



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**TEORIA DE GRUPOS DEL MODELO DE
BOSONES CON INTERACCION**

T E S I S

que para obtener el grado de

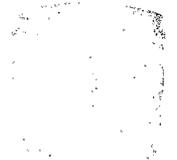
DOCTOR EN CIENCIAS

(FISICA)

p r e s e n t a :

ALEJANDRO FRANK HOEFlich

INSTITUTO DE FISICA



BIBLIOTECA

FRANCO B. DE OYARZABARRE

1979



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Mónica, Martha y Nathán .

AGRADECIMIENTOS

A lo largo de la elaboración de este trabajo una serie de personas e instituciones me han dado su apoyo, tanto desde el punto de vista académico y personal como económico. En primer término quisiera expresar mi profundo agradecimiento a mi maestro, el Dr. Marcos Moshinsky, cuya dirección y constante estímulo permitieron llevar a cabo esta tesis. Al Dr. Pedro Federman, mi agradecimiento también por innumerables discusiones y sugerencias que dieron lugar a aplicaciones importantes de este trabajo y al Dr. Elpidio Chacón por su gran interés y estímulo.

El Instituto de Física de la U.N.A.M. me brindó su hospitalidad y apoyo económico durante los años en que se desarrolló este trabajo, por lo que quisiera hacer patente mi agradecimiento a su Director, el Dr. Jorge Flores, así como al Dr. Marcos Rosenbaum, Director del Centro de Estudios Nucleares de la U.N.A.M., donde se concluyó su elaboración.

Un agradecimiento especial para mi compañero de trabajo y amigo de muchos años, Octavio Castaños, cuya colaboración ha sido fundamental en el desarrollo de la tesis.

Por último, quisiera agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología el haberme otorgado su apoyo económico a través de el Programa Nacional de Ciencias Básicas.

INDICE

Capítulo I	Introducción.	pag 1
Capítulo II	2.1 El Modelo de Bosones d.	pag 8
	2.2 El Hamiltoniano del MBI para Bosones d.	pag 10
	2.3 El Oscilador Armónico en cinco Dimensiones.	pag 12
	2.4 Las Soluciones del Hamiltoniano de Bosones d.	pag 26
Capítulo III	3.1 El Modelo de Bosones con Interacción	pag 30
	3.2 El Hamiltoniano del MBI	pag 32
	3.3 Teoría de Grupos del Modelo de Bosones con Interacción.	pag 36
	3.4 El MBI y el Modelo de Capas del Núcleo.	pag 52
Capítulo IV	4.1 Los Límites Exactos del MBI.	pag 68
	4.2 El Límite Vibracional $G=U(5)$.	pag 72
	4.3 El Límite Rotacional $G=SU(3)$.	pag 82
	4.4 El Límite de "Pairing" $G=O(6)$.	pag 90
Capítulo V	5.1 Aplicaciones del MBI a Regiones de Transición.	pag 96
	5.2 El Método de Ajuste Automático.	pag 97
	5.3 Programa de Ajuste en el MBI.	pag 105
	5.4 La Transición de Fase en los Isótopos de Sm y Gd.	pag 109
Capítulo VI	Conclusiones.	pag 114
Apéndice A	Evaluación de Elementos de Matriz	pag 118
Apéndice B	Paréntesis de Transformación entre las Cadenas $U(6) \supset O(6) \supset O(5)$ y $U(6) \supset U(5) \supset O(5)$.	pag 128
Apéndice C	Programas de Cómputo en el MBI.	pag 135
Referencias		pag 136

CAPITULO I

INTRODUCCION

El modelo de capas del núcleo ha representado desde su creación¹⁾ una base fundamental en que se sustentan los cálculos de estructura nuclear, incluyendo éstos la determinación de los espectros característicos, momentos y probabilidades de transición multipolares, etc., que definen el comportamiento y peculiaridades de los núcleos.

Este modelo ha permitido sistematizar una gran cantidad de información que los físicos nucleares han recopilado a lo largo de muchos años, a partir de procesos fundamentales como es la interacción entre nucleones, e incorporando principios básicos como el de exclusión de Pauli.

Sin embargo, para las regiones nucleares lejanas a capas cerradas, como es el caso de las "tierras raras" y los actínidos, el modelo es incapaz de hacer predicciones debido a la cantidad astronómica de niveles de "partícula independiente" que intervienen en la dinámica nuclear.

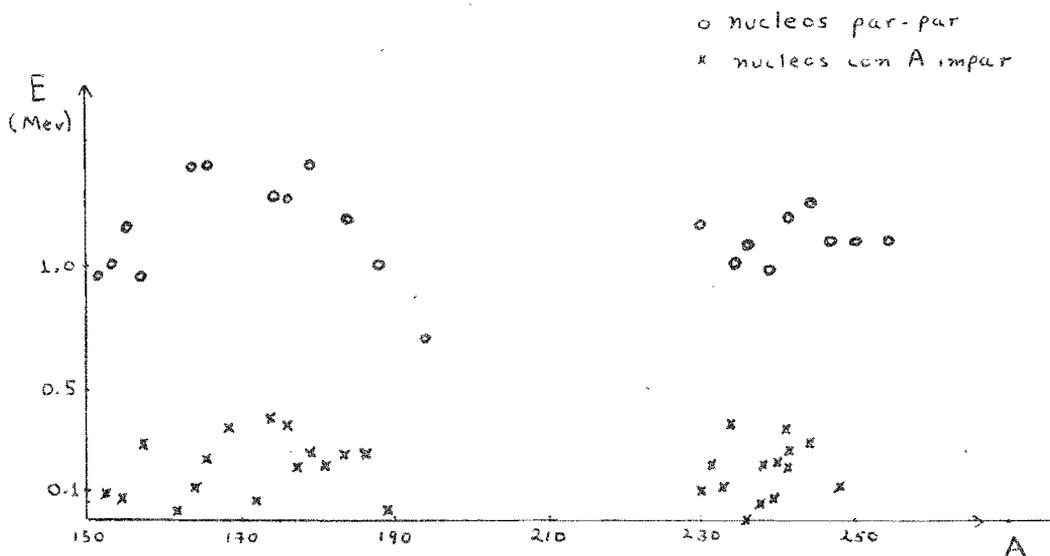
Un conjunto de modelos alternativos, denominados "modelos colectivos",^{2,3)} ha permitido sistematizar la información dentro de estas regiones partiendo de ideas radicalmente distintas a las del modelo de capas, como es el caso en el modelo de la gota de líquido, en que una gota cuántica de material nuclear es capaz de sufrir vibraciones, rotaciones y otros efectos de naturaleza colectiva.

Es claro que resulta insatisfactorio el contar con dos modelos distintos y aparentemente inconexos para la descripción de los núcleos, por lo que en los últimos tiempos el esfuerzo de algunos físicos se ha centrado en tender un puente entre ellos.

En 1958, Bohr, Mottelson y Pines⁵⁾ hicieron notar que la estructura nuclear exhibe similitud con la estructura electrónica en metales. En ambos casos se trata con sistemas de fermiones que pueden ser caracterizados en primera aproximación en términos de movimientos de partícula independiente. Por ejemplo, la densidad de niveles estadística, a energías de excitación moderadas, se espera próxima a la de un gas de Fermi. Sin embargo, en ambos sistemas existen importantes correlaciones en el movimiento de las partículas, debido a la acción de las fuerzas entre éstas y, en el caso metálico, a la interacción con las vibraciones del cristal. La aparición de una brecha (gap) de energía entre el estado base y los primeros estados excitados ^{en intervalos} para ciertas regiones nucleares y para el sistema electrónico, indica una desviación importante del movimiento de partícula independiente.

Las fuerzas residuales entre las partículas, que a primer orden dan origen a un efecto de apareamiento debido a que la interacción es especialmente fuerte para un par de partículas en orbitas degeneradas, implica un corrimiento hacia arriba, relativo al estado base, de los estados que involucran el rompimiento de un par. Sin embargo este efecto por si solo no es suficiente para explicar las brechas de energía en un esquema de partícula independiente como el mencionado, ya que la

excitación de dos partículas que permanecen apareadas daría lugar a un espaciamiento muy por debajo del observado en núcleos par-par con $A = 150 - 190$ y $A = 230 - 250$



Esto implica una correlación significativa en los movimientos nucleónicos, es decir, además de la fuerza de apareamiento, es necesario considerar el acoplamiento entre un número grande de estados de partícula independiente.

Bohr, Mottelson y Pines hacen notar que en un metal superconductor se presenta un fenómeno similar de correlaciones en el movimiento electrónico. Medidas de las propiedades térmicas y electromagnéticas de los superconductores indican que el espectro de excitación electrónico a bajas energías difiere significativamente del de un gas de Fermi en que existe una brecha de energía entre el estado base del metal y los estados excitados.

Bardeen, Cooper y Schrieffer⁶⁾ realizaron un estudio detallado de las correlaciones resultantes de la parte de la interacción que actúa entre pares de partículas con momentos iguales y opuestos. Estas correlaciones dan lugar a que los fermiones se comporten como bosones y en ello reside fundamentalmente la explicación del fenómeno de superconductividad.

La idea de considerar la dinámica nuclear en términos de bosones tiene entonces antecedentes en otros campos de la física y en 1958 se sugiere ya su posible relevancia en la explicación de fenómenos nucleares.

En el "modelo de bosones con interacción", propuesto originalmente por Arima y Iachello⁴⁾, los nucleones pierden su naturaleza fermiónica debido esencialmente a las fuerzas de apareamiento, asociándose por parejas que se comportan como bosones capaces de ocupar dos niveles de energía, uno con momento angular cero y otro con momento angular dos, lo que da lugar a que los bosones ocupando estos niveles se denominen "s" y "d" respectivamente. En los núcleos par-par todos los nucleones pueden estar asociados de esta manera y las distintas distribuciones de bosones dentro de estos niveles, así como las posibles interacciones entre éstos dan origen a los espectros, probabilidades de transición y demás características de los núcleos.

El modelo de bosones con interacción (MBI) fue propuesto originalmente de manera más restringida y a partir de consideraciones fenomenológicas⁷⁾. Sin embargo, debido a su creciente éxito se ha investigado su relación con el modelo de

capas en forma más detallada⁸⁾ y se ha logrado establecer conexiones con teorías microscópicas de los movimientos colectivos^{2,3)}.

Un aspecto fundamental en el modelo es la posibilidad de explotar un conjunto de simetrías dinámicas asociadas con casos especiales del Hamiltoniano general.

La existencia de simetrías es una propiedad muy importante en cualquier sistema físico. Dada una simetría del problema, es posible explotar la estructura de grupo asociada con ésta para encontrar soluciones elegantes y concisas.

El uso de simetrías en física nuclear tiene un origen en los trabajos de Wigner⁹⁾ relativos al grupo SU(4) en la teoría de los supermultipletes, que encontró importantes aplicaciones en la descripción de núcleos ligeros, aprovechando las propiedades de la interacción efectiva entre nucleones.

Posteriormente Elliot¹⁰⁾ explotó las propiedades de simetría y degeneraciones del potencial de oscilador armónico para la descripción de núcleos en la capa S-D, haciendo uso del grupo SU(3).

Sin embargo, ambas descripciones son válidas únicamente en las regiones nucleares mencionadas, esencialmente debido a que la simetría spin-isospín y la degeneración típica del oscilador armónico se ven rotas para núcleos más pesados.

Parecería entonces que la aparición de simetrías está restringida a sistemas nucleares de pocas partículas y que la gran complejidad de los sistemas con mayor número de nucleones destruye las correlaciones simples que dan lugar a éstas.

La idea fundamental detrás de el modelo de bosones con interacción es que a pesar de que la gran cantidad de grados de libertad y la complejidad de las interacciones en los núcleos pesados harían imposible este tipo de descripción, es factible que exista un comportamiento coherente, resultante de la combinación de muchos de estos grados de libertad, responsable de la estructura y características de los espectros a bajas energías.

De hecho este comportamiento colectivo es el que motivó la descripción de Bohr y Mottelson en términos de modelos más fenomenológicos, como se discutió anteriormente.

El método consiste entonces en reemplazar el problema original de muchos cuerpos por un sistema más simple, aunque aproximado, que permita estudiar estas correlaciones a través de sus simetrías. Como veremos, este camino ha tenido un gran éxito en el estudio de nucleos par-par con $A \geq 100$.

A pesar de representar una simplificación al problema de muchos cuerpos, el MBI en su forma más general presenta un problema matemático considerable, por lo que su aplicación sistemática no se ha realizado hasta ahora, de modo que pueda ser analizada su validez en las distintas regiones nucleares.

El propósito de este trabajo es presentar, por un lado, la solución completa del problema mediante la teoría de grupos ¹⁴⁾, y por otro lado, mostrar las aplicaciones de esta técnica en el análisis de algunas regiones de la tabla nuclear.

En el capítulo II se presenta el modelo restringido de $A \geq 1$ que involucra solo a bosones "d" y su solución completa en

base a la teoría de grupos. En el capítulo III se analiza el Hamiltoniano más general posible dentro del modelo de bosones "s" y "d" y se da la solución matemática general del problema. En el capítulo IV se analizan los tres límites en los movimientos colectivos presentes dentro del modelo y se muestran algunas aplicaciones en regiones nucleares específicas. En el capítulo V se aplica el aparato matemático desarrollado en los capítulos anteriores en una región de la tabla nuclear en que se presenta una transición muy clara en los espectros de energía, desde los típicos de vibradores anarmónicos hasta los rotacionales¹²⁾. Para ello se implementa un programa general de ajuste automático de parámetros dentro del modelo. Finalmente en el capítulo VI se resumen las conclusiones del trabajo y se indican las perspectivas futuras de investigación en este campo.

CAPITULO IIEL MODELO DE BOSONES "d"

2.1 - El modelo colectivo de núcleo hizo su aparición hace más de 25 años, con los trabajos clásicos de Bohr y Mottelson^{2,3)}. En estos trabajos, los autores discutieron las vibraciones cuadrupolares de una gota de líquido desde el punto de vista de la mecánica cuántica. Desde entonces, los modelos colectivos han jugado un papel muy importante en la interpretación de gran cantidad de fenómenos nucleares, por ejemplo las vibraciones y rotaciones, las resonancias gigantes y la fisión nuclear.

Esta serie de investigaciones establecieron la base conceptual para el trabajo en esta área de la física.

La naturaleza cuadrupolar del modelo se motiva fundamentalmente en tres hechos experimentales :

1. Los grandes momentos cuadrupolares observados en núcleos lejanos a capas cerradas.
2. Las grandes probabilidades de transición, sobre todo de naturaleza cuadrupolar, entre estados colectivos.
3. La aparición de espectros a bajas energías como los que se muestran en la figura 1, que sugieren que los estados de vibración y rotación pueden construirse con quanta de momento angular $2 \hbar$.



Fig. 1. Espectros típicamente vibracional a) y rotacional b).

A lo largo de los últimos 25 años se ha logrado sistematizar una gran cantidad de información en base al modelo de vibraciones superficiales cuadrupolares. En este modelo cada núcleo es caracterizado por su superficie de energía potencial $V(\beta, \gamma)$ donde β y γ son las coordenadas colectivas que describen la deformación intrínseca del sistema, como se verá más adelante.

Sin embargo, este modelo, a pesar de sus éxitos, presenta algunos inconvenientes, los más importantes de los cuales son:

1. La relación entre las coordenadas colectivas y las coordenadas nucleónicas no es clara, y hasta ahora no ha sido posible establecer una relación cuantitativa entre ellas.
2. El ajuste de espectros y probabilidades de transición en núcleos vecinos como es el caso de isótopos de núcleos pesados, lleva a la construcción de superficies de energía potencial muy distintas, y la relación entre los parámetros que los definen no es la de una lenta transición como se esperaría de sistemas muy parecidos y que difieren en un número pequeño de partículas.

A pesar de dar una descripción intuitiva muy clara de los fenómenos colectivos, esta descripción parece por tanto insatisfactoria desde el punto de vista de 1) y 2).

El modelo de bosones con interacción (MBI) fue introducido originalmente en forma fenomenológica proponiendo la descripción de los núcleos colectivos en términos de un gas de bosones cuadrupolares interactuantes.

Posteriormente, como se verá en el capítulo siguiente, el modelo se generalizó mediante la introducción de los bosones "s" ⁴⁾ y más tarde se estableció su conexión con el modelo de capas. ⁵⁾

En este capítulo presentamos el MBI de bosones "d" tal como fué introducido originalmente y analizaremos los eigenfunciones y elementos de matriz (E.M.) que son esenciales en la discusión del MBI completo.

2.2 El Hamiltoniano del MBI para bosones "d"

El núcleo, en regiones lejanas a capas cerradas o de deformación apreciable, puede ser descrito a muy buena aproximación como un gas de bosones. Este resultado emerge de los estudios iniciados en 1974 por Iachello y Arima. ⁷⁾

En estos artículos, los autores parten de tres suposiciones básicas :

- a) los niveles colectivos vibracionales se construyen a partir de varios bosones cuadrupolares (llamados bosones-d);
- b) los bosones interactúan entre sí, y
- c) la interacción V entre bosones no cambia el número de bosones.

La suposición c) se sugiere de cálculos microscópicos realizados por Iachello y Feshbach ¹³⁾ y es el origen de la simetría exacta del Hamiltoniano que pasamos ahora a discutir.

El Hamiltoniano más general para bosones "d" con interacciones de uno y dos cuerpos en lenguaje de segunda cuantización es: ⁴⁾

$$\begin{aligned}
 H &= \epsilon \sum_m \eta_m \xi^m + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1, m_2}} \left\{ \langle 22 m_1, 22 m_2 | V_{12} | 22 m_1', 22 m_2' \rangle \right. \\
 &\quad \left. \times \eta_{m_1} \eta_{m_2} \xi^{m_1'} \xi^{m_2'} \right\} \\
 &= \epsilon \sum_m \eta_m \xi^m + \frac{1}{2} \sum_L \left\{ \langle 22, 22, L | V_{12} | 22, 22, L \rangle \right. \\
 &\quad \left. \times (2L+1) \left[[\eta \times \eta]^L \times [\xi \times \xi]^L \right]^0 \right\}, \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

donde $|22 \ell m\rangle$ son funciones de oscilador armónico con dos quanta, ℓ está restringido al valor $\ell = 2$ y en la última parte de (2.1) hemos reacoplado bra y ket a una L total, suponiendo que V_{12} es invariante ante rotaciones.

Los operadores η_m, ξ^m de creación y aniquilación de bosones d satisfacen las reglas de conmutación para bosones

$$[\xi^{m'}, \eta_m] = \delta_m^{m'} \quad (2.2)$$

y hemos usado la notación

$$[\eta \times \eta]_M^L = \sum_{m' m''} \langle 22 m' m'' | LM \rangle \eta_{m'} \xi_{m''},$$

para acoplamiento de momento angular.

Los elementos de matriz $\langle 22, 22, L | V_{12} | 22, 22, L \rangle$
 $L = 0, 2, 4$, junto con ϵ constituyen los cuatro parámetros dentro del modelo.

Como veremos más adelante, el Hamiltoniano (2.1) puede expresarse en términos de los operadores de Casimir de la cadena de grupos

$$U(5) \supset O(5) \supset O(3) \quad , \quad (2.3)$$

$$\hat{H}_a \quad \hat{A}^2 \quad \hat{L}^2$$

que constituye la simetría exacta presente en el modelo. Para demostrar esta aseveración resulta necesario hacer una revisión del problema matemático presente en esta cadena de grupos, problema analizado en dos artículos recientes por Chacón, Moshinsky y Sharp y Chacón y Moshinsky. ⁽¹⁴⁾

En estos artículos los autores, motivados por un problema diferente conectado con el modelo colectivo de Bohr y Mottelson, ^(2,3) resuelven en forma completa el problema matemático asociado al oscilador armónico en 5 dimensiones cuya estructura de simetrías es la misma que esta dada por la cadena (2.3).

A continuación haremos una breve descripción de los resultados obtenidos en la ref. (14), ya que son de suma importancia dentro de este trabajo.

2.3 El Oscilador Armónico en Cinco Dimensiones.

Como se mencionó en la sección 2.1, Bohr y Mottelson discuten en una serie de publicaciones ^(2,3) el problema de las vibraciones cuadrupolares de una gota de líquido desde el punto

de vista de la mecánica cuántica. En sus análisis estos autores utilizaron lo que se llama un esquema de acoplamiento fuerte para la construcción de los estados requeridos. Estas eigenfunciones pueden entonces ser caracterizadas por el número de quanta ν , "seniority" Λ , momento angular L y proyección M . Los estados para momento angular $L = 0, 3$ para ν, Λ arbitrarios, así como los estados hasta $L = 6$ para ν, Λ pequeños fueron encontrados en los años subsecuentes mediante la solución de ecuaciones diferenciales acopladas.

La solución general sin embargo, para L, ν, Λ arbitrarios, fue dada más de 20 años después por los autores mencionados en la sección anterior ¹⁴⁾ que utilizaron argumentos de teoría de grupos.

Si el movimiento de una gota de líquido se restringe al de naturaleza cuadrupolar, la superficie nuclear es descrita por la ecuación :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{m=-2}^2 \alpha_{2m} Y_{2m}^*(\theta, \varphi) - \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-2}^2 |\alpha_{2m}|^2 \right). \quad (2.4)$$

Las coordenadas α_{2m} definen por tanto la forma del núcleo, el radio promedio se toma como $1.1A^{1/3} f_m$ y el último término es una corrección que garantiza la conservación de volumen ¹⁵⁾.

Para garantizar que $R(\theta, \varphi)$ es real, las α_{2m} deben satisfacer la condición

$$\alpha_{2m}^* = (-)^m \alpha_{2-m} \quad (2.5)$$

y se transforman como los armónicos esféricos $Y_{\lambda m}$ bajo rotaciones, de modo que la expresión

$$\sum_{m=-2}^2 \alpha_{\lambda m} Y_{\lambda m}^*(\vartheta, \varphi) = \sum_{\mu=-2}^2 \alpha'_{\lambda \mu} Y_{\lambda \mu}^*(\vartheta', \varphi') \quad (2.6)$$

es un escalar bajo rotaciones del sistema de coordenadas.

Las propiedades (2.5) y (2.6) son suficientes para la construcción del Hamiltoniano más general dependiente de las coordenadas $\alpha_{\lambda m}$.

Para conectar las coordenadas $\alpha_{\lambda m}$ con las coordenadas de los nucleones, se puede igualar el momento cuadrupolar en el espacio de coordenadas colectivas con el correspondiente momento en el sistema microscópico. El momento cuadrupolar en términos de $\alpha_{\lambda m}$ está dado hasta orden α^2 por ¹⁵⁾

$$Q_{\lambda m} = \int_{R(\vartheta, \varphi)} \rho r^2 Y_{\lambda m} d\tau = \rho_0 R_0^5 \left[\alpha_{\lambda m} - \frac{10}{\sqrt{70\pi}} [\alpha \times \alpha]_{\lambda m}^2 \right], \quad (2.7)$$

por lo que a primer orden se establece la conexión

$$\alpha_{\lambda m} = \frac{1}{\rho_0 R_0^5} \sum_{i=1}^A \tau_i^2 Y_{\lambda m}(\vartheta_i, \varphi_i) \quad (2.8)$$

La última ecuación muestra que las coordenadas $\alpha_{\lambda m}$ son invariantes ante paridad, de modo que los estados descritos por las vibraciones cuadrupolares son de paridad positiva.

Ahora podemos introducir los momentos canónicos conjugados a través de las reglas de conmutación usuales

$$[\alpha^{2m'}, \Pi_{2m}] = i \delta_m^{m'} \quad (2.9a)$$

$$[\alpha_{2m}, \alpha_{2m'}] = [\Pi_{2m}, \Pi_{2m'}] = 0 \quad (2.9b)$$

Introduciendo ahora las coordenadas a_m correspondientes a las coordenadas generalizadas en el sistema de referencia fijo en el cuerpo a lo largo de los ejes principales, se tiene la relación ¹⁵⁾

$$\alpha_{2m} = \sum_{m'} D_{mm'}^{2*}(\vartheta_i) a_{m'} \quad , \quad (2.10)$$

donde ϑ_i , $i = 1, 2, 3$ son los ángulos de Euler que especifican la orientación de los ejes principales con respecto al sistema de laboratorio, y ya que el tensor de inercia es diagonal en este sistema

$$a_2 = a_{-2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \vartheta \quad a_1 = a_{-1} = 0 \quad a_0 = \beta \cos \vartheta \quad . \quad (2.11)$$

A segundo orden, el Lagrangiano clásico para el movimiento estará dado por

$$L = \frac{1}{2} B_2 \sum_m \dot{\alpha}_{2m} \dot{\alpha}^{2m} - \frac{1}{2} C_2 \sum_m \alpha_{2m} \alpha^{2m} \quad , \quad (2.12)$$

donde los parámetros B_2 y C_2 están relacionados con la densidad, tensión superficial y carga de la gota de líquido. ¹⁵⁾

Usando unidades donde

$$\hbar = B_2 = C_2 = 1 \quad , \quad (2.13)$$

el Hamiltoniano del problema puede escribirse como

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_m (\pi_{2m} \pi^{2m} + \alpha_{2m} \alpha^{2m}) , \quad (2.14)$$

donde clásicamente $\pi_{2m} = \dot{\alpha}_{2m}$, y el paso a la cuántica se logra mediante (2.9),

$$\text{i.e.,} \quad \pi_{2m} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha^{2m}} . \quad (2.15)$$

En el sistema fijo en el cuerpo el Hamiltoniano cuántico (2.14) toma la forma ¹⁵⁾

$$H_0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2\beta^2} \hat{\Lambda}^2 + \frac{1}{2} \beta^2 , \quad (2.16a)$$

$$\text{donde} \quad \hat{\Lambda}^2 = -\frac{1}{\sin 3\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \sin 3\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=1}^3 I_k^{-1} \hat{L}_k^2 , \quad (2.16b)$$

$$I_k = 4\beta^2 \sin^2(\sigma - 2\pi k/3) . \quad (2.16c)$$

Las cantidades I_k , $k = 1, 2, 3$ son los momentos de inercia alrededor de los ejes principales del cuerpo y \hat{L}_k , $k = 1, 2, 3$, las componentes del momento angular en este mismo sistema.

En las unidades (2.13) es conveniente introducir los operadores de creación y aniquilación de fonones mediante las relaciones

$$\begin{aligned} \eta_m &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_m - i \pi_m) , \\ \xi^m &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^m + i \pi^m) \end{aligned} \quad (2.17)$$

que satisfacen las reglas de conmutación (2.2)

$$\begin{aligned} [\xi^m, \eta_{m'}] &= \delta_{m'}^m, \\ [\xi_m, \xi_{m'}] &= [\eta_m, \eta_{m'}] = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

En términos de estos operadores (2.14), toma la forma

$$H_0 = \sum_m \eta_m \xi^m + \frac{5}{2}. \quad (2.19)$$

Debido a la invariancia de el Hamiltoniano (2.19) y las relaciones de conmutación (2.18) bajo transformaciones unitarias en cinco dimensiones $U \equiv (U_{\mathbb{R}})$, los eigenestados de (2.19) pueden ser clasificados conforme a las representaciones irreducibles del grupo $U(5)$. Solamente las representaciones totalmente simétricas son distintas de cero, ya que los operadores η_m, ξ^m satisfacen las reglas de conmutación para bosones (2.18). Las representaciones totalmente simétricas pueden ser representadas por el **diagrama** de Young $[\nu]$, que consiste en un renglón con ν cajas.

Notamos además que el Hamiltoniano (2.19) es invariante bajo las transformaciones ortogonales en 5 dimensiones de $O(5)$; las representaciones irreducibles simétricas de $O(5)$ se denotan por $(\Lambda, 0)$, donde Λ es el "seniority" del estado.¹⁶⁾ El "seniority" es igual al número total de operadores de creación de un estado, que no están acoplados por pares a momento angular cero. Por lo tanto, los estados reducidos con respecto a $U(5)$ y $O(5)$ están clasificados en forma completa por $[\nu], (\Lambda, 0)$.

Ya que el momento angular \hat{L} conmuta con el Hamiltoniano (2.19) que es entonces una escalar en $O(3)$, sus eigenestados pueden ser clasificados por los eigenvalores $L(L+1)$ y M de L^2 y L_3 .

De aquí que los eigenestados reducidos de acuerdo a la cadena (2.3) pueden etiquetarse como

$$| \nu, \Lambda, s, L, M \rangle \quad , \quad (2.20)$$

donde s , como veremos más adelante, es un índice que discrimina representaciones equivalentes de $O(3)$ dentro de las representaciones de $O(5)$.

Haremos ahora un breve resumen de la construcción de estas eigenfunciones. ¹⁴⁾

Volviendo a las ecuaciones (2.16)

$$H = -\frac{1}{2} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{2\beta^2} \hat{\Lambda}^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \quad , \quad (2.16a)$$

$$\hat{\Lambda}^2 = -\frac{1}{\sin 3\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \sin 3\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=1}^3 I_k^{-1} \hat{L}_k \quad , \quad (2.16b)$$

$$I_k = 4\beta^2 \sin^2(\tau - 2\pi k/3) \quad , \quad (2.16c)$$

identificamos a $\hat{\Lambda}^2$ como el operador de Casimir de $O(5)$ ⁶⁰⁾ cuyo eigenvalor es $\Lambda(\Lambda+3)$.

De (2.19) es claro que el eigenvalor de H está dado en términos de el número ν de quanta:

$$\nu + 5/2 = 2\eta + \Lambda + 5/2 \quad , \quad (2.21)$$

donde $\eta = \frac{1}{2}(\nu - \Lambda)$, y los eigenvalores asociados con el momento angular total

$$L^2 = \sum_{k=1}^3 L_k'^2 = \sum_{k=1}^3 L_k^2 \quad (2.22)$$

y L_3 son $L(L+1)$ y M respectivamente.

Los estados pueden ser denotados por

$$|\nu \Lambda \mu L M\rangle = F_n^\Lambda(\beta) \sum_K \phi_K^{\Lambda \mu L}(\gamma) \left[D_{MK}^{L*}(\psi_i) + (-)^L D_{M-K}^{L*}(\psi_i) \right], \quad (2.23a)$$

donde se ha indicado por μ el número cuántico faltante para caracterizar completamente los estados.

Substituyendo (2.23) en (2.16a) se encuentra de inmediato la dependencia en β como ¹⁷⁾

$$F_n^\Lambda(\beta) = \left(\frac{2(n!)}{\Gamma(n+\Lambda+5/2)} \right)^{1/2} \beta^\Lambda L_n^{\Lambda+3/2}(\beta^2) \exp(-\beta^2/2), \quad (2.23b)$$

donde $L_n^{\Lambda+3/2}(\beta^2)$ es un polinomio de Laguerre y la función está normalizada para el elemento de volumen $\beta^4 d\beta$.

Para analizar la dependencia en γ y ψ_i podemos usar el hecho de que las $D_{MK}^{L*}(\psi_i)$ constituyen un conjunto completo de funciones de los ángulos de Euler. De hecho, debido a consideraciones de simetría asociadas a la selección de ejes principales,¹⁵⁾ el desarrollo (2.23) se hace en términos de la combinación

$$\left(D_{MK}^{L*} + (-)^L D_{M-K}^{L*} \right) \quad \begin{array}{l} K = 0, 2, \dots, L \text{ para } L \text{ par} \\ K = 0, 2, \dots, L-1 \text{ para } L \text{ non} \end{array}$$

y no en términos de las $D_{m\kappa}^{L*}$ mismas. ⁽¹⁾

De este modo, la única parte no conocida de la expresión (2.23) es la correspondiente a su dependencia en γ .

Si aplicamos el operador

$$\hat{\Lambda}^2 |\nu \lambda \mu L M\rangle = \Lambda(\Lambda+3) |\nu \lambda \mu L M\rangle, \quad (2.24)$$

se llega a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, que solo es soluble analíticamente en casos particulares ⁽¹⁸⁾.

Claramente se puede restringir la discusión a los estados $|\Lambda \mu L\rangle \equiv |\nu = \Lambda, \lambda, \mu, L, M = L\rangle$ ya que $\nu = 2n + \Lambda$ solo involucra la introducción de el polinomio de Laguerre $L_n^{\Lambda+3/2}(\beta^2)$.

El método seguido en las refs. (14) consiste en construir polinomios de operadores de creación y aniquilación que cumplen con las propiedades dadas por las relaciones (2.27). En un principio se restringe el análisis a polinomios P con momento angular definido y proyección $M = L$. Los polinomios con $M < L$ pueden construirse en la forma usual mediante el operador L_- .

Usando los operadores (2.17) el operador de número tendrá la forma

$$\hat{n}_d = \sum_{m=-2}^2 \eta_m \xi^m = H - 5/2 \quad (2.25)$$

y las componentes del momento angular serán dadas por ⁽¹⁹⁾

$$\hat{L}_q = \sum_{m m'} \sqrt{6} \langle 21 m q | 2 m' \rangle \eta_{m'} \xi^m \quad q = 1, 0, -1. \quad (2.26)$$

Se buscan los polinomios $P(\eta_m)$ que satisfacen

$$\hat{n}_d P = \nu P, \quad \hat{L}_1 P = 0, \quad \hat{L}_0 P = L P, \quad (2.27a)$$

$$\hat{\Lambda}^2 P = \Lambda(\Lambda + 3) P. \quad (2.27b)$$

La primera ecuación nos dice que P debe ser un eigenpolinomio del operador de número (operador de Casimir de $U(5)$). También significa, de acuerdo a (2.25) que P es un polinomio homogéneo de grado ν en los operadores de creación. Este último punto es claro si notamos que las reglas de conmutación (2.18) permiten interpretar a ξ_m como

$$\xi^m = \frac{\partial}{\partial \eta_m}.$$

De acuerdo a (2.27), P debe tener también un momento angular definido y máxima proyección $M = L$. Finalmente, la cuarta condición (2.27b) nos dice que P debe ser un eigenpolinomio del operador de "seniority", $\hat{\Lambda}^2$ con eigenvalores $\Lambda(\Lambda + 3)$.

En la ref. (14), la notación (ν, Λ) es llamada "diagrama permisible elemental" (*dpe*) y es una abreviación para el acoplamiento de ν fonones η_m a un momento angular L y $M = L$. Por ejemplo,

$$(2, 0) = \sum_{m=-2}^2 (-)^m \eta_m \eta_{-m}, \quad (2, 2) = \sum_{m m'} \langle 22 m m' | 22 \rangle \eta_m \eta_{m'},$$

etc.

Se encuentra que las condiciones (2.27a) son satisfechas por los polinomios en los dpe 's :

$$P_{\nu\mu L n_i}(\eta_m) = \eta_a^{L-\nu+2n_i+3\mu} \binom{(2\nu-L)/2-3\mu-2n_i}{(2,2)}^\mu \binom{n_i}{(3,0)} \binom{n_i}{(2,0)}, \quad (2.28a)$$

(L par)

$$P_{\nu\mu L n_i}(\eta_m) = (3,3) \eta_a^{L-\nu+2n_i+3\mu} \binom{(2\nu-L-3)/2-3\mu-2n_i}{(2,2)}^\mu \binom{n_i}{(3,0)} \binom{n_i}{(2,0)}, \quad (2.28b)$$

(L non)

donde los exponentes están restringidos por el hecho de ser no-negativos.

Para cumplir la condición (2.27b), es necesario introducir un método originado por Vilenkin ²⁰⁾ y desarrollado por Lohe ²¹⁾, e introducir los "bosones sin traza"

$$a_m^+ \equiv \eta_m - (2,0)(2N+5)^{-1} \xi_m \quad m=-2,-1,\dots,2, \quad (2.29)$$

como veremos a continuación.

Como se mencionó, los estados correspondientes a la representación irreducible (RI) $(\Lambda, 0)$ de $O(5)$ son eigenestados de $\hat{\Lambda}^2$ con eigenvalor $\Lambda(\Lambda+3)$. La expresión de $\hat{\Lambda}^2$ en términos de η_m, ξ^m es ¹⁴⁾

$$\hat{\Lambda}^2 = \frac{1}{2} \sum_{m,m'} [\eta_m \xi^{m'} - \eta^{m'} \xi_m] [\eta_{m'} \xi^m - \eta^m \xi_{m'}],$$

que con un rearrreglo de factores puede escribirse en la forma

$$\hat{\Lambda}^2 = \hat{n}_d (\hat{n}_d + 3) - \left(\sum_{m'} \eta_{m'} \eta^{m'} \right) \left(\sum_m \xi_m \xi^m \right). \quad (2.30)$$

De (2.30) vemos que los eigenestados de $\hat{\Lambda}^2$ con eigenvalor $\Lambda(\Lambda+3)$ tienen la forma $P(\eta_m)|0\rangle$ donde $P(\eta_m)$ es un polinomio homogéneo de grado Λ en η_m y que cumple con ser "armónico", i.e.,

$$\sum_m \xi_m \xi^m P(\eta_z) = 0 .$$

Esta ecuación es automáticamente satisfecha por los polinomios $P_{\Lambda\mu L 0}(a_m^+)|0\rangle$, donde $P_{\Lambda\mu L 0}(a_m^+)$ denota a los mismos polinomios (2.28) si se substituye η_m por a_m^+ .

Esto se sigue de las identidades

$$\begin{aligned} (2\hat{n}_d + 5)^{-1} \eta_m &= \eta_m (2\hat{n}_d + 7)^{-1} \\ (2\hat{n}_d + 5)^{-1} \xi_m &= \xi_m (2\hat{n}_d + 3)^{-1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

válidas cuando se aplica los operadores a polinomios homogéneos en los η_m . De (2.31) es fácil demostrar entonces que

$$[a_m^+, a_{m'}^+] = 0 \quad (2.32)$$

y

$$\sum_{m=-2}^2 a_m^+ a_m^+ = (4\hat{n}_d - 1)^{-1} (2, 0) \sum_{m=-2}^2 \xi_m \xi^m . \quad (2.33)$$

De (2.28) y (2.33) es claro que los estados $P_{\Lambda\mu L n_1}(a_m^+)$ se anulan a menos que $n_1 = 0$.

Por otro lado, los estados $P_{\Lambda\mu L 0}(a_m^+)|0\rangle$ son combinaciones lineales de términos como $\eta_{m_1} \eta_{m_2} \dots \eta_{m_n} |0\rangle$, i.e., siguen siendo homogéneos de grado Λ en η_m y además siguen siendo caracterizados por el momento angular L (21).

El punto clave en el análisis es que, aplicando ahora el operador (2.33) a los estados

$$|\Lambda, \mu, L\rangle \equiv P_{\Lambda, \mu, L, 0}(a_m^+) |0\rangle \quad (2.34)$$

se sigue de (2.32) que

$$\begin{aligned} & (4\hat{n}_d^2 - 1)(2, 0)^2 \sum_m \xi_m^0 \xi_m^m |\Lambda, \mu, L\rangle \\ &= \sum_m a_m^+ a_m^+ P_{\Lambda, \mu, L, 0}(a_m^+) |0\rangle \\ &= P_{\Lambda, \mu, L, 0}(a_m^+) (4\hat{n}_d^2 - 1)^{-1} (2, 0)^2 \sum_m \xi_m^0 \xi_m^m |0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

y ya que el factor $(4\hat{n}_d^2 - 1)^{-1} (2, 0)^2$ no es nulo, concluimos que los $P_{\Lambda, \mu, L, 0}(a_m^+) |0\rangle$ satisfacen la condición de ser armónicos, i.e. corresponden a la RI $(\Lambda, 0)$ de $O(5)$ y $[\Lambda]$ de $U(5)$.

Los estados (2.34) son entonces eigenestados de H , $\hat{\Lambda}^2$, \hat{L}^2 y L_3 con eigenvalores $\Lambda + 5/2$, $\Lambda(\Lambda + 3)$, $L(L + 1)$ y L y son entonces los polinomios (2.27) con $\nu = L$, si identificamos al índice extra μ , necesario para su caracterización completa, como el número de tripletes de bosones a_m^+ acoplados a $L = 0$;

El nombre de "bosones sin traza" proviene entonces de la relación (2.35), ya que la acción de la traza $\sum_m a_m^+ a_m^+$ sobre los estados $|\Lambda, \mu, L\rangle$ da un resultado nulo.

De (2.28) concluimos que

$$|\Lambda, \mu, L\rangle = [1, 2]^{L-\Lambda+3\mu} [2, 2]^{(2\Lambda-L-3\delta_L)/2-3\mu} [3, 3]^{\delta_L} [3, 0]^\mu |0\rangle$$

donde
$$\delta_L = \begin{cases} 1 & L \text{ non} \\ 0 & L \text{ par} \end{cases} \quad (2.36)$$

(y $[\nu, \Lambda]$ son los d.p.e's. en los α_m^+), es una realización de los estados buscados. Como los exponentes debe ser no-negativos se cumplen las desigualdades

$$\frac{1}{2}(2\Lambda - L - 3\delta_L) \geq 3\mu \geq \Lambda - L, \quad \mu \geq 0, \quad (2.37)$$

a partir de los cuales es fácil mostrar¹⁴⁾ que el número de estados diferentes para una Λ dada es $d_\Lambda = \frac{1}{6}(\Lambda+1)(\Lambda+2)(2\Lambda+3)$, que es exactamente la dimensionalidad de la RI($\Lambda, 0$) de $O(5)^{60}$. Las relaciones (2.37) indican que para valores fijos de Λ, L , los valores de μ que las satisfacen tomarán todos los valores enteros posibles entre un mínimo μ_c y uno máximo $\bar{\mu}_c \geq \mu_c$. De este modo en lugar de el índice μ se puede usar un índice s definido por

$$s \equiv \mu - \mu_c + 1, \quad (2.38)$$

con $s = 1, 2, \dots, d(\Lambda, L)$, $d(\Lambda, L) = \bar{\mu}_c - \mu_c + 1$, donde $d(\Lambda, L)$ es el número de RI L de $O(3)$ contenidos en la RI($\Lambda, 0$) de $O(5)$.

Los estados (2.36) están dados en lo que podría llamarse un esquema de operadores de creación o "partícula" sin traza. Otros esquemas son estudiados también por los autores de las refs. (14), que corresponden a operadores de aniquilación y a estados mixtos de "partícula-agujero". Esto últimos resultan ser los más útiles para encontrar una realización de los estados (2.23a) en términos de los α_m 's, lo que permite entonces la determinación de las funciones $\phi_{\kappa}^{\Lambda, \mu, L}(\vec{x})$.

En el apéndice A hacemos un resumen de los resultados más importantes dentro del análisis, e indicamos el método se-

guido en la evaluación de elementos de matriz relevantes dentro del modelo colectivo.

Los estados (2.33) constituyen un conjunto completo de eigenestados caracterizados por las representaciones irreducibles de la cadena de grupos (2.3). Los estados son sin embargo no-ortonormales en el índice μ (ó s).

Estos resultados son importantes dentro del IBM pues como veremos en el siguiente capítulo, elementos de matriz en esta base aparecen en la diagonalización del Hamiltoniano de bosones s-d.

En la siguiente sección se analizan los eigenvalores del Hamiltoniano (2.1) para bosones d, haciendo uso de los resultados obtenidos en esta sección.

2.4 Las soluciones del Hamiltoniano de Bosones d.

A continuación mostraremos que las funciones $|V \wedge s L M\rangle$ son eigenfunciones del Hamiltoniano (2.1) y encontraremos los eigenvalores correspondientes.

El Hamiltoniano (2.1)

$$H = \epsilon \hat{n}_d + \frac{1}{2} C_0 \left[[\eta \times \eta]^0 [\xi \times \xi]^0 \right]^0 + \frac{1}{2} C_2 \left[[\eta \times \eta]^2 \times [\xi \times \xi]^2 \right]^0 + \frac{1}{2} C_4 \left[[\eta \times \eta]^4 \times [\xi \times \xi]^4 \right]^0,$$

donde

$$C_L = \langle 22, 22, L | V_d | 22, 22, L \rangle (2L+1)^{1/2}, \quad (2.39)$$

puede ser expresado en términos de \hat{n}_d , \hat{L}^2 y $\hat{\Lambda}^2$, ecs. (2.25), (2.26) y (2.30), como se muestra a continuación.

Reescribimos (2.39) como

$$H = \epsilon \hat{n}_d + \frac{1}{2} C_0 \hat{A}_0 + \frac{1}{2} C_2 \hat{A}_2 + \frac{1}{2} C_4 \hat{A}_4, \quad (2.40)$$

con

$$\hat{A}_L = [[\eta \times \eta]^L \times [\xi \times \xi]^L]^0, \quad L = 0, 2, 4.$$

De (2.30) se tiene que

$$5 \hat{A}_0 = -\hat{\Lambda}^2 + \hat{n}_d (\hat{n}_d + 3) \quad (2.41)$$

Solo resta reescribir \hat{L}^2 en términos de \hat{A}_L , para lo cual utilizamos la técnica de reacoplamiento del momento angular.²²⁾

A partir de (2.26)

$$L_q = \sum_{m m'} \sqrt{6} \langle 21mq | 2m' \rangle \eta_{m'} \xi^m, \quad q = 1, 0, -1,$$

encontramos

$$\hat{L}^2 = 6 \sum_q (-)^q \sum_{\substack{m m' \\ \bar{m} \bar{m}'}} \langle 21mq | 2m' \rangle \langle 21\bar{m}q | 2\bar{m}' \rangle (\eta_{m'} \eta_{\bar{m}'} \xi^m \xi^{\bar{m}} + \eta_{m'} \xi^{\bar{m}} \delta_{\bar{m}'}^m), \quad (2.41a)$$

donde hemos utilizado las relaciones (2.18).

Utilizando ahora las relaciones

$$\delta_{m'\mu'} \delta_{\bar{m}'\mu'} = \sum_{\kappa\mu} \langle 22m'\bar{m}' | \kappa\mu \rangle \langle 22\mu'\mu' | \kappa\mu \rangle,$$

$$[\eta \times \eta]_{\mu}^{\lambda} = \sum_{m'\bar{m}'} \langle 22m'\bar{m}' | \lambda\mu \rangle \eta_{m'} \eta_{\bar{m}'}$$

y las correspondientes expresiones para $[\xi \times \xi]_{\mu}^{\lambda}$, encontramos, después de un poco de algebra, la expresión

$$\hat{L}^2 = -30 \sum_{\kappa} W(21\kappa 2; 22) \left[[\eta \times \eta]^{\kappa} \times [\xi \times \xi]^{\kappa} \right]^0 + 6 \hat{n}_d, \quad (2.42b)$$

donde W es un coeficiente de Racah. Introduciendo los valores explícitos de W para las distintas κ 's obtenemos finalmente

$$\hat{L}^2 = 6 \hat{n}_d - 6 \hat{A}_0 - 3 \hat{A}_2 + 4 \hat{A}_4,$$

que junto con (2.41) y la relación

$$\hat{n}_d (\hat{n}_d - 1) = \hat{A}_0 + \hat{A}_2 + \hat{A}_4$$

que obtenemos directamente de (2.25), constituye un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución nos permite escribir (2.4) como

$$H = \epsilon \hat{n}_d + \alpha \frac{\hat{n}_d (\hat{n}_d - 1)}{2} + \beta (\hat{n}_d (\hat{n}_d + 3) - \hat{L}^2) + \gamma (\hat{L} (\hat{L} + 1) - 6 \hat{n}_d), \quad (2.43)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{14} (8C_2 + 6C_4), \\ \beta &= \frac{1}{10} (C_0 - \alpha + 12\gamma), \\ \gamma &= \frac{1}{14} (C_4 - C_2). \end{aligned}$$

De la ecuación (2.43) resulta claro que el Hamiltoniano del MBI para bosones d es diagonal en la base $|\nu \Lambda \mu L M\rangle$ y sus eigenvalores están dados por

$$E(\nu, \Lambda, L) = \epsilon \nu + \alpha \nu(\nu-1)/2 + \beta (\nu-\Lambda)(\nu+\Lambda+3) + \gamma (L(L+1) - 6\nu). \quad (2.44)$$

En el capítulo IV se analizará el tipo de espectros predichos por la ecuación (2.44) así como la acción de operadores multipolares en la base, para la discusión de las probabilidades de transición dentro de este modelo. Se mostrará además que a pesar de su simplicidad, el modelo de bosones d parece describir correctamente las bandas de estado base y excitados en un conjunto grande de núcleos vibracionales.

Como punto final de este capítulo quisiéramos enfatizar que el modelo de bosones d , en la forma en que fué originalmente concebido, no contemplaba la posibilidad de una conexión directa con el modelo de capas, pero la suposición c) de la sección 2.2, i.e, la conservación del número total de bosones, no solo da origen a la simetría exacta dada por la cadena (2.3), sino que representa ya una desviación importante con respecto a los modelos colectivos tradicionales en que no está limitado el número de quanta. La posibilidad de identificar estos bosones con pares de nucleones está ya presente.

Como veremos en el capítulo IV, el Hamiltoniano de bosones s - d se reduce al H de bosones d , con la excepción de factores de corte (cutoff factors) introducidos por el boson s , en el límite vibracional de este modelo. Veremos ahí bajo que condiciones se presenta este caso, así como los otros límites contenidos dentro del modelo s - d .

CAPITULO III

EL MODELO DE BOSONES CON INTERACCION

3.1 La dificultad principal presente en la descripción del movimiento colectivo nuclear es que las frecuencias características asociadas con vibraciones y rotaciones son de órdenes de magnitud comparables, dando lugar a que una distinción clara entre éstas no sea posible.

Para remediar este problema, diversos modelos han sido desarrollados, en que la interacción rotación-vibración es incorporada ya sea a través de suposiciones que simplifican el análisis¹⁵⁾ o mediante la introducción de conceptos como el de "superficie de energía potencial"²³⁾, que han resultado muy útiles en la interpretación de los datos experimentales.

Sin embargo, como se mencionó en la introducción, es difícil interpretar estos modelos desde el punto de vista microscópico y parece imposible incorporar dentro de ellos conceptos fundamentales como el de la estructura de capas del núcleo.

El modelo de bosones con interacción parece representar una forma alternativa de describir estos fenómenos que no presenta estas dificultades o que, por lo menos, tiene una naturaleza menos fenomenológica, i.e., más susceptible a ser ligada eventualmente a los modelos microscópicos del núcleo.

La naturaleza de los espectros observados en núcleos pesados par-par parece estar determinada por:

- a) Las capas cerradas 50, 82, 126, y
 b) El número de partículas fuera de estas capas cerradas.

Por ejemplo, los espectros en la región de las tierras raras (Sm, Nd, Gd, Dy), presentan desde aquéllos típicos de la excitación de pocas partículas para la capa de neutrones 82, a aquéllos típicos de vibradores anarmónicos para número de neutrones 86, hasta los típicos de rotores axialmente simétricos en $N = 92$.

La descripción de estos fenómenos en el M.B.I. es bastante más simple que en los modelos geométricos mencionados anteriormente y sin embargo parece ser muy detallada. Aquí los núcleos par-par se visualizan como sistemas de N bosones interactuantes, sin spin intrínseco pero capaces de ocupar dos estados: Un nivel con $L = 0$ (boson s) y un nivel $L = 2$ (boson d). Estos bosones se identifican con estados de dos fermiones, acoplados a $J = 0$ y $J = 2$ respectivamente.²⁴⁾

Cada núcleo es por tanto tratado como un sistema de N bosones, donde $N = N_{\pi} + N_{\nu}$ es la suma de el número de pares de protones fuera de capas (ó de valencia, N_{π}) y el número de neutrones de valencia N_{ν} .

Las representaciones bosónicas del movimiento colectivo no son nuevas, como se indicó en el capítulo I. Se han realizado desarrollos bosónicos de las funciones de onda nucleares, por ejemplo en trabajos recientes de Sørensen²⁵⁾, Kashimoto²⁶⁾ y Marshalek²⁷⁾ entre otros. El enfoque del MBI es diferente, ya que no intenta derivar el Hamiltoniano bosónico a partir de la base fermiónica sino seguir el proceso inverso. Una vez demos-

trada la efectividad del modelo cabe entonces preguntarse cual es su conexión con el modelo de capas. Este último punto ha sido objeto de varias investigaciones recientes y empieza a establecerse dicha conexión. ⁸⁾

Por otro lado, como veremos más adelante, el Hamiltoniano s-d se reduce al derivado recientemente por Janssen, Jolos y Dönnau, usando el algebra de Lie de operadores asociados con pares de cuasi-partículas, lo que ya es en sí una conexión importante con la teoría microscópica de los movimientos colectivos nucleares. En estos trabajos $SU(6)$ surge como una simetría aproximada de el Hamiltoniano microscópico cuando se considera el subespacio de estados cuadrupolares ²⁸⁾. Sin embargo, el método matemático utilizado por estos autores para resolver el Hamiltoniano es muy complicado y de carácter aproximado.

En la siguiente sección consideraremos el Hamiltoniano del MBI e indicaremos la existencia de tres simetrías exactas contenidas en su estructura. En las secciones posteriores de este capítulo mostraremos el método de solución para el caso general.

3.2 El Hamiltoniano del MBI.

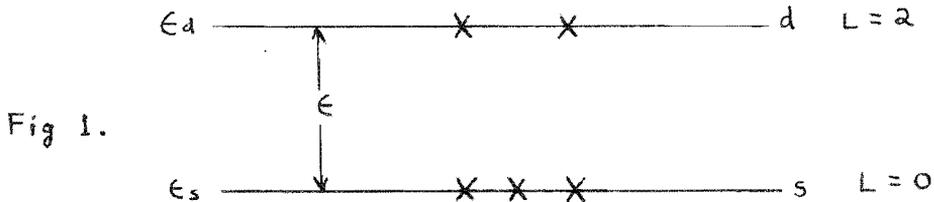
La motivación principal para introducir un Hamiltoniano con bosones s y d se puede resumir en dos puntos:

- a) Es muy conocida la naturaleza cuadrupolar de las excitaciones colectivas, como se mencionó en el capítulo II.

b) Dado el número restringido de partículas en cada capa del núcleo, debe existir un límite o corte para las bandas vibratorles y rotacionales que pueden construirse.

El MBI satisface ambas propiedades y veremos a continuación cual es su estructura.

En la figura 1 mostramos los niveles que los bosones pueden ocupar, la energía y el momento angular que los caracteriza.



Si $\epsilon \equiv \epsilon_d - \epsilon_s = 0$ y en ausencia de interacción, los cinco componentes del boson d y la componente única del boson s generan un espacio vectorial lineal que se puede usar como una base para la representación del grupo $U(6)$. Las representaciones irreducibles son caracterizadas por las propiedades de simetría de las funciones que las portan. Para bosones únicamente las RI totalmente simétricas son diferentes de cero ⁶⁶⁾ y en este caso las funciones pueden ser clasificadas de acuerdo a la partición $[N]$ de $U(6)$. En ausencia de interacción y con $\epsilon \equiv \epsilon_d - \epsilon_s = 0$, todos los estados son degenerados.

Un valor finito de ϵ y las posibles interacciones rompen esta degeneración y dan lugar a un espectro definido. Este espectro es caracterizado por el valor de ϵ , de los elementos de matriz de dos cuerpos

$$\begin{aligned}
 a_L &= \langle d^2 L | V_{12} | d^2 L \rangle, \quad L = 0, 2, 4, \\
 b &= \langle ds 2 | V_{12} | ds 2 \rangle, \\
 c &= \langle s^2 0 | V_{12} | s^2 0 \rangle, \\
 d &= \langle d^2 0 | V_{12} | s^2 0 \rangle, \\
 e &= \langle ds 2 | V_{12} | d^2 2 \rangle,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

y por el número N de bosones.

Para describir la estructura del Hamiltoniano s-d es necesario introducir además de los operadores (2.2) para bosones d , los correspondientes operadores para bosones s $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$ que satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}
 [\bar{\xi}, \bar{\eta}] &= 1 \\
 [\bar{\xi}, \xi] &= [\bar{\eta}, \eta] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Es conveniente además introducir una sola notación para los bosones s y d . Definimos entonces las relaciones

$$\begin{aligned}
 [\eta_{\ell m}, \xi^{\ell' m'}] &= \delta_{\ell}^{\ell'} \delta_m^{m'}, \quad \ell = 0, 2, \\
 [\eta_{\ell m}, \eta_{\ell' m'}] &= [\xi^{\ell m}, \xi^{\ell' m'}] = 0,
 \end{aligned} \tag{3.3a}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \eta_{2m} &\equiv \eta_m, \quad \xi^{2m} \equiv \xi^m, \\
 \eta_{00} &\equiv \bar{\eta}, \quad \xi^{00} \equiv \bar{\xi}.
 \end{aligned} \tag{3.b}$$

A lo largo de este trabajo utilizaremos indistintamente las dos notaciones.

Es claro que el Hamiltoniano más general para bosones s-d se puede escribir en forma análoga a la ecuación (2.1)

$$\begin{aligned}
 H &= \epsilon \sum_m \eta_m \xi^m + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell_1 m_1 \\ \ell_2 m_2}} \sum_{\substack{\ell'_1 m'_1 \\ \ell'_2 m'_2}} \left\{ \langle 2\ell_1 m_1, 2\ell_2 m_2 | V_{12} | 2\ell'_1 m'_1, 2\ell'_2 m'_2 \rangle \right. \\
 &\quad \left. \times \eta_{\ell_1 m_1} \eta_{\ell_2 m_2} \xi^{\ell'_1 m'_1} \xi^{\ell'_2 m'_2} \right\} \\
 &= \epsilon \sum_m \eta_m \xi^m + \frac{1}{2} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sum_{\ell'_1 \ell'_2} \left\{ \langle 2\ell_1, 2\ell_2, L | V_{12} | 2\ell'_1, 2\ell'_2, L \rangle \right. \\
 &\quad \left. \times (2L+1)^{1/2} \left[[\eta_{\ell_1} \times \eta_{\ell_2}]^L \times [\xi_{\ell'_1} \times \xi_{\ell'_2}]^L \right]_0^0 \right\}, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

donde $|2\ell m\rangle$ es un estado de oscilador armónico de dos quanta, de modo que $\ell = 0, 2$.

En (3.4) hemos restado en ambos lados el término $\hat{N} \epsilon_s$ que es constante para N fijo, de modo que el operador $\epsilon_s \bar{\eta} \bar{\xi}$ no aparece en la ecuación y en lugar de ϵ_d aparece $\epsilon \equiv \epsilon_d - \epsilon_s$.

Los elementos de matriz de dos cuerpos $\langle 2\ell_1, 2\ell_2, L | V_{12} | 2\ell'_1, 2\ell'_2, L \rangle$ pueden ser identificados con los parámetros (3.1).

Para resolver en forma general el problema de eigenvalores del Hamiltoniano (3.4) se requiere de una ampliación del análisis realizado en el capítulo anterior y de la introducción de tres cadenas de subgrupos de $U(6)$, que corresponderán a tres límites de simetría exacta admitidos por (3.4). Los resultados del apéndice A pueden de inmediato ser aplicados en la evaluación de elementos de matriz relevantes, como se mostrará en la siguiente sección.

3.3 Teoría de Grupos del Modelo de Bosones con Interacción.

En esta sección daremos la solución general al problema de eigenvalores asociado con el Hamiltoniano del M.B.I. ec. (3.4), utilizando la teoría de los grupos.¹¹⁾

Dejaremos para la siguiente sección la interpretación física del modelo, y para el capítulo V la aplicación de esta técnica a algunas regiones nucleares.

El grupo $U(6)$ en el que estamos interesados debe contener al grupo $O(3)$ entre sus subgrupos, de modo que los eigenestados correspondientes sean de momento angular definido.

Específicamente estaremos interesados en las cadenas

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) , \quad (3.5a)$$

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) , \quad (3.5b)$$

$$\text{y } U(6) \supset SU(3) \supset O(3) . \quad (3.5c)$$

Procedemos ahora a derivar los generadores y operadores de Casimir de los diferentes grupos en términos de los operadores de creación y aniquilación asociados a estados d y s , ecs. (3.3).

Los generadores del grupo $U(6)$ ¹⁹⁾

$$C_{\ell m}^{\ell' m'} \equiv \eta_{\ell m} \xi^{\ell' m'} , \quad \ell, \ell' = 0, 2 , \quad (3.6)$$

son 36 y satisfacen las relaciones de conmutación

$$[C_{\ell m}^{\ell' m'}, C_{\ell'' m''}^{\ell''' m'''}] = C_{\ell m}^{\ell''' m'''} \delta_{\ell''}^{\ell'} \delta_{m''}^{m'} - C_{\ell'' m''}^{\ell' m'} \delta_{\ell}^{\ell''} \delta_{m}^{m''} . \quad (3.7)$$

Es claro que los generadores del subgrupo $U(5)$ de $U(6)$ serán entonces

$$C_{2m}^{2m'} = \eta_m \xi^{m'} \quad , \quad (3.8)$$

donde hemos usado la notación (3.3b).

Como es bien sabido^(14,19), los generadores del grupo $O(6)$ vendrán dados por la parte antisimétrica de (3.6), i.e.,

$$\Lambda_{2m, 2m'} \equiv \eta_{2m} \xi_{2m'} - \eta_{2m'} \xi_{2m} \quad , \quad (3.9)$$

que son quince, diez de los cuales

$$\Lambda_{2m, 2m'} = \eta_m \xi_{m'} - \eta_{m'} \xi_m \quad , \quad (3.10)$$

son también los generadores de $O(5)$.

Los generadores de $O(3)$, como se discute en las referencias (19) y (14) están dados por

$$\begin{aligned} L_z &= \sqrt{6} \sum_{m m'} \langle 21mz | 2m' \rangle \eta_{m'} \xi^m \\ &= \sqrt{5/2} \sum_{m m'} \langle 22mm' | 1z \rangle (\eta_m \xi_{m'} - \eta_{m'} \xi_m) . \end{aligned} \quad (3.11)$$

La segunda expresión en (3.11) muestra que $O(3)$ no es solo un subgrupo de $U(5)$ sino también de $O(5)$.

Solo resta la determinación de los generadores del grupo $SU(3)$, correspondiente a la cadena (3.5c). El procedimiento para determinarlos a partir de los generadores de $U(6)$ se ha discutido extensamente en conexión con los cálculos en el modelo de capas en la capa $2s-1d$.^(10,19) De estos trabajos resulta que además de las L_z dadas por la ecuación (3.11), estos

incluyen un tensor de orden 2 definido por

$$Q_m \equiv -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \sum_{\ell'm'} \sum_{\ell''m''} \langle 2\ell'm' | r^2 Y_{2m}(\vartheta, \varphi) | 2\ell''m'' \rangle \eta_{\ell'm'} \xi^{\ell''m''}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{3}} [\eta \times \xi]_m^2 + \sqrt{\frac{4}{3}} (\bar{\eta} \xi_m + \eta_m \bar{\xi}), \quad m = -2 \dots 2, \quad (3.12)$$

donde de nuevo los kets $|2\ell m\rangle$ denotan estados de oscilador armónico²⁹⁾ de 2 quanta y con momento angular ℓ y m respectivamente. En la última parte de (3.12) hemos introducido en forma explícita el elemento de matriz de $r^2 Y_{2m}(\vartheta, \varphi)$ con respecto a los estados $|2\ell m\rangle$. (Es importante hacer notar que el operador (3.12) no es idéntico al introducido por Elliot, $Q_m = \sqrt{\frac{7}{3}} [\eta \times \xi]_m^2 - \sqrt{\frac{4}{3}} (\bar{\eta} \xi_m + \eta_m \bar{\xi})$. La diferencia en signo proviene de la manera en que se escogen las fases en las funciones radiales de oscilador armónico.²⁹⁾) Una vez determinados los generadores de todos los grupos relevantes, tenemos la posibilidad de encontrar la expresión explícita de los operadores de Casimir.

El hecho de que los operadores bosónicos satisfacen las reglas de conmutación (3.3a) nos indica que únicamente las representaciones totalmente simétricas son diferentes de cero, por lo que bastará introducir los operadores de Casimir de primer orden de los grupos $U(6)$ y $U(5)$

$$\hat{N} = \sum_{\ell m} \eta_{\ell m} \xi^{\ell m} \quad \ell = 0, 2, \quad (3.13a)$$

$$\hat{n}_d = \sum_m \eta_m \xi^m, \quad (3.13b),$$

i.e., los correspondientes operadores de número total de bosones y número de bosones d , que conmutan respectivamente con

los generadores (3.6) y (3.8).

El operador de Casimir del grupo $O(5)$ se discutió en el capítulo anterior, y su expresión en términos de los operadores η_m, ξ^m está dado por la ecuación (2.30)

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{mm'} \Lambda_{2m, 2m'} \Lambda^{2m', 2m} \\ &= \hat{n}_d (\hat{n}_d + 3) - \left(\sum_m \eta_m \eta^{m'} \right) \left(\sum_m \xi_m \xi^m \right),\end{aligned}\quad (3.14)$$

y por analogía podemos entonces escribir el operador de Casimir del grupo $O(6)$ como

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}^2 &\equiv \frac{1}{2} \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \Lambda_{\ell m, \ell' m'} \Lambda^{\ell' m', \ell m} \\ &= \hat{N} (\hat{N} + 4) - \left(\sum_{m'} \eta_{m'} \eta^{m'} + \bar{\eta}^2 \right) \left(\sum_m \xi_m \xi^m + \bar{\xi}^2 \right).\end{aligned}\quad (3.15)$$

La ecuación (3.15) puede expresarse alternativamente como

$$\hat{\mathcal{L}}^2 = \hat{\Lambda}^2 + \hat{K}^2, \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{K}^2 &= \hat{n}_d (\bar{\eta} \bar{\xi} + 1) + (\hat{n}_d + 5) \bar{\eta} \bar{\xi} - \left(\sum_m \eta_m \eta^m \right) \bar{\xi}^2 \\ &\quad - \left(\sum_m \xi_m \xi^m \right) \bar{\eta}^2,\end{aligned}\quad (3.17)$$

que será de gran utilidad al discutir los estados en la cadena $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3)$.

Es claro que el operador de Casimir de $O(3)$ es

$$\hat{L}^2 = \sum_z (-)^z \hat{L}_z \hat{L}_{-z} \quad (3.18)$$

dado por la ecuación (2.42), que junto con el operador

$$\hat{Q}^2 = \sum_{m=-2}^2 (-)^m \hat{Q}_m \hat{Q}_{-m} \quad , \quad (3.19)$$

nos permite escribir el operador de Casimir de segundo orden de SU(3), en la forma

$$\hat{C} = \frac{1}{2} \hat{L}^2 + \hat{Q}^2 \quad (3.20)$$

como puede verse en la referencia (19).

Ya que \hat{L}^2 es diagonal en la base $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3)$, bastará encontrar los elementos de matriz de \hat{Q}^2 en esta base si se desea obtener los eigenestados de \hat{C} , que son caracterizados por las representaciones irreducibles de SU(3).

Habiendo determinado los operadores de Casimir relevantes al problema discutimos a continuación las bases asociadas a las cadenas de grupos (3.5).

La Cadena $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$.

En la sección (2.3) discutimos los estados caracterizados por las representaciones irreducibles de $U(5) \supset O(5) \supset O(3)$, que denotamos por los kets $|\nu \Lambda s L M \rangle$. Para incluir esta cadena como subgrupo de U(6) bastan las consideraciones siguientes: Escribimos el operador de Casimir (3.6) del grupo U(6) como

$$\hat{N} = \hat{n}_d + \bar{\eta} \bar{\xi} \quad . \quad (3.21)$$

Los eigenestados del operador de número $\bar{\eta}\bar{\xi}$, i.e.,

$$\bar{\eta}\bar{\xi} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (3.22)$$

son los eigenestados de un oscilador armónico uni-dimensional. Por lo tanto si definimos los estados

$$|n \nu \Lambda s L M\rangle \equiv |n\rangle |\nu \Lambda s L M\rangle, \quad (3.23)$$

éstos son eigenestados de $U(5) \supset O(5) \supset O(3)$ y del operador (3.21)

$$\hat{N} |n \nu \Lambda s L M\rangle = N |n \nu \Lambda s L M\rangle, \quad (3.24)$$

donde $N = n + \nu$.

De este modo (3.23) representan un conjunto completo, aunque no ortonormal de estados caracterizados por las representaciones irreducibles de la cadena (3.5a).

Ahora procedemos a la determinación de los estados caracterizados por las R.Í. de la cadena (3.5b) en términos de los kets (2.23).

La Cadena $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$

Esta cadena difiere de (3.5a) en que en lugar de $U(5)$ aparece el grupo $O(6)$. Los estados (3.23) son caracterizados por las R.Í. de todos los demás grupos en (3.5b), de modo que calculando los elementos de matriz del operador de Casimir (3.15) de $O(6)$ podemos, mediante su diagonalización, obtener combinaciones de estos estados caracterizados por las

R.I. de $O(6)$.

Es conveniente en este punto introducir coordenadas en el espacio de configuración de $U(6)$, de manera análoga a su introducción en el capítulo anterior para el caso de $U(5)$.

Es claro que además de las coordenadas α_m , $m=2, 1, 0, -1, -2$, asociadas a los estados d , (ver ecs.(2.9), (2.17)) se requiere una coordenada extra asociada con los estados s , que designamos por $\bar{\alpha}$.

Es conveniente introducir además

$$\alpha_{\ell m}, \ell=0, 2, \quad \alpha_{2m} \equiv \alpha_m, \quad \alpha_{00} \equiv \bar{\alpha}, \quad (3.25)$$

para denotar ambas coordenadas con un mismo símbolo.

Los momentos asociados con estas coordenadas

$$\pi_{\ell m} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha_{\ell m}} \quad \ell=0, 2, \quad (3.26)$$

satisfacen con éstos las relaciones de conmutación

$$[\alpha_{\ell m}, \pi^{\ell' m'}] = i \int_{\ell}^{\ell'} \int_m^{m'} \quad (3.27)$$

y se relacionan con los operadores (3.3) mediante las relaciones

$$\begin{aligned} \eta_{\ell m} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{\ell m} - i \pi_{\ell m}), \\ \xi^{\ell m} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^{\ell m} + i \pi^{\ell m}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Continuamos ahora con la determinación de los eigenestados asociados con la cadena (3.5b), para lo cual notamos que de (3.15)

$$\hat{\mathcal{L}}^2 = \hat{N}(\hat{N}+4) - \left(\sum_m \eta_m \eta^m + \bar{\eta}^2 \right) \left(\sum_m \xi_m \xi^m + \bar{\xi}^2 \right),$$

y del análisis análogo para $\hat{\Lambda}^2$ en el capítulo II, si los estados Ψ satisfacen

$$N\Psi = \rho\Psi, \quad \left(\sum_m \xi_m \xi^m + \bar{\xi}^2 \right) \Psi = 0, \quad (3.29a)$$

entonces son automáticamente eigenestados de $\hat{\mathcal{L}}^2$ con eigenvalor

$$\rho(\rho+4), \quad \text{i.e.,}$$

$$\hat{\mathcal{L}}^2 \Psi = \rho(\rho+4)\Psi, \quad \rho \text{ entero no-negativo} \quad (3.29b).$$

Usando ahora las ecuaciones (3.16) y (2.24)

$$\hat{\mathcal{L}}^2 |n\nu\Lambda SLM\rangle = [\Lambda(\Lambda+3) + K^2] |n\nu\Lambda SLM\rangle, \quad (3.30)$$

y de (3.17) y (3.28) \hat{K}^2 toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{K}^2 = & \hat{n}_d(\bar{\eta}\bar{\xi} + 1) + (\hat{n}_d + 5)\bar{\eta}\bar{\xi} - \left(\beta^2 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \hat{n}_d - 5 \right) \bar{\xi}^2 \\ & - \left(\beta^2 + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \hat{n}_d \right) \bar{\eta}^2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta^2 = & \sum_m \alpha_m \alpha^m, \quad \beta \frac{\partial}{\partial \beta} = i \sum_m \alpha_m \Pi^m, \\ \hat{n}_d = & \frac{1}{2} (\beta^2 + \Pi^2) - 5/2, \end{aligned} \quad (3.32a)$$

$$\Pi^2 = \sum_m \Pi_m \Pi^m = - \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\hat{\Lambda}^2}{\beta^2} \right). \quad (3.32b)$$

De las ecs. (3.17), (3.31) es claro que \hat{K}^2 es un operador invariante de $O(5)$ y por tanto no afectará la parte angular

$$\chi_{SLM}^{\wedge}(\sigma, \vartheta) = \sum_K \phi_K^{\wedge SL}(\sigma) D_{MK}^{L*}(\vartheta) , \quad (3.33)$$

que aparece en el estado (2.23a).

Por otro lado, son bien conocidas las relaciones²⁹⁾

$$\bar{\eta} |n\rangle = (n+1)^{1/2} |n+1\rangle , \quad \bar{\xi} |n\rangle = (n)^{1/2} |n-1\rangle , \quad (3.34)$$

para el oscilador armónico uni-dimensional.

Utilizando por último propiedades de los polinomios de Laguerre³⁰⁾, encontramos las siguientes relaciones para las

$F_j^{\wedge}(\beta)$ dadas por (2.23)

$$\left(\beta^2 + \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) F_j^{\wedge}(\beta) = (\Lambda + 2j) F_j^{\wedge}(\beta) - 2 \left[\frac{1}{2} (\Lambda + j + 3/2) \right]^{1/2} F_{j-1}^{\wedge}(\beta) , \quad (3.35a)$$

$$\begin{aligned} \left(\beta^2 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) F_j^{\wedge}(\beta) &= (\Lambda + 2j + 5) F_j^{\wedge}(\beta) \\ &- 2 \left[(j+1) (\Lambda + j + 5/2) \right]^{1/2} F_{j+1}^{\wedge}(\beta) . \end{aligned} \quad (3.35b)$$

Mediante las relaciones (3.30), (3.35) es fácil encontrar el efecto de \hat{L}^2 sobre los estados (3.23)

$$\hat{L}^2 |N, \nu, \Lambda_S L M\rangle = \sum_{\nu'} A_{\nu \nu'}^{N \Lambda} |N, \nu', \Lambda_S L M\rangle , \quad (3.36)$$

donde hemos cambiado ligeramente la notación de (3.23) al escribir N , en lugar de n , ya que $N = n + \nu$. Los coeficientes $A_{\nu \nu'}^{N \Lambda}$ tienen la regla de selección $\nu' = \nu \pm 2, \nu$ y están dados por

$$A_{\nu\nu}^{N\Lambda} = \nu(2N+1-2\nu) + 5(N-\nu) + \Lambda(\Lambda+3), \quad (3.37a)$$

$$A_{\nu\nu+2}^{N\Lambda} = \left[(N-\nu)(N-\nu-1)(\nu-\Lambda+2)(\nu+\Lambda+5) \right]^{1/2}, \quad (3.37b)$$

$$A_{\nu\nu-2}^{N\Lambda} = \left[(N-\nu+1)(N-\nu+2)(\nu-\Lambda)(\nu+\Lambda+3) \right]^{1/2}. \quad (3.37c)$$

La matriz ortogonal que diagonaliza a la matriz

$\| A_{\nu\nu'}^{N\Lambda} \|$, $0 \leq \nu, \nu' \leq N$, da directamente los paréntesis de transformación entre las cadenas (3.5a) y (3.5b).

Como veremos más adelante, las relaciones (3.37) son de gran utilidad en la diagonalización del Hamiltoniano (3.4). Sin embargo resulta imposible encontrar en forma analítica los paréntesis de transformación mencionados siguiendo este procedimiento, por lo que procedemos ahora por un camino diferente. Esto involucra la determinación explícita de los estados caracterizados por la cadena de grupos (3.5b), lo que nos permitirá estudiar en detalle el comportamiento de este límite en el capítulo IV.

Para determinar estos estados, es conveniente definir, en lugar de las coordenadas

$$\bar{\alpha}, \beta, \gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \quad (3.38)$$

utilizadas hasta ahora, el nuevo conjunto

$$b, \delta, \gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \quad (3.39)$$

donde

$$\bar{\alpha} = b \cos \delta, \quad \beta = b \sin \delta. \quad (3.40)$$

En términos de los variables (3.39) encontramos que el operador \hat{N} , ec. (3.21), que está asociado con un oscilador armónico en seis dimensiones, toma la forma

$$\hat{N} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{b^5} \frac{\partial}{\partial b} b^5 \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{b^2} \hat{\mathcal{L}}^2 + b^2 \right) - 3, \quad (3.41)$$

mientras que el operador de Casimir de $O(6)$, puede escribirse, usando (3.16), (3.31) y (3.40)

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}^2 &= \hat{\Lambda}^2 - \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\alpha}^2} - \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} \hat{\Lambda}^2 \right) \bar{\alpha}^2 \\ &+ \left(\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + 5 \right) \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} - 1 \right) \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} - 4 \cot \delta \frac{\partial}{\partial \delta} + \frac{1}{\sin^2 \delta} \hat{\Lambda}^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Es claro a partir de (3.41) y (3.42), que un eigenestado de los operadores \hat{N} , $\hat{\mathcal{L}}^2$, $\hat{\Lambda}^2$, \hat{L}^2 y \hat{L}_3 puede ser escrito en la forma

$$|N\rangle \Lambda S L M\rangle = B_{N\rho\Lambda} f_J^\rho(b) g_\Lambda^\rho(\delta) X_{SLM}^\Lambda(\tau, \varrho), \quad (3.43)$$

donde $X_{SLM}^\Lambda(\tau, \varrho)$ está dado por (3.33), $B_{N\rho\Lambda}$ es un coeficiente de normalización mientras que $g_\Lambda^\rho(\delta)$ satisface la ecuación

$$\left(-\frac{d^2}{d^2 \delta^2} - 4 \cot \delta \frac{d}{d\delta} + \frac{\Lambda(\Lambda+3)}{\sin^2 \delta} \right) g_\Lambda^\rho(\delta) = \rho(\rho+4) g_\Lambda^\rho(\delta), \quad (3.44)$$

Y la función $f_J^\rho(b)$ por su parte es determinada por la ecuación

$$\left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{b^5} \frac{d}{db} b^5 \frac{d}{db} + \frac{\rho(\rho+4)}{b^2} + b^2 \right) - 3 \right] f_J^\rho(b) = N f_J^\rho(b), \quad (3.45)$$

donde $J = (N-\rho)/2$, entero.

La ecuación (3.44) es resuelta por la función

$$g_{\rho\lambda}^\rho(\delta) = (\sin\delta)^\lambda C_{\rho-\lambda}^{\lambda+2}(\cos\delta), \quad (3.46)$$

donde C es un polinomio de Gegenbauer³⁰⁾, mientras que la ecuación (3.45) es satisfecha por

$$f_J^\rho(b) = b^\rho L_J^{\rho+2}(b^2) \exp(-b^2/2), \quad (3.47)$$

donde L es un polinomio de Laguerre.³⁰⁾

El coeficiente $B_{N\rho\lambda}$ que aparece en (3.43) se discute en el apéndice B, donde desarrollamos los estados (3.43) en términos de los estados (3.23). Es claro que los paréntesis de transformación no dependen de los índices sLM ya que ambas cadenas contienen a los grupos $O(5) \supset O(3) \supset O(2)$, de modo que podemos denotarlos, ecuación (B.24), por

$$\begin{aligned} \langle n\nu\lambda | N\rho\lambda \rangle &= (-1)^{(N-\rho+\nu-\lambda)/2} \frac{2^{\rho-\lambda} (\rho+1)! (\rho+2)!}{2^{N-\rho} ((N+\rho)/2+2)!} \\ &\frac{(\nu+\lambda+3)! (N-\nu)! ((N-\rho)/2)!}{(\rho-\lambda) (\rho+\lambda+3)! ((\nu+\lambda)/2+1)! ((\nu-\lambda)/2)!} \\ &\sum_s \frac{((N-\rho)/2+1)_s ((\lambda-\rho)/2)_s ((\lambda-\rho+1)/2)_s}{s! ((N-\rho-\nu+\lambda)!) (-\rho-1)_s} \end{aligned}$$

(3.48)

donde $(a)_s$ es un símbolo de Pochhammer,³⁰⁾ $(a)_s = a(a+1)\dots(a+s-1)$.

La Cadena $U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2)$

Como se indicó al principio de esta sección, para obtener los estados caracterizados por las R.I. de la cadena (3.5c) se requiere la diagonalización de la matriz del operador \hat{Q}^2 definido por las ecuaciones (3.12), (3.19). Para ello se requiere por tanto la evaluación de dichos elementos de matriz.

De (3.12) encontramos :

$$\begin{aligned} \hat{Q}^2 &= \sqrt{5} [Q \times Q]_0^0, \\ &= \sqrt{5} \left\{ \frac{7}{3} [[\eta \times \xi]^2 \times [\eta \times \xi]^2]_0^0 \right. \\ &\quad + \frac{4}{3} \sqrt{7} [[\eta \times \xi]^2 \times [\eta \bar{\xi} + \bar{\eta} \xi]^2]_0^0 \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} [[\eta \bar{\xi} + \bar{\eta} \xi]^2 \times [\eta \bar{\xi} + \bar{\eta} \xi]^2]_0^0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Haciendo reacomplamientos de momento angular y comparando con las ecuaciones (3.13), (3.17), podemos reescribir (3.49) en la forma

$$\begin{aligned} \hat{Q}^2 &= \frac{35}{3} \sum_{L=0,2,4} W(2222; 2L) (2L+1)^{1/2} [[\eta \times \eta]^L \times [\xi \times \xi]^L]_0^0 \\ &\quad + \frac{7}{3} \hat{n}_d + \frac{4}{3} [2 \hat{n}_d (\hat{N} - \hat{n}_d + 1) + 2 (\hat{n}_d + 5) (\hat{N} - \hat{n}_d) - \hat{K}^2] \\ &\quad + \frac{4}{3} \sqrt{35} \left\{ [[\eta \times \eta]^2 \times \xi]_0^0 \bar{\xi} + \bar{\eta} [\eta \times [\xi \times \xi]^2]_0^0 \right\}, \end{aligned} \quad (3.50a)$$

donde W es un coeficiente de Racah. Calculando los valores

explícitos de \mathcal{W} y usando (3.14), (3.15) y (2.42b), (3.50) toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{Q}^2 = & \frac{2}{3} \hat{\Lambda}^2 - \frac{4}{3} \hat{\mathcal{L}}^2 + \frac{1}{6} \hat{L}^2 - \frac{14}{3} \hat{\eta}_d^2 \\ & - \frac{22}{3} \hat{\eta}_d + \frac{8}{3} \hat{N} (2\hat{\eta}_d + 5) - \frac{4\sqrt{35}}{3} \hat{E} \end{aligned} \quad (3.50b)$$

donde

$$\hat{E} = \left[\left[\eta \times \eta \right]^2 \times \xi \right]^0 \bar{\xi} + \bar{\eta} \left[\eta \times \left[\xi \times \xi \right]^2 \right]^0. \quad (3.51)$$

Ya que conocemos la acción de todos los operadores en (3.50b) sobre la base $|N \nu \Lambda s L M\rangle$ con la excepción de el operador \hat{E} , ec. (3.51), es claro que el problema quedará resuelto una vez que se conozcan los elementos de matriz asociados a éste.

El operador \hat{E} consiste de dos términos, conjugados hermiteanos uno del otro, por lo que es suficiente encontrar los elementos de matriz del primero, i.e., $\left[\left[\eta \times \eta \right]^2 \times \xi \right]^0 \bar{\xi}$, a partir del cual los correspondientes al segundo se deducen fácilmente. La acción del operador bosónico $\bar{\xi}$ en el estado (3.23) está dado en la ec. (3.34); solo resta por tanto determinar la acción de $\left[\left[\eta \times \eta \right]^2 \times \xi \right]^0$ en los estados de $U(5) \supset O(5)$, ec. (2.23).

De las definiciones (3.28) y de las propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan de $O(3)$ es fácil mostrar que

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} \left[\left[\alpha \times \alpha \right]^2 \times \alpha \right]^0 = & \left[\left[\eta \times \eta \right]^2 \times \eta \right]^0 + 3 \left[\left[\eta \times \eta \right]^2 \times \xi \right]^0 \\ & + 3 \left[\eta \times \left[\xi \times \xi \right]^2 \right]^0 + \left[\left[\xi \times \xi \right]^2 \times \xi \right]^0. \end{aligned} \quad (3.52).$$

Tomando elementos de matriz con respecto a los estados (2.23) con ν y $\nu+1$ quanta deducimos entonces

$$\begin{aligned} & \langle \nu+1, \Lambda' s' L M | [[\eta \times \eta]^2 \times \xi]^0 | \nu \Lambda s L M \rangle \\ & = \frac{-4}{3\sqrt{35}} \langle \nu+1, \Lambda' s' L M | \beta^3 \cos 3\pi | \nu \Lambda s L M \rangle, \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde hemos usado la relación³¹⁾

$$[[\alpha \times \alpha]^2 \times \alpha]^0 = \frac{1}{\sqrt{35}} \{3, 0\} = -\sqrt{\frac{2}{35}} \beta^3 \cos 3\pi. \quad (3.54)$$

Los elementos de matriz del lado derecho de (3.53) son casos particulares de los calculados en el apéndice A de este trabajo y que ya han sido programados. Estos elementos de matriz pueden descomponerse en la parte correspondiente a β^3 , para la cual se conoce una fórmula cerrada²⁴⁾, y la parte en $\cos 3\pi$ con respecto a las funciones $\phi_{\kappa}^{\Lambda s L}(\pi)$. Estos últimos son proporcionales al elemento $3J$ reducido $(310, \Lambda' s' L, \Lambda s L)$ que se define en dicho apéndice.

Mostraremos en seguida que el Hamiltoniano (3.4) puede escribirse en términos de los operadores de Casimir de las tres cadenas (3.5), haciendo uso de los resultados encontrados hasta ahora.

Un breve examen de la ecuación (3.4) muestra que aparte del operador de un cuerpo $\in \sum_m \eta_m \xi^m$, se tienen solamente siete interacciones hermiteanas independientes que procedemos a escribir

$$\hat{A}_L = [[\eta \times \eta]^L \times [\xi \times \xi]^L]^\circ, \quad L = 0, 2, 4, \quad (3.55a)$$

$$\hat{B} = [\eta \times \xi]^\circ \bar{\eta} \bar{\xi}, \quad (3.55b)$$

$$\hat{C} = \bar{\eta}^2 \bar{\xi}^2, \quad (3.55c)$$

$$\hat{D} = [\eta \times \eta]^\circ \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 [\xi \times \xi]^\circ \quad (3.55d)$$

y

$$\hat{E} = [[\eta \times \eta]^2 \times \xi]^\circ \bar{\xi} + \bar{\eta} [\bar{\eta} \times [\xi \times \xi]^2]^\circ. \quad (3.55e)$$

El último operador es el mismo que se discutió en conexión con el operador \hat{Q}^2 . Utilizando entonces la ecuación (3.50b) junto con las relaciones derivadas anteriormente para los operadores de Casimir de los otros grupos relevantes, encontramos, luego de un poco de algebra

$$\hat{A}_0 = \frac{1}{5} \hat{n}_d (\hat{n}_d + 3) - \frac{1}{5} \hat{\Lambda}^2, \quad (3.56a)$$

$$\hat{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ -\hat{L}^2 + 2\hat{\Lambda}^2 + 2\hat{n}_d (\hat{n}_d - 2) \right\}, \quad (3.56b)$$

$$\hat{A}_4 = \frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{3} \hat{L}^2 - \frac{1}{5} \hat{\Lambda}^2 + \frac{6}{5} \hat{n}_d (\hat{n}_d - 2) \right\}, \quad (3.56c)$$

$$\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\hat{N} - \hat{n}_d) \hat{n}_d, \quad (3.56d)$$

$$\hat{C} = (\hat{N} - \hat{n}_d) (\hat{N} - \hat{n}_d - 1), \quad (3.56e)$$

$$\hat{D} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \hat{\Lambda}^2 - \hat{L}^2 + 2\hat{N} \hat{n}_d - 2\hat{n}_d^2 + 5\hat{N} - 4\hat{n}_d \right\}, \quad (3.56f)$$

$$\hat{E} = \frac{3}{4\sqrt{35}} \left\{ \hat{Q}^2 - \frac{2}{3} \hat{\Lambda}^2 + \frac{4}{3} \hat{\mathcal{L}}^2 - \frac{1}{6} \hat{L}^2 + \frac{14}{3} \hat{\eta}_d^2 + \frac{22}{3} \hat{\eta}_d - \frac{8}{3} \hat{N} (2\hat{\eta}_d + 5) \right\}. \quad (3.56g)$$

De las discusiones anteriores es claro que podemos, con la ayuda de las relaciones (3.56), escribir los elementos de matriz de el Hamiltoniano más general (3.4), en la base de los estados $|N \nu \Lambda s L M\rangle$ caracterizados por la cadena de grupos $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3)$.

3.4 El MBI y el Modelo de Capas del Núcleo.

El creciente éxito del MBI ha dado lugar a una serie de preguntas interesantes, algunas de las cuales conciernen a su relación con el modelo colectivo de Bohr y Mottelson^{2,3)}. Mientras que este último tiende a enfatizar la geometría en la descripción de las características nucleares, el MBI en cambio resalta el papel de las simetrías dinámicas que pueden resultar de una combinación apropiada de interacciones.

Un par de artículos recientes³²⁾ se avocan a investigar las conexiones entre estos modelos, analizándose en el primero de ellos la posibilidad de introducir el concepto de "deformación nuclear" en el MBI (ó más bien en un espacio "híbrido" relacionado con éste), mientras que en el segundo se muestra la posibilidad de comparar los Hamiltonianos correspondientes a uno y otro modelo y expresarlos en un espacio de Hilbert común. Aunque existen aún serias dificultades para establecer una conexión clara entre los modelos (en particular el papel del

bosón s), ésta empieza a vislumbrarse.

En esta sección haremos una breve revisión de los esfuerzos encaminados en la otra dirección, i.e., en el establecimiento de una conexión entre el MBI y el modelo de capas nuclear. Para ello seguiremos de cerca el artículo de Otsuka, Arima y Iachello ⁸⁾.

El procedimiento seguido por los autores mencionados consiste en primero truncar el espacio de Hilbert en el modelo de capas y posteriormente realizar un mapeo entre este espacio y el espacio de bosones. Aunque el procedimiento requiere generalmente la consideración de varias órbitas j , se ilustra el método mediante el estudio de una sola de estas órbitas. La generalización a un número de órbitas no-degeneradas es más complejo pero no contiene ideas diferentes.

El Formalismo de Cuasi-Spin

Consideremos inicialmente los estados fermiónicos en una configuración $n l_j$ dada, que pueden ser caracterizados por el operador de creación

$$a_{n l_j m \tau}^+ \quad (3.57)$$

donde $m = -j, \dots, j$ es la proyección del momento angular total de cada partícula y $\tau = \pm 1/2$ es el spin isotópico.

Podemos definir ³³⁾ el operador de creación bosónico

como

$$b_{JM,tz}^+ = \sum_{m_1, m_2} \sum_{\tau_1, \tau_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \langle \frac{1}{2} \tau_1 \frac{1}{2} \tau_2 | tz \rangle a_{n\ell j m_1 \tau_1}^+ a_{n\ell j m_2 \tau_2}^+, \quad (3.58)$$

donde $J, M (t, z)$ son el momento angular total (isospin) y su proyección. Ya que los a^+ anticonmutan, se tiene de las propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan^{2a)}, que

$$b_{JM,tz}^+ = -(-)^{J+t} b_{JM,tz}^+ \quad (3.59)$$

y por tanto el operador b^+ se anula a menos que $J+t$ sea impar. Para nucleones del mismo tipo, $t=1$ y J puede tomar solamente valores pares. Para pares neutrón-protón J es par o non dependiendo de que $t=1$ ó $t=0$.

Para nucleones idénticos, vemos entonces que los momentos angulares más bajos pueden ser $J=0$ y $J=2$, y que podemos cancelar en (3.58) la suma sobre las proyecciones del isospin ya que $\langle \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} | 1 \pm 1 \rangle = 1$. Scholten et.al., siguiendo de cerca el análisis realizado por Janssen, Jolos y Dönnau²⁸⁾, omiten los índices n, ℓ y τ e introducen los operadores

$$A_M^{(J)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [a^{(+)} \times a^{(+)}]_M^{(J)}, \quad (3.60a)$$

$$\tilde{A}_M^{(J)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{a}^{(+)} \times \tilde{a}^{(+)}]_M^{(J)}, \quad (3.60b)$$

$$U_M^{(J)} = [a^{(+)} \times \tilde{a}^{(+)}]_M^{(J)}, \quad (3.60c)$$

donde $\tilde{a}^{(j)} = (-)^{j-m} a_{-m}^{(j)}$ y $a_m^{(j)}$ es el operador de aniquilación para fermiones. Los operadores (3.60) representan entonces los correspondientes operadores de creación, aniquilación y multipolares para bosones³⁴⁾.

El operador de número de fermiones está dado por

$$\hat{N}_F = \sum_m a_m^{(j)\dagger} a_m^{(j)} \quad (3.61)$$

y la degeneración de la capa es $\Omega = j + \frac{1}{2}$. Los tres operadores

$$S_+ = \sqrt{\Omega} A^{(0)\dagger} \quad (3.62a)$$

$$S_- = \sqrt{\Omega} \tilde{A}^{(0)} \quad (3.62b)$$

$$S_0 = \frac{1}{2} (\hat{N}_F - \Omega) \quad (3.62c)$$

satisfacen las mismas relaciones de conmutación que un vector de momento angular (álgebra $SU(2)$). El vector \hat{S} se denomina quasi-spin y puede utilizarse para la construcción de estados con n partículas y "seniority" ν , a partir de los estados con ν partículas y "seniority" ν ,

$$|j^n, \nu, LM\rangle = \sqrt{\frac{(\Omega - \frac{1}{2}(n+\nu))!}{(\Omega - \nu)! (\frac{1}{2}(n-\nu))!}} S_+^{\frac{1}{2}(n-\nu)} |j^\nu, \nu, LM\rangle \quad (3.63)$$

donde los estados $|j^\nu, \nu, LM\rangle$ satisfacen a su vez la relación

$$S_- |f^\nu, \nu, LM\rangle = 0 \quad (3.64)$$

y se denominan estados de "seniority" máximo.

Ya que $\hat{S}^2 = S_+ S_- + S_0(S_0 - 1)$ y \hat{S}^2 conmuta con S_+ ,
 $\hat{S}^2 |f^\nu, \nu, LM\rangle = S(S+1) |f^\nu, \nu, LM\rangle = \left(\frac{1}{2}(\Omega - \nu)\left(\frac{1}{2}(\Omega - \nu) + 1\right)\right) |f^\nu, \nu, LM\rangle$,
 de modo que la longitud de \hat{S} es $S = \frac{1}{2}(\Omega - \nu)$. (3.65)

En este espacio, cualquier interacción de dos cuerpos puede expresarse como

$$\hat{V} = \sum_J G_J [A^{+(J)} \times \tilde{A}^{(J)}]^0 \quad (3.66)$$

donde

$$G_J = (-)^J \sqrt{2J+1} \langle f^2 JM | \hat{V} | f^2 JM \rangle \quad (3.67)$$

Estados Colectivos

Dado un estado de "seniority" máximo $|f^\nu, \nu, LM\rangle$ pueden generarse estados con $\nu+2$ partículas operando con $A_m^{+(2)}$

$$\Psi(f^{\nu+2}, LM) = N^{-1} \sum_m A_m^{+(2)} |f^\nu, \nu, JM-m\rangle \langle J2 M-m m | LM\rangle \quad (3.68)$$

donde N es un factor de normalización. Los estados (3.68) involucran en general componentes con "seniority" $\nu, \nu-2$ y $\nu+2$, ya que $(\eta-\nu)$ siempre es par. ($A_m^{+(2)}$ es una componente de un

tensor de Racah (irreducible) del grupo de isospin). Podemos sin embargo eliminar las componentes con los valores ν y $\nu-2$ de "seniority" usando los siguientes resultados

$$\begin{aligned} & (2S_0 - 2 + S_+ S_-) |f^{\nu+2}, \nu, LM\rangle \\ &= (S^2 - S_0(S_0 - 3) - 2) |f^{\nu+2}, \nu, LM\rangle \\ &= \frac{1}{4} [(\Omega - \nu)(\Omega - \nu + 2) - (\nu + 2 - \Omega)(\nu + 2 - \Omega - 6) - 8] |f^{\nu+2}, \nu, LM\rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.69a)$$

$$\begin{aligned} & \text{y } (4S_0 - 6 + S_+ S_-) |f^{\nu+2}, \nu-2, LM\rangle \\ &= (S^2 - S_0(S_0 - 5) - 6) |f^{\nu+2}, \nu-2, LM\rangle \\ &= \frac{1}{4} [(\Omega - \nu + 2)(\Omega - \nu + 4) - (\nu + 2 - \Omega)(\nu + 2 - \Omega - 10) - 24] |f^{\nu+2}, \nu-2, LM\rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.69b)$$

donde hemos usado las relaciones (3.62c) y (3.65).

Definiendo ahora el operador

$$P \equiv \frac{1}{4S_0 - 6} (4S_0 - 6 + S_+ S_-) \frac{1}{2S_0 - 2} (2S_0 - 2 + S_+ S_-), \quad (3.70)$$

es claro que anulará los componentes de bajo "seniority" y no afectará a los de "seniority" máximo debido a (3.64). El operador

$$D_m^+ = P A_m^{+(2)} \quad (3.71)$$

genera entonces estados de máximo "seniority" cuando opera sobre estados de máximo "seniority".

Podemos generar ahora la familia de estados

$$|f^{\nu}(D^{\frac{1}{2}\nu}), \alpha, LM\rangle = N_{\nu\alpha}^{-1} [[\dots [D^{\dagger} D^{\dagger}]^{L_1} D^{\dagger}]^{L_2} \dots D^{\dagger}]_{M_1}^L |0\rangle, \quad (3.72)$$

donde α denota el conjunto de momentos angulares intermedios $L_1, L_2, \dots, L_{\frac{1}{2}\nu-1}$. El subespacio generado por los estados (3.72) se denomina subespacio D. Usando (3.63) se pueden construir los estados adicionales

$$|f^n(S^{\frac{1}{2}(n-\nu)} D^{\frac{1}{2}\nu}), \alpha LM\rangle = \sqrt{\frac{(\Omega - \frac{1}{2}(n+\nu))!}{(\frac{1}{2}(n-\nu))!(\Omega-\nu)!}} S_+^{\frac{1}{2}(n-\nu)} |f^{\nu}(D^{\frac{1}{2}\nu}), \alpha LM\rangle. \quad (3.73)$$

El subespacio generado por los estados (3.73) se denomina subespacio S-D, que como veremos a continuación puede ponerse en correspondencia uno a uno con los estados del MBI.

Mapeo del Subespacio S-D a un Espacio Bosónico.

En la sección anterior se analizó el espacio bosónico generado por los operadores de creación y aniquilación $\eta_{\ell m}$, $\xi^{\ell m}$, $\ell = 0, 2$, que satisfacen las reglas de conmutación (3.3).

Mediante la acción de los operadores η_m y $\bar{\eta}$ sobre el vacío de bosones $|0\rangle$, se puede construir un espacio bosónico que se denota como espacio s-d. La construcción de los estados puede hacerse en dos etapas como en el espacio S-D. Primero pueden generarse los estados con $(n_d \equiv \nu)$ bosones d

$$|d^{\alpha} \alpha LM\rangle = N_{nd\alpha}^{-1} [L_{-1}, [L_{-1}, \dots [L_{-1}, \eta]^{\alpha}]] |d^{\alpha} \alpha LM\rangle \quad (3.74)$$

Estos estados pueden clasificarse usando la cadena $U(5) \supset O(5) \supset O(3)$, y fueron discutidos en el capítulo II. A partir de los estados (3.74) utilizamos los operadores $\bar{\eta}$ para generar estados con $N = n_s + n_d$ bosones

$$|s^{n_s} d^{n_d} \alpha LM\rangle = N_{n_s}^{-1} \bar{\eta}^{n_s} |d^{n_d} \alpha LM\rangle \quad (3.75)$$

Se puede mostrar ahora que la acción del conmutador $[D_m^+, D_{m'}^+]$ sobre los estados (3.72) da un resultado nulo

$$[D_m^+, D_{m'}^+] |f^{\nu}, \nu, \alpha LM\rangle = 0, \quad (3.76)$$

de modo que los estados (3.72) son simétricos ante el intercambio de dos D_m^+ , como es el caso para los estados (3.74) ante el intercambio de dos η_m .

Esto sugiere que es posible realizar un mapeo de los estados (3.72) sobre los (3.74) y similarmente los estados (3.73) sobre los (3.75). Es claro que podemos copiar el método del capítulo II para la construcción de los estados (3.72), mediante la identificación $\eta \longleftrightarrow D^+$.

Una vez que hemos construido estos estados, que podemos denotar por

$$|f^{\nu} (D^{\frac{1}{2}\nu}), \mu LM\rangle, \quad (3.77)$$

Construimos los estados (3.73) en el espacio S-D como

$$|f^n (S^{\frac{1}{2}(n-v)} D^{\frac{1}{2}v}) \Lambda_{\mu LM}\rangle = \sqrt{\frac{(\Omega - \frac{1}{2}(n+v))!}{(\frac{1}{2}(n-v)!(\Omega-v)!}} S_+^{\frac{1}{2}(n-v)} |f^v (D^{\frac{1}{2}v}) \Lambda_{\mu LM}\rangle. \quad (3.78)$$

Los estados (3.78) están en correspondencia uno a uno con los estados bosónicos

$$|S^{n_s} d^{n_d} \Lambda_{\mu LM}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_s!}} \bar{\eta}^{n_s} |d^{n_d} \Lambda_{\mu LM}\rangle, \quad (3.79)$$

que están clasificados mediante la cadena $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3)$.

Se ha establecido entonces un mapeo de los estados fermiónicos (3.78) a los estados bosónicos (3.79), donde $n_d = \frac{1}{2}v$ y el número total de bosones $N = n_s + n_d$ es igual al número de pares de fermiones $N = \frac{1}{2}n$. La conservación del número total de bosones es por tanto consecuencia de la conservación del número de partículas en el núcleo.

Es importante notar que los operadores S no conmutan con los operadores D^+ (aunque sí con los $A^{+(2)}$), de modo que la acción de S_+ debe realizarse una vez que se han construido los estados de máximo "seniority".

Los estados $|f^n(0), v=2, 2^+\rangle$ pueden ser obtenidos también mediante la acción de el operador $U_M^{(2)}$ de un cuerpo, ec. (3.60c), sobre el estado $|f^n, v=0, 0^+\rangle$. Es claro que este estado corresponderá a un estado de dos-cuasipartículas.

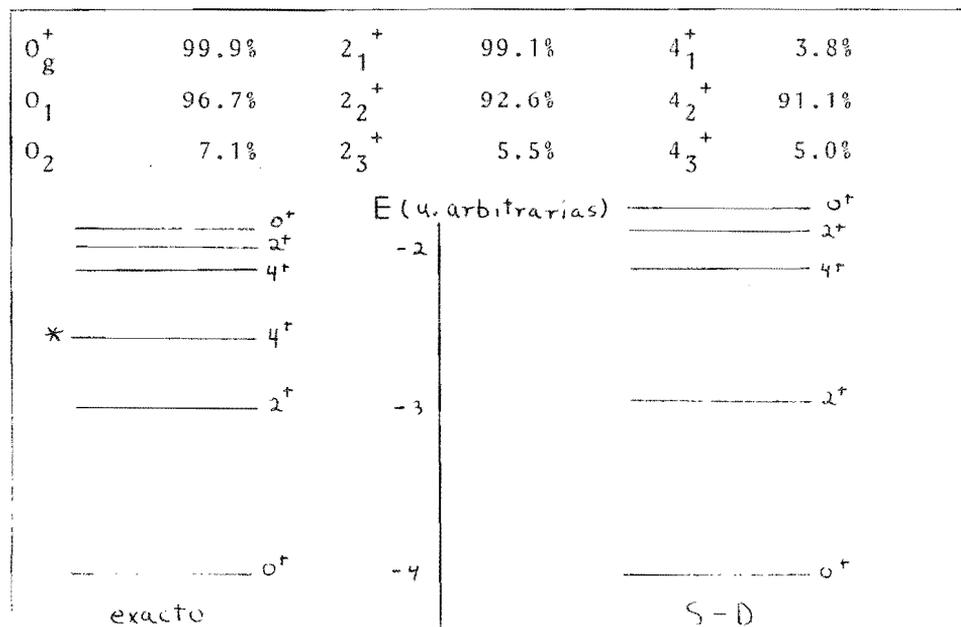
Comparación entre el Cálculo Exacto y el del Espacio S-D.

Habiendo truncado el espacio del modelo de capas es importante investigar que tan buena aproximación representa con respecto a la solución "exacta" del problema original en el modelo de capas. Este chequeo se ha realizado numéricamente ⁸⁾ proponiendo el Hamiltoniano de "pairing" más cuadrupolo

$$H = -G S_+ S_- - K (U^{(2)} \cdot U^{(2)}) \quad (3.80)$$

en la capa $j = 23/2$, considerando hasta ocho partículas.

El resultado del análisis se muestra abajo. En la tabla se ha calculado el traslape entre las funciones de onda en el subespacio S-D con las de la diagonalización exacta.



De la tabla se concluye que a pesar de la enorme reducción del espacio (por ejemplo de dimensión 165 a dimensión 5 para $J = 2$), el traslape es bastante grande, especialmente para los estados más bajos. Es claro además que aparecen estados "intrusos", como el 4_1^+ que solo tiene un 3.8% de traslape con el subespacio S-D. Esto puede entenderse notando que este estado tiene como componente básica un estado con "seniority" $\mathcal{N} = 2$, lo que en el esquema de bosones tendría que estar representado por el "boson g" con $L = 4$. Estos estados "intrusos", no pueden por tanto ser reproducidos en el subespacio S-D.

Es importante notar que si los estados "intrusos" no están acoplados (o lo están debilmente) a los estados del espacio truncado, pueden ser ignorados (o tratados con teoría de perturbaciones). Por el contrario en caso de acoplarse fuertemente a éstos, la aproximación deja de ser válida. Este acoplamiento depende de que la interacción nucleón-nucleón rompa o no el "seniority". Talmi³⁵⁾ ha enfatizado el hecho de que la interacción entre partículas idénticas no parece romper el "seniority", y por tanto se espera que los estados en el subespacio S-D estén separados del resto. La interacción entre partículas diferentes, por otro lado, contiene un término que si lo rompe. En la última parte de esta sección discutiremos cual es el tratamiento adecuado en este caso.

El Spin F

En el caso de que se tengan protones y neutrones activos (fuera de capas cerradas), es posible introducir dos tipos de bosones, bosones de protones y bosones de neutrones, denotados por S_{π} , d_{π} y S_{ν} , d_{ν} respectivamente.

Un operador de un cuerpo en este espacio puede descomponerse en la suma de las contribuciones de protones y neutrones

$$Q^{(E_2)} = Q_{\pi}^{(E_2)} + Q_{\nu}^{(E_2)} \quad , \quad (3.81)$$

y el correspondiente Hamiltoniano contendrá por tanto un término de interacción entre bosones π y bosones ν

$$H = H_{\pi} + H_{\nu} + H_{\pi\nu} \quad . \quad (3.82)$$

En este caso se puede hablar del subespacio S-D como aquel que contiene estados de la forma

$$\left[\left[(S_{+\pi})^{n_{s\pi}} \times (D_{\pi}^+)^{n_{d\pi}} \right] \times \left[(S_{+\nu})^{n_{s\nu}} \times (D_{\nu}^+)^{n_{d\nu}} \right] \right]_{\mathcal{M}}^J |0\rangle \quad (3.83)$$

Las razones por las cuales la restricción al subespacio S-D, (3.83), puede ser una buena aproximación, están relacionadas con las características del Hamiltoniano (equivalente a (3.82) en el subespacio S-D)

$$H_{S-D} = H_{\pi} + H_{\nu} + H_{\pi\nu} \quad . \quad (3.84)$$

Cuando se consideran por separado, \mathcal{H}_π y \mathcal{H}_ν tienen eigenestados nucleares con buen "seniority", mientras que la interacción entre neutrones y protones $\mathcal{H}_{\pi\nu}$ está dominada por el término cuadrupolar ⁸⁾

$$\mathcal{H}_{\pi\nu} = -k T_\pi^{(2)} \cdot T_\nu^{(2)}, \quad (3.85)$$

que rompe el "seniority". Sin embargo, esta interacción tiene elementos de matriz grandes entre los estados del subespacio S-D y pequeños para los elementos de matriz que llevan fuera de él.

El operador (3.85) es por tanto responsable de la mezcla de estados de "seniority" dentro del subespacio S-D, lo que a su vez da lugar a efectos colectivos particulares en núcleos con protones y neutrones fuera de capas cerradas.

Para establecer la conexión entre el modelo π - ν (ec. 3.82) y el MBI, es conveniente tratar formalmente estos bosones de manera análoga al tratamiento de isospin para los nucleones. Para ello se introduce un vector de spin cuyas proyecciones sobre un eje dado distinguen entre ellos. Se llama spin F a este vector, y se utiliza la convención de asignar $F_z = +1/2$ para bosones π y $F_z = -1/2$ para bosones ν .

Los generadores del grupo SU(2) asociados al spin F pueden escribirse explícitamente como

$$\begin{aligned} F_+ &= (\eta_\pi \cdot \xi_\nu) + \bar{\eta}_\pi \bar{\xi}_\nu, \\ F_- &= (\eta_\nu \cdot \xi_\pi) + \bar{\eta}_\nu \bar{\xi}_\pi, \\ F_z &= \frac{1}{2} \{ (\eta_\pi \cdot \xi_\pi) + \bar{\eta}_\pi \bar{\xi}_\pi - (\eta_\nu \cdot \xi_\nu) - \bar{\eta}_\nu \bar{\xi}_\nu \}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

y claramente F_z es siempre un buen número cuántico.

Si el Hamiltoniano (3.82) es tal que en cualquier estado permitido del sistema las interacciones entre bosones $\pi-\pi$, $\pi-\nu$ y $\nu-\nu$ son iguales, H conmuta con los generadores (3.86) y será por tanto un escalar con respecto al spin F . En este caso, y más en general en caso de que H no mezcle estados con valores diferentes de F , los eigenestados de H pueden ser caracterizados por sus propiedades de simetría en el espacio F . La función de onda total Ψ puede ser escrita entonces como una suma de productos de funciones ϕ_R en el espacio s-d y funciones Ω_R en el espacio del spin F . Los diagramas de Young que caracterizan la simetría de las funciones del spin $-F$ tienen un número máximo de dos renglones, y ya que las funciones de onda totales $\Psi = \sum \phi_R \Omega_R$, (que portan las representaciones de $U(6) \times SU(2)$) deben ser totalmente simétricas, esto implica que ϕ_R y Ω_R tienen el mismo tipo de simetría. Las representaciones de $U(6)$ tienen entonces un número máximo de dos renglones, con longitudes n_1 y n_2 determinadas por el número total de bosones N y el valor del spin F

$$n_1 + n_2 = N \quad , \quad \frac{n_1 - n_2}{2} = F \quad , \quad (3.87a)$$

i.e.,

$$n_1 = \frac{1}{2}N + F \quad , \quad n_2 = \frac{1}{2}N - F \quad . \quad (3.87b)$$

Los estados con funciones totalmente simétricas en el espacio s-d corresponden a los diagramas con $n_1 = N$ y $n_2 = 0$ y por tanto tienen $F = N/2$.

Se espera que estos estados tengan la energía más baja, pero existen en general otros estados en que las funciones tienen simetría mixta, que deben ser caracterizados por un valor de F menor. Debe enfatizarse que H no necesita ser un escalar con respecto al spin F , puede contener por ejemplo funciones de \hat{N} y \hat{F}_z . En este caso la interacción rompe la degeneración para las funciones de onda con diferente valor de F_z , pero no mezcla las diferentes representaciones. Estos términos pueden tomar en cuenta la diferencia entre las interacciones entre neutrones y protones que están en diferentes capas.

Se puede decir entonces que el MBI es un esquema apropiado para la descripción de estados colectivos a bajas energías, si el Hamiltoniano del sistema combinado (de protones y neutrones de valencia) no mezcla estados con diferentes valores del spin F .

El cálculo numérico verifica ³⁶⁾ que los estados totalmente simétricos son en verdad los más bajos en energía, pero un análisis cuidadoso ^{8,36)} muestra que el sistema combinado puede ser aproximado razonablemente por funciones con buen spin F solo en el caso en que protones y neutrones ocupen ambos la primera o la segunda mitad de sus respectivas capas.

En este trabajo no analizaremos más las conexiones del MBI con el modelo de capas, sino que nos restringiremos en adelante a estudiar las aplicaciones del modelo a las distintas regiones nucleares.

En el siguiente capítulo analizaremos detalladamente la estructura del Hamiltoniano s - d en los diferentes límites

(3.5), los espectros característicos y reglas de transición entre las distintas bandas. Señalaremos así mismo la existencia de regiones nucleares donde estos límites se manifiestan en forma muy aproximada.

CAPITULO IV

LOS LIMITES EXACTOS DEL MODELO DE BOSONES CON INTERACCION:

4.1 - En los capítulos anteriores hemos discutido ampliamente el modelo de bosones con interacción desde el punto de vista de la teoría de grupos y se ha mostrado que el Hamiltoniano más general dentro del modelo puede ser expresado en términos de los operadores de Casimir asociados a las cadenas de grupos (3.5).

En principio, las relaciones (3.56), que muestran la relación entre las posibles interacciones dentro del modelo con los operadores mencionados, pueden considerarse como la solución formal del problema mediante la aplicación de una técnica matemática apropiada, ya que conocemos la acción de cada uno de éstos sobre la base (3.5a).

En principio no existe ninguna razón para que los núcleos deban exhibir alguna de las simetrías dinámicas exactas descritas por las cadenas (3.5), y si este fuera el caso la solución general descrita en el capítulo anterior no tendría un significado más allá que el de representar una técnica poderosa para resolver el problema. Resulta sin embargo que los tres tipos de simetría se observan experimentalmente³⁷⁻⁴⁰⁾ en forma aproximada, por lo que cada una de las cadenas (3.5) parece corresponder a una dinámica nuclear definida. Cada una de las simetrías exactas descritas en el capítulo anterior tiene entonces relevancia física y es necesario estudiar detenidamente los espectros y probabilidades de transición que las caracterizan. Esto permitirá a su vez estudiar las regiones nucleares intermedias e interpretarlas como r

giones de transición entre éstos límites exactos, como veremos en el siguiente capítulo.

Simetrías Dinámicas

Ya que $U(6)$ es la estructura de grupo del Hamiltoniano (3.4), esto implica que el espacio de Hilbert asociado a éste es considerado como el espacio de representación para todas las funciones de onda de carácter colectivo a bajas energías, de modo que debe ser posible describir dentro de este espacio la gran variedad de espectros observados. Puede suceder que para un cierto valor del número total de bosones N los coeficientes en el Hamiltoniano nuclear sean tales que una simetría dinámica hace su aparición. El concepto de simetría dinámica ha sido de gran utilidad en diversos campos de la física. Es bien conocido el papel del grupo $O(4)$ en la dinámica del átomo de hidrógeno y su relación con las degeneraciones presentes en su espectro ⁴¹⁾. Del mismo modo el grupo dinámico $SU(3)$ juega un papel fundamental en el campo de las partículas elementales ⁴²⁾. En lenguaje de teoría de grupos, una simetría dinámica surge en el caso de que las interacciones sean tales que el Hamiltoniano del sistema puede ser escrito en términos de los invariantes de un grupo G , de modo que las representaciones de G pueden dejar de ser degeneradas pero no son mezcladas por el Hamiltoniano ⁴³⁾.

Como se indicó anteriormente, existen en la estructura del Hamiltoniano (3.4) tres simetrías dinámicas, que pueden ser caracterizadas por el subgrupo G de $U(6)$ que las define:

a) $G=U(5)$ b) $G=SU(3)$ y c) $G=O(6)$.

Procedemos ahora a discutir cada una de estas simetrías, pero antes mostraremos en qué forma el Hamiltoniano s-d y los correspondientes operadores de transición se reducen al Hamiltoniano y operadores de transición derivados por Janssen et.al. a partir de consideraciones microscópicas que involucran pares de fermiones ²⁸⁾.

El Hamiltoniano (3.4) describe estados cuadrupolares colectivos, de modo que el operador de transición de mayor relevancia asociado con ellos será el operador cuadrupolar eléctrico, definido en términos de los elementos de matriz reducidos $\langle d || \hat{Q} || d \rangle$ y $\langle d || \hat{Q} || s \rangle$ por la relación ³⁸⁾

$$T_R^{(E_2)} = \tilde{q}_2 [(\eta \bar{\xi})_k^2 + (\bar{\eta} \xi)_k] + q'_2 [\eta \times \xi]_R^2, \quad (4.1)$$

que es el operador más general de los generadores de $U(6)$ (tensor de Racah de orden 2), de modo que el operador (4.1) está caracterizado por los dos números

$$\tilde{q}_2 \equiv \sqrt{5} \langle d || \hat{Q} || s \rangle, \quad (4.2)$$

$$q'_2 \equiv \langle d || \hat{Q} || d \rangle.$$

Si consideramos ahora los estados base $|(S^N d)^{n_d} N \nu \Lambda S L M\rangle$, notamos que podemos tomar en forma explícita la acción de los operadores asociados con el bosón S, i.e., $\hat{n}_s = \hat{N} - \hat{n}_d$, $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$, ecs. (3.22), (3.34), de modo que (3.4) puede escribirse alternativamente en la forma

$$\begin{aligned}
\hat{H} |N, \nu, \lambda, s, L, M\rangle &= \left\{ \epsilon \hat{n}_d + \frac{1}{2} C_L [L, \eta \times \eta]^{(2)} \cdot [\xi \times \xi]^{(2)} \right\}^0 \\
&+ u_2 (\hat{N} - \hat{n}_d) \hat{n}_d + u_0 (\hat{N} - \hat{n}_d) (\hat{N} - \hat{n}_d - 1) \Big\} |N, \nu, \lambda, s, L, M\rangle \\
&+ \tilde{v}_2 \left\{ [L, \eta \times \eta]^{(2)} \times \xi \right\}^0 (\hat{N} - \hat{n}_d)^{1/2} |N-1, \nu, \lambda, s, L, M\rangle \\
&+ (\hat{N} - \hat{n}_d + 1)^{1/2} \left[\eta \times [\xi \times \xi]^{(2)} \right]^0 |N+1, \nu, \lambda, s, L, M\rangle \Big\} \quad (4.3a) \\
&+ \tilde{v}_0 \left\{ [L, \eta \times \eta]^{(2)} \right\}^0 (\hat{N} - \hat{n}_d) (\hat{N} - \hat{n}_d - 1)^{1/2} |N-2, \nu, \lambda, s, L, M\rangle \\
&+ \left\{ (\hat{N} - \hat{n}_d + 1) (\hat{N} - \hat{n}_d + 2) \right\}^{1/2} [\xi \times \xi]^0 |N+2, \nu, \lambda, s, L, M\rangle \Big\} ,
\end{aligned}$$

donde

$$C_L \equiv \langle d^2 L | V_{12} | d^2 L \rangle (2L+1)^{1/2}, \quad L=0, 2, 4,$$

$$\tilde{v}_2 \equiv \sqrt{\frac{5}{2}} \langle d s 2 | V_{12} | d s 2 \rangle,$$

$$\tilde{v}_0 \equiv \frac{1}{2} \langle d^2 0 | V_{12} | s^2 0 \rangle,$$

(4.36)

$$u_2 \equiv \langle d s 2 | V_{12} | d s 2 \rangle,$$

$$u_0 \equiv \frac{1}{2} \langle s^2 0 | V_{12} | s^2 0 \rangle,$$

$$v_d \equiv v$$

Nótese que la conservación del número total de bosones está garantizada por la estructura de la ecuación (4.3).

En forma similar, (4.1) se transforma en la expresión

$$T_R^{(E_2)} |N, \nu, \Lambda, S, L, M\rangle = \tilde{q}_2 \left\{ \eta_R (\hat{N} - \hat{n}_d)^{1/2} |N-1, \nu, \Lambda, S, L, M\rangle \right. \\ \left. + (\hat{N} - \hat{n}_d + 1)^{1/2} \xi_R |N+1, \nu, \Lambda, S, L, M\rangle \right\} + q_2' [\eta_R \xi_R]^2 |N, \nu, \Lambda, S, L, M\rangle. \quad (4.4)$$

Estas expresiones son idénticas a las derivadas en la referencia (28).

4.2 El límite Vibracional $G \cong U(5)$

Si consideramos el caso en que la diferencia de energía ϵ entre los bosones s y d es mucho mayor que los términos de interacción C_L, \tilde{v}_L, u_L es claro que el Hamiltoniano será invariante ante transformaciones separadas entre las cinco componentes del estado $L = 2$. Los estados serán caracterizados por tanto, por el número de bosones ocupando el nivel $L = 2$, n_d , y una simetría (aproximada) emerge de la descomposición

$$U(6) \supset U(5) \times U(1).$$

El límite vibracional, en el sentido convencional de la palabra es descrito en la representación bosónica por el Hamiltoniano de Bohr, ecs. (2.19), y por el operador de transición

$$T_R^{(E_2)} = q_2 (\eta_R + \xi_R), \quad (4.5)$$

donde el número de bosones n_d puede tomar cualquier valor 0, 1, 2, Estos operadores son casos particulares de (4.3) y (4.4) si nos olvidamos de los factores introducidos por los bo-

sones s (factores de corte).

En el caso del MBI, un valor grande de ϵ justifica despreciar los términos en el Hamiltoniano que involucran una interacción entre bosones s y d , i.e., u_2, \tilde{v}_2 y \tilde{u}_1 en la expresión (4.3a). Por otro lado el término $u_0 \hat{n}_s (\hat{n}_s - 1)$ representa una interacción entre bosones s que no puede jugar papel alguno en la determinación de los espectros, como puede verse del siguiente argumento: reescribimos el operador como $u_0 (\hat{N} - \hat{n}_d) (\hat{N} - \hat{n}_d - 1)$

$$= u_0 (\hat{N}^2 - \hat{N}) + u_0 (1 - 2\hat{N}) \hat{n}_d + u_0 \hat{n}_d^2,$$

y consideremos el lado derecho de esta expresión. El primer término es constante para cada núcleo de modo que sólo contribuye para la energía de amarre del núcleo. El segundo término puede incorporarse directamente en el término $\epsilon \hat{n}_d$ (renormalización de la ϵ) y es poco importante para valores pequeños de N . Por último, es fácil demostrar a partir de las relaciones (3.56a - 3.56c) que la interacción \hat{n}_d^2 es una combinación lineal de los \hat{A}_L y \hat{n}_d de modo que no es independiente, por lo que el Hamiltoniano apropiado para este límite puede escribirse como

$$H = \epsilon \hat{n}_d + \frac{1}{2} \sum_L c_L \hat{A}_L, \quad (4.7)$$

$$n_d = 0, 1, \dots, N,$$

con \hat{A}_L , $L = 0, 2, 4$ definidos por la ecuación (3.55a), que es idéntico al Hamiltoniano para bosones d , ecs. (2.40).

En este límite se utiliza el operador de transición

$$T_R^{(E_2)} = q_2 (\gamma_R + \xi_R) + q_2' (\gamma \times \xi)_R, \quad (4.8)$$

que puede ser generalizado como veremos más adelante.

Queremos enfatizar aquí que el término $-k \hat{N} \hat{n}_d$ de (4.6), juega un importante papel en la transición a núcleos rotacionales y de simetría $O(6)$ ya que, como veremos en el siguiente capítulo, a medida que el valor de N se incrementa ϵ disminuye y las interacciones u_2, \tilde{v}_c y \tilde{t}_2 en (4.3a) son cada vez más importantes, dando lugar al rompimiento de la simetría $U(5) \times U(1)$. Vemos por tanto que dentro del modelo los límites vibracionales se presentan para valores pequeños de N , lo que coincide con lo observado experimentalmente.

El problema de eigenvalores asociado con el Hamiltoniano (4.7) fue discutido en el Capítulo II, donde encontramos éstos en forma cerrada, ecs. (2.44)

$$E(n_d, \Lambda, L) = \epsilon n_d + \frac{\alpha}{2} n_d(n_d - 1) + \beta(n_d - \Lambda)(n_d + \Lambda + 3) + \gamma(L(L+1) - 6n_d), \quad (2.44)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{14} (8C_2 + 6C_4),$$

$$\beta = \frac{1}{10} (C_0 - \alpha + 12\gamma),$$

$$\gamma = \frac{1}{14} (C_4 - C_2).$$

La expresión (2.44), genera espectros con regularidades apreciables. Ilustramos éstos con un ejemplo tomado de Arima y Iachello³³⁾.

Es claro que la ecs. (2.44) describe el espectro de un vibrador anarmónico debido a que la interacción bosón-bosón rompe la degeneración de los tripletes. Se pueden distinguir además diversas "bandas", si estos se definen como un conjunto de niveles conectados por valores grandes de la transición E_2 .

(Este es el caso como se verá más adelante). Arima y Iachello llaman a las bandas más importantes Y, X, Z, X', Z', β y las definen como sigue, en la notación $|\nu, \nu, L, M\rangle$:

$$\begin{aligned}
 \text{banda } Y & \quad |\nu, \nu, L, L=2\nu, M\rangle, \\
 \text{banda } X & \quad |\nu, \nu, L, L=2\nu-2, M\rangle, \\
 \text{banda } Z & \quad |\nu, \nu, L, L=2\nu-3, M\rangle, \\
 \text{banda } X' & \quad |\nu, \nu, L, L=2\nu-4, M\rangle, \\
 \text{banda } Z' & \quad |\nu, \nu, L, L=2\nu-5, M\rangle, \\
 \text{banda } \beta & \quad |\nu, \nu-2, L, L=2\nu-4, M\rangle, \\
 \text{banda } \Delta & \quad |\nu, \nu, L, L=2\nu-6, M\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Algunas de las bandas típicas se muestran en la Fig.1.

El cálculo de las probabilidades de transición $E2$, ecs. (4.8), requiere de los métodos desarrollados en el apéndice A, para lo cual es necesario expresar (4.8) en términos de los operadores $\langle \chi_m, \Pi_m$ definidos por las relaciones (2.17), (3.28),

$$T_R^{(E_2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} q_2 \langle \chi_R + \frac{1}{2} q_2' \left\{ [\langle \chi \chi \rangle]_R^2 + [\Pi \times \Pi]_R^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

El cálculo de elementos de matriz del operador Π_m se puede realizar en forma directa, utilizando un truco debido a Hess ⁴⁴). Para ello notamos que si

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_m \Pi_m \Pi^m + \sum_m \alpha_m \alpha^m \right), \quad (4.11a)$$

entonces de (3.26)

$$\Pi_m = i (H_0 \alpha_m - \alpha_m H_0). \quad (4.11b)$$

Conviene en este punto introducir los estados ortonormales $|\nu \wedge t L M\rangle$ definidos por la relación

$$|\nu \wedge t L M\rangle \equiv \sum_{s=1}^{d(\Lambda, L)} [\epsilon_t(\Lambda, L)]^{-1/2} \Theta_{st} |\nu \wedge s L M\rangle, \quad (4.12)$$

donde la matriz ortogonal $\|\Theta_{st}(\Lambda, L)\|$ es la matriz que diagonaliza los productos escalares

$$M_{SS'} = \langle \nu \wedge s L M | \nu \wedge s' L M \rangle, \quad (4.13)$$

i.e.,

$$\tilde{\Theta} M \Theta = \|\epsilon_t(\Lambda, L)\|. \quad (4.14)$$

De las relaciones (2.37) vemos que la dimensión máxima de $\|M_{SS'}\|$ está dada por la fórmula

$$D(M_{SS'}(\Lambda, L)) = \lfloor \frac{L}{6} + 1 \rfloor, \quad (4.15)$$

donde $\lfloor \rfloor$ indica la parte entera de la expresión, de modo que la ortonormalización es trivial para los valores de L en que estamos interesados.

Utilizando los eigenestados ortonormales (4.12) y las relaciones (4.11), obtenemos

$$\begin{aligned} & \langle \nu' \Lambda' t' L' M' | \Pi_m | \nu \Lambda t L M \rangle \\ & = i(\nu' - \nu) \langle \nu' \Lambda' t' L' M' | \alpha_m | \nu \Lambda t L M \rangle, \end{aligned} \quad (4.16a)$$

y

$$\begin{aligned} & \langle \nu' \Lambda' t' L' M' | [\Pi \times \Pi]_m^2 | \nu \Lambda t L M \rangle \\ & = (-)^{(\nu' - \nu)/2} \langle \nu' \Lambda' t' L' M' | [\alpha \times \alpha]_m^2 | \nu \Lambda t L M \rangle, \end{aligned} \quad (4.16b)$$

donde la última expresión se obtiene escribiendo $[\Pi \times \Pi]_m^2$ en forma explícita y utilizando (4.11b) dos veces. Vemos por tanto que los elementos de matriz del operador de transición (4.10) pueden calcularse en forma general, utilizando los resultados del apéndice A.

En esta sección estamos interesados en obtener valores analíticos de elementos de matriz del operador cuadrupolar eléctrico entre y dentro de las distintas bandas, definidas por las relaciones (4.9). Para ello aprovechamos la simplicidad de las funciones de onda que las describen. Para ilustrar el método tomamos el caso de las bandas Y y X , el cálculo para las otras bandas es muy similar.

En el lenguaje del apéndice A, la banda Y puede denotarse por

$$|\nu\nu\ 1\ 2\nu\ 2\nu\rangle = A_\nu \alpha_2^\nu e^{-1/2\beta^2}, \quad (4.17)$$

donde A_ν debe determinarse de modo que (4.17) esté normalizado. Para calcular transiciones en esta banda es necesario evaluar el elemento de matriz

$$\begin{aligned} Y_{\nu+2,\nu} &\equiv \langle \nu\nu\ 1\ 2\nu\ 2\nu | \alpha_{-2} | \nu+1\ \nu+1\ 1\ 2\nu+2\ 2\nu+2 \rangle \\ &= \int_V A_{\nu+1} A_\nu^* \alpha_2^{*\nu+1} \alpha_2^{\nu+1} e^{-\beta^2} dV, \end{aligned} \quad (4.18)$$

que puede obtenerse a partir de la integral de normalización

$$\langle \nu\nu\ 1\ 2\nu\ 2\nu | \nu\nu\ 1\ 2\nu\ 2\nu \rangle = |A_\nu|^2 \int_V \alpha_2^{*\nu} \alpha_2^\nu e^{-\beta^2} dV. \quad (4.19)$$

Para calcular (4.19) hacemos la substitución (ver apéndice A)

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin\chi \sin\delta e^{i\phi}, \quad (A.13a)$$

$$dV = \beta^4 \sin^3\chi \sin\delta \cos\delta d\beta d\chi d\delta d\phi \quad (A.14)$$

con lo que se convierte en una integral trivial, encontrándose

$$A_\nu = \pi^{-5/4} 2^{\nu/2} / (\nu!)^{1/2}. \quad (4.20)$$

La relación (4.18) puede expresarse ahora como

$$Y_{\nu+2, \nu} = \frac{A_{\nu+2, \nu}^*}{A_{\nu+1, \nu}} = \frac{A_{\nu}}{A_{\nu+1}} = \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{1/2}, \quad (4.21)$$

de modo que la correspondiente probabilidad de transición reducida³⁴⁾

$$B(E_2; L_i \rightarrow L_f) = \frac{2L_f+1}{2L_i+1} |\langle L_f || T^{(E_2)} || L_i \rangle|^2, \quad (4.22)$$

resulta ser en este caso

$$B_Y(E_2; 2\nu+2 \rightarrow 2\nu) = \frac{1}{4} (q_2)^2 (\nu+1), \quad (4.23)$$

donde se ha usado el teorema de Wigner-Eckart²³⁾ en la evaluación del elemento de matriz reducido asociado a (4.18).

Para el cálculo de la transición de la banda X a la banda Y requerimos, además de (4.17), las funciones de onda asociadas a la banda X

$$|\nu \nu 1 \ 2\nu-2 \ 2\nu-2 \rangle = B_\nu \alpha_2^{\nu-2} \{2, 2\} e^{-1/2 \beta^2} \quad (4.24a)$$

donde B_ν se determina de manera análoga a A_ν , mediante la normalización de las funciones de onda (4.24a). Encontramos

$$B_\nu = \frac{\pi^{-5/4} 2^{\nu/2-1}}{((\nu-2)! (4\nu-1))^{1/2}}, \quad (4.24b)$$

de modo que el elemento de matriz buscado puede escribirse como

$$\begin{aligned} (XY)_{\nu+1, \nu} &= \langle \nu+1 \ \nu+1 \ 2\nu \ 2\nu | \alpha_0 | \nu \nu \ 1 \ 2\nu \ 2\nu \rangle \\ &= A_\nu B_{\nu+1}^* \int_V \alpha_2^\nu \alpha_0 \alpha_2^{*\nu-1} \{2, 2\}^* e^{-\beta^2} dV. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Para evaluar (4.25), se requiere usar la expresión explícita de $\{2,2\}$,

$$\{2,2\} = 2\sqrt{2} \alpha_2 \alpha_0 - \sqrt{3} \alpha_1^2,$$

junto con las relaciones (A.13 - A.14) de las α_m en términos de las nuevas variables. Substituyendo en (4.25) y haciendo uso de (4.20) y (4.24b), se encuentra

$$(XY)_{\nu+1,\nu} = (2\nu/(4\nu+3))^{1/2}, \quad (4.26)$$

de modo que la correspondiente probabilidad de transición reducida está dada por

$$B_{xy}(E_2; 2\nu \rightarrow 2\nu) = \frac{1}{2} (q_2)^2 (2\nu+1)/(4\nu-1), \quad (4.27)$$

donde de nuevo se usó el teorema de Wigner-Eckart y el valor explícito del coeficiente de Clebsch-Gordan.

$$\langle 2\nu 2 2\nu 0 | 2\nu 2\nu \rangle = \left(2\nu(4\nu-1)/((2\nu+1)(4\nu+3)) \right)^{1/2}.$$

En la Fig. 2 escribimos los elementos de matriz reducidos asociados a las transiciones entre las bandas Y , X y Z a través de la relación (4.22).

Las bandas definidas por las relaciones (4.9) aparecen entonces conectadas por transiciones con valores grandes de $B(E2)$. Para cada banda, con excepción de la banda Y , una fracción cada vez mayor del decaimiento va a la banda Y , mien-

Fig I

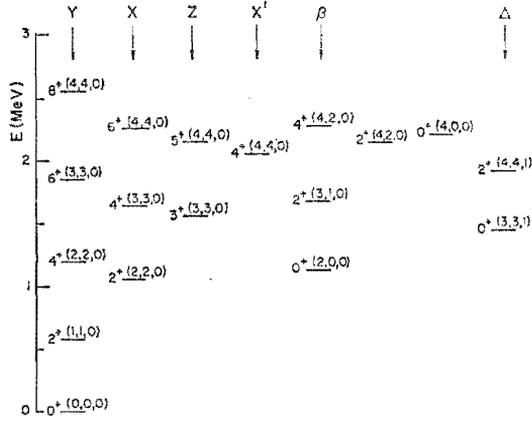
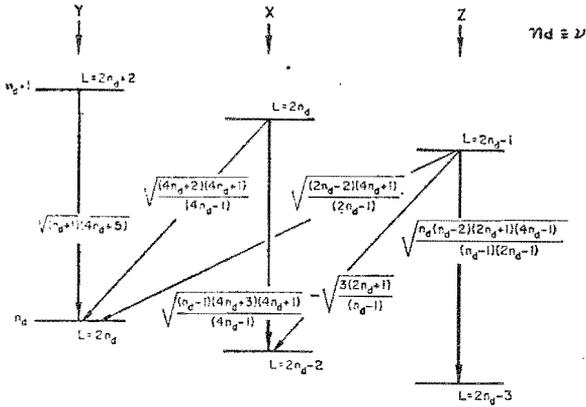


Fig. II



tras que el spin decrece.

Los elementos de matriz asociados con las otras bandas pueden también ser calculados en forma analítica.

LAS REGIONES VIBRACIONALES

Consideremos ahora las regiones en donde el límite descrito por la cadena $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset C(3)$ parece ser adecuado. Estas aparecen señaladas en la Fig. 3. Una condición necesaria mas no suficiente es que las transiciones con $\Delta \nu = 2$ sean pequeñas y que un patrón vibracional de dos fonones esté presente con un triplete $0^+, 2^+, 4^+$, con energías cercanas al doble de la energía del primer 2^+ . Las regiones señaladas en la figura 3 se caracterizan por tener tanto neutrones como protones fuera de capas cerradas. Las condiciones más favorables parecen surgir cuando N (ó Z) es 4-6 partículas después de una capa y Z (ó N) es de 8-10 partículas después de la capa cerrada.

En las figuras 4 y 5 se muestra la comparación entre niveles experimentales y teóricos ³⁸⁾ para los núcleos ¹⁰²Ru, ¹¹⁰Cd y ¹⁸⁸Pt, donde se ilustran algunas dificultades como es la aparición de niveles provenientes de otras excitaciones. (modos octupolares, estados de dos cuasipartículas, etc.) Más tarde se verá que en el caso del Pt su descripción es más adecuada en términos de la simetría O(6).

Por último en la tabla 1 se muestra una colección de "branching ratios", B(E2), para los isótopos del Xenón. Aunque el patrón general se aproxima a las predicciones del límite vibracional, es necesario considerar el rompimiento de la simetría

Fig. 3

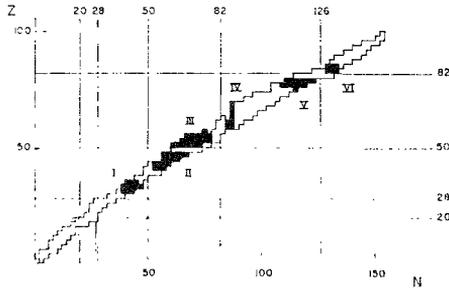


Fig. 4

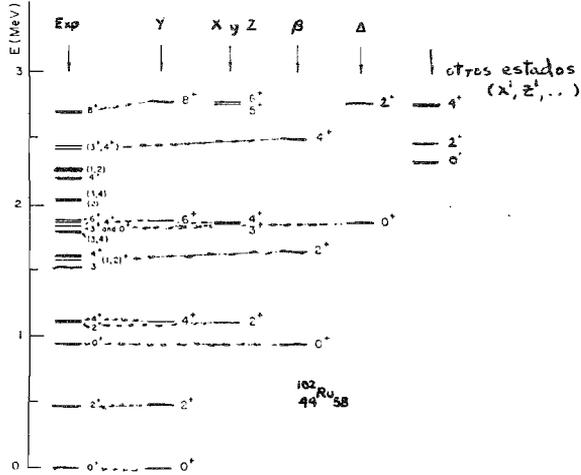


Fig 5

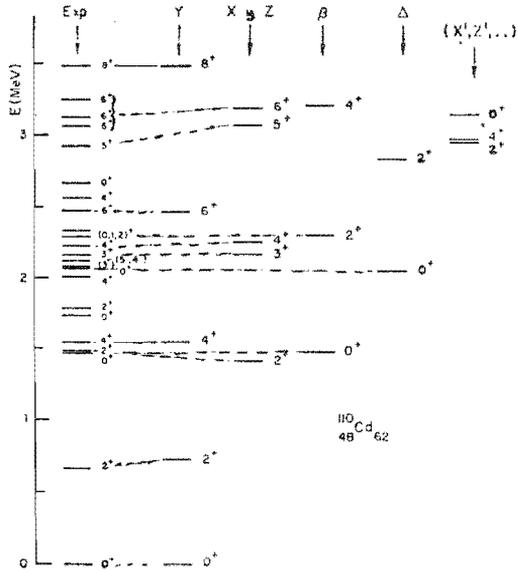
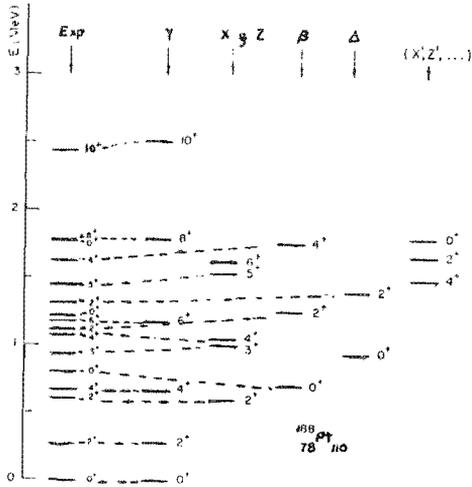


Tabla 1.

	$^{132}\text{Xe}_{78}$	$^{130}\text{Xe}_{76}$	$^{128}\text{Xe}_{74}$	$^{126}\text{Xe}_{72}$	$^{124}\text{Xe}_{70}$	
$\frac{2_2^- \rightarrow 0_1^-}{2_2^+ \rightarrow 2_1^+} (\times 10^{-2})$	0.17	0.57-0.64	1.01	1.48-1.99	1.86 - 3.89	0
$\left\{ \begin{array}{l} 3_1^+ \rightarrow 2_1^+ \\ 3_1^+ \rightarrow 2_2^+ \end{array} \right. (\times 10^{-2})$	1.03	1.41-1.54	—	1.99	2.99	0
$\left\{ \begin{array}{l} 3_1^+ \rightarrow 4_1^+ \\ 3_1^+ \rightarrow 2_2^+ \end{array} \right.$	0.51	0.24-0.25	—	0.46-0.72	0.16	$\frac{2}{5} = 0.400$
$\left\{ \begin{array}{l} 4_2^+ \rightarrow 2_1^+ \\ 4_2^+ \rightarrow 2_2^+ \end{array} \right. (\times 10^{-2})$	—	3.11-3.42	—	1.28	—	0
$\left\{ \begin{array}{l} 4_2^+ \rightarrow 4_1^+ \\ 4_2^+ \rightarrow 2_1^+ \end{array} \right.$	—	0.95-1.05	—	0.94	0.90	$\frac{10}{11} = 0.909$
$\left\{ \begin{array}{l} 5_1^+ \rightarrow 4_1^+ \\ 5_1^+ \rightarrow 3_1^+ \end{array} \right. (\times 10^{-2})$	—	3.38	—	4.97	3.90	0
$\left\{ \begin{array}{l} 5_1^+ \rightarrow 4_2^+ \\ 5_1^+ \rightarrow 3_1^+ \end{array} \right.$	—	0.46	—	1.26	0.98	$\frac{5}{11} = 0.454$
$\left\{ \begin{array}{l} 5_1^+ \rightarrow 6_1^+ \\ 5_1^+ \rightarrow 3_1^+ \end{array} \right.$	—	0.64	—	—	—	$\frac{104}{231} = 0.450$

exacta para explicar las transiciones "prohibidas" $\Delta J = 2$, que crecen a medida que nos alejamos de capas cerradas. Un análisis en esta dirección se planea, utilizando el Hamiltoniano más general del modelo, ec. (3.4) y el operador más general de transiciones cuadrupolares.

Como último punto en esta sección señalamos que propiedades tales como transiciones multipolares, transferencia de pares de nucleones, etc., pueden ser analizadas de manera directa.

4.3 EL LIMITE ROTACIONAL $G \cong SU(3)$

Como se mencionó anteriormente, esta simetría dinámica puede hacer su aparición cuando los valores de ϵ son pequeños, de modo que las interacciones entre los bosones s y d adquieren mayor importancia. En la sección anterior se vio que esto es factible cuando el número total de bosones N es suficientemente grande como para que el término $-k \hat{N} \hat{N}_d$, que aparece en la expresión alternativa del Hamiltoniano s-d en términos de los operadores en las tres cadenas de grupos (ver ecs. 3.56), prácticamente anule el valor efectivo de ϵ . Como veremos en el siguiente capítulo, de hecho la transición de núcleos vibracionales a rotacionales se manifiesta precisamente cuando el número total de bosones aumenta, como en el caso de los isótopos del Samario ¹²⁾.

Las condiciones microscópicas bajo las cuales esta simetría aproximada se manifiesta son objeto de diversas investi-

gaciones recientes. ⁴⁵⁾

En esta sección aprovechamos los extensos análisis realizados en conexión con la capa S-D del núcleo ^{16,19)} para describir brevemente el tipo de espectros y probabilidades de transición predichos dentro de este límite, así como su comparación con el experimento.

Del análisis realizado en el capítulo III es claro que una combinación definida de interacciones de dos cuerpos (cuyo valor explícito puede obtenerse al invertir las relaciones (3.56)) conduce al Hamiltoniano

$$H_{\gamma u_3} = -\kappa' \sum_{ij} \hat{Q}_i \cdot \hat{Q}_j = -\kappa' \hat{Q}^2, \quad (4.28)$$

donde \hat{Q}^2 está dado por las expresiones (3.49) y (3.50).

El operador de Casimir de segundo orden del grupo SU(3) está dado por la relación (3.20)

$$\hat{C} = \frac{1}{2} \hat{L}^2 + \hat{Q}^2, \quad (3.20)$$

cuyos eigenvalores tienen la forma ¹⁹⁾

$$C(\lambda, \mu) = \frac{2}{3} (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)), \quad (4.29)$$

donde (λ, μ) caracterizan la representación de SU(3) a la manera de Elliot. ¹⁰⁾

Los eigenestados asociados al Hamiltoniano (4.28) pueden por tanto clasificarse de acuerdo a la reducción

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2),$$

$N \qquad (\lambda, \mu) \qquad L \qquad M$

con los números cuánticos indicados. Es necesario incluir un índice extra, que denotamos por χ , que distingue distintas representaciones irreducibles L de $O(3)$ contenidas en la RI (λ, μ) de $SU(3)$. La manera de escoger esta χ no es única, sino que depende de la manera en que se construyen los estados

$$|N(\lambda\mu)\chi LM\rangle. \quad (4.30)$$

En la literatura existen diversos métodos de construir los estados (4.30), entre los que destacan el de Bargmann-Moshinsky^{46,47}, Elliot²⁰ y Vergados.⁴⁸

En la base de Elliot se utiliza el índice K (en lugar de la χ), que está relacionado con la proyección de L a lo largo de los ejes principales fijos en el cuerpo. La base de Vergados está relacionada a la de Elliot de manera cercana, ya que consiste en introducir combinaciones lineales de los estados de Elliot en las distintas K 's, tales que los estados resultantes satisfagan la condición de ortonormalidad.⁴⁸

De las relaciones (3.20) y (4.29) es claro que el Hamiltoniano (4.28) es diagonal en esta base, con eigenvalores

$$\begin{aligned}
 E([N](\lambda\mu)\chi LM) &= K' \left(\frac{1}{2} L(L+1) - \frac{2}{3} C(\lambda\mu) \right) \\
 &= K \left(\frac{3}{4} L(L+1) - C(\lambda\mu) \right), \quad (4.31a)
 \end{aligned}$$

donde $K \equiv \frac{2}{3}K'$ y $C(\lambda, \mu) = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)$. (4.31b)

Enumeramos a continuación los resultados concernientes a la descomposición $U(6) \supset SU(3) \supset O(3)$, restringiéndonos en lo sucesivo a las discusiones de Elliot y Vergados.^{10,48)} Para una revisión muy completa de la relación entre las diferentes bases para la descomposición $SU(3) \supset O(3)$, remitimos al lector a un artículo reciente por Moshinsky, Patera, Sharp y Winternitz.⁴⁹⁾

Primero estamos interesados en la descomposición de la representación $[N]$ de $U(6)$ en representaciones (λ, μ) de $SU(3)$.¹⁰⁾ Esta viene dada por

$$\begin{aligned}
 [N] = & (2N, 0) \oplus (2N-4, 2) \oplus \dots \oplus \begin{cases} (0, N) & N \text{ par} \\ (2, N-1) & N \text{ non} \end{cases} \\
 & \oplus (2N-6, 0) \oplus (2N-10, 2) \oplus \dots \oplus \begin{cases} (0, N-3) & N-3 \text{ par} \\ (2, N-1) & N-3 \text{ non} \end{cases} \\
 & \oplus (2N-12, 0) \oplus (2N-16, 2) \oplus \dots \\
 & \oplus \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

mientras que la correspondiente reducción de $SU(3)$ en representaciones de $O(3)$ queda definida por las relaciones¹⁰⁾

$$L = K, K+1, K+2, \dots, (K + \max(\lambda, \mu)), \tag{4.33}$$

donde

$$K = \text{entero} = \min(\lambda, \mu), \min(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1 \text{ ó } 0, \tag{4.34}$$

con la excepción del caso $k=0$, para el cual

$$L = \max(\lambda, \mu), \max(\lambda - \mu - 2, \dots, -1) \text{ ó } 0. \quad (4.35)$$

Si K_1, K_2, \dots, K_n son números cuánticos de Elliot ocurriendo en una representación (λ, μ) dada, tales que $K_1 < K_2 < K_3 \dots < K_n$, la base de Vergados será etiquetada por los números cuánticos $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ con $\chi_1 < \chi_2 \dots < \chi_n$, definidos por las relaciones

$$\begin{aligned} |(\lambda, \mu) \chi_1 L M\rangle &= |(\lambda, \mu) K_1 L M\rangle_0, \\ |(\lambda, \mu) \chi_2 L M\rangle &= x_{21} |(\lambda, \mu) K_1 L M\rangle_0 + x_{22} |(\lambda, \mu) K_2 L M\rangle_0, \\ &\vdots \\ |(\lambda, \mu) \chi_i L M\rangle &= \sum_{j=1}^i x_{ij} |(\lambda, \mu) K_j L M\rangle_0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde los estados $|(\lambda, \mu) K L M\rangle_0$ están relacionados con los estados de Elliot $|(\lambda, \mu) K L M\rangle$ a través de la convención de fase

$$|(\lambda, \mu) K L M\rangle_0 = i^{\lambda+2\mu} |(\lambda, \mu) K L M\rangle,$$

y donde los coeficientes x_{ij} se obtienen de exigir

$$\langle (\lambda, \mu) \chi_i L M | (\lambda, \mu) \chi_j L M \rangle = \delta_{ij}. \quad (4.37)$$

La secuencia de números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, será entonces la misma que K_1, K_2, \dots, K_n , pero por definición los valores de L contenidos en cada λ_i difieren de los que se asocian con K_i . Cuando L ocurre solamente una vez en una representación dada, entonces pertenece a la λ_i más pequeña; si ocurre dos veces pertenece a las dos λ_i 's más pequeñas, etc., con la excepción del caso en que $\lambda = 0$, donde L está restringido a valores con la misma paridad que λ .

La estructura de los espectros en la base de Vergados se ilustra en la figura 6, para el caso de $N=8$.³⁹⁾ Notamos la degeneración presente en las primeras dos bandas laterales, que en el modelo geométrico se identifican con bandas de vibración β y δ . Por otro lado, en este límite las vibraciones β y δ no son armónicas, como en el caso geométrico, i.e., la banda " 2β " (en nuestro caso $((2N-8, 4), K=0)$, no empieza a una energía igual al doble de la energía de la banda β $((2N-4, 2), K=0)$. Esto solo sucede en el límite donde $N \rightarrow \infty$. La diferencia fundamental sin embargo, reside en el número finito de estados predicho en el modelo, a diferencia del número infinito en el modelo geométrico.

Indicaremos ahora brevemente la forma en que se calculan los elementos de matriz del operador de transiciones cuadrupolares, ec. (4.1), en ciertos casos particulares.

El operador (4.1) puede reescribirse en la forma

$$T_m^{(2)} = \beta_2 \hat{Q}_m^{(2)} + \alpha \hat{Q}_m^{\prime(2)}, \quad (4.38)$$

Fig. 6

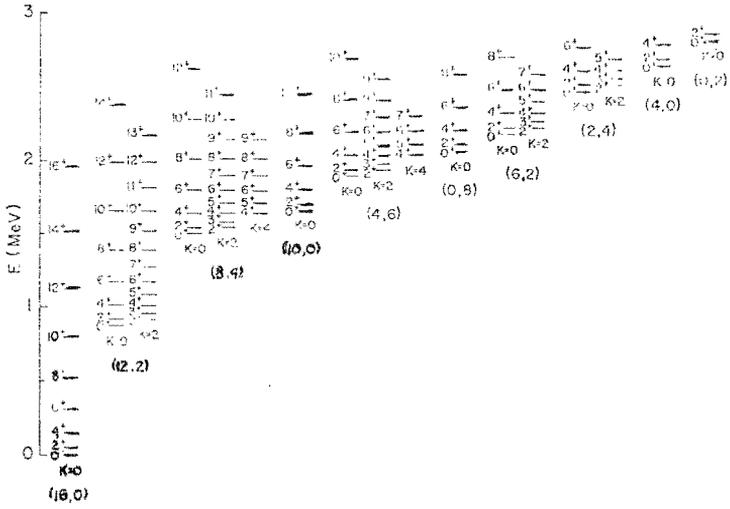
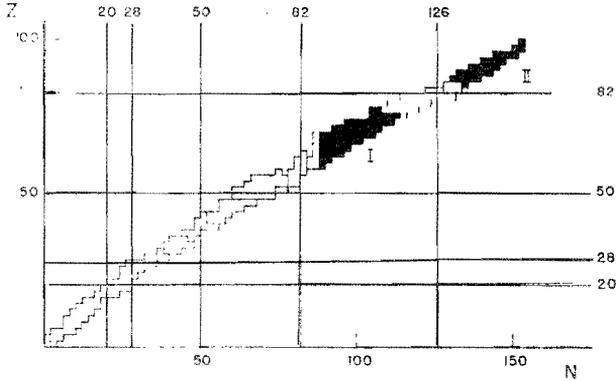


Fig. 7



donde \hat{Q}_m está dado por la ec. (3.12)

$$\hat{Q}_m = \sqrt{\frac{7}{3}} [\eta \times \xi]_m^2 + \sqrt{\frac{4}{3}} (\bar{\eta} \xi_m + \eta_m \bar{\xi}), \quad (3.12)$$

mientras que el operador \hat{Q}'_m está dado por

$$\hat{Q}'_m = [\eta \times \xi]_m^2, \quad (4.39)$$

de modo que

$$q_2 = \sqrt{\frac{3}{4}} \tilde{q}_2, \quad (4.40a)$$

$$\alpha = q'_2 - \sqrt{\frac{7}{4}} \tilde{q}_2. \quad (4.40b)$$

Si ahora consideramos el caso $q'_2 = \sqrt{\frac{7}{4}} \tilde{q}_2$, i.e. $\alpha = 0$, $T_m^{(2)} = q_2 \hat{Q}_m^{(2)}$, de modo que $T_m^{(2)}$ es proporcional a un generador de $SU(3)$, se puede realizar un cálculo analítico^{39,40)} de los elementos de matriz en la base de Vergados.

Aquí no estamos interesados en mostrar la forma explícita de estos resultados, ya que resulta bastante complicada, más aún en el caso de incluir el operador \hat{Q}'_m (ec. (4.39)), que debe tratarse por teoría de perturbaciones.³⁹⁾ En lugar de ello indicaremos el método de evaluación de los elementos de matriz de (4.1) en la base fundamental $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3)$, ya que a partir de ellos pueden construirse de inmediato los E. de M. correspondientes a cualquiera de los límites dinámicos del Hamiltoniano (3.4). Esto resulta evidente cuando recordamos que

son conocidos los paréntesis de transformación entre las diferentes cadenas.

Para lograr este objetivo basta aplicar el operador (4.1) a los estados $|N\nu\Lambda_S L M\rangle$ y escribir explícitamente el resultado de la acción de los operadores $\bar{\eta}$ y $\bar{\xi}$ sobre ellos, ecs. (3.34). Si después repetimos el análisis realizado en la sección anterior, reescribiendo η_m y ξ_m en términos de las variables α_m y Π_m y utilizamos el método de Hess ⁴⁴⁾ para la evaluación de los elementos de matriz de Π_m , se encuentra directamente la relación

$$\begin{aligned}
 & \langle N\nu'\Lambda't'L'M' | T_k^{(E_2)} | N\nu\Lambda t L M \rangle \\
 &= \tilde{q}'_2 \left\{ \left(\frac{(N-\nu')}{2} \right)^{1/2} (\nu'-\nu+1) \langle N\nu'\Lambda't'L'M' | \alpha_R | N\nu\Lambda t L M \rangle \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{(N-\nu'+1)}{2} \right)^{1/2} (\nu-\nu'+1) \langle N\nu'\Lambda't'L'M' | \alpha_R | N\nu\Lambda t L M \rangle \right\} \\
 &+ q'_2 (1 + (-)^{(\nu''-\nu')/2}) \langle N\nu'\Lambda't'L'M' | [\alpha \times \alpha]_R^2 | N\nu\Lambda t L M \rangle. \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

Como se puede ver en el apéndice A, los E. de M. que aparecen en (4.41) ya han sido programados.

Para concluir esta sección indicaremos las regiones de la tabla nuclear en que se manifiestan las simetrías asociadas con el límite rotacional del modelo.

Las Regiones Rotacionales

En la figura 7 se muestran las posibles regiones ro-

Fig. 8.

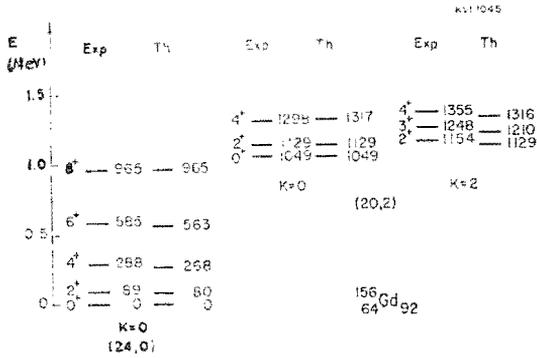


Fig. 9.

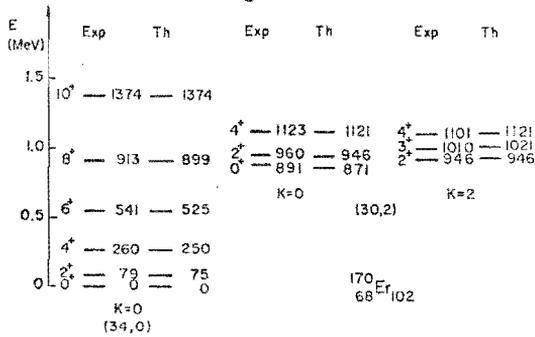
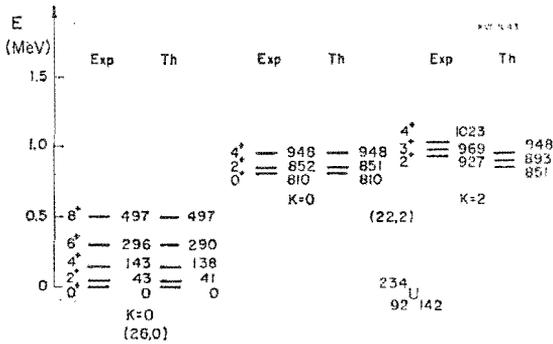


Fig. 10.



tacionales en la tabla nuclear. Una condición necesaria es que las energías en la banda del estado base se comporten como $L(L+1)$, pero para una simetría $SU(3)$ exacta las bandas " β " y " γ " deben además ser degeneradas. Esta última condición es difícil de verificar ya que estas bandas se encuentran por lo general en una región de energía que corresponde a estados de dos cuasipartículas, por lo que no es fácil distinguir estos estados de los de naturaleza colectiva.

Existen sin embargo algunos núcleos en que parecen cumplirse muy cercanamente estas condiciones, como puede verse en las figuras 8, 9 y 10. ³⁹⁾

Una prueba más estricta de esta simetría es la de satisfacer las reglas asociadas con los valores $B(E2)$ en este límite. Esto no ha sido realizado hasta el momento en forma sistemática, pero su implementación se planea para el futuro utilizando las técnicas discutidas arriba.

4.4 EL LIMITE DE "PAIRING" $G \cong O(6)$

Las simetrías discutidas hasta ahora han contado con una imagen geométrica asociada a ellas, i.e., $U(5)$ con los núcleos vibracionales anarmónicos y $SU(3)$ con los núcleos rotacionales axialmente simétricos y con bandas " β " y " γ " degeneradas.

Hemos visto también que a medida que el número total de bosones se incrementa la ϵ decrece haciendo que, por un lado, la importancia relativa de las interacciones entre bosones

s y d aumente, mientras que por otro lado una interacción como la cuadrupolar adquiere una importancia mayor.

Como se discutió en la sección anterior, los núcleos rotacionales hacen su aparición en regiones de la tabla nuclear en que ya sea el número de protones o de neutrones se encuentra cerca de la mitad de la distancia entre capas cerradas, lo que indica que la ϵ efectiva debe tender a cero en esa región. ¿Que es lo que sucede en regiones en que los neutrones o los protones ocupan la segunda mitad de la capa? En el modelo de capas estas regiones son tomadas en cuenta a través del formalismo de partículas y agujeros^{50,34)}, donde el número de "huecos" en la capa juega un papel equivalente al de las partículas fuera de capas en el caso normal.

En el MBI se procede de manera análoga, el número total de bosones se identifica entonces con el número de pares de partículas o agujeros a partir de la capa cerrada mas próxima.

Como veremos en esta sección el límite $O(6)$ parece ocurrir en forma aproximada en los casos en que los protones y neutrones ocupan distintos lados a partir de la mitad de sus respectivas capas.^{37,40)}

Como se discutió en el capítulo anterior, este caso corresponde a configuraciones en que no se conserva el spin F , de modo que es necesario considerarlo como una simetría aproximada y estudiar hasta que punto tiene validez.

Procedemos ahora a discutir los espectros característicos, así como algunas de las propiedades asociadas con este límite.

En el capítulo III se introdujo el operador de Casimir de segundo orden del grupo $O(6)$, ec. (3.15)

$$\hat{L}^2 = \hat{N}(\hat{N}+4) - \left(\sum_m \eta_m \eta^m + \bar{\eta}^2 \right) \left(\sum_m \xi_m \xi^m + \bar{\xi}^2 \right). \quad (3.15)$$

El último operador en (3.15) es proporcional al llamado "operador de pairing" (apareamiento) del grupo $O(6)$

$$\hat{P}_6 = \frac{1}{4} \left(\sum_{\ell m} \eta_{\ell m} \eta^{\ell m} \right) \left(\sum_{\ell m} \xi_{\ell m} \xi^{\ell m} \right) \quad \ell = 0, 2, \quad (4.42)$$

que cuenta el número total de bosones acoplados por pares a $L=0$.

Es conveniente utilizar (4.42) en lugar de (3.15) en la definición del límite $G \equiv O(6)$. Así, el Hamiltoniano asociado a él está dado por la expresión

$$H_{O(6)} = k_1 \hat{P}_6 + k_2 \hat{\Lambda}^2 + k_3 \hat{L}^2, \quad (4.43)$$

donde $\hat{\Lambda}^2$ y \hat{L}^2 están dados por las relaciones (3.14) y (2.42b) respectivamente.

Claramente, utilizando las ecuaciones (2.24), (3.29b) y (4.42), el problema de eigenvalores se resuelve directamente, encontrándose

$$H_{O(6)} |N p \Lambda t L M\rangle = \left\{ \frac{1}{4} k_1 (N-p)(N+p+4) + k_2 \Lambda(\Lambda+3) + k_3 L(L+1) \right\} |N p \Lambda t L M\rangle, \quad (4.44)$$

donde las $|N\rho\Lambda tLM\rangle$ denotan a los estados discutidos en el capítulo anterior con la excepción de que se considera que ya han sido ortonormalizados, de modo que hemos escrito el índice t en lugar de s .

De la discusión de estos estados y en particular de las ecuaciones (3.45)-(3.47), vemos que el índice ρ puede tomar los valores

$$\rho = N, N-2, N-4, \dots \text{ o } 0 \text{ o } 1. \quad (4.45a)$$

mientras que Λ satisface

$$\Lambda = \rho, \rho-1, \rho-2, \dots \text{ o } 0. \quad (4.45b)$$

Los estados asociados al Hamiltoniano (4.43) están por tanto clasificados de acuerdo a la reducción

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$$

$$N \quad \rho \quad \Lambda \quad (t) \quad L \quad M$$

con los números cuánticos indicados. El rango de variación de los demás índices ya fué discutido en conexión con la cadena $U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$.

El espectro de (4.44) se ilustra en la figura 11, para valores positivos de k_1 , k_2 y k_3 . Consiste en secuencias repetidas de los estados 0^+ ; 2^+ ; 4^+ ; 2^+ ; correspondientes a los diversos valores de $\rho = N, N-2, N-4, \dots$. Dentro de cada banda se observan distintos niveles, correspondientes a los valores de Λ , t y L . El efecto de k_1 positivo es el de colocar a la representación $\rho = \rho_{\max} = N$ con energía mínima, mientras que k_2

positivo implica el orden $0_1^+, 2_1^+, 4_1^+ \dots$, en cada banda. Por último, el valor positivo de k_3 implica en este ejemplo que el estado 2_2^+ queda por debajo del 4_1^+ . Hacemos notar que si k_3 es cero, los espaciamientos de energía entre estados con el mismo valor de J siguen el patrón $\Lambda(\Lambda+3)$, que es idéntico al del modelo de Wilets y Jean^{51,52)} para núcleos con inestabilidad γ , de modo que este modelo representa el análogo geométrico mas cercano a este límite.

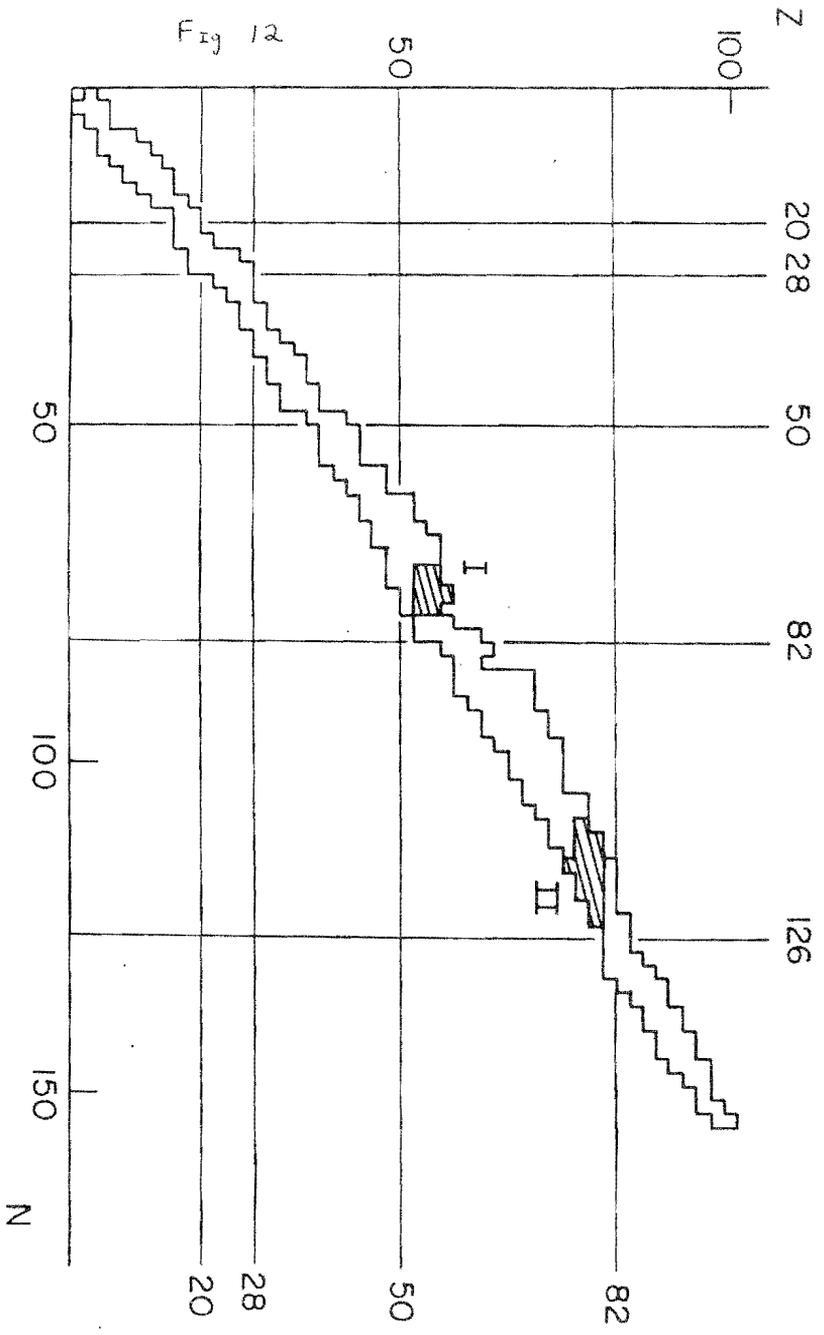
El cálculo de elementos de matriz del operador cuadrupolar eléctrico, ec. (4.1), se simplifica mediante el uso de los paréntesis de transformación entre las cadenas $U(6) \supset O(6)$ y $U(6) \supset U(5)$ que se discuten en el apéndice B. Si en particular nos restringimos al operador

$$T_R^{(E_2)} = \tilde{q}_2 (\eta_R \bar{\xi} + \bar{\eta} \xi_R) , \quad (4.44)$$

que es un generador del grupo $O(6)$ ⁵³⁾, es posible encontrar valores analíticos para la transición entre bandas⁴⁰⁾, utilizando los resultados de la sección 4.2. El caso general puede analizarse a su vez numéricamente mediante la diagonalización de (4.43) en la base $|N\nu\Lambda tLM\rangle$ y el uso de la ecuación (4.41).

Las Regiones del Límite $O(6)$

En la figura 12 se muestran las regiones en la tabla nuclear donde se han encontrado núcleos que parecen seguir la sistemática



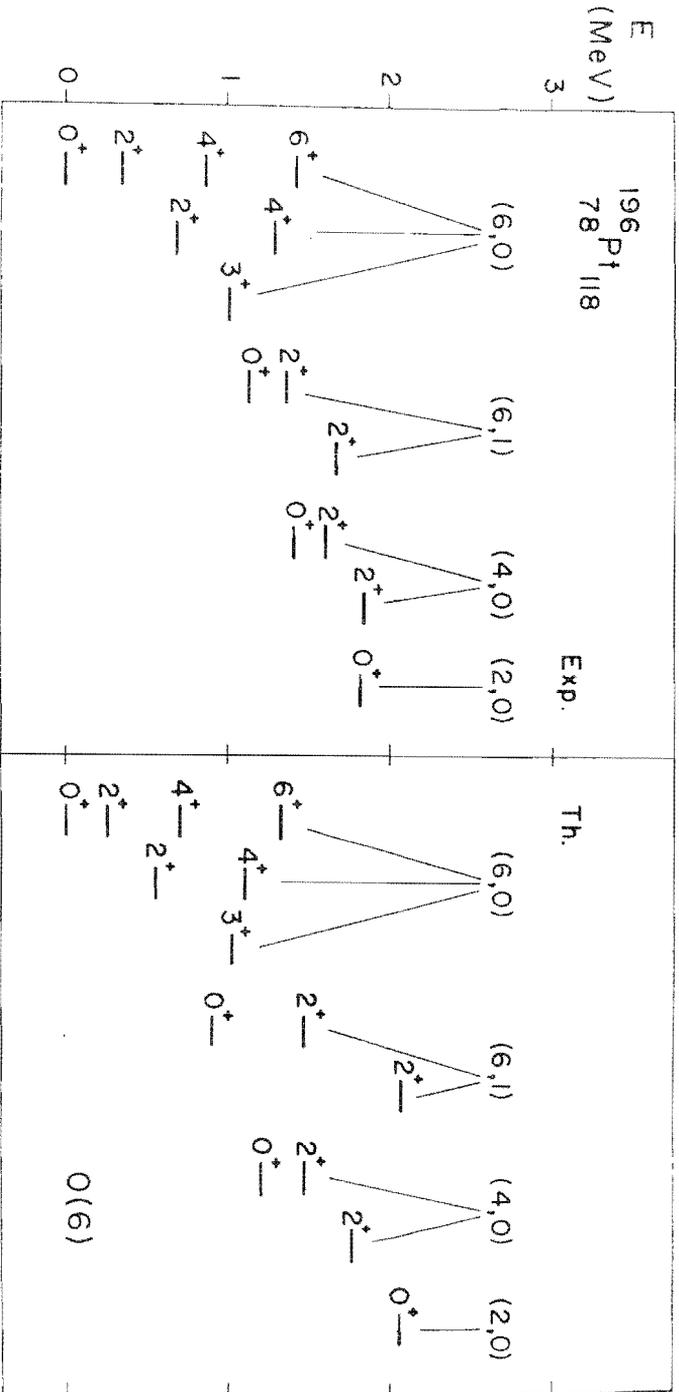
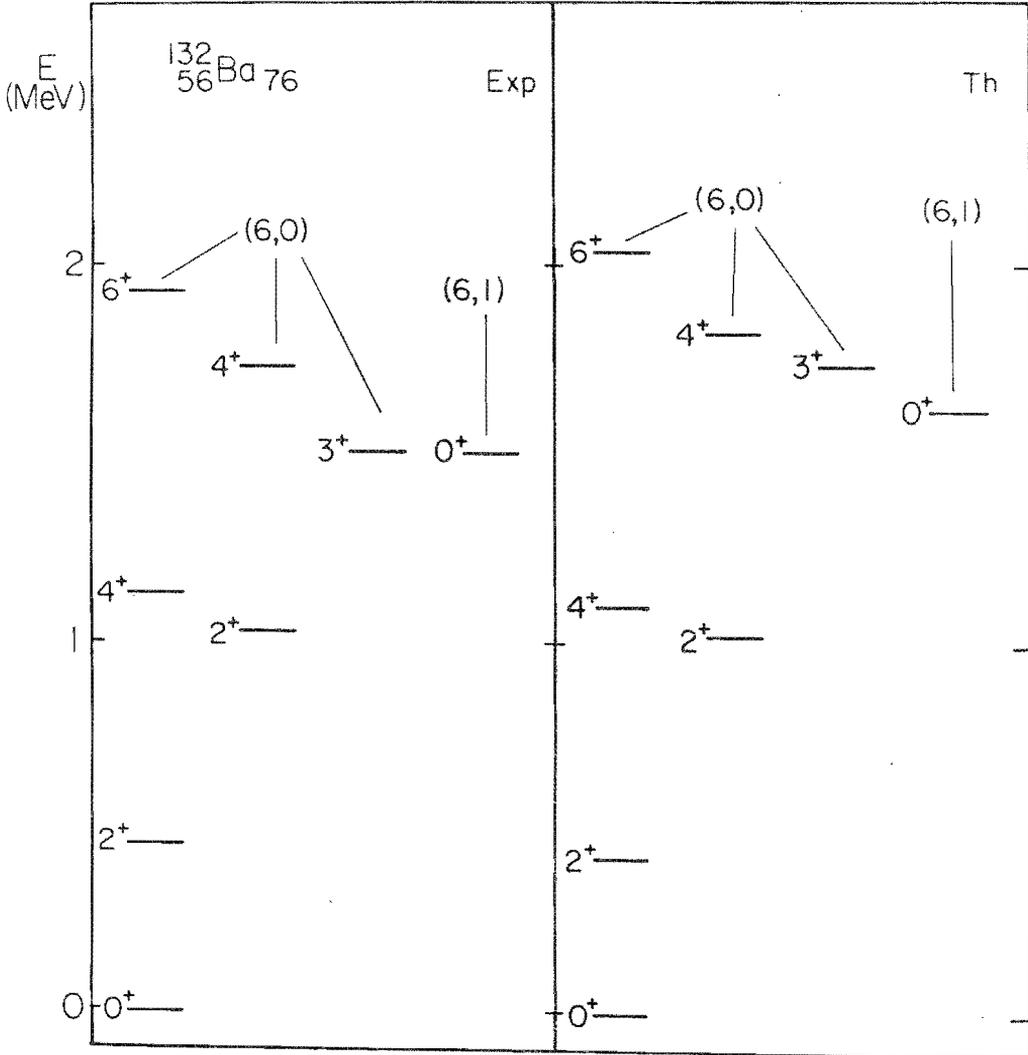


Fig 13

Fig 19



asociada a este límite. En estos núcleos el número de neutrones ocupa las regiones finales de las capas 50-82 y 82-126.

Dos ejemplos de espectros con simetría $O(6)$ se muestran en las figuras 13 y 14. Este tipo de espectros se observan también en isótopos de X_e , C_e y O_s , con número de neutrones en el rango 74-78 y 114-120.

De nuevo queremos enfatizar que hasta el momento no han sido realizados cálculos detallados en esta región utilizándose el Hamiltoniano completo del modelo, así como el operador (4.1) de transiciones cuadrupolares. Sin embargo, es claro que los tres límites discutidos en este capítulo se manifiestan de manera aproximada y que es importante realizar cálculos más detallados en todas estas regiones, con el objeto de estudiar el grado de aplicabilidad del modelo.

En el siguiente capítulo se muestra un estudio encaminado en esa dirección, donde se utiliza el Hamiltoniano completo del modelo para estudiar la transición entre los límites vibracional y rotacional en los isótopos del Samario y Gadolinio.

CAPITULO VAPLICACIONES DEL MODELO DE BOSONES CON
INTERACCION A REGIONES DE TRANSICION.

5.1

En el capítulo anterior se analizaron las propiedades de los tres límites exactos contenidos en el Hamiltoniano del MBI. Se mostró ahí que existen regiones nucleares específicas que parecen satisfacer de manera aproximada las condiciones impuestas por las diferentes simetrías dinámicas. Sin embargo, solamente algunos núcleos se aproximan lo suficiente a las predicciones en estos límites como para considerar que efectivamente son ejemplos de ellos.

La gran diversidad de espectros y otras propiedades nucleares en las regiones de transición, hace necesario un análisis que involucre al Hamiltoniano completo del modelo, ec. (3.4), de modo que pueda analizarse la aplicabilidad y rango de validez de la aproximación implícita en éste.

El cálculo de perturbaciones alrededor de los límites discutidos en el capítulo IV permite en principio extender el análisis a núcleos vecinos, con espectros que presentan desviaciones pequeñas a las de simetría exacta. Sin embargo este camino presenta el inconveniente de no permitir la descripción de la gran mayoría de los núcleos en las regiones de transición, aunado esto a la forma arbitraria en que se debe seleccionar el operador de perturbación⁵⁴⁾.

En este capítulo hacemos uso de los resultados obtenidos en el capítulo III para desarrollar un programa de ajuste automático de parámetros que extiende grandemente las posibilidades de aplicación del modelo. Posteriormente aplicamos este programa a la región transicional de los isótopos de Sm y Gd .

5.2 El Método de Ajuste Automático.

En el modelo de capas del núcleo es posible realizar cálculos de niveles de energía una vez que un conjunto de órbitas de partícula independiente ha sido seleccionado y las posibles restricciones en la distribución de nucleones activos en estas órbitas han sido impuestas. Para este tratamiento es necesario contar con los valores de las energías de partícula independiente y elementos de matriz de dos cuerpos, que en muchos casos no es posible conocer de antemano. El problema se resuelve entonces mediante el procedimiento de considerar estos niveles y elementos de matriz como parámetros que pueden determinarse a través del ajuste de los datos experimentales.

Este método puede aplicarse igualmente en el caso del MBI si consideramos como parámetros ajustables del modelo a las interacciones de dos bosones, ec. (4.36), junto con las energías ϵ_s y ϵ_d asociadas con los bosones s y d . Sin embargo, ya que los límites de simetría exacta discutidos en el capítulo anterior están asociados a ciertos operadores que son combinaciones lineales de las interacciones entre bosones, es de más utilidad

reescribir el Hamiltoniano (3.4) en términos de dichos operadores utilizando las ecuaciones (3.56), y determinar los parámetros que aparecen en la expresión siguiendo el mismo método.

En ese caso los parámetros a determinar resultan ser combinaciones lineales de aquellos relacionados con la interacción entre bosones, con la ventaja de que los resultados que se obtienen por este procedimiento se correlacionan con los límites discutidos en el capítulo anterior, i.e., si se trata de una región de transición entre núcleos vibracionales y rotacionales, etc.

Describiremos a continuación el método de ajuste en general⁵⁵⁾ y posteriormente reescribiremos el Hamiltoniano del modelo de la manera indicada, para mostrar la manera en que se aplica al procedimiento en nuestro caso.

Construcción de las Ecuaciones Lineales

Partimos de la ecuación de eigenvalores para el Hamiltoniano

$$H \Psi = E \Psi \quad (5.1)$$

donde cada eigenvector Ψ_p , correspondiente al eigenvalor E_p , puede desarrollarse en términos de los estados de cierta base, ϕ_p

$$\Psi_p = a_{1p} \phi_1 + a_{2p} \phi_2 + \dots + a_{np} \phi_n. \quad (5.2)$$

La ecuación (5.1) puede entonces reescribirse en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1m} \\ H_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ H_{m1} & \dots & \dots & H_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{pmatrix} = E_p \begin{pmatrix} \delta_{1p} \\ \delta_{2p} \\ \vdots \\ \delta_{mp} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$i = 1, \dots, m$

Para ello, por supuesto, es necesario conocer los elementos de matriz $H_{R\mathcal{L}} = H_{\mathcal{L}R}^*$ de H en la base de los ϕ_j .

Si denotamos ahora a la matriz de los eigenvectores a_{i_p} por la matriz ortogonal A , podemos reescribir (5.3) como

$$\langle A^{-1} H A \rangle_{p'p} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m a_{j p'} H_{ji} a_{i p} = E_p \delta_{p'p}, \quad (5.4)$$

y ya que H_{ij} es una combinación lineal de matrices (en nuestro caso de los operadores asociados con los distintos grupos)

$$H_{ij} = \sum_{r=1}^{N_x} C_{ij}^r x_r, \quad (5.5)$$

donde C_{ij}^r representa las matrices mencionadas, x_r los parámetros que queremos ajustar y N_x el número total de éstos. Substituyendo (5.5) en (5.4)

$$\sum_{j=1}^m a_{j p'} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{r=1}^{N_x} C_{ij}^r x_r \right) a_{i p} = E_p, \quad (5.6)$$

y un rearrreglo de (5.6) conduce a un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas en los parámetros x_r , dado por

$$\sum_{r=1}^{N_x} b_r^{(p)} x_r = E_p \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad (5.7)$$

donde

$$b_r^{(p)} = \sum_{j=1}^n a_{jp} \sum_{i=1}^n a_{ip} C_{ij}^r \quad (5.8)$$

Si ahora el Hamiltoniano se evalúa con un conjunto de parámetros que constituyen la "mejor suposición", puede ser diagonalizado y sus correspondientes E_p y a_{ij} determinados. La ecuación (5.8) determinará entonces el conjunto inicial de coeficientes $b_r^{(p)}$ para usarse en (5.7). Substituyendo los parámetros originales conduce desde luego a los mismos eigenvalores E_p obtenidos en la diagonalización. No se puede esperar que los eigenvalores E_p reproduzcan el espectro experimental, de modo que sustituimos ahora el lado derecho de (5.7) por las correspondientes energías experimentales $E_{exp}^{(p)}$ y consideramos a los x_r como parámetros desconocidos. Encontramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{r=1}^{N_x} b_r^{(p)} x_r = E_{exp}^{(p)} \quad \text{con} \quad p = 1, 2, \dots, n, \quad (5.9)$$

donde los coeficientes $b_r^{(p)}$ están dados por la ecuación (5.8).

Se ha supuesto hasta este momento que cada eigenvalor puede ser identificado con una energía experimental. De hecho en general solo algunos de los eigenvalores más bajos de una matriz dada pueden ser comparados con las energías determinadas experimentalmente, de modo que de las n ecuaciones (5.9) solo un conjunto limitado puede utilizarse para la determinación de los parámetros x_r .

En el caso de que consideremos un conjunto de núcleos

vecinos, el número total de parámetros N_x es el mismo, pero el número de ecuaciones que deben satisfacerse aumenta apreciablemente. Para tomar en cuenta estas consideraciones substituiremos el índice p (que etiqueta los estados de la matriz) por el índice q que etiqueta al conjunto completo de ecuaciones

$$\sum_{\tau=1}^{N_x} b_{\tau}^{(q)} x_{\tau} = E_{\text{exp}}^{(q)} \quad \text{con } q=1,2,\dots, N_q. \quad (5.10)$$

Finalmente, si solo estamos interesados en ajustar las energías de excitación a partir del estado base, i.e., si no estamos interesados en las energías de amarre nucleares, (5.10) se puede modificar restando la ecuación correspondiente al estado base, $q = q_0$ obteniéndose

$$\sum_{\tau=1}^{N_x} (b_{\tau}^{(q)} - b_{\tau}^{(q_0)}) x_{\tau} = E_{\text{exp}}^{(q)} - E_{\text{exp}}^{(q_0)}. \quad (5.11)$$

El lado derecho de (5.11) denota entonces la energía de excitación experimental del nivel q .

Debe enfatizarse que para encontrar una solución de (5.11) que tenga sentido a través de un procedimiento de mínimos cuadrados, la condición $N_q > N_x$ debe satisfacerse.

El Ajuste por Mínimos Cuadrados.

Dado el sistema de ecuaciones (5.10) (o equivalentemente el sistema (5.11)), deseamos determinar los parámetros

x_{τ} de modo que las sumas del lado izquierdo se aproximen a

las energías experimentales lo más posible. En el método de mínimos cuadrados se minimiza la función

$$F = \sum_{q=1}^{Nq} \left(\sum_{i=1}^{Nx} b_i^{(q)} x_i - E_{\text{exp}}^{(q)} \right)^2 \quad (5.12)$$

como función de los parámetros x_i (55), por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x_r} = \sum_{q=1}^{Nq} \left(\sum_{i=1}^{Nx} b_i^{(q)} x_i - E_{\text{exp}}^{(q)} \right) b_r^{(q)} = 0, \quad (5.13)$$

$r = 1, 2, \dots, Nx,$

o escrito de otro modo

$$\sum_{i=1}^{Nx} \sum_{q=1}^{Nq} b_r^{(q)} b_i^{(q)} x_i = \sum_{q=1}^{Nq} b_r^{(q)} E_{\text{exp}}^{(q)}. \quad (5.14)$$

$r = 1, 2, \dots, Nx.$

La ecuación (5.14) representa un sistema de N_x ecuaciones lineales no-homogeneas para los N_x parámetros $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{Nx}$, que puede resolverse para encontrar un nuevo conjunto de parámetros $x_r^{(1)}$.

El Proceso de Iteración.

Utilizando el nuevo conjunto (supuestamente mejorado) de parámetros $x_r^{(1)}$ se calculan nuevamente los elementos de matriz del Hamiltoniano, que tras diagonalizarse conducen a un nuevo conjunto de eigenvectores \bar{a}_{Rq} . Con ellos un nuevo conjunto de ecuaciones (5.10) es construido con los nuevos coeficientes $b_r^{(q)}$, que conducen por su parte a nuevos parámetros $x_r^{(2)}$, a través del proceso de mínimos cuadrados. El procedimiento debe repetirse hasta obtener convergencia, i.e.,

hasta encontrar que $\chi_r^{(n)} \leq \chi_r^{(n-1)}$.

El número de iteraciones requerido depende desde luego de el conjunto original de parámetros χ_r seleccionados así como de la diferencia $(N_q - N_x)$ entre el número de niveles y parámetros.

Una medida de la precisión lograda en el ajuste es la desviación RMS definida por la relación

$$\text{RMS} = \left(\sum_{i=1}^{N_q} (E_{\text{cal}}^{(i)} - E_{\text{exp}}^{(i)}) / (N_q - N_x) \right)^{1/2}, \quad (5.15)$$

donde $E_{\text{cal}}^{(i)}$ y $E_{\text{exp}}^{(i)}$ denotan la energía calculada y experimental del nivel i , respectivamente.

En ocasiones no se obtiene convergencia, debido generalmente a que algunos de los parámetros no son bien determinados por los datos experimentales. Estos parámetros pueden identificarse como aquellos que tienen grandes variaciones durante el proceso iterativo. En este respecto, existe un método⁵⁶⁾ llamado DCM (ó metodo de la matriz diagonal de correlación), que permite conocer cuales combinaciones particulares de los parámetros son los de mayor importancia en la determinación de los espectros.

Introduciendo la notación $B_{qi} \equiv b_i^{(q)}$ ($i = 1 \dots N_x$ y $q = 1 \dots N_q$), X el vector columna de componentes χ_i , y E_{exp} el vector columna con componentes $E_{\text{exp}}^{(q)}$, la ecuación (5.14) puede escribirse como

$$B^T B X = B^T E_{\text{exp}}, \quad (5.16)$$

y denotando a la matriz cuadrada $B^T B \equiv F$,

$$\sum_{i=1}^{N_x} F_{ri} x_i = \sum_{q=1}^{N_q} B_{rq}^T E_{\text{exp}}^{(q)}, \quad (5.17)$$

donde

$$F_{ri} = \sum_{q=1}^{N_q} B_{rq}^T B_{qi}. \quad (5.18)$$

Si denotamos por $v^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, N_x$) a los eigenvectores de F y f_k a los correspondientes eigenvalores, se satisfacen entonces las relaciones

$$\sum_{ri} v_r^{(k)} F_{ri} v_i^{(l)} = f_k \delta_{kl}, \quad (5.19)$$

$$\sum_{\ell} v_i^{(\ell)} v_j^{(\ell)} = \delta_{ij}. \quad (5.20)$$

El lado izquierdo de (5.17) puede reescribirse con la ayuda de (5.20) como

$$\sum_i F_{ri} x_i = \sum_i F_{ri} \sum_j \sum_{\ell} v_i^{(\ell)} v_j^{(\ell)} x_j, \quad (5.21)$$

y multiplicando la ecuación (5.17) por $\sum_r v_r^{(k)}$ y usando (5.19) encontramos

$$\begin{aligned} \sum_{rij\ell} v_r^{(k)} F_{ri} v_i^{(\ell)} v_j^{(\ell)} x_j &= f_k \sum_j v_j^{(k)} x_j \\ &= \sum_r v_r^{(k)} \sum_q B_{rq}^T E_{\text{exp}}^{(q)}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

i.e.,

$$f_k y_k = \sum_r v_r^{(k)} \sum_q B_{rq}^T E_{\text{exp}}^{(q)}, \quad (5.23)$$

donde

$$y_k = \sum_j v_j^{(k)} x_j \quad (5.24)$$

Las y_k representan combinaciones particulares de los parámetros ajustables. Los conjuntos $\{x_r\}$ y $\{y_k\}$ son equivalentes para la determinación del Hamiltoniano. Puede mostrarse además que el parámetro y_{k_1} , correspondiente al máximo eigenvalor f_{k_1} es el mejor determinado por el conjunto original de ecuaciones lineales (5.17). Esto resulta de la matriz de correlación de la distribución de probabilidad de los parámetros⁵⁶⁾. Del mismo modo, el eigenvalor siguiente en magnitud, f_{k_2} , estará asociado con el segundo parámetro mejor determinado y_{k_2} , y así sucesivamente. De este modo se pueden encontrar las combinaciones más importantes de los parámetros originales para la determinación del espectro.

5.3 Programa de Ajuste en el MBI.

Para aplicar el método discutido en la sección anterior reescribimos el Hamiltoniano (3.4) utilizando las relaciones (3.56) como

$$H = \epsilon_s \hat{n}_s + \epsilon_d \hat{n}_d + k_1' \hat{n}_d^2 + k_2' \hat{n}_d \hat{N} + k_3' \hat{N}^2 + k_4' \hat{L}^2 + k_5' \hat{\Lambda}^2 + k_6' \hat{P}_6 + k_7' \hat{Q}^2 \quad (5.25)$$

$$Q^2(\text{propietad}) \xrightarrow{\text{eigenval}}^{106} \frac{1}{2} (C(L, L) - \frac{3}{4} L(L+1))$$

En (5.25) se ha preferido utilizar \hat{P}_6 en lugar del operador de Casimir \hat{L}^2 de $O(6)$, aprovechando las expresiones (3.15) y (4.42) que los relacionan.

Ya que estaremos interesados en el ajuste de energías de excitación podemos simplificar la expresión (5.25), escribiendo $\epsilon_s \hat{n}_s = \epsilon_s (\hat{N} - \hat{n}_d)$ y eliminando todos los términos que son solamente función de \hat{N} (ya que solo contribuyen a la energía de amarre del núcleo para N fijo),

$$H = \epsilon \hat{n}_d + k_2 \hat{n}_d^2 + k_3 \hat{n}_d \hat{N} + k_4 \hat{L}^2 + k_5 \hat{\Lambda}^2 + k_6 \hat{P}_6 + k_7 \hat{Q}^2, \quad (5.26)$$

donde $\epsilon = \epsilon_d - \epsilon_s$.

Si utilizamos la base $|N \nu \Lambda t L M\rangle$ asociada a la cadena $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$, en la diagonalización de H , es claro que solamente \hat{P}_6 y \hat{Q}^2 son no-diagonales y podemos utilizar las ecuaciones (3.37), (3.51) y (3.53) en la evaluación de dichos elementos de matriz.

Usando las relaciones (3.15) y (3.50b) llegamos a la relación

$$H_{\beta_2 \lambda_2 t_2 L}^{N L} \equiv \langle N \nu_2 \Lambda_2 t_2 L | H | N \nu_1 \Lambda_1 t_1 L \rangle$$

$$= \left[\epsilon \nu_1 + k_2 \nu_1^2 + k_3 \nu_1 N + k_4 L(L+1) + k_5 \Lambda_1(\Lambda_1 + 3) + k_6 \left\{ \frac{1}{4} N(N+4) - \frac{1}{4} \Lambda_1(\Lambda_1 + 3) - \frac{1}{4} \nu_1(2N+1-2\nu_1) - \frac{\pi}{4} (N-\nu_1) \right\} + k_7 \left\{ \frac{-2}{3} \Lambda_1(\Lambda_1 + 3) - \frac{4}{3} \nu_1(2N+1-2\nu_1) - \frac{2C}{3} (N-\nu_1) + \frac{1}{6} L(L+1) - \frac{14}{3} \nu_1^2 - \frac{22}{3} \nu_1 + \frac{2}{3} N(2\nu_1 + 5) \right\} \right] \delta_{\nu_2 \nu_1} \delta_{\Lambda_2 \Lambda_1} \delta_{t_2 t_1}$$

$$+ k_2 \left[\frac{3\sqrt{2}}{q} \langle \nu_2 \Lambda_2 t_2 L | \{ 3, 0 \} | \nu_1 \Lambda_1 t_1 L \rangle (N-1)^{1/2} \right]$$

$$\times \left(\delta_{\nu_2, \nu_1+1} \left(\int_{\Lambda_2, \Lambda_1+3} + \int_{\Lambda_2, \Lambda_1+1} + \int_{\Lambda_2, \Lambda_1-1} + \int_{\Lambda_2, \Lambda_1-3} \right) \right) \quad (5.27)$$

donde f_1 y f_2 denotan indices que dependen de (ν_1, Λ_1, t_1) y (ν_2, Λ_2, t_2) respectivamente. En la última parte de (5.27) t_1 y t_2 toman todos los valores posibles permitidos por las relaciones (2.37) y (2.38). (Ver también la relación (4.12)).

La ecuación (5.27) describe los elementos de matriz de H en el caso $f_2 \geq f_1$. Esto es suficiente ya que la matriz de H es simétrica.

Es claro que el método de la sección anterior debe aplicarse por separado a cada momento angular L en $H_{f_2 f_1}^{NL}$ y, en el caso de ajuste simultáneo de varios nucleos, la matriz B en (5.10) se construye de acuerdo al siguiente diagrama

$$B \equiv (b_{ry})$$

$$L = L_0 \left(\begin{array}{cccc} \left. \begin{array}{l} b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13} \dots b_{1N_x} \\ b_{21} \quad b_{22} \quad b_{23} \dots b_{2N_x} \\ \vdots \end{array} \right\} & & & \left. \begin{array}{l} \text{núcleo } N_1 \end{array} \right\} \\ \text{---} & & & \\ \left. \begin{array}{l} b_{j1} \quad b_{j2} \dots b_{jN_x} \\ \vdots \\ b_{k1} \quad b_{k2} \dots b_{kN_x} \\ \vdots \end{array} \right\} & & & \left. \begin{array}{l} \text{núcleo } N_2 \end{array} \right\} \\ \vdots & & & \vdots \\ \left. \begin{array}{l} b_{l1} \quad b_{l2} \dots b_{lN_x} \\ \vdots \\ b_{m1} \quad b_{m2} \dots b_{mN_x} \end{array} \right\} & & & \left. \begin{array}{l} \text{núcleo } N_i \end{array} \right\} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 b_{n1} \quad b_{n2} \dots \dots \dots b_{nN_x} \\
 b_{p1} \quad b_{p2} \dots \dots \dots b_{pN_x} \\
 \vdots \\
 b_{q1} \quad b_{q2} \dots \dots \dots b_{qN_x} \\
 b_{r1} \quad b_{r2} \dots \dots \dots b_{rN_x} \\
 \vdots \\
 b_{t1} \quad b_{t2} \dots \dots \dots b_{tN_x} \\
 b_{u1} \quad b_{u2} \dots \dots \dots b_{uN_x} \\
 \vdots \\
 b_{v1} \quad b_{v2} \dots \dots \dots b_{vN_x} \\
 b_{Nq1} \quad b_{Nq2} \dots \dots \dots b_{NqN_x}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{núcleo } N_1 \\
 \\
 \text{núcleo } N_i \\
 \vdots \\
 \text{núcleo } N_1 \\
 \\
 \text{núcleo } N_i
 \end{array}
 \end{array} \quad (5.28)$$

El diagrama (5.28) muestra la manera de construir la matriz B cuando ajustamos simultáneamente N_q niveles experimentales con s diferentes momentos angulares, pertenecientes a i núcleos.

Los programas correspondientes se encuentra en el apéndice D.

5.4 La Transición de Fase en los Isótopos del Sm y Gd.

Como una aplicación de las técnicas matemáticas y programas de cómputo discutidas en este trabajo, mostraremos en esta sección los resultados obtenidos recientemente para los isótopos del S_m^{12} y G_d haciendo uso del Hamiltoniano (5.26).

En el caso del S_m , Scholten, Iachello y Arima han discutido en un artículo reciente⁵⁴⁾ la transición en los espectros experimentales partiendo de un Hamiltoniano truncado,

$$H = \epsilon \hat{n}_d - \kappa \hat{Q}^2 - \kappa' \hat{L}^2 \quad (5.29)$$

propuesto por razones de simplicidad. Posteriormente consideran explícitamente la dependencia de los parámetros en el número total de bosones N y desarrollan alrededor de un punto dado N_0 , i.e.,

$$\epsilon(N) = \epsilon(N_0) + \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial N} \right|_{N=N_0} (N - N_0) + \dots, \quad (5.30)$$

e igualmente para κ y κ' . El siguiente paso que siguen estos autores es escribir N como $N = N_\pi + N_\nu$, donde $N_\pi(N_\nu)$ indica el número de bosones formados por pares de protones (neutrones), y utilizando la relación (5.30) reescriben el Hamiltoniano (5.29) en la forma

$$H = (\tilde{\epsilon}_c - \Theta N_\nu) \hat{n}_d - \kappa \hat{Q}^2 - \kappa' \hat{L}^2, \quad (5.31)$$

donde

$$\tilde{\epsilon}_c = \epsilon(N_0) - \epsilon N_\pi, \quad (5.32a)$$

$$\Theta = - \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial N} \right|_{N=N_0} \quad (5.32b)$$

A pesar de que el ajuste logrado en 36 niveles de paridad positiva para los isótopos par-par desde el ^{146}Sm al ^{154}Sm es bastante bueno (con un RMS ≈ 250 KeV) es claro que (5.31) es un Hamiltoniano un tanto ad-hoc ya que :

a) No está justificado considerar solamente a los operadores

\hat{N}_d , \hat{Q}^2 y \hat{L}^2 en (5.31), ya que como hemos visto el Hamiltoniano completo del MBI está dado por la ecuación (5.26).

b) El término de renormalización de la ϵ , $-\Theta N_\nu$ no está bien justificado, ya que en ese caso no hay razón para no aplicar el mismo criterio a K y K' .

El análisis matemático realizado en el capítulo III de este trabajo muestra que la suposición (5.3) es innecesaria, ya que el término $\hat{N}_d \hat{N}$ aparece en la expresión más general del Hamiltoniano, ec. (5.25) donde

$$\hat{N}_d \hat{N} = \sum_m \eta_m \xi^m + \sum_L (2L+1)^{1/2} [[\eta \times \eta]^L \times [\xi \times \xi]^L]^0 + \sqrt{5} [[\eta \times \eta]^2 \times [\xi \times \xi]^2]^0. \quad (5.33)$$

Por otro lado, la aplicación del programa general de ajuste a los isótopos del Samario nos permite prescindir de una suposición ad-hoc del tipo (5.29) para el Hamiltoniano apropiado

do en esta región.

Partiendo del Hamiltoniano (5.26) encontramos que varios de los operadores presentes parecen no jugar un papel relevante en el ajuste. En particular k_4 y k_6 tienen un comportamiento oscilatorio como el discutido en la sección anterior y k_2 y k_5 tienden a valores muy pequeños. Aunque el método DCM no se ha implementado para determinar con precisión el papel de estas interacciones, las consideraciones de esa sección indican que es posible despreciarlas. Esto se corrobora al encontrar que el RMS se mantiene esencialmente invariante cuando consideramos que el Hamiltoniano adecuado para los isótopos del S_m está dado por la expresión

$$H = \epsilon \hat{N}_d + k_3 \hat{N}_d \hat{N} + k_7 \hat{Q}^2, \quad (5.34)$$

que es muy parecido a (5.31), con la excepción del término $K' \hat{L}^2$ que nosotros encontramos irrelevante.

El Hamiltoniano (5.34) ajusta los 36 niveles en los isótopos del S_m con una muy buena precisión, como puede verse en la Fig. (15). La desviación RMS es de solo 100 KeV. El mejor ajuste se logra para los valores

$$\epsilon = 2.05 \text{ MeV} \quad k_3 = -.156 \text{ MeV} \quad k_7 = -9.46 \text{ KeV} \quad (5.35)$$

Es sorprendente que un Hamiltoniano con solo tres parámetros logre reproducir el comportamiento de seis isótopos con tanta precisión, incluyendo la transición de espectros vi-

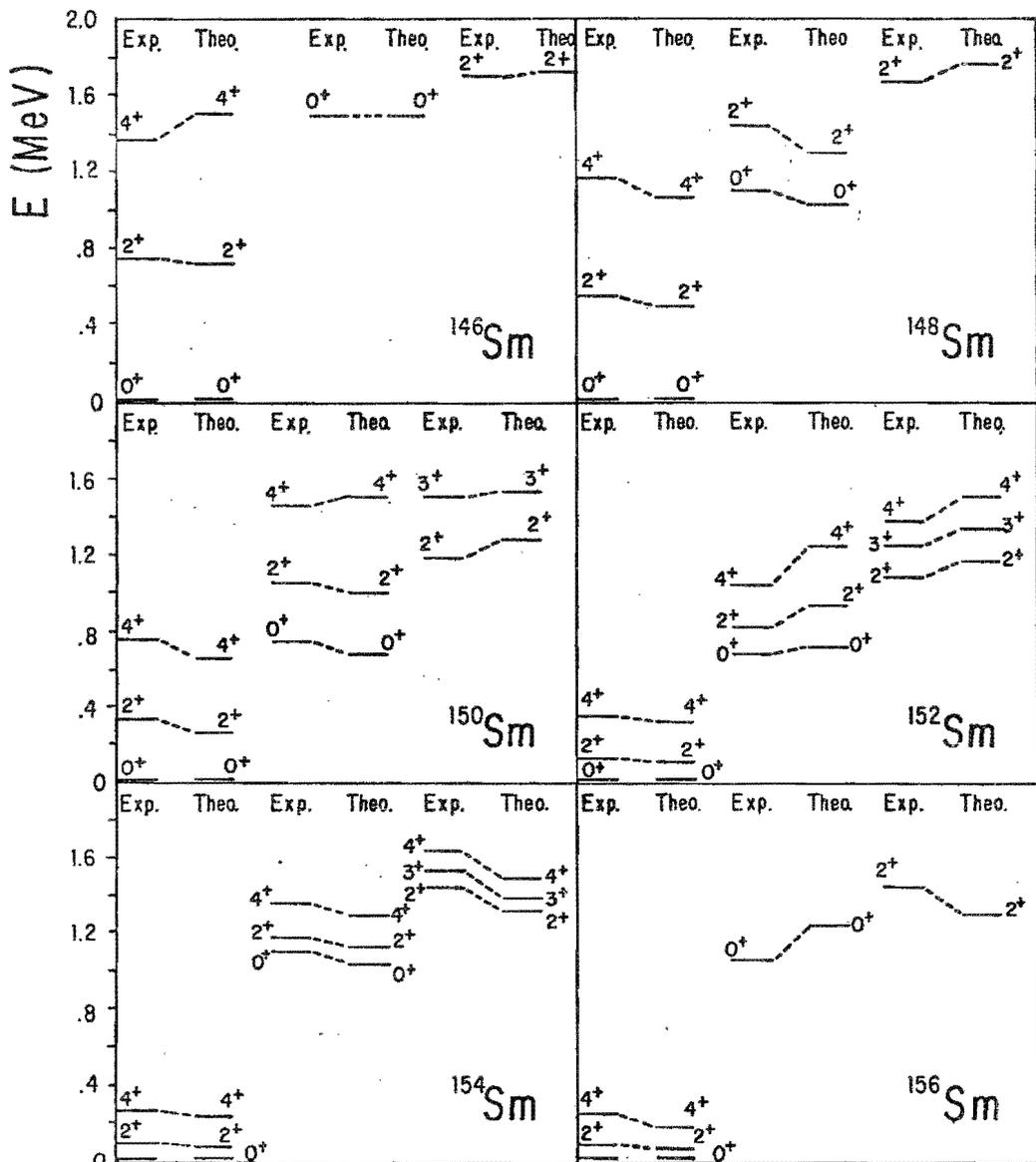


Fig 15

bracionales a rotacionales, manifiesta en la Fig. (15).

El mismo método se ha aplicado a los isótopos del Gd , partiendo del Hamiltoniano (5.34).

En este caso se tomaron para el ajuste 32 niveles de paridad positiva desde el ^{150}Gd al ^{156}Gd . El resultado del ajuste se muestra en la Fig. (16). La desviación RMS es de 140KeV y el mejor ajuste se logró con los valores

$$\epsilon = 2.38 \text{ MeV} \quad k_3 = -.178 \text{ MeV} \quad k_7 = -7.78 \text{ KeV} \quad (5.36)$$

Debe notarse la gran similitud entre las relaciones (5.35) y (5.36), que es aún más notoria si separamos el operador de número de bosones en la forma $\hat{N} = \hat{N}_\pi + \hat{N}_\nu$ e incorporamos el término $k_3 N_\pi$ en ϵ , tal como se hizo en (5.32a).

En este caso $\tilde{\epsilon}_{Sm} = 2.05 - (.156) \times 6 = 1.11 \text{ MeV}$ y

$$\tilde{\epsilon}_{Gd} = 2.38 - 7 \times (.178) = 1.13 \text{ MeV},$$

de modo que los Hamiltonianos para estos isótopos pueden escribirse como

$$H_{Sm} = (1.11 - .156 \hat{N}_\nu) \hat{n}_d - 9.46 \times 10^{-3} \hat{Q}^2, \quad (5.37a)$$

y

$$H_{Gd} = (1.13 - .178 \hat{N}_\nu) \hat{n}_d - 7.78 \times 10^{-3} \hat{Q}^2, \quad (5.37b)$$

lo que muestra con claridad que el Hamiltoniano (5.34) puede describir el comportamiento de ambas cadenas de isótopos con una ligera variación en los parámetros que refleja la diferencia entre bosones de neutrones y de protones.

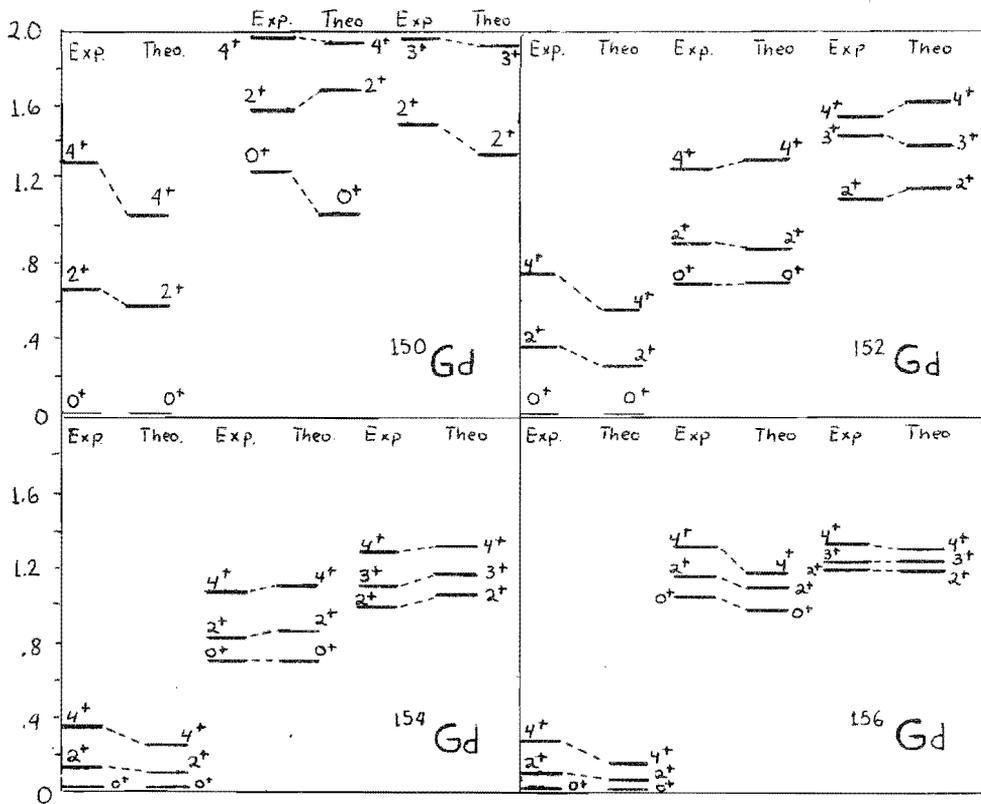


Fig 16

El ^{156}Gd representa un caso de simetría $SU(3)$ muy aproximada, como se vió en el capítulo anterior. Esto resulta claro al utilizar $N_{\mu} = 5$ en (5.37b), con lo que el Hamiltoniano adecuado en este límite es aproximadamente

$$H_{^{156}\text{Gd}} \approx .2 \hat{N}_d - 7.78 \times 10^{-3} \hat{Q}^2 \approx -7.78 \times 10^{-3} \hat{Q}^2.$$

Es importante extender este tipo de cálculos a las diferentes regiones nucleares, en particular a aquellas con simetría $O(6)$ y a las otras regiones de transición. Por otro lado, el siguiente paso debe ser el cómputo de probabilidades de transición $B(E_2)$, que representa una prueba más estricta de la aplicabilidad del modelo.

CAPITULO VICONCLUSIONES

Como se ha visto a lo largo de este trabajo, el MBI parece representar un modelo muy poderoso para la descripción de las características nucleares, en regiones en que el modelo de capas es incapaz de hacer predicciones. El modelo representa un truncamiento espectacular del espacio en el modelo de capas, que sin embargo permite una descripción detallada de la espectroscopía nuclear. Como ejemplo del grado de simplificación que representa, consideremos el caso del ^{154}Sm , que es uno de los casos discutidos en este trabajo. En este núcleo los 12 protones de valencia pueden ocupar la totalidad de las órbitas en la capa 50-82, mientras que los 10 neutrones de valencia lo hacen en la capa 82-126. Aún si ignoramos las posibles excitaciones a capas más altas y las excitaciones del carozo, el número de estados en el modelo de capas es astronómico. Existen 41, 654, 193, 516, 797 estados de paridad positiva con $J = 0$; 364, 132, 052, 934, 889 estados con $J = 2$ y 530, 897, 397, 260, 575 estados con $J = 4$ ⁵⁸). El cálculo en el MBI se hace para un sistema de 11 bosones, las matrices correspondientes tienen dimensiones 16, 26 y 30, para $J = 0, 2$ y 4 respectivamente. Los resultados del capítulo V muestran sin embargo la gran precisión con que pueden reproducirse los espectros a baja energía y la transición de fase en esta región, utilizando este espacio truncado.

Podemos afirmar entonces que el MBI representa un método muy exitoso para el análisis de la espectroscopía de núcleos par-par, y como se ha visto en el capítulo III, tiene además la cualidad de ser susceptible a un análisis que lo correlaciona al modelo de capas de manera directa. Esta conexión le sitúa por tanto como un puente entre los modelos colectivos fenomenológicos y las teorías más fundamentales de la estructura nuclear.

Es importante hacer notar que el análisis matemático que se ha desarrollado en la primera parte de este trabajo y que constituye el aporte principal de esta tesis, no solo ha dado lugar a la simplificación de los cálculos y al desarrollo de programas de cómputo completos para el modelo, sino que ha permitido esclarecer un punto de interés fundamental dentro de éste, como es la aparición del término $\hat{N}_d \hat{N}$ en el Hamiltoniano del MBI. Este operador tiene un papel central en la explicación de la transición entre límites de simetría exactas, y ha sido el objeto de varias investigaciones⁴⁵⁾, en que se ha buscado justificarlo.

El desarrollo de un programa de ajuste para el modelo abre la posibilidad de estudiar regiones nucleares que no han sido analizadas hasta ahora en forma sistemática. El cómputo de probabilidades de transición y momentos multipolares puede también generalizarse utilizando estas técnicas.

En un artículo reciente⁵⁷⁾, Iachello y Scholten han extendido el MBI para incluir núcleos con un número ímpar de nucleones. En este caso el núcleo se trata como un sistema de bosones y fermiones interactuantes. Los bosones representan

de nuevo pares de partículas acopladas a $L = 0$ y $L = 2$, mientras que los fermiones representan las partículas no apareados. El Hamiltoniano total se escribe como $H = H_{\text{Boson}} + H_{\text{Fermion}} + V_{\text{V-F}}$. La parte bosónica H_B , se fija mediante el requerimiento de que sus eigenvalores describan bien los núcleos par-par adyacentes. Estos autores logran demostrar que una interacción bosón-fermión sencilla, del tipo

$$V_{\text{BF}} = A [(\bar{\eta} \bar{\xi})^\circ \times (a_j^+ \times \tilde{a}_j)^\circ]^\circ \\ + \Gamma [[[\eta \bar{\xi} + \bar{\eta} \xi]^2 + \chi [\eta \times \xi]^2] \times (a_j^+ \times \tilde{a}_j)^2]^\circ \\ - \Lambda [[\xi \times a_j^+]^\dagger \times [\eta \times \tilde{a}_j]^\dagger]^\circ,$$

donde $\tilde{a}_{j,m} = (-)^{j-m} a_{j-m} y a^+$, a , representan los operadores de creación y aniquilación de fermiones, da lugar a espectros análogos a las de partícula-vibración, Nilsson y partícula-rotor \mathcal{R} , en los límites $U(5)$, $SU(3)$ y $O(6)$ de la parte bosónica, respectivamente. Estos resultados parecen indicar que el rango de aplicabilidad del MBI puede ser extendido para incluir a la mayoría de los núcleos con $A \geq 100$.

Una generalización interesante del modelo ha sido propuesta por Federman. Como es bien sabido de las propiedades del sistema de dos nucleones (deuterón), la interacción n-p es la componente más fuerte de la interacción nuclear. Esta interacción parece ser la responsable principal de la deformación nuclear, como demuestran Federman y Pittel en una serie de artículos recientes ⁵⁹⁾. Como se vió en el capítulo III los pa-

res protón-neutrón con $T = 0$ corresponden a un valor J impar, de modo que el valor mínimo de J es $J = 1$, lo que corresponde a bosones p .

La introducción de bosones p podría entonces tomar en cuenta la interacción n - p ($T = 0$) de manera directa, sin la necesidad de considerar interacciones de dos cuerpos particulares, tales como $-\hat{Q}_\pi \cdot \hat{Q}_\nu$. El análisis del problema s - p - d involucra al grupo $U(9)$ y por tanto representa un problema matemático considerable. Sin embargo, se ha empezado a explorar esta idea con un modelo simplificado de bosones s y p , cuya solución es directa y que podría arrojar luz sobre la posible relevancia física del boson p .

Como punto final en este trabajo, queremos enfatizar que existen muchas áreas abiertas para la investigación futura en este campo, hacia ambos lados del puente que parece representar este modelo, es decir, hacia un mejor entendimiento de la naturaleza nuclear y de los modelos fundamentales que nos permiten comprender su estructura.

APENDICE A

Evaluación de Elementos de Matriz

En este apéndice indicaremos la forma en que los elementos de matriz dentro del modelo colectivo son evaluados. En el modelo de Gneuss Greiner ⁶²⁾, los elementos de matriz de importancia son aquéllos que involucran a las superficies de energía potencial ¹⁵⁾, que por lo general se expresan como

$$V(\beta, \gamma) = \sum_{\rho\mu} U_{\rho\mu} \{2, 0\}^{\rho} \{3, 0\}^{\mu}, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\{2, 0\} = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \alpha^{\mu} = \beta^2, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \{3, 0\} &= \sqrt{7} \sum_{m m' m''} \langle 22 m m' | 2 - m'' \rangle \langle 22 - m'' m'' | 00 \rangle \alpha_m \alpha_{m'} \alpha_{m''} \\ &= -\sqrt{2} \beta^3 \cos 3\gamma, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

y $U_{\rho\mu}$ son parámetros a determinar.

Es claro que es necesario evaluar también otros elementos de matriz, tales como aquellos relacionados con las probabilidades de transición BE(2). En general los E. de M. requeridos dentro de este modelo ⁶²⁾ (y que tienen importancia también dentro del MBI) están relacionados con aquellos de operadores que son homogéneos de grado Λ en los α_m y que corresponden a un momento angular definido L y proyección M, además de ser soluciones a la ecuación de Laplace en 5 dimensiones (i.e. son polinomios armónicos). Denotamos estos poli-

nomios por ⁽¹⁾

$$T_M^{\Lambda, \mu L}(\alpha_m) = j^\Lambda T_M^{\Lambda, \mu L}(\alpha_m / j^\Lambda), \quad (A.3)$$

donde la función polinomial $T_M^{\Lambda, \mu L}(\alpha_m / j^\Lambda)$ depende únicamente de \mathcal{D} y de los ángulos de Euler ξ_i , y está asociada con las representaciones irreducibles de la cadena de grupos

$$\begin{array}{ccccc} 0(5) & \supset & 0(3) & \supset & 0(2) \\ & & \wedge & & \wedge \\ & & L & & M \end{array}$$

De la ecuación (2.10)

$$\alpha_m = \sum_{m'} D_{m m'}^{2*}(\mathcal{D}_i) a_{m'}, \quad (2.10)$$

vemos que

$$T_M^{\Lambda, \mu L}(\alpha_m / j^\Lambda) = \sum_K T_K^{\Lambda, \mu L}(\alpha_m / j^\Lambda) D_{M K}^{L*}(\mathcal{D}_i), \quad (A.4)$$

donde $T_K^{\Lambda, \mu L}(\alpha_m / j^\Lambda)$ es el mismo polinomio que el que aparece en (A.3), pero ahora en términos de α_m / j^Λ .

Notamos ahora de (2.11)

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} j^\Lambda \sin \mathcal{D}, \quad a_1 = a_{-1} = 0, \quad a_0 = j^\Lambda \cos \mathcal{D}, \quad (2.11)$$

que $T_K^{\Lambda, \mu L}(\alpha_m / j^\Lambda)$ es función únicamente de \mathcal{D} , por lo que podemos escribir

$$T_K^{\Lambda, \mu L}(\alpha_m / j^\Lambda) \equiv \Phi_K^{\Lambda, \mu L}(\mathcal{D}). \quad (A.5)$$

La ϕ de (A.5) es la misma que la que aparece en la ecuación (2.23a). (Para una revisión de estos puntos remitimos al lector a las refs. (14) y (11)).

Todos los operadores requeridos en los análisis dentro del modelo colectivo son de la forma (A.3) multiplicado por alguna potencia de β^2 . De este modo el elemento de matriz más general vendrá dado por¹⁴⁾

$$\begin{aligned}
 & \langle \nu'' \Lambda'' \mu'' L'' M'' | \beta^{2\rho+\Lambda} T_M^{\Lambda\mu L} \left(\frac{\alpha_m}{\beta} \right) | \nu' \Lambda' \mu' L' M' \rangle \\
 &= \int_0^\infty F_{\ell''}^{\Lambda''}(\beta) \beta^{2\rho+\Lambda} F_{\ell'}^{\Lambda'}(\beta) \beta^4 dV \cdot 8\pi^2 (-)^{L''+M''} \begin{pmatrix} L & L' & L'' \\ M & M' & -M'' \end{pmatrix} \\
 &\times \int_0^\pi \sum_{\kappa\kappa'\kappa''} \begin{pmatrix} L & L' & L'' \\ \kappa & \kappa' & \kappa'' \end{pmatrix} \phi_{\kappa}^{\Lambda\mu L}(\gamma) \phi_{\kappa'}^{\Lambda'\mu'L'}(\gamma) \phi_{\kappa''}^{\Lambda''\mu''L''}(\gamma) \sin 3\gamma d\gamma \\
 &= \left\{ 2\pi [\ell'! \Gamma(\ell'+\Lambda'+\frac{5}{2})]^{-1/2} [\ell''! \Gamma(\ell''+\Lambda''+\frac{5}{2})]^{-1/2} (-)^{\ell'+\ell''} \right. \\
 &\times \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(\Lambda'+\Lambda''+\Lambda+2\rho+5)] \Gamma[\frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda'+\Lambda'')+1] \Gamma[\frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda''+\Lambda')+1]}{\Gamma[\frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda'+\Lambda'')-\ell'+1] \Gamma[\frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda''+\Lambda')-\ell''+1]} \\
 &\times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}(2\rho+\Lambda+\Lambda'+\Lambda''+5), -\ell', -\ell'' \\ \frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda'+\Lambda'')-\ell'+1, \frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda''+\Lambda')-\ell''+1 \end{matrix} ; 1 \right] \\
 &\quad \times (\Lambda\mu L; \Lambda'\mu'L'; \Lambda''\mu''L'') 8\pi^2 (-)^{M''} \begin{pmatrix} L & L' & L'' \\ M' & M & -M'' \end{pmatrix}, \quad (A.6)
 \end{aligned}$$

donde hemos usado (2.23a), (A.4) y (A.5) para obtener una integral sobre los ángulos de Euler de el producto de tres funciones $D_{M\kappa}^L(\mathcal{U}_i)$, que dan lugar al coeficiente $3j^{2\alpha}$ de $O(3) \supset O(2)$ en la integral sobre γ . La integral radial sobre β aparece separadamente y fue evaluada explícitamente¹⁴⁾ en el paréntesis de llave a la derecha de A.6, donde $\ell' = \frac{1}{2}(\nu' - \Lambda')$ y $\ell'' = \frac{1}{2}(\nu'' - \Lambda'')$.

El único punto restante es la evaluación del coeficiente de Wigner reducido en la cadena $O(5) \supset O(3)$ dado por la expresión

$$(\Lambda \mu L; \Lambda' \mu' L'; \Lambda'' \mu'' L'') = \int_0^\pi \sum_{\kappa \kappa' \kappa''} \phi_{\kappa}^{\Lambda \mu L}(\gamma) \phi_{\kappa'}^{\Lambda' \mu' L'}(\gamma) \phi_{\kappa''}^{\Lambda'' \mu'' L''}(\gamma) \sin 3\gamma d\gamma. \quad (A.7).$$

En particular estamos interesados en los coeficientes $(3\mu, \mu, 0; \Lambda' \mu' L'; \Lambda'' \mu'' L'')$, que están relacionados con la determinación de las superficies de energía potencial mencionados anteriormente, así como en

$$y \quad (102; \Lambda' \mu' L'; \Lambda'' \mu'' L''), \quad (2, 0, 2; \Lambda' \mu' L'; \Lambda'' \mu'' L'')$$

$$(204; \Lambda' \mu' L'; \Lambda'' \mu'' L''),$$

que aparecen en conexión con las transiciones cuadrupolares.⁶³⁾

Estos tres tipos de coeficientes son los que ya han sido programados; los programas correspondientes aparecen al final de este apéndice.

La evaluación de elementos de matriz resulta más conveniente en términos de las funciones de onda expresadas en el sistema de laboratorio. Podemos concretarnos además al caso en que las funciones de onda satisfacen las relaciones,

$$\nu = \Lambda, \quad M = L, \quad (A.8)$$

ya que los coeficientes (A.7) son independientes de los índices ν y M .

Estas funciones se denotan por $\{ \Lambda \mu L \}$ y vienen dadas por la relación¹⁴⁾

$$|\Lambda, \mu, L\rangle = \exp(-\beta^2/2) P_{\Lambda, \mu, L}(\alpha_m), \quad (\text{A.9a})$$

donde

$$P_{\Lambda, \mu, L}(\alpha_m) = \pi^{-3/4} 2^{\Lambda/2} \sum_{r,n} C_{r,n}^{\sigma, \tau, \mu, \delta_L} \left\{ \begin{matrix} 1, 2 \\ 2, 2 \end{matrix} \right\}^{\sigma + \tau - n} \left\{ \begin{matrix} 2, 0 \\ 3, 0 \end{matrix} \right\}^{3r - \tau + n} \left\{ \begin{matrix} 3, 0 \\ 3, 3 \end{matrix} \right\}^{\mu + \tau - 2r - n} \delta_L, \quad (\text{A.9b})$$

donde los símbolos $\left\{ \begin{matrix} a, b \end{matrix} \right\}$ representan d.p.e's (ver capítulo II) en las α_m , $\delta_L = \frac{1}{2} (1 + (-1)^L)$, (A.9c)

$$C_{r,n}^{\sigma, \tau, \mu, 0} = \frac{3^n 6! \Lambda! (-)^r 2^{2r} (2\mu + 2\tau - 2r)! (3r)!}{2^{\mu+n} n! (2\Lambda+1)! r! (\mu+\tau-r)! (\mu+\tau-n-2r)!} \sum_s \frac{(-)^s 4^s (\tau+s)! (2\Lambda+1-2s)!}{5! (\sigma-s)! (\tau-n+s)! (3r-\tau+n-s)! (\Lambda-s)!}, \quad (\text{A.9d})$$

$$C_{r,n}^{\sigma, \tau, \mu, 1} = (\mu + \tau - n - 2r + 1) C_{r,n}^{\sigma, \tau, \mu+1, 0}, \quad (\text{A.9e})$$

y σ , τ están relacionados con Λ , μ y L a través de las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma + \tau &= L/2, \\ \sigma + 2\tau &= \Lambda - 3\mu, \\ \sigma, \tau &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9f})$$

Aprovechando ahora que conocemos el comportamiento de las α_m ante conjugación, i.e., $\alpha_m^* = (-)^m \alpha_{-m}$, proponemos el cambio de variables (cambio a coordenadas polares)

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm 2} &= \frac{f_2}{\sqrt{2}} e^{\pm i\theta}, \\ \alpha_{\pm 1} &= \pm \frac{\rho_1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\varphi}, \\ \alpha_0 &= \rho_0, \end{aligned} \quad (\text{A.10a})$$

donde

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad (\text{A.10b})$$

$$0 \leq f_1, f_2 \leq \infty, \quad -\infty \leq f_0 \leq \infty.$$

Obviamente, debido a la relación

$$\sum_m (-1)^m \alpha_m \alpha_{-m} = \beta^2,$$

ρ_0 , ρ_1 y ρ_2 deben satisfacer a su vez

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_0^2 = \beta^2, \quad (\text{A.11})$$

lo que sugiere reescribirlas en términos de las coordenadas esféricas β , χ , δ

$$\rho_1 = \beta \sin \chi \sin \delta,$$

$$\rho_2 = \beta \sin \chi \cos \delta, \quad (\text{A.12a})$$

$$\rho_0 = \beta \cos \chi,$$

donde para satisfacer las desigualdades (A.10b) χ y δ deben estar limitadas a

$$0 \leq \chi \leq \pi, \quad 0 \leq \delta \leq \pi/2. \quad (\text{A.12b})$$

Llegamos por tanto a la transformación de coordenadas

$$\alpha_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \chi \sin \delta e^{\pm i\varphi},$$

$$\alpha_{\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \chi \cos \delta e^{\pm i\varphi}, \quad (\text{A.13a})$$

$$\alpha_0 = \beta \cos \chi,$$

donde

$$0 \leq \beta \leq \infty, \quad 0 \leq \chi \leq \pi, \quad 0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \vartheta, \varphi \leq 2\pi. \quad (\text{A.13b})$$

El elemento de volumen correspondiente está dado por

$$dV = d^5\alpha = d\alpha_0 d\alpha_1 d\alpha_{-1} d\alpha_2 d\alpha_{-2},$$

y usando los Jacobianos de las transformaciones (A.10a) y (A.12a) encontramos que

$$dV = \beta^4 \sin^3 \chi \sin \delta \cos \delta d\beta d\chi d\delta d\vartheta d\varphi. \quad (\text{A.14})$$

Usando ahora la forma explícita de los d.p.e's que aparecen en las ecuaciones (A.9), y aplicando las transformaciones (A.13a), encontramos

$$\begin{aligned} \{1, 2\} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \chi \sin \delta e^{i\vartheta} \\ \{2, 2\} &= \beta^2 e^{i\vartheta} \left[2 \sin \chi \cos \chi \sin \delta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \chi \cos^2 \delta e^{i(2\varphi - \vartheta)} \right], \\ \{3, 0\} &= \beta^3 \left[-\sqrt{2} \cos^3 \chi - 3\sqrt{3/2} \sin^3 \chi \sin \delta \cos^2 \delta \cos(2\varphi - \vartheta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin^2 \chi \cos \chi \cos^2 \delta + \frac{6}{\sqrt{2}} \sin^2 \chi \cos \chi \sin^2 \delta \right] \\ \{3, 3\} &= \beta^3 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^3 \chi \sin^2 \delta \cos \delta e^{i(2\vartheta - \varphi)} - \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \chi \cos \chi \sin \delta \right. \\ &\quad \left. \times \cos \delta e^{i(\vartheta + \varphi)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin^3 \chi \cos^3 \delta e^{i\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

El operador más general en el que estaremos interesados puede siempre ser expresado en términos de sumas del operador general

$$\mathbb{A} = \beta^{x_1} \sin^{x_2} \chi \cos^{x_3} \chi \sin^{x_4} \delta \cos^{x_5} \delta e^{ix_6 \varphi} e^{ix_7 \vartheta} \{2, 0\}^p \{3, 0\}^m,$$

de modo que los elementos de matriz buscados se escriben como

$$\{ \Lambda''_{\mu''} L'' | A | \Lambda'_{\mu'} L' \} = \pi^{-5/2} 2^{\frac{\Lambda'+\Lambda''}{2}} \sum_{r'n'} \sum_{r''n''} C_{r'n'}^{\sigma'z'\mu'\delta_L'} C_{r''n''}^{\sigma''z''\mu''\delta_{L''}} I, \quad (A.17a)$$

donde

$$I = \int_V \{1,2\}^{*l} \{2,2\}^{*m} \{1,2\}^p \{2,2\}^q \{2,0\}^{r+p} \{3,0\}^{s+\mu} \times \{3,3\}^{*\delta_{L''}} \{3,3\}^{\delta_{L'}} \beta^{x_1} \sin^{x_2} \chi \cos^{x_3} \chi \sin^{x_4} \delta \cos^{x_5} \delta e^{ix_6 \varphi} e^{ix_7 \Theta} dV. \quad (A.17b)$$

La integral (A.17b) se transforma ahora a las coordenadas (A.13) y utilizando las relaciones (A.15) y el cambio de coordenadas $u = \varphi - \Theta/2$, se llega a la expresión

$$I = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{L''} \int_0^{2\pi} e^{-\beta^2} \frac{\beta^{l+2m+p+2q+2r+2p+3s+3\mu+x_1+3\delta_{L''}+3\delta_{L'}}{\beta^4} d\beta \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{l+p+\delta_{L''}+\delta_{L'}} (\sin \chi)^{l+p+2\delta_{L'}+2\delta_{L''}+x_2+m+q+3} (\sin \delta)^{p+r+l+x_4+1} (\cos \delta)^{\delta_{L''}+\delta_{L'}+x_5+1} (\cos \chi)^{x_3} e^{i(p+q-l-m+x_7+\frac{3}{2}\delta_{L'}-\frac{3}{2}\delta_{L''}+\frac{x_4}{2})\Theta} \cdot \left[2 \cos \chi \sin \delta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \chi \cos^2 \delta e^{-aiu} \right]^m \left[2 \cos \chi \sin \delta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \chi \cos^2 \delta e^{aiu} \right]^q \left[-\sqrt{2} \cos^3 \chi - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin^2 \chi \cos \chi \cdot \cos^2 \delta - 3\sqrt{\frac{3}{2}} \sin^3 \chi \sin \delta \cos^2 \delta \cos 2u + \frac{6}{\sqrt{2}} \sin^2 \chi \cos \chi \sin^2 \delta \right]^{s+\mu} \times \left[-\sin \chi \sin^2 \delta e^{aiu} - \sqrt{3} \cos \chi \sin \delta + \frac{1}{2} \sin \chi \cos^2 \delta e^{i\Theta} \right]^{\delta_{L''}}.$$

$$\times \left[-\sin \chi \sin^2 \delta e^{-2i\phi} - \sqrt{3} \cos \chi \sin \delta + \frac{1}{2} \sin \chi \right. \\ \left. \times \cos^2 \delta e^{-i\phi} \right] \int_0^{\delta_{L'}} e^{i(\delta_{L'} - \delta_{L''} + \chi_6)u} d\chi d\delta d\phi du.$$

(A.18)

Desarrollando por último las expresiones en (A.18) con el teorema del binomio y realizando las integrales, llegamos a una expresión complicada que involucra 9 sumas y que escribimos a continuación, substituyendo los valores de 1, m, p, q, r y s de acuerdo a las ecs. (A.9)

$$I = \pi^2 \Gamma \left[\frac{1}{2} \left(\frac{L'}{2} + \frac{L''}{2} + 3\mu' + 3\mu'' + 3\mu + 2\rho + \zeta' + \zeta'' + \chi_1 + 3\delta_{L'} + 3\delta_{L''} + 5 \right) \right] \\ \sum_{t=0}^{\delta_{L''}} \sum_{t'=0}^{\delta_{L'}} (-1)^{t+t'} \delta_{L'/2 + \chi_7 + \frac{3}{2}\delta_{L'} + \frac{\chi_6}{2} + t, L''/2 + \frac{3}{2}\delta_{L''} + t'} \binom{\delta_{L''}}{t} \binom{\delta_{L'}}{t'} \\ \sum_{a' b'} \binom{\delta_{L''} - t}{a'} \binom{\delta_{L'} - t'}{b'} (-1)^{b' - a' + \frac{3}{2}\delta_{L''} + \frac{1}{2}\delta_{L'} - \frac{1}{2}\chi_6} \binom{-2t - \chi_7 + 2a' - 2b' - \delta_{L'} + \frac{\chi_6}{2} - 1}{2} \\ (3)^{\frac{-\delta_{L'} - t + \frac{3}{2}\delta_{L''} - \frac{\chi_6}{2} - a' - \frac{\chi_7}{2}}{2}} \sum_{a, b, k, \mu, \nu} (-1)^\mu \binom{n''}{a} \binom{n'}{b} \binom{\mu' + \mu'' + \mu + \zeta' + \zeta'' - 2r' - 2r'' - n' - n''}{a - b + 2k - \frac{\chi_6}{2} - \frac{\delta_{L'} - a' + \delta_{L''} + b'}{2}} \\ \binom{\mu}{\nu} \left[1 + (-1)^{\mu' + \mu'' + \mu + \zeta' + \zeta'' - t - t' + \chi_3 + \frac{\delta_{L'} + \frac{3}{2}\delta_{L''} + \frac{\chi_6}{2}}}{2} \binom{\frac{\mu' + \mu'' + \zeta' + \zeta'' - r' - r'' + \frac{\mu}{2} + n' + n'' + \frac{L'}{4} - \frac{3L''}{4}}{2} \right] \\ (2)^{-4a - 4k - \nu} (3)^{\mu' + \mu'' + \mu + \zeta' + \zeta'' - 2r' - 2r'' - n' - n'' + \nu + k + a - \mu - \frac{\nu}{4} + \frac{L''}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \Gamma \left[\frac{1}{2} (\mu' + \mu'' + \mu + \tau' + \tau'' - 2r' - 2r'' - 2a - 2k + 2u - 2v + \frac{\delta_L''}{2} + \frac{3}{2} \delta_L' - t - t' - 2b' + x_1 + \frac{x_6}{2} + 1) \right] \\
 & \Gamma \left[\frac{1}{2} (3\mu' + 3\mu'' + 3\mu + 3\tau' + 3\tau'' - 6r' - 6r'' + \frac{L'}{2} + \frac{L''}{2} - 2n' - 2n'' + 3\delta_L' + 3\delta_L'' + x_2 + x_3 + 5) \right] \\
 & \Gamma \left[\frac{1}{2} (2\mu' + 2\mu'' + 2\mu + 2\tau' + 2\tau'' - 4r' - 4r'' - 2n' - 2n'' - 2a - 2u + \frac{L''}{2} + \frac{L'}{2} + \frac{\delta_L''}{2} + \frac{3}{2} \delta_L' - 2k \right. \\
 & \left. - t - t' + \frac{x_6}{2} + 2a' + x_4 + 2) \right] \Gamma \left[(2a + v + 2k + t + t' \right. \\
 & \left. + \delta_L'' - a' + b' + x_5/2 - x_6/2 + 1) \right] .
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

La ecuación (A.19) junto con la (A.17a) constituye la base de los programas numéricos desarrollados.

En particular, para el cómputo de los E. de M. del operador \hat{Q}^2 ec. (3.50b), se requiere de un caso particular de (A.19) con $\mu = 1$, $\rho = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$.

PROGRAMA DE COMPUTO DE COEFICIENTES 3J REDUCIDOS DE TIPO
(C02; A4L, A'4L'), (202; A4L; A'4L) Y (204; A4L; A'4L')

```

BEGIN
FILE FMT (XIND=RFMOTF);
FILE SAI (XIND=RFMOTF); FILE DISC1 (XIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXRECSTZ=2);
BLOCKSTZ=301;
FILE SAI (XIND=PRINTER);
FILE DISC2 (XIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXRECSTZ=2);
BLOCKSTZ=301;
FILE DISC3 (XIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXRECSTZ=2);
BLOCKSTZ=301;
INTEGER A1, A2, A3, A4, A5, P, T, M, R0, H1, H2, L, A, B, C, D, K, M1, Y1, Y2, Y3,
I, L, M1, I, M2, H, M, P1, M, P2, Y4, Y5, M, U, J, M, P, T, L, L, M1, L, M2, S1, T1, R1, N, M1, K2, J1, L, R,
G1, G2, G3, I, M, P1, M, P2, L, O, I, F, H, F, L, A, M, M, L, C, S, I, C, H, D, I, H, M, I, M1, M, U, N, 2, S, S1, S2,
DOUBLE Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9, X, Y, Z, ZRA, W1, W2, Z0A, TIL, TILM, NGFVC,
XY, H3, ZY, W4, ZY1, B0, Z6P, TENS;

DOUBLE ARRAY CFS(0:0), CFS1(0:0), AS(0:0), DIR(0:0), DIP1(0:0), AS1(0:0);
DEFINIR CICLO(A,P,C,D)= FOR A:=0 STEP 1 UNTIL P DO#;

REAL PROCEDURE SCALE(C); VALUE C; INTEGER Q;
BEGIN OWN REAL ARRAY S(1-65:071);
IF C>=06 THEN SCALE:= S(1) ELSE
BEGIN DOUBLE T; INTEGER I;
T:= 1.0/C; S(1):=1.0;
SCALE:= 0.0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 97 DO BEGIN
T:= T+2.0E-1; S(I):= T END;
T:= 1.0/C;
FOR I:=1 STEP -1 UNTIL -65 DO BEGIN
T:= T+4.0E-1; S(I):= T END
END END;

REAL PROCEDURE FACT(W); VALUE W; INTEGER H;
BEGIN OWN REAL ARRAY F(0:100);
IF W<0 THEN FACT:= F(H) ELSE
BEGIN DOUBLE T; INTEGER Y; REAL C;
T:= SCALE(-1000);
F(1):=0.0; F(101):=1.0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 100 DO BEGIN
T:= T+1.0E-2;
F(I):= D(AUCTC); END END END;
REAL PROCEDURE GAM(H); VALUE H; REAL W;
BEGIN OWN REAL ARRAY G(1:100);
IF H<0 THEN GAM:= G(12+H) ELSE
BEGIN
INTEGER Y, REAL T;
T:= FACT(-1000);
FOR I:=1 STEP 2 UNTIL 99 DO BEGIN
G(I):= FACT(I-1)/FACT(I-1)/2+50*(I-1);
G(I+1):= FACT(I-1)/2+2**((I+1)/2)/5;
END END END;
X:= GAM(-100);
DIR(0):=0; DIP1(0):=0;
TENS:=0;

```

00000100
00000200
00000300
00000400
00000500
00000600
00000700
00000800
00000900
00001000
00001100
00001200
00001300
00001400
00001500
00001600
00001700
00001800
00001900
00002000
00002100
00002200
00002300
00002400
00002500
00002600
00002700
00002800
00002900
00003000
00003100
00003200
00003300
00003400
00003500
00003600
00003700
00003800
00003900
00004000
00004100
00004200
00004300
00004400
00004500
00004600
00004700
00004800
00004900
00005000
00005100
00005200
00005300
00005400
00005500
00005600
00005700

6916
6918
6920
6922
6924
6926
6928
6930
6932
6934
6936
6938
6940
6942
6944
6946
6948
6950
6952
6954
6956
6958
6960
6962
6964
6966
6968
6970
6972
6974
6976
6978
6980
6982
6984
6986
6988
6990
6992
6994
6996
6998
7000
7002
7004
7006
7008
7010
7012
7014
7016
7018
7020
7022
7024
7026
7028

```
PA[72] := 3/4*7**(-5); PA[73] := 7; PA[74] := 1; PA[75] := 1; PA[76] := 2;  
PA[77] := 1; PA[78] := 3; PA[79] := 8; PA[80] := 0; PA[81] := 2;  
PA[82] := 1; PA[83] := 3; PA[84] := 1/8*(3/7)**5; PA[85] := 7; PA[86] := 2;  
PA[87] := 0; PA[88] := 0; PA[89] := 0; PA[90] := -1/16*(3/7)**5; PA[91] := 1; PA[92] := 0;  
END;  
END;  
FISE REFIN  
DFGIN PA[1] := 1; PA[2] := 0; PA[3] := 3; PA[4] := 0; PA[5] := 3; PA[6] := 5;  
PA[7] := 2; PA[8] := 0; PA[9] := 2; PA[10] := 1; PA[11] := 2; PA[12] := 3;  
PA[13] := 5; PA[14] := 1; PA[15] := 2; PA[16] := 1; PA[17] := 1; PA[18] := 3;  
DFGIN PA[1] := 2; PA[2] := 1; PA[3] := 2; PA[4] := 1; PA[5] := 1; PA[6] := 1;  
PA[7] := 2; PA[8] := 0; PA[9] := 0; PA[10] := 0; PA[11] := 0; PA[12] := 0;  
PA[13] := 0; PA[14] := 2; PA[15] := 0; PA[16] := 0; PA[17] := 0; PA[18] := (18/35)**5;  
HP := 3;  
END;  
DFGIN PA[1] := 5; PA[2] := 0; PA[3] := 3; PA[4] := 0; PA[5] := 1;  
PA[6] := -1/(2*SQRT(7));  
PA[7] := 4; PA[8] := 1; PA[9] := 2; PA[10] := 1; PA[11] := 0; PA[12] := -1/2*(7/7)**5;  
PA[13] := 4; PA[14] := 1; PA[15] := 2; PA[16] := 1; PA[17] := 2; PA[18] := (3/7)**5;  
PA[19] := 3; PA[20] := 2; PA[21] := 1; PA[22] := 0; PA[23] := 1; PA[24] := 3/7**5;  
PA[25] := 4; PA[26] := 1; PA[27] := 0; PA[28] := 1; PA[29] := 0; PA[30] := -1/2*(3/7)**5;  
5;  
PA[31] := 5; PA[32] := 0; PA[33] := 1; PA[34] := 2; PA[35] := -1; PA[36] := 1/0*  
7**(-5); HP := 6; END;  
DFGIN PA[1] := 1; PA[2] := 1; PA[3] := 1; PA[4] := 0; PA[5] := 1; PA[6] := (3/7)**5;  
PA[7] := 2; PA[8] := 6; PA[9] := 0; PA[10] := 1; PA[11] := 0; PA[12] := 1/7**5;  
HP := 2; END;  
DFGIN PA[1] := 7; PA[2] := 0; PA[3] := 3; PA[4] := 0; PA[5] := 1; PA[6] := 1/2*7**(-5);  
PA[7] := 5; PA[8] := 0; PA[9] := 1; PA[10] := 1; PA[11] := 1; PA[12] := -1/4*7**(-5);  
PA[13] := 4; PA[14] := 1; PA[15] := 2; PA[16] := 0; PA[17] := 2; PA[18] := -1/2*(3/7)**5;  
5;  
PA[19] := 3; PA[20] := 2; PA[21] := 1; PA[22] := 1; PA[23] := 1; PA[24] := -3/7**5;  
PA[25] := 4; PA[26] := 1; PA[27] := 0; PA[28] := 2; PA[29] := 0; PA[30] := 1;  
1/2*(3/7)**5;  
HP := 5; END;  
DFGIN PA[1] := 2; PA[2] := 0; PA[3] := 2; PA[4] := 0; PA[5] := 2; PA[6] := 5; HP := 1; END;  
DFGIN PA[1] := 4; PA[2] := 1; PA[3] := 3; PA[4] := 0; PA[5] := 3; PA[6] := 5;  
PA[7] := 4; PA[8] := 1; PA[9] := 2; PA[10] := 1; PA[11] := 2; PA[12] := 1;  
-SQRT(3)**5; PA[13] := 5; PA[14] := 0; PA[15] := 1; PA[16] := 2; PA[17] := 1;  
PA[18] := 5; HP := 3; END;  
DFGIN PA[1] := 9; PA[2] := 0; PA[3] := 6; PA[4] := 0; PA[5] := 0; PA[6] := 5/SQRT(70);  
PA[7] := 7; PA[8] := 1; PA[9] := 5; PA[10] := 1; PA[11] := -1; PA[12] := 5/SQRT(3/70);  
PA[13] := 8; PA[14] := 0; PA[15] := 4; PA[16] := 5; PA[17] := -2; PA[18] := .25/  
SQRT(70); PA[19] := 7; PA[20] := 1; PA[21] := 5; PA[22] := -1; PA[23] := 1; PA[24] :=  
-5/SQRT(3/70); PA[25] := 6; PA[26] := 2; PA[27] := 4; PA[28] := 0; PA[29] := 0;  
PA[30] := 4.5/SQRT(70); PA[31] := 7; PA[32] := 1; PA[33] := 3; PA[34] := 1; PA[35] := -1;  
7001  
PA[36] := 7.25*SQRT(3/70); PA[37] := 8; PA[38] := 0; PA[39] := 4; PA[40] := -2;  
PA[41] := -1; PA[42] := -1/2/SQRT(70); PA[43] := 7; PA[44] := 1; PA[45] := 3;  
PA[46] := 1; PA[47] := 1; PA[48] := 2; 25*SQRT(3/70); PA[49] := 8; PA[50] := 0;  
PA[51] := 2; PA[52] := 0; PA[53] := 0; PA[54] := 5/SQRT(70); PA[55] := 8;  
PA[56] := 1; PA[57] := 4; PA[58] := 0; PA[59] := 0; PA[60] := -SQRT(2/35);  
PA[61] := 8; PA[62] := 0; PA[63] := 2; PA[64] := 1; PA[65] := 7; PA[66] := SQRT(  
1/7); PA[67] := 6; PA[68] := 2; PA[69] := 2; PA[70] := 0; PA[71] := 0;  
PA[72] := 3*SQRT(2/35); PA[73] := 7; PA[74] := 1; PA[75] := 1; PA[76] := 1;  
PA[77] := -1; PA[78] := 5/SQRT(3/70); PA[79] := 6; PA[80] := 0; PA[81] := 2;  
PA[82] := 7; PA[83] := 7; PA[84] := 1/SQRT(70); PA[85] := 7; PA[86] := 1;  
PA[87] := 1; PA[88] := 1; PA[89] := 1; PA[90] := SQRT(3/70); PA[91] := 8;  
PA[92] := 1; PA[93] := 1; PA[94] := 0; PA[95] := -25*SQRT(2/35);  
PA[96] := 5; PA[97] := 3; PA[98] := 3; PA[99] := 1; PA[100] := -1; PA[101] := 0;  
SQRT(2/70); PA[102] := 6; PA[103] := 2; PA[104] := 2; PA[105] := 2; PA[106] := 2; PA[107] :=
```

0006910
0006918
0006920
0006922
0006924
0006926
0006928
0006930
0006932
0006934
0006936
0006938
0006940
0006942
0006944
0006946
0006948
0006950
0006952
0006954
0006956
0006958
0006960
0006962
0006964
0006966
0006968
0006970
0006972
0006974
0006976
0006978
0006980
0006982
0006984
0006986
0006988
0006990
0006992
0006994
0006996
0006998
0007000
0007002
0007004
0007006
0007008
0007010
0007012
0007014
0007016
0007018
0007020
0007022
0007024
0007026
0007028

```
7036 PA[1081] := -1.5 * SQRT(1/70); PA[109] := 5; PA[110] := 3; PA[111] := 3; PA[112] :=
7037 PA[113] := 1; PA[114] := SQRT(27/70); PA[115] := 4; PA[116] := 4;
7038 PA[117] := 0; PA[118] := 0; PA[119] := 0; PA[120] := 9 * SQRT(1/70); PA[121] := 5;
7039 PA[122] := 0; PA[123] := 1; PA[124] := 0; PA[125] := 1; PA[126] := -1 * SQRT(3/70);
7040 PA[127] := 6; PA[128] := 1; PA[129] := 0; PA[130] := 0; PA[131] := 2; PA[132] :=
7041 PA[133] := 5; PA[134] := 5; PA[135] := 1; PA[136] := -1; PA[137] := 1
7042 PA[138] := -1.5 * SQRT(3/70); PA[139] := 6; PA[140] := 2; PA[141] := 0; PA[142] := 0;
7043 PA[143] := 0; PA[144] := .75 * SQRT(1/70); MP := 24; END;
7044 PA[1] := 0;
7045 BEGIN PA[1] := 7; PA[2] := 1; PA[3] := 5; PA[4] := 0; PA[5] := 1; PA[6] := 5 * SQRT(3/7);
7046 PA[7] := 6; PA[8] := 2; PA[9] := 4; PA[10] := 1; PA[11] := 0; PA[12] := 1.5 * SQRT(1/7);
7047 PA[13] := 7; PA[14] := 1; PA[15] := 3; PA[16] := 2; PA[17] := -1;
7048 PA[18] := 2 * SQRT(3/7);
7049 PA[19] := 6; PA[20] := 2; PA[21] := 4; PA[22] := -1; PA[23] := 2;
7050 PA[24] := -1.5 * SQRT(1/7); PA[25] := 5; PA[26] := 3; PA[27] := 3; PA[28] := 0;
7051 PA[29] := 1; PA[30] := 1; 5 * SQRT(3/7);
7052 PA[31] := 2; PA[32] := 2; PA[33] := 2; PA[34] := 1; PA[35] := 0;
7053 PA[36] := 5 * SQRT(1/7);
7054 PA[37] := 7; PA[38] := 1; PA[39] := 3; PA[40] := 2; PA[41] := 3;
7055 PA[42] := 5 * SQRT(3/7); PA[43] := 6; PA[44] := 2; PA[45] := 2; PA[46] := -1;
7056 PA[47] := 0; PA[48] := 1; PA[49] := 1; PA[50] := 1; PA[51] := 1;
7057 PA[52] := 0; PA[53] := 1; PA[54] := -1; 125 * SQRT(3/7); PA[55] := 8; PA[56] := 0;
7058 PA[57] := 1; PA[58] := 1; PA[59] := 0; PA[60] := 5 * SQRT(1/7); PA[61] := 8;
7059 PA[62] := 0; PA[63] := 3; PA[64] := 1; PA[65] := 2; PA[66] := 25 * SQRT(1/7)
7060 PA[67] := 1; PA[68] := 1; PA[69] := 3; PA[70] := 0; PA[71] := 1;
7061 PA[72] := 7 * SQRT(3/7); PA[73] := 7; PA[74] := 1; PA[75] := 1; PA[76] := 2;
7062 PA[77] := 1; PA[78] := 1; 5 * SQRT(3/7); PA[79] := 0; PA[80] := 0; PA[81] := 2;
7063 PA[82] := 1; PA[83] := 2; 25 * SQRT(1/7); PA[84] := 7; PA[85] :=
7064 PA[86] := 0; PA[87] := 0; PA[88] := 0; PA[89] := 0; PA[90] := .125 * SQRT(1/7); P := 15; LML;
7065 PA[1] := 0;
7066 BEGIN PA[1] := 0; PA[2] := 0; PA[3] := 6; PA[4] := 0; PA[5] := 2; PA[6] := 25;
7067 PA[7] := 7; PA[8] := 1; PA[9] := 5; PA[10] := -1; PA[11] := 1; PA[12] := 3 *
7068 SQRT(3); PA[13] := 8; PA[14] := 2; PA[15] := 4; PA[16] := 2; PA[17] := 0;
7069 PA[18] := 1; PA[19] := 1; PA[20] := 7; PA[21] := 6; PA[22] := -1;
7070 PA[23] := 3; PA[24] := 1; 25 * SQRT(3); PA[25] := 2; PA[26] := 4;
7071 PA[27] := 0; PA[28] := 1; PA[29] := 1; PA[30] := 7; PA[31] := 1; PA[32] := 3;
7072 PA[33] := 0; PA[34] := 1; PA[35] := 1; PA[36] := 75 * SQRT(3); PA[37] := 8; PA[38] := 0;
7073 PA[39] := 4; PA[40] := 2; PA[41] := 4; PA[42] := -1; PA[43] := 7;
7074 PA[44] := 1; PA[45] := 2; PA[46] := -1; PA[47] := 3; PA[48] := 1; 125 * SQRT(3);
7075 PA[49] := 8; PA[50] := 0; PA[51] := 2; PA[52] := 0; PA[53] := 2; PA[54] := 0.025;
7076 MP := 0; FNC;
7077 END; END;
7078 NP1 := 6 * NP; NF2 := NP1 - 5;
7079 HPITF(SAL, *, NP1, NP2);
7080 C1C10(L, 0, 2, R) BEGIN
7081 C1C10(M, A, 1, NF + 1) BEGIN
7082 C1C10(T, A, 1, 1/2) BEGIN
7083 Z4 := 2 * (M1);
7084 *(FACT(1/2 + 3 * M1 + T1) / FACT(1 + 6 * M1 + 2 * T1 + 1) * FACT(1/2 - T1)) ** 2 *
7085 SCALE(2 * T1) * 2 * (2 * T1);
7086 C1C10(R, 1, A, 1, (M1 + T1) / 2) BEGIN
7087 Z1 := (-2) * R1 * (FACT(3 * M1 + 2 * T1 - 2 * P1) / FACT(M1 + T1 - R1)) *
7088 FACT(3 * P1) / FACT(P1)) ** 2;
7089 Z1 := 73 * Z4;
7090 C1C10(N, MAX(0, T1 - 3 * P1), 1, MIN(1/2 * M1 + T1 - 2 * C11)) BEGIN
7091 Z2 := (1 - 5) * N * (FACT(N) * FACT(M1 + T1 - 2 * N1 - M)) ** 2;
7092 Z1 := 7 * A * Z1; Z1 := 0;
7093 C1C10(S, 1, M * X(0, N - T1), 1, N * (L/2 - T1 + M1 - T1 + M)) BEGIN
7094 Z1 := 71 + (-1) * S * 1 * 2 * (2 * S1) * (FACT(T1 + S1) / FACT(T1 + S1 - 1)) *
7095 FACT(1 + 6 * M1 + 2 * T1 - 2 * P1) / (FACT(L/2 + 3 * M1 + T1 - S1) *
7096
```

```
0007036
0007037
0007038
0007039
0007040
0007041
0007042
0007043
0007044
0007045
0007046
0007047
0007048
0007049
0007050
0007051
0007052
0007053
0007054
0007055
0007056
0007057
0007058
0007059
0007060
0007061
0007062
0007063
0007064
0007065
0007066
0007067
0007068
0007069
0007070
0007071
0007072
0007073
0007074
0007075
0007076
0007077
0007078
0007079
0007080
0007081
0007082
0007083
0007084
0007085
0007086
0007087
0007088
0007089
0007090
0007091
0007092
0007093
0007094
0007095
0007096
0007097
0007098
0007099
0007100
0007101
0007102
0007103
0007104
0007105
0007106
0007107
0007108
0007109
0007110
0007111
0007112
0007113
0007114
0007115
0007116
0007117
0007118
0007119
0007120
0007121
0007122
0007123
0007124
0007125
0007126
0007127
0007128
0007129
0007130
0007131
0007132
0007133
0007134
0007135
0007136
0007137
0007138
0007139
0007140
0007141
0007142
0007143
0007144
0007145
0007146
0007147
0007148
0007149
0007150
0007151
0007152
0007153
0007154
0007155
0007156
0007157
0007158
0007159
0007160
0007161
0007162
0007163
0007164
0007165
0007166
0007167
0007168
0007169
0007170
0007171
0007172
0007173
0007174
0007175
0007176
0007177
0007178
0007179
0007180
0007181
0007182
0007183
0007184
0007185
0007186
0007187
0007188
0007189
0007190
0007191
0007192
0007193
0007194
0007195
0007196
0007197
0007198
0007199
0007200
```

```

8700 FACT(S51)*FACT(1/2-T1-S51)*FACT(3*R1-T1+H-S51))**2;
8800 END;
8900 Z:=71*Z2; LFSIC:=Z;
9000 I:=H+A*P1+66*M1+1125*T1+3366*L;
9100 WRITE(DISC1(1),2, POINTER(CFS10));
9200 END END END END END;
9300 DO:=0; MU:=0;
9400 CYCLO(L,0,2,1,F) BEGIN IB:=1+2*(PA(1)+A(1));
9500 CYCLO(M,0,1,H) BEGIN CICO(M2,0,1,H) EFGTN
9600 CYCLO(T1,0,1,1/2) BEGIN K:=0;
9700 CYCLO(T2,0,1,1/2) BEGIN N:=A1+M2;
9800 LM1:=1/2+3*M1+T1; LM2:=1/2+3*M2+T2;
9900 DM:=LM2*Y*TM2-LM1-3*IMP;
10000 STG:=(-1)**STG(MP);
10100 IF DM=IAM OR
10200 DM=STG*IAM OR
10300 DM=50*IAM-10 THEN BFGTN;
10400 T:=T1+T2;
10500 IF NOT BOLFAP*(M+K+T+PA(1)+PA(2)) THEN BEGIN
10600 Z:=2*(2*M+H/2+T+IAM/2)+
10700 3*(H+MU+T);
10800 CYCLO(R1,0,1,(M1+T1)/2) BFGTN Z6:=2*(-R1)*3*(-2*P1);
10900 Z7:=2R*79; C:=L0(M2,0,1,(M2+T2)/2) BEGIN
11000 Z8A:=2*(1-P)*3*(2+R2); Z8B:=78A*73;
11100 P:=P1+R2; CYCLO(N1,MAX(0,T1-3*R1),1,1/2,(L/2,H1+T1-2*R1)) BFGTN
11200 Z7:=7**N1*3*(-H1); Z7:=77*Z8A;
11300 CYCLO(N2,MAX(0,T2-3*P2),1,MIN(LR/2,M2+T2-2*P2)) BEGIN
11400 Z6:=7**N2*3*(H2)*(FACT(N2)*FACT(M+MU+T-2*R-H1))**2;
11500 Z6:=Z6*4; AS:=0; K:=K+1; Q:=M+MU+T-2*R-N1-H2;
11600 CYCLO(NH,1,6,MP) BFGTN Z5:=0;
11700 Y1:=PA(N0); Q2:=PA(MU+1); Y3:=PA(MU+2); Y4:=PA(MU+3); Y5:=PA(MU+4);
11800 Z6B:=Z6*(1+Y4+Q2+(2*Y4)**3*(Y4/2));
11900 GAM(L+3*M+T+Y5+Y1+Y2+Y4+5)/2)/GAM(L/2+3*(M+T)/2
12000 -3*P-M2-N1+(Y1+Y2+Y5+Y4+5)/2)**2*SPALL(-IAM+Y1+Y2-3*TM2
12100 +3*TM2);
12200 CYCLO(A1,0,1,2) BEGIN Z4:=0;
12300 Z3:=0;
12400 IF QO GFG=-A1+Y4 THEN BFGTN
12500 Z3:=0;
12600 CYCLO(A3,MAX(0,-A1+Y4),1,MIN(QO,(QO+H1-A1+Y4)/2)) BFGTN
12700 Z2:=0;
12800 CYCLO(A4,0,1,MIN(Q6-A3,Q6-A1+1-2*A3+Y4)) BFGTN
12900 Z1:=0; CICO(A5,0,1,A4) BFGTN
13000 Z1:=21+7*(A-A5)+3*A5*(GAM((H+MU+T+Y4+1)/2)+R+A4-A1-A3-A5+1/2)
13100 *GAM(2*A1+A5+2*A3-Y4+Y1/2-Y3/2+1)/(FACT(A3)*FACT(A5))**2;
13200 END;
13300 Z2:=Z2+(-1)**A3*(A4)*GAM(1/2+Q4-A1-A3-A4+(Y5+Y3+2*Y4)/2+1)
13400 /FACT(QO+H1-A1-2*A3-A4+Y4)*FACT(QO+H1-A3-A4)/FACT(Q6-A3-A4))**2*Z1;
13500 END;
13600 Z3:=Z3+2*(-4*A3)*3*A3*(1/(FACT(A3)*FACT(A1+A3-Y4)))**2
13700 +Z2; END END;
13800 Z5:=Z5+2*(-4*A1)*3*A1*1/(FACT(A1)*FACT(2-A1))**2*Z3; LMD;
13900 Z:=Z5*Z6B*7X:=7*PA(H+5);
14000 A(I0):=A5T0+7X;
14100 END;
14200 WRITE(DISC3(1)+DIR(0),2, POINTER(A*(0)));
14300 END END END END END END;
14400 J:=T1+6*M2+102*M1+1734*L;
14500 DTP(0):=DTP(0)+K;
14600 WRITE(DISC2(1),2, POINTER(LTR(0)));
14700 DPT(0):=DPT(0); END END END;

```

```

0000000700
0000000800
0000000900
0000001000
0000001100
0000001200
0000001300
0000001400
0000001500
0000001600
0000001700
0000001800
0000001900
0000002000
0000002100
0000002200
0000002300
0000002400
0000002500
0000002600
0000002700
0000002800
0000002900
0000003000
0000003100
0000003200
0000003300
0000003400
0000003500
0000003600
0000003700
0000003800
0000003900
0000004000
0000004100
0000004200
0000004300
0000004400
0000004500
0000004600
0000004700

```

17890
17900
17910
17920
17930
17940
17950
17960
17970
17980
17990
18000
18010
18020
18030
18040
18050
18060
18070
18080
18090
18100
18110
18120
18130
18140
18150
18160
18170
18180
18190
18200
18210
18220
18230
18240
18250
18260
18270
18280
18290
18300
18310
18320
18330
18340
18350
18360
18370
18380
18390
18400
18410
18420
18430
18440
18450
18460
18470
18480
18490
18500
18510
18520
18530
18540
18550
18560
18570
18580
18590
18600

```
WRITE (SAL, <"ACABE AS">);  
ITEM2 = ITEM(2)/60 - TIME;  
WRITE (SAL, <"TIMEPO F IN AS", T2, E14, 7>, 1, TIME);  
WRITE (SAL, <"TIMEPO F IN AS", I2, F14, 7>, 1, TIME);  
N2 = 0;  
DO 10 (M1, 0, 1, NF) BEGIN C1C10(M2, 0, 1, M1) BEGIN  
C1C10(I1, A, 1, 2) BEGIN K=0;  
J = I1 + 1; M2 = I1 + 1; M1 = I1 + 1;  
READ (DISC1(I1), 2, POINTER(AS1(01)));  
C1C10(I2, 0, 1, I2) BEGIN  
M = M1 + M2;  
LM1 = (I2 + 3 * M1 + I1); LM2 = (I2 + 3 * M2 + I2,  
DLN = LM2 + 3 * MP2 - LM1 - 3 * MP1;  
STON = (-1) * STON(MP);  
IF DLN = LAM OR  
DLN = STON * LAM OR  
DLN = 50 * LAM - 100 THEN DFGTH  
I = I1 + I2;  
IF NOT (DCLFAM * (M + M1 + I + PA1(1) + PA1(2))) THEN DFGTH  
MHEVQ = 5 * FACT(LG + L + I + 1 + 3 * MP1 + 3 * MP2) / FACT(2 * I + 6 * MP) *  
FACT(I + L - I + 3 * MP1 + 3 * MP2) / FACT(2 * I + 6 * MP) * (FACT((LAM + LM1  
+ I2 + 4 * MP1 + 3 * MP2) / 2) / FACT(LAM + LM1 + L * 2 + 4 * 3 * MP1  
+ 3 * MP2)) * 7 * TEM5;  
C1C10(R1, A, 1, (M1 + I1) / 2) DFGTH  
C1C10(R2, A, 1, (M2 + I2) / 2) DFGTH  
C1C10(R1, MAX(0, I1 - 3 * R1), 1, MIN(L / 2, M1 + I1 - 2 * R1)) BEGIN  
I = M1 + 6 * R1 + 66 * (M1 + MP1) + 1122 * I1 + 3 * 66 * L;  
READ (DISC1(I1), 2, POINTER(CCS1(01)));  
CCS1(01) = CCS1(01) * I1 + MP1 * (M1 + I1 - M1 - 2 * R1);  
C1C10(M2, MAX(0, I2 - 3 * P2), 1, MIN(L / 2, M2 + I2 - 2 * P2)) DFGTH K = K + 1;  
J = M2 + 6 * P2 + 66 * (M2 + MP2) + 1122 * I2 + 3 * 66 * (I2);  
READ (DISC1(I2), 2, POINTER(CCS1(01)));  
READ (DISC1(AS1(I1) + K), 2, POINTER(AS1(01)));  
CCS1(I1) = CLAS1(01) * (I1 + MP2 * (M2 + I2 - M2 - 2 * P2));  
R1 = CCS1(01) * CCS1(01) * AS1(01);  
M2 = M2 + M1; END END END END;  
M2 = M2 * MHEVQ;  
LM1 = (L + 6 * MP1) / 2 + 3;  
LM2 = (L + 6 * MP2) / 2 + 3;  
IF I1 IS 6 OF LM1 + 3 * MP1 LESS 1 THEN J1 = 1 ELSE  
DFGTH  
IF (LM1 = L) / 3 FOR ENTIER((M1 - 1) / 3) THEN  
MUM1 = (M1 - 1) / 3 ELSE MUM1 = ENTIER((M1 - 1) / 3 + 1);  
S1 = M1 + 1 - MUM1; END;  
IF I2 IS 6 OF LM2 + 3 * MP2 LESS 1 THEN S2 = 1 ELSE  
DFGTH  
IF (LM2 = L) / 3 FOR ENTIER((M2 - 1) / 3) THEN  
MUM2 = (M2 - 1) / 3 ELSE MUM2 = ENTIER((M2 - 1) / 3 + 1);  
S2 = M2 + 1 - MUM2; END;  
WRITE (SAL, <"S1( " I2, " " I2, " " 6 (I2, " 5 " ) = " E30, 23>;  
LAM, 0, LM1 + 3 * MP1, S1, " 1 " I2, " " 6 (I2, " 5 " ) = " E30, 23>;  
WRITE (SAL, <"S2( " I2, " " I2, " " 6 (I2, " 5 " ) = " E30, 23>;  
LAM, 0, LM1 + 3 * MP1, S1, L + 3 * MP1, LM2 + 3 * MP2, S2, L + 3 * MP2, M2);  
M2 = 0; END END END END END END  
END END END.
```

00017890
00017900
00017910
00017920
00017930
00017940
00017950
00017960
00017970
00017980
00017990
00018000
00018010
00018020
00018030
00018040
00018050
00018060
00018070
00018080
00018090
00018100
00018110
00018120
00018130
00018140
00018150
00018160
00018170
00018180
00018190
00018200
00018210
00018220
00018230
00018240
00018250
00018260
00018270
00018280
00018290
00018300
00018310
00018320
00018330
00018340
00018350
00018360
00018370
00018380
00018390
00018400
00018410
00018420
00018430
00018440
00018450
00018460
00018470
00018480
00018490
00018500
00018510
00018520
00018530
00018540
00018550
00018560
00018570
00018580
00018590
00018600

PROGRAMA COEFICIENTES ST (3A, A, 0, A, M, L, A, M, L')

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

```

BEGIN
PROGRAMA CALCULA LOS SIMBOLOS SJ REDUCIDOS (3*MI, 1,0,PLAND,
SP,LC,LE,AMDP,SP,FL);
CORPRSPONDIENTES A LA CADENA U(5);P(Z);
ESTE PROGRAMA FUNCIONA PARA VALORES DEL MOMENTO ANGULAR
Z MENORES O IGUALES A 10 Y PARA UN NUMERO DE CHANITOS DE 24 (SI L=0)
FILE FN(KIND=PRINT);
FILE SA(KIND=PRINT); FILE DTS(1)(KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXRECSTZ=2
BLOCKSTZ=30);
FILE SALL(KIND=PRINT);
FILE DTS(2)(KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXRECSTZ=2
BLOCKSTZ=30);
FILE DTS(3)(KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXRECSTZ=2
BLOCKSTZ=30);
INTFCG(0);
MM(1,MP,MP1,MP2,MP3,MP4,MP5,MM1,MM2,MM3,MM4,MM5,MM6,MM7,MM8,MM9,MM10,MM11,MM12,MM13,MM14,MM15,MM16,MM17,MM18,MM19,MM20,MM21,MM22,MM23,MM24);
DOUBL(X1,Z1,21,22,23,24,25,26,27,28,29,24,25,26,27,28,29,24,25,26,27,28,29,24,25,26,27,28,29);
XX,YY,ZZ,MM,2X1,00,700,TEMS,X1,X2,X3,720;

DOUBLE ARRAY CES(0:0),CF(0:0),AS(0:0),DTR(0:0),DIR(0:0),AS1(0:0);
DEFINT CICLO(A,P,C,D)= FOR A:=B STEP C UNTIL D DO#;

REAL PROCEDURE SCALE(O); VALUE O; INTEGER Q;
BEGIN
OWN REAL ARRAY S(-65:97);
IF O<=-66 THEN SCALE:=S(0) ELSE
BEGIN
DOUBLE T; INTEGER I;
T:=1.0000; S(0):=1.00;
SCALE:=0.0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 97 DO BEGIN
T:=T*2.0000-1; S(I):=T END;
T:=1.0000;
FOR I:=-1 STEP -1 UNTIL -65 DO BEGIN
T:=T*4.0000-1; S(I):=T END;
END END;
END;

REAL PROCEDURE FACT(N); VALUE N; INTEGER M;
BEGIN
OWN REAL ARRAY F(0:100);
IF N<=0 THEN FACT:=F(N) ELSE
BEGIN
DOUBLE T; INTEGER I; REAL C;
C:=SCALE(-1000);
FACT:=5.0;
T:=1.0000; F(0):=1.0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 100 DO BEGIN
T:=T+1.0000-2;
F(I):=C*FACT(T) END END;
END;

REAL PROCEDURE GAM(N); VALUE N; REAL M;
BEGIN
OWN REAL ARRAY G(0:100);
IF N<=0 THEN GAM:=G(N) ELSE
BEGIN
INTEGER Y; REAL YI;
YI:=FACT(-1000);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 99 DO BEGIN

```

0000100
0000110
0000120
0000130
0000140
0000150
0000160
0000170
0000180
0000190
0000200
0000210
0000220
0000230
0000240
0000250
0000260
0000270
0000280
0000290
0000300
0000310
0000320
0000330
0000340
0000350
0000360
0000370
0000380
0000390
0000400
0000410
0000420
0000430
0000440
0000450
0000460
0000470
0000480
0000490
0000500
0000510

001
002
003
004
005
006
007
008
009
010
011
012
013
014
015
016
017
018
019
020
021
022
023
024
025
026
027
028
029
030
031
032
033
034
035
036
037
038
039
040
041
042
043
044
045
046
047
048
049
050
051
052
053
054
055
056
057
058
059
060
061
062
063
064
065
066
067
068
069
070
071
072
073
074
075
076
077
078
079
080
081
082
083
084
085
086
087
088
089
090
091
092
093
094
095
096
097
098
099
100

```
T:=Y1+T2;
CTCLO(KK,0,M1,2,MU) BEGIN
IF ABS(CLM) LFC 3*KK THEN BFGTH
CTG:=3*KK;
IF NOT RUDL(CAI(CLM+SICH) THEN BFGTH
IF NOT RUDL(CAI(CM+KK+T+PA(41+PA21) TMLN PERIN
ZP:=72*(1)**(MU+KK)/2)*(FACT(MU+KK)/2)*
FACT((MU+KK)/2)*FACT(KK)**2*(1-KL/2);
ZQ:=ZP+2*(1)**(M+KK)/2*(T)*
3*(M+KK+T);
CTCLO(R,0,1,(M1+T1)/2) BFGTH ZR:=2*(1-F1)*3*(-2*P1);
ZR:=ZR+7; CTCLO(P2,0,1,(M2+T2)/2) BEGIN
ZRA:=2*(1-F2)*3*(-2*R2); ZRA:=ZRA+7;
R:=P1+R2; CTCLO(N1,MAX(0,T1-3*R1),1,MIN(1/2,M1+T1-2*R1)) BFGTH
Z7:=2*(1+3*(-N1)); Z7:=Z7+ZRA;
CTCLO(N2,MAX(0,T2-3*R2),1,MIN(1/2,M2+T2-2*R2)) BEGIN
Z6:=2*(1+3*(-N2))*FACT(N2)*FACT(M+KK+T-2*R-N2)**2;
Z6:=Z6+7; AS101:=0; K:=K+1; OQ:=M+KK+T-2*R-N1-N2;
CTCLO(N1,6,NP2) BFGTH Z5:=0;
Y1:=PA(NU+1); Y2:=PA(NU+1); Y3:=PA(NU+2); Y4:=PA(NU+3); Y5:=PA(NU+4);
Z6:=7*(-1)*Y4+2*(Y4)**2*(Y4)/2;
(CM+(1+7)**(M+KK+T)/2-3*R-N2)*1+(Y1+Y2+Y3+Y4+5)/2)**2;
CTCLO(A1,0,1,N2) BEGIN Z4:=0;
Z4:=0; CFG=-A1+Y5 THEN BFGTH
Z4:=0;
CTCLO(A3,MAX(0,-A1+Y4),1,MIN(OQ,(OQ+N1-A1+Y4)/2)) BFGTH
Z3:=0;
CTCLO(A4,0,1,MIN(OQ-A3,OQ-A1+N1-2*A3+Y4)) BFGTH
Z1:=0; CTCLO(A5,0,1,A4) BFGTH
Z1:=Z1+2*(-A5)**A5*(GAM((M+KK+T+Y4+Y2)/2-B+A4-A1-A3-A5+1/2)
*A5*(2*A1+A5+2*A3-Y4+Y1/2-Y3/2+1)/(FACT(A4-A5)*FACT(A5)))**2;
END;
Z2:=Z2+(-1)**4*3*(1-A4)*GAM(1/2+OQ-A1-A3-A4+(Y5+Y3+2*Y4)/2+1)
/FACT(OQ+N1-A1-2*A3-A4+Y4)*FACT(OQ+N1-A3-A4)/FACT(OQ-A3-A4)**2+Z1;
END;
Z1:=Z1+2*(-4*A1)**3**A1+1/(FACT(A1)*FACT(P2-A1))**2*Z3; LND;
Z:=Z5+Z6; X:=2*PA(NU+5);
AS101:=AS101+X;
END;
WRITE(DTSC3IN+DIR(0),2,POINTER(AS10));
END END END END END END END;
J:=Y1+5;K:=1;O2:=M1+1734*1;
WRITE(DTSC3IN+K,POINTER(DTR1(0)));
DTR1(0)=DIR(0); END END;
WRITE(SAL,KACAB(AS>));
ITIME=ITIME/2;O2=ITIME;
WRITE(SAL,KTIMEPC(1,AS,ITIME/2,1,ITIME));
WRITE(SAL,KTIMEPC(1,AS,ITIME/2,1,ITIME));
M2:=0;
CTCLO(M1,0,1,NP) BFGTH CTCLO(M2,0,1,M1) BEGIN
CTCLO(T1,A,1,(T2)/2) BFGTH K:=0;
J1:=T1+2*(1)**(M2+M1+1734+L);
PAAD(DTSC3IN+2,POINTER(AS110));
CTCLO(T2,0,1,(T2)) BFGTH
M:=M1+M2;
L1:=L/2+7*(1)+T1; L2:=L/2+7*(1)+T2;
FIN:=M2+M1;
```

0000812
0000825
0000890
0001020
0001130
0001140
0001145
0001147
0001150
0001155
0001160
0001170
0001175
0001180
0001190
0001200
0001206
0001210
0001220
0001230
0001250
0001255
0001260
0001270
0001280
0001285
0001290
0001300
0001310
0001320
0001330
0001340
0001350
0001360
0001370
0001380
0001390
0001400
0001410
0001420
0001430
0001440
0001450
0001460
0001470
0001480
0001490
0001500
0001510
0001520
0001530
0001540
0001550
0001560
0001570
0001580
0001590
0001600
0001610
0001620
0001630
0001640
0001650
0001660
0001670
0001680
0001690
0001700
0001710
0001720
0001730
0001740
0001750
0001760
0001770
0001780
0001790
0001800

APENDICE BPARENTESIS DE TRANSFORMACION ENTRE LOS ESTADOS ENLA CADENA $U(6) \supset O(6) \supset O(5)$ y $U(6) \supset U(5) \supset O(5)$.

Los estados caracterizados por las representaciones irreducibles de la cadena de grupos $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3)$ están dados por las ecs. (3.23) y (2.23), mientras que los asociados con la cadena $U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3)$ toman la forma (3.45).

Es claro que los paréntesis de transformación entre ellos son independientes de s , L , M y diagonales en la Λ ,⁶⁴ por lo que para un valor dado de Λ podemos tomar

$$S = 1, \quad L = M = 2\Lambda \quad (\text{B.1})$$

Denotamos estos estados particulares por los kets $|n\nu\Lambda\rangle$ y $|N\rho\Lambda\rangle$ respectivamente, que están dados por las relaciones

$$|n\nu\Lambda\rangle = \langle \bar{\alpha} | n \rangle \left[2 \left(\frac{\nu - \Lambda}{2} \right)! / \Gamma \left(\frac{\nu + \Lambda + 5}{2} \right) \right]^{1/2} \\ \times L_{\left(\frac{\nu - \Lambda}{2} \right)}^{\Lambda + \frac{3}{2}}(\beta^2) \exp(-\beta^2/2) \alpha_2^\Lambda \quad (\text{B.2a})$$

$$|N\rho\Lambda\rangle = B_{N\rho\Lambda} b^\rho L_{\left(\frac{N - \rho}{2} \right)}^{\rho + 2}(b^2) \exp(-b^2/2) \\ \times (\sin \delta)^\Lambda C_{\rho - \Lambda}^{\Lambda + 2}(\cos \delta) (\alpha_2/\beta)^\Lambda, \quad (\text{B.2b})$$

donde $\langle \bar{\alpha} | n \rangle$ es el estado de oscilador armónico en una dimensión, ec. (3.22), y donde hemos utilizado el hecho de que la parte en δ y \mathcal{U} se reduce en este caso (ver apéndice A) al término $(\alpha_2/\beta)^\Lambda$, excepto por factores de normalización,

que podemos omitir ya que aparecen en ambas ecuaciones.

En lugar de realizar la expansión de $|N\rangle$ en términos de $|\eta\rangle$ utilizando las expresiones (B.2), es más simple hacerlo utilizando realizaciones alternativas de (B.2) en términos de los operadores η_m y $\bar{\eta}$. Procedemos ahora a encontrarlas, y para ello haremos uso de los siguientes hechos:

i) Si

$$P_{\Lambda}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \exp[-(\alpha \cdot \alpha)/2], \quad (\alpha \cdot \alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 \quad (\text{B.4})$$

es una función de onda normalizada del oscilador armónico en r dimensiones con Λ quanta y que es eigenfunción del operador de Casimir de $O(r)$ con eigenvalor $\Lambda(\Lambda + r - 2)$, entonces

$$\prod_{i=1}^r \pi^{r/4} 2^{-\Lambda/2} P_{\Lambda}(\eta_1, \dots, \eta_r) |0\rangle, \quad (\text{B.5})$$

es un estado normalizado con los mismos números cuánticos que (B.4); éste es el Teorema de Dragt⁶⁵).

Demostraremos este teorema debido a su simplicidad y gran importancia dentro de el análisis.

Consideremos primero al polinomio (B.5) como función de los operadores cartesianos η_i . Es claro de los análisis del capítulo II que este polinomio satisface las relaciones

$$\sum_{i=1}^r \xi_i \xi_i P(\eta_j) = 0, \quad \hat{N} P(\eta_j) = \Lambda P(\eta_j), \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\eta_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_j - i\pi_j), \quad \xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_j + i\pi_j), \quad (\text{B.7})$$

y

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^r \eta_i \xi_i \quad , \quad (\text{B.8})$$

$$\beta^2 = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 \quad . \quad (\text{B.9})$$

Para un oscilador en una dimensión, es bien sabido que las funciones de onda pueden escribirse como ²⁹⁾

$$\eta^n |0\rangle = \pi^{-1/4} \alpha^{-n/2} H_n(\alpha) \exp(-\alpha^2/2) \quad , \quad (\text{B.10})$$

donde H_n es un polinomio de Hermite cuyos términos principales son

$$H_n(\alpha) = \alpha^n - 2^{n-1} \binom{n}{2} \alpha^{n-2} + \dots \quad (\text{B.11})$$

de modo que para el oscilador armónico en r dimensiones

$$\begin{aligned} P(\eta_i) &= \sum_{n_i} A_{n_1 n_2 \dots n_r} \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \dots \eta_r^{n_r} |0\rangle \\ &= \pi^{-r/4} \alpha^{-N/2} \sum_{n_i} A_{n_1 \dots n_r} H_{n_1}(\alpha_1) H_{n_2}(\alpha_2) \dots H_{n_r}(\alpha_r) \exp(-\beta^2/2) \\ &= \pi^{-r/4} \alpha^{-N/2} \sum_{n_i} A_{n_1 \dots n_r} (\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \dots \alpha_r^{n_r} + \dots) \exp(-\beta^2/2) \\ &= \pi^{-r/4} \alpha^{-N/2} P'(\alpha_i) \exp(-\beta^2/2) \quad , \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

donde $n_1 + n_2 + \dots + n_r = \Lambda$ y los puntos suspensivos en (B.12) indican monomios en las α_i con grado menor a Λ .

Para demostrar el teorema es necesario mostrar que $P' = P$, i.e., que todos los términos..... en (B.12) se cancelan.

Si usamos ahora las ecuaciones (B.6) y utilizamos (B.7) para aplicar los operadores del lado derecho en términos de las α_i , llegamos a las relaciones

$$\sum_{i=1}^r \xi_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} P'(\alpha_i) = \Lambda P'(\alpha_i) \quad , \quad (B.13a)$$

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} P'(\alpha_i) = 0 \quad , \quad (B.13b)$$

lo que de inmediato muestra que efectivamente $P' = P$, ya que las ecs. (B.13) son idénticas a las (B.6) si hacemos la identi-

cación $\xi_i = \frac{\partial}{\partial \eta_i} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$.

Es claro que el teorema sigue siendo válido cuando expresamos a los polinomios en términos de las componentes esféricas η_m , α_m , ya que estas variables son combinaciones lineales de los componentes cartesianas.

ii) Para el polinomio que aparece en (B.6) y para cualquier entero positivo ρ se satisface

$$(\xi \cdot \xi)(\eta \cdot \eta)^\rho P_\Lambda(\eta) |c\rangle = 2\rho(2\rho + r - 2 + 2\Lambda)(\eta \cdot \eta)^{\rho-1} P_\Lambda(\eta) |c\rangle, \quad (B.14)$$

lo que es consecuencia de $(\xi \cdot \xi) P_\Lambda(\eta) = 0$ y de la equivalencia

$$\xi_i P(\eta) |c\rangle = \frac{\partial}{\partial \eta_i} P_\Lambda(\eta) |c\rangle.$$

Para el caso $U(6) \supset U(5)$, ec. (B.2a), deducimos del teorema de Dragt

$$|c \wedge \wedge\rangle = \left(\frac{2}{\Gamma(\Lambda + 5/2)} \right)^{1/2} \pi^{5/4} 2^{-\Lambda/2} \eta_2^\Lambda |c\rangle, \quad (B.15)$$

donde de nuevo se ha ignorado un factor de normalización que no será relevante. Del significado de \wedge , (número de bosones no apareados a $L = 0$), es claro que (B.15) puede generalizarse a los casos $\nu \neq \Lambda$ por aplicación repetida del operador $(\lambda, c) \equiv (\eta \cdot \eta) :$

$$|0\nu\Lambda\rangle = B'_{\nu\Lambda} \left(\frac{2}{\Gamma(\Lambda+5/2)} \right)^{1/2} \pi^{5/4} 2^{-\Lambda/2} (\eta \cdot \bar{\eta})^{(\nu-\Lambda)/2} \eta_2^\Lambda |0\rangle, \quad (\text{B.16})$$

donde el coeficiente $B'_{\nu\Lambda}$ se evalúa mediante la aplicación repetida de la relación (B.14), encontrándose

$$B'_{\nu\Lambda} = (-1)^{(\nu-\Lambda)/2} \left[\frac{[(\nu+\Lambda)/2+1]! (2\Lambda+3)!}{[(\nu-\Lambda)/2]! (\Lambda+1)! (\nu+\Lambda+3)!} \right]^{1/2}. \quad (\text{B.17})$$

Finalmente, es obvio que

$$|\eta\nu\Lambda\rangle = (n!)^{-1/2} (\bar{\eta})^n |0\nu\Lambda\rangle. \quad (\text{B.18})$$

El factor de fase que se agregó a (B.17) se escogió de tal manera que (B.18) tiene exactamente las mismas fases que (B.2a).

Pasando al caso de los estados (B.2b), obtenemos del teorema de Dragt

$$|\rho\rho\Lambda\rangle = B_{\rho\rho\Lambda} \pi^{3/2} 2^{\rho/2-\Lambda} \frac{(\rho+1)!}{(\rho-\Lambda)! (\Lambda+1)!} \eta_2^\Lambda \sum_s a_s (\bar{\eta})^{\rho-\Lambda-2s} (\eta \cdot \eta + \bar{\eta}^2)^s |0\rangle, \quad (\text{B.19})$$

donde $B_{\rho\rho\Lambda}$ es un coeficiente de normalización que obtendremos más adelante, $a_s = \binom{\Lambda-\rho}{2}_s \binom{\Lambda-\rho+1}{2}_s / s! (-\rho-1)_s$, son coeficientes provenientes de la expansión de el polinomio de Gegenbauer

$$C_{\rho-\Lambda}^{\Lambda+2}(\cos\delta) \quad (30) \quad \text{y} \quad (k)_s = k(k+1)\dots(k+s-1).$$

es el símbolo de Pochhammer.

El coeficiente $B_{\rho\rho\Lambda}$ es un caso particular de $B_{N\rho\Lambda}$ en (B.2b), que se obtiene de la normalización de estas funciones ³⁰⁾ en los índices N y ρ :

$$\int_0^\pi (\sin \varepsilon)^{2\Lambda+4} C_{\rho-\Lambda}^{\Lambda+2}(\cos \varepsilon) C_{\rho-\Lambda}^{\Lambda+2}(\cos \varepsilon) d\varepsilon \quad (\text{B.20a})$$

$$= \pi (\rho+\Lambda+3)! \delta_{\rho\rho'} / (\rho+2) 2^{2\Lambda+3} (\rho-\Lambda)! (\Lambda+1)^2$$

y

$$\int_0^\infty \exp(-b^2) \cdot b^{2\rho+5} L_{(N-\rho)/2}^{\rho+2}(b^2) L_{(N'-\rho)/2}^{\rho+2}(b^2) db \quad (\text{B.20b})$$

$$= [(N+\rho)/2+2]! / 2 [(N-\rho)/2]! \delta_{NN'}$$

i.e.,

$$B_{N\rho\Lambda} = 2^{\Lambda+2} (\Lambda+1)! \left[\frac{(\rho-\Lambda)! [(N-\rho)/2]! (\rho+2)}{\pi (\rho+\Lambda+3)! [(N+\rho)/2+2]!} \right]^{1/2} \quad (\text{B.21})$$

Por analogía con (B.16), el estado general es ahora

$$|N\rho\Lambda\rangle = B'_{N\rho} (\eta \cdot \eta + \bar{\eta}^2)^{(N-\rho)/2} |\rho\rho\Lambda\rangle, \quad (\text{B.22})$$

donde $B'_{N\rho}$ se determina de nuevo aplicando (B.14) repetidamente, encontrándose

$$B'_{N\rho} = (-)^{(N-\rho)/2} \left[\frac{(\rho+2)!}{2^{N-\rho} ((N-\rho)/2)! ((N+\rho)/2+2)!} \right]^{1/2} \quad (\text{B.23})$$

El último paso en el análisis consiste en hacer un desarrollo binomial del operador $(\eta \cdot \eta + \bar{\eta}^2)^{S+(N-\rho)/2}$ en (B.22), lo que tras de un intercambio de sumas y la comparación con (B.18) conduce a la relación

$$|N_{\beta\Lambda}\rangle = \sum_{\nu} \langle n_{\nu\Lambda} | N_{\beta\Lambda} \rangle |n_{\nu\Lambda}\rangle, \quad (\text{B.24})$$

con $\langle n_{\nu\Lambda} | N_{\beta\Lambda} \rangle$ dado por la ec. (3.48).

Apéndice C

NTLDF66 (05/23/79) PROGRAMA DE EVALUACIÓN DE ELEMENTOS DE MATRIZ RELEVANTES EN EL MODELO DE BOSONES CON INTERACCIÓN. 10:17 PM TUESDAY, SEPTEMBER

135
Apéndice C

```

46000 BEGIN
46001 X=ESTE PROGRAMA CALCULA ELEMENTOS DE MATRIZ DE (2,0)**R*(3,0)**M,
46002 EN EL CASO DE IGUAL A LAMBDA;
46003 EN EL CASO DE DIFERENCIALES LAMBDA, LAMBDA, 0, L, L>
46004 TAMBIEN CALCULA EL PRODUCTO ESCALAR;
46005 EN TODOS LOS CASOS SE USAN ESTADOS DE MAXIMA PROYECCIÓN,
46006 DEL MOMENTO ANGULAR;
46007 EL PROGRAMA FUNCIONA PARA UN MOMENTO ANGULAR MENOR O IGUAL
46008 A 10 Y PARA UN NUMERO DE CUANTOS DE 20 (L=0)
46009 FILE ENT(KIND=EMOTE);
46010 FILE CAL(VIND=EMOTE); FILE DISC(KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXPESIZE=2
46011 BLOCKSIZE=30);
46012 FILE CAL(KIND=EMOTE);
46013 FILE DISC(KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXPESIZE=2
46014 BLOCKSIZE=30);
46015 FILE DISC(KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXPESIZE=2
46016 BLOCKSIZE=30);
46017 FILE DISC(KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXPESIZE=1,BLOCKSIZE=30);
46018 FILE DISC(KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXPESIZE=1,BLOCKSIZE=30);
46019 INTEGER A1,A2,A3,A4,A5,P,T,M,RO,N1,N2,L,A,B,C,D,K,RU,V1,Y2,Y3,OLM,SIGM,
46020 M1,M2,M3,M4,M5,Y4,Y5,NU,J,M2,L1,L2,L3,MUM1,MUM2,NN,S2,MAP,
46021 G1,IMP,L0,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,L9,L10,L11,MUM1,MUM2,NN,S2,MAP,
46022 DOUBLE Z1,Z2,Z3,Z4,Z5,Z6,Z7,Z8,X,Y,Z,ZA,N1,W2,Z9A,TTE,TIEM,NUFVC,
46023 XX,X3,ZX,Q4,ZK1,Q0,Z6P,TEQS,X1,X2,X3;
46024
46025 DOUBLE ARRAY CES(0:0),CES1(0:0),AS(0:0),DIR(0:0),DIR1(0:0),AS1(0:0);
46026 REAL ARRAY RES(0:0);
46027 DEFINE CICLO(A,B,C,D)= FOR A=B STEP C UNTIL D DO#;
46028
46029 REAL PROCEDURE SCALE(Q); VALUE Q; INTEGER Q;
46030 BEGIN OWN REAL ARRAY S(0:0);
46031 IF Q=66 THEN SCALE:=S(Q) ELSE
46032 BEGIN DOUBLE T; INTEGER I;
46033 T:=1.0/Q; S(Q):=1.0;
46034 SCALE:=0.0;
46035 FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 97 DO BEGIN
46036 T:=T+2.0/Q; S(I):=T END#;
46037 T:=1.0/Q;
46038 FOR I:=1 STEP -1 UNTIL -65 DO BEGIN
46039 T:=T+4.0/Q; S(I):=T END#;
46040 END END#;
46041
46042 REAL PROCEDURE FACT(W); VALUE W; INTEGER W;
46043 BEGIN
46044 OWN REAL ARRAY F(0:100);
46045 IF W=0 THEN FACT:=F(W) ELSE
46046 BEGIN DOUBLE I; INTEGER I; REAL C;
46047 C:=SCALE(-100);
46048 FACT:=0.0;
46049 T:=1.0/Q; F(0):=1.0;
46050 FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 100 DO BEGIN
46051 T:=T+4.0/Q;
46052 F(I):=DAOPT(I) END END END#;
46053 REAL PROCEDURE GAM(W); VALUE W; REAL W;
46054 BEGIN
46055 OWN REAL ARRAY G(0:100);

```

```

00000100
00000150
00000160
00000165
00000170
00000175
00000190
00000192
00000195
00000200
00000205
00000210
00000220
00000230
00000240
00000250
00000260
00000270
00000280
00000290
00000300
00000310
00000320
00000330
00000340
00000350
00000360
00000370
00000380
00000390
00000400
00000410
00000420
00000430
00000440
00000450
00000460
00000470
00000480
00000490
00000500
00000510
00000520
00000530
00000540
00000550
00000560
00000570
00000580
00000590
00000600
00000610
00000620
00000630
00000640
00000650
00000660
00000670
00000680
00000690
00000700
00000710
00000720
00000730
00000740
00000750
00000760
00000770
00000780
00000790
00000800
00000810
00000820
00000830
00000840
00000850
00000860
00000870
00000880
00000890
00000900
00000910
00000920
00000930
00000940
00000950
00000960
00000970
00000980
00000990
00001000
00001010
00001020
00001030
00001040
00001050
00001060
00001070
00001080
00001090
00001100
00001110
00001120
00001130
00001140
00001150
00001160
00001170
00001180
00001190
00001200
00001210
00001220
00001230
00001240
00001250
00001260
00001270
00001280
00001290
00001300
00001310
00001320
00001330
00001340
00001350
00001360
00001370
00001380
00001390
00001400
00001410
00001420
00001430
00001440
00001450
00001460
00001470
00001480
00001490
00001500
00001510
00001520
00001530
00001540
00001550
00001560
00001570
00001580
00001590
00001600
00001610
00001620
00001630
00001640
00001650
00001660
00001670
00001680
00001690
00001700
00001710
00001720
00001730
00001740
00001750
00001760
00001770
00001780
00001790
00001800
00001810
00001820
00001830
00001840
00001850
00001860
00001870
00001880
00001890
00001900
00001910
00001920
00001930
00001940
00001950
00001960
00001970
00001980
00001990
00002000
00002010
00002020
00002030
00002040
00002050
00002060
00002070
00002080
00002090
00002100
00002110
00002120
00002130
00002140
00002150
00002160
00002170
00002180
00002190
00002200
00002210
00002220
00002230
00002240
00002250
00002260
00002270
00002280
00002290
00002300
00002310
00002320
00002330
00002340
00002350
00002360
00002370
00002380
00002390
00002400
00002410
00002420
00002430
00002440
00002450
00002460
00002470
00002480
00002490
00002500
00002510
00002520
00002530
00002540
00002550
00002560
00002570
00002580
00002590
00002600
00002610
00002620
00002630
00002640
00002650
00002660
00002670
00002680
00002690
00002700
00002710
00002720
00002730
00002740
00002750
00002760
00002770
00002780
00002790
00002800
00002810
00002820
00002830
00002840
00002850
00002860
00002870
00002880
00002890
00002900
00002910
00002920
00002930
00002940
00002950
00002960
00002970
00002980
00002990
00003000
00003010
00003020
00003030
00003040
00003050
00003060
00003070
00003080
00003090
00003100
00003110
00003120
00003130
00003140
00003150
00003160
00003170
00003180
00003190
00003200
00003210
00003220
00003230
00003240
00003250
00003260
00003270
00003280
00003290
00003300
00003310
00003320
00003330
00003340
00003350
00003360
00003370
00003380
00003390
00003400
00003410
00003420
00003430
00003440
00003450
00003460
00003470
00003480
00003490
00003500
00003510
00003520
00003530
00003540
00003550
00003560
00003570
00003580
00003590
00003600
00003610
00003620
00003630
00003640
00003650
00003660
00003670
00003680
00003690
00003700
00003710
00003720
00003730
00003740
00003750
00003760
00003770
00003780
00003790
00003800
00003810
00003820
00003830
00003840
00003850
00003860
00003870
00003880
00003890
00003900
00003910
00003920
00003930
00003940
00003950
00003960
00003970
00003980
00003990
00004000
00004010
00004020
00004030
00004040
00004050
00004060
00004070
00004080
00004090
00004100
00004110
00004120
00004130
00004140
00004150
00004160
00004170
00004180
00004190
00004200
00004210
00004220
00004230
00004240
00004250
00004260
00004270
00004280
00004290
00004300
00004310
00004320
00004330
00004340
00004350
00004360
00004370
00004380
00004390
00004400
00004410
00004420
00004430
00004440
00004450
00004460
00004470
00004480
00004490
00004500
00004510
00004520
00004530
00004540
00004550
00004560
00004570
00004580
00004590
00004600

```


15784
15788
15792
16000
16100
16105
16110
16115
16300
16400
16500
16600
16700
16705
16710
16800
16900
17000
17100
17105
17110
17200
17300
17305
17310
17400
17405
17410
17420
17430
17440
17450
17460
17470
17480
17500
17505
17510
17520
17530
17540
17550
17560
17561
17760
17772

```
SYGN:=3*MI;  
IF NOT BCONFAN(DLM+SYGN) THEN BEGIN  
  I:=1+T2;  
  IF NOT BCONFAN(M+MI+T+PA(1)+PA(2)) THEN BEGIN  
    NUENV:=(GAM((LM2+LM1+6*IMP+2*RO+3*MU+5)/(2))*2*  
      2/(GAM(LM1+3*MI+5/2)*GAM(LM2+3*MI+5/2))*  
      SCALE((3*MI+3*MI));  
    CIRCLO(R1,0,1,(M1+T1)/2) BEGIN  
    CIRCLO(R2,0,1,(M2+T2)/2) BEGIN  
    L:=M1+6*RI+66*(M1+IMP)+97*(T1+3564*I);  
    READ(DTSF1(1)); POINTP(CES(1));  
    CFS(1):=CFS(1)+(1+IMP*(M1+T1-M1-2*R1));  
    CIRCLO(R2,0,1,(M2+T2)/2) BEGIN K:=K+1;  
    J:=M2+6*RI+2+66*(M2+IMP)+504*(T2+3564*I);  
    READ(DTSF1(1)); POINTP(CFS(1));  
    READ(DTSF1(1)); POINTP(CFS(1));  
    READ(DTSF1(1)); POINTP(CFS(1));  
    W1:=NUENV*CFS(1)*CFS(1)*AS(1);  
    W2:=W2+W1; END END END END;  
    LIM:=3+6*IMP/2+3;  
    IF L<=6 OF LM1+3*IMP LESS LIM THEN G1:=1 ELSE  
      BEGIN  
        IF (LM1=L)/3 FOR ENTIER((LM1=L)/3) THEN  
          NUM1:=(LM1=L)/3 ELSE NUM1:=ENTIER((LM1=L)/3+1);  
          S1:=M1+1+NUM1; END  
        IF 1<=6 OF LM2+3*IMP LESS LIM THEN G2:=1 ELSE  
          BEGIN  
            IF (LM2=L)/3 FOR ENTIER((LM2=L)/3) THEN  
              NUM2:=(LM2=L)/3 ELSE NUM2:=ENTIER((LM2=L)/3+1);  
              S2:=M2+1+NUM2; END  
            IF MU=0 THEN BEGIN YE 91 GFO 92 THEN BEGIN  
              MAP:=S1+ABS(S1-S2)+3*(L+3*IMP-5)+15*(M1+3*IMP);  
              RFS(1):=SINGLE(W2);  
              WRITE(DTSFSC6(MAP),1,POINTP(RFS(1)));  
              END; END ELSE BEGIN IF LM1<L THEN BEGIN  
                MAP:=S1+3*2-2+4*(L+3*IMP-5)+20*(LM1+3*IMP)  
                +4*(LM1+3)/2;  
                RFS(1):=SINGLE(W2);  
                WRITE(DTSF406(MAP),1,POINTP(RFS(1)));  
                END;  
              END;  
            END;  
            WRITE(SAL,44,EN,3(12,"12",3(12,""),3(12,""),7)=",",  
              20(13,"X3",MAP,EN,3(12,"12",3(12,""),3(12,""),7)=",",RO,LM1+3*IMP,S1,L+3*IMP,  
              RFS(1),MAP);  
            WRITE(SAL,44,EN,3(12,"12",3(12,""),3(12,""),7)=",",RO,LM1+3*IMP,S1,L+3*IMP,  
              20(13,"X3",MAP,EN,3(12,"12",3(12,""),3(12,""),7)=",",RO,LM1+3*IMP,S1,L+3*IMP,  
              RFS(1),MAP);  
            W2:=0; END END END END END END END  
          END END; LOCK(DTS306); LOCK(DTS6); END.
```

00015784
00015788
00015792
00016000
00016100
00016105
00016110
00016300
00016400
00016500
00016600
00016700
00016705
00016710
00016800
00016900
00017000
00017100
00017105
00017110
00017200
00017300
00017305
00017310
00017400
00017405
00017410
00017420
00017430
00017440
00017450
00017460
00017470
00017480
00017500
00017505
00017510
00017520
00017530
00017540
00017550
00017560
00017561
00017760
00017772

00
01
02
03
04
05
06
07
08
09
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200

```

BEGIN
ESTE PROGRAMA CALCULA ELEMENTOS DE MATRIZ DE (2,0)**RFA (X,0)**PU,
EN EL CASO NI IGUAL A LAMDA;
EL ESTADO LE DENOTAMOS Y LAMDA, LAMDA, S, L, L
TAMBIEN CALCULA EL PRODUCTO ESCALA;
EN TODOS LOS CASOS SE USAN ESTADOS DE MAXIMA PROYECCION,
DEL MOMENTO ANGULAR;
EL PROGRAMA FUNCIONA PARA UN MOMENTO ANGULAR MENOR O IGUAL
A 10 Y PARA UN NUMERO DE CUANTOS DE 24 (L=0)
FILE ENTIV (IND=DISK);
FILE SALV (IND=RTMP); FILE DISC1 (KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXPECSIZE=2
,BLOCKSIZE=30);
FILE DISC2 (KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXPECSIZE=2
,BLOCKSIZE=30);
FILE DISC3 (KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXPECSIZE=2
,BLOCKSIZE=30);
FILE DISC4 (KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXPECSIZE=1,BLOCKSIZE=30);
FILE DISC5 (KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXPECSIZE=1,BLOCKSIZE=30);
INTEGER A1, A2, A3, A4, A5, R, T, M, RONI, N2, L, A, B, C, D, K, M, U, V, Y, Z, J1, J2,
M1, M2, M3, M4, Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6, Y7, Y8, Y9, Y10, Y11, Y12, Y13, Y14, Y15, Y16,
Y17, Y18, Y19, Y20, Y21, Y22, Y23, Y24, Y25, Y26, Y27, Y28, Y29, X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12, X13, X14, X15, X16, X17, X18, X19, X20, X21, X22, X23, X24, X25, X26, X27, X28, X29, X30, X31, X32, X33, X34, X35, X36, X37, X38, X39, X40, X41, X42, X43, X44, X45, X46, X47, X48, X49, X50, X51, X52, X53, X54, X55, X56, X57, X58, X59, X60, X61, X62, X63, X64, X65, X66, X67, X68, X69, X70, X71, X72, X73, X74, X75, X76, X77, X78, X79, X80, X81, X82, X83, X84, X85, X86, X87, X88, X89, X90, X91, X92, X93, X94, X95, X96, X97, X98, X99, X100, X101, X102, X103, X104, X105, X106, X107, X108, X109, X110, X111, X112, X113, X114, X115, X116, X117, X118, X119, X120, X121, X122, X123, X124, X125, X126, X127, X128, X129, X130, X131, X132, X133, X134, X135, X136, X137, X138, X139, X140, X141, X142, X143, X144, X145, X146, X147, X148, X149, X150, X151, X152, X153, X154, X155, X156, X157, X158, X159, X160, X161, X162, X163, X164, X165, X166, X167, X168, X169, X170, X171, X172, X173, X174, X175, X176, X177, X178, X179, X180, X181, X182, X183, X184, X185, X186, X187, X188, X189, X190, X191, X192, X193, X194, X195, X196, X197, X198, X199, X200;
XX, X3, ZX, X4, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11, X12, X13, X14, X15, X16, X17, X18, X19, X20, X21, X22, X23, X24, X25, X26, X27, X28, X29, X30, X31, X32, X33, X34, X35, X36, X37, X38, X39, X40, X41, X42, X43, X44, X45, X46, X47, X48, X49, X50, X51, X52, X53, X54, X55, X56, X57, X58, X59, X60, X61, X62, X63, X64, X65, X66, X67, X68, X69, X70, X71, X72, X73, X74, X75, X76, X77, X78, X79, X80, X81, X82, X83, X84, X85, X86, X87, X88, X89, X90, X91, X92, X93, X94, X95, X96, X97, X98, X99, X100, X101, X102, X103, X104, X105, X106, X107, X108, X109, X110, X111, X112, X113, X114, X115, X116, X117, X118, X119, X120, X121, X122, X123, X124, X125, X126, X127, X128, X129, X130, X131, X132, X133, X134, X135, X136, X137, X138, X139, X140, X141, X142, X143, X144, X145, X146, X147, X148, X149, X150, X151, X152, X153, X154, X155, X156, X157, X158, X159, X160, X161, X162, X163, X164, X165, X166, X167, X168, X169, X170, X171, X172, X173, X174, X175, X176, X177, X178, X179, X180, X181, X182, X183, X184, X185, X186, X187, X188, X189, X190, X191, X192, X193, X194, X195, X196, X197, X198, X199, X200;

DOUBLE CESI(0,0), CESI(0,0), ASI(0,0), DIRI(0,0), DIRI(0,0), ASI(0,0);
REAL ARAY CESI(0,0);
DEF THE C/CLO(A,B,C,D)= FLD A:=B STEP C UNTIL D DO#;

REAL PROCEDURE SCALE(Q); VALUE Q; INTEGER Q;
BEGIN OWN REAL ARAY S(0:65);
IF Q=66 THEN SCALE:=S(0) ELSE
BEGIN DOUBLE T; INTEGER I;
T:=1.0; S(0):=1.0;
SCALE:=0.0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL Q DO BEGIN
FOR T:=1.0; S(I):=T END;
FOR T:=1.0; S(I):=T END;
FOR T:=1.0; S(I):=T END;
END END;

REAL PROCEDURE FACT(N); VALUE N; INTEGER N;
BEGIN OWN REAL ARAY F(0:100);
IF N=0 THEN FACT:=F(0) ELSE
BEGIN DOUBLE T; INTEGER I; REAL C;
C:=1.0; F(0):=1.0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 100 DO BEGIN
T:=1.0; S(I):=T;
FOR T:=1.0; S(I):=T END;
FOR T:=1.0; S(I):=T END;
END END;

REAL PROCEDURE CAN(Q); VALUE Q; REAL Q;
BEGIN OWN REAL ARAY G(0:100);
IF Q=0 THEN CAN:=G(0) ELSE

```

00000100
00000150
00000160
00000165
00000170
00000175
00000180
00000185
00000190
00000195
00000200
00000205
00000210
00000215
00000220
00000225
00000230
00000235
00000240
00000245
00000250
00000255
00000260
00000265
00000270
00000275
00000280
00000285
00000290
00000295
00000300
00000305
00000310
00000315
00000320
00000325
00000330
00000335
00000340
00000345
00000350
00000355
00000360
00000365
00000370
00000375
00000380
00000385
00000390
00000395
00000400
00000405
00000410
00000415
00000420
00000425
00000430
00000435
00000440
00000445
00000450
00000455
00000460
00000465
00000470

17400
 17401
 17402
 17403
 17404
 17405
 17406
 17407
 17408
 17409
 17410
 17411
 17412
 17413
 17414
 17415
 17416
 17417
 17418
 17419
 17420
 17421
 17422
 17423
 17424
 17425
 17426
 17427
 17428
 17429
 17430
 17431
 17432
 17433
 17434
 17435
 17436
 17437
 17438
 17439
 17440
 17441
 17442
 17443
 17444
 17445
 17446
 17447
 17448
 17449
 17450
 17451
 17452
 17453
 17454
 17455
 17456
 17457
 17458
 17459
 17460
 17461
 17462
 17463
 17464
 17465
 17466
 17467
 17468
 17469
 17470
 17471
 17472
 17473
 17474
 17475
 17476
 17477
 17478
 17479
 17480
 17481
 17482
 17483
 17484
 17485
 17486
 17487
 17488
 17489
 17490
 17491
 17492
 17493
 17494
 17495
 17496
 17497
 17498
 17499
 17500

```

T := T * 5.000-1; S (T) := T END;
FOR T := 1.000 TO 100.000 STEP .1 UNTIL .65 DO FLAG;
END; END;

REAL PROCEDURE FACT(N); VALUE N; INTEGER M;
BEGIN
  OWN REAL ARRAY F(0:100);
  YES NO 0 THEN FACT := F(N) ELSE
  BEGIN DOUBLE T; INTEGER I; REAL C;
  C := SCAF(-1000);
  FACT := S(0);
  T := 1.000; F(0) := 1.0;
  FOR I := 1 STEP 1 UNTIL 100 DO BEGIN
    T := T * 4.000-2;
    F(I) := C * FACT(T) END; END;
  REAL PROCEDURE GA(N); VALUE N; REAL M;
  BEGIN
    OWN REAL ARRAY G(1:100);
    IF N EQ 0 THEN GA := A(2*N) ELSE
    BEGIN
      INTEGER I; REAL II;
      II := FACT(-1000);
      FOR I := 1 STEP 2 UNTIL 99 DO BEGIN
        G(I) := FACT(I-1)/FACT((I-1)/2)*S(PI/4);
        G(I+1) := FACT((I-1)/2)*2**((I+1)/2)/5;
      END; END;
      Y := GA(-1000);
      WRITE(SAL, A, CA, N, LO, DIM">);
      READENT Y, N, LO, DIM;
      WRITE(SAL, A, CA, N, LO, DIM);
      WRITE(ETLF, A, N, LO, DIM);
      ONP := 1/2*(1+(I-1)*N); LNI := 1/2*(N*(I+4)-N) + 1;
      IMP := 1/2*(1-(I-1)*N)/3; I := LO-3*IMP; IF ENTER(1/3*(N-(LO+3*IMP)/2));
      HUS := 1;
      BEGIN
        LABEL NEXTON;
        LABEL NOG(0); LNI, NSUT(0; LNI, 0; LNI, 0; DIM, 0; DIM);
        SUS(0; DIM, 0; DIM); SET(0; DIM);
        C(LO(N), 0, 1, MP) C(LO(T), 0, 1, L?);
      BEGIN
        LNI := L/?+3*N+T1;

        LNI := (L+6*IMP)/2+3;
        IF LSS 6 OF LNI+3*IMP LSS LNI THEN AX := 0 ELSE
        BEGIN
          IF (LNI-1)/3 = ENTER((LNI-L)/3) THEN MIN1 := (LNI-L)/3
          ELSE MIN1 := ENTER((LNI-L)/3+1);
          MAX1 := ENTER((2*LNI-L)/6); AX := MAX1-MIN1;
        END;
        MA1 := LO - 5 + 6*(LNI+3*IMP);
        DOBIE(MA1) := XX;
      END;
      C(LO(N), 0, 1, MP) C(LO(M), 0, 1, MP)
    END;
  END;

```

0000
 0001
 0002
 0003
 0004
 0005
 0006
 0007
 0008
 0009
 0010
 0011
 0012
 0013
 0014
 0015
 0016
 0017
 0018
 0019
 0020
 0021
 0022
 0023
 0024
 0025
 0026
 0027
 0028
 0029
 0030
 0031
 0032
 0033
 0034
 0035
 0036
 0037
 0038
 0039
 0040
 0041
 0042
 0043
 0044
 0045
 0046
 0047
 0048
 0049
 0050
 0051
 0052
 0053
 0054
 0055
 0056
 0057
 0058
 0059
 0060
 0061
 0062
 0063
 0064
 0065
 0066
 0067
 0068
 0069
 0070
 0071
 0072
 0073
 0074
 0075
 0076
 0077
 0078
 0079
 0080
 0081
 0082
 0083
 0084
 0085
 0086
 0087
 0088
 0089
 0090
 0091
 0092
 0093
 0094
 0095
 0096
 0097
 0098
 0099
 0100

17400
7800
7900
7950
8000
8050
8100
8150
8200
8250
8300
8350
8400
8450
8500
8550
8600
8650
8700
8750
8800
8850
8900
8950
9000
9050
9100
9150
9200
9250
9300
9350
9400
9450
9500
9550
9600
9650
9700
9750
9800
9850
9900
9950

```
CYCLOC(T1,0,1,L/2) CYCLOC(T2,0,1,L/2) JFGTN  
M1:=M1+IMP;  
LM1:=L/2+3*M1+T1; LM2:=L/2+3*M2+T2;  
IF LM1 LFG N AND LM2 LFG N THEN BEGIN  
DL:=LM1-LM2;  
IF ABS(DL) < 3*MI THEN BEGIN  
SIGN:=3*MI;  
IF NOT BOOLFAN(DL+SIGN) OR LM1=LM2 THEN JFGTN  
IF NOT BOOLFAN(MHULT) OR LM1=LM2 THEN BEGIN  
M1:=L0-5+3*(LM1+3*IMP); M2:=L0-5+3*(LM2+3*IMP);  
IF L1=NEO THEN JFGTN  
MUEVH:=GAM(LM1+3*IMP/2)*GAM(LM2+3*IMP+5/2)/(GAM(LM1+LM2+3*IMP+5/2)+GAM(LM2-LM1+3*MI)/2+1)/GAM((LM1+LM2+6*IMP+3*MI+5/2)*2);  
LYM1:=(L+6*IMP)/2+1;  
IF L LSS 6 OR LM1+3*IMP LSS LYM1 THEN S1:=1 ELSE  
BEGIN  
LM1:=L/3 FOL ENTIER((LM1-L)/3) THEN  
MUM1:=(LM1-L)/3 ELSE MUM1:=ENTIER((LM1-L)/3+1);  
S1:=M1-MUM1; FND;  
IF L LSS 6 OR LM2+3*IMP LSS LYM1 THEN S2:=1 ELSE  
BEGIN  
LM2:=L/3 FOL ENTIER((LM2-L)/3) THEN  
MUM2:=(LM2-L)/3 ELSE MUM2:=ENTIER((LM2-L)/3+1);  
S2:=M2-MUM2; FND;  
IF S1=1 AND S2=1 THEN BEGIN  
MAP1:=1+3*(L0-5)+15*(LM1+3*IMP);  
MAP2:=1+3*(L0-5)+15*(LM2+3*IMP);  
  
READ(DISFC6(MAP1),1,POINTER(ES(0)));  
READ(DISFC6(MAP2),1,POINTER(ES(1)));  
  
MAP5:=1+3*(L0-5)+20*(LM1+3*IMP)+475*(DL+3)/2;  
READ(DISFC6(MAP5),1,POINTER(APP(0)));  
IF DOBLE(MA1)=0 AND DOBLE(MA2)=0 THEN JFGTN  
OPTO(0):=APP(0)/SORT(FS(0)+FS(1));  
OPTO(1):=0;OPTO(2):=0;OPTO(3):=0;  
END;  
  
IF DOBLE(MA1)=1 AND DOBLE(MA2)=0 THEN  
BEGIN  
DIAG(0):=FS(0);  
  
READ(DISFC6(MAP1+1),1,DIAG(2));  
READ(DISFC6(MAP1+2),1,DIAG(1));  
  
ETGRS(DIAG,FIG1,FIGI);
```

00017400
00017800
00017900
00017950
00008000
00008050
00008100
00008150
00008200
00008250
00008300
00008350
00008400
00008450
00008500
00008550
00008600
00008650
00008700
00008750
00008800
00008850
00008900
00008950
00009000
00009050
00009100
00009150
00009200
00009250
00009300
00009350
00009400
00009450
00009500
00009550
00009600
00009650
00009700
00009750
00009800
00009850
00009900
00009950


```

100 BEGIN
200 FILE SALL(KIND=REMOTE);
300 FILE SALL(KIND=PRINTER);
400 REAL NU,LAM,MU,L,A,N,CONT,AL;
420 FOR MU=0 STEP 1 UNTIL 10 DO BEGIN
430 WRITE(SALL,"MOMENTO ANGULAR=","I3,"/">>L);
440 WRITE(SALL,"MOMENTO ANGULAR=","I3,"/">>L);
450 CONT:=0;
460 AL:=1/2*(1-(-1)*L);
500 FOR MU:=0 STEP 1 UNTIL 20 DO
600 BEGIN
700 AL:=1/2*(1-(-1)*NU);
720 FOR LAM:=0 STEP 2 UNTIL A DO
800 BEGIN
900 FOR MU:=0 STEP 1 UNTIL ENTIER(LAM/3) DO
1000 IF LAM GEQ (3*NU + (L+3*AL)/2) AND LAM LEQ (3*NU+L) THEN
1100 CONT:=CONT+1;
1200 WRITE(SALL,"# DE CUANTOS=","I3,"X5,"DIMENSION=","I4,"/">>N1,"CONT);
1300 WRITE(SALL,"# DE CUANTOS=","I3,"X5,"DIMENSION=","I4,"/">>NU,"CONT);
1400 END;
1500 END;
1600 END;

```

```

00000100
00000200
00000300
00000400
00000420
00000420
00000430
00000450
00000500
00000600
00000700
00000900
00001000
00001100
00001200
00001300
00001500
00001500
00001530
00001550

```

108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165

```

$SET $PARATT
$BEGIN
$SET $AUTO$END
$SYND = $FRM * $CVT$IO/$MSL/=
$USE PRINT$ FOR FILE$
FILE $AL($KIND=$P$MOT$, FILE FILE6(KIND=$P$INTER));
$FILE IN($KIND=$P$MOT$, FILE FILE7($P$));
$DEFINE CYCLO($I,$J,$K,$L,$M,$N,$O,$P,$Q,$R,$S,$T,$U,$V,$W,$X,$Y,$Z);
PROCEDURE F1($A1,$A2,$A3,$A4,$A5,$A6,$A7,$A8);VALUE $A2,$A3,$A6,$A8;
INTEGER $A1,$A3,$A6; REAL $A5; ARRAY $A1,$A7,$A5,$A7[*];
EXTERNAL;

PROCEDURE LLSQAD($A1,$A2,$A3,$A4,$A5,$A6,$A7,$A8,$A9,$A10);
VALUE $A3,$A4,$A6,$A8,$A10; INTEGER $A5,$A7,$A8,$A9,$A10;
REAL $A10; ARRAY $A1,$A5,$A9[*];
EXTERNAL;

PROCEDURE CALCULA($N,$O,$AGN,$DH,$EY1,$EY2,$EY3,$EY4,$EY5,$EY6,$EY7,
$EY8,$EY9,$EY10,$FY1,$FY2,$FY3,$FY4,$FY5,$FY6,$FY7,$FY8,$FY9,$FY10,$FY11,
$U4,$U5,$U6,$U7,$U8,$U9,$U10,$U11);
INTEGER $N,$EY1,$EY2,$EY3,$EY4,$EY5,$EY6,$EY7,$EY8,$EY9,$FY10,$FY11;
INTEGER $AGN,$DH,$U11; ARRAY $EY10,$FY10,$FY11,$EY10,
$U1,$U2,$U3,$U4,$U5,$U6,$U7,$U8,$U9,$U10[$I,$O],
REAL $N$;
$BEGIN
INTEGER $X12,$FY13,$FX14,$EX15,$EX16,$FX17,$LX18,$FX19,$EY11,$J,$K,
$I1,$I2,$I3,$CU;

REAL $D,$DF1;
ARRAY $B0[$I,$J]; INTEGER $DM1,$DM2,$Y11[$I];
CYCLO($I,$J,$K,$L,$M,$N,$O,$P,$Q,$R,$S,$T,$U,$V,$W,$X,$Y,$Z);
$DM1[$I] := $DM1[$I] * ($DM1[$I] + 1) / 2 - 1; $DM2[$I] := $DM1[$I] * $DM1[$I] - 1;
$Y11[$I] := $DM1[$I] + $DM2[$I] + 1; $DM1[$I] := $DM1[$I] - 1;
$EY1 := $EY1 + $EY2 + $EY3 + $EY4 + $EY5 + $EY6 + $EY7 + $EY8 + $EY9 + $EY10 + 9;
$FX12 := $FY1 + $FY2 + 1;
$FX13 := $FX12 + $FY3 + 1;
$FX14 := $FX13 + $FY4 + 1;
$FX15 := $FX14 + $FY5 + 1;
$FX16 := $FX15 + $FY6 + 1;
$FX17 := $FX16 + $FY7 + 1;
$FX18 := $FX17 + $FY8 + 1;
$FX19 := $FX18 + $FY9 + 1;
$EY11 := 7 * ($FY11 + 1) - 1;
WRITE($AL,$X,$Y,$CU);
$BEGIN

```

00000100
00000110
00000120
00000130
00000140
00000150
00000160
00000170
00000180
00000190
00000200
00000210
00000220
00000230
00000240
00000250
00000260
00000270
00000280
00000290
00000300
00000310
00000320
00000330
00000340
00000350
00000360
00000370
00000380
00000390
00000400
00000410
00000420
00000430
00000440
00000450
00000460
00000470
00000480
00000490
00000500
00000510
00000520
00000530
00000540
00000550
00000560
00000570
00000580
00000590
00000600
00000610
00000620
00000630
00000640
00000650

660
670
680
690
700
710
720
730
740
750
760
770
780
790
800
810
820
830
840
850
860
870
880
890
900
910
920
930
940
950
960
970
980
990
000
010
020
030
040
050
060
070
080
090
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350
360
370
380
390
400
410
420
430
440
450
460
470
480
490
500
510
520
530
540
550
560
570
580
590
600
610
620
630
640
650
660
670
680
690
700
710
720
730
740
750
760
770
780
790
800
810
820
830
840
850
860
870
880
890
900
910
920
930
940
950
960
970
980
990

```
ARRAY H1(0:DM1(1)),  
      H2(0:DM1(2)), H3(0:DM1(3)), H4(0:DM1(4)), H5(0:DM1(5)),  
      ETG1(0:DM1(1)), ETG2(0:DM1(2)),  
      ETG3(0:DM1(3)), ETG4(0:DM1(4)), ETG5(0:DM1(5)),  
      W1(0:Y(1)), W2(0:Y(2)), W3(0:Y(3)), W4(0:Y(4)), W5(0:Y(5)),  
W6(0:Y(6)), W7(0:Y(7)), W8(0:Y(8)), W9(0:Y(9)), W10(0:Y(10)),  
      ET1(0:DM2(1)), ET1F(0:DM2(1)),  
      ET13(0:DM2(3)), ET14(0:DM2(4)), ET15(0:DM2(5)),  
      ETG6(0:DM1(6)),  
      ETG7(0:DM1(7)), ETG8(0:DM1(8)), ETG9(0:DM1(9)), ETG10(0:  
      DM1(10)), H6(0:DM1(6)), H7(0:DM1(7)), H8(0:DM1(8)),  
      H9(0:DM1(9)), H10(0:DM1(10)), E1(6:DM2(6)), E1F(7:0:  
      DM2(7)), E1F8(0:DM2(8)), E1F9(0:DM2(9)), E1F10(0:  
      DM2(10)),  
  
LABEL ANG10,ANG11,ANG12,ANG13,ANG14,ANG15,ANG16,ANG17,ANG18,ANG19,  
      ANG20,ANG21,ANG22,ANG23,ANG24,ANG25,ANG26,ANG27,ANG28,SALE,  
BACK;  
  
I1:=-1;  
H1(0):=00(6)*U1(6,0) + 00(7)*U1(7,0);  
CYCLO(J,1,1,DM(1)) BEGIN  
CYCLO(I,0,1,J) BEGIN  
T1:=I + J*(J+1)/2;  
H1(I1):=0;  
IF U1(I1,I1) NEG 0 THEN  
BEGIN  
CYCLO(I2,1,1,7) H1(I1):= 00(I2)*U1(I2,I1) + H1(I1);  
END  
ELSE  
BEGIN  
IF U1(I7,I1) NEG 0 THEN H1(I1):=00(6)*U1(6,I1)+00(7)*U1(7,I1)  
ELSE H1(I1):=0;  
END;  
END;  
END;  
  
ETGPS(H1,DM(1)+1,2,ETG1,ET1,DM(1)+1,W1,0);  
  
CYCLO(I,0,1,EY1) CE(I):=  
ETG(I+1)-ETG(I);  
  
IF AGN(2) = 0 THEN GO TO ANG10;  
CYCLO(J,0,1,DM(2))  
CYCLO(I,0,1,J) BEGIN  
T1:=I + J*(J+1)/2;  
H2(I1):=0;
```

0000660
0000670
0000680
0000690
0000700
0000710
0000720
0000730
0000740
0000750
0000760
0000770
0000780
0000790
0000800
0000810
0000820
0000830
0000840
0000850
0000860
0000870
0000880
0000890
0000900
0000910
0000920
0000930
0000940
0000950
0000960
0000970
0000980
0000990
0001000
0001010
0001020
0001030
0001040
0001050
0001060
0001070
0001080
0001090
0001100
0001110
0001120
0001130
0001140
0001150
0001160
0001170
0001180
0001190
0001200
0001210
0001220
0001230
0001240
0001250
0001260
0001270
0001280
0001290
0001300
0001310
0001320
0001330
0001340
0001350
0001360
0001370
0001380
0001390
0001400
0001410
0001420
0001430
0001440
0001450
0001460
0001470
0001480
0001490
0001500
0001510
0001520
0001530
0001540
0001550
0001560

1270
1280
1290
1300
1310
1320
1330
1340
1350
1360
1370
1380
1390
1400
1410
1420
1430
1440
1450
1460
1470
1480
1490
1500
1510
1520
1530
1540
1550
1560
1570
1580
1590
1600
1610
1620
1630
1640
1650
1660
1670
1680
1690
1700
1710
1720
1730
1740
1750
1760
1770
1780
1790
1800
1810
1820
1830
1840
1850
1860
1870
1880
1890
1900

```
IF U2(I,I) NEG 0 THEN  
  BEGIN  
    CYCLO(I2,1,1,7) H2(I1):= G0(I2)*U2(I2,I1) + H2(I1);  
  END  
ELSE  
  BEGIN  
    IF U2(I,I) NEG 0 THEN H2(I1):=G0(I2)*U2(I2,I1)+G0(I7)*U2(I7,I1)  
    ELSE H2(I1):=0;  
  END;  
  ETGPS(H2,DM(I2)+1,7,FIG2,FIG7,DM(I2)+1,H2,0);  
  
  CTCLO(I,0,1,EY2) EF(I+1+EY1):= LIG2(I) - ETG1(I);  
  ANGI0;  
  IF AGN131 = 0 THEN GO TO ANGI1;  
  CYCLO(J,0,1,DM(I3))  
  CYCLO(I,0,1,J) BEGIN  
    I1:=I + 1*(J+1)/2;  
    H3(I1):=0;  
    IF U3(I,I) NEG 0 THEN  
      BEGIN  
        CYCLO(I2,1,1,7) H3(I1):= G0(I2)*U3(I2,I1) + H3(I1);  
      END  
    ELSE  
      BEGIN  
        IF U3(I,I) NEG 0 THEN H3(I1):=G0(I2)*U3(I2,I1)+G0(I7)*U3(I7,I1)  
        ELSE H3(I1):=0;  
      END;  
    ETGPS(H3,DM(I3)+1,2,FIG3,FIG3,DM(I3)+1,H3,0);  
  
    CTCLO(I,0,1,EY3) EF(I+1+EX12):= FIG3(I) - FIG1(I);  
    ANGI1;  
    IF AGN141 = 0 THEN GO TO ANGI2;  
    CYCLO(J,0,1,DM(I4))  
    CYCLO(I,0,1,J) BEGIN  
      I1:=I + J*(J+1)/2;  
      H4(I1):=0;  
      IF U4(I,I) NEG 0 THEN  
        BEGIN  
          BEGIN  
            BEGIN  
              BEGIN  
                BEGIN  
                  BEGIN  
                    BEGIN  
                      BEGIN  
                        BEGIN  
                          BEGIN  
                        END  
                      END  
                    END  
                  END  
                END  
              END  
            END  
          END  
        END  
      END  
    END  
  END  
  BEGIN
```

00001270
00001280
00001290
00001300
00001310
00001320
00001330
00001340
00001350
00001360
00001370
00001380
00001390
00001400
00001410
00001420
00001430
00001440
00001450
00001460
00001470
00001480
00001490
00001500
00001510
00001520
00001530
00001540
00001550
00001560
00001570
00001580
00001590
00001600
00001610
00001620
00001630
00001640
00001650
00001660
00001670
00001680
00001690
00001700
00001710
00001720
00001730
00001740
00001750
00001760
00001770
00001780
00001790
00001800
00001810
00001820
00001830
00001840
00001850
00001860
00001870
00001880
00001890
00001900

2530
2531
2532
2533
2534
2535
2536
2537
2538
2539
2540
2541
2542
2543
2544
2545
2546
2547
2548
2549
2550
2551
2552
2553
2554
2555
2556
2557
2558
2559
2560
2561
2562
2563
2564
2565
2566
2567
2568
2569
2570
2571
2572
2573
2574
2575
2576
2577
2578
2579
2580
2581
2582
2583
2584
2585
2586
2587
2588
2589
2590
2591
2592
2593
2594
2595
2596
2597
2598
2599
2600
2601
2602
2603
2604
2605
2606
2607
2608
2609
2610
2611
2612
2613
2614
2615
2616
2617
2618
2619
2620
2621
2622
2623
2624
2625
2626
2627
2628
2629
2630
2631
2632
2633
2634
2635
2636
2637
2638
2639
2640
2641
2642
2643
2644
2645
2646
2647
2648
2649
2650
2651
2652
2653
2654
2655
2656
2657
2658
2659
2660
2661
2662
2663
2664
2665
2666
2667
2668
2669
2670
2671
2672
2673
2674
2675
2676
2677
2678
2679
2680
2681
2682
2683
2684
2685
2686
2687
2688
2689
2690
2691
2692
2693
2694
2695
2696
2697
2698
2699
2700
2701
2702
2703
2704
2705
2706
2707
2708
2709
2710
2711
2712
2713
2714
2715
2716
2717
2718
2719
2720
2721
2722
2723
2724
2725
2726
2727
2728
2729
2730
2731
2732
2733
2734
2735
2736
2737
2738
2739
2740
2741
2742
2743
2744
2745
2746
2747
2748
2749
2750
2751
2752
2753
2754
2755
2756
2757
2758
2759
2760
2761
2762
2763
2764
2765
2766
2767
2768
2769
2770
2771
2772
2773
2774
2775
2776
2777
2778
2779
2780
2781
2782
2783
2784
2785
2786
2787
2788
2789
2790
2791
2792
2793
2794
2795
2796
2797
2798
2799
2800
2801
2802
2803
2804
2805
2806
2807
2808
2809
2810
2811
2812
2813
2814
2815
2816
2817
2818
2819
2820
2821
2822
2823
2824
2825
2826
2827
2828
2829
2830
2831
2832
2833
2834
2835
2836
2837
2838
2839
2840
2841
2842
2843
2844
2845
2846
2847
2848
2849
2850
2851
2852
2853
2854
2855
2856
2857
2858
2859
2860
2861
2862
2863
2864
2865
2866
2867
2868
2869
2870
2871
2872
2873
2874
2875
2876
2877
2878
2879
2880
2881
2882
2883
2884
2885
2886
2887
2888
2889
2890
2891
2892
2893
2894
2895
2896
2897
2898
2899
2900
2901
2902
2903
2904
2905
2906
2907
2908
2909
2910
2911
2912
2913
2914
2915
2916
2917
2918
2919
2920
2921
2922
2923
2924
2925
2926
2927
2928
2929
2930
2931
2932
2933
2934
2935
2936
2937
2938
2939
2940
2941
2942
2943
2944
2945
2946
2947
2948
2949
2950
2951
2952
2953
2954
2955
2956
2957
2958
2959
2960
2961
2962
2963
2964
2965
2966
2967
2968
2969
2970
2971
2972
2973
2974
2975
2976
2977
2978
2979
2980
2981
2982
2983
2984
2985
2986
2987
2988
2989
2990
2991
2992
2993
2994
2995
2996
2997
2998
2999
3000

```
ELSE H6(I11):=0;
      FND;
      FND;
      EIGPS(H6,DM(6)+1,2,EIG6,ETF6,DM(6)+1,H6,0);

      CICLO(I,0,1,EY6)      CF(I+1+EX15):= EIG6(I) - EIG1(0);
      ANG14;
      IF AGN17:= 0 THEN GO TO ANG15;
      CICLO(J,0,1,DM(7))
      CICLO(I,0,1,J) BEGIN
        I1:=I + J*(J+1)/2;
        H7(I11):=0;
        IF H7(I1,I1) NEG 0 THEN
          BEGIN
            CICLO(I2,1,1,7) H7(I11):= Q0(I2)*U7(I2,I1) + H7(I11);
          END
        ELSE BEGIN
          IF H7(I7,I1) NEG 0 THEN H7(I11):=Q0(I6)*U7(I6,I1)+Q0(I7)*U7(I7,I1)
          ELSE H7(I11):=0;
        END
      END;
      FND;
      FND;
      EIGPS(H7,DM(7)+1,2,EIG7,ETF7,DM(7)+1,H7,0);

      CICLO(I,0,1,EY7)      CF(I+1+EX16):= EIG7(I) - EIG1(0);
      ANG15;
      IF AGN18:= 0 THEN GO TO ANG16;
      CICLO(J,0,1,DM(8))
      CICLO(I,0,1,J) BEGIN
        I1:=I + J*(J+1)/2;
        H8(I11):=0;
        IF H8(I1,I1) NEG 0 THEN
          BEGIN
            CICLO(I2,1,1,7) H8(I11):= Q0(I2)*U8(I2,I1) + H8(I11);
          END
        ELSE BEGIN
          IF H8(I7,I1) NEG 0 THEN H8(I11):=Q0(I6)*U8(I6,I1)+Q0(I7)*U8(I7,I1)
          ELSE H8(I11):=0;
        END
      END
      FND;
      FND;
      EIGPS(H8,DM(8)+1,2,EIG8,ETF8,DM(8)+1,H8,0);

      CICLO(I,0,1,EY8)      CF(I+1+EX17):= EIG8(I) - EIG1(0);
      ANG16;
```

00002530
00002531
00002532
00002533
00002534
00002535
00002536
00002537
00002538
00002539
00002540
00002541
00002542
00002543
00002544
00002545
00002546
00002547
00002548
00002549
00002550
00002551
00002552
00002553
00002554
00002555
00002556
00002557
00002558
00002559
00002560
00002561
00002562
00002563
00002564
00002565
00002566
00002567
00002568
00002569
00002570
00002571
00002572
00002573
00002574
00002575
00002576
00002577
00002578
00002579
00002580
00002581
00002582
00002583
00002584
00002585
00002586
00002587
00002588
00002589
00002590
00002591
00002592
00002593
00002594
00002595
00002596
00002597
00002598
00002599
00002600
00002601
00002602
00002603
00002604
00002605
00002606
00002607
00002608
00002609
00002610
00002611
00002612
00002613
00002614
00002615
00002616
00002617
00002618
00002619
00002620
00002621
00002622
00002623
00002624
00002625
00002626
00002627
00002628
00002629
00002630
00002631
00002632
00002633
00002634
00002635
00002636
00002637
00002638
00002639
00002640
00002641
00002642
00002643
00002644
00002645
00002646
00002647
00002648
00002649
00002650
00002651
00002652
00002653
00002654
00002655
00002656
00002657
00002658
00002659
00002660
00002661
00002662
00002663
00002664
00002665
00002666
00002667
00002668
00002669
00002670
00002671
00002672
00002673
00002674
00002675
00002676
00002677
00002678
00002679
00002680
00002681
00002682
00002683
00002684
00002685
00002686
00002687
00002688
00002689
00002690
00002691
00002692
00002693
00002694
00002695
00002696
00002697
00002698
00002699
00002700
00002701
00002702
00002703
00002704
00002705
00002706
00002707
00002708
00002709
00002710
00002711
00002712
00002713
00002714
00002715
00002716
00002717
00002718
00002719
00002720
00002721
00002722
00002723
00002724
00002725
00002726
00002727
00002728
00002729
00002730
00002731
00002732
00002733
00002734
00002735
00002736
00002737
00002738
00002739
00002740
00002741
00002742
00002743
00002744
00002745
00002746
00002747
00002748
00002749
00002750
00002751
00002752
00002753
00002754
00002755
00002756
00002757
00002758
00002759
00002760
00002761
00002762
00002763
00002764
00002765
00002766
00002767
00002768
00002769
00002770
00002771
00002772
00002773
00002774
00002775
00002776
00002777
00002778
00002779
00002780
00002781
00002782
00002783
00002784
00002785
00002786
00002787
00002788
00002789
00002790
00002791
00002792
00002793
00002794
00002795
00002796
00002797
00002798
00002799
00002800
00002801
00002802
00002803
00002804
00002805
00002806
00002807
00002808
00002809
00002810
00002811
00002812
00002813
00002814
00002815
00002816
00002817
00002818
00002819
00002820
00002821
00002822
00002823
00002824
00002825
00002826
00002827
00002828
00002829
00002830
00002831
00002832
00002833
00002834
00002835
00002836
00002837
00002838
00002839
00002840
00002841
00002842
00002843
00002844
00002845
00002846
00002847
00002848
00002849
00002850
00002851
00002852
00002853
00002854
00002855
00002856
00002857
00002858
00002859
00002860
00002861
00002862
00002863
00002864
00002865
00002866
00002867
00002868
00002869
00002870
00002871
00002872
00002873
00002874
00002875
00002876
00002877
00002878
00002879
00002880
00002881
00002882
00002883
00002884
00002885
00002886
00002887
00002888
00002889
00002890
00002891
00002892
00002893
00002894
00002895
00002896
00002897
00002898
00002899
00002900
00002901
00002902
00002903
00002904
00002905
00002906
00002907
00002908
00002909
00002910
00002911
00002912
00002913
00002914
00002915
00002916
00002917
00002918
00002919
00002920
00002921
00002922
00002923
00002924
00002925
00002926
00002927
00002928
00002929
00002930
00002931
00002932
00002933
00002934
00002935
00002936
00002937
00002938
00002939
00002940
00002941
00002942
00002943
00002944
00002945
00002946
00002947
00002948
00002949
00002950
00002951
00002952
00002953
00002954
00002955
00002956
00002957
00002958
00002959
00002960
00002961
00002962
00002963
00002964
00002965
00002966
00002967
00002968
00002969
00002970
00002971
00002972
00002973
00002974
00002975
00002976
00002977
00002978
00002979
00002980
00002981
00002982
00002983
00002984
00002985
00002986
00002987
00002988
00002989
00002990
00002991
00002992
00002993
00002994
00002995
00002996
00002997
00002998
00002999
00003000

3900
3810
3820
3830
3840
3850
3860
3870
3880
3890
3900
3910
3920
3930
3940
3950
3960
3970
3980
3990
4000
4010
4020
4030
4040
4050
4060
4070
4080
4090
4100
4110
4120
4130
4140
4150
4160
4170
4180
4190
4200
4210
4220
4230
4240
4250
4260
4270
4280
4290
4300
4310
4320
4330
4340
4350

```
END;  
WRITE (SAL, *, MS, N); WRITE (FTLF6, <"MS**2=", FR.3, X2, "N=", I2, //>, MS, N);  
  
CICLO(I3, 1, 1, 7) BEGIN  
DO I31:=0, CICLO(I3, 0, 1, DM(I3))  
DO I32:=EIF(I31)*EIF(I31+1)*U1(I3, I1*(I1+3)/2) + P0(I31);  
  
CICLO(I3, 6, 1, 7) BEGIN DO I31:=0, DM(I3)  
CICLO(I2, 0, 1, DM(I3)) BEGIN  
IF I1 GEQ I2 THEN K:=I2 + I1*(I1+1)/2 ELSE K:=I1 + I2*(I2+1)/2;  
DO I31:=0, I3, K)*EIF(I31)*EIF(I31+1) + G0(I31);  
END; END;  
  
I:=1; ANG19;  
BACK: IF ABS(CO(I)) LEQ ((10)**(-7)) THEN BEGIN  
IF I=7 THEN GO TO SALE;  
I:=I+1; GO TO BACK; END;  
IF I=8 THEN BEGIN CICLO(J, 1, 1, EY1+1) V(J-1+(EY1+1)*3):=0; GO TO ANG20;  
END;  
CICLO(J, 1, 1, EY1+1) BEGIN  
V(J-1 + (EY1+1)*(I-1)):=0;  
IF I LEQ 5 THEN BEGIN  
CICLO(I1, 0, 1, DM(I1))  
V(J-1+(EY1+1)*(I-1)):=EIF(I1+(DM(I1)+1)*J)*EIF(I1+(DM(I1)+1)*J)*  
U1(I, I1*(I1+3)/2) + V(J-1+(EY1+1)*(I-1)); END ELSE  
BEGIN  
CICLO(I1, 0, 1, DM(I1))  
CICLO(I2, 0, 1, DM(I2)) BEGIN  
IF I1 GEQ I2 THEN K:=I2 + I1*(I1+1)/2  
ELSE K:=I1 + I2*(I2+1)/2;  
  
V(J-1+(EY1+1)*(I-1)):=EIF(I1+(DM(I1)+1)*J)*EIF(I2+(DM(I2)+1)*J)*  
U1(I, K) + V(J-1+(EY1+1)*(I-1));  
END;  
END;  
V(J-1 + (EY1+1)*(I-1)):= V(J-1 + (EY1+1)*(I-1))-R0*I1;  
END;  
  
ANG20;  
IF AGN(I) = 0 THEN GO TO ANG21;  
IF I=4 THEN BEGIN CICLO(J, 0, 1, EY2) V(J+EY1+1+3*(EY1+1)):=6;  
GO TO ANG21; END;  
CICLO(I, 0, 1, EY2) BEGIN  
V(J+EY1+1 + (EY1+1)*(I-1)):=0;
```

00003900
00003910
00003920
00003930
00003940
00003950
00003960
00003970
00003980
00003990
00004000
00004010
00004020
00004030
00004040
00004050
00004060
00004070
00004080
00004090
00004100
00004110
00004120
00004130
00004140
00004150
00004160
00004170
00004180
00004190
00004200
00004210
00004220
00004230
00004240
00004250
00004260
00004270
00004280
00004290
00004300
00004310
00004320
00004330
00004340
00004350

4380
4390
4400
4410
4420
4430
4440
4450
4460
4470
4480
4490
4500
4510
4520
4530
4540
4550
4560
4570
4580
4590
4600
4610
4620
4630
4640
4650
4660
4670
4680
4690
4700
4710
4720
4730
4740
4750
4760
4770
4780
4790
4800
4810
4820
4830
4840
4850
4860
4870
4880
4890
4900
4910
4920
4930
4940
4950
4960
4970
4980

```
IF I LEQ 5 THEN BEGIN
  CICLO(I,0,1,DM(I))
  V(J+EYI+1+(EYT+1)*(I-1)):=EIF2(I1+(DM(I)+1)*J)*EIF2(I1+(DM(I)+1)*
  J)+U2(I,1*(I+3)/2) +V(J+EYI+1+(EYT+1)*(I-1)) END ELSE
  BEGIN
  CICLO(I1,0,1,DM(I))
  CICLO(I2,0,1,DM(I)) BEGIN
    IF I1 GEQ I2 THEN K1:=I2 + I1*(I1+1)/2
    ELSE K1:=I1 + I2*(I2+1)/2;
  V(J+EYI+1+(EYT+1)*(I-1)):=EIF2(I1+(DM(I)+1)*J)*EIF2(I2+(DM(I)+1)*J
  +U2(I,K1) + V(J+EYI+1+(EYT+1)*(I-1))
  END;
  END;
  V(J+EYI+1 + (EYT+1)*(I-1)):= V(J+EYI+1 + (EYT+1)*(I-1))+R0(I);
  END;
ANG21;
IF ANG(1) = 0 THEN GO TO ANG22;
IF I=4 THEN BEGIN CICLO(J,0,1,EY3) V(J+EXI2+1+3*(EYT+1)):=I2;
GO TO ANG22; END;
CICLO(J,0,1,EY3) BEGIN
  V(J+EXI2+1 + (EYT+1)*(I-1)):=0;
IF I LEQ 5 THEN BEGIN
  CICLO(I1,0,1,DM(I3))
  V(J+EXI2+1+(EYT+1)*(I-1)):=EIF3(I1+(DM(I3)+1)*J)*EIF3(I1+(DM(I3)+1)*J)*
  U3(I,I1*(I+3)/2) +V(J+EXI2+1+(EYT+1)*(I-1)) END ELSE
  BEGIN
  CICLO(I1,0,1,DM(I3))
  CICLO(I2,0,1,DM(I3)) BEGIN
    IF I1 GEQ I2 THEN K1:=I2 + I1*(I1+1)/2
    ELSE K1:=I1 + I2*(I2+1)/2;
  V(J+EXI2+1+(EYT+1)*(I-1)):=EIF3(I1+(DM(I3)+1)*J)*EIF3(I2+(DM(I3)+1)*J)*
  U3(I,K1) + V(J+EXI2+1+(EYT+1)*(I-1))
  END;
  END;
END;
```

00004380
00004390
00004400
00004410
00004420
00004430
00004440
00004450
00004460
00004470
00004480
00004490
00004500
00004510
00004520
00004530
00004540
00004550
00004560
00004570
00004580
00004590
00004600
00004610
00004620
00004630
00004640
00004650
00004660
00004670
00004680
00004690
00004700
00004710
00004720
00004730
00004740
00004750
00004760
00004770
00004780
00004790
00004800
00004810
00004820
00004830
00004840
00004850
00004860
00004870
00004880
00004890
00004900
00004910
00004920
00004930
00004940
00004950
00004960
00004970
00004980

999
000
001
002
003
004
005
006
007
008
009
010
011
012
013
014
015
016
017
018
019
020
021
022
023
024
025
026
027
028
029
030
031
032
033
034
035
036
037
038
039
040
041
042
043
044
045
046
047
048
049
050
051
052
053
054
055
056
057
058
059
060
061
062
063
064
065
066
067
068
069
070
071
072
073
074
075
076
077
078
079
080
081
082
083
084
085
086
087
088
089
090
091
092
093
094
095
096
097
098
099

```
V(I+FX12+1 + (EYT+1)*(I-1)):= V(J+FX12+1 + (EYT+1)*(I-1)-R0(I));  
END;  
ANG23:  
IF AG(4)=0 THEN GO TO ANG23;  
IF I=0 THEN BEGIN CICLO(J,0,1,EY4) V(J+FX13+1+3*(EYT+1)):=20;  
GO TO ANG23; END;  
CICLO(J,0,1,EY4) BEGIN  
V(J+FX13+1 + (EYT+1)*(I-1)):=0;  
IF I LEQ 5 THEN BEGIN  
CICLO(I,0,1,DM(4))  
V(J+FX13+1+(EYT+1)*(I-1)):=EIF4(I+(DM(4)+1)*J)*EIF4(I+(DM(4)+1)*J)*  
DM(I,I*(I+3)/2) + V(J+FX13+1+(EYT+1)*(I-1)); END ELSE  
BEGIN  
CICLO(I,0,1,DM(4))  
CICLO(I,0,1,DM(4)) BEGIN  
IF I=0 OR I2 THEN K:=I2 + I1*(I1+1)/2;  
ELSE K:=I1 + I2*(I2+1)/2;  
V(I+FX13+1+(EYT+1)*(I-1)):=EIF4(I+(DM(4)+1)*J)*EIF4(I2+(DM(4)+1)*J)*  
DM(I,K) + V(I+FX13+1+(EYT+1)*(I-1));  
END;  
END;  
V(I+FX13+1 + (EYT+1)*(I-1)):= V(J+FX13+1 + (EYT+1)*(I-1)-R0(I));  
END;  
ANG24:  
IF AG(5)=0 THEN GO TO ANG24;  
IF I=0 THEN BEGIN CICLO(J,0,1,EY5) V(J+FX14+1+3*(EYT+1)):=30;  
GO TO ANG24; END;  
CICLO(J,0,1,EY5) BEGIN  
V(J+FX14+1 + (EYT+1)*(I-1)):=0;  
IF I LEQ 5 THEN BEGIN  
CICLO(I,0,1,DM(5))  
V(J+FX14+1+(EYT+1)*(I-1)):=EIF5(I+(DM(5)+1)*J)*EIF5(I+(DM(5)+1)*J)*  
DM(I,I*(I+3)/2) + V(J+FX14+1+(EYT+1)*(I-1)); END ELSE  
END
```

000
001
002
003
004
005
006
007
008
009
010
011
012
013
014
015
016
017
018
019
020
021
022
023
024
025
026
027
028
029
030
031
032
033
034
035
036
037
038
039
040
041
042
043
044
045
046
047
048
049
050
051
052
053
054
055
056
057
058
059
060
061
062
063
064
065
066
067
068
069
070
071
072
073
074
075
076
077
078
079
080
081
082
083
084
085
086
087
088
089
090
091
092
093
094
095
096
097
098
099

5610
5611
5612
5613
5614
5615
5616
5617
5618
5619
5620
5621
5622
5623
5624
5625
5626
5627
5628
5629
5630
5631
5632
5633
5634
5635
5636
5637
5638
5639
5640
5641
5642
5643
5644
5645
5646
5647
5648
5649
5650
5651
5652
5653
5654
5655
5656
5657
5658
5659
5660
5661
5662
5663
5664
5665
5666
5667
5668
5669
5670
5671
5672
5673
5674
5675
5676
5677
5678
5679
5680
5681
5682
5683
5684
5685
5686
5687
5688
5689
5690
5691
5692
5693
5694
5695
5696
5697
5698
5699
5700
5701
5702
5703
5704
5705
5706
5707
5708
5709
5710
5711
5712
5713
5714
5715
5716
5717
5718
5719
5720
5721
5722
5723
5724
5725
5726
5727
5728
5729
5730
5731
5732
5733
5734
5735
5736
5737
5738
5739
5740
5741
5742
5743
5744
5745
5746
5747
5748
5749
5750
5751
5752
5753
5754
5755
5756
5757
5758
5759
5760
5761
5762
5763
5764
5765
5766
5767
5768
5769
5770
5771
5772
5773
5774
5775
5776
5777
5778
5779
5780
5781
5782
5783
5784
5785
5786
5787
5788
5789
5790
5791
5792
5793
5794
5795
5796
5797
5798
5799
5800
5801
5802
5803
5804
5805
5806
5807
5808
5809
5810
5811
5812
5813
5814
5815
5816
5817
5818
5819
5820
5821
5822
5823
5824
5825
5826
5827
5828
5829
5830
5831
5832
5833
5834
5835
5836
5837
5838
5839
5840
5841
5842
5843
5844
5845
5846
5847
5848
5849
5850
5851
5852
5853
5854
5855
5856
5857
5858
5859
5860
5861
5862
5863
5864
5865
5866
5867
5868
5869
5870
5871
5872
5873
5874
5875
5876
5877
5878
5879
5880
5881
5882
5883
5884
5885
5886
5887
5888
5889
5890
5891
5892
5893
5894
5895
5896
5897
5898
5899
5900
5901
5902
5903
5904
5905
5906
5907
5908
5909
5910
5911
5912
5913
5914
5915
5916
5917
5918
5919
5920
5921
5922
5923
5924
5925
5926
5927
5928
5929
5930
5931
5932
5933
5934
5935
5936
5937
5938
5939
5940
5941
5942
5943
5944
5945
5946
5947
5948
5949
5950
5951
5952
5953
5954
5955
5956
5957
5958
5959
5960
5961
5962
5963
5964
5965
5966
5967
5968
5969
5970
5971
5972
5973
5974
5975
5976
5977
5978
5979
5980
5981
5982
5983
5984
5985
5986
5987
5988
5989
5990
5991
5992
5993
5994
5995
5996
5997
5998
5999
6000

```

CYCLO(I1,0,1,DM15)
CYCLO(I2,0,1,DM15) BEGIN
    IF I1 GO TO I2 THEN K1:=I2 + I1*(I1+1)/2;
    ELSE K1:=I1 + I1*(I2+1)/2;

V(IJ+FX14+1+(FYT+1)*(T-1)):=EIF5(IJ+(DM15+1)*J)*
    U5(I,K1) + V(IJ+FX14+1+(FYT+1)*(T-1));

    END;
END;

V(IJ+FX14+1 + (FYT+1)*(T-1)):= V(IJ+FX14+1 + (FYT+1)*(T-1)-NO(I));

    END;
END;
IF AGN16)=0 THEN GO TO ANG25;
IF T=0 THEN BEGIN CYCLO(J,0,1,EY6) V(IJ+FX15+1+3*(FYT+1)):=42;
    GO TO ANG25; END;

CYCLO(I,0,1,EY6) BEGIN
    V(IJ+FX15+1 + (EYT+1)*(I-1)):=0;

IF T LEQ 5 THEN BEGIN
    CYCLO(I1,0,1,DM16)
    V(IJ+EX15+1+(EYT+1)*(I-1)):=EIF6(I1+(DM16)+1)*J)*EIF6(I1+(DM16+1)*J)*
        U6(I,I1*(I1+3)/2) + V(IJ+FX15+1+(EYT+1)*(I-1)); END ELSE

        BEGIN
CYCLO(I1,0,1,DM16)
CYCLO(I2,0,1,DM16) BEGIN
    IF I1 GO TO I2 THEN K1:=I2 + I1*(I1+1)/2;
    ELSE K1:=I1 + I1*(I2+1)/2;

V(IJ+FX15+1+(FYT+1)*(T-1)):=EIF6(IJ+(DM16+1)*J)*EIF6(I2+(DM16+1)*J)*
    U6(I,K1) + V(IJ+FX15+1+(FYT+1)*(T-1));

    END;
END;

V(IJ+FX15+1 + (FYT+1)*(T-1)):= V(IJ+FX15+1 + (FYT+1)*(T-1)-NO(I));

    END;
END;
ANG25;
IF AGN17)=0 THEN GO TO ANG26;
IF T=0 THEN BEGIN CYCLO(J,0,1,EY7) V(IJ+FX16+1+3*(FYT+1)):=54;

```

0000
0001
0002
0003
0004
0005
0006
0007
0008
0009
0010
0011
0012
0013
0014
0015
0016
0017
0018
0019
0020
0021
0022
0023
0024
0025
0026
0027
0028
0029
0030
0031
0032
0033
0034
0035
0036
0037
0038
0039
0040
0041
0042
0043
0044
0045
0046
0047
0048
0049
0050
0051
0052
0053
0054
0055
0056
0057
0058
0059
0060
0061
0062
0063
0064
0065
0066
0067
0068
0069
0070
0071
0072
0073
0074
0075
0076
0077
0078
0079
0080
0081
0082
0083
0084
0085
0086
0087
0088
0089
0090
0091
0092
0093
0094
0095
0096
0097
0098
0099
0100
0101
0102
0103
0104
0105
0106
0107
0108
0109
0110
0111
0112
0113
0114
0115
0116
0117
0118
0119
0120
0121
0122
0123
0124
0125
0126
0127
0128
0129
0130
0131
0132
0133
0134
0135
0136
0137
0138
0139
0140
0141
0142
0143
0144
0145
0146
0147
0148
0149
0150
0151
0152
0153
0154
0155
0156
0157
0158
0159
0160
0161
0162
0163
0164
0165
0166
0167
0168
0169
0170
0171
0172
0173
0174
0175
0176
0177
0178
0179
0180
0181
0182
0183
0184
0185
0186
0187
0188
0189
0190
0191
0192
0193
0194
0195
0196
0197
0198
0199
0200

6210
6220
6230
6240
6250
6260
6270
6280
6290
6300
6310
6320
6330
6340
6350
6360
6370
6380
6390
6400
6410
6420
6430
6440
6450
6460
6470
6480
6490
6500
6510
6520
6530
6540
6550
6560
6570
6580
6590
6600
6610
6620
6630
6640
6650
6660
6670
6680
6690
6700
6710
6720
6730
6740
6750
6760
6770
6780
6790
6800

```
GO TO ANG267 END;
CICLO(1,0,1,EY7) BEGIN
  V(I)+EX16+1 + (EYT+1)*(I-1)I:=0;
IF I LEQ 5 THEN BEGIN
  CICLO(71,0,1,DM(71))
  V(I)+EX16+1+(EYT+1)*(I-1)I:=EIF7(I1+(DM(71)+1)*J)*EIF7(I1+(DM(71)+1)*J)*
  *7(I1+1+(I1+3)/2) + V(I)+EX16+1+(EYT+1)*(I-1)I; END ELSE
  BEGIN
  CICLO(I1,0,1,DM(71))
  CICLO(I1,0,1,DM(71)) BEGIN
    IF I1 GEQ I2 THEN K:=I1 + I1*(I1+1)/2
    ELSE K:=I1 + I1*(I2+1)/2;
  V(I)+EX16+1+(EYT+1)*(I-1)I:=EIF7(I1+(DM(71)+1)*J)*EIF7(I2+(DM(71)+1)*J)*
  *7(I1,K) + V(I)+EX16+1+(EYT+1)*(I-1)I;
  END;
  END;
  V(I)+EX16+1 + (EYT+1)*(I-1)I:= V(I)+EX16+1 + (EYT+1)*(I-1)I=00 I1;
  END;
IF ANG(8)=0 THEN GO TO ANG27;
IF I=0 THEN BEGIN CICLO(J,0,1,EY8) V(I)+EX17+1+3*(EYT+1)I:=72;
GO TO ANG77; END;
CICLO(1,0,1,EY8) BEGIN
  V(I)+EX17+1 + (EYT+1)*(I-1)I:=0;
IF I LEQ 5 THEN BEGIN
  CICLO(71,0,1,DM(81))
  V(I)+EX17+1+(EYT+1)*(I-1)I:=EIF8(I1+(DM(81)+1)*J)*EIF8(I1+(DM(81)+1)*J)*
  *8(I1+1+(I1+3)/2) + V(I)+EX17+1+(EYT+1)*(I-1)I; END ELSE
  BEGIN
  CICLO(I1,0,1,DM(81))
  CICLO(I1,0,1,DM(81)) BEGIN
    IF I1 GEQ I2 THEN K:=I1 + I1*(I1+1)/2
    ELSE K:=I1 + I1*(I2+1)/2;
  V(I)+EX17+1+(EYT+1)*(I-1)I:=EIF8(I1+(DM(81)+1)*J)*EIF8(I2+(DM(81)+1)*J)*
```

0006210
0006220
0006230
0006240
0006250
0006260
0006270
0006280
0006290
0006300
0006310
0006320
0006330
0006340
0006350
0006360
0006370
0006380
0006390
0006400
0006410
0006420
0006430
0006440
0006450
0006460
0006470
0006480
0006490
0006500
0006510
0006520
0006530
0006540
0006550
0006560
0006570
0006580
0006590
0006600
0006610
0006620
0006630
0006640
0006650
0006660
0006670
0006680
0006690
0006700
0006710
0006720
0006730
0006740
0006750
0006760
0006770
0006780
0006790
0006800

6820
6830
6840
6850
6860
6870
6880
6890
6900
6910
6920
6930
6940
6950
6960
6970
6980
6990
7000
7010
7020
7030
7040
7050
7060
7070
7080
7090
7100
7110
7120
7130
7140
7150
7160
7170
7180
7190
7200
7210
7220
7230
7240
7250
7260
7270
7280
7290
7300
7310
7320
7330
7340
7350
7360
7370
7380
7390
7400
7410
7420

```
      U9 I1, K1 + V(I+FX17+1+(EYT+1)*(I-1))  
      END  
      END  
      V(I+FX17+1 + (EYT+1)*(I-1)):= V(IJ+FX17+1 + (EYT+1)*(I-1))-R0(I)  
      END  
      IF ANG27  
      IF AC0(0)=0 THEN GO TO ANG28  
      IF T=0 THEN BEGIN CICLE(J,0,1,EY0) V(I+FX18+1+3*(EYT+1)):=0  
      GO TO ANG28 END  
      CICLE(I,0,1,EY0) BEGIN  
      V(I+FX18+1 + (EYT+1)*(I-1)):=0  
      IF I LSS 5 THEN BEGIN  
      CICLE(I1,0,1,DM(I))  
      V(I+FX19+1+(EYT+1)*(I-1)):=EY0(I1+(DM(I)+1)*J)+EY0(I1+(DM(I)+1)*J)*  
      U9 I1, K1 + V(IJ+FX18+1+(EYT+1)*(I-1)) END ELSE  
      END  
      CICLE(I2,0,1,DM(I))  
      CICLE(I2,0,1,DM(I)) BEGIN  
      IF I1 GO TO I2 THEN K:=I2 + I*(I1+1)/2  
      ELSE K:=I1 + I*(I2+1)/2  
      V(IJ+FX18+1+(EYT+1)*(I-1)):=EY0(I1+(DM(I)+1)*J)+EY0(I2+(DM(I)+1)*J)*  
      U9 I1, K1 + V(IJ+FX18+1+(EYT+1)*(I-1))  
      END  
      END  
      V(IJ+FX15+1 + (EYT+1)*(I-1)):= V(IJ+FX18+1 + (EYT+1)*(I-1))-R0(I)  
      END  
      ANG28  
      IF AC(I1)=0 THEN BEGIN IF I LSS 7 THEN BEGIN  
      I:=I+1 GO TO ANG19 END ELSE GO TO ANG19  
      END ELSE IF I=4 THEN BEGIN CICLE(J,0,1,EY0)  
      V(I+FX19+1+3*(EYT+1)):=I10 I:=5 GO TO ANG19 END  
      CICLE(I,0,1,EY0) BEGIN  
      V(I+FX19+1 + (EYT+1)*(I-1)):=0  
      IF I LSS 5 THEN BEGIN  
      CICLE(I1,0,1,DM(I1))
```

00006820
00006830
00006840
00006850
00006860
00006870
00006880
00006890
00006900
00006910
00006920
00006930
00006940
00006950
00006960
00006970
00006980
00006990
00007000
00007010
00007020
00007030
00007040
00007050
00007060
00007070
00007080
00007090
00007100
00007110
00007120
00007130
00007140
00007150
00007160
00007170
00007180
00007190
00007200
00007210
00007220
00007230
00007240
00007250
00007260
00007270
00007280
00007290
00007300
00007310
00007320
00007330
00007340
00007350
00007360
00007370
00007380
00007390
00007400
00007410
00007420

743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803

```
V(I)+FX19+1+(FYT+1)*(I-1):=EIF10(I1+(C(I10)+1)*J)*EIF10(I1+
(DM(I10)+1)*J1+
U(I1,T1*(I1+3)/2)+V(I)+FX19+1+(FYT+1)*(I-1); END ELSE
      FACTI
CYCLO(I1,0,1,DM(I10))
      CYCLO(I2,0,1,DM(I20)) BEGIN
      IF I1 GEQ I2 THEN K1:=I2 + I1*(I1+1)/3
      ELSE K1:=I1 + I2*(I2+1)/3;
V(I)+FX19+1+(FYT+1)*(I-1):=EIF10(I1+(C(I10)+1)*J)*EIF10(I1+
(DM(I10)+1)*J1+
U(I1,T1) + V(I)+FX19+1+(FYT+1)*(I-1));
      END;
      END;
V(I)+FX19+1 + (FYT+1)*(I-1):= V(I)+FX19+1 + (FYT+1)*(I-1)-R0(I1);
      END;
IF I LSS 7 THEN BEGIN I:=I+1; GO TO A(IG); END;
      SALE;
      END
      FACT DEL PROCEDURE;
      FTLF 0061(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0062(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0063(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0064(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0065(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0066(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0067(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0068(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0069(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0070(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0071(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0072(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0073(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0074(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0075(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0076(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0077(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0078(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0079(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0080(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0081(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0082(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0083(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0084(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0085(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0086(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0087(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0088(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0089(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0090(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0091(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0092(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0093(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0094(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0095(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0096(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0097(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0098(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0099(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      FTLF 0100(KINR)BDISK,SAVEFACTORH00,MAXFLCSITZT1,BLOCKK9TZT
      INTERC H,FX1,FX2,FX3,FX4,FX5,FX6,FX7,FX8,FX9,FX10,VI,V2,VT
      CONT,FX6,FX7,FX8,FX9,FX10,VI,V2,VT
      NI,N2,N3,N4,N5,N6,N7,FX1T,FX1T1,HI;
      REAL RMS,RMST,RMS,CIF1;
```

00007430
00007440
00007450
00007460
00007470
00007480
00007490
00007500
00007510
00007520
00007530
00007540
00007550
00007560
00007570
00007580
00007590
00007600
00007610
00007620
00007630
00007640
00007650
00007660
00007670
00007680
00007690
00007700
00007710
00007720
00007730
00007740
00007750
00007760
00007770
00007780
00007790
00007800
00007810
00007820
00007830
00007840
00007850
00007860
00007870
00007880
00007890
00007900
00007910
00007920
00007930
00007940
00007950
00007960
00007970
00007980
00007990
00008000
00008010
00008020
00008030

804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862

```
APDAY K0,K1,K2(1:7);
INTEGER APPAY (2*N,DIRI,ANG,DIRMI,DIRJ(1:10));

WRITE(SAL,<<"NAME NO,NE,EXTY,PAR, INTL,LEO Y EPS">);
READ(IN,/,NO,NE,EXTY,K0(1),EPS);
WRITE(SAL,*,K0);
NUM:=NE*NO; EXT1:=7*(EXTY+1) - 1;
BEGIN
  APPAY (K1(0),2001,DATA(0),NUM+1,0,501
    NG(0),EXT1,FX(0),EXT1,FX(0),EXT1),APR(0)NUM+1,
    F(0),EXT1);
  LABEL CONTINUA;
  WRITE(SAL,<<"NAME N,ANG, DTW,EX1,FX(0),LXT,EX(0) ,FINAL *">);
  N1:=1;
  CONTINUA:
  N1:=N1+1;
  IF N1 LEQ NUM+1 THEN
    BEGIN
      WRITE(SAL,<<"OK CYCLE A OF NUCLEO=" ,IP>,N1+1);
      READ(IN,/,DATA(N1,1));
      GO TO CONTINUA;
      END;
      CYCLO(1,1,1,10) BEGIN DIRMI(N3):=DATA(NUM+1,N3+10);
      ANG(N3):=DATA(LNUM+1,N3);
      END;
      EXT:=DATA(NUM+1,21);
      EXT1:=7*(EXT+1)-1;
      CYCLO(1,1,1,10) BEGIN
        DIRMI(1):=DIRMI(1)*(DIRMI(1)+1)/2-1;
        DIRMI(1):=DIRMI(1)-1;
        END;
      BEGIN
        APPAY (C1(1:7),DIRMI(1),C2(1:7),0,DIRMI(2),C3(1:7),0,DIRMI(3)),
          C4(1:7),0,DIRMI(4),C5(1:7),0,DIRMI(5),C6(1:7),0,DIRMI(6),
          C7(1:7),0,DIRMI(7),C8(1:7),0,DIRMI(8),C9(1:7),0,DIRMI(9),
          C10(1:7),0,DIRMI(10),C11(1:7),0,EXT1,EXT1,
          C12(1:7),0,DIRMI(11),C13(1:7),0,DIRMI(12),C14(1:7),0,DIRMI(13),
          C15(1:7),0,DIRMI(14),C16(1:7),0,DIRMI(15),C17(1:7),0,DIRMI(16),
          C18(1:7),0,DIRMI(17),C19(1:7),0,DIRMI(18),C20(1:7),0,DIRMI(19),
          C21(1:7),0,DIRMI(20));
        LABEL ANGLE;
        ANG(1),ANG(2),ANG(3),ANG(4),ANG(5),ANG(6),ANG(7),ANG(8),ANG(9),
          ANG(10),ANG(11),ANG(12),ANG(13),ANG(14),ANG(15),ANG(16),ANG(17),ANG(18),ANG(19),ANG(20);
      BEGIN
        K:=1;
        CYCLO(0),K,DIRMI(1)) BEGIN
          K:=K+1;
          READ(CO(1),DIRMI(1),1,DIRMI(1),DIRMI(1));
          C1(2),N1:=C1(1),N1+C1(1),N1;
          C1(3),N1:=C1(1),N1+C1(1),N1;
          END;
      END;
```

0000P040
0000P050
0000P060
0000P070
0000P080
0000P090
0000P100
0000P110
0000P120
0000P130
0000P140
0000P150
0000P160
0000P170
0000P180
0000P190
0000P200
0000P210
0000P220
0000P230
0000P240
0000P250
0000P260
0000P270
0000P280
0000P290
0000P300
0000P310
0000P320
0000P330
0000P340
0000P350
0000P360
0000P370
0000P380
0000P390
0000P400
0000P410
0000P420
0000P430
0000P440
0000P450
0000P460
0000P470
0000P480
0000P490
0000P500
0000P510
0000P520
0000P530
0000P540
0000P550
0000P560
0000P570
0000P580
0000P590
0000P600
0000P610
0000P620

0270
0271
0272
0273
0274
0275
0276
0277
0278
0279
0280
0281
0282
0283
0284
0285
0286
0287
0288
0289
0290
0291
0292
0293
0294
0295
0296
0297
0298
0299
0300
0301
0302
0303
0304
0305
0306
0307
0308
0309
0310
0311
0312
0313
0314
0315
0316
0317
0318
0319
0320
0321
0322
0323
0324
0325
0326
0327
0328
0329
0330
0331
0332
0333
0334
0335
0336
0337
0338
0339
0340
0341
0342
0343
0344
0345
0346
0347
0348
0349
0350
0351
0352
0353
0354
0355
0356
0357
0358
0359
0360
0361
0362
0363
0364
0365
0366
0367
0368
0369
0370
0371
0372
0373
0374
0375
0376
0377
0378
0379
0380
0381
0382
0383
0384
0385
0386
0387
0388
0389
0390
0391
0392
0393
0394
0395
0396
0397
0398
0399
0400
0401
0402
0403
0404
0405
0406
0407
0408
0409
0410
0411
0412
0413
0414
0415
0416
0417
0418
0419
0420
0421
0422
0423
0424
0425
0426
0427
0428
0429
0430
0431
0432
0433
0434
0435
0436
0437
0438
0439
0440
0441
0442
0443
0444
0445
0446
0447
0448
0449
0450
0451
0452
0453
0454
0455
0456
0457
0458
0459
0460
0461
0462
0463
0464
0465
0466
0467
0468
0469
0470
0471
0472
0473
0474
0475
0476
0477
0478
0479
0480
0481
0482
0483
0484
0485
0486
0487
0488
0489
0490
0491
0492
0493
0494
0495
0496
0497
0498
0499
0500

```
CICLO(4,0,4,PIHM(4)) BEGIN
K:=K+1; READ(C064[H+1],1,POINTER(C4[1],H));
      READ(D06134[H+1],1,POINTER(C4[6],H));
      C4[2,H]:=C4[1,H]*C4[1,H];
      C4[4,H]:=20;      END;

CICLO(4,1,1,PIHM(4))
CICLO(11,0,1,H=1) BEGIN
V1:= I7 + 1*(H+1)/2;
READ(D064[V1+1],1,POINTER(C4[1],V1));
      READ(D06134[V1+1],1,POINTER(C4[2],V1));
      END;

ANG5;
IF ANG15=0 THEN GO TO ANG5;
K:=1;
CICLO(4,0,4,PIHM(5)) BEGIN
K:=K+1; READ(C065[H+1],1,POINTER(C5[1],H));
      READ(D06135[H+1],1,POINTER(C5[7],H));
      C5[2,H]:=C5[1,H]*C5[1,H];
      C5[4,H]:=30;      END;

CICLO(4,1,1,PIHM(5))
CICLO(11,0,1,H=1) BEGIN
V1:= I7 + 1*(H+1)/2;
READ(D065[V1+1],1,POINTER(C5[1],V1));
      READ(D06135[V1+1],1,POINTER(C5[2],V1));
      END;

ANG6;
IF ANG16=0 THEN GO TO ANG6;
K:=1;
CICLO(4,0,4,PIHM(6)) BEGIN
K:=K+1; READ(C066[H+1],1,POINTER(C6[1],H));
      READ(D06136[H+1],1,POINTER(C6[6],H));
      C6[2,H]:=C6[1,H]*C6[1,H];
      C6[4,H]:=40;      END;

CICLO(4,1,1,PIHM(6))
CICLO(11,0,1,H=1) BEGIN
V1:= I7 + 1*(H+1)/2;
READ(D066[V1+1],1,POINTER(C6[1],V1));
```

00009820
00009821
00009822
00009823
00009824
00009825
00009826
00009827
00009828
00009829
00009830
00009831
00009832
00009833
00009834
00009835
00009836
00009837
00009838
00009839
00009840
00009841
00009842
00009843
00009844
00009845
00009846
00009847
00009848
00009849
00009850
00009851
00009852
00009853
00009854
00009855
00009856
00009857
00009858
00009859
00009860
00009861
00009862
00009863
00009864
00009865
00009866
00009867
00009868
00009869
00009870
00009871
00009872
00009873
00009874
00009875
00009876
00009877
00009878
00009879
00009880
00009881
00009882
00009883
00009884
00009885
00009886
00009887
00009888
00009889
00009890

0265
0266
0267
0268
0269
0270
0271
0272
0273
0274
0275
0276
0277
0278
0279
0280
0281
0282
0283
0284
0285
0286
0287
0288
0289
0290
0291
0292
0293
0294
0295
0296
0297
0298
0299
0300
0301
0302
0303
0304
0305
0306
0307
0308
0309
0310
0311
0312
0313
0314
0315
0316
0317
0318
0319
0320
0321
0322
0323
0324
0325
0326
0327
0328
0329
0330
0331
0332
0333
0334
0335
0336
0337
0338
0339
0340
0341
0342
0343
0344
0345
0346
0347
0348
0349
0350
0351
0352
0353
0354
0355
0356
0357
0358
0359
0360
0361
0362
0363
0364
0365
0366
0367
0368
0369
0370
0371
0372
0373
0374
0375
0376
0377
0378
0379
0380
0381
0382
0383
0384
0385
0386
0387
0388
0389
0390
0391
0392
0393
0394
0395
0396
0397
0398
0399
0400
0401
0402
0403
0404
0405
0406
0407
0408
0409
0410
0411
0412
0413
0414
0415
0416
0417
0418
0419
0420
0421
0422
0423
0424
0425
0426
0427
0428
0429
0430
0431
0432
0433
0434
0435
0436
0437
0438
0439
0440
0441
0442
0443
0444
0445
0446
0447
0448
0449
0450
0451
0452
0453
0454
0455
0456
0457
0458
0459
0460
0461
0462
0463
0464
0465
0466
0467
0468
0469
0470
0471
0472
0473
0474
0475
0476
0477
0478
0479
0480
0481
0482
0483
0484
0485
0486
0487
0488
0489
0490
0491
0492
0493
0494
0495
0496
0497
0498
0499
0500

```
READ(DS136(V1+1),1,POINTER(CC612,V1));  
END;  
ANG6;  
IF ANG171=0 THEN GO TO ANG7;  
K:=1;  
CICLO(H,1,1,PIV1(171)) BEGIN  
K:=K+1; READ(DS67(H+1),1,POINTER(C711,H1));  
READ(DS137(H+1),1,POINTER(CC712,H1));  
C712,H1:=C711,H1*C711,H1;  
C714,H1:=56;  
END;  
CICLO(H,1,1,PIV1(171))  
CICLO(I,0,1,H=1) BEGIN  
V1:= I*H + H*(H+1)/2;  
READ(DS67(V1+1),1,POINTER(CC713,V1));  
READ(DS137(V1+1),1,POINTER(CC712,V1));  
END;  
ANG7;  
IF ANG181=0 THEN GO TO ANG8;  
K:=1;  
CICLO(H,1,1,PIV1(181)) BEGIN  
K:=K+1; READ(DS68(H+1),1,POINTER(C811,H1));  
READ(DS138(H+1),1,POINTER(CC812,H1));  
C812,H1:=C811,H1*C811,H1;  
C814,H1:=72;  
END;  
CICLO(H,1,1,PIV1(181))  
CICLO(I,0,1,H=1) BEGIN  
V1:= I*H + H*(H+1)/2;  
READ(DS68(V1+1),1,POINTER(CC811,V1));  
READ(DS138(V1+1),1,POINTER(CC812,V1));  
END;  
ANG8;  
IF ANG191=0 THEN GO TO ANG9;  
K:=1;  
CICLO(H,1,1,PIV1(191)) BEGIN  
K:=K+1; READ(DS69(H+1),1,POINTER(C911,H1));  
READ(DS139(H+1),1,POINTER(CC912,H1));  
C912,H1:=C911,H1*C911,H1;  
C914,H1:=99;  
END;  
CICLO(H,1,1,PIV1(191))  
CICLO(I,0,1,H=1) BEGIN
```

00000856
00000860
00000870
00000880
00000890
00000900
00000910
00000920
00000930
00000940
00000950
00000960
00000970
00000980
00000990
00001000
00001010
00001020
00001030
00001040
00001050
00001060
00001070
00001080
00001090
00001100
00001110
00001120
00001130
00001140
00001150
00001160
00001170
00001180
00001190
00001200
00001210
00001220
00001230
00001240
00001250
00001260
00001270
00001280
00001290
00001300
00001310
00001320
00001330
00001340
00001350
00001360
00001370
00001380
00001390
00001400
00001410
00001420
00001430
00001440
00001450
00001460
00001470
00001480
00001490
00001500

0000
0001
0002
0003
0004
0005
0006
0007
0008
0009
0010
0011
0012
0013
0014
0015
0016
0017
0018
0019
0020
0021
0022
0023
0024
0025
0026
0027
0028
0029
0030
0031
0032
0033
0034
0035
0036
0037
0038
0039
0040
0041
0042
0043
0044
0045
0046
0047
0048
0049
0050
0051
0052
0053
0054
0055
0056
0057
0058
0059
0060
0061
0062
0063
0064
0065
0066
0067
0068
0069
0070
0071
0072
0073
0074
0075
0076
0077
0078
0079
0080
0081
0082
0083
0084
0085
0086
0087
0088
0089
0090
0091
0092
0093
0094
0095
0096
0097
0098
0099
0100

```
V1:= IT + H*(H+1)/2;  
READ(D060[V1+1],1,PRINTF(CC01[V1])),  
READ(DS030[V1+1],1,PRINTF(CC02[V1])),  
END;  
ANG0:  
IF ANG101=0 THEN GO TO NEWTON;  
K:=1;  
CICLO(H,0,K,FINH,101) BEGIN  
V1:=K+1; READ(D0610[V1+1],1,PRINTF(CC10[V1])),  
READ(DS0310[V1+1],1,PRINTF(CC10[V1])),  
C10[V1,H]=C10[V1,H]+C10[V1,H];  
FINH;  
CICLO(H,1,1,FINH(101))  
CICLO(V1,0,1,H-1) BEGIN  
V1:= IT + H*(H+1)/2;  
READ(D0610[V1+1],1,PRINTF(CC10[V1])),  
READ(DS0310[V1+1],1,PRINTF(CC10[V1])),  
END;  
NEWTON:  
CONT:=CONT+1;  
APP101:=0; FINST:=0;  
WRITE(SA,*,*,CONT); WRITE(FILE6,*,*,CONT);  
CICLO(N2,0,1,N0M) BEGIN  
N:=DATA(N2,0);  
CICLO(N3,1,1,10) BEGIN  
ANG(N3):=DATA(N2,N3);  
FIN(N3):=DATA(N2,N3+10);  
DTH(N3):=DTH(N3); [DTH(N3):=DTH(N3)*(DTH(N3)+1)/2-1;  
DTH(N3):=DTH(N3)-1; END;  
FX1:=DATA(N2,21); FX2:=DATA(N2,22); FX3:=DATA(N2,23);  
FX4:=DATA(N2,24); FX5:=DATA(N2,25); FX6:=DATA(N2,26);  
FX7:=DATA(N2,27); FX8:=DATA(N2,28); FX9:=DATA(N2,29);  
FX10:=DATA(N2,30); FXT:=DATA(N2,31);  
APP(N2+1):=APP(N2)+FXT+1;  
CICLO(N4,0,1,FXT) [CICLO(N4):=DATA(N2,N4+32);  
WRITE(SA,*,*,ANG,FX1,FX2,FX3,FX4,FX5,FX6,FX7,FX8,FX9,FX10,  
DTH(N3),APP);  
WRITE(FILE6,*,*,ANG,FX1,FX2,FX3,FX4,FX5,FX6,FX7,FX8,FX9,FX10,  
DTH(N3),APP);
```

0001 0440
0002 0470
0003 0490
0004 0490
0005 0500
0006 0510
0007 0520
0008 0530
0009 0540
0010 0550
0011 0560
0012 0570
0013 0580
0014 0590
0015 0600
0016 0610
0017 0620
0018 0630
0019 0640
0020 0650
0021 0660
0022 0670
0023 0680
0024 0690
0025 0700
0026 0710
0027 0720
0028 0730
0029 0740
0030 0770
0031 0790
0032 0790
0033 0800
0034 0810
0035 0820
0036 0830
0037 0840
0038 0850
0039 0860
0040 0870
0041 0880
0042 0890
0043 0900
0044 0910
0045 0920
0046 0930
0047 0940
0048 0950
0049 0960
0050 0970
0051 0980
0052 0990
0053 1000
0054 1010
0055 1020
0056 1030
0057 1040
0058 1050
0059 1052
0060 1054

60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150

```
CICLO(H,1,1,PI*3 )
CICLO(PI,0,1,H=1) BEGIN
V1:=IT + 1*(H+1)/2;
V2:=IT*(IT+3)/2;
C4(6,V1):=SQRT((H-C3(1,V2))*(H-C3(1,V2)-1))*C3(1,V1);
C4(7,V1):=SQRT((H-C3(1,V2))*C3(2,V1)+4*C3(6,V1));
END;
ANG31:
IF ANG(4)=0 THEN GO TO ANG32;
K:=1;
CICLO(H,0,K,PI*1(4)) BEGIN
K:=K+1;
C4(13,H):=1+C4(1,H);
C4(16,H):=1/4*(C4(1,H)+4)-1/4*C4(5,H)-1/4*(C4(1,H))*(2*H+1-2*C4(1,H))
+5*(H-C4(1,H));
C4(17,H):=1/2*C4(5,H)+5.5*C4(1,H)+5.5*C4(2,H)+4*H*C4(1,H)+4*C4(6,H)
+6*H*H*H+7;
END;
CICLO(H,1,1,PI*1(4))
CICLO(PI,0,1,H=1) BEGIN
V1:=IT + 1*(H+1)/2;
V2:=IT*(IT+3)/2;
C4(6,V1):=SQRT((H-C4(1,V2))*(H-C4(1,V2)-1))*C4(1,V1);
C4(7,V1):=SQRT((H-C4(1,V2))*C4(2,V1)+4*C4(6,V1));
END;
ANG32:
IF ANG(5)=0 THEN GO TO ANG33;
K:=1;
CICLO(H,0,K,PI*1(5)) BEGIN
K:=K+1;
C4(13,H):=1+C4(1,H);
C4(16,H):=1/4*(C4(1,H)+4)-1/4*C4(5,H)-1/4*(C4(1,H))*(2*H+1-2*C4(1,H))
+5*(H-C4(1,H));
C4(17,H):=1/2*C4(5,H)+5.5*C4(1,H)+5.5*C4(2,H)+4*H*C4(1,H)+4*C4(6,H)
+6*H*H*H+7;
END;
CICLO(H,1,1,PI*1(5))
CICLO(PI,0,1,H=1) BEGIN
V1:=IT + 1*(H+1)/2;
V2:=IT*(IT+3)/2;
```

00006540
00006550
00006560
00006570
00006580
00006590
00006600
00006610
00006620
00006630
00006640
00006650
00006660
00006670
00006680
00006690
00006700
00006710
00006720
00006730
00006740
00006750
00006760
00006770
00006780
00006790
00006800
00006810
00006820
00006830
00006840
00006850
00006860
00006870
00006880
00006890
00006900
00006910
00006920
00006930
00006940
00006950
00006960
00006970
00006980
00006990
00007000
00007010
00007020
00007030
00007040
00007050
00007060
00007070
00007080
00007090
00007100
00007110
00007120
00007130
00007140
00007150
00007160
00007170
00007180
00007190
00007200
00007210
00007220
00007230
00007240
00007250
00007260
00007270
00007280
00007290
00007300
00007310
00007320
00007330
00007340
00007350
00007360
00007370
00007380
00007390
00007400
00007410
00007420
00007430
00007440
00007450
00007460
00007470
00007480
00007490
00007500

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10
 11
 12
 13
 14
 15
 16
 17
 18
 19
 20
 21
 22
 23
 24
 25
 26
 27
 28
 29
 30
 31
 32
 33
 34
 35
 36
 37
 38
 39
 40
 41
 42
 43
 44
 45
 46
 47
 48
 49
 50
 51
 52
 53
 54
 55
 56
 57
 58
 59
 60
 61
 62
 63
 64
 65
 66
 67
 68
 69
 70
 71
 72
 73
 74
 75
 76
 77
 78
 79
 80
 81
 82
 83
 84
 85
 86
 87
 88
 89
 90
 91
 92
 93
 94
 95
 96
 97
 98
 99
 100

```

CICLO(H,0,K,PIH(1)) BEGIN
K:=K+1;
C[13,H]:=1/4*(C[1,H]+C[1,H+1]);
C[16,H]:=1/4*(C[1,H]+C[1,H+1])=1/4*(C[1,H]+C[1,H+1])*(2*N+1-2*(C[1,H]+C[1,H+1]));
C[17,H]:=1/2*(C[15,H]+5*(C[1,H]+C[2,H]+4*N*(C[1,H]+C[4,H])
+6*N*(N+1)*C[1,H]);
END;

```

```

CICLO(H,1,1,PIH(1))
CICLO(I,0,1,H-1) BEGIN
V1:=I+H*(H+1)/2;
V2:=I*(I+1)/2;
C[16,V1]:=SQRT((H-C[1,V2])*(H-C[1,V2]-1))*C[1,V1];
C[17,V1]:=SQRT((H-C[1,V2])*C[2,V1]+4*C[16,V1]);
ANG76:=END;

```

```

IF ANG19)=0 THEN GO TO ANG37;
K:=1;
CICLO(H,0,K,PIH(1)) BEGIN
K:=K+1;
C[13,H]:=1/4*(C[1,H]+C[1,H+1]);
C[16,H]:=1/4*(C[1,H]+C[1,H+1])=1/4*(C[1,H]+C[1,H+1])*(2*N+1-2*(C[1,H]+C[1,H+1]));
C[17,H]:=1/2*(C[15,H]+5*(C[1,H]+C[2,H]+4*N*(C[1,H]+C[4,H])
+6*N*(N+1)*C[1,H]);
END;

```

```

CICLO(H,1,1,PIH(1))
CICLO(I,0,1,H-1) BEGIN
V1:=I+H*(H+1)/2;
V2:=I*(I+1)/2;
C[16,V1]:=SQRT((H-C[1,V2])*(H-C[1,V2]-1))*C[1,V1];
C[17,V1]:=SQRT((H-C[1,V2])*C[2,V1]+4*C[16,V1]);
ANG77:=END;

```

```

IF ANG19)=0 THEN GO TO ANG38;
K:=1;
CICLO(H,0,K,PIH(1)) BEGIN
K:=K+1;
C[13,H]:=1/4*(C[1,H]+C[1,H+1]);
C[16,H]:=1/4*(C[1,H]+C[1,H+1])=1/4*(C[1,H]+C[1,H+1])*(2*N+1-2*(C[1,H]+C[1,H+1]));
C[17,H]:=1/2*(C[15,H]+5*(C[1,H]+C[2,H]+4*N*(C[1,H]+C[4,H])
+6*N*(N+1)*C[1,H]);
END;

```

000
 001
 002
 003
 004
 005
 006
 007
 008
 009
 010
 011
 012
 013
 014
 015
 016
 017
 018
 019
 020
 021
 022
 023
 024
 025
 026
 027
 028
 029
 030
 031
 032
 033
 034
 035
 036
 037
 038
 039
 040
 041
 042
 043
 044
 045
 046
 047
 048
 049
 050
 051
 052
 053
 054
 055
 056
 057
 058
 059
 060
 061
 062
 063
 064
 065
 066
 067
 068
 069
 070
 071
 072
 073
 074
 075
 076
 077
 078
 079
 080
 081
 082
 083
 084
 085
 086
 087
 088
 089
 090
 091
 092
 093
 094
 095
 096
 097
 098
 099
 100

300
 301
 302
 303
 304
 305
 306
 307
 308
 309
 310
 311
 312
 313
 314
 315
 316
 317
 318
 319
 320
 321
 322
 323
 324
 325
 326
 327
 328
 329
 330
 331
 332
 333
 334
 335
 336
 337
 338
 339
 340
 341
 342
 343
 344
 345
 346
 347
 348
 349
 350
 351
 352
 353
 354
 355
 356
 357
 358
 359
 360
 361
 362
 363
 364
 365
 366
 367
 368
 369
 370
 371
 372
 373
 374
 375
 376
 377
 378
 379
 380
 381
 382
 383
 384
 385
 386
 387
 388
 389
 390
 391
 392
 393
 394
 395
 396
 397
 398
 399
 400

```

    ENDS;

    CICLO(N,1,1,DTM(10))
    CICLO(TI,0,1,H=1) REGIM
    V1:= IT + H*(H+1)/2;
    V2:= IT*(IT+3)/2;
    C10(6,V1):= SQRT((N-C10(1,V2))*(N-C10(1,V2)-1))+C10(1,V1);
    C10(7,V1):= SQRT((N-C10(1,V2)+C10(2,V1)+4*C10(6,V1));
    ENDS;

    ANGB:
    CICLO(NS,1,1,10) DTM(NS):=DTM(NS)+1;
    CICLO(NS,0,1,EXT) DINS:=0;
    CALCULA(N,K0,ARG,DTM,FX1,FX2,FX3,FX4,FX5,FX6,FX7,FX8,FX9,FX10,EXT,
    ECS,B,RMS,F;
    C1,C2,C3,F4,C5,C6,C7,C8,C9,C10);
    CICLO(N1,1,1,7) CICLO(NS,0,1,EXT)
    RGINS + ARG*IN2 + (N1-1)*(EXTT+1):=RINS + (N1-1)*(EXT+1);
    CICLO(NS,0,1,EXT) FX(IN2+ARG*IN2):=FCS(IN3);
    RMST:= RMST + RMS/(EXTT=6);
    END DEL CICLO DE H2 DE O A NUM;

    RMST:=SORT(RMST);
    WRITE(SAL,*,RMST); WRITE(FILE6,*,RMST);
    IF RMST LGO EPS THEN GO TO URSUS;

    CICLO(M2,0,1,EXTT) FX0(IN2):=EX(IN2);
    LLSQAR(B,C,FX0,EXTT+1,7,1,EXTT+1,EXTT+1,7,WKA,0);

    WRITE(SAL,*,K0);
    CICLO(TI,0,1,6) REGIM
    K1(TI+1):=EX0(TI);
    DTF:=K1(TI+1)-K0(TI+1);
    K0(TI+1):=K1(TI+1);
    WRITE(FILE6,*,VAR(K0(1,1) ")=",E10,3,X2,"K1(",1,1)=",F10,3,/,>
    IT+1,DTF,1,*,K1(TI+1));
    WRITE(SAL,*,VAR(K0(1,1) ")=",E10,3,X2,"K1(",1,1)=",F10,3,/,>
    IT+1,DTF,1,IT+1,K1(TI+1));

    ENDS;
    GO TO NEWTON;

    URSUS;

    WRITE(SAL,*,RMS); WRITE(FILE6,*,RMS);
    WRITE(SAL,*,K0); WRITE(FILE6,*,K0);
    ENDS; ENDS;
  
```

000
 001
 002
 003
 004
 005
 006
 007
 008
 009
 010
 011
 012
 013
 014
 015
 016
 017
 018
 019
 020
 021
 022
 023
 024
 025
 026
 027
 028
 029
 030
 031
 032
 033
 034
 035
 036
 037
 038
 039
 040
 041
 042
 043
 044
 045
 046
 047
 048
 049
 050
 051
 052
 053
 054
 055
 056
 057
 058
 059
 060
 061
 062
 063
 064
 065
 066
 067
 068
 069
 070
 071
 072
 073
 074
 075
 076
 077
 078
 079
 080
 081
 082
 083
 084
 085
 086
 087
 088
 089
 090
 091
 092
 093
 094
 095
 096
 097
 098
 099
 100

REFERENCIAS

- 1.- Mayer M.G. Phys. Rev. 75 (1949) 1969.
Haxel O. , J.H.D.Jensen and H.E.Suess, Phys. Rev. 75(1949)1766.
- 2.- Bohr A. , Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 26(1952)no.14.
- 3.- Bohr A. and B.R.Mottelson, Mat. Fys. Medd. Dan. Selsk. 26(1953)no.16.
- 4.- F. Iachello, Proc. 1974 Amsterdam Conf. on Nuclear Structure and Spectroscopy (Scholar's Press, Amsterdam, 1974).
A.Arima and F. Iachello, Phys.Rev.Lett. 35(1975)1069.
- 5.- A.Bohr, B.Mottelson and D.Pines, Phys.Rev. 110(1958)4.
- 6.- Bardeen, Cooper and Schrieffer, Phys.Rev. 106(1957)162.
- 7.- F. Iachello and A.Arima, Phys.Lett. 53b,(1974)309.
A.Arima and F. Iachello, Phys.Lett. 57B,(1975)39.
- 8.- A.Arima, T.Ohtsuka, F. Iachello and I.Talmi, Phys.Lett.66B,(1977)205;
Proc.Int.Conf.Nucl. Str. Tokyo(1977);Phys.Lett.76B(1978)139.
T.Ohtsuka, A.Arima and F. Iachello, Nucl.Phys.A309(1978)1.
- 9.- E.P.Wigner Phys.Rev.51(1937)106.
- 10.- J.P.Elliott, "Selected Topics in Nuclear Theory"(Int.At.Energy Ag. , Vienna 1963);
Proc.Roy.Soc.A245, 128(1958).
J.Flores, E.Chacón, P.A.Mello and M.de LLano, Nucl.Phys.72(1965)352.
- 11.- O.Castaños, E.Chacón, A.Frank and M.Moshinsky, J.Math.Phys.20(1979)1.
- 12.- O.Castaños, A.Frank and P.Federman , por publicarse en Phys. Lett.B
- 13.- H.Feshbach and F. Iachello, Ann.Phys.(N.Y.) 84 (1974)211.
- 14.- E.Chacón, M.Moshinsky and R.T.Sharp, J.Math.Phys.17(1976)668.
E.Chacón and M.Moshinsky, J.Math.Phys.18(1977)870.
- 15.- J.M.Eisenberg and W.Greiner "nuclear Models" Vol 1(North Holland, 1970).
- 16.- G.Racah Phys.Rev.63(1943)367.
- 17.- M.Moshinsky, T.H.Seligman and K.B.Wolf, J.Math. Phys. 13(1972)901.
- 18.- D.R.Bes Nucl.Phys. 10(1959)373.
G.G.Dussel and D.R.Bes, Nucl.Phys. A143 (1970) 623.
- 19.- M.Moshinsky "Group Theory and the Many Body Problem"(Gordon and Breach, N.Y. 1967).
- 20.- N.Y. Vilenkin "Special Functions and Theory of Group Representations"(A. M. S. translation, Providence, R.I. 1968).
- 21.- M.A.Lohe "The Development of the Boson Calculus for the Orthogonal and Symplectic Groups", Thesis, Univ. of Adelaide (1974).
- 22.- M.E.Rose "Elementary Theory of Angular Momentum"(Wiley, N.Y. , 1957).
- 23.- L.von Bernus et.al. "A Collective Model for Transitional Nuclei", in "Heavy Ion, High Spin States and Nucl. Str."(Int. At. Energy Ag., Vienna, 1975).
- 24.- A.Arima, T.Ohtsuka, F. Iachello and I.Talmi, Phys.Lett.66B(1977)205.
- 25.- B.Sorensen Nucl.Phys. A217(1973)205.
- 26.- T.Kahimoto and T.Tamura Nucl.Phys. A270(1977)317.
- 27.- E.R.Marshalek, Nucl.Phys. A224(1974)1.
- 28.- D.Janssen, R.V.Jolos and F.Donau, Nucl.Phys.A224, 93(1974).
- 29.- M.Moshinsky "The Harmonic Oscillator in Modern Physics: From Atoms to Quarks"(Gordon and Breach, N.Y. 1968).
- 30.- I.S.Gradshiteyn and I.M.Ryzhik "Table of Integrals, Series and Products"(Academic Press, N.Y. 1965).
- 31.- O.Castaños, A.Frank and M.Moshinsky J.Math. Phys. 19(1978)1781.

- 32.- M. Moshinsky and V. Vanagas, que será publicado en Phys. Lett. B.
M. Moshinsky, enviado a Nucl. Phys. A.
- 33.- M. Moshinsky en "Memorias del Congreso de Física Nuclear de Oaxtepec, 1979".
- 34.- A. DeShalit and H. Feshbach "Theoretical Nuclear Physics" Vol 1 (Wiley, N.Y. 1974).
- 35.- I. Talmi Nucl. Phys. A172(1971)1.
- 36.- A. Arima, T. Ohtsuka, F. Iachello & I. Talmi Phys. Lett. 76B (1978) 139.
- 37.- R. F. Casten & J. A. Cizewski Phys. Lett. 79B (1978) 5, Nucl. Phys. A309 (1978)206; Nucl. Phys. A309 (1978) 477.
- 38.- A. Arima and F. Iachello Ann. of Phys. 99, 253(1976).
- 39.- A. Arima and F. Iachello Ann. of Phys. 111, 201 (1978).
- 40.- A. Arima and F. Iachello Preprint 06520 Yale University.
- 41.- B. G. Wybourne "Classical Groups for Physicists" (Wiley, N.Y. (1973).
- 42.- R. F. Dashen and M. Gell-Mann Phys Lett 17(1965) 142.
M. Gell-Mann and Y. Ne'emann "The Eightfold Way" (W.A. Benjamin, N.Y. 1964).
- 43.- M. Hamemesh "Group Theory" (Addison-Wesley, Reading Mass. 1962).
- * 44.- P. Hess. J. of Phys. G. 4 59, (1978).
- 45.- A. Arima, T. Ohtsuka, F. Iachello and I. Talmi Phys. Lett. 66B (1976) 205.
- 46.- V. Bargmann and M. Moshinsky Nucl. Phys. 23, 177(1961).
- 47.- V. Bargmann and M. Moshinsky Nucl. Phys. 18, 697(1960).
- 48.- J. D. Vergados Nucl. Phys. 42, 469(1963).
- 49.- M. Moshinsky, J. Patera, R.T. Sharp and P. Winternitz Ann. of Phys. 95, 139(1975).
- 50.- D. Pines "The Many Body Problem" (Benjamín, Reading Mass. (1962).
- 51.- L. Willets and M. Jean. Phys. Rev. 102 (1956), 788.
- 52.- J. Meyer-Ter-Vehn Phys. Lett. 84B, (1979)10.
- 53.- Esta es una manera alternativa de escribir los generadores de $O(6)$, que no coincide con la definición de la ref. (12). Ver ref. (39).
- 54.- O. Scholten, F. Iachello and A. Arima Ann. of Phys. 115, 325(1978).
- 55.- P.J. Brussaard and P.W.M. Glaudemans "Shell-Model Applications in Nuclear Spectroscopy" (North-Holland, 1977).
- 56.- W. Chung, Thesis, Michigan State University (1976).
- 57.- F. Iachello and O. Scholten. Preprint 3074-514 Yale Univ.
- 58.- T. Ohtsuka, A. Arima, F. Iachello and I. Talmi Phys. Lett B, 76B, 139(1978).
- 59.- P. Federman and S. Pittel. Phys. Lett. 77B, 29(1978); 69B, 385.
- 60.- Louck et. al. Rev. Mod. Phys. 44, 540(1972).
- 61.- Alternativamente puede hacerse el desarrollo $\langle l^2 \Lambda_{\mu} \mu L M \rangle = \bar{F}_{\lambda}(l) \sum_{\kappa} \phi_{\kappa}^{\Lambda \mu L}(l) \langle l^2 \mu \kappa \rangle$ si se imponen las reglas de simetría
- en la $\phi_{\kappa}^{\Lambda \mu L}(l)$:
- $$\phi_{\kappa}^{\Lambda \mu L}(l) = \frac{(-)^L}{2} (1 + (-)^{\kappa}) \phi_{-\kappa}^{\Lambda \mu L}(l); \kappa = L, L-1, \dots, -L, \quad C \leq \kappa \leq \frac{L}{2}$$
- 62.- G. Gneuss and W. Greiner Nucl. Phys. A171, 449(1971).
- 63.- El último coeficiente, (204: $\Lambda' \mu' L'$; $\Lambda'' \mu'' L''$), no está conectado con transiciones cuadrupolares, sino hexadecapolares.
- 64.- E.P. Wigner, "Group Theory" (Academic, N.Y. 1959)
- 65.- A.J. Dragt, J. Math. Phys. 6, 533, (1965).
- 66.- Esto es para un solo tipo de bosones, ver capítulo 3 (Spin F)