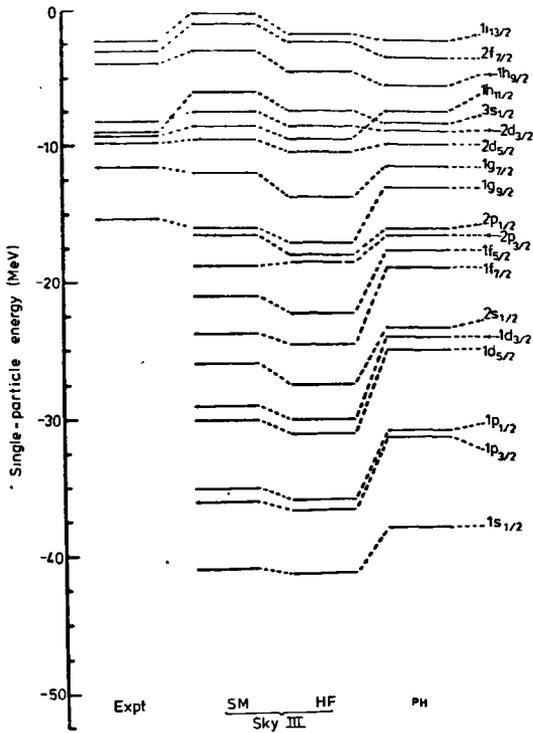


Figura 3.5. Niveles de energía de partícula independiente para protones en ^{208}Pb . Ver la leyenda de la figura 3.4.

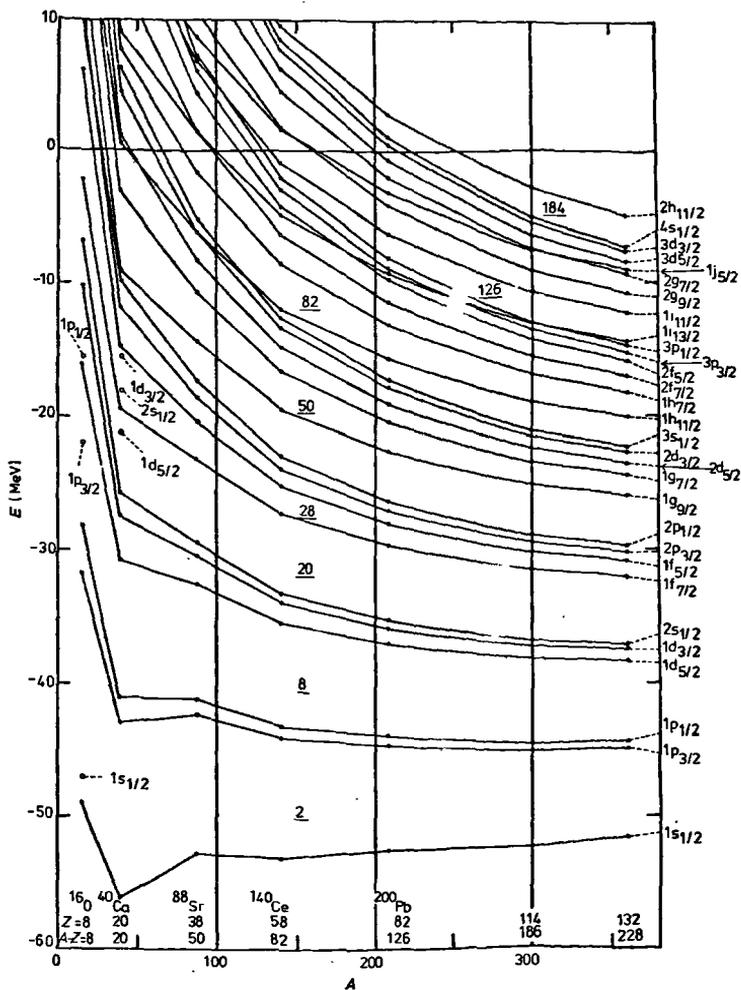


Figura 3.6. Esquema de niveles de energía de partícula independiente para neutrones. Los eigenvalores con iguales números cuánticos, para los núcleos indicados, se conectan mediante líneas rectas con objeto de guiar la vista.

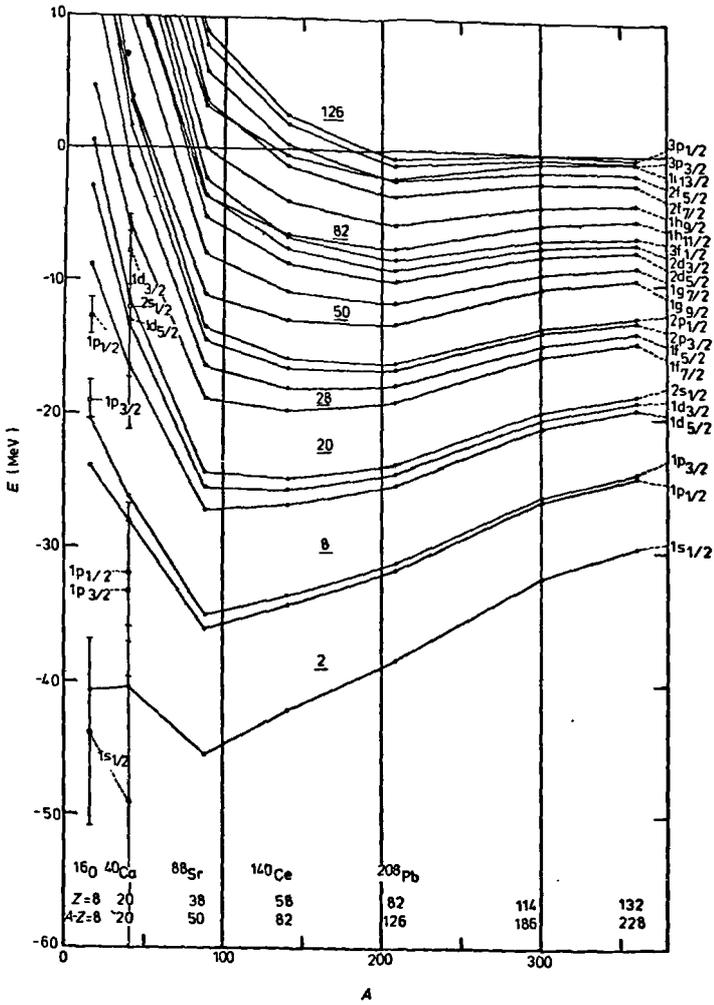


Figura 3.7. Esquema de niveles de energía de partícula independiente para protones. Ver la leyenda de la figura 3.6.

resultados obtenidos cuando se usa este mismo conjunto de parámetros para calcular los esquemas de niveles de otros núcleos.

De los resultados se concluye que la fórmula (3.78) reproduce las tendencias principales de los espectros de partícula independiente en núcleos pesados, al menos por lo que respecta a la estructura de capas.

Para cálculos sobre núcleos ligeros, como ^{40}Ca , no puede emplearse el mismo conjunto de parámetros que para núcleos pesados, pues los niveles resultan demasiado profundos.

Estos ajustes están seriamente limitados por el hecho de que un oscilador armónico proporciona niveles igualmente espaciados (que en este caso determinan las capas), lo que no se observa en cálculos realistas.

3.4 c) Resultados numéricos para los niveles de un pozo cuadrado.

La expresión que se desea ajustar en este caso

es

$$\begin{aligned} \epsilon_{n,l,j} = & \left(\frac{1+\xi}{2}\right) V_0 + \frac{m_0}{m^*} x \\ & \times \left[-V_{0p} + \frac{\hbar^2}{2m_0 v_0^2 A^{2/3}} (1 - 2\sigma A^{1/3} n) x \right. \\ & \left. \times \left\{ \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \pi^2 - l(l+1) - \Lambda [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.79)$$

que contiene la profundidad del potencial V_0 , el po-

tencial de asimetría V_1 , la masa efectiva m^* , y los siguientes parámetros: los del radio r_0 y α , el de spin-órbita Λ y el del potencial de Coulomb. Por razones que se aclaran en el siguiente capítulo, se ha fijado $p \leq 1$. Aquí debe determinarse cual es su valor más apropiado. Incluyendo a p se tiene un total de ocho parámetros, uno más que en la expresión obtenida mediante el oscilador armónico.

Para ajustar el parámetro de spin-órbita, se toma la dependencia más simple de R ($\sigma = 0$), y se encuentra que

$$\frac{\Delta E_{SO}}{2l+1} = \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \Lambda \frac{m_0}{m^*} A^{-2/3}, \quad (3.80)$$

en donde

$$\Delta E_{SO} = \epsilon_{nl, l-\frac{1}{2}} - \epsilon_{nl, l+\frac{1}{2}}. \quad (3.81)$$

Se puede definir la constante

$$K \equiv \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \Lambda \frac{m_0}{m^*}, \quad (3.82)$$

que se puede ajustar a valores experimentales de ΔE_{SO} .

En la figura 3.8 se muestra el resultado de este ajuste siguiendo el método de mínimos cuadrados, con lo que se obtiene $K = 8.866$ MeV. Así pues, el parámetro estará dado por

$$\Lambda = \frac{2m_0 c^2}{(\hbar c)^2} \frac{r_0^2}{m/m^*} K. \quad (3.83)$$

Puesto que el parámetro Λ se determina separa-

damente dados los valores de γ_0^2 y m/m^* , lo más relevante es conocer los parámetros que ajusten los centroides

$$\epsilon_{nl} = \frac{(l+1)\epsilon_{nl, l+\frac{1}{2}} + l\epsilon_{nl, l-\frac{1}{2}}}{2l+1} \quad (3.84)$$

a los centroides de los esquemas con los cuales se desea comparar.

Como en el caso anterior, se encontraron conjuntos de parámetros que reprodujeran apropiadamente cálculos de Hartree-Fock para ^{208}Pb , y después se emplearon los mismos conjuntos para calcular esquemas de niveles de otros núcleos. En la tabla 3.4 y 3.5 se muestran los resultados obtenidos para los esquemas de niveles de ^{208}Pb en tres casos distintos. En todos ellos se ha tomado $m/m^* = 1.3$, $V_0 = 50.0$ MeV, $\gamma_0 = 1.3$ fm., $V_1 = 30.0$ MeV y $\gamma_c = 1.612$. En el primero se tiene $\rho = 0.$, en el segundo $\rho = -2$ y $\alpha = .3$, y en el tercero $\rho = -3$ y $\alpha = .6$. En ambas tablas se observa que los valores calculados concuerdan razonablemente bien con los cálculos de Hartree-Fock, siendo mejores los resultados del segundo caso.

En las tablas 3.6 a 3.10 se observa que el mismo conjunto de parámetros reproduce las tendencias principales de los esquemas de otros núcleos, aunque no se conserva la calidad del ajuste.

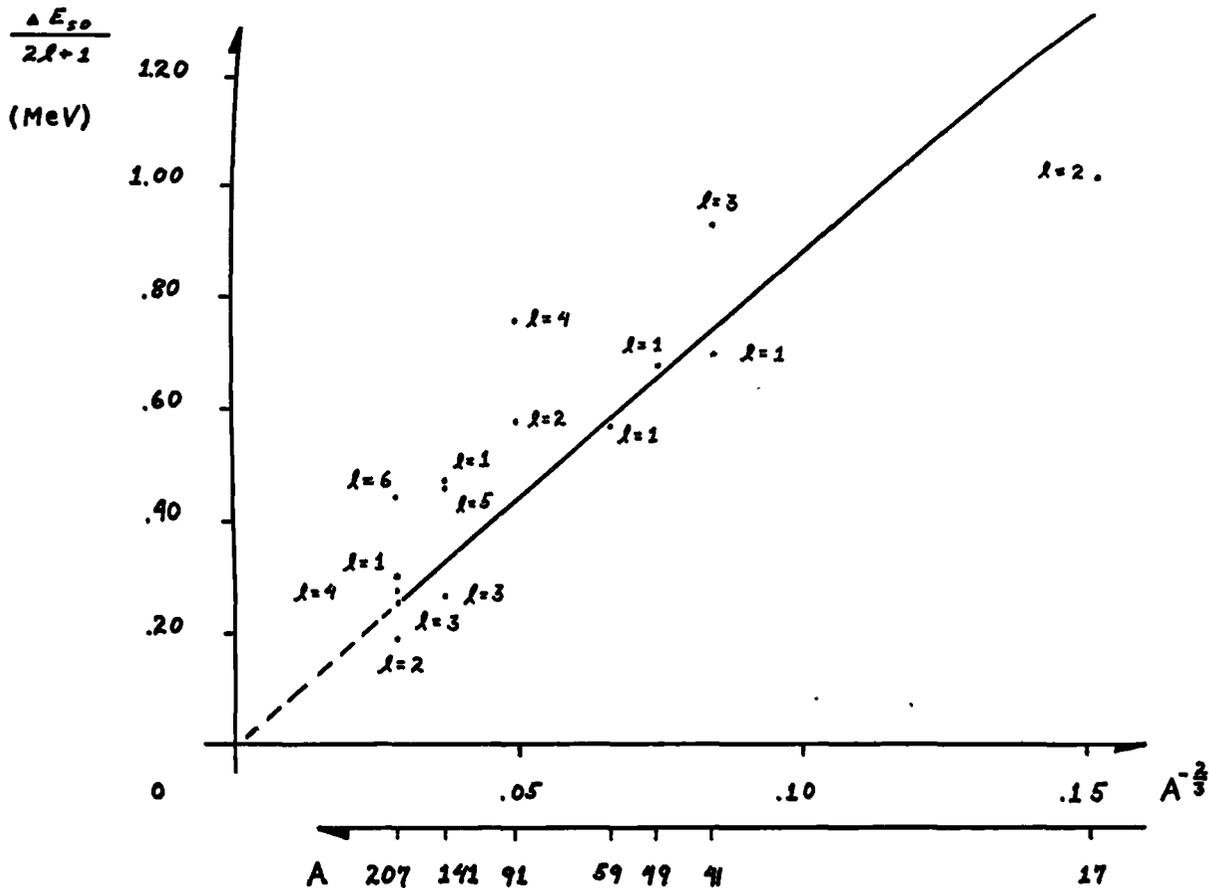


Figura 3.8. Ajuste de los rompimientos spin-órbita a una recta que pasa por el origen. Se obtiene una pendiente $K = 8.866$ MeV.

Tabla 3.4. Niveles de energía de neutrones en ^{208}Pb (MeV). En la columna EXP se muestran los valores experimentales. La columna SKY III contiene cálculos de Hartree-Fock con interacción de Skyrme III. Las últimas tres columnas muestran valores obtenidos con la fórmula (3.79).

NIVEL	EXP	SKY III	$\rho = 0$ $\epsilon = 0$	$\rho = -2$ $\epsilon = .3$	$\rho = -3$ $\epsilon = .6$
1s		-50.0	-50.3	-50.3	-50.3
1p		-45.3	-45.8	-45.9	-45.8
1d		-39.1	-40.0	-40.5	-40.1
2s		-36.0	-37.3	-37.9	-37.5
1f		-32.3	-32.9	-34.0	-33.3
2p		-27.5	-28.5	-29.8	-29.0
1g		-23.9	-24.5	-26.6	-25.2
2d		-18.7	-18.4	-20.9	-19.2
3s		-17.0	-15.8	-18.4	-16.7
1h		-15.3	-14.9	-18.3	-16.0
2f	-8.80	- 9.9	- 7.0	-11.1	- 8.4
3p	-7.90	- 7.6	- 2.6	- 7.1	- 4.1
1i		- 6.4	- 3.9	- 9.1	- 5.7
4s	-1.91		14.4	7.3	1.2

Tabla 3.5. Niveles de energía de protones en ^{208}Pb (MeV). En la columna EXP se muestran los valores experimentales. La columna SKY III contiene cálculos de Hartree-Fock con interacción de Skyrme III. Las tres últimas columnas muestran valores obtenidos con la fórmula (3.79).

NIVEL	EXP	SKY III	$\rho = 0$ $\epsilon = 0$	$\rho = -2$ $\epsilon = .3$	$\rho = -3$ $\epsilon = .6$
1s		-41.5	-41.8	-41.8	-41.8
1p		-36.5	-36.9	-37.1	-37.0
1d		-30.6	-30.7	-31.2	-30.8
2s		-27.5	-27.8	-28.5	-28.0
1f		-23.5	-23.0	-24.2	-23.4
2p		-18.4	-18.3	-19.7	-18.8
1g		-15.6	-14.0	-16.2	-14.7
2d	-9.10	- 9.7	- 7.3	-10.1	- 8.3
3s	-7.95	- 7.5	- 4.6	- 7.4	- 5.5
1h	-6.80	- 7.2	- 3.6	- 7.2	- 4.8
2f	-2.00		4.9	5.2	3.4

Tabla 3.6. Niveles de energía de protones en ^{120}Sn (MeV).

NIVEL	EXP	$\rho=0$ $\epsilon=0$	$\rho=-2$ $\epsilon=.3$	$\rho=-3$ $\epsilon=.6$
1s	-59.0	-45.3	-45.3	-45.3
1p	-43.8	-38.3	-38.7	-38.5
1d	-30.0	-29.4	-30.5	-29.8
2s	-28.4	-25.3	-26.6	-25.8
1f	-17.6	-18.4	-20.9	-19.4
2p	-13.2	-11.7	-14.7	-12.9

Tabla 3.7. Niveles de energía de protones en ^{58}Ni (MeV).

NIVEL	EXP	$\rho=0$ $\epsilon=0$	$\rho=-2$ $\epsilon=.3$	$\rho=-3$ $\epsilon=.6$
1s	-57.3	-40.7	-40.7	-40.7
1p	-37.6	-29.6	-30.5	-30.1
1d	-20.2	-15.4	-18.3	-16.9
2d	-12.6	- 9.0	-12.4	-10.8

Tabla 3.8. Niveles de energía de protones en ^{40}Ca (MeV).

NIVEL	EXP	$\rho=0$ $\epsilon=0$	$\rho=-2$ $\epsilon=.3$	$\rho=-3$ $\epsilon=.6$
1s	-49.1	-39.0	-39.0	-39.0
1p	-32.9	-24.9	-26.4	-25.8
1d	-12.3	- 6.9	-11.5	- 9.5
2s	-12.1	1.3	- 4.2	- 1.9

Tabla 3.9. Niveles de energía de protones en ^{32}S (MeV).

NIVEL	EXP	$p=0$	$p=-2$	$p=-3$
		$\epsilon=0$	$\epsilon=.3$	$\epsilon=.6$
1s	-51.2	-38.6	-38.6	-38.6
1p	-28.8	-22.2	-24.2	-23.5
1d	- 9.8	- 1.3	- 7.6	- 5.2
2s	-12.1	8.2	7.9	3.5

Tabla 3.10. Niveles de energía de protones en ^{16}O (MeV).

NIVEL	EXP	$p=0$	$p=-2$	$p=-3$
		$\epsilon=0$	$\epsilon=.3$	$\epsilon=.6$
1s	-44.0	-33.4	-33.4	-33.4
1p	-17.0	- 7.5	-12.2	-11.3

CAPITULO IV

CALCULO DE LA FORMULA DE MASAS NUCLEARES

En el capítulo II se mostró que de acuerdo con la teoría de muchos cuerpos es posible encontrar la energía de amarre total del núcleo a partir de los niveles de energía de partícula independiente. Asimismo se dió el formalismo para hacerlo. En el tercer capítulo, por otra parte, se encontraron dos expresiones analíticas distintas para los niveles de partícula independiente ϵ_{nj} . Una de ellas proviene de un potencial de oscilador armónico modificado, mientras que la otra se obtuvo a partir de un conjunto de potenciales de pozo cuadrado infinito.

El propósito que se persigue ahora es construir fórmulas de masas nucleares empleando cada una de las expresiones para los niveles de partícula independiente. Para hacerlo se empleará el resultado obtenido por el método de Brueckner-Hartree-Fock-Renormalizado (BHFR), de acuerdo con el cual la energía total del núcleo está dada por

$$E_A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^A [\langle k | T | k \rangle + \epsilon_k] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^A d_k U_k \quad (2.99)$$

Según se ha mencionado anteriormente, d_k se puede tomar como un parámetro independiente del nivel k . Así pues,

será más adecuada la expresión

$$\mathcal{E}_A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^A [\langle k | T | k \rangle + \mathcal{E}_k] + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^A U_k \quad (4.1)$$

Se empezará por describir con detalle el procedimiento para obtener las energías totales \mathcal{E}_A . Se explicará como se efectúan las sumas sobre los números cuánticos n y l , y como se llega al resultado final que consiste en un desarrollo en términos de potencias de $A^{1/3}$. Los primeros términos de la fórmula obtenida podrán compararse con los de la fórmula de Bethe-Weizsäcker-Bacher.

Una vez expuesto el procedimiento general, se calcularán las fórmulas de masas. Por comodidad, en adelante se llamará fórmula I a la que se obtenga a partir de los niveles de oscilador armónico y la fórmula II a la que se obtenga a partir de los niveles de pozo cuadrado.

En las fórmulas que se calculan en este capítulo no se incluye el llenamiento de capas. La razón para proceder de este modo es que la parte que se ignora requiere de una inversión considerable de tiempo, y corresponde a una parte mínima de la energía total (1%). Si se ha seguido el camino correcto, la desviación estandar que se obtenga al comparar con los valores experimentales de las masas debe ser semejante a la que produce la fórmula de Bethe-Weizsäcker-Bacher (2.7 MeV).

4.1 Cálculo de la energía total \mathcal{E}_A .

Se supondrá que los neutrones y los protones se pueden tratar como dos gases de Fermi independientes, y la energía total \mathcal{E}_A (por convención el negativo de la energía de enlace \mathcal{E}^A_A) se toma como la suma de las energías de ambos

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_n + \mathcal{E}_z . \quad (4.2)$$

En la exposición que sigue se considerará en particular la energía \mathcal{E}_n , entendiéndose que los resultados para la energía \mathcal{E}_z son enteramente análogos.

Puesto que los niveles de energía $\mathcal{E}_{n, \ell, j}$ están dados en términos de los números cuánticos n , ℓ y j , mientras que la sumatoria de la ec.(4.1) es sobre el índice k que identifica a cada partícula, debe suprimirse por establecer la conexión entre ambos. Esto puede conseguirse con ayuda del espectro de oscilador armónico mostrado en la figura 4.1. En ella se muestra que, rompiendo la degeneración en ℓ , y tomando en cuenta el rompimiento producido por la interacción spin-órbita, es posible obtener un espectro de niveles que reproduzca los números mágicos del núcleo. Esencialmente, cada nivel de oscilador armónico corresponde a una capa del núcleo, y para obtener los números mágicos debe incluirse, a partir de la cuarta capa ($n=3$), el nivel que en la capa superior tiene el mayor momento angular. Así pues, en la cuarta capa ($n=3$) debe incluirse el nivel $1g_{7/2}$, en la quinta ($n=4$) el $1h_{11/2}$, y en la sexta ($n=5$) el $1i_{13/2}$.

Aprovechando este hecho es posible encontrar una relación entre el número N de neutrones en un núcleo, la última capa que llenan n_F , y el factor de ocupación α en la siguiente capa, definido por

$$\alpha = \frac{N - N_{n_F}}{N_{n_{F+1}} - N_{n_F}} \quad (4.2)$$

en donde N_{n_F} y $N_{n_{F+1}}$ son números mágicos que limitan a dicha capa. A continuación se desarrollan en detalle las ideas expuestas en este párrafo, lo que servirá como un antecedente para calcular E_N .

El número total de partículas N puede escribirse como la suma de las partículas $N(n)$ que contiene cada capa. Así pues, si n_F es el nivel de oscilador armónico que corresponde a la última capa llena,

$$N = \sum_{n=0}^{n_F} N(n) + \alpha N(n_F + 1). \quad (4.3)$$

Para encontrar $N(n)$ se cuentan las partículas contenidas en los niveles que forman la capa. Cada nivel, caracterizado por los números cuánticos n , l y j , tiene una degeneración $2j+1$. De aquí que cada par (n, l) , para el cual j puede tomar los valores $l - \frac{1}{2}$ y $l + \frac{1}{2}$, contiene

$$\sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} (2j+1) = 2(2l+1) \quad (4.4)$$

partículas.

Los niveles que contiene cada capa son, según se ve de la figura 4.1 los mismos que se degeneran en cada

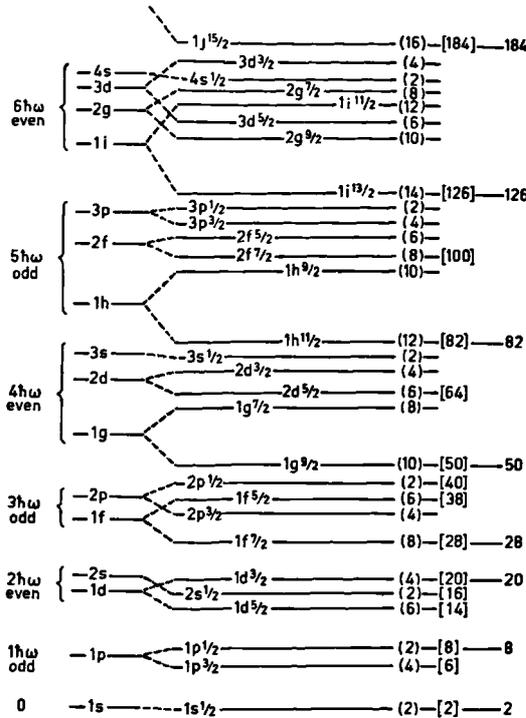


Figura 4.1. Secuencia de niveles de partícula independiente. Rompiendo la degeneración en el momento angular de los niveles de oscilador armónico, y tomando en cuenta la interacción spin-órbita, es posible reproducir los números mágicos del núcleo (tomada de Mayer y Jensen 1955).

nivel de oscilador armónico, y para reproducir los números mágicos, debe incluirse, a partir de la capa correspondiente a $n = 3$, el nivel con números cuánticos $n \rightarrow n+1$, $l = n \rightarrow n+1$, $j = l + \frac{1}{2} \rightarrow n + \frac{3}{2}$. El número de partículas en cada nivel de oscilador armónico es

$$2 \sum_{l(n)}' (2l+1) = (n+1)(n+2) \quad (4.5)$$

en donde

$$\sum_{l(n)}' \equiv \begin{cases} \sum_{l=0,2,\dots,n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \sum_{l=1,3,\dots,n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (4.6)$$

Tomando en consideración lo anterior, $N(n)$ queda

$$N(n) = (n+1)(n+2), \quad n \leq 2 \quad (4.7a)$$

$$N(n) = (n+1)(n+2) + 2(n+2), \quad n = 3 \quad (4.7b)$$

$$N(n) = (n+1)(n+2) + 2, \quad n \geq 4 \quad (4.7c)$$

De aquí que, volviendo a la ec.(4.3)

$$N = \sum_{n_F=0}^{n_F} (n+1)(n+2) + \alpha [(n_F+2)(n_F+3)] \quad (4.8)$$

si $N \leq 20$ ($n_F \leq 1$),

$$N = \sum_{n_F=0}^{n_F} (n+1)(n+2) + \alpha [(n_F+2)(n_F+3) + 2(n_F+3)] \quad (4.8b)$$

si $20 < N \leq 50$ ($n_F = 2$), y

$$N = \sum_{n_F=0}^{n_F} (n+1)(n+2) + 2(n_F+2) + \alpha [(n_F+2)(n_F+3) + 2(n_F+3) - 2(n_F+2)] \quad (4.8c)$$

si $N \geq 50$ ($n_F \geq 3$).

Al efectuar la suma, y definiendo $\gamma^3 \equiv 3N$, se obtiene respectivamente para cada una de estas fórmulas los siguientes polinomios

$$\gamma^3 = \pi_F^3 + (6 + 3\alpha)\pi_F^2 + (N + 15\alpha)\pi_F + (6 + 18\alpha) \quad (4.9a)$$

si $N \leq 20$ ($\pi_F \leq 1$),

$$\gamma^3 = \pi_F^3 + (6 + 3\alpha)\pi_F^2 + (11 + 21\alpha)\pi_F + (16 + 36\alpha) \quad (4.9b)$$

si $20 < N \leq 50$ ($\pi_F = 2$), y

$$\gamma^3 = \pi_F^3 + (6 + 3\alpha)\pi_F^2 + (17 + 15\alpha)\pi_F + (18 + 24\alpha) \quad (4.9c)$$

si $N \geq 50$ ($\pi_F \geq 3$).

Para mayor comodidad pueden resumirse estos tres polinomios en uno solo

$$\begin{aligned} \gamma^3 = \pi_F^3 + (6 + 3\alpha)\pi_F^2 + [(11 + 6\gamma_1) + \alpha(15 - 6\gamma_1 + 6\gamma_2)]\pi_F + \\ + [(6 + 12\gamma_1) + \alpha(18 - 12\gamma_1 + 18\gamma_2)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

en donde

$$\gamma_1 = 0 = \gamma_2 \quad \text{si } N \leq 20 \ (\pi_F \leq 1) \quad (4.11a)$$

$$\gamma_1 = 0 \ \text{y} \ \gamma_2 = 1 \quad \text{si } 20 < N \leq 50 \ (\pi_F = 2) \quad (4.11b)$$

$$\gamma_1 = 1 = \gamma_2 \quad \text{si } N \geq 50 \ (\pi_F \geq 3). \quad (4.11c)$$

La energía total \mathcal{E}_N puede obtenerse en forma análoga. En este caso debe considerarse la suma (4.1) que es de la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_N = \sum_{k=1}^N e_k &= \sum_{n=0}^{\pi_F} \sum_{l(n)}' \sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} (2j+1) e_{n\ell j} + \\
 &+ \gamma_1 2(\pi_F+2) e_{\pi_F+1, \pi_F+1, \pi_F+\frac{3}{2}} + \\
 &+ \alpha \left[\sum_{l(\pi_F+1)}' \sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} (2j+1) e_{\pi_F+1, l, j} + \gamma_2 2(\pi_F+3) \times \right. \\
 &\left. \times e_{\pi_F+2, \pi_F+2, \pi_F+\frac{5}{2}} - \delta_1 2(\pi_F+2) e_{\pi_F+1, \pi_F+1, \pi_F+\frac{3}{2}} \right], \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

en donde $e_{n\ell j}$ es una expresión que depende de la energía cinética y del potencial. Las sumas sobre j pueden efectuarse inmediatamente. En efecto, pues para los niveles de energía dados en el capítulo anterior se tendrá

$$e_{n\ell j} = e_{n\ell} - b \mathcal{C} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right], \quad (4.13)$$

en donde b es una constante que se obtiene al calcular $e_{n\ell j}$, y se puede demostrar que

$$\sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} (2j+1) e_{n\ell j} = 2(2l+1) e_{n\ell}. \quad (4.14)$$

Así pues puede efectuarse la suma sobre l , obteniendo como resultado un polinomio de orden k en π_F

$$\mathcal{E}_N = c \mathcal{P}_i^{(k)} \quad (4.15a)$$

en donde c es una constante y

$$\mathcal{P}_i^{(k)} = \pi_F^k + a_{k-1} \pi_F^{k-1} + \dots + a_0. \quad (4.15b)$$

Para traducir la expresión (4.15a) a una que aparezca en términos del número de partículas N , ó equivalentemente $\gamma^3 = 3N$, se hace uso del polinomio (4.10). Si $k \leq 3$, se divide el polinomio (4.15b) entre γ^3 , dado por el polinomio (4.10). Como resultado se obtiene un polinomio $P_2^{(k-3)}$ de orden $k-3$ y un residuo $P_3^{(2)}$ de orden 2 ó menor. De aquí que se pueda escribir

$$P_1^{(k)} = \gamma^3 (P_2^{(k-3)}) + P_3^{(2)}. \quad (4.16)$$

Si $k-3 \geq 3$ se procede análogamente hasta quedar sólo con polinomios de orden menor ó igual a 2. Estos pueden traducirse a expresiones en términos de γ mediante una raíz aproximada del polinomio (4.10).

En el apéndice II se demuestra que (4.10) tiene una sola raíz real dada por

$$\gamma_r = \gamma + R_1 + R_2 \gamma^{-1} + R_3 \gamma^{-2} + R_4 \gamma^{-3}, \quad (4.17)$$

en donde

$$R_1 = -(2 + \alpha), \quad (4.18a)$$

$$R_2 = \left[\left(-\frac{1}{3} + 2\delta \right) + P_2 \right], \quad (4.18b)$$

$$R_3 = \frac{P_1}{3}, \quad (4.18c)$$

$$R_4 = -\frac{P_1}{3} R_2, \quad (4.18d)$$

$$p_1 = \alpha(-1 + 6\gamma_1 - 6\gamma_2) + \alpha^2(3 - 6\gamma_1 + 6\gamma_2) - 2\alpha^3, \quad (4.19a)$$

$$p_2 = \alpha(1 - 2\gamma_1 + 2\gamma_2) - \alpha^2. \quad (4.19b)$$

Ahora bien, una vez realizado el desarrollo hasta aquí descrito, es posible escribir \mathcal{E}_N como un polinomio en términos de $\eta = (3N)^{1/3}$, y análogamente \mathcal{E}_Z como un polinomio en términos de $\zeta = (3Z)^{1/3}$. Para obtener la energía total $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_N + \mathcal{E}_Z$, cada potencia de η y ζ se desarrolla en una serie de $I = (N-2)/A$ como sigue

$$\eta^j = (3N)^{j/3} = \left(\frac{3A}{2}\right)^{j/3} (1+I)^{j/3} \approx \left(\frac{3A}{2}\right)^{j/3} \left(1 + \frac{j}{3}I + \frac{(j)(j-1)}{2}I^2\right) \quad (4.20a)$$

$$\zeta^j = (3Z)^{j/3} = \left(\frac{3A}{2}\right)^{j/3} (1-I)^{j/3} \approx \left(\frac{3A}{2}\right)^{j/3} \left(1 - \frac{j}{3}I + \frac{(j)(j-1)}{2}I^2\right). \quad (4.20b)$$

De este modo los dos polinomios podrán sumarse tomando términos de la forma

$$\eta^j + \zeta^j \approx 2\left(\frac{3}{2}A\right)^{j/3} \left[1 + \frac{(j)(j-1)}{2}I^2\right], \quad (4.21)$$

y la energía total tomará la forma

$$\mathcal{E}_A = \sum_j [B_{j0} A^{j/3} + B_{j2} A^{j/3} I^2] \quad (4.22)$$

en donde B_{jk} son coeficientes que dependen de los parámetros del modelo de capas, presentados en el capítulo anterior. La ec.(4.22) tiene esencialmente la forma de

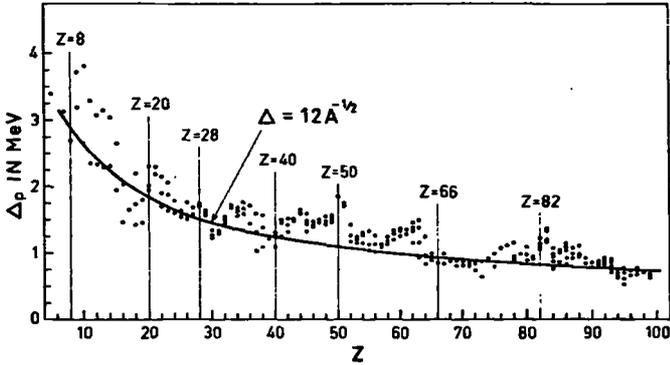
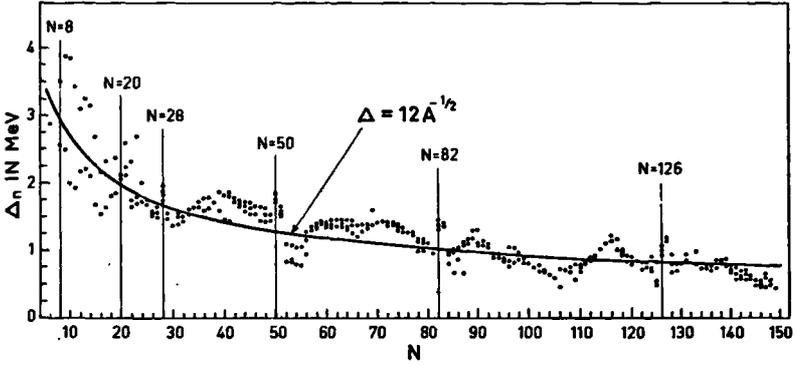


Figura 4.2. Energía de apareamiento empírica para neutrones y protones (tomada de Zeldes et al 1967).

la fórmula de Bethe-Weizsäcker-Bacher si $j = 3, 2, \dots$, aunque incluye términos adicionales. En este caso el término que va como A puede identificarse con el de volumen, el que va como $A^{2/3}$ con el de superficie, y el que va como $A I^2$ con el de asimetría. Los coeficientes B_{jk} , sin embargo, no son independientes.

La energía de Coulomb no se calculará a partir de los niveles de energía obtenidos en el capítulo anterior. Es más apropiado agregar la energía de Coulomb que se obtiene en base al modelo de Thomas-Fermi (Myers y Swiatecky 1969)

$$E_c = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 0.7636 Z^{-2/3} - 1.641 \bar{A}^{-2/3}). \quad (4.23)$$

También se agregará la energía de apareamiento con los valores empíricos mostrados en la fórmula 4.2 (Zeldes et al 1967)

$$E_p = \begin{cases} 0 & \text{para los núcleos par-par} \\ \Delta_n & \text{para los núcleos con } N \text{ impar- } Z \text{ par} \\ \Delta_p & \text{para los núcleos con } N \text{ par- } Z \text{ impar} \\ \Delta_n + \Delta_p & \text{para los núcleos impar-impar} \end{cases} \quad (4.24a)$$

$$\Delta_n = \Delta_p = 12 \bar{A}^{-1/2} \text{ MeV}, \quad (4.24b)$$

que es consistente con el modelo superfluido del núcleo (Bauer y Canuto 1963).

Ahora se pasa a construir explícitamente las fórmulas de masas. Aunque la descripción que se ha dado en esta sección es bastante general, en lo sucesivo se

tratará únicamente con núcleos de capas cerradas para los cuales $\alpha = 0$.

4.2 Cálculo de la fórmula I.

Para construir esta fórmula se parte de la expresión

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,l,j} = & -W_0'' + (n + \frac{3}{2}) \hbar \omega^* - \frac{K^2}{2} [\ell(\ell+1) + n(n+3) + \frac{9}{4}] \\ & - D [\ell(\ell+1) - \frac{1}{2}n(n+3)] - C [j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}], \end{aligned} \quad (4.25)$$

en donde

$$W_0'' = \frac{m_0}{m^*} (Y_0 + z I Y_1), \quad (4.26a)$$

$$\hbar \omega^* = \frac{5}{6} \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \frac{(\hbar c)^2}{m_0 c^2 r_0^2} \left(\frac{1-zI}{A} \right)^{1/3} \frac{m_0}{m^*}, \quad (4.26b)$$

$$\frac{K^2}{2} = \left[\frac{5}{6} \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \frac{(\hbar c)^2}{m_0 c^2 r_0^2} \right]^2 \left(\frac{1-zI}{A} \right)^{2/3} \frac{1}{8(Y_0 + z I Y_1)} \left(\frac{m_0}{m^*} - 1 \right), \quad (4.26c)$$

$$D = \gamma \frac{(\hbar c)^2}{2m_0 c^2 r_0^2} \frac{1}{A^{2/3}}, \quad (4.26d)$$

$$C = \left[\frac{5}{6} \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \frac{(\hbar c)^2}{m_0 c^2 r_0^2} \right]^2 \left(\frac{1-zI}{A} \right)^{2/3} \frac{\lambda}{2m_0 c^2} \frac{m_0}{m^*}, \quad (4.26e)$$

con

$$\frac{m_0}{m^*} = \frac{m_0}{m^*} \left[1 + z \frac{Y_1}{Y_0} I \left(\frac{m_0}{m^*} - 1 \right) \right], \quad (4.27a)$$

$$z = \begin{cases} 1 & \text{para protones} \\ -1 & \text{para neutrones,} \end{cases} \quad (4.27b)$$

$$I = \frac{N-Z}{A} \quad (4.27c)$$

Se propone emplear la ec.(4.25) para llevar a cabo la suma (4.1) que puede escribirse como

$$E_A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^A [(1-d) T_k + (1+d) \epsilon_k] \quad (4.28)$$

La energía cinética $T_k \equiv \langle k | T | k \rangle$ se puede calcular a partir del teorema del virial que, tomando en cuenta la no localidad (Lemmer 1960) está dada por

$$T_k = \frac{m^*}{m_0} \left\langle \frac{1}{2} m_0 \omega^2 r^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{m^*}{m_0} \left(n + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega^* \quad (4.29)$$

Así pues, cada término $e_{n,j}$ de la sumatoria tiene la forma

$$\begin{aligned} e_{n,j} = & -\frac{1}{2} W_0'' (1+d) + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^*}{m_0} \right) + d \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^*}{m_0} \right) \right] \left(n + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega^* \\ & - \frac{\kappa^2}{4} (1+d) \left[\mathcal{L}(\mathcal{L}+1) + n(n+3) + \frac{9}{2} \right] - \frac{\mathcal{D}}{2} (1+d) \left[\mathcal{L}(\mathcal{L}+1) - \frac{1}{2} n(n+3) \right] \\ & - \frac{\mathcal{C}}{2} (1+d) \left[j(j+1) - \mathcal{L}(\mathcal{L}+1) - \frac{3}{4} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por comodidad en la escritura conviene definir

$$C_1 = -\frac{1}{2} W_0'' (1+d) \quad , \quad (4.31a)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^*}{m_0} \right) + d \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^*}{m_0} \right) \right] \quad , \quad (4.31b)$$

$$c_3 = -\frac{\kappa^2}{4}(1+d), \quad (4.31c)$$

$$c_4 = -\frac{D}{2}(1+d), \quad (4.31d)$$

$$c_5 = -\frac{C}{2}(1+d). \quad (4.31e)$$

Como en la sección anterior, se separará \mathcal{E}_A en una suma sobre neutrones \mathcal{E}_N y otra sobre protones \mathcal{E}_Z . A continuación se calcula \mathcal{E}_N , entendiéndose que los resultados para \mathcal{E}_Z son enteramente análogos.

Empleando los resultados (4.12) y (4.14) se tendrá para la expresión (4.30) (con $d=0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N = & \sum_{n=0}^{n_F} \sum_{l(n)}' \left\{ c_1 + c_2 \left(n + \frac{3}{2} \right) + c_3 \left[2(n+3) + \frac{9}{2} \right] + c_4 \left[\frac{1}{2} n(n+3) \right] \right\} \times \\ & \times 2(2l+1) + \\ & + \sum_{n=0}^{n_F} \sum_{l(n)}' \left\{ c_1 + c_4 \right\} 2(2l+1)l(l+1) + \gamma_1 2(n_F+1) e_{n_F+1, n_F+1, n_F+\frac{3}{2}} \quad (4.32) \end{aligned}$$

Efectuando la suma sobre l ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N = & \sum_{n=0}^{n_F} \left\{ c_1 + \frac{3}{2} c_2 + \frac{9}{2} c_3 \right\} (n+1)(n+2) + \sum_{n=0}^{n_F} c_4 n(n+1)(n+2) + \\ & + \sum_{n=0}^{n_F} \frac{3}{2} c_3 n(n+1)(n+2) + \gamma_1 2(n_F+1) e_{n_F+1, n_F+1, n_F+\frac{3}{2}} \quad (4.33) \end{aligned}$$

Las sumas sobre n se pueden efectuar directamente y se obtiene \mathcal{E}_N como un polinomio en términos de n_F :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_N = & \left[c_1 + \frac{3}{2}c_2 + \frac{9}{2}c_3 \right] N + c_2 \left[\frac{1}{4}\pi_F^4 + \frac{3}{2}\pi_F^3 + \left(\frac{4}{9} + 2\delta_1\right)\pi_F^2 + \left(\frac{3}{2} + 6\delta_1\right)\pi_F + 4\delta_1 \right] + \\
 & + \frac{3}{2}c_3 \left[\frac{1}{5}\pi_F^5 + 2\pi_F^4 + (7+4\delta_1)\pi_F^3 + (10+24\delta_1)\pi_F^2 + \left(\frac{29}{5} + 44\delta_1\right)\pi_F + 24\delta_1 \right] + \\
 & + c_4 \left[\pi_F^3 + 3\pi_F^2 + 2\pi_F \right] \gamma_1 + c_5 \left[2\pi_F^2 + 6\pi_F + 4 \right] \delta_1. \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

Traduciendo cada polinomio a polinomios en términos de η , como se indicó en la sección anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \left[\pi_F^4 + 6\pi_F^3 + (11+8\delta_1)\pi_F^2 + (6+24\delta_1)\pi_F + 4\delta_1 \right] = \\
 & = \frac{1}{4} \left[\eta^4 - 2\eta^3 + \frac{1}{3}\eta^2 + \delta_1\eta - \frac{5}{3}\delta_1 + \frac{7}{3}\delta_1\eta^{-1} \right], \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{5} \left[\pi_F^5 + 10\pi_F^4 + (35+20\delta_1)\pi_F^3 + (50+120\delta_1)\pi_F^2 + (24+220\delta_1)\pi_F + 120\delta_1 \right] = \\
 & = \frac{1}{5} \left[\eta^5 + \left(-\frac{10}{3} + 10\delta_1\right)\eta^3 + 8\delta_1\eta^2 + \frac{1}{4}\eta \right], \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

$$\pi_F^3 + 3\pi_F^2 + 2\pi_F = \eta^3 - 3\eta^2 - 3\eta + 10, \quad (4.37)$$

$$2\pi_F^2 + 6\pi_F + 4 = 2\eta^2 - 2\eta - \frac{20}{3}. \quad (4.38)$$

Antes de proceder a sumar la energía de los neutrones con la de los protones conviene hacer notar la diferencia que existe en cada caso para los coeficientes c . Esta se puede exhibir claramente escribiendo

$$c_{1N} = T_1 + T_2 I^2 = c_{1Z} \quad (4.39)$$

$$c_{2N} = \frac{T}{A^{2/3}} \left(T_3 - T_4 I \right) \quad (4.40a)$$

$$c_{2z} = \frac{Y}{A^{2/3}} (T_3 + T_4 I), \quad (4.40b)$$

$$c_{3H} = -\frac{Y^2}{A^{4/3}} (T_5 - T_6 I + T_7 I^2), \quad (4.41a)$$

$$c_{3z} = -\frac{Y^2}{A^{4/3}} (T_5 + T_6 I + T_7 I^2), \quad (4.41b)$$

$$c_{4H} = -\frac{1}{A^{1/3}} T_8 = c_{4z}, \quad (4.42)$$

$$c_{5H} = -\frac{Y^2}{A^{4/3}} (T_9 - T_{10} I), \quad (4.43a)$$

$$c_{5z} = -\frac{Y^2}{A^{4/3}} (T_9 + T_{10} I), \quad (4.43b)$$

en donde las T_i 's son funciones no lineales de los parámetros del modelo de capas:

$$T_1 = -\frac{1}{2} \frac{m}{m^*} \gamma_0 (1+d), \quad (4.44)$$

$$T_2 = T_1 \frac{V_i}{V_0} \left[\left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_i}{V_0} - \frac{m}{m^*} \right], \quad (4.45)$$

$$T_3 = \frac{5}{16} \left[\frac{(\hbar c)^2}{m c^2} \frac{1}{\gamma_0^2} \right] \left[\left(1 + 2 \frac{m}{m^*} \right) + d \left(-1 + 2 \frac{m}{m^*} \right) \right], \quad (4.46)$$

$$T_4 = \frac{5}{8} \left[\frac{(\hbar c)^2}{m c^2} \frac{1}{\gamma_0^2} \right] \frac{m}{m^*} \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_i}{V_0} (1+d), \quad (4.47)$$

$$T_5 = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{4} \right)^2 \left[\frac{(\hbar c)^2}{m c^2} \frac{1}{\gamma_0^2} \right]^2 \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) (1+d), \quad (4.48)$$

$$T_6 = T_5 \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_i}{V_0}, \quad (4.49)$$

$$T_7 = T_6 \frac{V_1}{V_0}, \quad (4.50)$$

$$T_8 = \frac{4}{4} \left[\frac{(k_0)^2}{m c^2} \frac{1}{r_0^2} \right] (1+d), \quad (4.51)$$

$$T_9 = \frac{1}{8} \left(\frac{5}{4} \right)^2 \frac{\lambda}{m c^2} \left[\frac{(k_0)^2}{m c^2} \frac{1}{r_0^2} \right] \frac{m}{m^*} (1+d), \quad (4.52)$$

$$T_{10} = T_9 \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0}. \quad (4.53)$$

En total son 6 parámetros del modelo óptico, más el parámetro d , los que definen estas 10 funciones.

Una vez que se toma la suma de la energía de los neutrones con la de los protones, se obtiene la energía total

$$E_A = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=-2}^3 \sum_{k=0,2} c_{ijk} T_i A^{j/3} I^k \quad (4.54)$$

en donde c_{ijk} son coeficientes numéricos que se muestran en el apéndice III.

La ventaja de escribir E_A de la forma (4.54) es que, por ser lineal en las T_i , es posible hacer un ajuste por mínimos cuadrados tomándolas como parámetros. Para escribirla en una forma semejante a la de la fórmula de Bethe-Weizsäcker-Bacher basta definir los coeficientes

$$B_{ijk} = \sum_i c_{ijk} T_i. \quad (4.55)$$

De este modo, el coeficiente del término de volúmen ($\sim A$) comparable con el de la fórmula de BWB sería

$$B_{30} = T_1 + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} T_3 - \frac{27}{20} \left(\frac{3}{2}\right)^{4/2} T_5.$$

La fórmula (4.54) no tiene un término que pueda compararse con el de superficie ($\sim A^{3/2}$). De los coeficientes del apéndice III se observa que $B_{20} = 0 = B_{22}$.

4.3 Cálculo de la fórmula II.

Se parte de la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n,l} = & \frac{m_0}{m^*} \left[-(V_0 + z V_1 I) + \right. \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{2m_0 v_0^2 A^{3/2}} (1 - 2\sigma A^{p/2}) \left\{ \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \bar{n}^2 - l(l+1) - A \left[l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.56)$$

en donde $\frac{m_2}{m^*} = \frac{m}{m^*} \left[1 + z \left(\frac{m}{m^*} - 1\right) \frac{V_1}{V_0} I \right]$ y p es un entero menor ó igual que -1.

En este caso conviene reescribir la ec.(4.1) para la energía total como

$$\mathcal{E}_A = \sum_k \left[\langle k | T | k \rangle + \frac{1}{2} (1 + \alpha) U_k \right]. \quad (4.57)$$

De la ec.(4.56) se tiene

$$\begin{aligned} \langle n, l | T | n, l \rangle = & \frac{m_0}{m^*} \times \\ & \times \frac{\hbar^2}{2m_0 v_0^2 A^{3/2}} (1 - 2\sigma A^{p/2}) \left\{ \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \bar{n}^2 - l(l+1) \right\} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$U_k = \frac{m_0}{m^*} \left\{ -(V_0 + z V_1 I) - \frac{\hbar^2}{2m_0 v_0^2 A^{2/3}} (1 - 2\sigma A^{1/3}) \Delta [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] \right\}. \quad (4.59)$$

Así pues, cada término $e_{n,l,j}$ de la suma (4.57) está dado por

$$e_{n,l,j} = \frac{m_0}{m^*} \left[-\frac{1}{2} (1+d) (V_0 + z V_1 I) + \frac{\hbar^2}{2m_0 v_0^2 A^{2/3}} (1 - 2\sigma A^{1/3}) \times \right. \\ \left. \times \left\{ \left(\frac{n+2}{2} \right)^2 n^2 - l(l+1) - \frac{1}{2} (1+d) \Delta [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] \right\} \right], \quad (4.60)$$

y por lo tanto la energía de los neutrones para núcleos con capas cerradas puede escribirse como

$$E_N = -\frac{1}{2} (1+d) \frac{m_0}{m^*} (V_0 + z V_1 I) N + \\ + \frac{m_0}{m^*} \frac{\hbar^2}{2m_0 v_0^2 A^{2/3}} \sum_{n=0}^{n_F} \sum'_{l(n)} 2(2l+1) \left\{ \left(\frac{n+2}{2} \right)^2 n^2 - l(l+1) \right\} + \\ + \frac{m_0}{m^*} \frac{\hbar^2}{2m_0 v_0^2} (-2\sigma A^{1/3}) \sum_{n=0}^{n_F} \sum'_{l(n)} n 2(2l+1) \left\{ \left(\frac{n+2}{2} \right)^2 n^2 - l(l+1) \right\} + \\ + \frac{m_0}{m^*} Y_1 \lambda (n_F + 2) \left[e_{n_F+2, n_F+2, n_F+\frac{3}{2}} - \left[-\frac{1}{2} (1+d) (V_0 + z V_1 I) \right] \right]. \quad (4.61)$$

Esta última expresión se puede tratar separadamente en tres términos:

$$E_N = E_N^{(1)} + E_N^{(2)} + E_N^{(3)}, \quad (4.62)$$

en donde

$$E_N^{(1)} = -\frac{1}{2}(1+d) \frac{m_0}{m^*} (V_0 + \tau V_1 I), \quad (4.63)$$

$$E_N^{(2)} = \frac{m_0}{m^*} \frac{\hbar^2}{2m_0 \gamma_0^2 A^{2/3}} \left\{ \sum_{n=0}^{n_F} \sum_{l(n)}' 2(2l+1) \left[\left(\frac{n+2}{2} \right)^2 \pi^2 - l(l+1) \right] + \right. \\ \left. + \gamma_1 \left[\left(\frac{\pi^2}{2} - 2 \right) n_F^3 + \left(4\pi^2 - 10 - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) n_F^2 + \left(\frac{21}{2} \pi^2 - 16 - 6 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) n_F + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(9\pi^2 - 8 - 4 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \right\}, \quad (4.64)$$

$$E_N^{(2)} = \frac{m_0}{m^*} \frac{\hbar^2}{2m_0 \gamma_0^2} (-2\tau A^{(p-2)/3}) \left\{ \sum_{n=0}^{n_F} \sum_{l(n)}' n 2(2l+1) \left[\left(\frac{n+2}{2} \right)^2 \pi^2 - l(l+1) \right] + \right. \\ \left. + \gamma_1 \left[\left(\frac{\pi^2}{2} - 2 \right) n_F^4 + \left(\frac{9}{2} \pi^2 - 12 - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) n_F^3 + \left(\frac{29}{2} \pi^2 - 26 - 8 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) n_F^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{39}{2} \pi^2 - 24 - 10 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) n_F + \left(9\pi^2 - 8 - 4 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \right\}. \quad (4.65)$$

Efectuando las sumas sobre n y l como se ha indicado anteriormente,

$$E_N^{(2)} = \frac{m_0}{m^*} \frac{\hbar^2}{2m_0 \gamma_0^2 A^{2/3}} \left\{ \left(\frac{\pi^2}{20} - \frac{1}{10} \right) n_F^5 + \left(\frac{9}{16} \pi^2 - 1 \right) n_F^4 + \left[\left(\frac{69}{24} \pi^2 - \frac{7}{2} \right) + \gamma_1 \left(\frac{\pi^2}{2} - 2 \right) \right] n_F^3 + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{83}{16} \pi^2 - 5 \right) + \gamma_1 \left(4\pi^2 - 10 - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] n_F^2 + \left[\left(\frac{629}{120} \pi^2 - \frac{12}{5} \right) + \gamma_1 \left(\frac{21}{2} \pi^2 - 16 - 6 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] n_F + \right. \\ \left. + \left[2\pi^2 + \gamma_1 \left(9\pi^2 - 8 - 4 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_N^{(3)} = & \frac{m_0}{m^*} \frac{\hbar^2}{2m_0 v_0^2} (-2\sigma A^{(p+2)/3}) \left\{ \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{12} \right) \pi_F^6 + \left(\frac{19}{40} \pi^2 - \frac{17}{20} \right) \pi_F^5 + \right. \\
 & + \left[\left(\frac{101}{48} \pi^2 - \frac{37}{12} \right) + 2\gamma_1 \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \right] \pi_F^4 + \left[\left(\frac{9}{2} \pi^2 - \frac{19}{4} \right) + 2\gamma_1 \left(\frac{9}{4} \pi^2 - 6 - \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \pi_F^3 + \\
 & + \left[\left(\frac{241}{48} \pi^2 - \frac{17}{6} \right) + 2\gamma_1 \left(\frac{29}{4} \pi^2 - 13 - 4 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \pi_F^2 + \\
 & + \left[\left(\frac{213}{120} \pi^2 - \frac{2}{5} \right) + 2\gamma_1 \left(\frac{39}{4} \pi^2 - 12 - 5 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \pi_F + \\
 & \left. + 2\gamma_1 \left(\frac{9}{2} \pi^2 - 4 - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right\}, \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

que expresadas en términos de γ toman las formas

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_N^{(2)} = & \frac{m_0}{m^*} \frac{\hbar^2}{2m_0 v_0^2} A^{p/3} \left\{ \left(\frac{\pi^2}{20} - \frac{1}{10} \right) \gamma^5 + \frac{1}{16} \pi^2 \gamma^4 + \left[\left(\frac{1}{24} \pi^2 + \frac{1}{3} \right) - \gamma_1 \right] \gamma^3 + \right. \\
 & + \left[\frac{1}{48} \pi^2 + \gamma_1 \left(\frac{1}{2} \pi^2 + 2 - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \gamma^2 + \\
 & \left. + \left[\left(\frac{\pi^2}{180} - \frac{1}{90} \right) + \gamma_1 \left(-\frac{5}{12} \pi^2 + \frac{13}{3} + 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \gamma + \gamma_1 \left[\frac{25}{12} \pi^2 - \frac{20}{3} + \frac{20 \Delta(1+d)}{2} \right] \right\} \quad (4.68)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_N^{(3)} = & \frac{m_0}{m^*} \frac{\hbar^2}{2m_0 v_0^2} (-2\sigma A^{(p+2)/3}) \left\{ \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{12} \right) \gamma^6 + \left(-\frac{1}{40} \pi^2 + \frac{3}{20} \right) \gamma^5 + \left(-\frac{1}{16} \pi^2 + \frac{1}{4} - \gamma_1 \right) \gamma^4 + \right. \\
 & + \left[\left(-\frac{1}{24} \pi^2 - \frac{1}{2} \right) + \gamma_1 \left(\frac{3}{4} \pi^2 + \frac{5}{2} - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \gamma^3 + \left[\left(-\frac{1}{48} \pi^2 + \frac{1}{12} \right) + \gamma_1 \left(-\pi^2 + \frac{14}{3} + 4 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \gamma^2 \\
 & + \left[\left(-\frac{1}{360} \pi^2 + \frac{1}{60} \right) + \gamma_1 \left(-\frac{11}{3} \pi^2 - \frac{23}{2} + 8 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \gamma + \gamma_1 \left(\frac{15}{4} \pi^2 - \frac{98}{3} - \frac{20 \Delta(1+d)}{2} \right) \right\} \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

Antes de continuar conviene hacer una observación sobre la potencia p en $\mathcal{E}_N^{(3)}$. Fuesto que $\gamma \sim A^{1/3}$, la dependencia en A del primer término en (4.69) va como $A^{(p+2)/3}$. Si $p \geq 0$, en la energía total aparecen términos del orden de $A^{4/3}$ y mayores, pero por la estructura que

tiene la fórmula de BWB no se espera que exista ningún término de orden mayor que $A^{2/3}$. Por lo tanto conviene fijar la restricción $p \leq -1$, que se estableció en forma arbitraria en el capítulo anterior.

El siguiente paso consiste en sumar las contribuciones de protones y neutrones, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_A^{(1)} &= \mathcal{E}_N^{(1)} + \mathcal{E}_Z^{(1)} = \\
 &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{m}{m_p} V_0 (1+d) - \frac{1}{2} \frac{m}{m_p} V_1 \left[\left(\frac{m}{m_p} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} - \frac{m}{m_p} \right] (1+d) I^2 \right\} A, \quad (4.70) \\
 \mathcal{E}_A^{(2)} &= \mathcal{E}_N^{(2)} + \mathcal{E}_Z^{(2)} = \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m_p} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\pi^2}{20} - \frac{1}{10} \right) \left\{ 3 + \left[\frac{5}{3} - 5 \left(\frac{m}{m_p} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} \right] I^2 \right\} A + \\
 &+ \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m_p} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{16} \left\{ 3 + \left[\frac{2}{3} - 4 \left(\frac{m}{m_p} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} \right] I^2 \right\} A^{2/3} + \\
 &+ \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m_p} 3 \left[\left(\frac{1}{24} \pi^2 + \frac{1}{3} \right) - \delta_1 \right] \left\{ 1 - \left(\frac{m}{m_p} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} I^2 \right\} A^{1/3} + \\
 &+ \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m_p} 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left[\frac{1}{48} \pi^2 + \delta_1 \left(\frac{1}{2} \pi^2 + 2 - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \times \\
 &\quad \times \left\{ 1 + \left[-\frac{1}{9} - \frac{4}{3} \left(\frac{m}{m_p} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} \right] I^2 \right\} A^0 + \\
 &+ \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m_p} 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{\pi^2}{180} - \frac{1}{90} \right) + \delta_1 \left(-\frac{5}{12} \pi^2 + \frac{13}{3} + 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \times \\
 &\quad \times \left\{ 1 + \left[-\frac{1}{9} - \frac{1}{3} \left(\frac{m}{m_p} - 1 \right) \frac{m}{m_p} \right] I^2 \right\} A^{-1/3} + \quad (4.71) \\
 &+ \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m_p} \delta_1 \left(\frac{25}{6} \pi^2 - \frac{40}{3} + \frac{40}{3} \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) A^{-2/3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_A^{(3)} &= \mathcal{E}_N^{(3)} + \mathcal{E}_Z^{(3)} = \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m^*} \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{12} \right) \left\{ 9 + 9 \left[1 - 2 \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} \right] I^2 \right\} A^{(p+4)/3} - \\
 &\quad - \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m^*} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(-\frac{1}{40} \pi^2 + \frac{3}{20} \right) \left\{ 6 + 10 \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} \right] I^2 \right\} A^{(p+3)/3} - \\
 &\quad - \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m^*} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left(-\frac{1}{16} \pi^2 + \frac{1}{4} - \delta_1 \right) \left\{ 6 + \left[\frac{4}{3} - 8 \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} \right] I^2 \right\} A^{(p+2)/3} - \\
 &\quad - \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m^*} \left[\left(-\frac{1}{24} \pi^2 - \frac{1}{2} \right) + \gamma_1 \left(\frac{3}{4} \pi^2 + \frac{5}{2} - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \left\{ 6 - 6 \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} I^2 \right\} \times \\
 &\quad \quad \quad \times A^{(p+1)/3} - \\
 &\quad - \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m^*} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left[\left(-\frac{1}{48} \pi^2 + \frac{1}{12} \right) + \gamma_1 \left(-\frac{1}{3} \pi^2 + \frac{14}{3} + 4 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \times \\
 &\quad \quad \quad \times \left\{ 4 + \left[-\frac{4}{9} - \frac{8}{3} \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} \right] I^2 \right\} A^{p/3} - \\
 &\quad - \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m^*} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left[\left(-\frac{\pi^2}{360} + \frac{1}{60} \right) + \gamma_1 \left(-\frac{11}{3} \pi^2 - \frac{23}{2} + 8 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right] \times \\
 &\quad \quad \quad \times \left\{ 4 - \frac{4}{3} \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} \right] I^2 \right\} A^{(p-1)/3} - \\
 &\quad - \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \frac{m}{m^*} 4\delta_1 \left(\frac{15}{4} \pi^2 - \frac{98}{3} - \frac{40}{3} \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) A^{(p-2)/3} \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

La energía total se puede escribir en la siguiente forma concisa y práctica para programar:

$$\mathcal{E}_A = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=2, k=0, 2}^3 a_{ijk} T_i A^{i/2} I^k - \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=2, k=0, 2}^3 b_{ijk} T_i A^{(p+j)/3} I^k \quad (4.73)$$

en donde

$$T_1 = -\frac{1}{2} \frac{m}{m^*} V_0 (1+d), \quad (4.74)$$

$$T_2 = T_1 \frac{V_1}{V_0} \left[\left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0} - \frac{m}{m^*} \right], \quad (4.75)$$

$$T_3 = \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_1}{V_0}, \quad (4.76)$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{V_i}{V_0}, \quad (4.77)$$

y los coeficientes numéricos a_{ijk} y b_{ijk} se muestran en el apéndice IV.

Alternativamente, la ecuación (4.73) puede escribirse

$$E_A = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=-2}^3 \sum_{k=0,2} c_{ijk} T_i A^{j/3} I^k \quad (4.78)$$

si se definen los coeficientes

$$c_{ijk} = a_{ijk} - \sigma b_{i(j-p)k} \quad (4.79)$$

y se toma $c_{ijk} = 0$ si $j-p < -2$.

La forma final de la energía del núcleo estará dada por la ec.(4.78), a la que habrá que agregar la energía de Coulomb dada por la ec.(4.23) y la de apareamiento dada por la ec. (4.24).

$$E_A = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=-2}^3 \sum_{k=0,2} c_{ijk} T_i A^{j/3} I^k + E_C + E_p. \quad (4.80)$$

Esta fórmula tiene dos ventajas sobre la que se obtuvo en la sección anterior. En primer lugar, contiene todas las potencias relevantes de $A^{1/3}$. En segundo, en ella aparecen únicamente cuatro funciones T_i de los parámetros del modelo óptico, en vez de diez que aparecen en la fórmula anterior. Por este hecho será más estable ante variaciones de los parámetros.

La fórmula que se ha construido es estrictamente válida sólo para núcleos con capas cerradas. Además, cuando se sumaron las energías ϵ_n y ϵ_z , no se hizo una distinción entre un parámetro γ , que sirviera para contar el número de neutrones y protones separadamente. Debido a esto, la ec.(4.80) es válida para $N, Z < 50$ si $\gamma=0$ y para $N, Z \geq 50$ si $\gamma=1$, pero no para casos intermedios en que $N > 50$ ($Z > 50$) y $Z < 50$ ($N < 50$).

A pesar de todo, si el principio sobre el que se ha construido la fórmula es válido, deben esperarse resultados semejantes a los obtenidos en la fórmula de BWB. Antes de proceder a calcular refinamientos ulteriores es necesario investigar si se verifica esta suposición. El ajuste numérico a los valores experimentales se llevará a cabo en el siguiente capítulo.

CAPITULO V

AJUSTE NUMERICO DE LA FORMULA DE MASAS

En el capítulo anterior se obtuvieron dos expresiones para la energía de amarre total de los núcleos. Ambas tienen la forma de desarrollos en términos de potencias de $A^{1/3}$, lo que permite relacionarlas hasta cierto punto con fórmulas del tipo de la de Bethe-Weizsäcker-Bacher (BWB) y de Myers y Swiatecki (MS). En esta comparación debe tomarse en cuenta, sin embargo, que las fórmulas aquí obtenidas contienen un número de términos mayor.

La fórmula I, que se obtiene a partir de los niveles de energía de un oscilador armónico modificado, carece de un término que vaya como $A^{2/3}$ y que pueda compararse con el término de superficie de la fórmula de BWB. Cabe mencionar que en trabajos anteriores de Bauer y Canuto (1967) y Bauer (1976), en los que se partió de estos mismos niveles de energía, sí se obtuvo dicho término. Esto se debe a que en ellos se construyó la fórmula de masas empleando un procedimiento en el cual se promediaban los niveles, a diferencia de este trabajo, en el que se les ha sumado directamente.

La fórmula II, que surge de un conjunto de pozos cuadrados infinitos, por otro lado, es completa en el sentido de que contiene todas las potencias relevantes de $A^{1/3}$. Debido a esto, y a que es más estable respecto a cambios

en los parámetros de partícula independiente, parece ser más adecuada para ajustarla a los valores experimentales de las masas nucleares. En este capítulo se describe la forma como se realiza dicho ajuste, y se muestran los resultados obtenidos. Se empieza por describir el procedimiento que se ha seguido, y se explica qué se espera obtener. A continuación se discuten algunos resultados. Finalmente se hace una comparación con fórmulas del tipo de las de BWB y MS.

5.1 Procedimiento.

Se desea ajustar la expresión

$$E_A = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=-2}^3 \sum_{k=0,2} c_{ijk} T_i A^{j/3} I^k + E_d + E_p \quad (5.1)$$

descrita en la sección 4.3, que es el negativo de la energía de amarre E_A . Por ser lineal en las funciones T_i de los parámetros de partícula independiente, es posible ajustar por mínimos cuadrados las energías experimentales tratando a dichas funciones como parámetros ajustables.

Ahora bien, de las expresiones (4.74) a (4.77) para las T_i 's se encuentra que

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_4}{T_3}}{\frac{T_4}{T_3} - 1}, \quad (5.2)$$

$$\frac{m}{m^*} = \frac{T_4}{T_3(V_1/V_0)} + 1, \quad (5.3)$$

$$r_0^2 = \frac{k^2}{2m} \frac{m}{m^*} \frac{1}{T_3}, \quad (5.4)$$

y

$$V_0(1+d) = - \frac{2T_i}{m/m^*}, \quad (5.5)$$

de modo que una vez obtenido el ajuste para las T_i 's se consigue toda esta información sobre los parámetros de partícula independiente.

Sin embargo el ajuste no es único, debido a que para llevarlo a cabo se debe proporcionar cierta información .

En primer lugar, debe escogerse el valor del entorpo ρ , con lo que se determina la dependencia de Λ en la energía $E_A^{(3)}$ dada en la ec.(4.72). También debe fijarse el parámetro ∇ , que aparece en los coeficientes c_{ijk} , y que se relaciona con la misma energía. Por otra parte, también es necesario proporcionar el valor del coeficiente α_c de la energía de Coulomb (4.23).

Finalmente debe darse un valor tentativo al coeficiente $\Lambda(1+d)/2$ que aparece en algunos de los coeficientes c_{ijk} . Se recuerda al respecto que el parámetro está definido por

$$\Lambda = 2K \frac{m c^2}{\hbar c^2} \frac{\gamma_0^2}{m/m^*}, \quad (3.83)$$

en donde K es una constante que se ajusta a los rompimientos de spin-órbita experimentales. Debido a que $\Lambda(1+d)/2$ aparece en los coeficientes c_{ijk} es necesario dar un valor tentativo a γ_0/m , con la esperanza de que no difiera significativamente del que se obtenga eventualmente

de la ec.(5.4). Se puede escoger $\alpha = .15$, valor que es consistente con cálculos de Brueckner-Hartree-Fock-Renormalizado (Davies y Mc. Carthy 1971). En todo caso, la contribución de esta parte tiene una importancia pequeña en la energía total (ver sección 4.3), y los ajustes que se realicen serán poco sensibles a cambios razonables de γ_0/m^* (entre 1.10 y 1.30 fm., por ejemplo).

Como resultado del ajuste, empleando las ecs.(5.2) a (5.5) se espera obtener valores físicamente razonables para los parámetros de partícula independiente.

En la práctica se ha seguido el siguiente procedimiento:

- 1.) Para todo ajuste realizado se ha escogido $K \frac{(1+\alpha)}{2} = 8.0$ MeV y como valor tentativo de γ_0/m^* , 1.30 fm.
- 2.) En base a los resultados obtenidos en el capítulo III, se hacen ajustes tomando $\rho = -2$ y $\rho = -3$.
- 3.) En cada caso se realiza una exploración minuciosa variando α a intervalos de 0.5 unidades, tomando como referencia los resultados obtenidos en el capítulo III.
- 4.) Simultáneamente se varía el coeficiente a_2 a intervalos de 0.01 MeV tomando como referencia los valores mostrados en la tabla 5.1, reportados para fórmulas parecidas.
- 5.) De los valores obtenidos del ajuste para las funciones T_i se calculan V_1/V_0 , m/m^* , γ_0^2 y $V_0(1+\alpha)$ usando las ecuaciones (5.2) a (5.5).
- 6.) La bondad del ajuste se mide de la siguiente

forma: Se calculan las diferencias $\Delta EA = EA_T - EA_{exp}$ entre la energía de amarre teórica y la energía de amarre experimental. Se toma su promedio $\overline{\Delta EA}$, y a partir de este, la desviación estandard

$$S = \sum_{i=1}^M \sqrt{\frac{(\overline{\Delta EA} - \Delta EA_i)^2}{M - P}}, \quad (5.6)$$

en donde M es el número de datos ajustados (1,122) y P el número de parámetros empleados (7 en total: m/m^* , V_0 , V_1 , r_0 , σ , a_1 y d).

En los ajustes realizados se han tomado únicamente núcleos con $N, Z \geq 50$, para los que es válida la ec.(5.1) con $\gamma_j = 1$.

Debido a que la fórmula 5.1 tiene en su desarrollo de potencias de $A^{1/3}$ más términos que las de BWB y de MS, también es interesante conocer los ajustes resultantes de tomar la fórmula truncada, aunque no existe ninguna justificación formal para hacerlo. Por esta razón el procedimiento señalado en los puntos 1 a 6 no sólo se siguió para la fórmula completa, sino que se repitió tomando únicamente $j \geq -1, 0, 1, 2$.

Debido a que en la fórmula(5.1) no se han incluido el parámetro de llenamiento de la última capa y efectos de deformación, en principio habría que ajustarla únicamente a núcleos con capas cerradas. Sin embargo, como se puede ver en la figura 1.1, la discrepancia que resulta de aplicar a núcleos deformados una fórmula para núcleos esféricos, corresponde a una parte mínima de la energía total (1%). Por lo tanto, si no se restringe el ajuste a

núcleos esféricos, se puede comparar la desviación estándar que resulte con la de la fórmula de BWB (2.7 a 2.8 MeV). La desventaja que tiene este procedimiento, es que los núcleos esféricos, para los que la fórmula debe ajustarse mejor, difícilmente tendrán el menor valor de ΔE_A . Su ventaja es que permite comparar los resultados con una referencia independiente.

Para tener un buen ajuste, sin embargo, no es suficiente que la desviación estándar sea semejante a la de la fórmula de BWB, sino que además, el conjunto de valores V_1/V_0 , m/m^* , γ_0 y $V_0(1+d)$ debe ser físicamente razonable. Esto se entiende en el sentido de que deben ser comparables con los parámetros del modelo óptico fenomenológico, y en el caso de d , con los resultados del método de Brueckner-Hartree-Fock-Renormalizado. Por comodidad, en adelante se llamará a los resultados de las ecu.(5.2) a (5.5) parámetros resultantes (PR).

En la literatura se encuentra que V_0 varía entre 48 y 60 MeV, el parámetro de asimetría V_1 varía entre 24 y 38 MeV, el cociente de masa libre entre masa efectiva m/m^* entre 1.28 y 2.22, y γ_0 entre 1.10 y 1.30 fm.(ver capítulo III y apéndice V). De los cálculos de Davies y Mc. Carthy (1971), se sabe que $d \approx 0.15$. De acuerdo con esto V_1/V_0 debe encontrarse aproximadamente entre .4 y .8 y $V_0(1+d)$ entre 55 y 69 MeV.

5.2 Resultados.

Al efectuar el ajuste, siempre se obtienen valores

de ζ que están alrededor del de la fórmula de BWB. Sin embargo, en muchos casos el conjunto de PR tiene valores absurdos. Por ejemplo, pueden aparecer los cuatro con signo negativo. Esto descarta un buen número de ajustes efectuados. Así, una de las primeras conclusiones a las que se llega es que la inclusión del parámetro ζ es imprescindible para conseguir un buen ajuste. En otros casos, los PR toman valores cercanos a los razonables, y entonces se dificulta más jerarquizar los distintos resultados. A continuación se estudia esto en detalle.

En las figuras 5.1 a 5.12 se muestran en una forma sistemática algunos resultados que se han obtenido. En las figuras 5.1 a 5.8 se muestran los PR obtenidos para ajustes con la fórmula completa, dados valores específicos de ζ y a_c . Las primeras cuatro muestran los resultados para $\rho = -2$, y las siguientes para $\rho = -3$. Las figuras 5.9 a 5.12 son análogas a las anteriores, pero en ellas aparecen los resultados de ajustes sobre la fórmula troncada a tres potencias de $\Lambda^{1/3}$ ($j = 1, 2, 3$), dada $\rho = -2$. Las desviaciones estándar varían entre 2.62 y 3.09 MeV para el caso 1 de las figuras 5.1 a 5.4, entre 2.56 y 2.98 MeV para el caso 2 de las figuras 5.5 a 5.8 y entre 2.56 y 3.40 MeV para el caso 3 de las figuras 5.9 a 5.12.

En los tres casos mostrados los PR tienen valores cercanos a los físicamente razonables. Sin embargo, no siempre caen los cuatro simultáneamente en los intervalos antes señalados.

En el caso 1, por ejemplo, el valor de γ_0 es demasiado alto en general, y cuando baja de 1.3 fm., se observa que también κ/m^* baja más de lo deseable. En el caso 2, el problema principal consiste en que cuando γ_0 tiene valores razonables, el cociente V_1/γ_0 baja demasiado. El hecho de que a_d suba hasta .79 MeV, que es grande en comparación con los valores de la tabla 5.1, no debe preocupar, pues corresponde a un parámetro del radio $\gamma_0 = 1.09$ fm. Este valor todavía es consistente con los resultados obtenidos en experimentos de dispersión de electrones.

Finalmente, en el caso 3, se observa que para $\epsilon = .45$, los cuatro PR tienen valores razonables cuando a_d varía entre .62 y .67 MeV.

Para poder determinar cuál es el mejor ajuste entre los mostrados, es necesario ver con que conjunto de PR es posible reproducir mejor los niveles de partícula independientes.

5.3 Comparación con otras fórmulas.

La fórmula 5.1 puede agruparse de modo que la energía de amarre tome la forma

$$EA = a_v A - a_s A^{2/3} + a_c A^{1/3} - a_t A^0 + a_\sigma A^{-1/3} - a_\tau A^{-2/3} - \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2 [a_{vs} A - a_{ss} A^{2/3} + a_{cs} A^{1/3} - a_{ts} A^0 + a_{ss} A^{-1/3} - a_{cs} A^{-2/3}] - E_d - E_p, \quad (5.7)$$

en donde, por ejemplo,

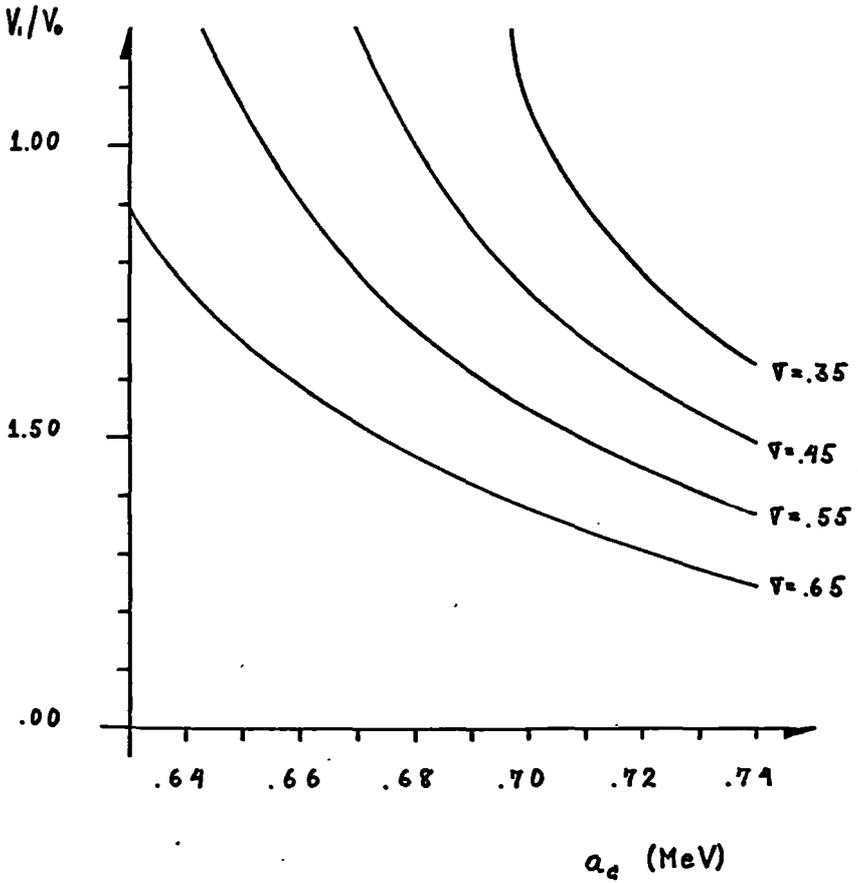


Figura 5.1. Variación de $\frac{V_1}{V_0}$ en función de a_2 cuando $p = -2$ y se ajusta la fórmula completa.

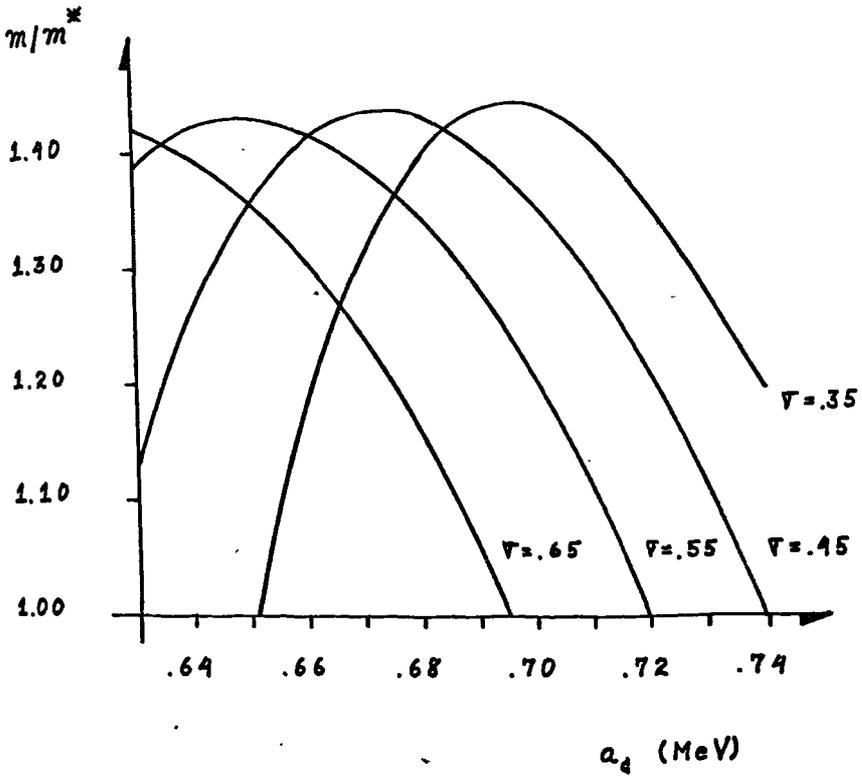


Figura 5.2. Variación de $\frac{m}{m^*}$ en función de a_d cuando $\gamma = -2$ y se ajusta la fórmula completa.

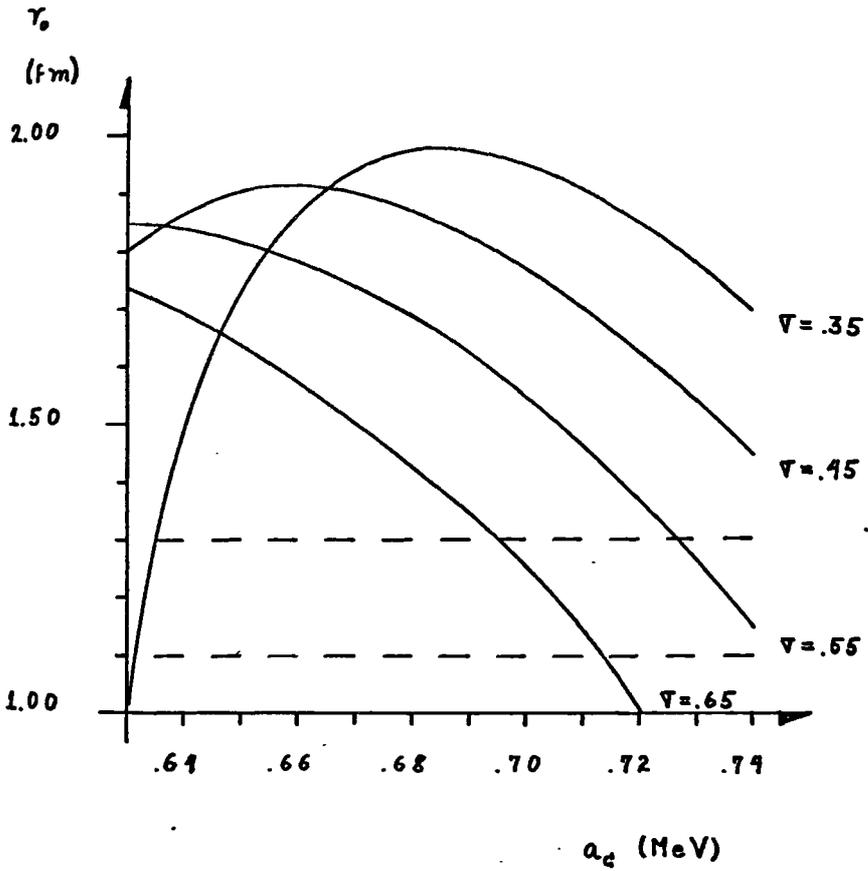


Figura 5.3. Variación de r_0 en función de a_c cuando $p = -2$ y se ajusta la fórmula completa.

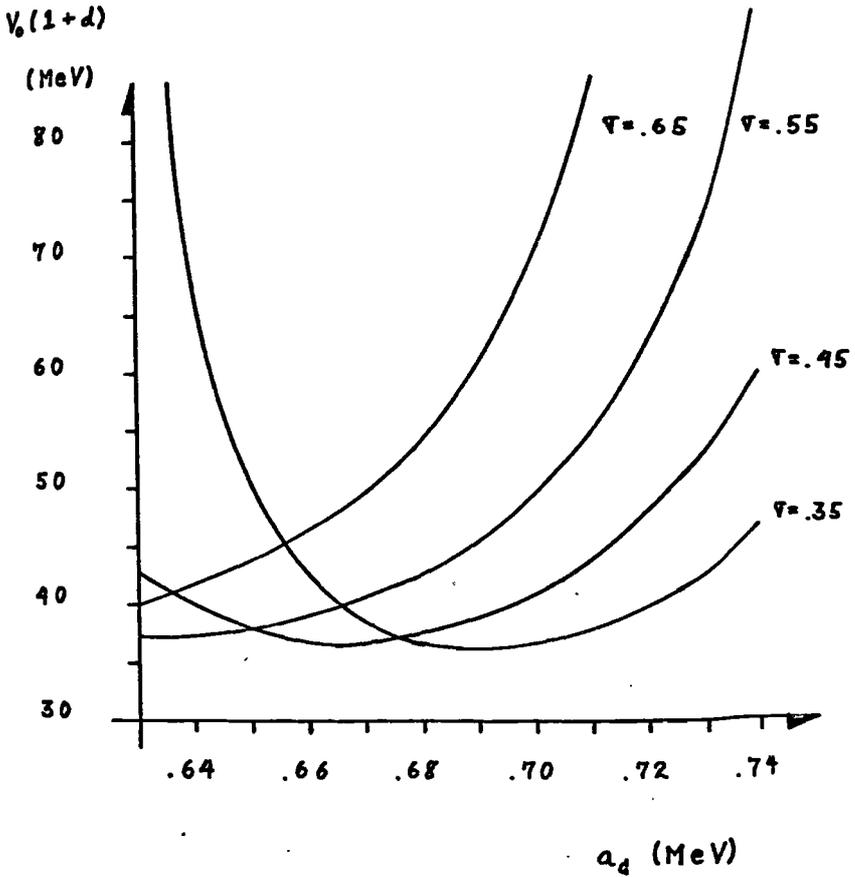


Figura 5.4. Variación de $V_0(1+d)$ en función de a_d cuando $\rho = -2$ y se ajusta la fórmula completa.

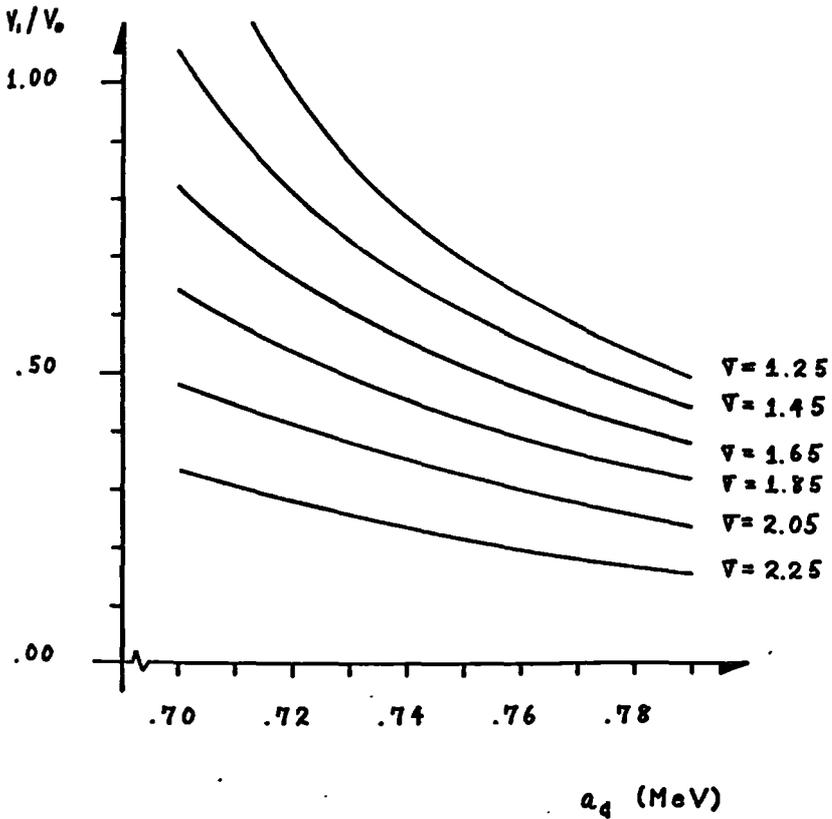


Figura 5.5. Variación de $\frac{V_i}{V_0}$ en función de a_d cuando $p = -3$ y se ajusta la fórmula completa.

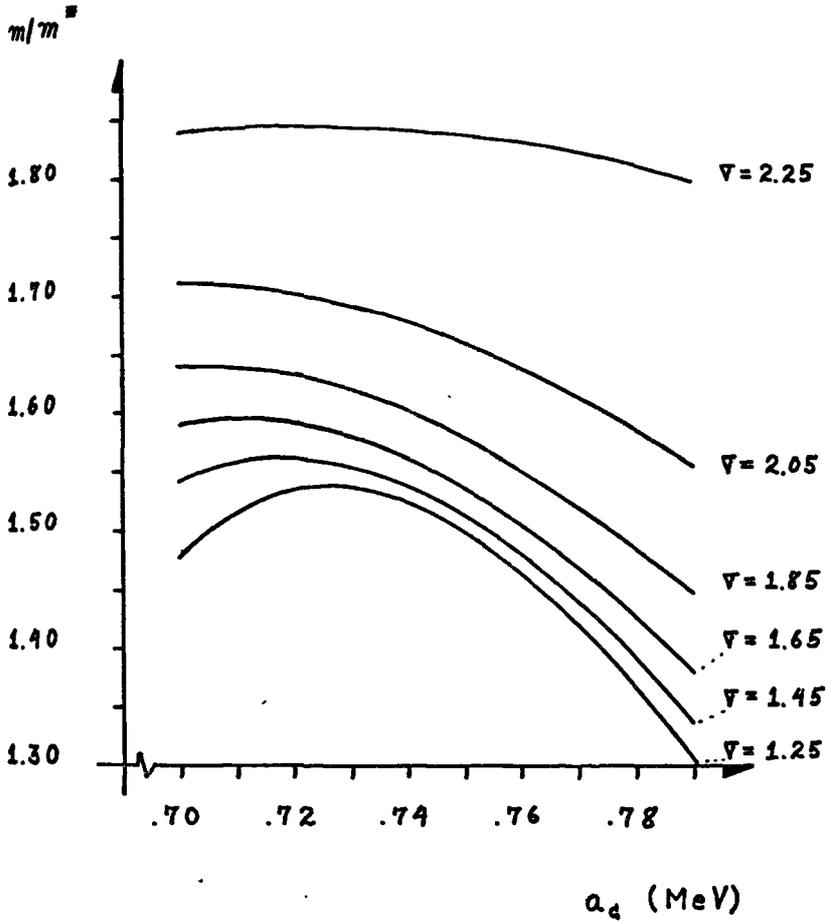


Figura 5.6. Variación de $\frac{m}{m^*}$ en función de a_c cuando $\rho = -5$ y se ajusta la fórmula completa.

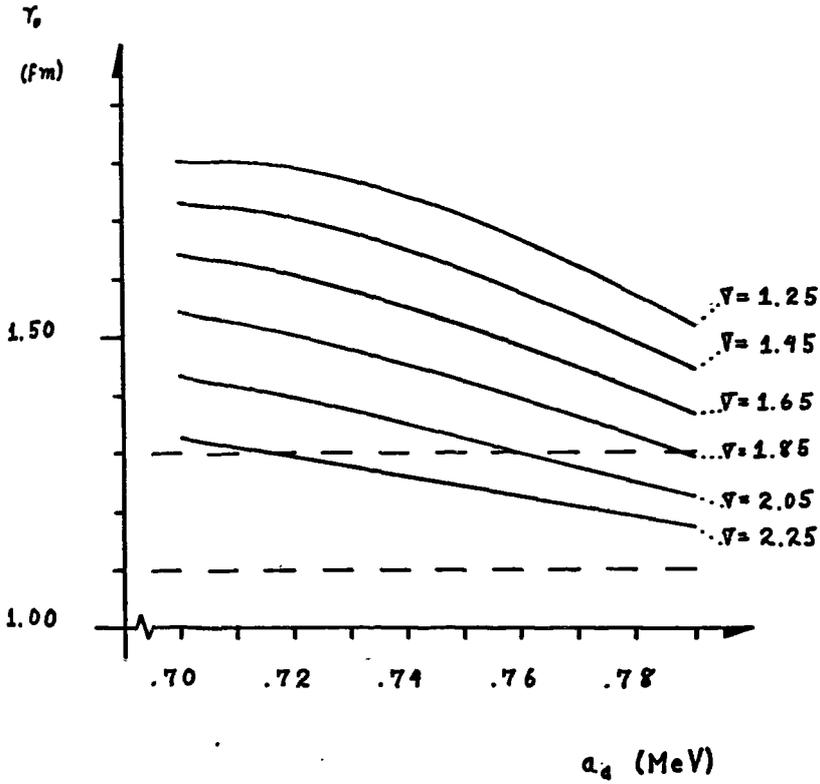


Figura 5.7. Variación de r_0 en función de a_0 cuando $\rho = -3$ y se ajusta la fórmula completa.

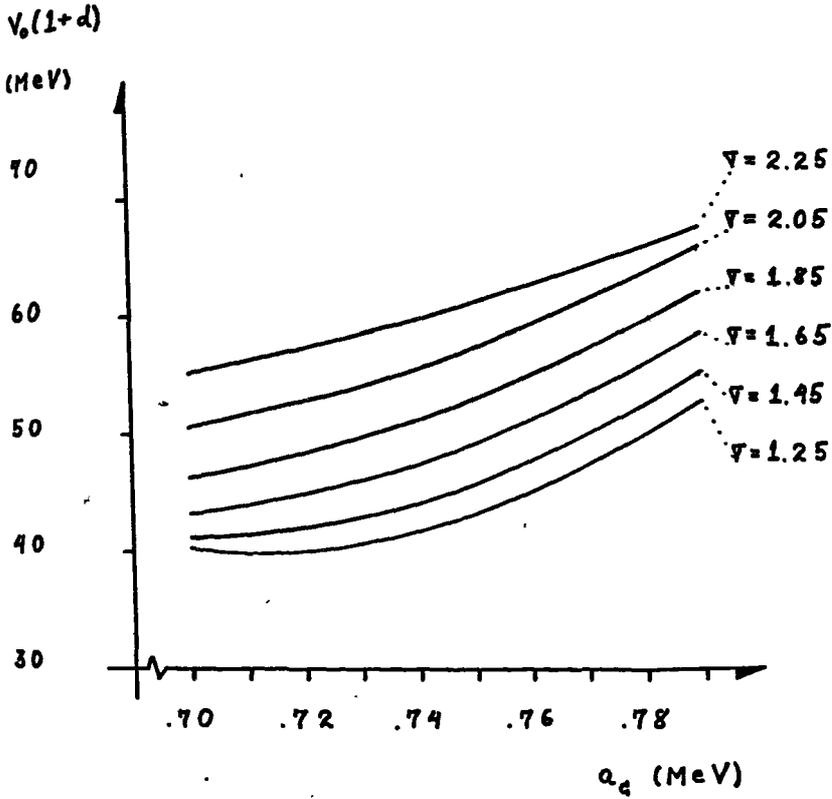


Figura 5.8. Variación de $V_0(1+d)$ en función de a_d cuando $p = -3$ y se ajusta la fórmula completa.

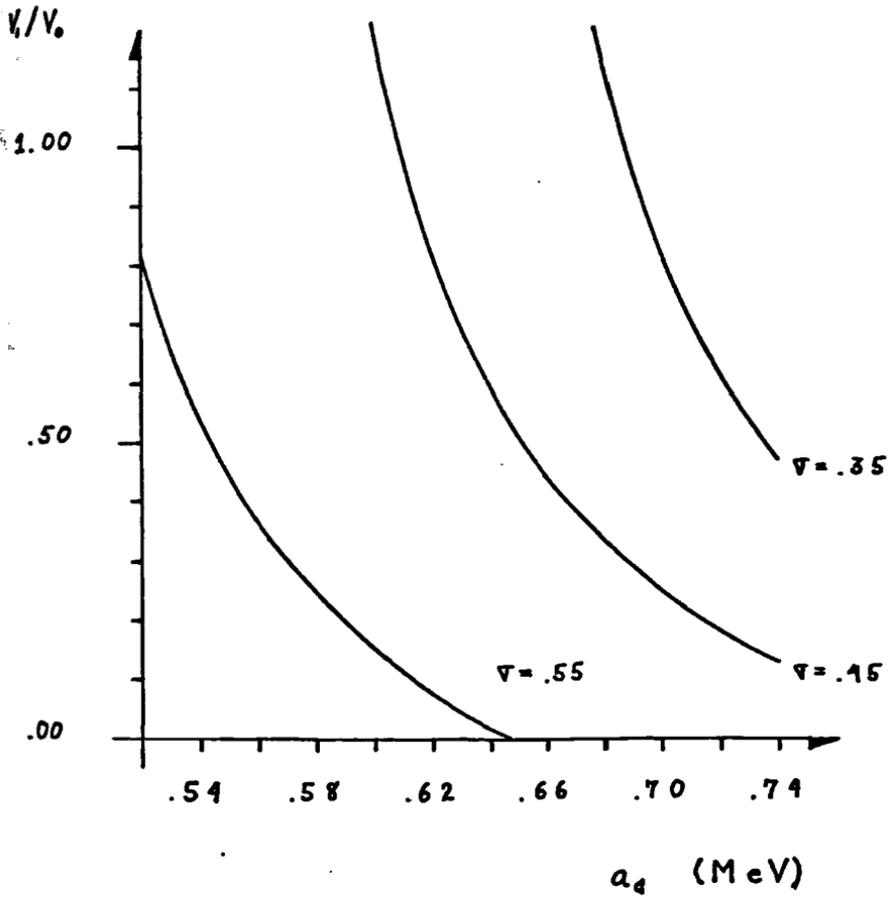


Figura 5.9. Variación de $\frac{V}{V_0}$ en función de a_d cuando $p = -2$ y se ajustan las tres potencias mayores únicamente.

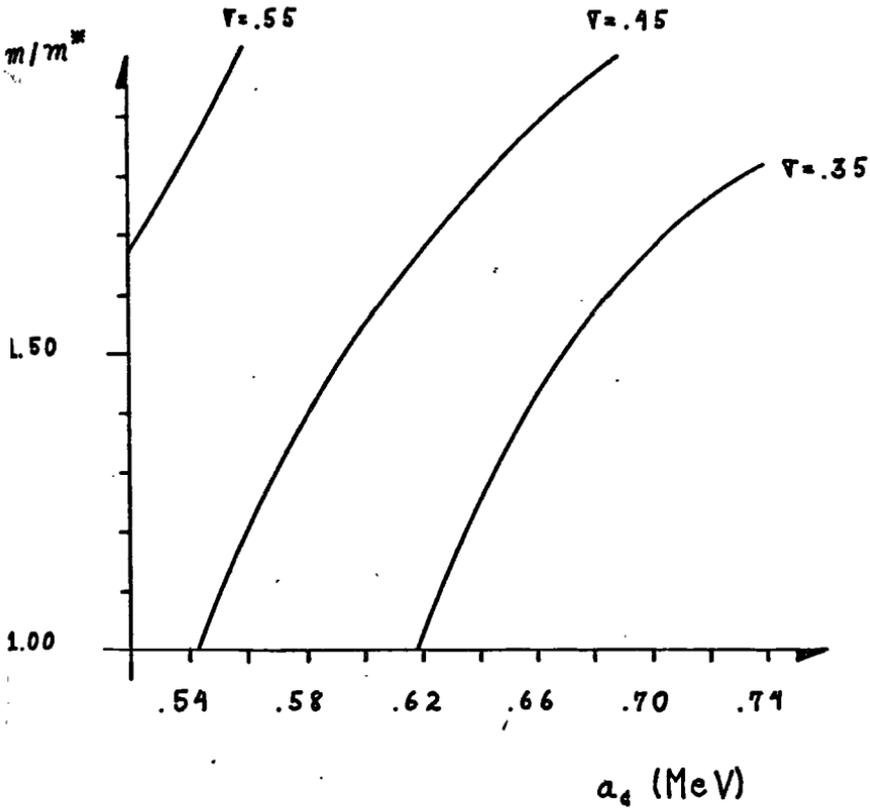


Figura 5.10. Variación de $\frac{m}{m^*}$ en función de a_e cuando $p = -3$ y se ajustan las tres potencias mayores únicamente.

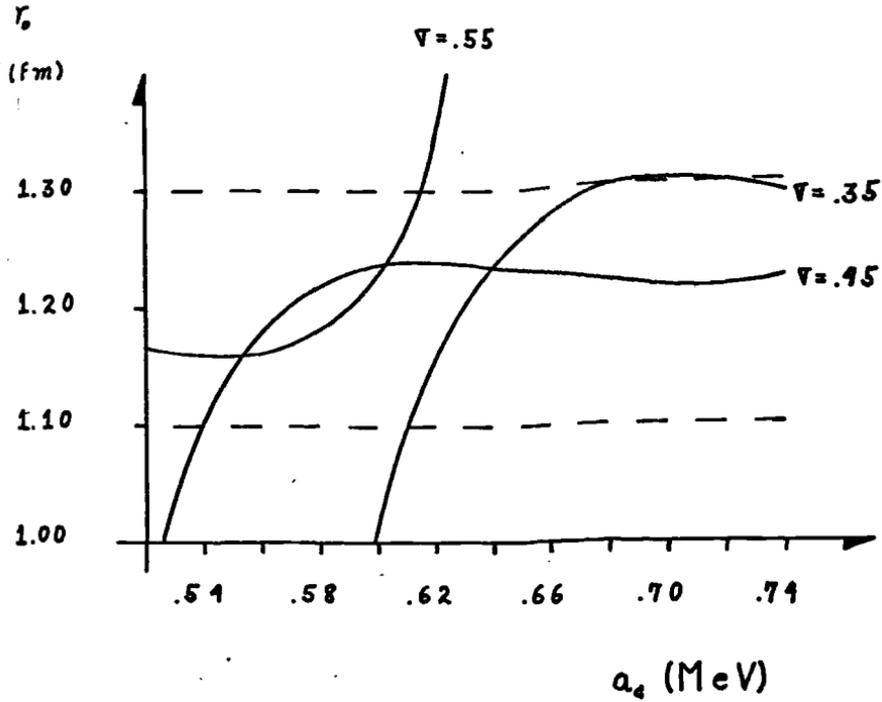


Figura 5.11. Variación de r_0 en función de a_4 cuando $P = -3$ y se ajustan las tres potencias mayores únicamente.

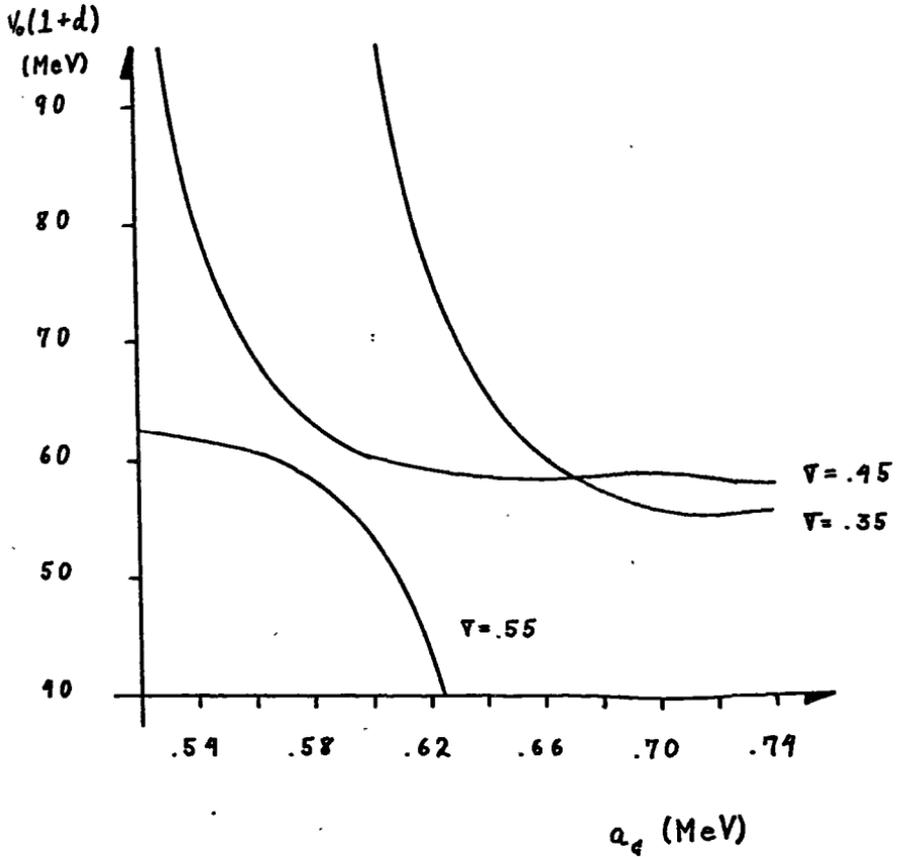


Figura 5.12. Variación de $V_0(1+d)$ en función de a_4 cuando $p = -3$ y se ajustan las tres mayores potencias únicamente.

$$a_v = \frac{1}{2} \frac{m}{m^*} V_0 (1+d) - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right) \frac{k^2}{2m r_0^2} \frac{m}{m^*}, \quad (5.8)$$

$$a_s = -3 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \frac{\pi^2}{16} - \frac{5}{4} \left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right) \right] \frac{k^2}{2m r_0^2} \frac{m}{m^*}, \quad (5.9)$$

$$a_{vs} = -\frac{1}{2} \frac{m}{m^*} V_1 (1+d) \left[\left(\frac{m}{m^*} - 1\right) \frac{V_1}{V_0} - \frac{m}{m^*} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right) \frac{k^2}{2m r_0^2} \frac{m}{m^*} \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{m}{m^*} - 1\right) \frac{V_1}{V_0} \right]. \quad (5.10)$$

La expresión (5.7) es hasta cierto punto parecida a la de BWSB, pero contiene más términos que ésta. Myers y Swiatecky, partiendo del modelo de Thomas-Fermi, han incluido términos adicionales tales como el $a_c A^{1/3}$, pero no han conseguido determinar bien el signo de a_c , por lo que han optado por descartarlo. En la tabla 5.1 se muestran algunos valores de los coeficientes a_v , a_s , a_{vs} y a_c que han aparecido en la literatura desde 1936 hasta 1976.

Para comparar, en las tablas 5.2 a 5.5 se muestran los valores de los coeficientes en la expresión (5.8) para algunos de los ajustes obtenidos en este trabajo.

En la tabla 5.2, en la cual se ha tomado la fórmula completa y $\rho = -2$, se observa que $a_s = 2.407$ MeV, el que es demasiado bajo en comparación con los valores que aparecen en la tabla 5.1. En la tabla 5.3, por otro lado, se ha tomado $\rho = -3$, y se encuentra $a_s = 42.61$ MeV, esta vez demasiado alto. Sin embargo, las desviaciones estándar son semejantes (2.62 y 2.59 MeV respectivamente),

Tabla 5.1. Coeficientes de algunas fórmulas de masas publicadas desde 1936 hasta 1976. Los valores se dan en MeV.

a_v	a_s	a_{vs}	a_d	REFERENCIAS
13.86	13.20	19.5	0.580	Bethe y Bacher (1936).
14.00	13.03	19.3	0.584	Fermi (1949).
15.58	17.23	23.3	0.698	Green y Engler (1953).
15.28	15.76	22.76	0.690	Mozér (1959)*.
16.09	19.04	23.89	0.741	Kümmel et al (1966).
15.96.	20.69	36.8	0.732	Myers (1976)**.
15.26.	17.07	33.17	-----	Seeger y Howard (1976)**.

* Se incluyen efectos de deformación y de capas.

** Se incluyen efectos producidos por detalles de la distribución de materia, tales como difusividad y "piel" neutronica.

Tabla 5.2. Coeficientes de la fórmula de masas.

Tomando $p = -2$, $\alpha = .65$ y $a_4 = .69$ MeV, y ajustando la fórmula completa, se obtienen los siguientes parámetros resultantes: $V_1/V_0 = .4190$

$$r_0 = 1.352 \text{ fm.}$$

$$m/m^* = 1.0610$$

$$V_0(1+d) = 60.32 \text{ MeV.}$$

Si $d = .15$, $V_0 = 52.45$ MeV y $V_1 = 21.98$ MeV.

Los coeficientes de la fórmula de masas en MeV son los siguientes:

$$a_v = 13.39$$

$$a_{vs} = 23.43$$

$$a_s = 2.407$$

$$a_{ss} = 19.46$$

$$a_c = 3.271$$

$$a_{cs} = 3.286$$

$$a_t = 257.4$$

$$a_{ts} = 9.767$$

$$a_{s'} = 317.4$$

$$a_{s's} = 4.047$$

$$a_{\delta} = -439.1$$

$$a_{\delta s} = 14.27$$

$$\overline{\Delta EA} = -.0065 \text{ MeV}$$

$$S = 2.790 \text{ MeV}$$

Tabla 5.3. Coeficientes de la fórmula de masas.

Tomando $\rho = -3$, $\sigma = 2.05$ y $a_c = .76$ MeV, y ajustando la fórmula completa, se obtienen los siguientes parámetros resultantes:

$$V_i / V_o = .3030$$

$$r_o = 1.3015 \text{ fm.}$$

$$m / m^* = 1.644$$

$$V_o (1+d) = 59.20 \text{ MeV.}$$

Si $d = .15$, $V_o = 51.48$ MeV y $V_i = 15.60$ MeV.

Los coeficientes de la fórmula de masas en MeV son los siguientes:

$a_v = 17.54$	$a_{v_s} = 28.53$
$a_s = 42.61$	$a_{s_s} = 1.612$
$a_c = 13.71$	$a_{c_s} = -166.2$
$a_b = 339.0$	$a_{b_s} = 66.96$
$a_d = -459.4$	$a_{d_s} = -27.38$
$a_e = -2,822.$	$a_{e_s} = -370.9$

$$\overline{\Delta \epsilon A} = -.00028 \text{ MeV}$$

$$S = 2.588 \text{ MeV}$$

Tabla 5.4. Coeficientes de la fórmula de masas.

Tomando $\rho = -2$, $\sigma = .45$ y $a_c = .65$ MeV, y ajustando únicamente las tres potencias mayores, se obtienen los siguientes parámetros resultantes:

$$V_i / V_o = .5077$$

$$r_o = 1.232 \text{ fm.}$$

$$m / m^* = 1.830$$

$$V_o (1+d) = 58.61 \text{ MeV.}$$

Si $d = .15$, $V_o = 50.97$ MeV y $V_i = 25.88$ MeV.

Los coeficientes de la fórmula de masas en MeV son los siguientes:

$a_v = 14.95$	$a_{v_s} = 32.67$
$a_s = 19.76$	$a_{s_s} = 79.13$
$a_c = 14.95$	$a_{c_s} = 6.815$

$$\overline{\Delta \epsilon A} = .0050 \text{ MeV}$$

$$S = 2.620 \text{ MeV}$$

Tabla 5.5. Coeficientes de la fórmula de masas.

Tomando $\rho = -2$, $\alpha = .45$ y $a_d = .69$ MeV, y ajustando únicamente las dos potencias mayores, se obtienen los siguientes parámetros resultantes: $V_1/V_0 = .4041$

$$r_0 = 1.285 \text{ fm.}$$

$$m/m^* = 1.784$$

$$V_0(1+d) = 55.84 \text{ MeV.}$$

Si $d = .15$, $V_0 = 48.56$ MeV y $V_1 = 19.62$ MeV.

Los coeficientes de la fórmula de masas en MeV son los siguientes:

$$a_v = 15.16$$

$$a_{v_s} = 30.49$$

$$a_s = 17.71$$

$$a_{s_s} = 58.11$$

$$\overline{\Delta EA} = -.0020 \text{ MeV}$$

$$S = 2.566 \text{ MeV}$$

lo que indica que ambos ajustes son buenos.

Cuando se trunca la fórmula (5.8), por otro lado, se asemeja más a las de BWB y MS, y los coeficientes se acercan más a los de la tabla 5.1, como se puede observar en las tablas 5.4 y 5.5. La desviación estandar S , por su parte, sigue siendo aproximadamente la misma.

En otras palabras, la fórmula 5.8 sólo se puede comparar con las fórmulas de BWB y MS si se toma la misma cantidad de términos, para lo cual no existe una justificación formal. De otro modo, el ajuste a los valores experimentales puede tener una bondad semejante, pero los coeficientes α difieren considerablemente.

Este resultado tiene implicaciones serias. En primer lugar, demuestra que mediante un desarrollo en serie de potencias de $A^{1/3}$ es posible parametrizar adecuadamente los valores de las masas nucleares, sin que los coeficientes de dicho desarrollo sean comparables con los de las fórmulas de BWB y MS. Esto es importante, pues muchos cálculos en teoría de muchos cuerpos están enfocados a obtener los valores de estos coeficientes. Por otra parte, se espera que la relación entre los coeficientes mostrados en las tablas anteriores juegue un papel muy importante en la determinación de barreras de fisión. Debido a esto, para poder determinar si los términos adicionales de la fórmula (5.8) representan un refinamiento significativo, y en la dirección correcta, será necesario incluir barreras de fisión en ajustes futuros. Para hacer esto último, será necesario tomar en cuenta los efectos

producidos por el llenamiento ($\alpha \neq 0$) y la deformación.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Para finalizar se hará un resumen y evaluación del trabajo aquí presentado, y se señalarán algunas perspectivas que han quedado abiertas.

6.1 Resumen y conclusiones.

En el capítulo II se presentó la base teórica que relaciona al modelo de partícula independiente con la energía total del núcleo. Entre distintas posibilidades se escogieron los resultados del método de Brueckner-Hartree-Fock-Renormalizado como guía para construir la fórmula de masas. Aunque en la práctica este método ha tenido problemas para conseguir buenos resultados numéricos, la razón de esta elección es que se relaciona adecuadamente con los procesos de expulsión (knock-out), mediante los cuales se obtiene evidencia experimental de los niveles de partícula independiente.

Puesto que existe cierta evidencia de que el potencial autoconsistente de la teoría de muchos cuerpos se puede relacionar con la parte real del potencial fenomenológico del modelo óptico, se emplearon los parámetros de este último para obtener los niveles de partícula independiente. Para hacerlo, se estableció, a la luz de la

aproximación de masa efectiva, la relación que existe entre el potencial del modelo óptico y el de estados ligados.

Una vez hecho esto, se obtuvieron dos expresiones analíticas para los niveles de energía de partícula independiente. La primera de ellas, a partir de un potencial de oscilador armónico modificado, y la segunda a partir de un conjunto de pozos cuadrados infinitos. Se encontró que con ellas es posible calcular niveles de energía que concuerdan razonablemente bien con valores experimentales y con cálculos de Hartree-Fock.

Siguiendo los resultados de BHFR, se emplearon las expresiones de los niveles de energía para construir dos fórmulas distintas de la energía total del núcleo. La primera, originada en los niveles del oscilador armónico modificado carece de un término que vaya como $A^{2/3}$. La segunda contiene todas las potencias relevantes de $A^{1/3}$, y es más estable ante cambios de los parámetros del modelo óptico, por lo que se le prefirió para llevar a cabo el ajuste a los valores experimentales de las masas.

De lo anterior, y de los ajustes mostrados en el capítulo V se llega a las siguientes conclusiones:

1.) Se ha mostrado que a partir de los niveles de partícula independiente, es posible construir una fórmula para la energía de amarre, que proporciona valores correctos. Dicha fórmula se escribe como un desarrollo en términos de potencias de $A^{1/3}$. Al proporcionarse una fórmula analítica, se ha conseguido un atajo respecto a

los cálculos de la teoría de muchos cuerpos.

2.) Si no se incluyen efectos de llenamiento de la última capa y deformación, la desviación estandard de la fórmula obtenida es del orden de la que se obtiene para la fórmula de Bethe-Weizsäcker-Bacher (2.7 a 2.8 MeV).

3.) Los parámetros V_1/V_0 , m/m^* , r_0 y $V_0(1+d)$ que se obtienen del ajuste, son cercanos a, si bien no exactamente, los valores físicamente razonables.

4.) Los coeficientes de la fórmula de Bethe-Weizsäcker-Bacher únicamente son comparables con los de la fórmula obtenida en este trabajo si esta última es truncada. Truncar la fórmula, sin embargo, no se justifica formalmente.

5.) Cuando se trunca la fórmula, aún se tienen valores físicamente razonables para V_1/V_0 , m/m^* , r_0 y $V_0(1+d)$ (o quizá mejores), y la desviación estandard no es muy distinta de la obtenida para los ajustes con la fórmula completa. En otras palabras, es posible parametrizar adecuadamente los valores de las masas nucleares mediante desarrollos en series de potencias de $A^{1/3}$, cuyos coeficientes no sean comparables con los de la fórmula de Bethe-Weizsäcker-Bacher. Esto pone en duda que los coeficientes de ésta última deban considerarse como metas en cálculos de teoría de muchos cuerpos.

Por otra parte, queda por estudiarse si los términos adicionales que se han calculado en este trabajo son significativos, para lo cual habrá que incorporar las barreras de fisión en ajustes posteriores.

6.) Bajo un punto de vista fenomenológico, se ha conseguido enlazar el modelo óptico con el modelo de capas y se ha visto, que en un sentido restringido (ver el punto anterior), este último se puede enlazar con el modelo de gota de líquido.

6.2 Perspectivas.

1.) Entre los ajustes obtenidos queda por determinarse el mejor, lo que se hará estudiando como cada conjunto de V_i/V_o , m/m^* , r_o y $V_o(H+d)$ reproduce los valores de los niveles de partícula independiente. Un buen conjunto de parámetros será aquel que ajuste bien a las masas y a los niveles simultáneamente.

2.) Una vez realizada la exploración mostrada en el capítulo anterior, se está en condiciones de hacer cálculos para núcleos con $N, Z < 50$ y de incluir el efecto de llenamiento ($\alpha \neq 0$).

3.) Simultáneamente habrá que agregar correcciones debidas a efectos de deformación, lo que se hará en el contexto del modelo de capas siguiendo el procedimiento de Zeldes (Liran y Zeldes 1976), o bien el que anteriormente siguieron Bauer y Canuto (1967).

4.) Una vez cubiertos los tres puntos anteriores, habrá que incorporar en el ajuste valores de las barreras de fisión, para determinar así los términos adicionales que se presentan en la fórmula aquí calculada representan un refinamiento significativo.

Si se desean aplicar a los núcleos lejanos de la

línea de estabilidad los conocimientos actuales de estructura nuclear, será deseable enfocar a estos últimos en un esquema unificado. Creemos que la congruencia entre distintos modelos que se presenta en este trabajo, y la simplicidad de sus resultados, pueden brindar una guía y una herramienta muy útiles para emprender esta exploración.

APENDICE I

CONSIDERACIONES SOBRE LA MASA EFECTIVA

Debido a que la profundidad del potencial óptico no es la misma para protones que para neutrones, y a que la masa efectiva depende de dicha profundidad, se tiene una masa efectiva distinta en cada caso. El propósito de este apéndice es obtener las expresiones adecuadas en función de los parámetros del potencial óptico.

Se acostumbra parametrizar el potencial óptico de la forma

$$V_{op} = V_0 + \tau I V_1, \quad (3.68)$$

en donde $\tau = 1$ para protones y $\tau = -1$ para neutrones, e

$$I = \frac{N - Z}{A}. \quad (I.1)$$

Ahora bien, si de acuerdo con la ec.(3.14) se toma

$$m^* \equiv M(0) = \frac{m_0}{1 - \frac{a^2 m_0}{2k^2} W_n(0)}, \quad (I.2)$$

en donde

$$W_n(0) = -W_0'', \quad (I.3)$$

de acuerdo con la ec.(3.15a). Entonces, según la ec.(3.31a) se tiene que

$$W_0'' = \frac{m_0}{m^*} (V_0 + \tau I V_1). \quad (I.4)$$

Si se propone para W_0'' la forma

$$W_o^N \equiv W_o + \tau I W_i, \quad (I.5)$$

entonces

$$\frac{m_e}{m^*} = 1 + \mu (W_o + \tau I W_i), \quad (I.6)$$

en donde

$$\mu \equiv \frac{a^2 m_p}{2 \kappa^2}. \quad (I.7)$$

Así pues, la masa efectiva promedio podrá escribirse como

$$\frac{m_e}{m^*} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_o}{m^*} \right)_p + \left(\frac{m_o}{m^*} \right)_n \right] = 1 + \mu W_o, \quad (I.8)$$

en donde los subíndices p y n se refieren a protones y a neutrones respectivamente. Asimismo se tendrá

$$W_i = \frac{1}{2 I \mu} \left[\left(\frac{m_o}{m^*} \right)_p - \left(\frac{m_o}{m^*} \right)_n \right]. \quad (I.9)$$

Sumando las expresiones (I.5) que resultan para protones y neutrones, y dividiendo entre 2, se obtiene

$$\begin{aligned} W_o &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{m_o}{m^*} \right)_p (V_o + I V_i) + \left(\frac{m_o}{m^*} \right)_n (V_o - I V_i) \right\} \\ &= \frac{m_o}{m^*} V_o + \mu (I W_i) (I V_i). \end{aligned} \quad (I.10)$$

Despejando μ de (I.8) y substituyendo el resultado en (I.10) se encuentra

$$W_o = \frac{m_o}{m^*} V_o + \left(\frac{m_o}{m^*} - 1 \right) \frac{I W_i}{W_o} (I V_i), \quad (I.11)$$

que, multiplicando por W_0 , puede reescribirse de la forma

$$W_0^2 - \frac{m}{m^*} V_0 W_0 - \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) (I W_1) (I V_1) = 0. \quad (I.12)$$

Para resolver esta última ecuación se tiene

$$W_0 = \frac{b}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{4c}{b^2} \right)^{1/2} \right], \quad (I.13)$$

en donde

$$b = \frac{m}{m^*} V_0 \quad (I.14)$$

y

$$c = \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) (I W_1) (I V_1). \quad (I.15)$$

Desarrollando la raíz en serie de potencias y quedándose con términos a primer orden se encuentra

$$W_0 = \frac{m}{m^*} V_0 \left[1 + \frac{\left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) (I W_1) (I V_1)}{\left(\frac{m}{m^*} V_0 \right)^2} \right]. \quad (I.16)$$

Por otro lado, restando la expresión (I.5) del caso de neutrones de la misma para el caso de protones, se obtiene

$$I W_1 = \mu I W_1 V_0 + \frac{m}{m^*} I V_1, \quad (I.17)$$

de donde puede despejarse

$$I W_1 = \frac{\frac{m}{m^*} I V_1}{1 - \mu V_0}. \quad (I.18)$$

El factor μ puede evaluarse de la ec.(I.8), que

despejando da

$$\mu = \frac{1}{W_0} \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \approx \frac{1}{V_0 \frac{m}{m^*}} \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right), \quad (I.19)$$

en donde se ha aproximado W_0 por el primer término de la ec.(I.16).

Así pues, se obtiene que

$$Z W_1 = \left(\frac{m}{m^*} \right)^2 Z V_1. \quad (I.20)$$

Con la ec.(I.8) y las ecs.(I.19-20) se puede calcular la masa efectiva de neutrones y protones en términos de la masa efectiva a través del cociente promedio $\frac{m}{m^*}$, y los parámetros del potencial óptico V_0 y V_1 . El resultado es

$$\frac{m_0}{m^*} = \frac{m}{m^*} \left\{ 1 + z \left(\frac{m}{m^*} - 1 \right) \frac{Z V_1}{V_0} \right\}. \quad (I.22)$$

APENDICE II

RAIZ REAL DEL POLINOMIO (4.10)

Se propone encontrar la raíz real del polinomio

$$x_r^3 + (6 + 3\alpha) x_r^2 + [11 + 6\gamma_1 + \alpha(16 - 6\gamma_1 + 6\gamma_2)] x_r + [6 + 12\gamma_1 + \alpha(18 - 12\gamma_1 + 18\gamma_2) - \gamma^3] = 0. \quad (\text{II.1})$$

Para conseguirlo se sigue la regla bien conocida para re solver polinomios de tercer orden (Abramowitz y Stegun 1964). De acuerdo con ésta, dados el polinomio

$$x_r^3 + a_2 x_r^2 + a_1 x_r + a_0 = 0 \quad (\text{II.2})$$

y, en términos de sus coeficientes, las cantidades

$$\gamma = \frac{1}{6} (a_1 a_2 - 3a_0) - \frac{1}{27} a_2^3 \quad (\text{II.3})$$

y

$$\rho = \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{9} a_2^2, \quad (\text{II.4})$$

se tiene que si

$$\rho^3 + \gamma^2 > 0, \quad (\text{II.5})$$

entonces existe una raíz real y dos complejas conjugadas.

La raíz real está dada por

$$x_r = (s_1 + s_2) - \frac{a_2}{3}, \quad (\text{II.6})$$

en donde

$$s_1 = \left[r + (g^3 + r^2)^{1/2} \right]^{1/3} \approx (2r)^{1/3} + \frac{1}{3} \frac{g^3}{(2r)^{2/3}} \quad (\text{II.7a})$$

$$y \quad s_2 = \left[r - (g^3 + r^2)^{1/2} \right]^{1/3} \approx -\frac{g}{(2r)^{1/3}} \quad (\text{II.7b})$$

Tomando las aproximaciones anteriores se tiene

$$\pi_r \approx (2r)^{1/3} - \frac{a_2}{3} - \frac{g}{(2r)^{1/3}} + \frac{1}{3} \frac{g^3}{(2r)^{2/3}} \quad (\text{II.8})$$

Ahora bien, en el caso de la ec.(II.1),

$$a_2 = 3(2 + \alpha) \quad (\text{II.9a})$$

$$a_1 = (11 + 6\gamma_1) + \alpha(15 - 6\gamma_1 + 6\gamma_2) \quad (\text{II.9b})$$

$$a_0 = (6 + 12\gamma_1) + \alpha(18 - 12\gamma_1 + 18\gamma_2) - \gamma^3 \quad (\text{II.9c})$$

de donde se obtiene que

$$2r = p_1 + \gamma^3 \quad (\text{II.10})$$

si se define

$$p_1 = \alpha(-1 + 6\gamma_1 - 6\gamma_2) + \alpha^2(3 - 6\gamma_1 + 6\gamma_2) - 2\alpha^3 \quad (\text{II.11})$$

De este modo se obtiene

$$(2r)^{1/3} = (p_1 + \gamma^3)^{1/3} = \gamma \left(1 + \frac{p_1}{\gamma^3} \right)^{1/3} \approx \gamma \left(1 + \frac{p_1}{3\gamma^3} \right) \quad (\text{II.12})$$

Por otro lado se encuentra que

$$f = \left(-\frac{1}{3} + 2\gamma_1\right) + p_2, \quad (\text{II.13})$$

en donde

$$p_2 = \alpha(1 - 2\gamma_1 + 2\gamma_2) - \alpha^2. \quad (\text{II.14})$$

Como γ^2 va esencialmente como γ^6 , que es positivo y mucho mayor que γ^3 , la condición (II.5) está asegurada.

Substituyendo los resultados (II.12) y (II.13) en la expresión (II.8), hasta el tercer término, se obtiene

$$x_p \approx \gamma + R_1 + \frac{R_2}{\gamma} + \frac{R_3}{\gamma^2} + \frac{R_4}{\gamma^3}, \quad (\text{II.15})$$

en donde

$$R_1 = -(2 + \alpha), \quad (\text{II.16a})$$

$$R_2 = \left(\frac{1}{3} - 2\gamma_1\right) - p_2, \quad (\text{II.16b})$$

$$R_3 = \frac{p_1}{3}, \quad (\text{II.16c})$$

y

$$R_4 = \frac{p_1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} - 2\gamma_1\right) - p_2 \right]. \quad (\text{II.16d})$$

APENDICE III
COEFICIENTES DE LA FORMULA (4.54)

$$C_{130} = 1$$

$$C_{232} = 1$$

$$C_{330} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3}$$

$$C_{332} = \frac{5}{12} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3}$$

$$C_{310} = \frac{1}{4}$$

$$C_{300} = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \gamma,$$

$$C_{302} = -\frac{2}{9} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \gamma,$$

$$C_{3-10} = -\frac{10}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \gamma,$$

$$C_{3-12} = \frac{10}{27} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \gamma,$$

$$C_{3-20} = \frac{14}{3} \gamma,$$

$$C_{432} = -\frac{5}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3}$$

$$C_{412} = -\frac{1}{4}$$

$$C_{402} = -\frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \gamma,$$

$$C_{4-12} = \frac{10}{9} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \gamma,$$

$$C_{530} = -\frac{27}{20} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3}$$

$$C_{532} = -\frac{21}{10} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3}$$

$$C_{510} = 3 \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{2} + 3\gamma \right)$$

$$C_{512} = -\frac{5}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3}$$

$$C_{500} = -\frac{36}{5} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \gamma,$$

$$C_{502} = -\frac{8}{5} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3}$$

$$c_{5-10} = -3\left(\frac{1}{30} - 19\delta_1\right)$$

$$c_{632} = \frac{63}{20}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}$$

$$c_{732} = -\frac{27}{20}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}$$

$$c_{612} = 5\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{2} + 3\delta_1\right)$$

$$c_{712} = -3\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{2} + 3\delta_1\right)$$

$$c_{602} = \frac{48}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\delta_1$$

$$c_{702} = -\frac{36}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\delta_1$$

$$c_{6-12} = 3\left(\frac{1}{30} - 19\delta_1\right)$$

$$c_{7-12} = -3\left(\frac{1}{30} - 19\delta_1\right)$$

$$c_{810} = -\frac{3}{2}\delta_1$$

$$c_{800} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\delta_1$$

$$c_{802} = -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\delta_1$$

$$c_{8-10} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\delta_1$$

$$c_{8-12} = -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\delta_1$$

$$c_{8-20} = -20\delta_1$$

$$c_{900} = -6\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\delta_1$$

$$c_{902} = -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\delta_1$$

$$c_{9-10} = -6\delta_1$$

$$c_{9-20} = \frac{40}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\delta_1$$

$$c_{9-22} = -\frac{40}{27}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\delta_1$$

$$c_{1002} = 8\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\delta_1$$

$$c_{10-12} = 6\delta_1$$

$$c_{10-22} = -\frac{80}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\delta_1$$

APENDICE IV

COEFICIENTES DE LA FORMULA (4.73)

$$a_{130} = 1.$$

$$a_{232} = 1.$$

$$a_{330} = 3 \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\pi^2}{20} - \frac{1}{10} \right)$$

$$a_{320} = \frac{3}{16} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \pi^2$$

$$a_{310} = 3 \left[\left(\frac{1}{24} \pi^2 + \frac{1}{3} \right) - \gamma_1 \right]$$

$$a_{300} = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left[\frac{1}{48} \pi^2 + \gamma_1 \left(\frac{\pi^2}{2} + 2 - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$a_{2-10} = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \left[\left(\frac{\pi^2}{180} - \frac{1}{90} \right) + \gamma_1 \left(-\frac{5}{12} \pi^2 + \frac{13}{3} + 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$a_{3-20} = \gamma_1 \left(-\frac{25}{6} \pi^2 - \frac{40}{3} + \frac{40}{3} \frac{\Delta(1+d)}{2} \right)$$

$$a_{332} = \frac{5}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\pi^2}{20} - \frac{1}{10} \right)$$

$$a_{322} = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{16} \pi^2$$

$$a_{302} = -\frac{2}{9} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left[\frac{1}{48} \pi^2 + \gamma_1 \left(\frac{\pi^2}{2} + 2 - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$a_{2-12} = -\frac{2}{9} \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \left[\left(\frac{\pi^2}{180} - \frac{1}{90} \right) + \gamma_1 \left(-\frac{5}{12} \pi^2 + \frac{13}{3} + 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$a_{432} = -5 \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\pi^2}{20} - \frac{1}{10} \right)$$

$$a_{422} = -4 \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \frac{\pi^2}{16}$$

$$a_{412} = -3 \left[\left(\frac{1}{24} \pi^2 + \frac{1}{3} \right) - \gamma_1 \right]$$

$$a_{402} = -\frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left[\frac{1}{48} \pi^2 + \gamma_1 \left(\frac{\pi^2}{2} + 2 - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$a_{4-12} = -\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \left[\left(\frac{\pi^2}{180} - \frac{1}{90} \right) + \gamma_1 \left(-\frac{5}{12} \pi^2 + \frac{13}{3} + 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$b_{340} = 9 \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{12} \right)$$

$$b_{330} = 6 \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(-\frac{1}{40} \pi^2 + \frac{3}{20} \right)$$

$$b_{320} = 6 \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left(-\frac{1}{16} \pi^2 + \frac{1}{4} - \gamma_1 \right)$$

$$b_{310} = 6 \left[\left(-\frac{1}{24} \pi^2 - \frac{1}{2} \right) + \gamma_1 \left(\frac{3}{4} \pi^2 + \frac{5}{2} - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$b_{300} = 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left[\left(-\frac{1}{48} \pi^2 + \frac{1}{12} \right) + \gamma_1 \left(-\pi^2 + \frac{14}{3} + 4 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$b_{3-10} = 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left[\left(-\frac{1}{360} \pi^2 + \frac{1}{60} \right) + \gamma_1 \left(-\frac{11}{3} \pi^2 - \frac{23}{2} + 8 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$b_{3-20} = 4 \gamma_1 \left(\frac{12}{4} \pi^2 - \frac{98}{3} - \frac{40}{3} \frac{\Delta(1+d)}{2} \right)$$

$$b_{342} = 9 \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{12} \right)$$

$$b_{332} = \frac{10}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(-\frac{1}{40} \pi^2 + \frac{3}{20} \right)$$

$$b_{322} = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \left(-\frac{1}{16} \pi^2 + \frac{1}{4} - \gamma_1 \right)$$

$$b_{302} = -\frac{4}{9} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left[\left(\frac{1}{48} \pi^2 + \frac{1}{12} \right) + \gamma_1 \left(-\pi^2 + \frac{14}{3} + 4 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$b_{3-12} = -\frac{4}{9} \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} \left[\left(-\frac{1}{360} \pi^2 + \frac{1}{60} \right) + \gamma_1 \left(-\frac{11}{3} \pi^2 - \frac{23}{2} + 8 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$b_{442} = -18 \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{12} \right)$$

$$b_{432} = -10 \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(-\frac{1}{40} \pi^2 + \frac{3}{20} \right)$$

$$b_{422} = -8 \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3} \left(-\frac{1}{16} \pi^2 + \frac{1}{4} - \gamma_1 \right)$$

$$b_{412} = -6 \left[\left(-\frac{1}{24} \pi^2 - \frac{1}{2} \right) + \gamma_1 \left(\frac{3}{4} \pi^2 + \frac{5}{2} - 2 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$b_{402} = -\frac{8}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left[\left(-\frac{1}{48} \pi^2 + \frac{1}{2} \right) + \gamma_1 \left(-\pi^2 + \frac{14}{3} + 4 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

$$b_{4-12} = -\frac{4}{3} \left[\left(-\frac{1}{360} \pi^2 + \frac{1}{60} \right) + \gamma_1 \left(-\frac{11}{3} \pi^2 - \frac{23}{2} + 8 \frac{\Delta(1+d)}{2} \right) \right]$$

APENDICE V

PARAMETROS DEL POTENCIAL OPTICO FENOMENOLOGICO

A continuación se muestran dos tablas en que se reportan los valores de los parámetros del potencial óptico fenomenológico.

La tabla V.1 ha sido tomada de Hornyak (1975) pag. 274. En ella V_{00} y V_t corresponden a los parámetros V_i y V_0 de este trabajo, γ a $\frac{\beta}{1+\beta}$ de la ec.(3.25), R_0 a r_0 , y a es la difusividad.

La tabla V.2 se tomó de Bechetti y Greenless (1969). En este caso la columna V_R corresponde a la parte real del potencial óptico y la correspondencia con los parámetros empleados aquí es evidente. En la segunda columna r_R y a_R se refieren al radio y la difusividad del mismo potencial. Las siguientes tres columnas muestran los parámetros de la parte imaginaria, y la que les sigue, los del potencial spin-órbita.

TABLA V.1

TABLE 4-6

PARAMETERS FOR THE REAL PART OF THE OPTICAL POTENTIAL

V_{00} (MeV)	γ	V_t (MeV)	R_0 (fm)	a (fm)	Reference
53.3	0.55 ^a	27	1.25	0.65	Perey (1963)
47.7	0.33 ^a	26.2	1.25	0.65	Rosen <i>et al.</i> (1965), Green <i>et al.</i> (1968) ^b
49.9	0.22	26.4	1.16	0.75	Fricke <i>et al.</i> (1967), Batty <i>et al.</i> (1968)
48.6	0.30	30	—	—	Azziz (1970)

^a γV_t is separately quoted as $0.4Z/A^{1/3}$.

^b Protons only.

TABLE I. A listing of the parameters found in the analysis of the proton data of Fig. 1 using different potential forms. Only those forms giving reasonable fits to the data have been included.

Comments ^a	V_R (MeV)	r_R, a_R (F)	W_V (MeV)	W_{OS} (MeV)	r_I, a_I (F)	V_{OO}, r_{OO}, a_{OO}	$\sigma(\theta)$	$\frac{\sigma(N)}{P(\theta)}$	σ_R
Best fit	$54. -0.32E + 0.4\gamma$ $+24.\xi$	1.17, 0.75	0.22E-2.7	11.8-0.25E $+12.\xi$	1.32, 0.51 $+0.7\xi$	6.2, 1.01, 0.75	12	7	6
Grid on r_R (See Fig. 3 for parameters.)							14	9	10
a_I constant	$54. -0.32E + 0.4\gamma$ $+24.\xi$	1.17, 0.75	0.22E-2.7	11.8-0.25E $+12.\xi$	1.32, 0.56	6.2, 1.01, 0.75	16	8	6
$a_I \propto A^{1/4}, W_V \propto E$	$54. -0.32E + 0.4\gamma$ $+24.\xi$	1.17, 0.75	0.15E	11.8-0.25E $+12.\xi$	1.32, 0.18A ^{1/4}	6.2, 1.01, 0.75	13	7	8
$a_I \propto A^{1/3}$	$54. -0.32E + 0.4\gamma$ $+24.\xi$	1.17, 0.75	0.22E-2.7	11.8-0.25E $+12.\xi$	1.32, 0.14A ^{1/3}	6.2, 1.01, 0.75	12	7	8
$W_V \propto \xi$	$54. -0.32E + 0.4\gamma$ $+24.\xi$	1.17, 0.75	0.22E-2.7 $+1.4\xi$	11.8-0.25E $+12.\xi$	1.32, 0.56	6.2, 1.01, 0.75	14	7	7
$W_{OS} \propto A^{2/3}$	$54. -0.32E + 0.4\gamma$ $+24.\xi$	1.17, 0.75	0.22E-2.7	0.77A ^{2/3} -0.28E	1.27, 0.51+0.7\xi	6.2, 1.01, 0.75	20	9	10
$r_{OO} = r_R = 1.17$	$54. -0.32E + 0.4\gamma$ $+24.\xi$	1.17, 0.75	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12.\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	5.9, 1.17, 0.60	16	9	6
$V_{OO} \propto E$	$54. -0.32E + 0.4\gamma$ $+24.\xi$	1.17, 0.75	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12.\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	9.0-0.1E, 1.01, 0.75	13	7	6
$V_R \propto E^2$	$59.7-0.47E+0.9E^2$ $+0.4\gamma+24.\xi$	1.15, 0.76	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12.\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	6.2, 1.01, 0.75	17	8	7
Best $r_R = 1.12$	$58.8-0.32E+0.4\gamma+24.\xi$	1.12, 0.78	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12.\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	6.2, 0.98, 0.75	15	7	8
Best $r_R = 1.22$	$50.0-0.32E+0.4\gamma+24.\xi$	1.22, 0.72	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12.\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	6.2, 1.06, 0.68	15	7	8
$V_{OO} = 0, r_{OO} \propto \xi$	$58.8-0.32E+0.4\gamma$	1.11+0.33\xi, 0.76	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12.\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	6.2, 1.01, 0.75	13	8	8
$V_{OO} = 0, a_{OO} \propto \xi$	$56. -0.24E + 0.4\gamma$	1.15, 0.66+1.\xi	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12.\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	6.2, 1.01, 0.75	14	8	8
$V_O = 0$	$57.3-0.32E+28.\xi$	1.17, 0.75	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12.\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	6.2, 1.01, 0.75	14	8	6
$V_O = 0.3$	$54.9-0.32E+0.3\gamma+25.\xi$	1.17, 0.75	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12.\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	6.2, 1.01, 0.75	12	7	6
$V_{OO} = 0.84^b$	$55.2-0.32E+0.27\gamma+24\xi$	1.17, 0.75	0.22E	10.2-0.25E $+0.21\gamma+12\xi$	1.32, 0.51+0.7\xi	6.2, 1.01, 0.75	12	7	6
$r_I' = 1.22, a_I' = 0.72^c$	$54. -0.32E + 0.27\gamma + 24\xi$	1.17, 0.75	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	6.2, 1.01, 0.75	13	7	6
$V_{OS} = 9^d$	$56. -0.32E + 0.4\gamma$	1.17, 0.75	0.22E-2.7	11.8-0.25E+12\xi	1.32, 0.51+0.7\xi	6.2, 1.01, 0.75	14	8	7
No so ^e		Search terminated parameters converging very slowly.				0., ..., ...	30	...	12

^a Using data of Fig. 1 which includes 40 $\sigma(\theta)$, 28 $P(\theta)$, and 8 σ_R data in the 46 data sets. $\gamma = Z/A^{1/2}$, $\xi = (N-2)/A$, $R = R_{inh}$, and W_V, W_{OS} always ≥ 0 .

^b Variable Coulomb energy term added to all energy-dependent strengths, i.e., incident proton energy E replaced by an effective energy $E - V_{OO}Z/A^{1/2}$ with V_{OO} a search parameter.

^c Separate geometry used for volume imaginary potential with $W_V(r) = -W_V f(r, r_I', a_I') +$

$W_{OS} g_2(d/dr) f(r, r_I, a_I)$.

^d Volume real symmetry term replaced by surface form: $V_{OS}(r) = -V_{OS} \xi a_{OS} (d/dr) f(r, r_R, a_R)$.

^e Attempt to fit $\sigma(\theta)$ and σ_R data only without using a spin-orbit potential ($V_{SO} = 0$).

REFERENCIAS

- Abramowitz M y Stegun I 1964 "Handbook of Mathematical Functions" (New York: Dover) p. 17
- Antoufiev Y P et al 1972 Phys. Lett. B42 347
- Balian R y Bloch C 1970 Ann. Phys. (NY) 60 401
- 1971 Ann. Phys. (NY) 64 271
- 1972 Ann. Phys. (NY) 69 76
- Barret R C y Jackson D F 1977 "Nuclear Sizes and Structure" (Oxford: Clarendon Press) cap. 7
- Bauer M 1976 Atomic Data and Nuclear Data Tables 17 442
- Bauer M y Canuto V 1963 Phys. Lett. 7 261
- 1967 Arkiv för Fysik 47 393
- Bauer M y Herrera JJE 1978 J. Phys G: Nucl. Phys. 4 67
- Bechetti F D y Greenlees G W 1969 Phys. Rev. 182 1190
- Becker R L 1970a Phys. Rev. Lett. 24 400
- 1970b Phys. Lett. 32B 263
- Becker R L y Patterson M R 1971 Nucl. Phys. A178 88
- Becker R L Davies K T R y Patterson M R 1974 Phys. Rev. C9 1221
- Bernheim M et al 1974 Phys. Rev. Lett. 32 898
- Bethe H A y Bacher R F 1936 Rev. Mod. Phys. 8 82
- Bethe H A Brandow B H y Petschek A G 1963 Phys. Rev. 129 225
- Bohr A y Mottelson B R 1969 "Nuclear Structure" V.1 (New York: Benjamin)
- Brack et al 1972 Rev. Mod. Phys. 44 320
- Brueckner K A 1954 Phys. Rev. 96 508

- Brueckner K A y Levinson C A 1955 Phys. Rev. 97 1344
- Cohen B L et al 1962 Phys. Rev. 127 1678
- Cohen R 1975 "Atomic Masses and Fundamental Constants 5"
Opening Remarks (New York: Plenum Press) ed. por
Sanders J H y Wapstra A H
- Davies K T R y Mc. Carthy R J 1971 Phys. Rev. C1 81
- de Shalit A y Feshbach H 1974 "Theoretical Nuclear Physics"
(New York: Wiley)
- Dieperink A E L y de Forest T Jr. 1974 Phys. Rev. C10 543
----- 1975 Ann. Rev. Nucl. Sc. 1
- Dover C B y Van Giai N 1972 Nucl. Phys. A190 373
- Elton L R B y Swift A 1967 Nucl. Phys. A94 52
- Fermi E 1949 "Nuclear Physics" (Illinois: Univ. of Chicago)
- Fiset E O y Nix J R 1972 Nucl. Phys. A193 647
- Frahn W E 1965 Nucl. Phys. 66 358
- Frahn W E y Lemmer R H 1957a Nuovo Cim. 5 1564
----- 1957b Nuovo Cim. 6 664
- Friedman W A 1975 Phys. Rev. C12 279
- Goldstone J 1957 Proc. Roy. Soc. (London) A293 265
- Gradshteyn I S y Ryzhik I M 1965 "Tables of Integrals
Series and Products" (New York: Academic Press)
fórmula 8.547, p. 981
- Green A E S y Engler N A 1953 Phys. Rev. 91 40
- Hiramatsu et al 1973 Phys. Lett. B44 50
- Hodgson P E 1971 "Nuclear Reactions and Nuclear Structure"
(Oxford: Clarendon Press)
- Hornyak W F 1975 "Nuclear Structure" (New York: Academic
Press)

- Jacob G y Maris Th A J 1973 Rev. Mod. Phys. 45 6
----- 1966: Rev. Mod. Phys. 38 121
- James A N et al 1969a Nucl. Phys. A133 89
----- 1969b Nucl. Phys. A138 145
- Ko C M et al 1974 Nucl. Phys. A236 269
- Kobberling M et al 1974 Nucl. Phys. A231 504
- Köhler H S 1971a Nucl. Phys. A162 385
----- 1971b Nucl. Phys. A170 88
- Koltun D S 1972 Phys. Rev. Lett. 28 182
----- 1974 Phys. Rev. C9 484
- Kümmel H Mattauch J H E Thiele W y Wapstra A H 1966
Nucl. Phys. 81 129
- Lejeune A Mahaux C 1976 Phys. Rep. C 25 83
- Lemmer R H 1960 Phys. Rev. 117 1551
- Liran S y Zeldes N 1976 "Atomic Data and Nuclear Data
Tables" 17 431
- Manweiler R W 1975 Nucl. Phys. A240 373
- Mayer R W 1975 Nucl. Phys. A240 373
- Mozér F S 1959 Phys. Rev. 116 970
- Myers W D 1976 Atomic Data and Nuclear Data Tables 17 411
- Myers W D y Swiatecky W J 1969 Ann. Phys. (NY) 55 395
----- 1974 Ann. Phys. (NY) 84 186
- Nakamura K et al 1974 Phys. Rev. Lett. 33 853
- Negele J W 1970 Phys. Rev. C1 1260
- Nilsson S G et al 1969 Nucl. Phys. A131 1
- Nix J R 1972 Ann. Rev. Nucl. Sci. 22 65
- Perey F G 1963 Phys. Rev. 131 745
- Schopper H 1967 "Nuclear Physics and Technology" V.2
Nuclear Radii (Berlin: Springer)

Seeger P A y Howard W M 1976 Atomic Data and Nuclear Data

Tables 17 428

Shao J Bassihis WH y Lomon E L 1972 Phys. Rev. C6 758

Tondeur F 1978 Nucl. Phys. A303 185

Vautherin D y Brink D M 1970 Phys. Lett. B32 149

----- 1972 Phys. Rev. C5 626

Vinh Mau N 1970 "Theory of Nuclear Structure"

(Vienna: IAEA) p.931

von Weizsäcker C F 1935 Z. Phys. 96 431

Zeldes N Grill A Simievic A 1967 Dan. Vidensk. Selsk.

Mat. Fys. Skr. 3 No. 5