

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**GRADOS DE LIBERTAD COLECTIVOS EN LAS
REACCIONES NUCLEARES**

T E S I S

que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

(FISICA)

p r e s e n t a :

OCTAVIO CASTAÑOS GARZA

BIBLIOTECA

MEXICO, D. F.



1979



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A:
Estrellita,
Luis Octavio
y mis Padres.

AGRADECIMIENTOS

La elaboración de este trabajo ha sido posible gracias al apoyo que me han dado una serie de personas e instituciones .

En primer lugar, deseo agradecer a mi asesor, el Dr. Marcos Moshinsky, todas sus enseñanzas en el transcurso de los últimos años, que han hecho posible este trabajo .

También quiero manifestar mi agradecimiento al Dr. Elpidio Chacón por su constante estímulo, así como a Alejandro Frank, cuya colaboración permitió elaborar este trabajo .

Agradezco al Instituto de Física de la UNAM a través de su Director, el Dr. Jorge Flores, las facilidades y apoyo que me brindó durante el tiempo en que se realizó este trabajo, así como al Dr. Marcos Rosenbaum, Director del Centro de Estudios Nucleares de la UNAM, en donde se concluyó .

Finalmente, agradezco al Programa de Formación de Personal Académico y al Programa Nacional de Ciencias Básicas del CONACyT el apoyo económico que me proporcionaron durante el desarrollo de la tesis .

I N D I C E

| | | Página |
|-----|---|--------|
| I | INTRODUCCION | 1 |
| II | EL MODELO COLECTIVO DEL NUCLEO | |
| | 1.- Hamiltoniano Cuadrupolar | 10 |
| | 2.- Eigenestados del Oscilador Armónico en 5 dimensiones | 21 |
| | 3.- Estados caracterizados por las R.I. de la Cadena de Grupos $U(5) \supset O(3)$ | 28 |
| | 4.- Estados con "Seniority" definido | 35 |
| | 5.- Determinación de la $\phi^{NML}(\chi)$ | 41 |
| | 6.- Extensión a Momento Angular Impar | 55 |
| | 7.- Elementos de Matriz Relevantes en el Modelo Colectivo | 58 |
| | 8.- Diagonalización del Hamiltoniano | 66 |
| | 9.- Superficie de Energía Potencial del ${}^{69}_{44}Dy$ | 70 |
| III | REACCIONES NUCLEARES CON GRADOS DE LIBERTAD COLECTIVOS | |
| | 1.- Interacción Directa | 84 |
| | 2.- Interacción a través de Núcleo Compuesto | 99 |
| | 3.- Estados Moleculares en la Dispersión de Iones Pesados | 114 |

| | | |
|----|---|-----|
| IV | CONCLUSIONES | 146 |
| V | APENDICES | |
| | A) Evaluación de los Coeficientes de Wigner reducidos de la Cadena de Grupos $O(5) \supset O(3)$ | 149 |
| | B) Programa de Cómputo utilizado en la Dispersión ${}^{12}\text{C} - {}^{12}\text{C}$ | |

CAPITULO I

Introducción.- El desarrollo de modelos nucleares ha contribuido notablemente al conocimiento de la estructura del núcleo. Estos modelos frecuentemente surgen de una imagen del núcleo que presenta analogías con fenómenos en otros campos de la física. Un ejemplo típico de esta semejanza son los modelos de capas del átomo y del núcleo.

1)
El modelo de capas ¹⁾, sugerido originalmente por Mayer y Jensen, permitió explicar una gran variedad de propiedades nucleares, como el espín y paridad del estado base, los números mágicos, los elementos de matriz en el decaimiento α y β , etc., pero aún así su éxito ha sido limitado. Por ejemplo, los momentos cuadrupolares nucleares observados experimentalmente son por lo general mucho mayores que las predicciones de este modelo, especialmente en la región entre capas cerradas, las probabilidades de transición entre estados de baja energía son hasta 2 ordenes de magnitud mayores, y además se observan espectros típicamente vibracionales y rotacionales, que difícilmente pueden ser interpretados en base a este modelo. Finalmente, una mayor motivación para el desarrollo de modelos diferentes al modelo de capas, se originó con el descubrimiento de las resonancias gigantes ²⁾ en 1947.

Estas observaciones condujeron al desarrollo de varios modelos colectivos, que finalmente dieron lugar a 2 modelos básicamente diferentes:

- a) Un modelo para los procesos que se efectúan esencialmente en la superficie nuclear y
- b) Un modelo para los procesos que se realizan en la región interna de los núcleos.

El primero de estos modelos es el que nos concierne en este trabajo, y por lo tanto estaremos interesados en los grados de libertad colectivos superficiales que dan origen a rotaciones y vibraciones del núcleo atómico. Este modelo surgió en su forma más elemental hace más de 40 años, en conexión con los primeros intentos de explicar el fenómeno de la fisión nuclear^{3,4)}.

Por otro lado, los grandes momentos cuadrupolares encontrados experimentalmente en algunas regiones nucleares, llevaron a la suposición de que en un núcleo par-impar la partícula extra podría polarizar al carozo nuclear. Rainwater demostró⁵⁾ que esta partícula puede tener una energía más baja si el potencial promedio debido a todos los demás nucleones no es esférico sino deformado, lo que constituyó la primera prueba de que este tipo de núcleos podría existir.

Es necesario enfatizar que la introducción de los grados de libertad colectivos no representa un punto de vista contradictorio al de los modelos de partícula independiente. De hecho, la suposición de un campo efectivo en estos últimos, proviene de la interacción promediada con todos los demás nucleones del sistema, i.e. es en sí de naturaleza colectiva. Este punto ha sido claramente establecido en diversos trabajos sobre el modelo de capas deformado ⁶⁾.

La dinámica del movimiento colectivo cuadrupolar de los núcleos, es convenientemente descrita por el Hamiltoniano de Bohr ⁷⁾. Dependiendo de la forma de la energía potencial de deformación, este Hamiltoniano puede describir tanto el límite vibracional, en el cual el núcleo sufre oscilaciones armónicas alrededor de la forma esférica, como el límite rotacional, en el que las excitaciones consisten de rotaciones de un núcleo deformado. En ambos casos, los espectros característicos son de naturaleza muy simple. Pequeños alejamientos de estos 2 límites han sido considerados por diferentes modelos como el de rotación-vibración, del rotor asimétrico ⁸⁾, etc., que resultan insuficientes debido a que entre los límites rotacional y vibracional existe una amplia variedad de posibilidades para la dinámica nuclear.

En vista de esta situación, diversos investigadores se propusieron desarrollar un esquema general para la descripción de los movimientos colectivos superficiales Kumar y Baranger ⁹⁾ atacaron el problema

general del Hamiltoniano de Bohr mediante un método de integración numérica del sistema de ecuaciones diferenciales acopladas resultante. Sin embargo, dada la naturaleza del problema, este método de "fuerza bruta" no es satisfactorio y solamente tiene el mérito de haber demostrado que el modelo general es capaz de dar soluciones razonables en regiones nucleares inaccesibles a otros modelos.

Un método más apropiado es diagonalizar el Hamiltoniano de Bohr en la base formada por los eigenestados del oscilador armónico cuadrupolar, trabajo realizado originalmente por Bes¹⁰⁾ y Bes y Dussel¹¹⁾ para valores pequeños de el momento angular y el número de fonones. La razón de esta limitación es que el problema que presenta la obtención de los eigenestados del oscilador armónico cuadrupolar con momento angular definido es considerable. Gneuss y Greiner¹²⁾ desarrollaron un método numérico para obtener estos estados y posteriormente efectuaron un análisis sistemático de los espectros a bajas energías de los núcleos par-par con $A \geq 40$ ¹³⁾, mostrando que el modelo es muy efectivo para la sistematización de una gran cantidad de datos experimentales.

Un análisis más general y detallado sólo es posible sin embargo, mediante el conocimiento de la forma analítica de las eigenfunciones del oscilador, ya que esto da lugar a una simplificación muy importante

en los cálculos y a la posibilidad de desarrollar programas generales de ajuste de espectros y demás características nucleares .

Este paso fue dado recientemente por Chacón, Moshinsky
 14) y Sharp 15) y Chacón y Moshinsky , quienes encontraron la forma explícita de estos estados para valores arbitrarios de los números cuánticos que los caracterizan, utilizando argumentos de teoría de grupos .

En la primera parte de este trabajo hacemos una revisión de estos resultados y hacemos uso de ellos para obtener de manera analítica los elementos de matriz del Hamiltoniano de Bohr y de los operadores de transición relevantes . Como una aplicación de estos resultados realizamos también un cálculo para el núcleo ${}^{164}_{66}\text{Dy}$.

Resulta claro que el modelo colectivo del núcleo juega un papel de gran importancia dentro de la física nuclear, y que los métodos matemáticos desarrollados para su aplicación son por tanto de vital importancia . Sabemos por otro lado que la mayoría de los conocimientos en esta área surge de la investigación a través de reacciones nucleares . Mediante el bombardeo de núcleos con proyectiles de diversa naturaleza es factible estudiar las propiedades de estos sistemas y descubrir nuevas formas de comportamiento . Estas consideraciones han sido la motivación central para el desarrollo de una teoría de reacciones nucleares en que se incorporan los grados de libertad

colectivos de los fragmentos en forma sistemática, lo que constituye el tema de la segunda parte de este trabajo .

En esta parte de la tesis introducimos dos mecanismos de reacción que son

- a) La interacción directa y
- b) La interacción a través de núcleo compuesto .

Esta subdivisión se debe al hecho conocido de que las reacciones nucleares pueden dar origen a fenómenos en que los proyectiles no pierden su naturaleza individual , como es el caso en las reacciones de "stripping" y "pick-up", pero pueden también constituir un sistema nuevo, el núcleo compuesto, a partir del cual pueden emerger fragmentos resultantes de muy diversa índole. Un caso típico de este último mecanismo es el de la fisión nuclear.

Recientemente un nuevo fenómeno ha provocado el interés de los físicos nucleares. Se trata de los estados conocidos como "moléculas nucleares"¹⁶⁾, fenómeno que parece ocurrir en una gran variedad de reacciones entre iones pesados. Este mecanismo podría tener relevancia en la comprensión de reacciones de fusión en el interior de las estrellas y tal vez constituya un paso importante en el mecanismo de la fisión de núcleos pesados como el Uranio.

Las "moléculas nucleares" parecen deber su existencia precisamente a la participación de los grados de libertad colectivos en la diná-

mica de los sistemas nucleares, y en la última parte de este trabajo utilizamos una versión simplificada del formalismo desarrollado, para analizar la reacción $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$, en que estos fenómenos se manifiestan de manera muy clara.

Podemos resumir entonces el contenido de este trabajo como sigue:

El capítulo II está dividido en 9 secciones. En las primeras 2 se discuten las coordenadas colectivas y la determinación del Hamiltoniano, así como la cadena de grupos $U(5) \supset O(5) \supset SU(2) \times SU(2)$ utilizada por Greiner para construir numéricamente estados con momento angular definido. En las 4 secciones siguientes estudiamos el método analítico, asociado con la cadena de grupos $U(5) \supset O(5) \supset O(3)$, utilizado en los trabajos de Chacón, Moshinsky y Sharp y Chacón y Moshinsky, para determinar explícitamente las funciones de onda del oscilador armónico cuadrupolar de momento angular definido. En la sección 7 se determinan los elementos de matriz más importantes del modelo colectivo, usando los coeficientes 3j-reducidos de la cadena de grupos $O(5) \supset O(3)$. En la sección 8 se discute la convergencia de los métodos empleados para finalmente en la última sección analizar detalladamente el $^{16}\text{O} \text{ D}_\gamma$ como

ejemplo del cálculo de las superficies de energía potencial.

En el capítulo III se presenta el formalismo de las interacciones directas, enfatizando su aplicabilidad a el problema de resonancias en reacciones de iones pesados y en particular a la descripción de los estados moleculares, primero propuestos por Bromley ¹⁷⁾. Se discute también la formulación del problema de la "interacción a través de núcleo compuesto", mediante una versión simplificada, que sin embargo contiene ya la física esencial, lo que permite hacer una evaluación de sus alcances. Como último punto en este capítulo se estudia la dispersión del sistema $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$.

En el capítulo final se resumen las conclusiones de este trabajo.

CAPITULO II

El Modelo Colectivo del Núcleo

El núcleo representa un problema complicado de muchos cuerpos, que puede ser resuelto únicamente por métodos aproximados. Debido a ello se construyen modelos con el propósito de entender propiedades particulares tales como los espectros a bajas energías, probabilidades de transición, etc.

Los espectros a bajas energías de los núcleos impar-par están determinados en parte por el comportamiento del último nucleón no-apareado, mientras que aquellos asociados con los núcleos par-par sugieren fuertemente que los nucleones realizan un movimiento coherente dentro del núcleo. El sistema nuclear posee por tanto grados de libertad colectivos que deben describirse mediante la introducción de un sistema de coordenadas adecuado. Uno de estos sistemas (apropiado para los estados de paridad positiva) está dado por el modelo colectivo de Bohr y Mottelson⁷⁾, quienes propusieron la descripción del sistema nuclear como una gota de líquido que puede sufrir deformaciones cuadrupolares. Este modelo se ha implementado sistemáticamente en su forma general y ha sido capaz de describir tanto a núcleos vibracionales y rotacionales como a núcleos de transición. En este capítulo haremos una revisión detallada de este modelo, así como de los métodos matemáticos que permiten obtener analíticamente las

eigenfunciones del oscilador armónico cuadrupolar, que son fundamentales en el análisis general de los espectros a bajas energías y demás características nucleares.

Los eigenestados del oscilador armónico cuadrupolar son utilizados como base completa para la evaluación de los elementos de matriz relevantes en el modelo colectivo y en particular de los elementos de matriz de la energía potencial de deformación. La subsecuente diagonalización de estas matrices conduce a la determinación de las superficies equipotenciales de deformación nuclear (S.E.P.), que exhiben el comportamiento a bajas energías de los núcleos par-par de manera gráfica, dando lugar a una imagen física asociada con cada núcleo.

Estos resultados son además fundamentales para poder desarrollar, en la segunda parte de la tesis, una teoría de reacciones nucleares con grados de libertad colectivos.

1. Hamiltoniano Cuadrupolar

En el modelo de la gota de líquido la superficie del núcleo está descrita por la ecuación

$$R = R_0 \left\{ 1 + \sum_{\lambda m} \alpha_{\lambda m} Y_{\lambda m}^*(\Theta, \Phi) \right\} \quad (1.1)$$

donde R_0 es el radio del núcleo considerado en ausencia de deformación, $Y_{\lambda m}(\vartheta, \varphi)$ los armónicos esféricos y $\alpha_{\lambda m}$, $m = -\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda$ las coordenadas generalizadas que describen el movimiento colectivo.

Como la superficie nuclear es real las coordenadas colectivas cumplen la relación

$$\alpha_{\lambda m}^* = (-1)^m \alpha_{\lambda -m} \quad (1.2)$$

Ahora, si rotamos el marco de referencia en el que está descrito (1.1), obtenemos que las coordenadas colectivas $\alpha_{\lambda m}$, se deben transformar como las $Y_{\lambda m}$ para que la superficie nuclear permanezca invariante. Análogamente si efectuamos una reflexión del sistema de ejes coordenados la ecuación de la superficie nuclear no debe cambiar. Por tanto las coordenadas $\alpha_{\lambda m}$ ante la transformación de paridad se comportan como los armónicos esféricos, i.e.

$$\hat{P} \alpha_{\lambda m} \hat{P}^{-1} = (-1)^\lambda \alpha_{\lambda m} \quad (1.3)$$

Si el movimiento de la gota de líquido está restringido al tipo cuadrupolar la ecuación (1.1) da

$$R = R_0 \left\{ 1 + \sum_m \alpha_m Y_{2m}^*(\vartheta, \varphi) - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_m \alpha_m Y_{20}^*(\vartheta, \varphi) \right\} \quad (1.4)$$

donde $\alpha_{2m} \equiv \alpha_m$ y el último término es una corrección que surge de garantizar la conservación del volumen del núcleo a segundo orden en las α_m 's .

Introduciendo ahora a_m como las coordenadas generalizadas correspondientes en el sistema fijo en el cuerpo, a lo largo de los ejes principales, tenemos la relación

$$\alpha_m = \sum_{m'} D_{mm'}^{2, \star}(\vartheta_i) a_{m'} \quad (1.5)$$

donde $D_{mm'}^{\rho}$ son las representaciones irreducibles de $O(3)$ y ϑ_i , $i = 1, 2, 3$ los ángulos de Euler, y porque el tensor de inercia es diagonal en este sistema se tiene $a_1 = a_{-1} = 0$ y $a_2 = a_{-2}$.

Con la parametrización

$$a_0 = \beta \cos \gamma \quad , \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma \quad (1.6)$$

la ecuación de la superficie nuclear (1.4) puede escribirse en el sistema intrínseco como

$$R = R_0 \left\{ 1 + \beta \cos \gamma Y_{20}(\vartheta; \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma \left(Y_{22}(\vartheta; \varphi) + Y_{2-2}(\vartheta; \varphi) \right) - \frac{1}{\sqrt{14}} \beta^2 \right\} \quad (1.7)$$

Elevando al cuadrado (1.7), quedándonos a primer orden

en la β , y substituyendo las coordenadas esféricas por coordenadas cartesianas tenemos:

$$\frac{x'^2}{R_0^2 \left[1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos(\gamma - 2\pi/3) \right]^{-2}} + \frac{z'^2}{R_0^2 \left[1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \gamma \right]^{-2}} + \frac{y'^2}{R_0^2 \left[1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos(\gamma + \pi/3) \right]^{-2}} = 1,$$

que representa una forma nuclear elipsoidal de semiejes.

$$a_k = R_0 \left[1 + \delta_k \right],$$

con
$$\delta_k = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos(\gamma - 2\pi k/3) \quad \text{y } k = 1, 2, 3.$$

Es útil interpretar β y γ como coordenadas polares

en un plano llamado plano- $\beta\gamma$, en el que cada punto representa una forma

cuadrupolar diferente (figura 1). Todas las formas afuera del sector

$0 \leq \gamma \leq 60^\circ$, $\beta \geq 0$ pueden ser generadas de las formas dentro del sector

a través de la aplicación de las 2 transformaciones básicas

$$\beta' = \beta \quad ; \quad \gamma' = -\gamma \quad (1.8a)$$

$$\beta' = \beta \quad ; \quad \gamma' = \gamma - 2\pi/3 \quad (1.8b)$$

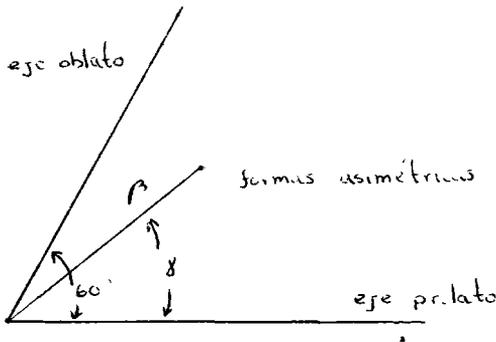


Figura 1.-Plano $-\beta\gamma$.

En (1.8a) el sistema intrínseco es rotado 90° alrededor del eje intrínseco z' y en (1.8b) los ejes del sistema intrínseco son permutados ciclicamente. Por lo tanto, se necesita considerar únicamente el sector $0 \leq \gamma \leq 60^\circ$, en donde las formas prolatas caen sobre la recta $\gamma = 0^\circ$, las formas oblatas sobre $\gamma = 60^\circ$ y entre estas 2 líneas las formas son triaxialmente deformadas.

La energía potencial del modelo depende de la forma nuclear y nos permite construir las llamadas superficies de energía potencial (S.E.P), si la igualamos a una constante, de los núcleos. La energía potencial debe ser invariante ante rotaciones del sistema de coordenadas, por lo que tiene que ser únicamente función de los parámetros de deformación intrínsecos β y γ .

Como las transformaciones (1.8) no cambian la forma nuclear, la energía potencial debe ser función de β y γ . Restringiéndonos además, a formas polinomiales en las χ_m , tenemos que el potencial puede construirse en términos de únicamente 2 invariantes:

$$[\alpha \times \alpha]^{[0]} = \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^2 \quad \gamma \quad (1.9a)$$

$$\left[[\alpha \times \alpha]^2 \times \alpha \right]^{[0]} = -\sqrt{\frac{2}{35}} \beta^3 \cos 3\gamma \quad (1.9b)$$

Usando (1.9) se puede escribir el desarrollo más general para el potencial hasta orden β^{10} en las α_m como sigue:

$$\begin{aligned} V = & \frac{\sqrt{5}}{2} C_2 [\alpha \times \alpha]^{[0]} + C_3 \left[[\alpha \times \alpha]^2 \times \alpha \right]^{[0]} \\ & + C_4 \left([\alpha \times \alpha]^{[0]} \right)^2 + C_5 \left[[\alpha \times \alpha]^2 \times \alpha \right]^{[0]} \cdot [\alpha \times \alpha]^{[0]} \\ & + C_6 \left(\left[[\alpha \times \alpha]^2 \times \alpha \right]^{[0]} \right)^2 + D_6 \left([\alpha \times \alpha]^{[0]} \right)^3 + \dots \quad (1.10) \end{aligned}$$

Ningún otro invariante a éste orden puede ser formado. Por ejemplo; invariantes del tipo

$$\left[[\alpha \times \alpha]^{[L\lambda]} \times [\alpha \times \alpha]^{[L\lambda]} \right]^{[0]}$$

con $\lambda = 2, 4$ son múltiplos de β^4 . Para $\lambda = 1, 3$ los invariantes son idénticamente cero.

Dependiendo de la elección de las constantes C_2, C_3, \dots y D_6

uno obtiene muy diferentes superficies de energía potencial ¹⁹⁾. En la figura 2 se muestran las S.E.P. de núcleos esféricos, prolato, oblatos y triaxiales, cuyos mínimos caen en el origen, sobre los ejes prolato, oblatos y en la línea $\gamma = 20^\circ$ respectivamente.

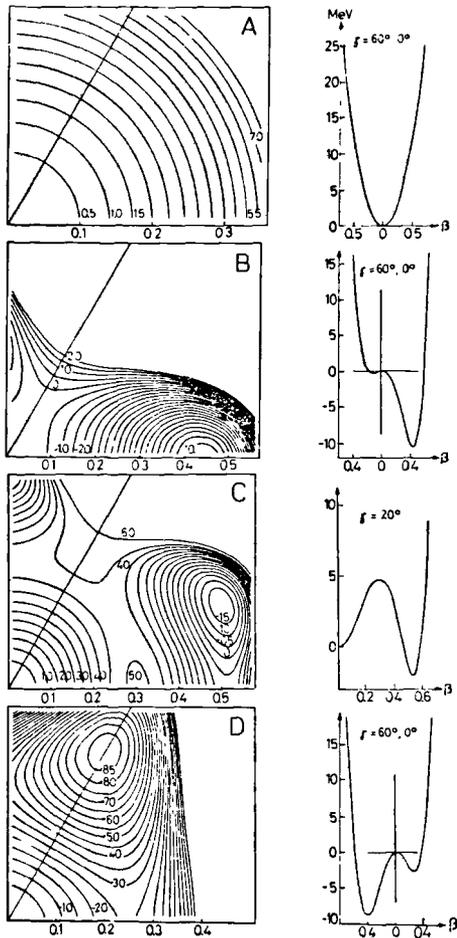


Figura 2.- S.E.P. de un núcleo esférico prolató, triaxial y oblato (tomada de la referencia 19).

De las S.E.P. se consigue una comprensión cualitativa del comportamiento a bajas energías de los núcleos. La posición del mínimo más profundo generalmente determina la deformación de el estado base. La profundidad del mínimo nos informa sobre la estabilidad de la deformación nuclear durante las excitaciones, mientras que los valles de las S.E.P. indican inestabilidades en la forma nuclear. La aparición de un segundo o en ocasiones hasta un tercer mínimo en la S.E.P.¹ da lugar generalmente a estados isomeros.

Las S.E.P. dadas por (1.10) tienen únicamente 6 parámetros, los cuales en principio se pueden obtener de modelos microscópicos (20) tales como el procedimiento de renormalización de Strutinsky o extraerlos de los datos experimentales.

Por otro lado el Lagrangiano clásico del movimiento de la gota de líquido está dado por

$$\mathcal{L} = T(\dot{\alpha}_m, \alpha_m) - V(\alpha_m),$$

si denotamos por π_m a los momentos canónicamente conjugados, obtenemos

$$\pi_m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_m}.$$

En el caso en que la energía cinética tiene la simple forma bilineal $T = \frac{B_2}{2} B_0 [\dot{\alpha} \times \dot{\alpha}]^{L_0}$, los momentos están dados por la relación

$$\pi_m = B_2 \dot{\alpha}_m \quad (1.11)$$

y la función Hamiltoniana

$$H = \sum_m \dot{\alpha}_m \pi^m - \mathcal{L} .$$

De tal manera que substituyendo $\dot{\alpha}_m$ en términos de los momentos obtenemos

$$H = P_2 [\pi \times \pi]^{L_0} + V(\alpha_m) \quad (1.12)$$

donde la energía potencial está dada en la ecuación (1.10) y $P_2 \equiv \frac{\sqrt{5}}{2\beta_2}$.

Procediendo análogamente a la construcción del potencial

$V(\alpha_m)$ se obtiene el operador de energía cinética general que es invariante

ante rotaciones del sistema de coordenadas e inversión en el tiempo

$$\begin{aligned} T = & P_2 [\pi \times \pi]^{L_0} + P_3 \left[[\pi \times \alpha]^2 \times \pi \right]^{L_0} + \\ & P_4 \left([\pi \times \pi]^{L_0} \right)^2 + \sum_{m=0}^2 P_4^{2n} \left\{ \left[[\pi \times \pi]^{L_{2m}} \times [\alpha \times \alpha]^{L_{2n}} \right]^{L_0} \right. \\ & \left. + \left[[\alpha \times \alpha]^{L_{2m}} \times [\pi \times \pi]^{L_{2n}} \right]^{L_0} \right\} + \dots \quad (1.13) \end{aligned}$$

donde se dejó el desarrollo a 4^{to} orden en las α_m y π_m .

Los términos con P_3 y P_4^{2n} se pueden interpretar como masas dependientes de la deformación, mientras que el de P_4 como masa dependiente de la velocidad ²¹⁾ .

En general las $\dot{\alpha}_m$ y $\bar{\pi}_m$ no están relacionadas como en (1.11), debido a los términos de mayor orden en la energía cinética (1.13).

Su relación puede encontrarse de la ecuación de movimiento $\dot{\alpha}_m = \frac{\partial H}{\partial \bar{\pi}_m}$.

La cuantización se introduce de la manera estándar, i.e.

a través de las reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [\alpha_m, \alpha_{m'}] &= [\bar{\pi}_m, \bar{\pi}_{m'}] = 0 \\ [\alpha_m, \bar{\pi}^{m'}] &= i\hbar \delta_m^{m'} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Por lo tanto el operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}, \quad (1.15)$$

con \hat{T} y \hat{V} dados por las ecuaciones (1.13) y (1.10) respectivamente. La diagonalización de (1.15) se discutirá en la siguiente sección.

A continuación recopilaremos las fórmulas de los operadores que representan cantidades medibles experimentalmente tales como momentos cuadrupolares, probabilidades de transición $B(E2)$ y la raíz cuadrada del radio cuadrático medio ⁶⁾.

El momento cuadrupolar de un estado nuclear y la probabilidad de transición reducida $E2$ son definidos por los elementos de matriz de el operador cuadrupolar \hat{Q} :

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \gamma \ J \ M=J \ | \ \hat{Q} \ | \ \gamma \ J \ M=J \rangle \\ &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle JJ, 20 \ | \ JJ \rangle \langle \gamma \ J \ || \ \hat{Q} \ || \ \gamma \ J \rangle \quad \times\end{aligned}$$

$$B(E2, \gamma \ J \rightarrow \gamma' \ J') = \frac{1}{2J+1} \left| \langle \gamma' \ J' \ || \ \hat{Q} \ || \ \gamma \ J \rangle \right|^2.$$

El operador \hat{Q} está dado, para una distribución de carga uniforme ρ_0 a segundo orden en las α 's, por

$$Q_{2m} = \rho_0 R_0^5 \left\{ \alpha_m - \frac{10}{\sqrt{70\pi}} [\alpha \times \alpha]_m^2 + \dots \right\}. \quad (1.16a)$$

El operador para el radio cuadrático medio está definido

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{A} \int \rho r^2 d\tau = \frac{3}{5} R_0^2 \left\{ 1 + \frac{5\sqrt{5}}{4\pi} [\alpha \times \alpha]^{[0]}_+ + \dots \right\}, \quad (1.16b)$$

donde consideramos la densidad nuclear ρ como constante y nos quedamos a segundo orden en las α 's.

Es importante señalar que la forma de los operadores (1.16) depende fuertemente de la suposición de que la densidad es uniforme y que la superficie nuclear está definida por (1.4).

2. Los Eigenestados del Oscilador Armónico de 5 Dimensiones

Para diagonalizar (1.15) se utilizan como base las eigenfunciones del oscilador armónico cuadrupolar. El Hamiltoniano del oscilador cuadrupolar, con unidades tales que $\hbar = \beta_2 = C_2 = 1$, está dado por

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \pi_m \pi^m + \alpha_m \alpha^m \right\} \quad (2.1)$$

Es conveniente introducir la forma covariante de los operadores de creación (η_m) y la forma contravariante de los operadores de aniquilación (ξ^m) que satisfacen las reglas de conmutación para bosones:

$$[\eta_{m'}, \eta_m] = [\xi^{m'}, \xi^m] = 0; \quad [\xi^{m'}, \eta_m] = \delta_{m'}^m \quad (2.2)$$

El operador η_m crea un fonon con momento angular 2 y proyección m .

El Hamiltoniano (2.1) puede ser escrito

$$H_0 = \sum_m \eta_m \xi^m + 5/2, \quad (2.3)$$

en donde se usaron las transformaciones

$$\alpha_m = \frac{1}{\sqrt{2}} [\eta_m + \xi_m]$$

$$\pi_m = \frac{i}{\sqrt{2}} [\eta_m - \xi_m] \quad (2.4)$$

Las eigenfunciones de (2.3) para un número fijo ν

de fonones están dadas por

$$|\nu\rangle = (\eta_{-2})^{m_{-2}} (\eta_{-1})^{m_{-1}} (\eta_0)^{m_0} (\eta_1)^{m_1} (\eta_2)^{m_2} |0\rangle \quad (2.5a)$$

y satisfacen la ecuación de eigenvalores

$$H_0 |\nu\rangle = (\nu + \gamma_2) |\nu\rangle \quad (2.5b)$$

donde

$$\nu = \sum_{\mu=-2}^2 n_{\mu}, \quad n_{\mu} = 0, 1, 2, \dots$$

De las ecuaciones (2.5) vemos que las eigenfunciones

del oscilador cuadrupolar están altamente degeneradas, encontrando

$$\binom{\nu+4}{\nu} = \frac{1}{24} (\nu+4)(\nu+3)(\nu+2)(\nu+1) \text{ eigenfunciones con la misma energía}$$

$$(\nu + \gamma_2), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Ante transformaciones unitarias de 5 dimensiones las

ecuaciones (2.2) y (2.3) permanecen invariantes y los eigenestados se trans-

forman como tensores de rango $\gamma = N$. Por lo tanto todas las eigenfunciones

(2.5a) pueden clasificarse de acuerdo a las representaciones irreducibles

(R.I.) de $U(5)$. Solamente las eigenfunciones que portan las R.I. totalmente

simétricas son distintas de cero, ya que η_m, ξ^m satisfacen las reglas de

conmutación para bosones. Los estados totalmente simétricos de ν fonones

se representan por un cuadro de Young $[\nu]$ que consiste de un renglón con

ν cajas.

Para una reducción adicional se puede utilizar que el Hamiltoniano (2.3) también es invariante ante transformaciones ortogonales de 5 dimensiones. Los operadores de creación y aniquilación se transforman como sigue:

$$\eta'_{m'} = \sum_{\nu=-2}^2 R_{m'}^{\nu} \eta_{\nu}$$

$$\xi'^{m'} = \sum_{\nu=-2}^2 R_{\nu}^{m'} \xi^{\nu}, \quad (2.6)$$

con $R^{M\nu} = (-1)^{M+\nu} R_{-M-\nu}$ y $\sum_{\nu} R_{\nu}^{M'} R_{M}^{\nu} = \delta_{M}^{M'}$

Esta transformación deja invariante al producto escalar

$$\underline{\eta} \cdot \underline{\eta} = \sum_m \eta_m \eta^m = \sum_{m'} \eta'_{m'} \eta'^{m'}. \quad \text{El proceso mediante el cual se obtuvo este invariante se llama contracción del tensor de segundo rango}$$

$\eta_{m_1} \eta_{m_2}$. En general el proceso de contracción es definido para tensores esféricos de rango γ , $T_{m_1 m_2 m_3 \dots} = \eta_{m_1} \eta_{m_2} \eta_{m_3} \dots$, tomando la traza de 2 índices, i. e.

$$T_{m_2 \dots}^{(1,2)} = \sum_{m_1, m_2} \delta_{m_1}^{m_2} T_{m_1 m_2 m_3 \dots}$$

Los nuevos tensores $T_{m_2 \dots}^{(1,2)}$ son de rango $\gamma-2$. La operación de contracción conmuta con las transformaciones de $O(5)$. Por lo tanto, del espacio de tensores de rango γ (2.5a) se puede seleccionar el subespacio de

tensores de traza nula. Estos tensores sin traza se transforman entre sí ante las operaciones de $O(5)$ y portan las R.I. de $O(5)$. En el caso de tensores simétricos de rango Λ , las R.I. de $O(5)$ son denotadas por $(\Lambda, 0)$. De manera que los estados (2.5a) reducidos con respecto a $O(5)$ están completamente caracterizados por $| [V] (\Lambda, 0) \rangle$, donde $\Lambda = 0, 2, \dots, 4, 0$.

Las componentes del momento angular L_1, L_2 y L_3 conmutan con H_0 , de aquí que los eigenestados pueden ser clasificados por $L(L+1)$ y M , que son los eigenvalores de L^2 y L_3 respectivamente.

Como se requieren 5 números cuánticos, para caracterizar el estado completamente, se introduce un índice extra μ que va a distinguir representaciones equivalentes de $O(3)$ contenidos en una R.I. de $O(5)$. De tal manera que los estados del oscilador armónico cuadrupolar reducidos de acuerdo a la cadena de grupos $U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$ pueden ser etiquetados como sigue:

$$| [V] , (\Lambda, 0) , \mu , LM \rangle \equiv | V \Lambda \mu LM \rangle \quad (2.7)$$

Por otro lado expresando el Hamiltoniano (H_0) en términos de las coordenadas intrínsecas y los ángulos de Euler se tiene ⁷⁾:

$$H_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\Lambda^2}{\beta^4} + \beta^4 \right\} , \quad (2.8a)$$

donde $\hat{\Lambda}^2$ es el operador de Casimir de $O(5)$ que tiene la forma

$$\hat{\Lambda}^2 = -\frac{1}{\sin^3 \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin^3 \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \sum_{k=1}^3 \frac{L_k'^2}{4 \sin^2(\delta - 2\pi k/3)} \quad (2.8b)$$

El eigenvalor de $\hat{\Lambda}^2$ es

$$\Lambda(\Lambda + 3) \quad , \quad (2.9)$$

donde Λ es un entero y físicamente representa el número de fonones cuadrupolares que no están acoplados por pares a momento angular cero.

Estableciendo la ecuación de Schroedinger, notamos que es separable en la parte dependiente de β , y en la parte dependiente de γ, ϑ : i.e.

$$| \nu \Lambda \mu L M \rangle = F_m^\Lambda(\beta) \chi_{\mu L M}^\Lambda(\gamma, \vartheta) \quad , \quad (2.10)$$

con $m \equiv \frac{\nu - \Lambda}{2}$ y es el número cuántico radial. Además la dependencia en β puede ser obtenida de (2.8a) si reemplazamos $\hat{\Lambda}^2$ por $\Lambda(\Lambda + 3)$, encontrando

$$F_m^\Lambda(\beta) = \left[\frac{2n!}{\Gamma(m + \Lambda + 5/2)} \right]^{1/2} \beta^\Lambda L_m^{\Lambda + 3/2}(\beta^2) e^{-\beta^2/2} \quad , \quad (2.11)$$

donde $L_m^{\Lambda + 3/2}$ es un polinomio de Laguerre y la función está normalizada con respecto al elemento de volumen $\beta^4 d\beta$.

La función $\chi_{\mu LM}^{\Lambda}(\gamma, \theta_i)$ se puede desarrollar en la forma

$$\chi_{\mu LM}^{\Lambda}(\gamma, \theta_i) = \sum_K \Phi_K^{\Lambda ML}(\gamma) D_{MK}^{L*}(\theta_i) \quad (2.12)$$

ya que las D_{MK}^L constituyen un conjunto completo de funciones de los ángulos de Euler.

Consideraciones de simetría asociadas con la elección de ejes principales, determinan las propiedades

$$\Phi_K^{\Lambda ML}(\gamma) = 0 \quad \text{si } K \text{ es impar,}$$

$$\Phi_K^{\Lambda ML}(\gamma) = (-1)^L \Phi_{-K}^{\Lambda ML}(\gamma) \quad \text{si } K \text{ es par,}$$

$$K = L, L-1, L-2, \dots, -L, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi \quad (2.13)$$

La única parte que falta obtener para conocer el estado (2.10) es la asociada con la variable γ . Aplicando $\hat{\Lambda}^2$ a $\chi_{\mu LM}^{\Lambda}$ y utilizando (2.9) se llega a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas para la $\Phi_K^{\Lambda ML}(\gamma)$. Este conjunto había sido resuelto únicamente para casos particulares de L ($L = 0, 2, 3, 4, 5, 6$) y pequeños valores de Λ (7,10). De tal manera que la construcción de los estados clasificados de acuerdo a la cadena de grupos $U(5) \supset C(5) \supset C(3) \supset C(2)$ estaba incompleta en

el paso $O(5) \supset O(3)$ por lo que se utilizó otra reducción de las R.I. de $O(5)$. La reducción completa $O(5) \supset O(3)$ se logró recientemente ^{14,15)} y la estudiaremos en las secciones siguientes.

Del conjunto de 10 generadores infinitesimales de $O(5)$ es posible seleccionar dos conjuntos de operadores \hat{p}_ν y \hat{q}_σ ($\nu, \sigma = 1, 2, 3$) que conmutan entre ellos y que son los generadores de 2 subgrupos $SU(2)$. Cada una de las representaciones de $O(5)$ es considerada completamente reducible con respecto a $SU(2) \times SU(2)$. Por lo tanto los estados serán denotados por $|p \ell q m\rangle$, donde $p(p+1)$, ℓ , $q(q+1)$ y m son los eigenvalores de \hat{p}^2 , \hat{p}_z , \hat{q}^2 y \hat{q}_z respectivamente. El problema básico es entonces determinar los rangos de p y q dentro de una representación irreducible de $O(5)$. Esto se efectúa encontrando los elementos de matriz reducidos de los 4 generadores de $O(5)$ no considerados en \hat{p}_ν y \hat{q}_σ , los cuales son convenientemente agrupados para exhibir sus propiedades de transformación ante $SU(2) \times SU(2)$, con respecto a $|p \ell q m\rangle$

23)

El resultado encontrado es el siguiente:

Para una R.I. (Λ, Λ') de $O(5)$, $p+q$ varía de Λ' a Λ en pasos de 1 y $p-q$ de $-\Lambda'$ a Λ' en pasos de 1. Así, para las R.I. totalmente simétricas se tiene:

$$p = q = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \Lambda/2 \quad (2.14)$$

Los estados del oscilador cuadrupolar reducidos de acuerdo a la cadena de grupos

$$U(5) \supset O(3) \supset SU(2) \times SU(2)$$

pueden ser etiquetados como sigue:

$$| [v], (N, 0) p q m \rangle \quad , \quad (2.15)$$

donde $p = q = 0, 1/2, 1, \dots, N/2$.

Este conjunto de eigenfunciones son conocidas y se utilizaron para obtener la base con momento angular definido por medio de técnicas de proyección, resolviendo numéricamente un sistema homogéneo de ecuaciones algebraicas.

En las secciones siguientes mostramos como obtener las eigenfunciones del oscilador cuadrupolar en forma analítica.

3. Estados Caracterizados por las R.I. de la Cadena de Grupos

$$\underline{U(5) \supset O(3)} . \quad ($$

A continuación obtenemos las eigenfunciones de (2.1), de momento angular L y máxima proyección $M = L$, como polinomios en los operadores de creación η_m . Estos polinomios se aplicarán al

estado base

$$|0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \pi^{-1/4} e^{-\beta^2/2} \quad (3.1)$$

La ecuación (2.2) implica que ξ^m , cuando se aplica a un polinomio en η_m , puede interpretarse como $\xi^m = \frac{\partial}{\partial \eta_m}$.

La relación entre las componentes covariante y contravariante es $\eta_m = (-1)^m \eta_{-m}$ y $\xi^m = (-1)^m \xi_{-m}$.

El operador de número tiene entonces la forma

$$\hat{N} = \sum_m \eta_m \xi^m \quad \text{y las componentes del momento angular son dadas por} \quad (24)$$

$$\hat{L}_q = \sum_m \sqrt{6} \langle 21 m q | 2 m \rangle \eta_m \xi^m, \quad q = 1, 0, -1.$$

Se buscarán los polinomios $P(\eta_m)$ que satisfacen las ecuaciones

$$\hat{N}P = \nu P, \quad \hat{L}_1 P = 0 \quad \text{y} \quad \hat{L}_0 P = LP \quad (3.2)$$

La primera ecuación en (3.2) implica que P es un polinomio homogéneo en las η 's de grado ν y así, se puede escribir como

$$P(\eta_m) = \eta_2^\nu P' \left(\eta_1/\eta_2, \eta_0/\eta_2, \eta_{-1}/\eta_2, \eta_{-2}/\eta_2 \right) \quad (3.3)$$

donde P' es un polinomio arbitrario en las variables indicadas cuyo grado no es mayor que ν . Las otras ecuaciones de (3.2) implican que P' es un polinomio de momento angular definido y de máxima proyección. Es conveniente introducir las funciones polinomiales siguientes:

$$(2, 0) \equiv \sum_m \eta_m \eta_m \quad (3.4a)$$

$$(3, 3) \equiv -\sqrt{\frac{14}{3}} \sum_{m, m', m'', m'''} \langle 22 m'' m'' | 33 \rangle \langle 22 m m' | 2 m'' \rangle \eta_m \eta_{m'} \eta_{m''} \quad (3.4b)$$

$$(2, 2) \equiv \sqrt{7} \sum_{m, m'} \langle 22 m m' | 22 \rangle \eta_m \eta_{m'} \quad (3.4c)$$

La notación es (ν, L) que indica el número de cuantos

ν y la máxima proyección $M=L$ del momento angular del polinomio, que corresponden a los diagramas permisibles elementales (d.p.e.) 26,27)

Substituyendo la forma explícita de los coeficientes de

Wigner en (3.4) se obtiene

$$\frac{(2, 0)}{\eta_2^2} = 2 \frac{\eta_{-2}}{\eta_2} - 2 \frac{\eta_{-1} \eta_1}{\eta_2 \eta_2} + \frac{\eta_0^2}{\eta_2^2} \quad (3.5a)$$

$$\frac{(3,3)}{\eta_2^2} = 2 \frac{\eta_1}{\eta_2} - \sqrt{6} \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{\eta_0}{\eta_2} + \frac{\eta_1^3}{\eta_2^3} \quad (3.5b)$$

$$\frac{(2,2)}{\eta_2^2} = 2\sqrt{2} \frac{\eta_0}{\eta_2} - \sqrt{3} \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} \quad (3.5c)$$

y por lo tanto P se puede escribir

$$P(\eta_m) = \eta_2^J P'' \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}, \frac{(2,0)}{\eta_2^2}, \frac{(3,3)}{\eta_2^3}, \frac{(2,0)}{\eta_2^2} \right) \quad (3.6)$$

donde P'' es otra vez un polinomio arbitrario de las variables indicadas.

Aplicando \hat{L}_1 a (3.6) tenemos

$$\hat{L}_1 P(\eta_m) = -\sqrt{2} \eta_2^J \frac{\partial P''}{\partial (\eta_1/\eta_2)} = 0 \quad (3.7)$$

en donde se usó la definición de los (d.p.e.) y que $L_1 \eta_1 = -\sqrt{2} \eta_2$.

La ecuación (3.7) implica que P' es independiente de η_1/η_2 y así se puede escribir

$$P = \sum_{n_1, n_2, n_3} B_{n_1, n_2, n_3} (2, 2)^{n_1} (3, 3)^{n_2} (2, 2)^{n_3} \eta_2^{\nu - 2n_1 - 3n_2 - 2n_3} \quad (3.8)$$

donde B_{n_1, n_2, n_3} son constantes arbitrarias.

Considerando la 3era. ecuación (3.2) se tiene

$$2m_1 + 3m_2 + 2n_3 + 2(\nu - 2n_1 - 3n_2 - 2n_3) = L,$$

de la cual se despeja n_3 y el polinomio que satisface las ecuaciones

(3.2) tiene la forma

$$P(\eta_m) = \sum_{m_1, m_2} B'_{m_1, m_2} \eta_2^{L - \nu + 2m_1} (2, 0)^{m_1} (3, 3)^{m_2} (2, 2)^{\frac{(2\nu - L - 3m_2)}{2} - 2m_1} \quad (3.9)$$

para que P sea un polinomio, m_2 debe ser par (impar) si L es par (impar). A primera vista los diferentes polinomios parecen ser dados tomando $B'_{m_1, m_2} = 1$ para unos valores de m_1, m_2 particulares y cero para el resto, con la restricción de que todos los exponentes son no-negativos. Se nota que η_2 contiene a η_1 , pero no a η_2 en su exponente. Así, existe la posibilidad de que

$$\sum_{n_2} B'_{n_1, n_2} (\xi, \xi)^{n_2} (2, 2)^{(2\nu - L - 3n_2)/2 - 2n_1}$$

para algunos coeficientes de B_{n_1, n_2} sea divisible por η_2 y en este caso el exponente de η_2 puede tomar valores negativos.

Para evitar este problema se va a utilizar el (d.p.e.) (3.0) i.e.,

$$(\xi, \zeta) \equiv \sqrt{7} \sum_{m, m', m''} (-1)^{m''} \langle 2, 2, m, m' | 2 - m'' \rangle \eta_m \eta_{m'} \eta_{m''} \quad (3.9)$$

que está relacionado a los (d.p.e.) dados en (3.4) por

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4} (\xi, \xi)^2 = \eta_2^3 (\xi, \zeta) - \frac{3}{2} (2, 2) \eta_2^2 + \frac{1}{4} (2, 2)^3 \quad (3.10)$$

Se encontró que n_2 y L deben tener la misma paridad

lo que implica $n_2 \equiv 2\mu + \delta_{L, \# \text{ impar}}$, y substituyendo $(3, 3)^{n_2}$

en la ecuación (3.9) da

$$P(\eta_m) = \sum_{n_1, \mu} B''_{\mu, n_1} \eta_2^{L - \nu + 2n_1 + 3\mu} \quad (3.11)$$

$$(2, 2)^{n_1} (2, 2)^{(2\nu - L - 3\delta_{L, \# \text{ impar}})/2 - 3\mu - 2n_1} (\xi, \xi)^{\delta_{L, \# \text{ impar}}}$$

Parece que no se ha evitado el problema de divisibilidad en (2.11) ya que se puede escribir $2\eta_1 + 3\mu \equiv \tau$ y expresar η_1 en términos de τ . Suponiendo que este es el caso, se tiene que

$$P(\eta_m) \equiv \sum_{\mu} B_{\mu c}''' (3,0)^{\mu} (2,0)^{(\tau-3\mu)/2} \quad (3.12)$$

se puede expresar en la forma

$$P(\eta_m) = \eta_2^x R(\eta_m),$$

donde x es un entero positivo. El polinomio (3.12) corresponde a momento angular cero ya que los (d.p.e.) (3,0) y (2,0) que aparecen en él tienen momento angular cero. Si aplicamos \hat{L}_+ y \hat{L}_- a $R(\eta_m)$ se encuentra

$$L_+ R(\eta_m) = 0, \quad L_- R(\eta_m) = -2x R(\eta_m).$$

Esto implica que R es un polinomio en las η_i , correspondiendo a un momento angular negativo lo que es imposible y entonces (3.12) no es divisible por η_2 .

Se concluye que los diferentes polinomios que satisfacen (3.2) están dados por

$$P_{\nu, \mu, m, L}(\eta_m) = (\xi, \xi)^{\delta_L} \eta_2^{L-\nu+2m+\xi/\mu} \cdot \\ (2, 2)^{(2\nu-L-\xi\xi)/2 - \xi M - 2m} (\xi, 0)^M (2, 0)^m \quad (3.13)$$

donde μ, m, L, ν están restringidos por la condición de que todos los exponentes son no-negativos y $\delta_L \equiv \frac{1}{2}(1 - (-1)^L)$.

Se ha obtenido un conjunto completo, aunque no necesariamente ortonormal, de estados de un número definido de cuantos ν y máxima proyección del momento angular $M=L$. Para obtener una M arbitraria se aplica a los estados (3.13) el operador de descenso $(L_-)^{L-M}$.

4. Estados con "Seniority" Definido

Los estados perteneciendo a la representación irreducible $(\Lambda, 0)$ de $O(5)$ son eigenestados de $\hat{\Lambda}^2$, el operador de Casimir del grupo, con eigenvalor $\Lambda(\Lambda+3)$,

$$\hat{\Lambda}^2 P = \Lambda(\Lambda+3) P \quad (4.1)$$

La expresión para $\hat{\Lambda}^2$ es

$$\hat{\Lambda}^2 = \frac{1}{2} \sum_{m, m'} [\eta_m \xi^{m'} - \eta^{m'} \xi_m] [\eta_m \xi^m - \eta^m \xi_{m'}] \quad (4.2)$$

y después de un rearrreglo de factores, se puede escribir en la forma

$$\hat{\Lambda}^2 = \hat{N}(\hat{N} + 3) - (\underline{\eta} \cdot \underline{\eta}) (\underline{\xi} \cdot \underline{\xi}) \quad (4.3)$$

De la expresión anterior se ve que los eigenestados de $\hat{\Lambda}^2$ con eigenvalor $\Lambda(\Lambda + 3)$ tienen la forma $P(\eta_m) |0\rangle$, donde $P(\eta_m)$ es un polinomio homogéneo de grado Λ en η_m , que además es armónico, i.e.,

$$(\underline{\xi} \cdot \underline{\xi}) P(\eta_m) |0\rangle = 0 \quad (4.4)$$

Si consideramos los polinomios dados en (3.13) con $\lambda = \Lambda$, se encuentra que no satisfacen la condición (4.4). Sin embargo hay un método,

iniciado por Valenkin ²⁸⁾ y más adelante desarrollado por Lohe ²⁹⁾, por medio del cual se puede cumplir la condición (4.4) de una manera relativamente sencilla.

Para esto, se introducen los operadores bosónicos sin traza definidos por

$$a_m^{\dagger} \equiv \eta_m - (2,0) (2\hat{N} + 5)^{-1} \xi_m \quad m = -2, -1, 0, 1, 2, \quad (4.5)$$

donde \hat{N} es el operador de número y $(2,0)$ es el (d.p.e.) de 2 cuantos apareados a momento angular cero. Usando las identidades

$$(2N+5)^{-1} \eta_m = \eta_m (2N+7)^{-1},$$

$$(2N+5)^{-1} \xi_m = \xi_m (2N+3)^{-1},$$

$$(2N+5)^{-1} (2,0) = (2,0) (2N+5)^{-1},$$

que se cumplen cuando se aplican a polinomios homogéneos en las η 's, se puede mostrar fácilmente que

$$[a_m^{\dagger}, a_{m'}^{\dagger}] = 0 \quad (4.6)$$

y además

$$\sum_{m=-2}^2 \alpha_m^\dagger \alpha^{+m} = (4\hat{N}^2 - 1)^{-1} (2, 0)^2 \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \xi \end{smallmatrix} \right) \quad (4.7)$$

Regresando a los polinomios de (3.13). Si se reemplazan las η_m por α_m^\dagger en éstos y se aplican al estado base $|0\rangle$, notamos de (4.7) que los estados correspondientes serán cero a menos $m_1 = 0$.

Suponiendo esta condición y tomando $\nu = \Lambda$, se tienen los estados

$$|\Lambda, \mu, L\rangle \equiv P_{\Lambda, \mu, 0, L}(\alpha_m^\dagger) |0\rangle \quad (4.8)$$

Como α_m^\dagger es una expresión homogénea de 1er grado en la η_m , el grado del polinomio es el mismo i.e.,

$$\hat{N} |\Lambda, \mu, L\rangle = \Lambda |\Lambda, \mu, L\rangle \quad (4.9)$$

y ellos continúan siendo caracterizados por el momento angular L ya que si denotamos por $[1, 2] \equiv \alpha_2^\dagger$, $[2, 2]$, $[3, 3]$, $[3, 0]$ los (d.p.e.) en términos de los operadores bosónicos sin traza tenemos

$$L_1 [v, L] = 0 \quad \text{y} \quad L_0 [v, L] = L [v, L].$$

De tal manera que

$$L_1 | \Lambda \mu L \rangle = 0 \quad (4.10a)$$

$$L_0 | \Lambda \mu L \rangle = L | \Lambda \mu L \rangle \quad (4.10b)$$

Además, si se aplica $[2, c]$ sobre (4.8) se tiene

$$[2, c] | \Lambda \mu L \rangle = \sum_m a_m^+ a^{+m} P_{\Lambda \mu \nu L}(a_m^+) | \nu \rangle,$$

pero las a_m^+ conmutan (ver ec. (4.6)), de tal modo

$$\begin{aligned} [2, c] | \Lambda \mu L \rangle &= P_{\Lambda \mu 0 L}(a_m^+) [2, c] | 0 \rangle \\ &= P_{\Lambda \mu 0 L}(a_m^+) (4N^2 - 1)^{-1} (2, c)^2 \sum_m \xi_m \xi^m | \nu \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta expresión se concluye que los estados $P_{\Lambda \mu 0 L}(a_m^+) | \nu \rangle$ son armónicos, i.e. satisfacen la condición (4.4). Así, los estados (4.8) corresponden a la representación irreducible (Λ, ν) de $O(5)$,

$L \wedge$] de $L(5)$ y L de $0(3)$.

En términos de los (d.p.e.) $[N, L]$ el estado

(4.8) está dado por

$$d_{NL} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^{L-N+3M} \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^{(2N-L-3M)/2-3M} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^M \quad (4.11)$$

donde todos los exponentes deben ser no-negativos de tal manera que se deben cumplir las relaciones

$$L - N + 3M \geq 0, \quad \frac{1}{2}(2N - L - 3M) - 3M \geq 0, \quad M \geq 0 \quad (4.12)$$

Estas desigualdades garantizan que el número de estados (4.11) (de los cuales hay $2L+1$ para cada L cuando se consideran todos los valores posibles de M) para una N dada es

$$d_N = \frac{1}{6} (N+1)(N+2)(2N+3) \quad (4.13)$$

Esta es exactamente la dimensionalidad de la representación irreducible
 $(\Lambda, 0)$ de $O(5)$.

5. Determinación de la $\Phi_{\Lambda\mu L}^{\Lambda\mu L}(\gamma)$

Es bien conocido, que cuando los estados base de las representaciones irreducibles de $U(n)$ son los mismos que los de $O(n)$, se pueden expresar como polinomios homogéneos en las componentes del vector de posición multiplicados por una Gaussiana. Así, tenemos

$$|\Lambda\mu L\rangle = P_{\Lambda\mu L}(\alpha_m) e^{-\alpha^2/2} \quad (5.1)$$

donde $P_{\Lambda\mu L}(\alpha_m)$ es un polinomio homogéneo de grado Λ en las α_m asociado con el momento angular L y de máxima proyección $M = L$. Por lo tanto $P_{\Lambda\mu L}(\alpha_m)$ satisface las ecuaciones

$$\sum_m \alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_m} P_{\Lambda\mu L} = \Lambda P_{\Lambda\mu L} \quad (5.2a)$$

$$L_1 P_{\Lambda\mu L} = 0 \quad (5.2b)$$

$$L_0 P_{\Lambda\mu L} = L P_{\Lambda\mu L} \quad (5.2c)$$

donde

$$L_q = \sum_{m, m'} \sqrt{6'} \langle 21mq | 2m' \rangle \alpha_{m'} \frac{\partial}{\partial \alpha_m}, \quad q=1, 0, -1$$

El problema que se tiene que resolver en (5.2) es idéntico al

discutido en la sección 4, únicamente que el polinomio es ahora expresado en términos de las α_m en lugar de las η_m . Las ecuaciones (5.2)

no definen completamente al $P_{\Lambda\mu L}(\alpha_m)$ ya que falta la condición

$$\sum_m (-1)^m \xi_m \xi_{-m} \{ \Lambda \mu L \} = 0$$

que en términos de las α 's nos conduce a la ecuación

$$\sum_m \frac{\partial^2}{\partial \alpha_m^2} P_{\Lambda\mu L}(\alpha_m) = 0. \quad (5.3)$$

Encontrando los polinomios que satisfacen (5.2) y (5.3) se

puede entonces utilizar la relación entre las α 's y la β, γ y los ángulos de Euler para expresarlos en la forma

$$P_{\Lambda\mu L}(\alpha_m) = \beta^\Lambda \sum_k \phi_k^{\Lambda\mu L}(\gamma) D_{Lk}^{L*}(\vartheta_i) \quad (5.4)$$

y así determinar la $\phi_k^{\Lambda\mu L}(\gamma)$ que se está buscando.

La solución de (5.2) está dada por (de ec. 3.13 para el caso $\nu = \Lambda$ y L par)

$$P_{\Lambda M L}(\alpha_m) = \sum_{r,s} A_{rs}^{\Lambda M L} \{1,2\}^{L-\Lambda+2r+3s} \quad (5.5)$$

$$\{2,2\}^{(2\nu-L)/2-3s-2r} \{2,0\}^r \{3,0\}^s$$

donde $A_{rs}^{\Lambda M L}$ son constantes arbitrarias y $\{1,2\}, \{2,2\}, \{2,0\}, \{3,3\}$ son (d.p.e.) dependientes de las coordenadas i.e.,

$$\{2,0\} \equiv \sum_m \alpha_m \alpha^m = \beta^2 \quad (5.6a)$$

$$\begin{aligned} \{3,0\} &\equiv \sqrt{7} \sum_{m,m',m''} (-1)^{m''} \langle 22 m m' | 2 - m'' \rangle \alpha_m \alpha_{m'} \alpha_{m''} \\ &= -\sqrt{2/35} \beta^3 \cos 3\gamma = -\sqrt{\frac{2}{35}} \beta^3 x \end{aligned} \quad (5.6b)$$

$$\{1,2\} \equiv \alpha_2$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left[D_{22}^{L*}(\vartheta_i) + D_{2-2}^{L*}(\vartheta_i) \right] \sin \gamma + D_{20}^{L*}(\vartheta_i) \cos \gamma \quad (5.6c)$$

$$\begin{aligned}
 \{2,2\} &\equiv \sqrt{7} \sum_{m, m'} \langle 22 m m' | 22 \rangle \alpha_m \alpha_{m'} \\
 &= \sqrt{7} \beta^2 \sum_m D_{2m}^{2*}(\vartheta_i) [\alpha \times \alpha]_m^2 \\
 &= -\sqrt{2} \beta^2 \left\{ D_{20}^{2*}(\vartheta_i) \cos(-2\gamma) \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\sqrt{2}} [D_{22}^{2*}(\vartheta_i) + D_{2-2}^{2*}(\vartheta_i)] \sin(-2\gamma) \right\} \quad (5.6d)
 \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores se usó la relación de las α 's con las variables del sistema fijo en el cuerpo.

Por medio de (5.6a) y (5.6b) el polinomio $P(\alpha_m)$ se puede escribir

$$P_{\Lambda\mu L}(\alpha_m) = \sum_n \{1,2\}^{\sigma+\tau-n} \{2,2\}^{\mu} \beta^{3\mu+\tau-n} f_m^{\sigma\tau\mu}(x) \quad (5.7)$$

donde $m \equiv \Lambda - 1/2 - 3s - 2\gamma$, $\sigma + \tau \equiv 1/2$ y

$\sigma + 2\tau + 3\mu = \Lambda$. La $f_m^{\sigma\tau\mu}(x)$ es un polinomio, por el momento, indeterminado en la variable x .

Las funciones D están dadas por

$$D_{m_k}^{L*} = \exp(i m \vartheta_1) d_{m_k}^L(\vartheta_2) \exp(i k \vartheta_3),$$

con la expresión bien conocida ³¹⁾ para $d_{m_k}^L(\vartheta_2)$ se obtiene de (5.6c) lo siguiente:

$$\left[\beta^{-1} \{2, 2\} \right]^r = \sum_k D_{2r, k}^{2r*}(\vartheta_i) S_k^{2r}(\gamma),$$

donde la función $S_k^{2r}(\gamma)$ tiene la forma

$$S_k^{2r}(\gamma) = \left[\frac{(2r+k)! (2r-k)!}{(r!)^2} \right]^{1/2} \sum_q \binom{r}{2q - k/2} \binom{2q - k/2}{q}$$

$$(\sqrt{6})^r \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^{2q - k/2} (\cos \gamma)^{r + k/2 - 2q} (\sin \gamma)^{2q - k/2}$$

$$= \left[\frac{(2r+k)! (2r-k)!}{(r!)^2} \right]^{1/2} \frac{r! (\sqrt{6})^r \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^{k/2}}{(k/2)! (r - k/2)!}$$

$$(\cos \gamma)^{r - k/2} (\sin \gamma)^{k/2} {}_2F_1 \left(-\frac{r}{2} + \frac{k}{4}, -\frac{r}{2} + \frac{k}{4} + \frac{1}{2}; \frac{k}{2} + 1; \frac{\tan^2 \gamma}{3} \right),$$

en donde ${}_2\bar{F}_1$ es una función hipergeométrica y K está restringida a valores pares. Si en la relación anterior se reemplaza K por $-K$ y z por z^{-1} se obtiene una expresión idéntica y así tenemos la propiedad

$$S_K^{2r}(\gamma) = S_{-K}^{2r}(\gamma) \quad (5.8)$$

De los resultados anteriores y (5.6d) se ve inmediatamente

que

$$[\beta^{-2} \{2, 2\}]^n = (-\sqrt{2})^n \sum_k D_{2n, k}^{2n}(\psi_1) S_k^{2n}(-2\beta)$$

Así, el producto

$$[\beta^{-1} \{1, 2\}]^{L-2n} [\beta^{-2} \{2, 2\}]^n = \sum_k G_k^{nL}(\gamma) D_{L, k}^{L}(\psi_1) S_k^{2n}(-2\beta), \quad (5.9)$$

donde

$$G_k^{nL}(\gamma) = (-\sqrt{2})^n \sum_{k', k''} \langle L-2n, 2n, k', k'' | L, k \rangle S_{k'}^{L-2n}(\gamma) S_{k''}^{2n}(-2\beta)$$

$$\begin{aligned}
 |3\mu\mu 0\rangle &= [3,0]^M |0\rangle \\
 &= \sum_Y B_Y^M (2,0)^{3Y} (3,0)^{M-2Y} |0\rangle, \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

con la utilización de la ecuación (3.13) en el último paso.

El coeficiente B_Y^M se obtiene recordando que para este caso $(7,10)$

$$\begin{aligned}
 P_{3\mu\mu 0}(\alpha_m) &= \beta^{3\mu} P_\mu(x) \\
 &= \beta^{3\mu} \sum_Y (-1)^Y \frac{(2\mu-2Y-1)!!}{2^Y Y! (\mu-2Y)!} x^{M-2Y} \\
 &= \beta^{3\mu} \sum_Y (-1)^Y \frac{(2\mu-2Y-1)!!}{Y! (\mu-2Y)!} \{2,0\}^{3Y} \{3,0\}^{M-2Y} \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

en dónde utilizamos el desarrollo en serie de potencias del polinomio de Legendre $P_\mu(x)$ y las ecuaciones (5.6a) y (5.6b).

Comparando (5.12) y (5.13); los polinomios satisfacen las mismas ecuaciones, únicamente que en el 1er caso son funciones de las η_m y en el 2^{do} de las α_m , se concluye que se puede tomar

$$B_Y^M = \frac{(-1)^Y (2\mu-2Y-1)!!}{Y! (\mu-2Y)!} \quad (5.14)$$

ya que los estados $|\Lambda \mu L\rangle$ no están normalizados y así tenemos una constante multiplicativa arbitraria.

Se quiere ahora extender el desarrollo (5.12) a estados con L arbitraria (par).

Los estados $|\Lambda \mu L\rangle$ dados en (4.11) se pueden construir en el esquema de partícula-agujero como sigue:

$$|\Lambda \mu L\rangle = (\alpha_2^\dagger)^\sigma \xi_2^\tau [3, 0]^{\mu+\tau} |0\rangle, \quad (5.15)$$

donde tenemos que el número de cuantos es $\Lambda = \sigma + 2\tau + 3\mu$ y el momento angular es $L = 2(\sigma + \tau)$.

Por lo tanto todos los estados $|\Lambda \mu L\rangle$ pueden escribirse en la forma

$$|\Lambda \mu L\rangle = (\alpha_2^\dagger)^\sigma \xi_2^\tau |3\mu \mu 0\rangle \quad (5.16)$$

La aplicación de ξ_2 a (5.12) es simple, ya que involucra aplicar derivadas de 1er orden $(\partial/\partial \eta_{-2})$. La aplicación de potencias de α_m^\dagger a polinomios en las η 's es más complicada, como veremos a continuación.

La forma de (4.5) sugiere que se puede escribir

$$\left(a_2^+\right)^\sigma = \sum_{n=0}^{\sigma} \eta_2^{\sigma-n} (z, 0)^n R_n^\sigma(N) \xi_2^n \quad (5.17)$$

donde $R_n^\sigma(N)$ es alguna función del operador de número. En realidad para $\sigma=1$, de (4.5) obtenemos

$$R_0^1(N) = 1, \quad R_1^1(N) = -(2N+5)^{-1} \quad (5.18)$$

Se probará (5.17) por inducción, encontrando una relación de recurrencia para la $R_n^\sigma(N)$ que se puede resolver y así determinar R_n^σ explícitamente.

Considere

$$\left(a_2^+\right)^{\sigma+1} = \left[\eta_2 - (z, 0) (2N+5)^{-1} \xi_2 \right] \sum_n \eta_2^{\sigma-n} (z, 0)^n R_n^\sigma(N) \xi_2^n,$$

desarrollando este resultado y haciendo uso repetido de las expresiones

$$\xi_2 R_n^\sigma(N) = R_n^\sigma(N+1) \xi_2, \quad \eta_2 R_n^\sigma(N) = R_n^\sigma(N-1) \eta_2$$

para funciones arbitrarias del operador de número \hat{N} se obtiene

$$\left(\lambda_2^+\right)^{\sigma+1} = \sum_{m=0}^{\sigma} \eta_2^{\sigma+1-n} (2,0)^n R_m^{\sigma}(N) \left[1 - 2n(2N+2\sigma+2n+3)\right] \xi_2^n$$

$$\sum_{n=1}^{\sigma+1} \eta_2^{\sigma+1-n} (2,0)^n (2N+2\sigma+2n+3)^{-1} R_{n-1}^{\sigma}(N+1) \xi_2^n,$$

que conduce a la relación de recurrencia

$$(2N+2\sigma+2n+3) R_m^{\sigma+1}(N) = (2N+2\sigma+3) R_m^{\sigma}(N) - R_{m-1}^{\sigma}(N+1)$$

satisfecha por

$$R_m^{\sigma}(N) = (-1)^m \binom{\sigma}{m} \frac{(2n+2\sigma+1)!!}{(2N+2\sigma+2n+1)!!} \quad (5.19)$$

Se puede ahora escribir (5.16) en la forma

$$\{ \Lambda \mu L \} = \sum_n \eta_2^{\sigma-n} (2,0)^n R_n^{\sigma}(N) \xi_2^{2+n} \{ 3 \mu \mu 0 \} \quad (5.20)$$

Aplicando $\xi_2 = \frac{\partial}{\partial \eta_{-2}}$ teniendo en cuenta

$$\frac{\partial}{\partial \eta_{-2}} (2,0) = 2(1,2), \quad \frac{\partial}{\partial \eta_{-2}} (3,0) = 3(2,2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_{-2}} (1,2) = \frac{\partial}{\partial \eta_{-2}} (2,2) = 0,$$

se obtiene la expresión

$$\{ \Lambda_{\mu L} \} = \sum_{r,n} C_{rn}^{\sigma z \mu} (1,2)^{\sigma+z-n} (2,2)^m (2,0)^{3r-z+m} (3,0)^{m+z-2r-n} |0\rangle \quad (5.21)$$

donde las constantes $C_{rn}^{\sigma z \mu}$ tienen la forma

$$C_{rn}^{\sigma z \mu} = B_r^{m+z} 2^{z-n} 3^m$$

$$\frac{(3r)! (m+z-2r)!}{(m+z-2r-n)!} \sum_s 2^s \binom{z+s}{m} \frac{R_s^\sigma (3m+2z-s)}{(3r-z+n-s)!} \quad (5.22)$$

Por construcción, este estado satisface las condiciones

$$N |\Lambda ML\rangle = \Lambda |\Lambda ML\rangle$$

$$L_1 |\Lambda ML\rangle = 0$$

$$L_0 |\Lambda ML\rangle = L |\Lambda ML\rangle$$

$$\sum_m \xi_m \xi^m |\Lambda ML\rangle = 0$$

Se quiso obtener el estado en términos de las η_m para utilizar el teorema de Dragt que nos dice:

Los estados de un oscilador armónico en γ dimensiones con un seniority dado i.e., aquellos que satisfacen las ecuaciones

$$N P(\eta_j) |0\rangle = \Lambda P(\eta_j) |0\rangle$$

$$\sum_{i=1}^{\gamma} \xi_i \xi_i P(\eta_j) |0\rangle = 0$$

pueden ser escritos como

$$P(\eta_j) |0\rangle = \pi^{-\gamma/4} 2^{\gamma/2} P(\alpha_i) e^{-P^2/2} \quad (5.23)$$

donde como antes $\eta_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_j - i \pi_j)$, $\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_j + i \pi_j)$,
 $j = 1, 2, \dots, \gamma$.

De tal modo que el teorema de Dragt nos permite tener

$$\begin{aligned}
 |n, m, l\rangle &= P_{n, m, l}(\alpha_m) e^{-\beta^2/2} \\
 &= \pi^{-3/4} 2^{N_2} \sum_{r, n} \left[C_{r, n}^{\sigma, \tau, \mu} \begin{Bmatrix} 1, 2 \\ \sigma, \tau, \mu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2, 2 \\ \sigma, \tau, \mu \end{Bmatrix}^n \right. \\
 &\quad \left. \begin{Bmatrix} 2, 0 \\ \sigma, \tau, \mu \end{Bmatrix}^{3r - \tau + n} \begin{Bmatrix} 3, 0 \\ \sigma, \tau, \mu \end{Bmatrix}^{\mu + \tau - 2r - n} \right] e^{-\beta^2/2} \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

polinomios en términos de las α 's que satisfacen (5.2) y (5.3).

Substituyendo $\begin{Bmatrix} 2, 0 \end{Bmatrix}$ y $\begin{Bmatrix} 3, 0 \end{Bmatrix}$ en función de β y γ y

comparando con (5.7) se tiene

$$f_{n, m}^{\sigma, \tau, \mu}(x) = \pi^{-3/4} (-1)^{\mu + \tau - n} 2^{(n + \mu + \tau - n)/2} \sum_{r} C_{r, n}^{\sigma, \tau, \mu} \frac{x^{\mu + \tau - n - 2r}}{2^r} \quad (5.25)$$

Habiendo obtenido la $f_{n, m}^{\sigma, \tau, \mu}(x)$ y conociendo la

$G_{n, k}^{\sigma, \tau, \mu}(\gamma)$ se tiene entonces una expresión analítica para la $\psi_{n, m}^{\sigma, \tau, \mu}(\delta)$

dada por (5.11).

6. Extensión a Momento Angular Impar

En la sección anterior se consideró el momento angular par por comodidad y el propósito de la presente es mostrar que se tiene una solución similar cuando L es impar.

De la ec.(4.11) tenemos (si $L =$ impar)

$$|\bar{\Lambda}, \mu, \bar{L}\rangle = [1, 2]^\sigma [2, 2]^\tau [3, 3] [3, 0]^\mu |0\rangle,$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{L} &= 2(\sigma + \tau) + 3 \equiv L + 3 \\ \bar{\Lambda} &= \sigma + 2\tau + 3\mu + 3 \equiv \Lambda + 3\end{aligned}$$

La discusión anterior nos indica inmediatamente que se puede tener un estado con \bar{L} en el esquema partícula-agujero i.e.,

$$|\bar{\Lambda}, \mu, \bar{L}\rangle = (a_2^\dagger)^\sigma \xi_2^\tau [3, 3] [3, 0]^{\mu + \tau} |0\rangle \quad (6.1)$$

El estado anterior puede escribirse en términos de un polinomio en las α_m como sigue:

$$|\bar{\Lambda}, \mu, \bar{L}\rangle = \{3, 3\} \bar{P}_{\Lambda, \mu, L}(\alpha_m) e^{-\beta^2/2} \quad (6.2)$$

donde

$$\bar{P}_{\Lambda\mu L}(\alpha_m) = \sum_n \{1,2\}^{\sigma+\tau-n} \{2,2\}^n \beta^{\mu+\tau-n} \bar{J}_m^{\sigma\tau\mu}(x) \quad (6.3)$$

con σ , τ , μ dadas como en (5.7).

La $\bar{J}_m^{\sigma\tau\mu}(x)$ satisface ahora un conjunto de

ecuaciones diferenciales acopladas que resultan de la ecuación

$$\sum_m \frac{\partial^2}{\partial \alpha_m^2} \left[\{3,3\} \bar{P}_{\Lambda\mu L}(\alpha_m) \right] = 0.$$

Pero al igual que en la sección anterior, en lugar de tratar

de resolver el sistema de ecuaciones diferentes acopladas directamente se procede

como sigue:

1) Se escribe el (d.p.e.) $\{3,3\}$ en términos de

β , γ y los ángulos de Euler, por lo cual

$$\left[\beta^{-3} \{3,3\} \right] \left[\beta^{-1} \{1,2\} \right]^{4\tau-n} \left[\beta^{-2} \{2,2\} \right]^n = \sum_{\bar{k}} G_{\bar{k}}^{n\bar{L}}(\gamma) D_{\bar{L}\bar{k}}^{\bar{L}}(\nu_i) \quad (6.4)$$

con

$$G_{\bar{k}}^{n\bar{L}}(\gamma) = \sum_{k\bar{k}} \langle L\bar{k}k | \bar{L}\bar{k} \rangle G_{\bar{k}}^{nL}(\gamma) y_{\bar{k}}^{(5)}(\gamma)$$

y en donde $\langle L \ 3 \ k \ k \mid \bar{L} \ \bar{k} \rangle$ es un coeficiente de Clebsh Gordan de $O(3)$ y

$$g_k^{(3)}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3\gamma [\delta_{k,2} - \delta_{k,-2}]$$

2) Usando (3.13) se determina el estado $|3\mu+3, \mu, 3\rangle$

en términos de los operadores de creación normales η_m que satisface

la ecuación

$$\nabla^2 |3\mu+3, \mu, 3\rangle = 0.$$

3) Como $[L_z, (3,3)] = 0$ se aplican a_2^+ y ξ_2 en

la misma forma que en la sección anterior obteniéndose

$$|\bar{n} \mu \bar{l}\rangle = (3,3) \sum_{r,n} \bar{c}_{r,n}^{\sigma \tau \mu}$$

$$(1,2)^{\sigma+\tau-n} (2,2)^n (3,0)^{\mu+\tau-2r-n} (2,0)^{3r-\tau+n} |0\rangle \quad (6.5)$$

donde

$$\bar{c}_{r,n}^{\sigma \tau \mu} = B_r^{\mu+\tau} 2^{\tau-n} 3^n \frac{(3r)!(\mu+\tau-2r)!}{(\mu+\tau-2r-n)!}$$

$$(2\mu+2\tau-2r+1) \sum_s \binom{\tau+s}{n} 2^s \frac{R_s^\sigma (5\mu+2\tau+3-s)}{(3r-\tau+n-s)!} \quad (6.6)$$

Obviamente el polinomio $\{3,3\} \bar{P}_{\Lambda, \mu, L}(\alpha_m)$ tiene la misma forma que (6.5) pero con los (d.p.e.) de las α 's reemplazando los (ν, L) dependientes sobre η_m . Considerando la relación (6.3) que define $\bar{f}_m^{\sigma \in \mu}(x)$ se tiene

$$\bar{f}_m^{\sigma \in \mu}(x) = \pi^{-\frac{\gamma}{4}} \frac{(-1)^{\mu + \epsilon - n}}{2^{-(\mu + \epsilon - n + \Lambda)/2}} \sum_Y \bar{c}_{\gamma n}^{\sigma \in \mu} 2^{-r} x^{\mu + \epsilon - n - 2r}$$

Así, todos los resultados derivados para L par en la sección anterior puede ser obtenidos en el caso L impar.

7. Cálculo de los elementos de matriz relevantes en el modelo colectivo.

Los elementos de matriz de mayor importancia dentro del modelo colectivo están relacionados con operadores que son polinomios homogéneos de grado Λ en las α 's correspondiendo a momento angular definido L y proyección M y que además satisfacen la ecuación de Laplace en 5 dimensiones.

Debido a que los generadores de $O(5)$ se pueden expresar como

$$\Lambda_m^{m'} = \alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_{m'}} - \alpha^{m'} \frac{\partial}{\partial \alpha^m} \quad (7.1)$$

el operador de Casimir está dado por

$$\hat{\Lambda}^2 = \frac{1}{2} \sum_{m, m'} \Lambda_m^{m'} \Lambda_{m'}^m \quad (7.2)$$

$$= \left(\sum_m \alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \right) \left(\sum_m \alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_m} + 3 \right) - \beta^2 \sum_m \frac{\partial^2}{\partial \alpha_m \partial \alpha_m}.$$

De modo que los polinomios mencionados en el párrafo anterior son eigenfunciones de $\hat{\Lambda}^2$ con eigenvalores $\Lambda(\Lambda+3)$ y pueden ser denotados por

$$T_M^{\Lambda_S L}(\alpha_m) = \beta^n T_M^{\Lambda_S L}(\alpha_m/\beta), \quad (7.3)$$

donde los polinomios $T_M^{\Lambda_S L}(\alpha_m/\beta)$ dependen únicamente de γ y los ángulos de Euler y están asociados con representaciones irreducibles de la cadena de grupos

$$\begin{array}{ccccc} O(5) & \supset & O(3) & \supset & O(2) \\ \Lambda & & L & & M \end{array} \quad (7.4)$$

Se ha agregado el índice extra S en $T_M^{\Lambda, L}(\alpha_m/\beta)$

ya que como se mostró en las secciones anteriores el polinomio más general en α_m lo requiere.

$$s \equiv \mu - \mu_0 + 1,$$

donde μ_0 es el valor mínimo posible de μ para una Λ y L dadas, de acuerdo con las ecuaciones (4.12) y $s = 1, 2, \dots, d(\Lambda, L)$

con $d(\Lambda, L)$ siendo el número de R.I. L de $O(3)$ contenidas en una R.I. Λ de $O(5)$.

Por medio de la ecuación (2.12) se ve que

$$T_M^{\Lambda, L}(\alpha_m/\beta) = \sum_k T_M^{\Lambda, L}(\alpha_m/\beta) D_{mk}^L * (v_i) \quad (7.5)$$

donde $T_M^{\Lambda, L}(\alpha_m/\beta)$ es el mismo polinomio que (7.3) pero ahora de la razón α_m/β . La misma ec. (2.12) muestra que $T_M^{\Lambda, L}(\alpha_m/\beta)$ es una función de γ únicamente y se puede escribir

$$T_M^{\Lambda, L}(\alpha_m/\beta) \equiv \phi_k^{\Lambda, L}(\gamma). \quad (7.6)$$

Por lo tanto el elemento de matriz más general está dado por

(reemplazar μ por s en la ecuación (2.10))

$$\begin{aligned}
 & \langle \nu'' \Lambda'' s'' L'' M'' | \beta^{2\rho+\Lambda} T \frac{\Lambda s L}{M} (\alpha m/\beta) | \nu' \Lambda' s' L' M' \rangle \\
 &= \int_0^\infty F_{\Lambda''}^{\Lambda''}(\beta) \beta^{2\rho+\Lambda} F_{\Lambda'}^{\Lambda'}(\beta) \beta^\tau d\beta \ 8\pi^2 (-1)^{L'+M''} \begin{pmatrix} L & L' & L'' \\ M & M' & -M'' \end{pmatrix} \\
 & \int_0^\pi \sum_{k k' k''} \begin{pmatrix} L & L' & L'' \\ k & k' & k'' \end{pmatrix} \phi_{\Lambda}^{\Lambda s L}(\gamma) \phi_{\Lambda'}^{\Lambda' s' L'}(\gamma) \phi_{\Lambda''}^{\Lambda'' s'' L''}(\gamma) \sin \gamma d\gamma \\
 &= \left\{ 2\pi \left[\Lambda'! \Gamma(\Lambda'+\Lambda'+\frac{3}{2}) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\Lambda''! \Gamma(\Lambda''+\Lambda''+\frac{3}{2}) \right]^{-\frac{1}{2}} (-1)^{\Lambda'+\Lambda''} \right. \\
 & \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(\Lambda'+\Lambda''+\Lambda+2\rho+5)] \Gamma[\frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda'+\Lambda'')+1] \Gamma[\frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda''+\Lambda'')+1]}{\Gamma[\frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda'+\Lambda'')-\Lambda'+1] \Gamma[\frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda''+\Lambda'')-\Lambda''+1]} \\
 & \left. {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}(2\rho+\Lambda+\Lambda'+\Lambda''+5), & -\Lambda', & -\Lambda'' \\ \frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda'+\Lambda'')-\Lambda'+1, & \frac{1}{2}(2\rho+\Lambda-\Lambda''+\Lambda'')-\Lambda''+1, & 1 \end{matrix} \right] \right\} (7.7) \\
 & (\Lambda s L; \Lambda' s' L'; \Lambda'' s'' L'') \ 8\pi^2 (-1)^{M''} \begin{pmatrix} L' & L & L'' \\ M' & M & -M'' \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En (7.7) se usaron las ecuaciones (7.5) y (7.6) para tener

una integral sobre los ángulos de Euler de el producto de 3 funciones $D_{M'K}^\dagger$

lo que nos da los coeficientes $\alpha_{\Lambda' \Lambda''}$

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix}.$$

La integral radial sobre ρ aparece separadamente y es evaluada explícitamente en términos de las funciones hipergeométricas y gamma de los argumentos indi-

cados con $\lambda' = \frac{1}{2} (\nu' - \Lambda')$ y $\lambda'' = \frac{1}{2} (\nu'' - \Lambda'')$.

Los símbolos $\beta, \gamma, (\Lambda \leq L; \Lambda' \leq L'; \Lambda'' \leq L'')$

han sido evaluados analíticamente y numéricamente por los siguientes casos:

$$L = 0 \quad \text{lo que implica } L' = L'', \text{ arbitrarias } \Lambda'', \Lambda', \Lambda \quad (7.8a)$$

$$L = 2, \Lambda = 1, \text{ arbitrarias } \Lambda', \Lambda'', L' \text{ y } L'' \quad (7.8b)$$

$$L = 2, 4, \Lambda = 2, \text{ arbitrarias } \Lambda', \Lambda'', L' \text{ y } L'' \quad (7.8c)$$

Los coeficientes (7.8a) son utilizados en el cálculo de la matriz del Hamiltoniano general que describe la dinámica de los movimientos cuadrupolares de la superficie nuclear, i.e.,

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \hat{T} + \hat{V} \\
 &= P_2 [\pi \chi \pi]^{[0]} + P_3 [L \pi \chi \alpha]^2 \chi \pi]^{[0]} + P_4 ([\pi \chi \pi]^{[0]})^2 \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} P_4^{2n} \left\{ [L \pi \chi \pi]^{[2n]} \chi [\alpha \chi \alpha]^{[2n]} \right\}^{[0]} + \left\{ [\alpha \chi \alpha]^{[2n]} \chi [\pi \chi \pi]^{[2n]} \right\}^{[0]} \\
 &+ \frac{\sqrt{5}}{2} C_2 [\alpha \chi \alpha]^{[0]} + C_3 [(\alpha \chi \alpha)^2 \chi \alpha]^{[0]} + C_4 ([\alpha \chi \alpha]^{[0]})^2 \\
 &+ C_5 [(\alpha \chi \alpha)^2 \chi \alpha]^{[0]} \cdot [\alpha \chi \alpha]^{[0]} + C_6 \left([(\alpha \chi \alpha)^2 \chi \alpha]^{[0]} \right)^2 \\
 &+ D_6 \left([\alpha \chi \alpha]^{[0]} \right)^3 + \dots \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

Para demostrar la aseveración del párrafo anterior, mencionamos

que se ha obtenido la fórmula del gradiente para la cadena de grupos

$O(5) \supset O(3)$ ³³⁾. Esta consiste en encontrar la acción del momento

π_m sobre una función arbitraria $F(\beta)$ multiplicada por una $\chi(\gamma, \psi; i)$

función base para las R.I. de la cadena de grupos $O(5) \supset O(3)$.

Un resultado debido a Hess es muy útil ³⁴⁾, él considera el conmutador

$$[\alpha_m, H_0] = i \pi_m, \quad (7.10)$$

así que los elementos de matriz de π_m con respecto a los estados (5.4)

se reducen al de la α_m multiplicado por el factor $i(\nu'' - \nu')$.

Por la regla de selección para la α_m $v' = v \pm 1$, de tal modo $i(v'' - v') = \exp [i(v'' - v') \pi/2]$.

Este análisis se puede llevar un paso más adelante escribiendo la relación de operadores

$$\pi_m = \exp [i \pi \hat{N}/2] \alpha_m \exp [-i \pi \hat{N}/2] \quad (7.11)$$

donde \hat{N} es el operador de número.

Concluyendo, que el elemento de matriz de un polinomio homogéneo $P_v(\pi_m)$ de grado v en los momentos π_m está dado en términos de el elemento de matriz del mismo polinomio P_v dependiendo únicamente de las α_m .

Por lo tanto, basta con calcular los términos de (7.9) que son funciones de las α_m para construir la matriz de Hamiltoniano.

El potencial $V(\alpha_m)$, como se discutió en la sección 2, depende de los invariantes β^2 y $\beta^3 \cos 3\gamma$.

De tal manera que

$$\begin{aligned} V(\beta, \gamma) &= \sum_{\rho\mu} U_{\rho\mu} \beta^{2\rho+3\mu} x^\mu \\ &= \sum_{\rho\mu} V_{\rho\mu} \beta^{2\rho+3\mu} P_\mu(x). \end{aligned} \quad (7.12)$$

La ventaja de expresar el potencial en términos de los polinomios de Legendre es, que éstos son eigenfunciones de $\hat{\Lambda}^2$ con eigenvalor $\Lambda = 3\mu$. Así, la energía potencial puede expresarse como combinación lineal de tensores irreducibles de $O(5)$ caracterizados por $L = M = 0$, y la aplicación de la relación (7.7) es directa.

El potencial $V(\alpha_m)$ en las ecuaciones (1.10) y (7.12) está restringido a formas polinomiales en las α_m , del análisis de la primera sección la energía potencial de deformación puede ser solamente función de β y γ , pero puede tener formas no polinomiales en las α_s . De tal manera que una expresión más general del potencial $V(\alpha_m)$ es la siguiente:

$$V(\alpha_m) = \sum_{\rho \geq 2}^{10} \sum_{\mu=1}^2 U_{\rho\mu} \beta^\rho (\cos 3\gamma)^\mu \quad (7.13)$$

Esta expresión la utilizamos más adelante en el ajuste de la S.E.P. del ^{169}Dy , por el momento hacemos notar que los términos no polinomiales de (7.13) también se tienen programados como se puede ver en el apéndice A de este trabajo.

Los otros símbolos β - J (7.8b) y (7.8c) sirven para evaluar los elementos de matriz del operador cuadrupolar (1.16a) y con éste, encontrar las probabilidades de transición $B(E2)$.

Es importante señalar que las técnicas matemáticas aquí descritas se aplican a otros problemas como son: El modelo de bosones interactuantes ³⁶⁾, el efecto Jahn-Teller ³⁷⁾, resonancias gigantes ⁶⁾, etc., en los que son de gran utilidad los coeficientes de Wigner reducidos (7.8).

En el apéndice A de la tesis, se presentan los cálculos y programas de tales coeficientes.

8. Diagonalización del Hamiltoniano

De la diagonalización de la matriz de $v(\beta, \gamma)$ se obtienen los estados

$$|\rho JM\rangle = \sum_{\nu \lambda t}^{v_{max}} A_{\nu \lambda t}^{\rho J} |\nu \lambda t JM\rangle \quad (8.1)$$

donde J es el espín, M la proyección del espín y ρ un índice que numera distintos estados. Los kets $|\nu \lambda t JM\rangle$ son las eigenfunciones ortonormalizadas del oscilador armónico cuadrupolar, i.e.

$$|\nu \Lambda t J M\rangle = F_m^\Lambda(\rho) \sum_{s=1}^{d(\Lambda, J)} \frac{O_{st}(\Lambda, J)}{\sqrt{\epsilon_t(\Lambda, J)}} \chi_{sJM}^\Lambda(\gamma, \varphi_i), \quad (8.2)$$

en donde $\epsilon_t(\Lambda, J)$ son los eigenvalores de la matriz de los productos escalares y $O_{st}(\Lambda, J)$ los eigenvectores, para una Λ y J fijos. Las χ_{sJM}^Λ están dadas por la ecuación (2.12) y $d(\Lambda, J)$ es el número de R.I. (J) de $O(3)$ contenidas en la R.I. (Λ) de $O(5)$.

El conjunto de eigenfunciones (8.2) utilizado aumenta fuertemente con el número de fonones ν como se puede apreciar de la tabla siguiente:

| $\nu \backslash L$ | 0 | 6 |
|--------------------|----|-----|
| 5 | 5 | 4 |
| 30 | 91 | 271 |

De acuerdo a la ecuación (8.1) desarrollamos los estados del hamiltoniano colectivo (7.9) en la base de las eigenfunciones de H_c . Por lo tanto, tenemos que analizar si tal desarrollo da resultados dignos de

confianza para estados nucleares con grandes deformaciones. La convergencia del procedimiento de diagonalización depende, de el número máximo de fonones considerados en (8.1); de la longitud del oscilador cuadrupolar $\left(\hbar^2/B_2 C_2\right)^{1/4}$ y de la S.E.P. que se considere.

En la figura 3 la S.E.P. de un núcleo deformado es mostrada. La línea mínima cae en $\beta = 0.4$, en el eje prolato, con una profundidad de alrededor de 9 Mev con respecto al punto $\beta = 0$. En este ejemplo la convergencia de los estados 0^+ y 2^+ se analiza como función del número máximo de fonones ν_{max} y del producto $B_2 C_2$. Obviamente, 25 fonones son suficientes para reproducir los estados y la probabilidad de transición $B(E2)$ entre el estado base 0^+ y el primer estado excitado 2^+ . Si la longitud del oscilador $(B_2 C_2)$ se varía, los resultados son aproximadamente independientes sobre un rango considerable de valores.

Otro ejemplo es presentado en la figura 4 donde una S.E.P. con dos mínimos, uno esférico y el otro asimétrico, es investigado. En el espectro de la figura 4 se distinguen 2 grupos de estados: estados vibracionales en el mínimo esférico y bandas del rotor triaxial perteneciendo a el mínimo asimétrico. Cambiando el parámetro de inercia B_2 en la energía cinética la posición relativa del estado 0^+ más profundo es cambiada, alterando las propiedades del estado base.

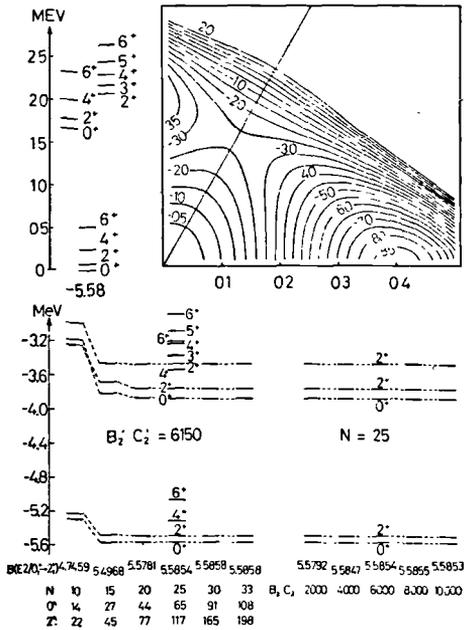


Figura 3.- Convergencia del método en el caso de un rotor prolato rígido. El número máximo de fonones y la longitud de la base del oscilador han sido variados. Abajo del número de fonones los tamaños de las matrices para los estados 0^+ y 2^+ son dados. (tomado de la referencia 12).

En la figura 4, también aparece el potencial de oscilador armónico utilizado en el procedimiento de diagonalización y en la figura 5 se varía el número máximo de fonones. Encontrándose una convergencia más lenta para los estados del rotor triaxial que para los del vibrador, para éstos una $v_{max} = 10$ es suficiente. Como en el ejemplo anterior un número máximo de 25-30 fonones son necesarios para obtener convergencia para los estados deformados.

Para encontrar las S.E.P. asociadas con un núcleo, dos actitudes generales pueden tomarse. Se puede intentar calcular los parámetros de (7.9) desde un punto de vista básico ³⁸⁾, por ejemplo el modelo de capas. La otra actitud, que es más sencilla, consiste en determinar los parámetros de (7.9) directamente por ajuste con los datos experimentales ¹³⁾. Este es el camino que seguiremos para encontrar la S.E.P. del ^{164}Dy y que presentaremos en la siguiente sección.

9. Superficie de Energía Potencial del ^{164}Dy .

En esta sección se construye empíricamente la S.E.P. del ^{164}Dy , la cual nos describe el espectro a bajas energías y probabilidades de transición experimentales. Antes de ésto discutiremos rápidamente las características esenciales del ^{164}Dy que utilizaremos posteriormente.

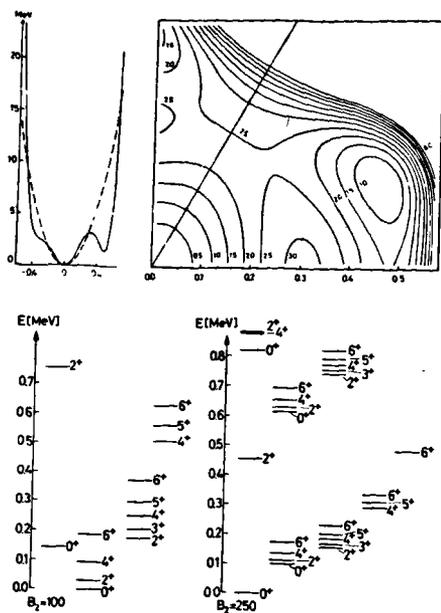


Figura 4.- S.E.P. con 2 mínimos uno esférico y el otro asimétrico, abajo el espectro calculado para 2 parámetros de inercia.

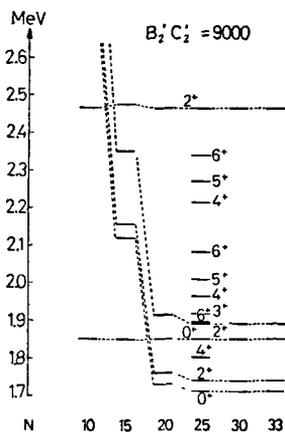


Figura 5.- Convergencia de la S.E.P. de la figura 4.

(tomadas de la referencia 12)

El espectro a bajas energías del $^{16}\text{O}_2$ es usualmente descrito en términos de un rotor rígido con la secuencia de niveles determinados por el patrón típico $I(I+1)$, donde I es el momento angular del rotor. Esto es apoyado por el valor relativamente grande de la probabilidad de transición cuadrupolar entre el estado base (0_1^+) y el primer estado excitado (2_1^+) , sin embargo, aparece en el espectro un número de niveles mayor que el esperado para un rotor rígido. Las energías que tienen estos estados, así como la probabilidad de transición cuadrupolar entre el estado base y el segundo estado excitado (2_2^+) sugieren fuertemente que los niveles extras forman una banda rotacional excitada. Dentro del esquema de clasificación del modelo de rotación vibración ⁸⁾, los 2 patrones rotacionales corresponden a la banda del estado base y a la banda de vibración γ .

Regresando al problema de la determinación de la S.E.P. del $^{16}\text{O}_2$, tenemos que seleccionar un conjunto de valores adecuados para las constantes de la energía potencial colectiva, así como de los parámetros que aparecen en la energía cinética.

Es por este motivo que es conveniente utilizar algún modelo más simple, por ejemplo, el modelo del rotor asimétrico o el de rotación-vibración, a través del cual se pueda obtener información de algunas de las constantes que

aparecen en el hamiltoniano colectivo.

En este caso utilizaremos el modelo de rotación-vibración (M.R.V.), aplicable a los núcleos que tienen configuraciones estables deformadas con simetría axial en la energía potencial colectiva, permitiendo pequeñas oscilaciones alrededor de la forma de equilibrio, además de las rotaciones.

En la referencia 6 encontramos que el M.R.V. depende de 4 parámetros que se ajustan del experimento. Estas 4 constantes son:

i) $E_{\rho} \equiv \hbar \sqrt{\frac{C_{\omega}}{B_{\omega}}}$, que se determina a partir de la diferencia en energía del primer estado excitado 0^+ con respecto al estado base.

ii) $E_{\gamma} \equiv \hbar \sqrt{\frac{C_2}{B_2}}$, que se fija de la energía relativa del segundo estado excitado 2^+ al estado base.

iii) $\epsilon \equiv \hbar^2 / 5 B_{\omega} \rho^2$, que se toma del valor de la energía del primer estado rotacional, también con respecto al estado base.

iv) El valor de la deformación de equilibrio (β_0) que se obtiene del valor $B(\epsilon_2)$ para el primer estado rotacional.

Este conjunto de parámetros se puede determinar de los datos experimentales de la figura 6 y a su vez a partir de ellos obtener el parámetro de inercia (B_{ω}), la curvatura (C_{ω}) de la energía potencial colectiva

en la dirección β y la curvatura del potencial en la dirección γ .

El paso siguiente consiste en dibujar un conjunto de puntos en papel milimétrico, para describir el potencial $V(\beta, \gamma = \xi)$, de tal manera que el mínimo esté localizado en β_0 y que tenga una curvatura C_1 .

Se propone un potencial del tipo

$$V(\beta, \gamma) = \sum_{\rho \geq 2} U'_{\rho 0} \beta^\rho + U'_{21} \beta^2 (1 - \cos 3\gamma) + U'_{22} \beta^2 (1 - \cos^2 3\gamma), \quad (9.1)$$

en donde las constantes $U'_{\rho 0}$ se ajustan por mínimos cuadrados con el potencial dibujado para $\gamma = 0^\circ$. Después de obtener las constantes $U'_{\rho 0}$ se escogen U'_{21} y U'_{22} en tal forma que el potencial en la dirección γ tenga una curvatura C_2 .

Así, con las constantes que aparecen en (9.1) y el parámetro B_2 , obtenidos en base al modelo de rotación vibración, tenemos en primera aproximación el hamiltoniano asociado con el $^{16}\text{D}_\gamma$. Este hamiltoniano se diagonaliza en la base de las eigenfunciones de un oscilador armónico cuadrupolar que para β grandes se aproxima a $V(\beta, \gamma = 0)$, lo cual fija las constantes de inercia y rigidez del oscilador.

De la diagonalización se encuentran los eigenvalores, que se distribuyen en las bandas del estado base y de la vibración γ , y éstas

a su vez se comparan con el espectro experimental. En general el acuerdo no es bueno y en este punto es donde se utiliza el conocimiento de muchos ejemplos de espectros, que no necesariamente corresponden a espectros de núcleos reales ¹³⁾. Debido al estudio de esta colección de ejemplos, ha sido posible tener un conocimiento cualitativo sobre el posible efecto en los niveles al modificar alguno o varios de los parámetros.

A pesar de ésto se efectuaron gran cantidad de diagonalización teniendo como resultado final el siguiente hamiltoniano para el $^{14}\text{D}_y$

$$H = P_2 [\pi \times \pi]^{[0]} + P_3 [[\pi \times \alpha]^{[2]} \times \pi]^{[0]} + \sum_{f,\mu} U_{f\mu} \beta^f (633)^{\mu} \quad (9.2)$$

donde $P_2 = 5/4 B_2$, $B_2 = 56.192 \times 10^{-42} \text{ Mev sec}^2$,

$P_3 = -0.06339 \times 10^{-42} (\text{Mev sec}^2)^{-1}$, $U_{20} = 1532.6151 \text{ Mev}$,

$U_{30} = -51341.6090 \text{ Mev}$, $U_{40} = 642502.3100 \text{ Mev}$,

$U_{50} = -4111929.0000 \text{ Mev}$, $U_{60} = 15144821.0000 \text{ Mev}$,

$U_{70} = -35645664.0000 \text{ Mev}$, $U_{80} = 44753696.0000 \text{ Mev}$,

$U_{90} = -32926784.0000 \text{ Mev}$, $U_{10,0} = 10525716.0000 \text{ Mev}$

$$y \quad U_{21} = -22 \text{ 0100 Mev.}$$

Los parámetros de inercia y rigidez que se utilizaron en el hamiltoniano base son los siguientes:

$$B_{2b} = 223.600 \times 10^{-42} \text{ Mev seg}^2 \quad (9.3a)$$

$$C_{2b} = 58.132 \text{ Mev} \quad (9.3b)$$

En la tabla 1 escribimos los eigenvalores de (9.2) de acuerdo a la banda que pertenecen encontrando una correspondencia excelente con los niveles experimentales.

Después de tener el espectro de energía razonablemente determinado se calculan los momentos cuadrupolares y probabilidades de transición $B(E2)$ y en caso de que los valores obtenidos no concuerden con el experimento, se pueden aplicar transformaciones canónicas que modifican estos valores sin alterar el espectro de energía. Por ejemplo, la transformación $\alpha'_m = \alpha \alpha_m$ y $\pi'_m = \frac{1}{\alpha} \pi_m$ mantiene la relación, $[\alpha'_m, \pi'_m] = i \hbar \delta_m^m$ invariante de tal manera que el espectro no se modifica, pero sí altera al operador de momento cuadrupolar (1.16a).

En la tabla 2 aparecen las probabilidades de transición y momentos cuadrupolares teóricos, así como los valores experimentales disponibles.

Finalmente construimos la S.E.P. (figura 7) en la que se muestran gráficamente las características principales del espectro a bajas energías del ^{161}Dy , por ejemplo, notamos la aparición de 2 configuraciones de equilibrio en las direcciones $\gamma = 0^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$. El mínimo que aparece en $\beta = 0.41$ sobre el eje prolato caracteriza al estado base y el otro mínimo sobre el eje oblató, menos estable, corresponde a estados excitados del núcleo en los cuales presenta una menor deformación.

Este trabajo fue realizado en colaboración con el Instituto de Física Teórica de la Universidad de Frankfurt, utilizando los métodos matemáticos discutidos en las secciones anteriores.

E [Kev]

22⁺ ————— 4934

20⁺ ————— 4216

18⁺ ————— 3531

16⁺ ————— 2867

14⁺ ————— 2290

12⁺ ————— 1746

10⁺ ————— 1261

8⁺ ————— 814

6⁺ ————— 501

4⁺ ————— 242

2⁺ ————— 73

0⁺ —————
banda estado base

¹⁶⁴Dy

⁷⁸
[10⁻¹⁸ e² cm²]

$$B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_2^+) = 0.122$$

$$B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+) = 5.593$$

18⁺ ————— 4033

16⁺ ————— 3407

14⁺ ————— 2831

12⁺ ————— 2313

10⁺ ————— 1857

9⁺ ————— 1656

8⁺ ————— 1468

7⁺ ————— 1302

6⁺ ————— 1153

5⁺ ————— 1025

1⁺ ————— 916

3⁺ ————— 818

2⁺ ————— 762

banda γ

FIGURA 6.- Espectro Experimental

TABLA I
BANDAS

| Nivel | Estado Base [MeV] | | Vibración [MeV] | |
|-----------------|----------------------|------------------|--------------------|-------------|
| | Teoría 0 | Experimento 0 | Teoría | Experimento |
| 0 ⁺ | | | | |
| 2 ⁺ | 0.066 | 0.073 | 0.753 | 0.762 |
| 3 ⁺ | - | | 0.838 | 0.828 |
| 4 ⁺ | 0.236 | 0.242 | 0.935 | 0.916 |
| 5 ⁺ | - | | 1.064 | 1.025 |
| 6 ⁺ | 0.494 | 0.501 | 1.204 | 1.153 |
| 7 ⁺ | - | | 1.383 | 1.302 |
| 8 ⁺ | 0.830 | 0.844 | 1.566 | 1.468 |
| 9 ⁺ | - | | 1.781 | 1.656 |
| 10 ⁺ | 1.245 | 1.261 | 1.997 | 1.857 |
| 11 ⁺ | - | | 2.252 | |
| 12 ⁺ | 1.728 | 1.746 | 2.497 | 2.313 |
| 13 ⁺ | - | | 2.790 | |
| 14 ⁺ | 2.274 | 2.290 | 3.052 | 2.831 |
| 15 ⁺ | - | | 3.384 | |
| 16 ⁺ | 2.877 | 2.887 | 3.666 | 3.407 |
| 17 ⁺ | - | | 4.032 | |
| 18 ⁺ | 3.529 | 3.531 | 4.332 | 4.033 |
| 19 ⁺ | - | | 4.732 | |
| 20 ⁺ | 4.233 | 4.216 | 5.040 | |
| 21 ⁺ | - | | 5.475 | |
| 22 ⁺ | 4.981 | 1.934 | 5.792 | |
| 23 ⁺ | - | | 6.258 | |

TABLA 2

A) $B(E2) [10^{-48} e^2 cm^4]$

| Transición | Teoría | Experimento |
|-------------------------------|--------|-------------|
| $0^+_h \longrightarrow 2^+_h$ | 5.734 | 5.593 |
| $0^+_h \longrightarrow 2^+_g$ | 0.077 | 0.122 |
| $2^+_h \longrightarrow 2^+_g$ | 0.037 | |
| $2^+_h \longrightarrow 3^+_g$ | 0.038 | |
| $2^+_g \longrightarrow 3^+_g$ | 2.779 | |
| $2^+_h \longrightarrow 4^+_b$ | 2.971 | |
| $2^+_g \longrightarrow 4^+_b$ | 0.008 | |
| $2^+_h \longrightarrow 4^+_g$ | 0.001 | |
| $2^+_g \longrightarrow 4^+_g$ | 1.218 | |
| $3^+_g \longrightarrow 4^+_b$ | 0.042 | |
| $3^+_g \longrightarrow 4^+_g$ | 1.869 | |
| $4^+_h \longrightarrow 4^+_g$ | 0.052 | |

B) Momentos Cuadrupolares $[10^{-24} e cm^2]$

$$Q(2^+_h) = -2.16$$

$$Q(2^+_g) = 2.14$$

$$Q(4^+_h) = -2.70$$

$$Q(4^+_g) = -1.07$$

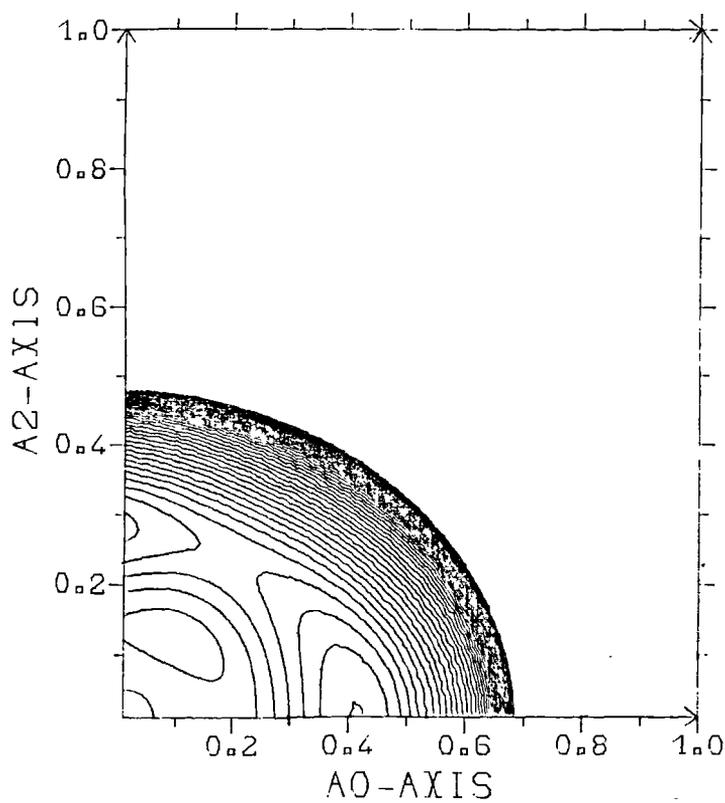


Figura 7.- S.E.P. del $^{16^+} Dy$

CAPITULO III

Reacciones Nucleares con Grados de Libertad Colectivos

Aunque el estudio de los núcleos inestables es una de las fuentes más importantes de conocimiento en la física nuclear, la mayor parte de la información sobre la estructura y dinámica nuclear es obtenida del estudio de las reacciones nucleares.

Algunas de las ideas actuales sobre los procesos de dispersión y reacciones nucleares, iniciados por proyectiles tales como ³⁸deuterones y partículas alfa, se ilustran en la figura 1

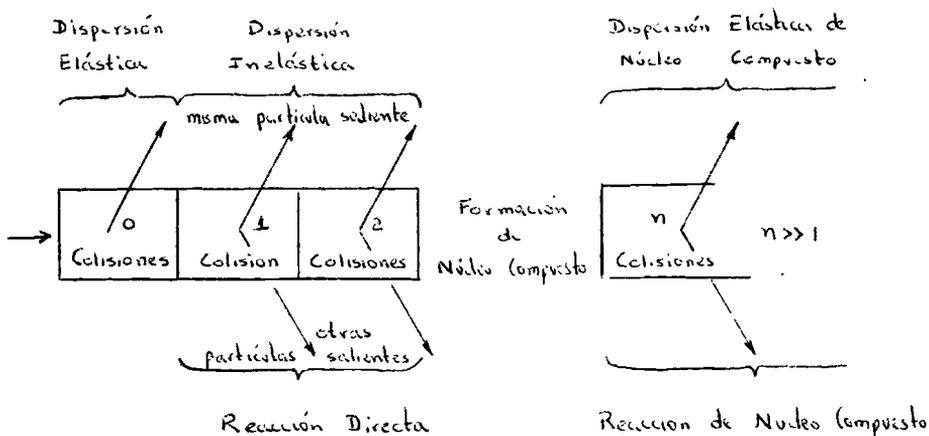


Figura 1.- Representación, debida a Weisskopf de las reacciones nucleares en términos de colisiones sucesivas.

La interacción entre el nucleón y el núcleo puede representarse por un potencial que varía uniformemente con el número de masa y la energía del proyectil, más una interacción residual. La dispersión debida puramente a el potencial es llamada dispersión elástica de forma. Cuando el nucleón incidente reacciona con los nucleones en el núcleo a través de la interacción residual, el núcleo blanco se excita, y si el nucleón tiene una energía suficientemente alta, la mayor parte de esta energía es rápidamente eliminada con la emisión de una partícula, dando lugar a una reacción directa o a dispersión inelástica. Si en cambio el nucleón incidente reacciona repetidamente dentro del núcleo, la estructura del sistema de $A + 1$ nucleones se vuelve muy complicada y la energía del nucleón incidente se distribuye entre muchas partículas. En este caso se dice que se ha formado un núcleo compuesto, y el examen de la sección eficaz en función de la energía del proyectil incidente muestra resonancias que corresponden a la formación de un estado permisible en dicho sistema. Eventualmente el núcleo compuesto debe decaer y el nucleón incidente puede reaparecer para dar lugar a dispersión elástica de núcleo compuesto o, más comunmente, a una amplia variedad de productos de decaimiento.

La existencia de procesos no-elásticos da lugar a una pérdida de nucleones en el haz incidente, lo que puede tomarse en cuenta incluyendo en el potencial una parte imaginaria que reduce la intensidad del haz dispersado.

Al potencial completo que describe la dispersión elástica se le llama "potencial óptico".

El tipo de esquema dado en la figura 1 es aplicable también a partículas compuestas. En particular nos interesa la descripción de la dispersión y reacciones nucleares entre partículas compuestas, cuya excitación interna está determinada por los grados de libertad colectivos. El objetivo de este capítulo es incorporar sistemáticamente los grados de libertad colectivos en los mecanismos de interacción directa y a través de núcleo compuesto.

1. Interacción Directa

En años recientes una gran cantidad de datos experimentales han sido acumulados sobre varios tipos de reacciones como dispersión elástica e inelástica y reacciones causadas por partículas nucleares de energía media y baja. Muchos de estos datos han sido correctamente descritos por la aproximación de Born de ondas distorsionadas (D.W.B.A.) (40). En el método DWBA las funciones de onda distorsionadas de las partículas entrante y saliente son generadas usando el potencial óptico que describe la dispersión elástica y el efecto de los canales no-elásticos es tomada en cuenta a través de la parte imaginaria del potencial óptico. Si, sin embargo, uno o más

canales inelásticos están fuertemente acoplados a el canal elástico no es correcto tomarlos en cuenta a través del potencial óptico al calcular la dispersión elástica, ni es adecuado usar el método DWBA para calcular la dispersión a estos canales inelásticos. Esta situación de fuerte acoplamiento surge frecuentemente cuando estados colectivos son excitados. Para tratar estas situaciones se utiliza el formalismo de canales acoplados (7,41) en donde se considera el análisis de dispersión de partículas nucleares por núcleos blanco colectivos. Esto se extiende y aplica en el formalismo que se presenta en esta sección, en donde tanto el proyectil como el núcleo blanco pueden sufrir excitaciones colectivas.

El Hamiltoniano de las interacciones directas está dado

por

$$H = H^{(1)} + H^{(2)} + \frac{p^2}{2\mu} + V(\underline{r}, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}) \quad (1.1)$$

donde $H^{(i)}$, $i = 1, 2$ es el Hamiltoniano colectivo del fragmento i , μ es la masa reducida, \underline{r} la coordenada relativa entre los centros de masa, \underline{p} el momento relativo y $V(\underline{r}, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)})$ la interacción entre los grados de libertad colectivos y el movimiento relativo.

El Hamiltoniano (1.1) está únicamente restringido por las propiedades de invariancia ante rotaciones, inversión en el tiempo y paridad.

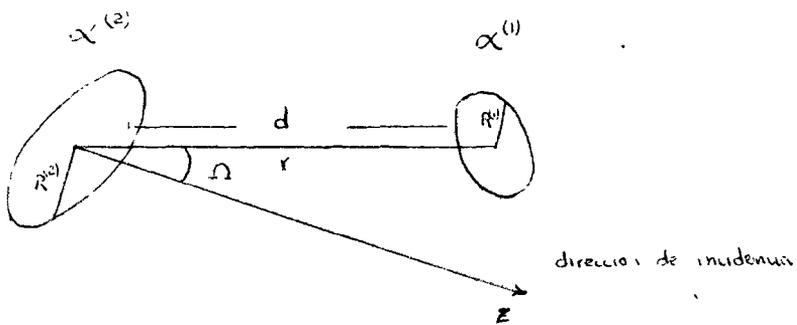
Tomando ésto en cuenta el potencial $V(r, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)})$ se puede desarrollar en serie de potencias de las α 's en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 V(r, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}) &= U(r) + Q_1(r) \sum_m \alpha_m^{(1)} Y_{2m}^*(\theta, \phi) \\
 &+ Q_2(r) \sum_m \alpha_m^{(2)} Y_{2m}^*(\theta, \phi) + \sum_{\ell m} B_\ell(r) [\alpha^{(1)} \times \alpha^{(2)}]_\ell^m Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \\
 &+ \sum_{\ell m} \bar{B}_\ell(r) [\alpha^{(2)} \times \alpha^{(1)}]_\ell^m Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) + \sum_{\ell m} \bar{Q}_\ell(r) \left\{ \right. \\
 &\left. [\alpha^{(1)} \times \alpha^{(2)}]_\ell^m + (-1)^\ell [\alpha^{(2)} \times \alpha^{(1)}]_\ell^m \right\} Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) + \dots
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $U(r)$ representa el potencial óptico promedio y $Q_1(r)$, $Q_2(r)$, $B_\ell(r)$, $\bar{B}_\ell(r)$ y $\bar{Q}_\ell(r)$ la dependencia radial del potencial de acoplamiento.

Una manera conveniente de determinar la parte real de estos potenciales es por el método de Strutinsky ⁴²⁾. Este método ha encontrado una amplia variedad de aplicaciones en cálculos de potenciales de fisión ⁴³⁾ y potenciales de iones pesados ⁴⁴⁾. En éste método, primero uno tiene que calcular el potencial ión-ión con un modelo extendido de la gota de líquido (que no incluye el efecto de capas) y en un segundo paso añadirle las correcciones de capas. Si estamos principalmente interesados en la dispersión

de los núcleos, por ejemplo, núcleos de ^{12}C sobre ^{12}C se puede simplificar el método anterior, usando un modelo extendido de la gota de líquido (45) pero con constantes diferentes. Las constantes del modelo son elegidas de tal manera que las energías de amarre del ^{12}C y ^{24}Mg se reproducen exactamente. Con esto se ha incluido la contribución principal del efecto de capas al potencial para la dispersión de $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$. Un método más simple y más comúnmente usado para determinar la parte real del potencial de transición es suponer que la parte real de potencial ($\text{Re} u(d) \equiv v(d)$) es esencialmente una función de la distancia (d) entre las superficies nucleares a lo largo de la línea que une sus centros como se ilustra en la figura siguiente



De la figura encontramos

$$d = r - R^{(1)}(\pi - \theta, \pi + \phi) - R^{(2)}(\theta, \phi)$$

donde $R^{(i)}$, $i = 1, 2$ define la superficie nuclear del fragmento i (ecuación 1.4 del capítulo II).

Desarrollando la parte real del potencial en serie de Taylor alrededor de $r = R_0^{(1)} = R_0^{(2)}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 V(d) = & V(r) - R_0^{(1)} \frac{dV}{dr} \left(\sum_m \alpha_m^{(1)} Y_{0m}^* + \alpha_{00}^{(1)} \right) \\
 & - R_0^{(2)} \frac{dV}{dr} \left(\sum_m \alpha_m^{(2)} Y_{0m}^* + \alpha_{00}^{(2)} \right) - \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dr^2} \left[R_0^{(1)} \left(\sum_m \alpha_m^{(1)} Y_{0m}^* + \alpha_{00}^{(1)} \right) + R_0^{(2)} \left(\sum_m \alpha_m^{(2)} Y_{0m}^* + \alpha_{00}^{(2)} \right) \right]^2 + \dots \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Comparando (1.3) con (1.2) se encuentra la forma que tienen los potenciales de transición.

A continuación se va a discutir la solución general del Hamiltoniano (1.1) con una interacción de la forma (1.2) restringida a primer orden en las α 's.

Como se mostró en el capítulo anterior el Hamiltoniano cuadrupolar de cada fragmento se puede diagonalizar, obteniendo los estados

$\Phi_{\rho_i L_i M_i}^{(i)}(\alpha_m^{(i)})$, $i = 1, 2$ donde L_i es el espín, M_i es la proyección del espín y ρ_i un índice que numera los distintos estados y los eigenvalores $E_{\rho_i L_i}^{(i)}$.

Es conveniente desarrollar la función de onda en estos estados de tal manera que proponemos como solución

$$\Psi = \sum_{J, M, \rho_{L_1}, \rho_{L_2}, L, \bar{L}} \frac{u_{\tau, L, \bar{L}}^J(\gamma, E)}{r} \left[i^{-L} Y_L(\Omega) \times \left[\phi_{\rho_{L_1}}^{(1)}(\alpha_m^{(1)}) \times \phi_{\rho_{L_2}}^{(2)}(\alpha_m^{(2)}) \right]_{\bar{L}} \right]_{\bar{M}} \quad (1.4)$$

con la notación $\left[\phi_{\rho_{L_1}}^{(1)} \times \phi_{\rho_{L_2}}^{(2)} \right]_{\bar{M}}^{\bar{L}}$ denotando acoplamiento de momentos angulares L_1, L_2 a \bar{L} y proyección \bar{M} y definiendo $\tau = \rho_{L_1}, \rho_{L_2}$.

Introduciendo (1.4) en la ecuación de Schroedinger

$H \bar{\Psi} = E \bar{\Psi}$ se llega a un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas para $u_{\tau, L, \bar{L}}^J(\gamma, E)$, si se multiplica $H \bar{\Psi}$ por

$\left[Y_L \times \left[\phi_{\rho_{L_1}}^{(1)} \times \phi_{\rho_{L_2}}^{(2)} \right]_{\bar{L}} \right]_{\bar{M}}^*$ y se integra sobre las coordenadas intrínsecas y el ángulo sólido Ω asociado con la distancia relativa i.e.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + k_c^2 - \frac{2M}{\hbar^2} u(\gamma) \right] u_{\tau, L, \bar{L}}^J(\gamma, E) =$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2} Q(\gamma) \sum_{\Sigma; L, \bar{L}'} \left\{ \left[Y_L \times \left[\Phi_{\rho_1 L_1}^{(1)}(\alpha_m^{(1)}) \times \Phi_{\rho_2 L_2}^{(2)}(\alpha_m^{(2)}) \right] \right] \right\}_M^{\bar{L}'} \times$$

$$\sum_m (\alpha_m^{(1)} + \alpha_m^{(2)}) Y_{\Sigma m}^*(\Theta, \Phi) \left[Y_{\bar{L}'} \times \left[\Phi_{\rho_1' L_1'}^{(1)}(\alpha_m^{(1)}) \times \Phi_{\rho_2' L_2'}^{(2)}(\alpha_m^{(2)}) \right] \right]_M^{\bar{L}'} \int d\Omega d\alpha^{(1)} d\alpha^{(2)} U_{\tau, \nu, \bar{L}'}^{\Sigma, L, \bar{L}'}(\gamma, E)$$

(1.5)

en donde suponemos por simplicidad que $Q_1(\gamma) = Q_2(\gamma) = Q(\gamma)$ i.e., el potencial $V(\tau, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)})$ es simétrico en las variables colectivas $\alpha_m^{(1)}$, $\alpha_m^{(2)}$ como ocurriría para núcleos idénticos y definimos

$$K_c^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - E_{\rho_1 L_1}^{(1)} - E_{\rho_2 L_2}^{(2)})$$

El paréntesis de llave puede ser reducido, usando teoría de momento angular ³²⁾ a

$$\left\{ \right\} = (-1)^{\bar{L}'+J+L} W(\bar{L}', L', \bar{L}, L; J, 2) \left[(2\bar{L}+1)(2L+1) \right]^{1/2}$$

$$\langle L \| Y_L \| L' \rangle \langle \rho_1 L_1, \rho_2 L_2, \bar{L} \| \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \| \rho_1' L_1', \rho_2' L_2', \bar{L}' \rangle$$

(1.6)

donde $W(\bar{L}', L', \bar{L}, L, J, 2)$ es un coeficiente de Racah y los elementos de matriz reducidos $\langle \rho_1 L_1, \rho_2 L_2, \bar{L} \| \alpha^{(1)} \| \rho_1' L_1', \rho_2' L_2', \bar{L}' \rangle$ pueden ser rápidamente calculados para cada fragmento del conocimiento de los elementos de matriz $\langle \nu' \Lambda' S' L' M' | \alpha_m | \nu \Lambda S L M \rangle$.

Denotando el conjunto de índices τ, L, \bar{L} por p y substituyendo (1.6) en (1.5) se tiene el conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + k_p^2 - \frac{ZM}{h^2} u(r) \right\} u_{pp_c}^J(r, E),$$

$$= \frac{ZM}{h^2} Q(r) \sum_{p'} M_{pp'}^J u_{p'p_c}^J(r, E) \quad (1.7)$$

con el elemento de matriz $M_{p,p'}^J$ definido por la ecuación (1.6)

y en donde se escribió explícitamente la dependencia de la función radial

$u(r, E)$ sobre el canal de entrada $p_c \equiv \tau_0 L_0 \bar{L}_0$.

Para distancias grandes únicamente las fuerzas coulombianas actúan entre los núcleos, y el movimiento relativo está descrito por las funciones de onda coulombianas entrante (I_p) y saliente (O_p) i.e., el comportamiento asintótico de la función radial es el siguiente:

$$u_{pp_c}^J \xrightarrow{r \rightarrow \infty} I_p S_{pp_c} - O_p S_{pp_c}^J \quad (1.8)$$

En la relación anterior

$$I_p \equiv \frac{1}{v_z^{1/2}} e^{-i\eta_L} \left[G_L(\beta_c, k_{c1}) - i F_L(\beta_c, k_{c1}) \right]$$

y

$$O_p \equiv \frac{1}{v_z^{1/2}} e^{i\eta_L} \left[G_L(\beta_c, k_{c1}) + i F_L(\beta_c, k_{c1}) \right]$$

donde F_L y G_L son las funciones de Coulomb regular e irregular respectivamente,

η_L las fases Coulombianas y β_c el parámetro de Sommerfeld ⁽⁷⁾

$$\left(\beta_c \equiv \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2 k_c} \right)$$

. También en (1.8) aparece la matriz

de colisión $S = \parallel S_{pp_0}^J(E) \parallel$, que se determina igualando las so-

luciones de las ecuaciones acopladas a las formas asintóticas.

Conociendo la matriz S , se puede evaluar la sección diferencial del problema, ésta la encontraremos a continuación para el caso de la dispersión de 2 núcleos colectivos idénticos que satisfacen la estadística de Bose.

Por lo tanto la solución (1.4) tiene que ser simétrica ante el intercambio de fragmento 1 con 2, ésto se garantiza reemplazando la parte intrínseca por

$$\Phi_{\epsilon, i\bar{m}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta\rho\rho_c \delta_{L_1 L_2})}} \left\{ \left[\Phi_{\rho, L_1}^{(1)}(\alpha_m^{(1)}) \times \Phi_{\rho, L_2}^{(2)}(\alpha_m^{(2)}) \right]_{\bar{m}}^L + (-1)^L \left[\Phi_{\rho, L_1}^{(2)}(\alpha_m^{(2)}) \times \Phi_{\rho, L_2}^{(1)}(\alpha_m^{(1)}) \right]_{\bar{m}}^L \right\} \quad (1.9)$$

De tal manera que la solución completa asintótica se puede escribir como sigue:

$$\Psi = \sum_{JM\rho} A_{\rho\rho_c}^{JM} \left\{ I_{\rho/\gamma} \delta_{\rho\rho_c} - C_{\rho/\gamma} S_{\rho\rho_c}^J(E) \right\} \left[i^L Y_L \times \Phi_{\epsilon, i\bar{m}} \right]_{\bar{m}}^J \quad (1.10)$$

Las constantes $A_{\rho\rho_c}^{JM}$ se determinan expresando (1.10) en la forma $\Psi = \Psi$ incidente + Ψ dispersada, donde Ψ incidente es una función conocida. La función de onda incidente está constituida por el producto del estado intrínseco de los fragmentos (antes de la colisión) y la función Coulombiana pura i.e.

$$\Psi_{\text{incidente}} = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{i e^{i\pi/2 L_0} e^{i\eta_{L_0}}}{2k_{c_0} (2L_0 + 1)^{-1}} \left[I_{\rho/\gamma} - C_{\rho/\gamma} \right] P_{L_0}(\cos\theta) \Phi_{\rho_{L_1}, L_1, M_{L_1}}^{(1)}(\alpha_m^{(1)}) \Phi_{\rho_{L_2}, L_2, M_{L_2}}^{(2)}(\alpha_m^{(2)}) \quad (1.11)$$

Acoplado, en la ecuación anterior, el espín de los núcleos a un espín interno total \bar{L} y éste a su vez con el momento angular relativo L_0 a un momento angular total J , con proyección M se obtiene

$$\Psi_{\text{incidente}} = \sum_{JM, L_0, \bar{L}_0} \frac{\pi^{1/2} (zL_0+1)^{1/2} i^{L_0+1}}{k_{z_0} r} e^{i\eta_{L_0}} \left[\mathbf{I}_{p_0} - \mathbf{O}_{p_0} \right]^{1/\sqrt{2}} \\ \left[2(1 + \delta_{p_0, p_{10}} \delta_{L_0, L_{20}}) \right]^{1/2} \langle L_{10} M_{10}, L_{20} M_{20} | \bar{L}_0 M \rangle \\ \langle L_0 0, \bar{L}_0 M | JM \rangle \left[Y_{L_0} \times_{L_0} \bar{\Phi}_{z_0, \bar{L}_0} \right]_M^J, \quad (1.12)$$

en donde además se usó la ecuación (1.9).

Comparando esta relación con la solución asintótica, es conveniente sumar y restar el término

$$A_{pp_0}^{JM} \mathbf{O}_{p_0/r} \left[i^{L_0} Y_{L_0} \times_{L_0} \bar{\Phi}_{z_0, \bar{L}_0} \right]_M^J$$

en (1.10) para lograr la identificación del coeficiente $A_{pp_0}^{JM}$.

Así obtenemos que

$$A_{pp_0}^{JM} = \sum_{L_0, \bar{L}_0} \frac{\pi^{1/2} i (zL_0+1)^{1/2}}{k_{z_0}} \left(1 + \delta_{p_0, p_{10}} \delta_{L_0, L_{20}} \right)^{1/2}$$

$$\langle L_{10} M_{10}, L_{20} M_{20} | \bar{L}_0 M \rangle \langle L_0 0, \bar{L}_0 M | JM \rangle \quad (1.13)$$

y la función asintótica toma la forma

$$\Psi = \Psi_{\text{incidente}} +$$

$$A_{PP_0}^{JM} \frac{e^{i\eta_L}}{r} \left[S_{PP_0} - S_{PP_0}^J(E) \right] O_P \left[i^L Y_{L, X} \Phi_{\tau, i} \right]_M^J \quad (1.14)$$

Si en la ecuación anterior tomamos el límite cuando

$r \rightarrow \infty$ y separamos la parte entrante de la saliente obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} = & \frac{1}{\sqrt{2\pi c_0}} \left\{ e^{ik_{z_0} z} \phi_{\beta_0 L_0 M_{10}}^{(1)}(\alpha_m^{(1)}) \phi_{\beta_0 L_0 M_{10}}^{(2)}(\alpha_m^{(2)}) \right. \\ & \left. + e^{-ik_{z_0} z} \phi_{\beta_0 L_0 M_{10}}^{(1)}(\alpha_m^{(1)}) \phi_{\beta_0 L_0 M_{10}}^{(2)}(\alpha_m^{(2)}) \right\} + \Psi_{\text{saliente}}, \quad (1.15) \end{aligned}$$

en donde no se consideró la modificación a la onda plana debida al potencial Coulombiano ya que desaparece en el cálculo de la sección. En (1.15) la parte saliente de la función de onda está dada por

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\text{saliente}} = & \frac{1}{\sqrt{2\psi_{z_0}}} \left\{ f_c(\theta) \phi_{\rho_0 L_1 M_1}^{(1)}(\alpha_m^{(1)}) \phi_{\rho_0 L_2 M_2}^{(2)}(\alpha_m^{(2)}) \right. \\
 & + f_c(\pi - \theta) \phi_{\rho_0 L_1 M_1}^{(1)}(\alpha_m^{(2)}) \phi_{\rho_0 L_2 M_2}^{(2)}(\alpha_m^{(1)}) \left. \right\} \frac{e^{ikc.r}}{r} + \\
 & \sum_{JM \bar{L} \bar{L}_1 \bar{L}_2 \bar{c}} \frac{i\pi \left[(2L_0 + 1) (1 + \delta_{\rho_0 \rho_{z_0}} \delta_{L_1 L_2}) \right]^{1/2}}{k_{z_0} (1 + \delta_{\rho_0 \rho_{z_0}} \delta_{L_1 L_2})^{1/2}} \langle L_1 M_1, L_2 M_2 | \bar{L} M \rangle \\
 & \langle L_0 0, \bar{L} M | JM \rangle e^{2i\eta_L} \left[\delta_{z z_0} \delta_{z \bar{z}_0} \delta_{L L_0} - S_{z \bar{L}_1, z L_1}^J(E) \right] \\
 & \sum_{m, m_1} \langle L m, \bar{L} \bar{M} | JM \rangle \langle L_1 M_1, L_2 M_2 | \bar{L} \bar{M} \rangle \frac{1}{\sqrt{2\psi_{z_0}}} Y_{Lm}(\theta, \phi) \\
 & \left\{ \phi_{\rho_0 L_1 M_1}^{(1)}(\alpha_m^{(1)}) \phi_{\rho_0 L_2 M_2}^{(2)}(\alpha_m^{(2)}) + (-1)^L \phi_{\rho_0 L_1 M_1}^{(1)}(\alpha_m^{(2)}) \phi_{\rho_0 L_2 M_2}^{(2)}(\alpha_m^{(1)}) \right\} \\
 & e^{ikc.r} / r, \tag{1.16}
 \end{aligned}$$

donde $f_c(\theta) = \left(\frac{Z^2 e^2}{2\mu \psi_{z_0}^2} \right)^2 \langle \alpha^+ \theta/2 \rangle$ es la amplitud de dispersión de Rutherford.

Finalmente, por construcción el flujo incidente es uno y para evaluar la sección eficaz diferencial se necesita únicamente obtener el flujo correspondiente a la onda saliente. Como se desea contar el número de partículas en los estados $\rho_1 L_1 M_1$ y $\rho_2 L_2 M_2$ que llegan por unidad de tiempo, y por unidad de ángulo sólido. Se multiplica (1.16) por las funciones de onda internas correspondientes y se integra sobre las coordenadas intrínsecas, dando el resultado

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\substack{\rho_1 L_1 M_1 \\ \rho_2 L_2 M_2}} &= \left| f_c(\theta) \int_{\rho_1 L_1 M_1} \delta_{L_1 L_1} \int_{M_1 M_1} \int_{\rho_1 \rho_1} \right. \\
 &+ \int_{L_2 L_2} \int_{M_2 M_2} + f_c(\pi - \theta) \int_{\rho_1 \rho_1} \int_{L_1 L_1} \int_{M_1 M_1} \int_{\rho_2 \rho_2} \int_{L_2 L_2} \int_{M_2 M_2} + \\
 &\sum_{M L \bar{L}} \frac{1}{k_{z_0}} \left[\pi(2L_0 + 1) \right]^{1/2} \left[\left(1 + \delta_{\rho_1 \rho_1} \delta_{L_0 L_2} \right) \left(1 + \delta_{L_1 L_2} \delta_{\rho_1 \rho_2} \right) \right]^{1/2} e^{2i\eta_L} \\
 &\langle L_1 M_1, L_2 M_2 | \bar{L}_0 M \rangle \langle L_0, \bar{L}_0 M | JM \rangle \langle L M, \bar{L} \bar{M} | JM \rangle \\
 &\langle -M_1, L_2 M_2 | \bar{L} \bar{M} \rangle \left[\delta_{\rho_1 \rho_1} \delta_{L_1 L_0} \delta_{\bar{L} \bar{L}_0} - S_{\rho_1 \rho_2, L_0 L_2}^J(E) \right] Y_{LM}(\hat{n}) \Big|^2. \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

Puesto que usualmente los números cuánticos magnéticos no son medidos se tiene que promediar sobre los estados iniciales y sumar sobre los estados finales

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\substack{f_0, l_0 \rightarrow f, l_1 \\ f_2, l_2 \rightarrow f_2, l_2}} = \frac{\sum_{M_i, M_f, M_i, M_f} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{f_0, l_0, M_i, M_f} \rightarrow f, l_1, M_i, M_f}{(2l_0 + 1)(2l_0 + 1)} \quad (1.18)$$

Resumiendo, dados los potenciales de interacción, se resuelve el conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas ya sea numérica o analíticamente (si es posible) y estas soluciones se igualan a las formas asintóticas para obtener la matriz S y con un procedimiento similar al discutido encontrar la sección eficaz.

Un formalismo análogo, fue desarrollado por Greiner y colaboradores (47,48) para describir los estados conocidos como "moléculas nucleares" (16), fenómeno que parece ocurrir en una gran variedad de reacciones (49) entre iones pesados.

También se han descubierto características particulares de las moléculas nucleares, entre ellas, que se pueden agrupar en una banda rotacional y ⁵⁰⁾ que están correlacionadas con las secciones de fusión y fisión .

Todo esto nos motivó a utilizar una versión simplificada de las interacciones directas para explicar detalladamente el origen de los estados moleculares y su posible agrupación en bandas rotacionales. De tal manera que en la sección 3 del capítulo discutimos la dispersión de $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$, en donde estos fenómenos se manifiestan con mayor claridad.

2. Interacción a través de Núcleo Compuesto

El avance de una amplia variedad de reacciones nucleares ⁵¹⁾ se supone que ocurre en 3 etapas :

- i) La presencia de las partículas incidente y blanco.
- ii) La formación de una sola partícula, el núcleo compuesto, después de la colisión.
- iii) La aparición de 2 ó más partículas como un resultado de la desintegración del sistema compuesto.

La posibilidad de describir la reacción por estas 3 etapas surge como una consecuencia de una vida media relativamente larga de el

núcleo compuesto, comparada con un período típico nuclear. En este caso el estado de equilibrio estadístico es alcanzado entre los nucleones en el sistema compuesto y así pierde la "memoria" de su formación.

La descripción usual de este proceso representa las 3 etapas de la reacción en el espacio de configuraciones de los nucleones que constituyen los núcleos blanco e incidente.

En esta sección se presentará una descripción que no usa el espacio de configuraciones de todos los nucleones presentes, sino el espacio de configuraciones de las partículas interactuantes y de el sistema compuesto. Tomando en cuenta los grados de libertad internos de los fragmentos y del sistema compuesto a través de los grados de libertad cuadrupolares.

Una formulación parecida fue originalmente desarrollada por Moshinsky⁵²⁾ con el propósito de reproducir la mayoría de los resultados de la teoría de reacciones nucleares de Wigner⁵³⁾ en una forma más simple y más intuitiva. En ese caso sin embargo, los fragmentos y el núcleo compuesto fueron considerados como partículas elementales y la interacción se introdujo a través de las condiciones a la frontera.

Por simplicidad se restringe la discusión a el caso en que las partículas salientes son las mismas que las entrantes. En esta situación la función de onda de Fock del estado tiene únicamente 2 componentes:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi(r, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, t) \\ \chi(\alpha_m, t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde $\Psi(r, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, t)$ describe ambos los fragmentos entrantes y salientes y $\chi(\alpha_m, t)$ al sistema compuesto. La extensión a otros canales de reacción puede ser hecho a través de la introducción de más componentes en la función de onda total.

El Hamiltoniano del problema está dado por

$$H = \begin{bmatrix} p^2/2\mu + H^{(1)} + H^{(2)} + V(r, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}) & \int d^3x W(r, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, \alpha_m) \\ \int dr d^3x^{(1)} d^3x^{(2)} W(r, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, \alpha_m) & H_0(\alpha_m, \beta_m) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

donde los elementos diagonales son respectivamente los Hamiltonianos de la fase "2 fragmentos" y de la fase "núcleo compuesto" y $W(r, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, \alpha_m)$ es la interacción entre estas dos fases. El significado operacional de la

ecuación $H\bar{\Psi} = E\bar{\Psi}$ es que $H\bar{\Psi}$ corresponde a una multiplicación de matrices donde los elementos no-diagonales incluyen una integración, la que se entiende como un operador en el mismo sentido de la interacción no-local en la ecuación de Schrodinger estándar i.e.

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi(x) + \int d x' k(x, x') \Psi(x') = i \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

que se reduce a la forma más familiar únicamente para un kernel de interacción local $k(x, x') = v(x) \delta(x - x')$.

Así, se llega al conjunto de ecuaciones integro-diferenciales acopladas para el sistema.

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{p^2}{2\mu} + H^{(1)} + H^{(2)} + V(x, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}) \right] \Psi + \int W^x \chi(\alpha_m, t) d^3 \alpha, \quad (2.3a)$$

$$i \frac{\partial \chi}{\partial t} = H_0 \chi(\alpha_m, t) + \int W(x, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, \alpha_m) \Psi(x, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, t) d^3 r d^3 \alpha^{(1)} d^3 \alpha^{(2)}. \quad (2.3b)$$

Se nota que para $W = 0$ se recupera el caso discutido en la sección anterior de interacción directa en la ecuación (2.3a) y se obtiene una ecuación independiente en (2.3b) que en nuestro caso es justamente la ecuación de las vibraciones cuadrupolares para el núcleo compuesto.

El Hamiltoniano H_c y sus correspondientes eigenfunciones son determinadas en la forma discutida en el capítulo anterior, tomando en cuenta por supuesto que el núcleo compuesto estará generalmente en un estado excitado como sería el caso, por ejemplo, para el sistema $n + U^{235}$ antes de fisionarse. Así se requieren también los estados colectivos asociados con un núcleo compuesto excitado.

Se está ahora en condiciones de discutir las soluciones de las ecuaciones (2.3), pero se hará en una versión simplificada, ya que la teoría de grupos detrás del problema de las excitaciones colectivas (14,15,33) cuadrupolares es bien conocida. La física esencial de la reacción está ya en esta versión, donde en lugar de las α 's en 5 dimensiones se usan α 's de una dimensión para describir los grados de libertad intrínsecos. Los fragmentos y el sistema compuesto son así privados de su espín intrínseco y pueden tener únicamente una interacción en onda S para que se conserve el momento angular. La función de onda independiente del tiempo $\left[\begin{array}{l} \Psi(\beta, \alpha_1, \alpha_2, E) \\ \chi(\alpha, E) \end{array} \right]$ satisface las ecuaciones

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2\mu} + H^{(1)} + H^{(2)} + V(r, \alpha_1, \alpha_2) \right] \Psi(r, \alpha_1, \alpha_2, E) + \int d\alpha W^*(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) \chi(\alpha, E) = E \Psi(r, \alpha_1, \alpha_2, E), \quad (2.4a)$$

$$4\pi \int r^2 dr d\alpha_1 d\alpha_2 W(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) \Psi(r, \alpha_1, \alpha_2, E) + H_0 \chi(\alpha, E) = E \chi(\alpha, E) \quad (2.4b)$$

Si ahora sustituimos en (2.4b) el desarrollo

$$\chi(\alpha, E) = \sum_{n'} a_{n'}(E) \chi_{n'}(\alpha) \quad (2.5)$$

donde $\{ \chi_n(\alpha) \}$ son un conjunto ortonormal de eigenfunciones de

H_0 , i.e. $H_0 \chi_{n'}(\alpha) = E_{n'} \chi_{n'}(\alpha)$, y si

multiplicamos por $\int d\alpha \chi_n^*(\alpha)$ se obtiene

$$a_n(E) = \frac{4\pi}{E - E_n} \int r^2 dr d\alpha_1 d\alpha_2 W_n(r, \alpha_1, \alpha_2) \Psi(r, \alpha_1, \alpha_2, E), \quad (2.6)$$

donde

$$W_n(r, \alpha_1, \alpha_2) = \int d\alpha \chi_n^*(\alpha) W(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha).$$

Introduciendo (2.6) y (2.5) en (2.4a) da

$$\begin{aligned} & \left[\frac{p^2}{2\mu} + H^{(1)} + H^{(2)} + V(r, \alpha_1, \alpha_2) \right] \Psi(r, \alpha_1, \alpha_2, E) \\ & + \int r'^2 dr' d\alpha'_1 d\alpha'_2 K_E(r, \alpha_1, \alpha_2; r', \alpha'_1, \alpha'_2) \Psi(r', \alpha'_1, \alpha'_2, E) \\ & = E \Psi(r, \alpha_1, \alpha_2, E) \end{aligned} \quad (2.7)$$

con

$$K_E(r, \alpha_1, \alpha_2; r', \alpha'_1, \alpha'_2) = \sum_n \frac{4\pi}{E - E_n} W_n^*(r, \alpha_1, \alpha_2) W_n(r', \alpha'_1, \alpha'_2) \quad (2.8)$$

La expresión (2.7) es la ecuación principal del análisis

y es claro que el efecto del núcleo compuesto aparece como una interacción no-local dependiente de la energía, introducida a través del Kernel separable (2.8).

Se propone como solución de (2.7)

$$\Psi(r, \alpha_1, \alpha_2, E) = \sum_{n_1 n_2} \frac{U_{n_1 n_2}(r, E)}{r} \phi_{n_1}^{(1)}(\alpha_1) \phi_{n_2}^{(2)}(\alpha_2),$$

donde

$$H^{(i)} \phi_{n_i}^{(i)}(\alpha_i) = E_{n_i}^{(i)} \phi_{n_i}^{(i)}(\alpha_i) \quad (i=1, 2).$$

Substituyendo en (2.7) y multiplicando por

$$\int d\alpha_1 d\alpha_2 \phi_{n_1}^{(1)*}(\alpha_1) \phi_{n_2}^{(2)*}(\alpha_2) \quad \text{se encuentra:}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} U_{n_1 n_2}(r, E) + k_{n_1 n_2}^2 U_{n_1 n_2}(r, E) - \sum_{n_1' n_2'} V_{n_1 n_2, n_1' n_2'}(r)$$

$$U_{n_1 n_2}(r, E) - \sum_{n_1' n_2'} \frac{W_{n_1 n_2}(r)}{E - E_{n_1' n_2'}} \int dr' W_{n_1 n_2}(r') U_{n_1' n_2'}(r', E) = 0, \quad (2.9)$$

donde

$$k_{n_1 n_2}^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - E_{n_1}^{(1)} - E_{n_2}^{(2)}), \quad (2.10a)$$

$$V_{n_1 n_2, n_1' n_2'}(r) \equiv \frac{2\mu}{\hbar^2} \int d\alpha_1 d\alpha_2 \phi_{n_1}^{(1)*}(\alpha_1) \phi_{n_2}^{(2)*}(\alpha_2) V(r, \alpha_1, \alpha_2) \phi_{n_1'}^{(1)}(\alpha_1) \phi_{n_2'}^{(2)}(\alpha_2) \quad (2.10b)$$

y

$$W_{n_1 n_2}(r) \equiv \sqrt{4\pi} \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int d\alpha_1 d\alpha_2 r W_n(r, \alpha_1, \alpha_2) \phi_{n_1}^{(1)}(\alpha_1) \phi_{n_2}^{(2)}(\alpha_2). \quad (2.10c)$$

En este punto se analiza en detalle la muy simple interacción

delta

$$V(r, \alpha_1, \alpha_2) = \delta(r-a) \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2.11a)$$

y

$$W(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) = \delta(r-a) \mathcal{W}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha) \quad (2.11b)$$

para sacar algunas conclusiones sobre el interés físico de esta formulación.

Denotando el par de índices n_1, n_2 por p se llega

a:

$$\frac{d^2}{dr^2} u_{pp}(r, E) + k_p^2 u_{p\bar{p}}(r, E) = \delta(r-a) \sum_{p'} \left\{ \mathcal{V}_{pp'} + \sum_n \frac{\omega_{np} \omega_{np'}}{E - E_n} \right\} u_{p'p}(r, E), \quad (2.12)$$

donde se ha escrito explícitamente la dependencia de $u(r, E)$ sobre el

canal de entrada $\bar{p} \equiv n_1, n_2$, y donde

$$\mathcal{V}_{n_1 n_2, n_1 n_2} = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int d\alpha_1 d\alpha_2 \phi_{n_1}^{(1)*}(\alpha_1) \phi_{n_2}^{(2)*}(\alpha_2) \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2) \phi_{n_1}^{(1)}(\alpha_1) \phi_{n_2}^{(2)}(\alpha_2) \quad (2.13a)$$

$$\omega_{n_1 n_2} = \sqrt{\pi} a \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int d\alpha d\alpha_1 d\alpha_2 \mathcal{W}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha) \phi_{n_1}^{(1)}(\alpha_1) \phi_{n_2}^{(2)}(\alpha_2) \chi_n^*(\alpha) \quad (2.13b)$$

Se consideran ν canales abiertos y por lo tanto se propone

$$u_{pp}(r, E) = \begin{cases} A_{pp} \sin k_p r \equiv u_{pp}^-(r, E) & r < a \\ \frac{1}{\mathcal{U}_{pp}^{1/2}} e^{-ik_p r} S_{pp} - S_{pp} \frac{e^{ik_p r}}{\mathcal{U}_{pp}^{1/2}} \equiv u_{pp}^+(r, E) & r > a \end{cases} \quad (2.14)$$

$p = 1, 2, 3, \dots, \nu$

y se establecen las condiciones a la frontera en $r = a$

$$u_{pp}^+(a, E) = u_{pp}^-(a, E)$$

$$\left. \frac{d}{dr} u_{pp}^+(r, E) \right|_{r=a} = \left. \frac{d}{dr} u_{pp}^-(r, E) \right|_{r=a} + \sum_{p'} M_{pp'} u_{p'p}^+(a, E)$$

donde

$$M_{pp'} \equiv \mathcal{U}_{pp'} + \sum_n \frac{\omega_{np}^* \omega_{np'}}{E - E_n}$$

De las relaciones anteriores se llega a la matriz S de una

manera directa

$$\| S_{pp} e^{ik_p a} \| = \frac{1 + i \|K^{1/2} T^{-1} K^{1/2}\|}{1 - i \|K^{1/2} T^{-1} K^{1/2}\|} \quad , \quad (2.15)$$

donde

$$T \equiv \left\| k_p \cot k_p a S_{pp'} + e^{ik_p a} M_{pp'} e^{-ik_p a} \right\| \quad (2.16a)$$

y

$$K \equiv \left\| k_p S_{pp'} \right\| \quad (2.16b)$$

La ecuación (2.15) es la relación conocida para la onda s (54) de la matriz de colisión si se identifica T^{-1} con la matriz R

La inversión de T no se puede hacer analíticamente en general por lo que se considerará el caso especial donde $k_p a \ll 1$ y

$E \approx E_{n_c}$ i.e., el límite de longitud de onda grande del problema, en el cual la energía total casi coincide con uno de los niveles de energía del núcleo compuesto. De esta manera se podría obtener una fórmula de 1 nivel.

La ecuación (2.16a) toma entonces la forma más simple

$$T = \left\| \frac{1}{a} S_{pp'} + U_{pp'} + \frac{w_{n,p}^* w_{n,p'}}{E - E_{n_c}} \right\|$$

en notación matricial

$$T = \frac{1}{a} \mathbf{1} + U + \frac{w w^+}{E - E_{n_c}} \quad (2.17)$$

donde $\underline{\omega}$ es un vector columna y $\underline{\omega}^+$ su adjunta. Así $\underline{\omega} \underline{\omega}^+$ es una diádica.

Para invertir (2.17) se va a probar primero el siguiente

teorema:

$$\text{Dada una matriz } \underline{\Upsilon} = \underline{D} + \underline{b} \underline{b}^+ \quad (2.18a)$$

donde \underline{D} es una matriz diagonal $\|d_i \delta_{ij}\|$ y $\underline{b} \underline{b}^+$ es una diádica $\|b_i b_j^+\|$, su inversa está dada por

$$\underline{\Upsilon}^{-1} = \underline{D}^{-1} - \frac{\underline{D}^{-1} \underline{b} \underline{b}^+ \underline{D}^{-1}}{1 + \underline{b}^+ \underline{D}^{-1} \underline{b}} \quad (2.18b)$$

Prueba: Denotando por c el número $\underline{b}^+ \underline{D}^{-1} \underline{b}$,

$$\begin{aligned} \underline{\Upsilon} \underline{\Upsilon}^{-1} &= (\underline{D} + \underline{b} \underline{b}^+) \left(\underline{D}^{-1} - \frac{\underline{D}^{-1} \underline{b} \underline{b}^+ \underline{D}^{-1}}{1+c} \right) \\ &= \underline{1} - \frac{\underline{b} \underline{b}^+ \underline{D}^{-1}}{1+c} + \underline{b} \underline{b}^+ \underline{D}^{-1} - \frac{c \underline{b} \underline{b}^+ \underline{D}^{-1}}{1+c} \\ &= \underline{1} \end{aligned}$$

Ahora, ya que \underline{Q} es una matriz hermiteana se puede definir la matriz unitaria \underline{U} por la relación

$$\underline{U} (\underline{a}^{-1} \underline{1} + \underline{Q}) \underline{U}^+ = \underline{D} = \|d_i \delta_{ij}\|,$$

de tal modo que aplicando esta transformación a la ecuación (2.17) se tiene

$$U \Pi U^{\dagger} = D + \underline{b} \underline{b}^{\dagger} \quad (2.19)$$

donde

$$\underline{b} \equiv \frac{U \underline{\omega}}{\sqrt{E - E_{n_0}}}$$

Finalmente, encontrando el inverso de (2.19) a través de las ecuaciones (2.18) y entonces aplicando la transformación unitaria U^{-1} se obtiene, en forma analítica, la matriz R del problema

$$R = \Pi^{-1} = R_0 + \frac{(R_0 \underline{\omega})(R_0 \underline{\omega})^{\dagger}}{(E_{n_0} - \underline{\omega}^{\dagger} R_0 \underline{\omega}) - E} \quad (2.20a)$$

donde

$$R_0 = \left(\frac{1}{\alpha} \mathbb{1} + \mathcal{U} \right)^{-1} \quad (2.20b)$$

54)

Comparando (2.20a) con la matriz \mathbb{R} de Wigner para

el caso de un sólo nivel de núcleo compuesto y muchos canales rápidamente se

identifica $E_{n_0} - \omega^+ \mathbb{R}_0 \omega$ con la energía de resonancia

del sistema compuesto y $(\mathbb{R}_0 \omega)_{n_0 p}$ con la anchura reducida del

canal p . Es claro que \mathbb{R}_c juega el papel de la matriz \mathbb{R} para

la interacción directa ya que para $V(\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) = 0$ la

ecuación (2.20) da $\mathbb{R} = \mathbb{R}_0$. Por otro lado la matriz \mathbb{R} para la

interacción debida únicamente a el sistema compuesto puede ser obtenida de (2.20)

a través de la condición $\mathcal{G} = 0$. Se tiene entonces

$$\mathbb{R}_c = a \mathbb{1}, \quad \mathbb{R} = a \mathbb{1} + \frac{(a \omega)(a \omega^+)}{(E_{n_0} - a \omega^+ \omega) - E} \quad (2.21)$$

El efecto del potencial $V(\gamma, \alpha_1, \alpha_2)$ de la interacción

directa sobre las resonancias es claramente visto cuando se compara (2.21) con

(2.20). Así se llega a las 2 conclusiones siguientes:

a) Las anchuras reducidas de la interacción, puramente, de núcleo

compuesto $\gamma_{n_0 k} \equiv a \omega_{n_0 k}$ son mezcladas, y dan para el canal

la nueva anchura

$$\bar{\gamma}_{n_0 p} = \sum_{k=1}^J (\mathbb{1} + a \mathcal{G})^{-1}_{pk} \gamma_{n_0 k}$$

b) Hay un desplazamiento de la resonancia de

$$\left(E_{n_0} - u^{-1} \sum_{p=1}^J \chi_{n_0 p}^* \chi_{n_0 p} \right) \approx \left(E_{n_0} - u^{-1} \sum_{p=1}^J \chi_{n_0 p}^* \bar{\chi}_{n_0 p} \right)$$

De estas consideraciones es claro que las expresiones

$$\int d\alpha_1 d\alpha_2 \phi_{m_1}^{(1)*}(\alpha_1) \phi_{m_2}^{(2)}(\alpha_2) V(r, \alpha_1, \alpha_2) \phi_{n_1}^{(1)}(\alpha_1) \phi_{n_2}^{(2)}(\alpha_2) \quad (2.22a)$$

y

$$\int d\alpha d\alpha_1 d\alpha_2 W(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha) \chi_n^*(\alpha) \phi_{n_1}^{(1)}(\alpha_1) \phi_{n_2}^{(2)}(\alpha_2) \quad (2.22b)$$

juegan un papel fundamental en esta teoría. Además, se podría llegar a unas ecuaciones parecidas a (2.20) y (2.21) para el caso completo, en el que aparecerían los elementos de matriz

$$\int d\Omega d^3\alpha^{(1)} d^3\alpha^{(2)} \left[Y^{\lambda}(\Omega) \times \left[\phi_{\rho, L_1}^{(1)}(\alpha^{(1)}) \times \phi_{\rho, L_2}^{(2)}(\alpha^{(2)}) \right]^{[L_1]} \right]^{L_1}$$

$$V(r, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}) \left[Y^{\lambda'}(\Omega) \times \left[\phi_{\rho', L_1}^{(1)}(\alpha^{(1)}) \times \phi_{\rho', L_2}^{(2)}(\alpha^{(2)}) \right]^{[L_1']} \right]^{L_1'}$$

$$\int d\Omega d^3\alpha^{(1)} d^3\alpha^{(2)} d^3\alpha W(r, \alpha_m^{(1)}, \alpha_m^{(2)}, \alpha_m) \chi_{\rho, L, M}^{\lambda} \left[Y^{\lambda} \times \left[\phi_{\rho, L_1}^{(1)} \times \phi_{\rho, L_2}^{(2)} \right]^{[L_1]} \right]^{L_1}$$

Así, un conocimiento de las funciones de onda colectivas junto con una elección apropiada de los potenciales de interacción permite predicciones definidas sobre los parámetros fundamentales asociados con la reacción.

3. Estados Moleculares en la Dispersión de Iones Pesados

En 1960, en los primeros experimentos con aceleradores
17)

tandem, se encontró estructura intermedia en la sección eficaz experimental

de la reacción $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$. Esta estructura fue correlacionada en muchos

otros canales de la reacción confirmando su naturaleza resonante. Desde en-

55,56)

tonces han sido propuestos varios mecanismos de reacción para explicarlas

La estructura intermedia, de un ancho característico de 100 Kev, aparece superpuesta sobre oscilaciones mas amplias del orden de 2-3 Mev. Desde que estos experimentos fueron realizados, un comportamiento parecido ha sido encontrado en

otras reacciones como se puede ver en la figura 2. En ella se observan oscilaciones pronunciadas en el sistema $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$. Algunas de las fluctuaciones son alisadas para $^{12}\text{C} - ^{16}\text{O}$ y desaparecen progresivamente cuando se continúa al sistema $^{16}\text{O} - ^{16}\text{O}$. Las oscilaciones gruesas pueden ser ajustadas con un potencial óptico, pero la estructura intermedia debe surgir de una interacción más compleja.

58)

Un resumen de todas las resonancias reportadas en el sistema $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ aparece en la figura 3, y se ve que hay varias resonancias para un momento angular y paridad (J^π) dados, que pueden ser ajustados aproximadamente por una dependencia en la energía

$$E_J = A J(J+1) + E_0$$
, donde E_0 es la energía de excitación mínima de la estructura rotando, A es inversamente proporcional a su momento de inercia, y J es el momento angular total del estado en cuestión.

La pendiente en la figura 3 implica una $A \approx 100$ kev, justamente el valor que se obtendría para 2 núcleos de carbono, tocándose en la periférica, rotando rígidamente (figura 4). Además puede concluirse de los datos sobre dispersión elástica que el ancho para el decaimiento del sistema compuesto por re-emisión de ^{12}C , i.e. fisión de la molécula, es alrededor de 10% del ancho total, mientras que para emisión de partículas α y emisión de nucleones son alrededor 1% y .1% respectivamente. Toda esta información sugiere fuertemente que el sistema se asemeja a una molécula de dos núcleos

^{12}C .

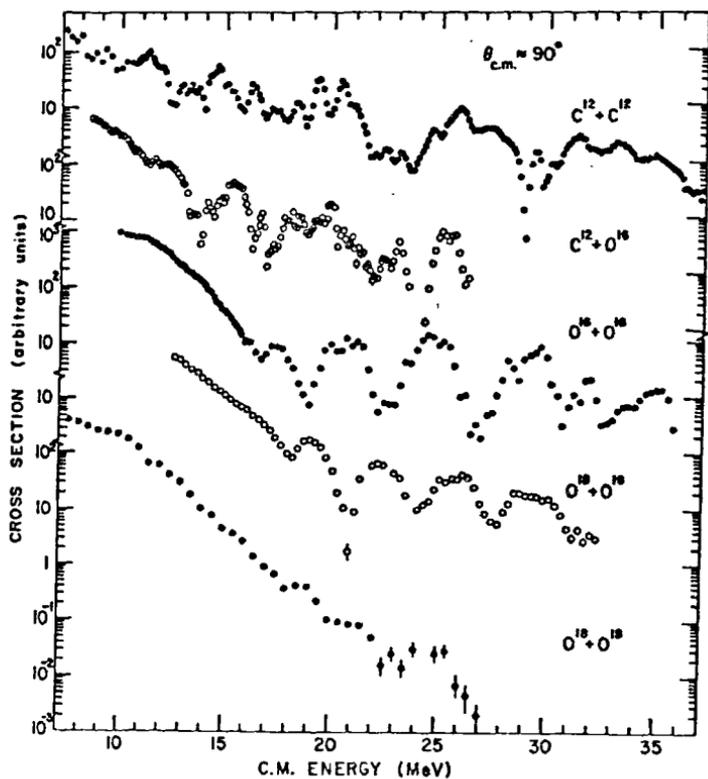


Figura 2.- La sección eficaz diferencial de dispersión a 90° para varios sistemas de iones pesados. (Tomada de la referencia 55).

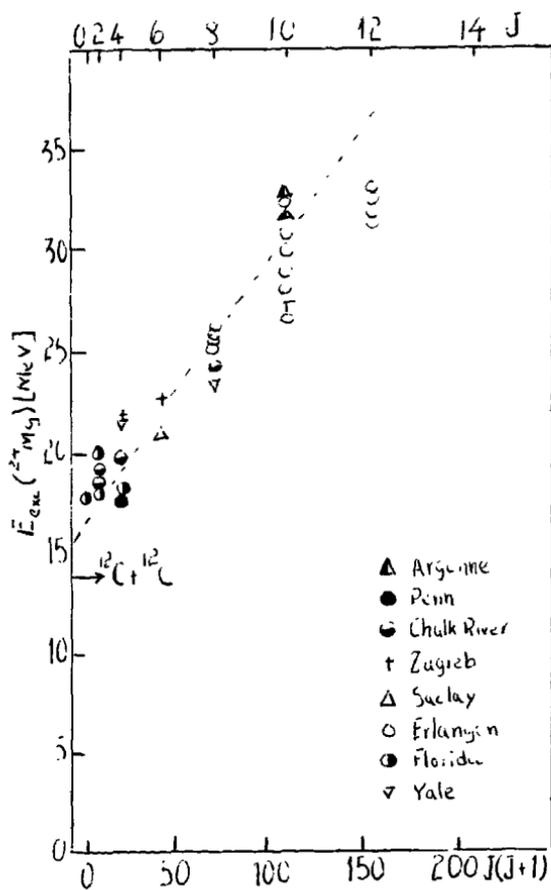
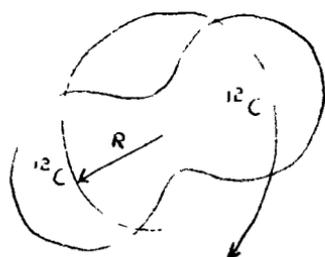


Figura 3.- Resonancias moleculares encontradas en el sistema $^{12}C - ^{12}C$.



$$I = \left(\frac{7}{5} M R^2\right) \cdot 2$$

$$\hbar^2/2I \approx 100 \text{ keV}$$

Figura 4.- Dos núcleos de ^{12}C rotando uno alrededor de otro.

El primero en dar una explicación del origen de la estructura intermedia fue Imanishi ⁵⁹⁾, quien propuso dependencia en la estructura nuclear, i.e., la onda incidente debe estar débilmente acoplada a los estados excitados del sistema, lo que fragmenta las resonancias gruesas (shape resonances) en componentes. Un tratamiento similar fue seguido por Greiner ⁴⁷⁾ y colaboradores quienes propusieron un mecanismo llamado "doble resonancia" para explicar la estructura intermedia que aparece en la sección eficaz experimental.

Sin embargo, los métodos matemáticos involucrados son difíciles de seguir y la aparición de bandas moleculares no es muy clara de su análisis.

El propósito de esta sección es mostrar como estas bandas se ajustan naturalmente en el esquema desarrollado en la primera sección con formas específicas del potencial y al mismo tiempo dar una descripción que puede ser fácilmente entendida en términos de moléculas verdaderas en sus estados base y excitados. Para este fin se propone un potencial de interacción que puede ser resuelto analíticamente y que además puede aproximarse cerradamente a los potenciales usados en la literatura.

Excitación de los Estados Moleculares

La imagen que surge de los trabajos de Imanishi y Greiner es que la colisión puede ser descrita por un potencial efectivo cuya parte real es del tipo mostrado en la figura 5a) y además que con un potencial imaginario del tipo mostrado en la figura 5b) puede describirse el comportamiento de la estructura gruesa experimentalmente observada. La transparencia superficial implicada por la parte imaginaria del potencial tiene mucha importancia para reproducir los datos, y su origen es controvertido. Esta transparencia es crucial a los fenómenos moleculares, ya que únicamente si la región superficial permanece transparente pueden los núcleos interactuantes retener su identidad por un tiempo suficientemente largo para hacer una descripción molecular significativa ⁶⁰⁾. La dinámica propuesta por estos autores puede ser más fácilmente entendida con la ayuda de la figura 6. En los potenciales moleculares ocurren resonancias que pueden ser subdivididas en estados cuasiligados y virtuales. Los estados cuasiligados están localizados dentro del pozo de potencial atractivo y tienen una anchura pequeña cuando no están abiertos muchos canales de decaimiento diferentes de los inelásticos, i.e., efecto túnel en la barrera. Las resonancias virtuales caen energéticamente encima de la barrera del potencial (potencial centrífugo más el potencial Coulombiano) y por lo tanto tienen una anchura de escape grande. En estas

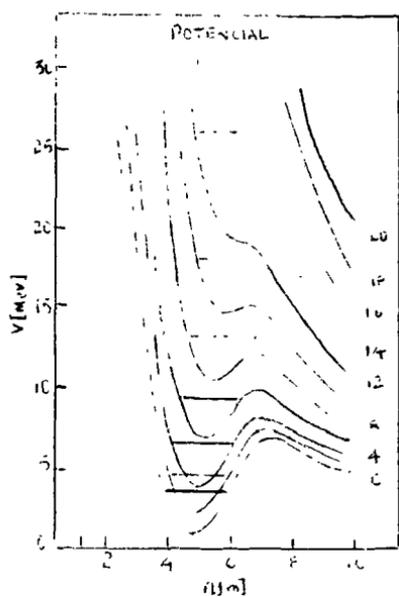


Figura 5a). - Potencial molecular para el sistema $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$.
 Los estados cuasiligados (—) y virtuales (-----)
 son presentados.

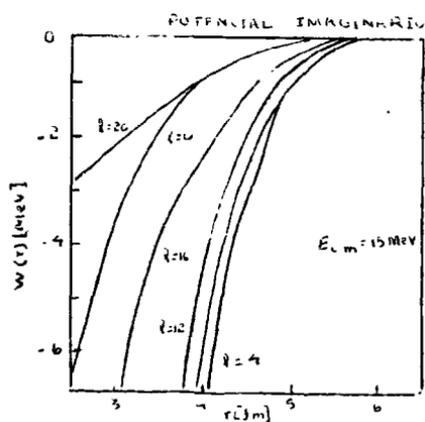


Figura 5b). - El potencial imaginario para $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$
 (figuras tomadas de la referencia 67).

resonancias la probabilidad de encontrar a los núcleos dentro de la parte atractiva del potencial es aumentada sobre las energías no-resonantes. Los estados cuasiligados pueden únicamente ser excitados indirectamente con suficiente intensidad, y esto es logrado de la manera siguiente:

Una onda parcial resonando en el canal elástico (teniendo así suficiente intensidad para inducir procesos inelásticos) puede perder energía y caer en la parte atractiva del potencial. Esto puede únicamente ocurrir, por supuesto, si hay una igualdad en energía y momento angular, i.e., la diferencia en energía entre los estados virtual y cuasiligado del potencial debe ser aproximadamente igual a la energía del estado excitado de los fragmentos, y el momento angular incidente debe estar relacionado a el espín intrínseco más el momento angular orbital del estado molecular excitado, a través de las bien conocidas reglas de acoplamiento.

En el caso del sistema $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$, se hace uso de la naturaleza colectiva ⁶¹⁾ del primer estado excitado (2^+), que está a 4.43 Mev del estado base, para argumentar que los procesos inelásticos deben ser estimulados a través de las excitaciones colectivas de uno o ambos núcleos.

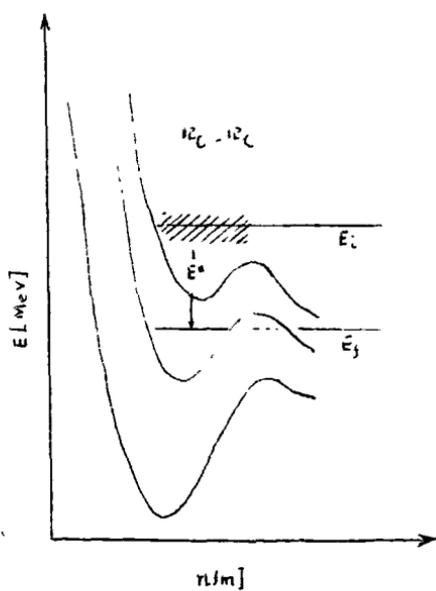


Figura 6.- Mecanismo de excitación de los estados moleculares.

Potenciales de Interacción

Para aplicar el formalismo de las interacciones directas, discutido en la primera sección del capítulo II, a un sistema particular de iones se tiene que seleccionar adecuadamente el potencial de interacción. Del tal análisis, notamos que hay que determinar el potencial óptico promedio $U(r)$ y el potencial de transición $Q(r)$, si consideramos núcleos idénticos y nos restringimos a primer orden en las deformaciones cuadrupolares.

Nosotros proponemos que la parte real del potencial óptico promedio $U(r)$ está dada por

$$V_1(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 + \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{2\mu r^2} + C & r \leq a \\ Z^2 e^2 / r & r > a \end{cases}, \quad (3.1)$$

donde "a" es el radio en el cual empieza a sentirse la interacción nuclear.

El potencial (3.1) para $r \leq a$ es entonces la suma de un potencial de oscilador armónico de frecuencia ω más un potencial centrífugo repulsivo de intensidad Λ , mientras que para $r > a$ es el potencial Coulombiano.

$$C \equiv \frac{2^2 e^2}{a} - \frac{1}{2} \mu \omega^2 a^2 - \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{2\mu a^2}$$
 es una constante definida para garantizar continuidad en $r = a$.

Como se ve comparando las figuras 5a) y 7a), este tiene la forma requerida y tiene además varias ventajas. Primeramente, si nosotros permitimos que $a \rightarrow \infty$ sus eigenvalores pueden ser inmediatamente encontrados en forma cerrada ⁶³⁾, a saber

$$E_{n\ell} = \hbar\omega \left[2n + 1 - \Lambda + \left(\Lambda^2 + \ell(\ell+1) + \frac{1}{4} \right)^{1/2} \right], \quad (3.2)$$

donde n, ℓ son los números cuánticos radial y de momento angular respectivamente. Esta ecuación determina en forma aproximada la localización de los estados resonantes del problema y hacemos notar que para $\Lambda \gg \ell$

$$\Delta E_{n\ell} = E_{n\ell} - E_{n\ell} \approx \frac{\hbar^2}{2\mu r_{\min}^2} \ell(\ell+1), \quad (3.3)$$

donde $r_{\min} = \sqrt{\frac{\hbar \Lambda}{\mu \omega}}$ es el radio asociado con el valor mínimo de el potencial. La ecuación (3.3) nos muestra que los estados de el potencial pueden ser ordenados en bandas rotacionales como se requiere.

Para tomar en cuenta los canales de reacción no considerados explícitamente, el siguiente potencial imaginario es propuesto

$$V_2(r) = i \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\tau}{r^2} - \frac{\tau}{a^2} \right], \quad (3.4)$$

donde τ es un parámetro asociado con su intensidad.

Este potencial imaginario se comporta apropiadamente (ver figuras 5b y 7b) i.e., no interferirá con el potencial de acoplamiento superficial.

Finalmente, como el acoplamiento entre el movimiento relativo y el movimiento colectivo se supone que ocurre principalmente en la superficie de los núcleos, proponemos la interacción delta

$$Q(r) = ba \delta(r-a), \quad (3.5)$$

donde b es la intensidad del acoplamiento.

Este conjunto de potenciales nos permitirá, encontrar una solución analítica del Hamiltoniano (1.1) y con ella exhibir las características principales de los fenómenos involucrados.

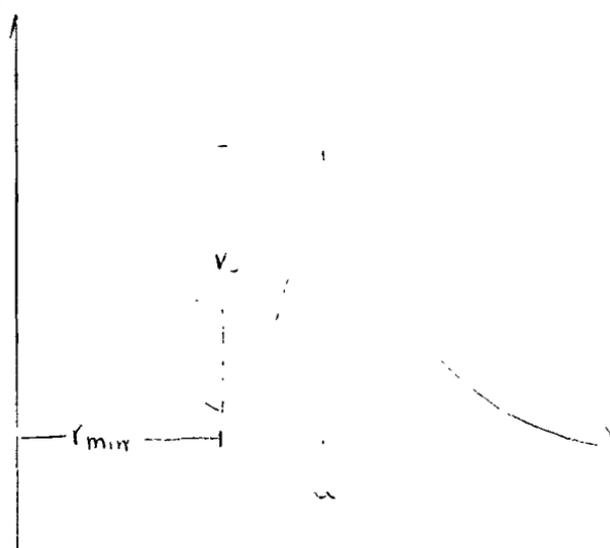


Figura 7a) . - El potencial real utilizado para describir los estados moleculares en el sistema $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$.

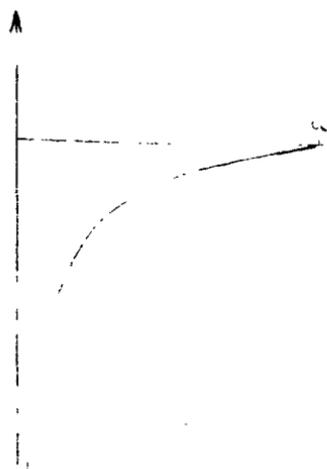


Figura 7b) . - El potencial imaginario propuesto en este trabajo.

Ecuaciones de Movimiento

Para obtener las ecuaciones de movimiento, sustituimos en (1.7) las ecuaciones (3.1), (3.4), (3.5) obteniendo

$$\left\{ \frac{d}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + k_p^2 - \frac{2M}{\hbar^2} (V_+ + V_-) \right\} u_{pp'}^J(r, E) \\ = \frac{2M b a}{\hbar^2} \delta(r-a) \sum_{p'} M_{pp'}^J u_{pp'}^J(r, E), \quad (3.6)$$

con el elemento de matriz $M_{pp'}^J$ definido por la ecuación (1.6).

Este sistema de ecuaciones puede resolverse imponiendo las condiciones de continuidad en $r = a$:

$$u_{pp'}^J{}^+(a, E) = u_{pp'}^J{}^-(a, E) \quad (3.7a)$$

$$\left. \frac{du_{pp'}^J{}^+}{dr} \right|_{r=a} = \left. \frac{du_{pp'}^J{}^-}{dr} \right|_{r=a} + \frac{2M b a}{\hbar^2} \sum_{p'} M_{pp'}^J u_{pp'}^J(a, E), \quad (3.7b)$$

donde $u_{pp_0}^{J-}$, $u_{pp_0}^{J+}$ representan las soluciones interna ($r < a$) y externa ($r > a$) respectivamente.

La solución externa está dada por la ecuación (1.8),

i.e.

$$u_{pp_0}^{J+}(r, E) = I_p S_{pp_0} - O_p S_{pp_0}^{J-} \quad (3.8)$$

Para la región interna la ecuación (3.6) tiene la forma siguiente:

$$\left\{ \frac{d}{dr^2} - \frac{N^2 + l(l+1) - i z^2}{r^2} + k_p^2 - \frac{\mu w^2 r^2}{\hbar^2} - \frac{2\mu c}{\hbar^2} + i \frac{z^2}{a^2} \right\} u_{pp_0}^{J-}(r, E) = 0$$

Esta ecuación puede ser identificada con la ecuación ⁶³⁾ diferencial para las funciones de Whittaker $M_{\lambda, \sigma}(z)$. Por

lo tanto la solución interna está dada por

$$u_{pp_0}^{J-}(r, E) = B_{pp_0}^{J-} \left[\frac{\mu w}{\hbar} r^2 \right]^{-1/4} M_{\lambda, \sigma} \left(\frac{\mu w}{\hbar} r^2 \right), \quad (3.9)$$

donde

$$\lambda_P = \frac{1}{2\hbar\omega} \left[E - E_P + \frac{1}{2} \mu \omega^2 a^2 + \frac{\hbar^2 \Lambda^2}{2\mu a^2} - \frac{e^2 i}{a} - \frac{\hbar^2 \epsilon^2}{2\mu a^2} \right]$$

con $E_P = E_{P, L_1}^{(1)} + E_{P, L_2}^{(2)}$ y

$$\sigma_L = \frac{1}{2} \left[\Lambda^2 - i\epsilon^2 + L(L+1) + \frac{1}{4} \right]^{1/2}.$$

Habiendo calculado las soluciones interna y externa, la determinación de la matriz S a través de las condiciones a la frontera (3.7) es directa.

$$S = [1 - O^{-1} R O']^{-1} [1 - O^{-1} R I' I^{-1} O] I O^{-1}, \quad (3.10)$$

en donde se utilizó notación matricial y las definiciones

$$I \equiv \parallel I_P \delta_{PP'} \parallel, \quad O \equiv \parallel C_P \delta_{PP'} \parallel,$$

$$I' \equiv \parallel \frac{dI_P}{du} \delta_{PP'} \parallel, \quad O' \equiv \parallel \frac{dC_P}{du} \delta_{PP'} \parallel$$

y la matriz

$$R \equiv \parallel \frac{du_{PP'}^+}{du} / u_{PP'}^+ \parallel.$$

Substituyendo (3.10) en la ecuación (1.18) obtenemos la sección eficaz diferencial general para el problema de dispersión de ${}^{\ell}C - {}^{\ell}C$.

Limitando el número de estados posibles del sistema ${}^{\ell}C - {}^{\ell}C$ a momento angular cero y 2 la ecuación (1.17) se simplifica como sigue:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\ell \rightarrow \bar{\ell}} = \left| \left(f_{\ell}(\theta) + f_{\ell}(\pi - \theta) \right) S_{\bar{\ell}0} + \sum_{J, L, \bar{L}} \frac{\ell}{k_{\bar{\ell}}} \left[z^{\pi(z+1)} \right]^{1/2} (1 + S_{\bar{\ell}0})^{1/2} \langle Lm, \bar{L}-m | J_{\ell} \rangle e^{2i\eta_L} \left[S_{LJ} S_{\bar{L}0} - S_{\bar{L}, J_0}^J(E) \right] Y_{Lm}(\Omega) \right|^2 \quad (3.11)$$

donde $f_{\ell}(\theta)$ y η_L denotan la amplitud y desfases Coulombianos respectivamente y $S_{\bar{L}, J_0}^J(E)$ corresponde a la matriz de dispersión.

Así, las cantidades fundamentales del modelo se tienen en forma analítica, por lo que pueden ser rápidamente calculadas una vez que elegimos los parámetros involucrados en forma apropiada. (Apéndice B).

Parámetros del Modelo y Resultados

De las consideraciones de la última sección nosotros podemos ahora enumerar el conjunto de parámetros involucrados y señalar su relación a cantidades experimentales, si hay alguna.

a) Primeramente están los parámetros ω , Λ en la parte real de el potencial central, que se relacionan con Y_{\min} y V_c de la manera siguiente:

$$\Lambda = \left[\frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \right]^{1/2} \frac{a Y_{\min}^2}{a^2 - Y_{\min}^2} \quad (3.12a)$$

y

$$\omega = \left[\frac{2 V_c}{\mu} \right]^{1/2} \frac{a}{a^2 - Y_{\min}^2} \quad (3.12b)$$

De la forma de la ecuación (3.3) es claro que Y_{\min} está directamente relacionada a la pendiente promedio de la banda rotacional que nosotros esperamos fijar. El parámetro V_c puede ser usado para ajustar

el comportamiento promedio de la sección eficaz elástica.

b) La energía de excitación $E_2 - E_0$ es igual a el valor 4.43 Mev de el estado 2^+ , mientras que el radio del ^{12}C , $r = \alpha$ está determinado por la altura experimental de la barrera Coulombiana.

c) La intensidad de el potencial imaginario, τ , está directamente relacionado a la forma en que la sección eficaz elástica disminuye a energías altas y a las anchuras asociadas con las resonancias. La magnitud del potencial de acoplamiento b es, junto con los elementos de matriz reducidos discutidos en d), responsables para la división de las resonancias de forma ("shape resonances").

d) Los elementos de matriz reducidos

$C_{02} = \langle 0 || \alpha || 2 \rangle$, $C_{22} = \langle 2 || \alpha || 2 \rangle$, son proporcionales a la probabilidad de transición $B(E2; 0^+ \rightarrow 2^+)$ y a el momento cuadrupolar de el estado 2^+ respectivamente.

Usando esta información, nosotros hemos escogido el siguiente conjunto de parámetros.

$$V_0 = 11 \text{ Mev} \quad (3.13a)$$

$$r_{\text{min}} = 6 \text{ fm} \quad (3.13b)$$

$$E_2 - E_0 = 443 \text{ Mev} \quad (3.13c)$$

$$a = 7.6 \text{ fm} \quad (3.13d)$$

$$\tau = 2 \quad (3.13e)$$

$$b = 5 \text{ Mev} \quad (3.13f)$$

$$C_{02} = 0.0786 \quad (3.13g)$$

$$C_{22} = 1.21 C_{02} \quad (3.13h)$$

El procedimiento es entonces el siguiente:

1. Se toma la intensidad del potencial de acoplamiento igual a cero,

$b = 0$ y buscamos los estados virtuales y cuasiligados de el potencial, usando los coeficientes de reflexión

$$C.R. \equiv \left| \sum_{J_0, J_0'} (E) \right| \quad (3.14)$$

Los coeficientes de reflexión son claramente proporcionales a el flujo restituído el canal incidente, y toma el valor C.R. = 1 cuando $\tau = 0$, i.e., cuando no hay absorción a otros canales. Para $\tau \neq 0$, los valores mínimos de C.R. corresponden a resonancias, ya que en estas energías hay una mayor amplitud dentro del pozo, dando lugar a una mayor absorción (ver figura 8).

2. Considerando $b \neq 0$, nosotros ahora buscamos las energías correspondientes a los estados moleculares excitados. Esto lo hacemos a través de los coeficientes de transición

$$C_{T1} \equiv \left| S_{|J_2| 2, J_0}^J \right|^2, \quad (3.15a)$$

$$C_{T2} \equiv \left| S_{J_2, J_0}^J \right|^2, \quad (3.15b)$$

$$C_{T3} \equiv \left| S_{J_2 2, J_0}^J \right|^2, \quad (3.15c)$$

que dan una medida de el flujo que pasa a los canales indicados, y que son proporcionales a la sección eficaz inelástica del estado 2^+ ⁶⁴⁾.

Los valores máximos de los coeficientes (3.15) entonces indican las energías en las cuales los estados moleculares excitados son formados.

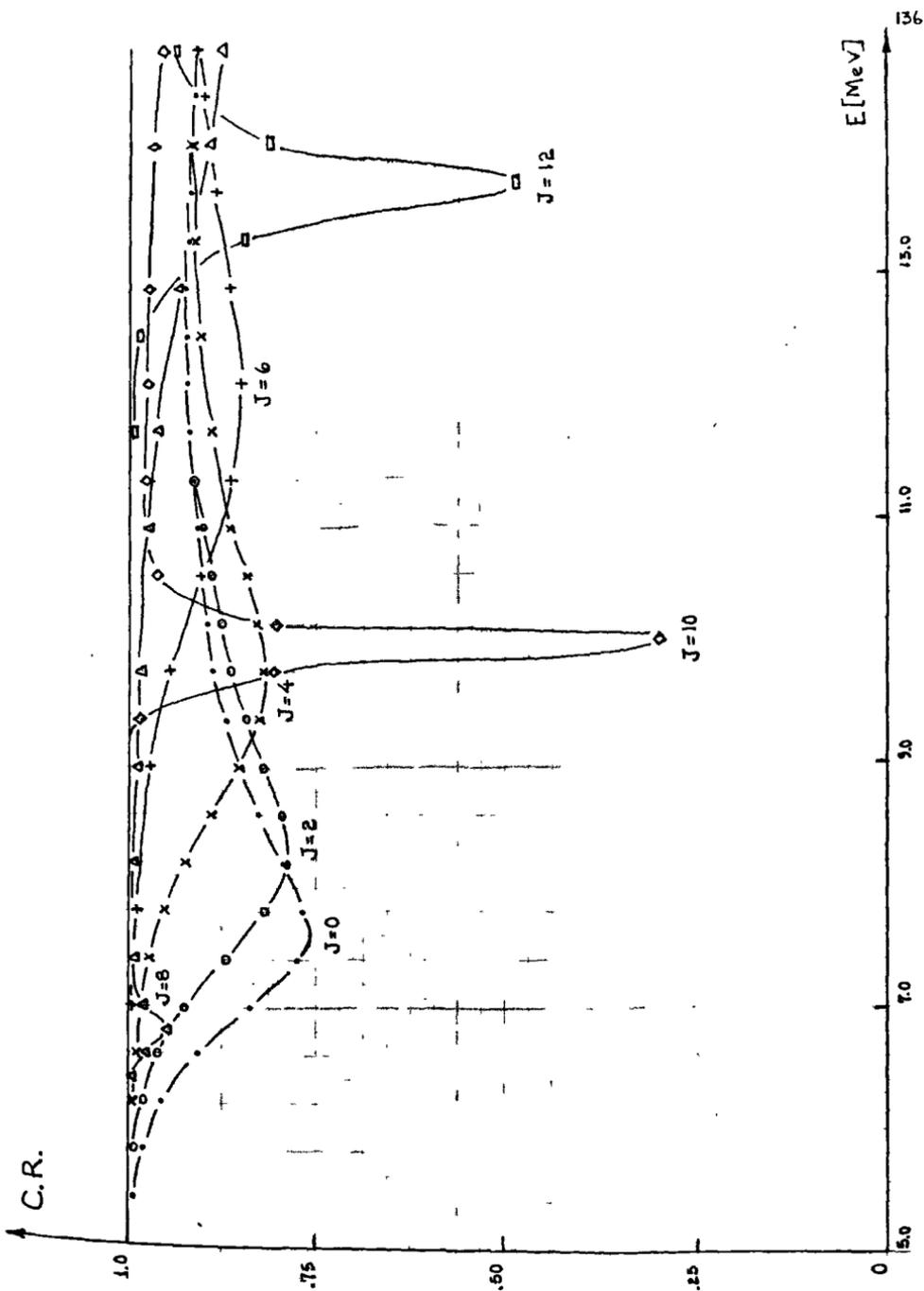


FIGURA 8

Es provechoso analizar las figuras 9a) y 9b), que corresponden respectivamente al conjunto de parámetros (3.13) y al mismo conjunto excepto por el elemento de matriz reducido C_{22} (3.13h) que se tomó cero.

La figura 9a) muestra la aparición de estados resonantes triplemente degenerados, muy aproximadamente 4.43 Mev arriba de los estados del pozo. La pequeña diferencia es debida a la perturbación causada por el potencial de acoplamiento. En la figura 9b) se exhibe la forma en que estos estados son divididos, siendo la división proporcional a el producto bC_{22} que aparece en la ecuación (3.6).

En la tabla 1 recopilamos los resultados encontrados a través de los coeficientes de reflexión y transición. Comparando la posición de las resonancias de ancho intermedio con los datos experimentales disponibles.

Estos resultados tienen una simple interpretación, que vamos a discutir a continuación. En la figura 10 hemos dibujado la posición de las diferentes resonancias de ancho intermedio de la figura 9a), junto con la posición de los estados del pozo en una gráfica de la energía contra $J(J+1)$, donde J es el momento angular total. Estas bandas son identificadas con las bandas moleculares elástica y excitada

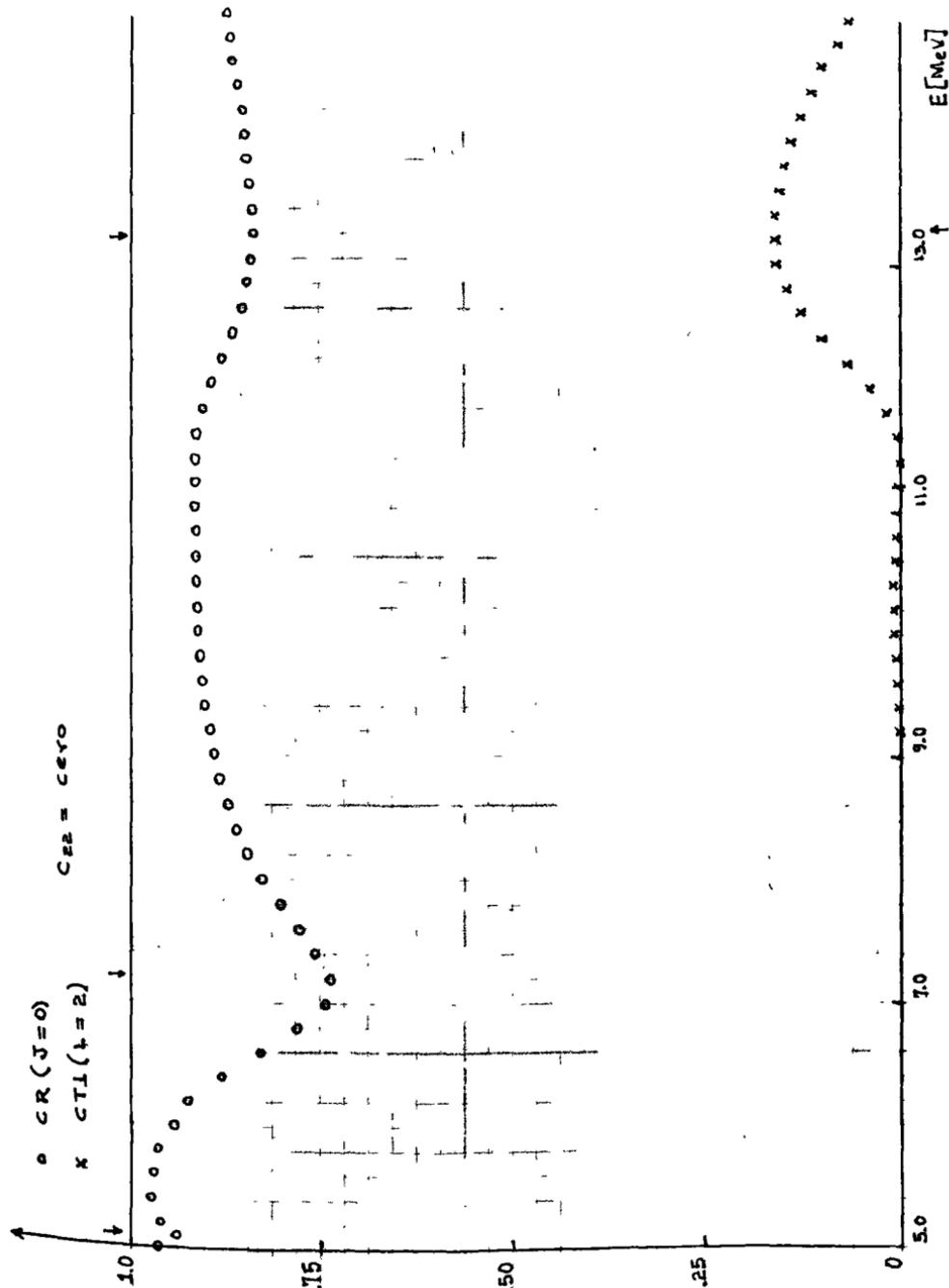


FIGURA 9a

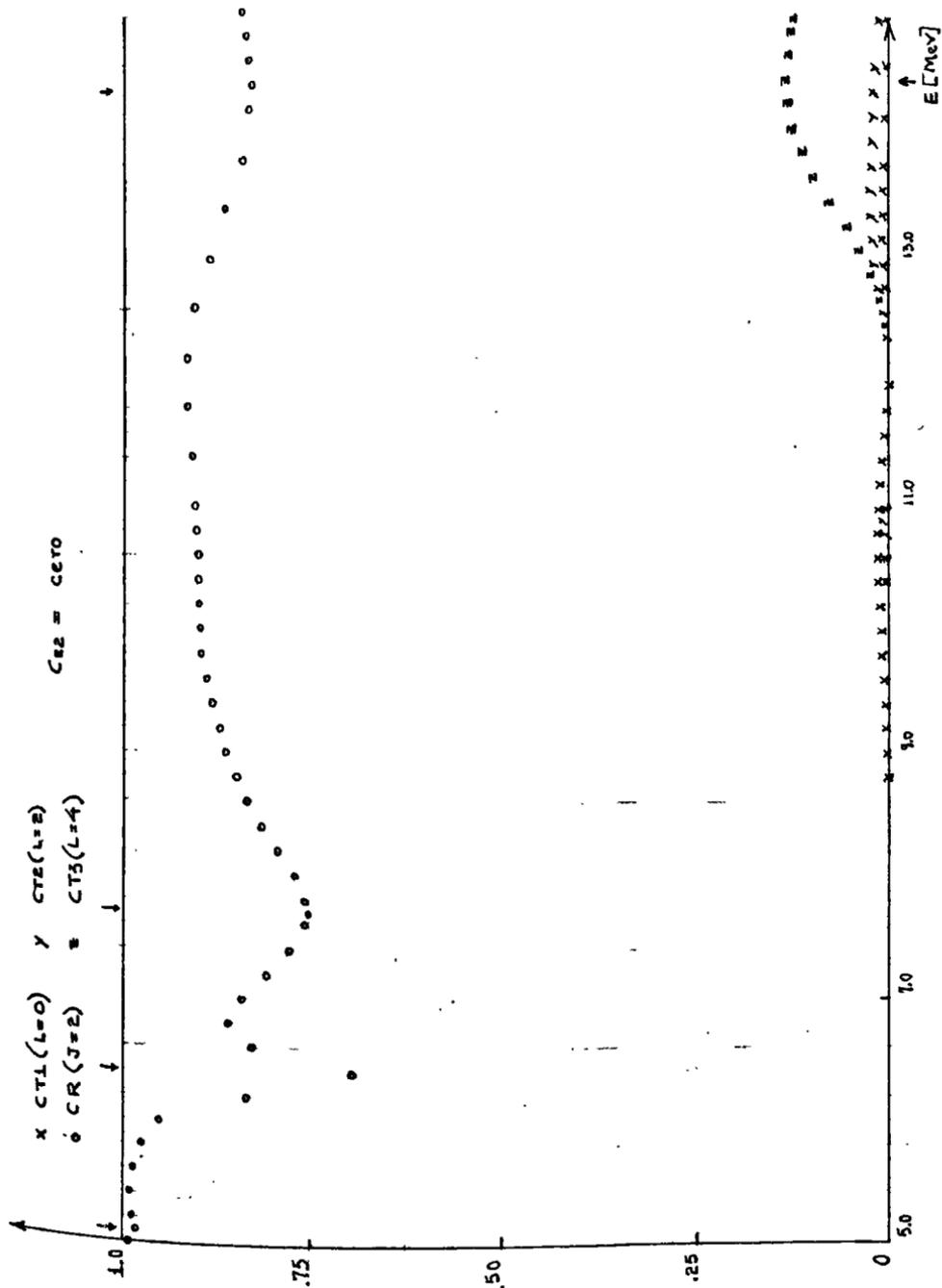


FIGURA 9a

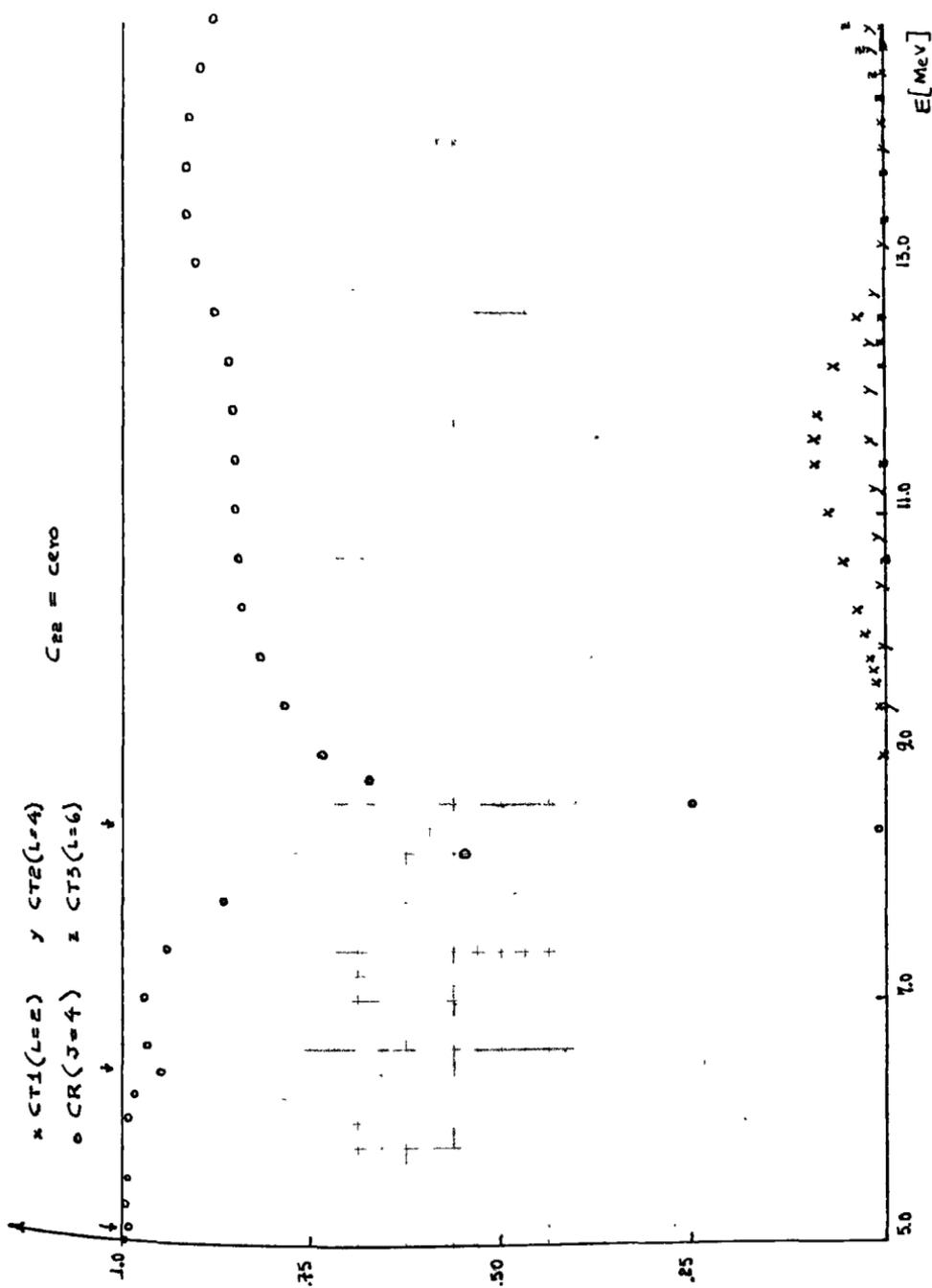


FIGURA 9a

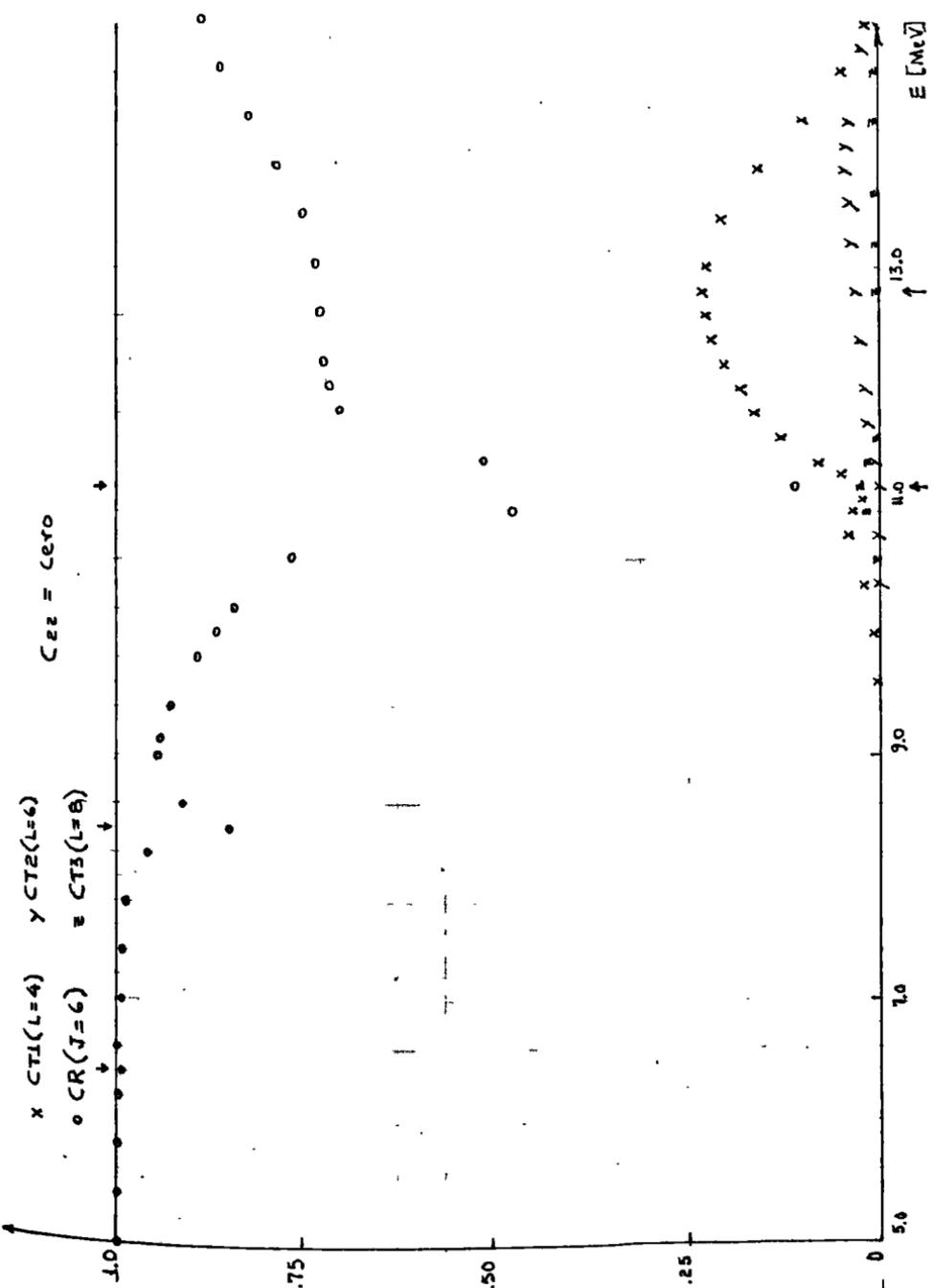


FIGURA 9a

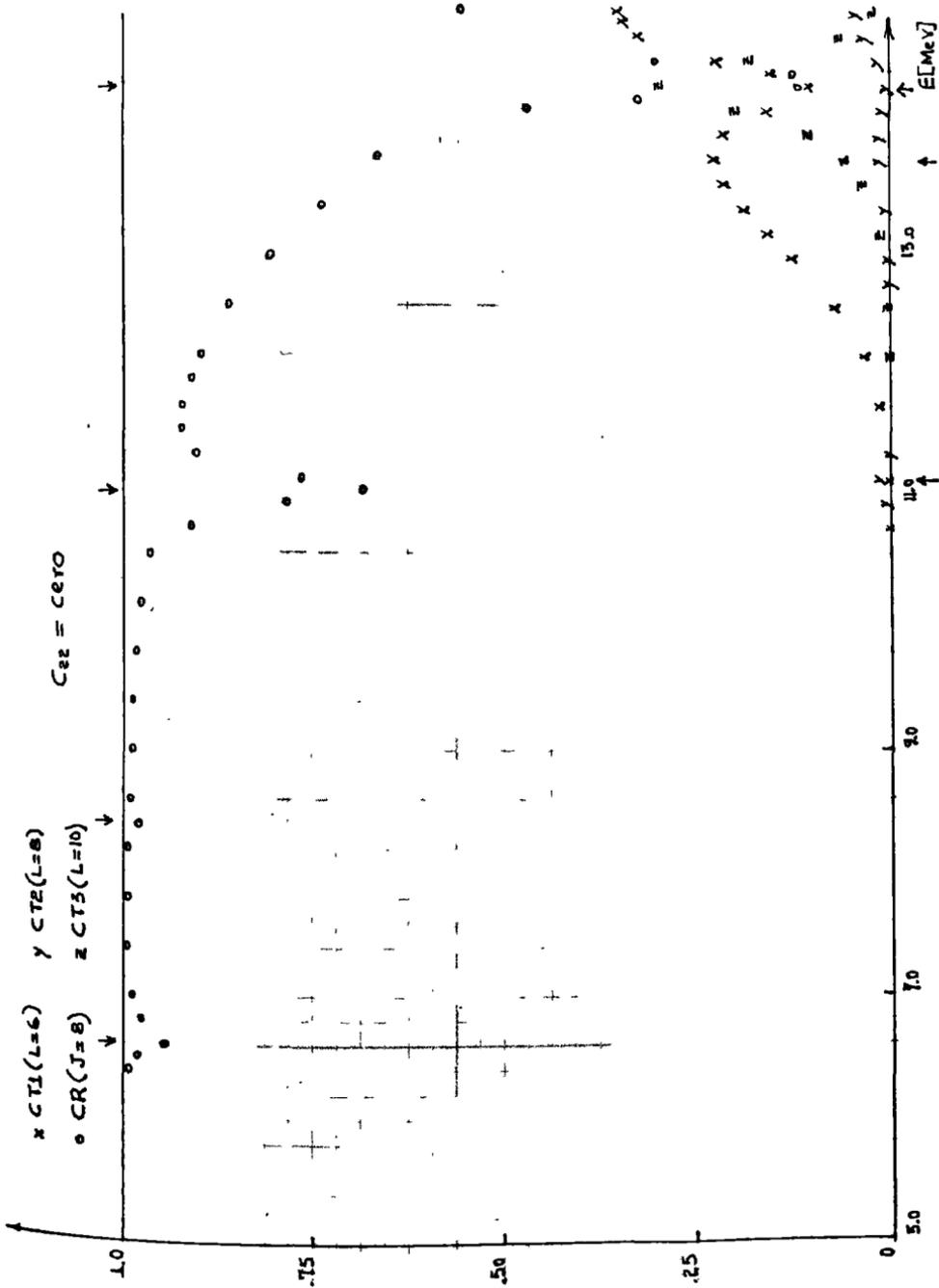


FIGURA 9a

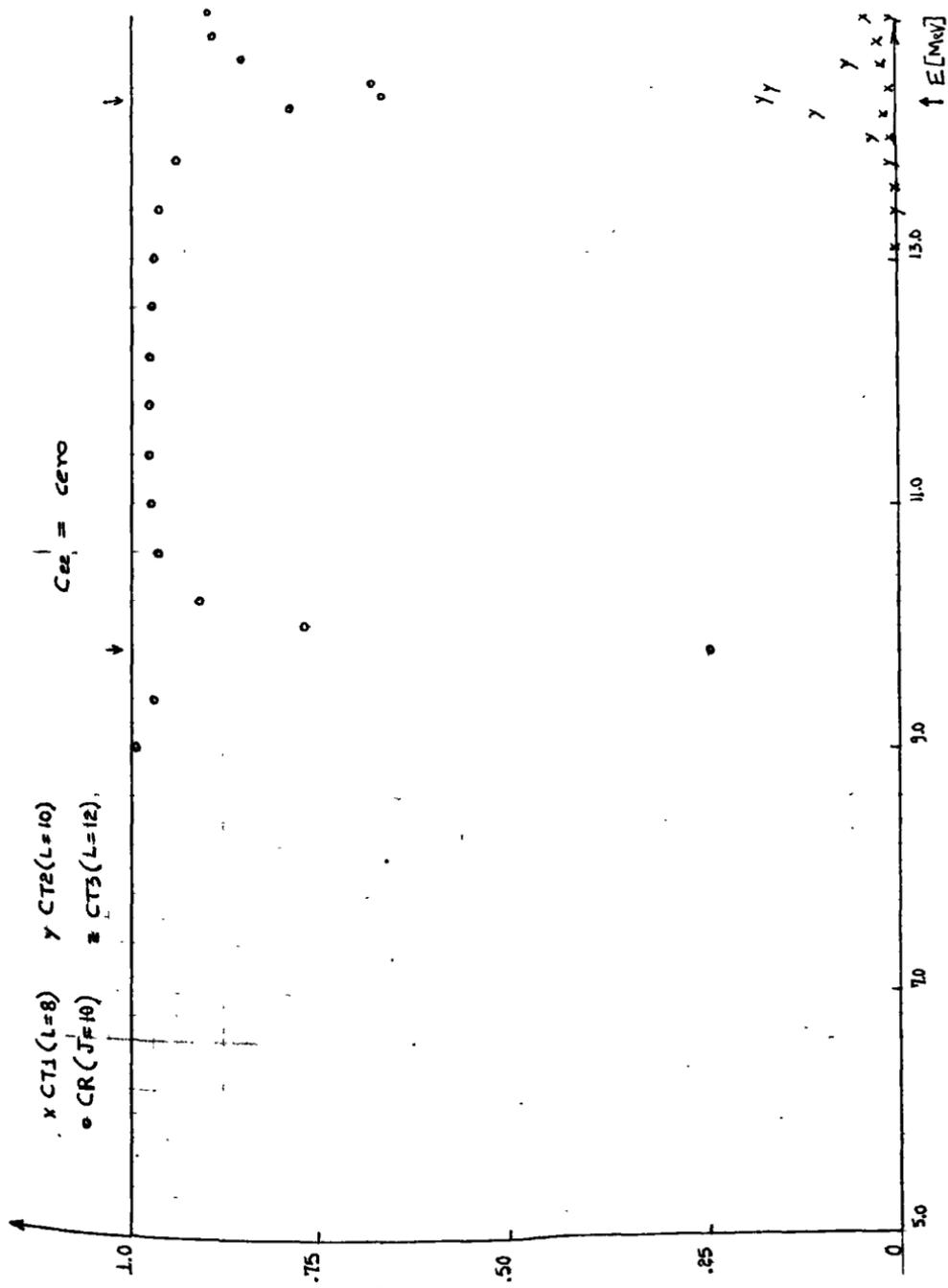


FIGURA 9a

FIGURA 9b

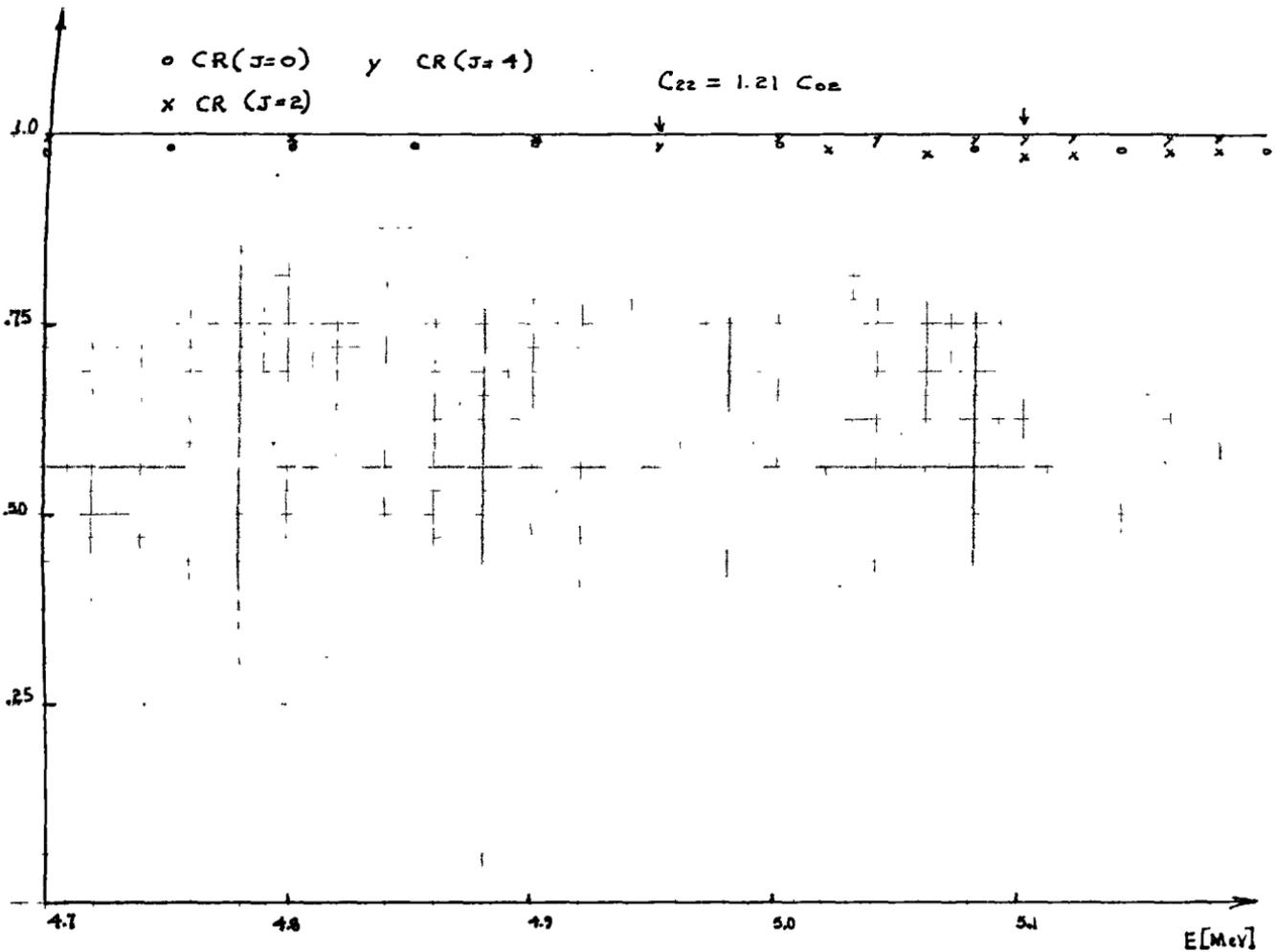


FIGURA 9b

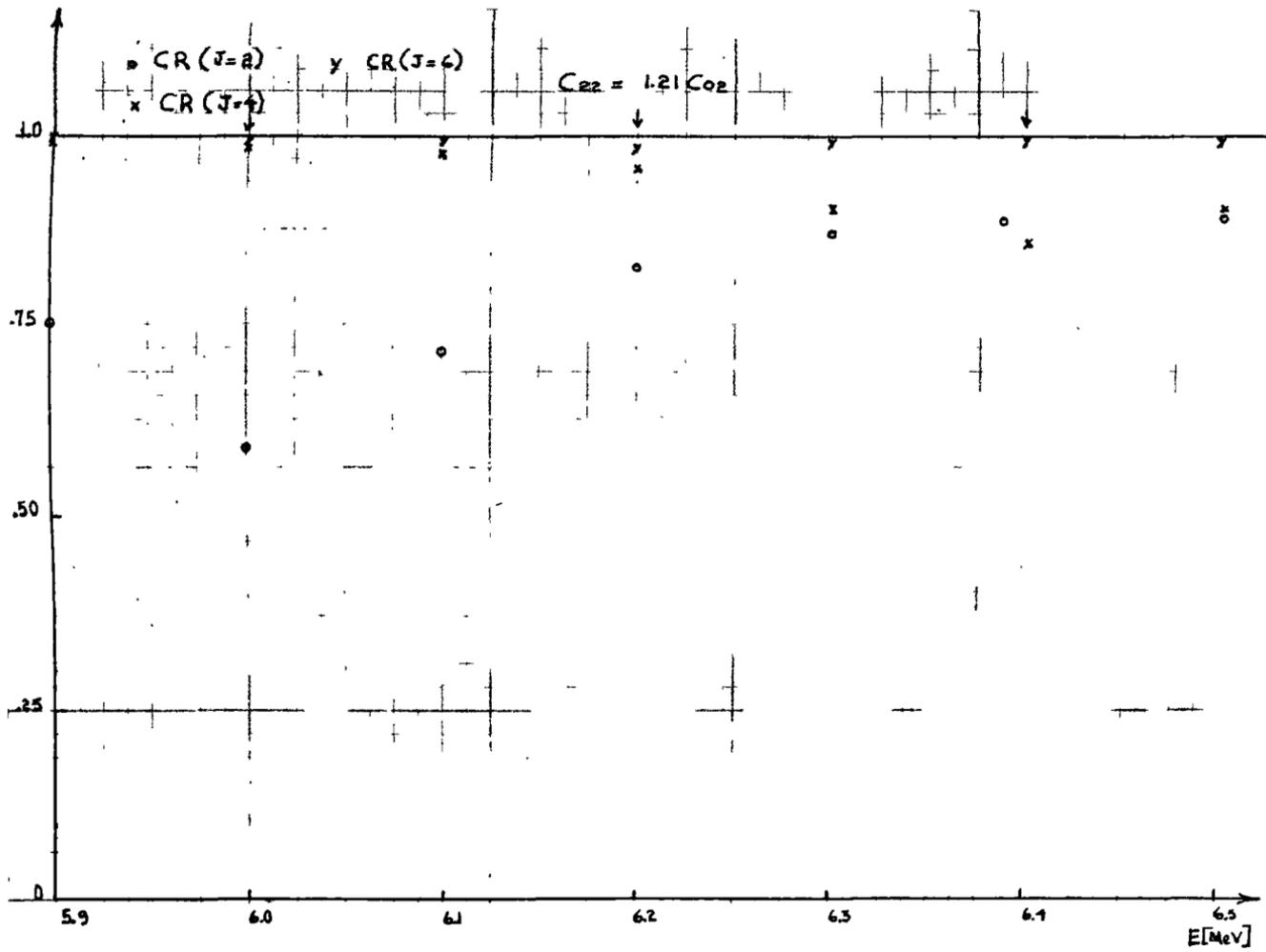


FIGURA 9b

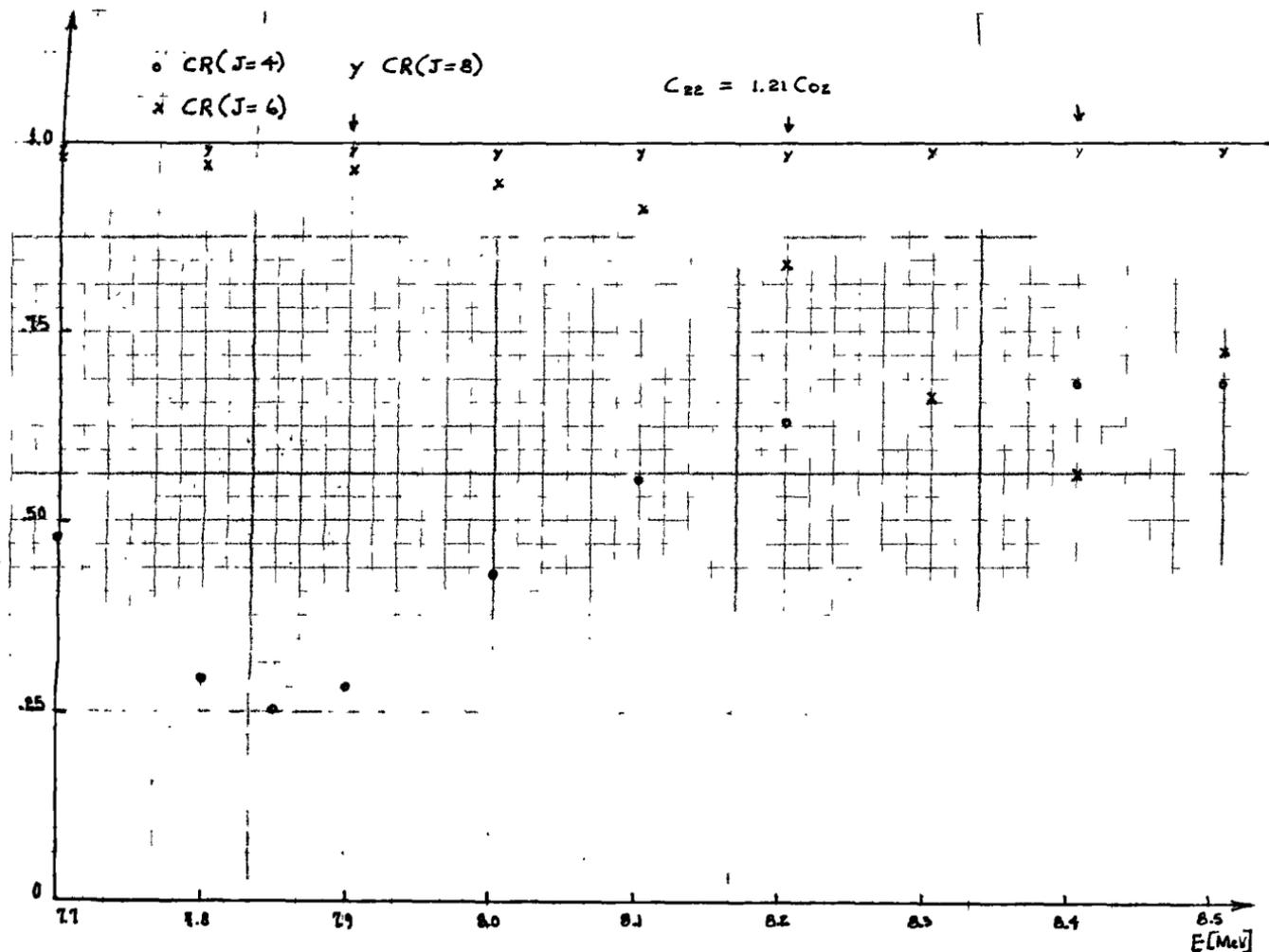


FIGURA 9b

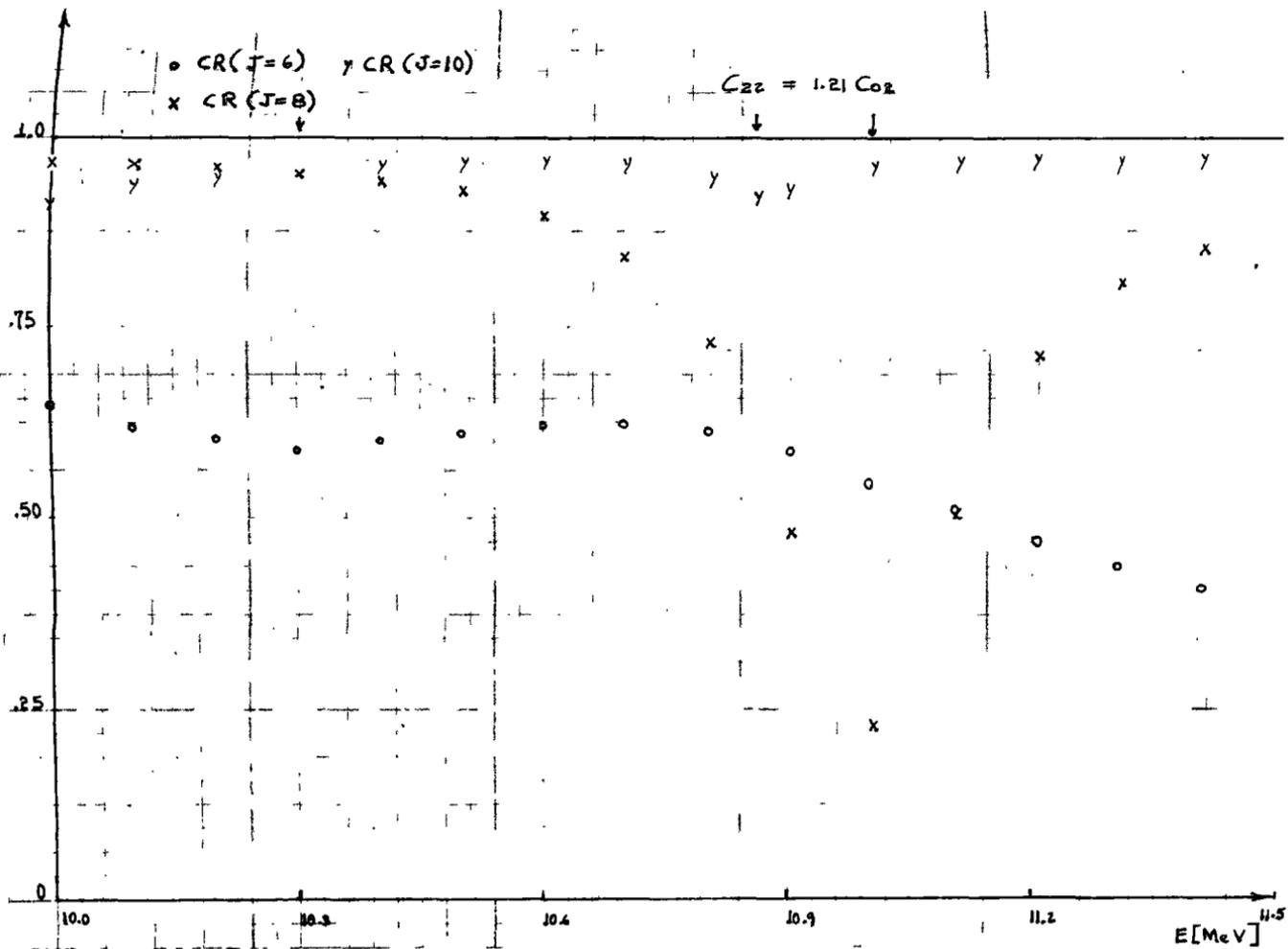


FIGURA 9b

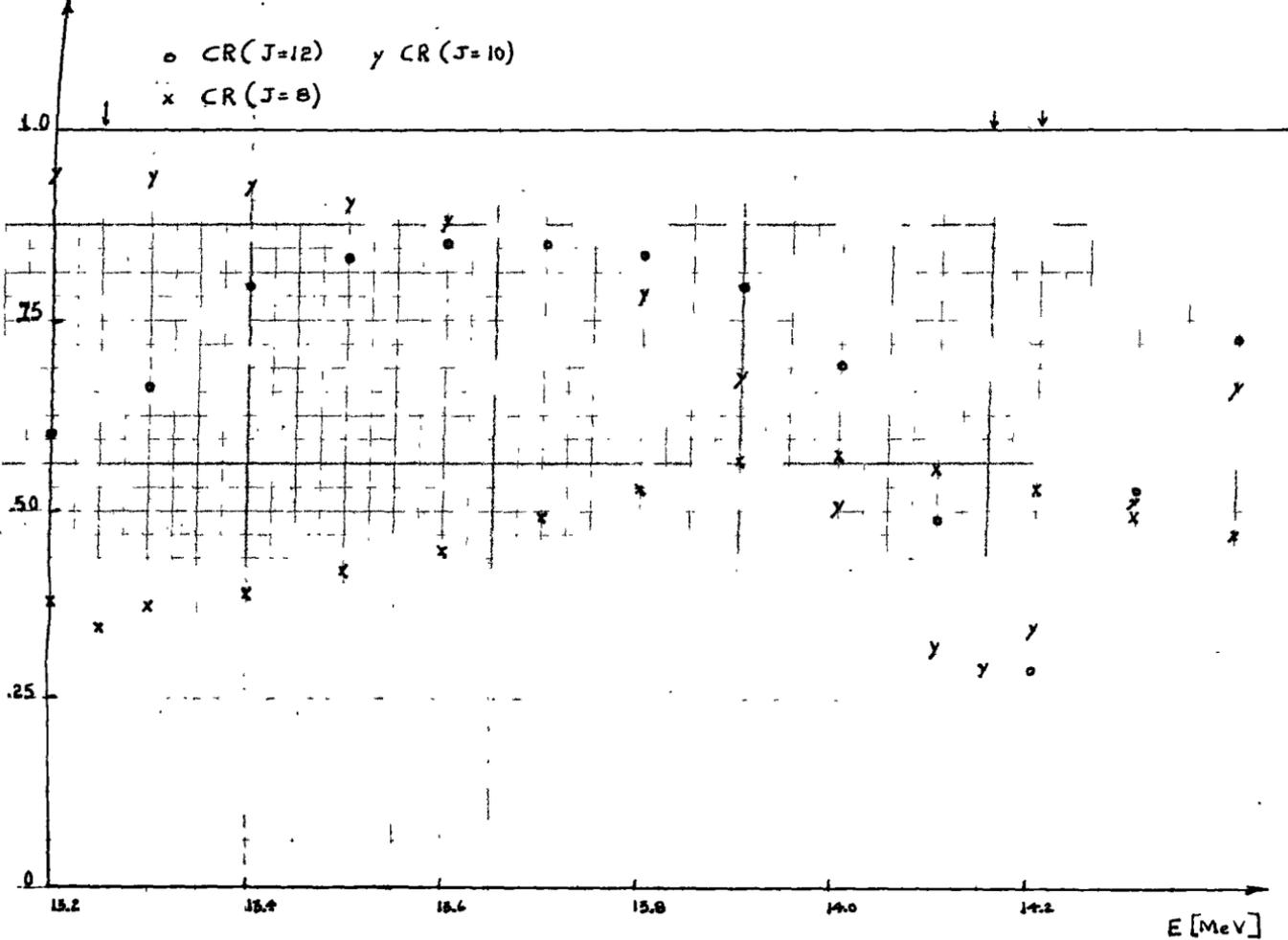


TABLA 1
RESONANCIAS

| Experimentales | | Sin Acoplamiento E (J) | Con Acoplamiento E(J) | |
|----------------|----------|---------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| Eres | MeV Jres | | C | C = 1.21 C |
| 4.03 | | | 4.5(2) | 4.4(2) |
| 4.22 | 4 | | | |
| 4.25 | 0 | | | |
| 4.44 | 4 (2) | | | |
| 4.58 | 2 | | | |
| 4.86 | 4, 2 | | | 4.70(0) |
| 4.98 | 2 | | | 4.95(4) |
| 5.23 | | | 5.1(0,2,4) | 5.10(2) |
| 5.62 | 2 | | | |
| 5.98 | 4 | | | |
| 6.28 | (0),2 | 6.8(8) | 6,4(2,4,6) | 6.00(2) 6.20(6) |
| 7.50 | 6 | 7.6(0) | | 6.40(4) |
| 7.71 | 4 | | | |
| 8.45 | 6 | 8.2(2) | 8.4(4,6,8) | 7.85(4) 8.20(8) 8.40(6) |
| 8.85 | 8 | | | |
| 9.25 | | 9.8(4) | | |
| 9.84 | 8 | | | |
| 11.2 | 8 | 10.0(10) | 11.1(6,8,10) | 10.30(6) |

respectivamente, y las flechas indican los estados del pozo que están siendo alimentados a través de el potencial de acoplamiento. Las bandas correspondientes asociadas a la figura 9b) aparecen en la figura 11. Claramente la diferencia proviene de la interacción extra permitida por C_{22} , que es proporcional a el momento cuadrupolar estático de el estado 2^+ en los núcleos ^{12}C . Este a su vez da una medida de la distribución de carga del núcleo en ese estado.

Puesto que el momento cuadrupolar de el estado base es cero, tendrá una interacción restringida por las consideraciones de simetría esférica de la distribución de carga. Proponer $C_{22} = 0$, i.e. una distribución de carga esférica en los estados excitados 2^+ nos conduce a el mismo tipo de limitación en la interacción para la configuración molecular excitada, y así a niveles degenerados. Por otro lado esta asimetría en la distribución de carga puede dar lugar a interacciones dependientes de el momento angular, tal como la interacción de "engranaje" ⁽⁶⁵⁾ sugerida por Bromley. Nosotros entonces podemos imaginar los estados moleculares excitados como configuraciones en forma de mancuerna con un momento de inercia efectivo debido a la asimetría en la distribución de carga.

En la figura 12a) mostramos el ajuste a la estructura gruesa de la sección diferencial elástica a 90° del $^{12}C - ^{12}C$, y en la figura 12b) una amplificación mostrando el aspecto de la estructura intermedia de el comportamiento esperado.

| Experimentales | | | Sin Acoplamiento E(J) | Con Acoplamiento | |
|----------------|-----|------|--------------------------|------------------|-----------------------|
| Eres | MeV | Jres | | E(J) | C = 1.21 C |
| 11.43 | | 8 | | | 10.83(10) 11.00(8) |
| 11.78 | | 8 | | | |
| 12.0 | | 8 | | | |
| 12.35 | | 8 | 12.26(6) | | |
| 12.86 | | 8 | | | |
| 13.35 | | 10 | 13.8(12) | | 13.25(8) |
| 13.8 | | 10 | | | |
| 13.85 | | 10 | | | 14.15(10) |
| | | | | | 14.3(8,10,12) |
| | | | 15.6(8) | | 14.20(12) |

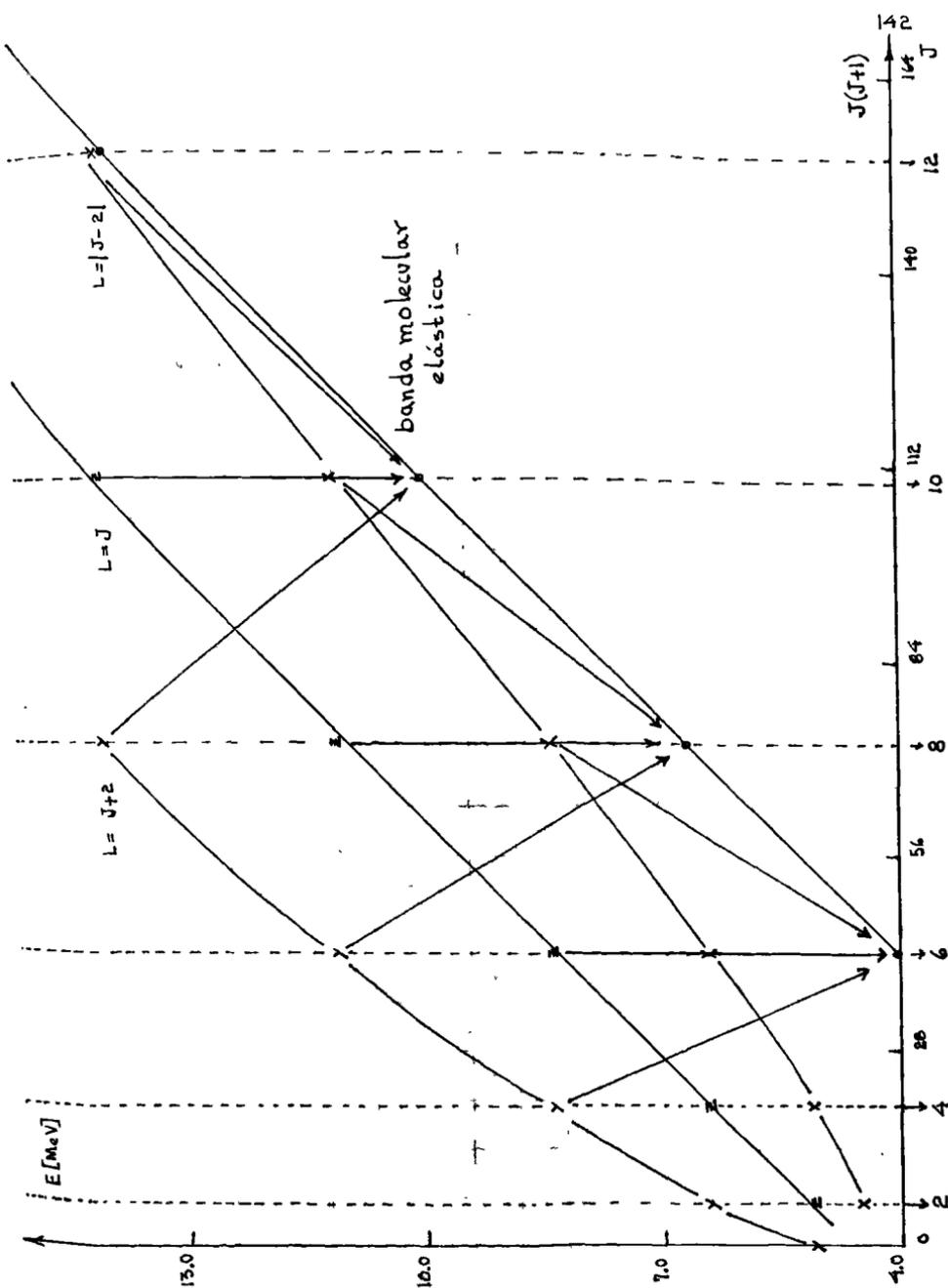


FIGURA 10

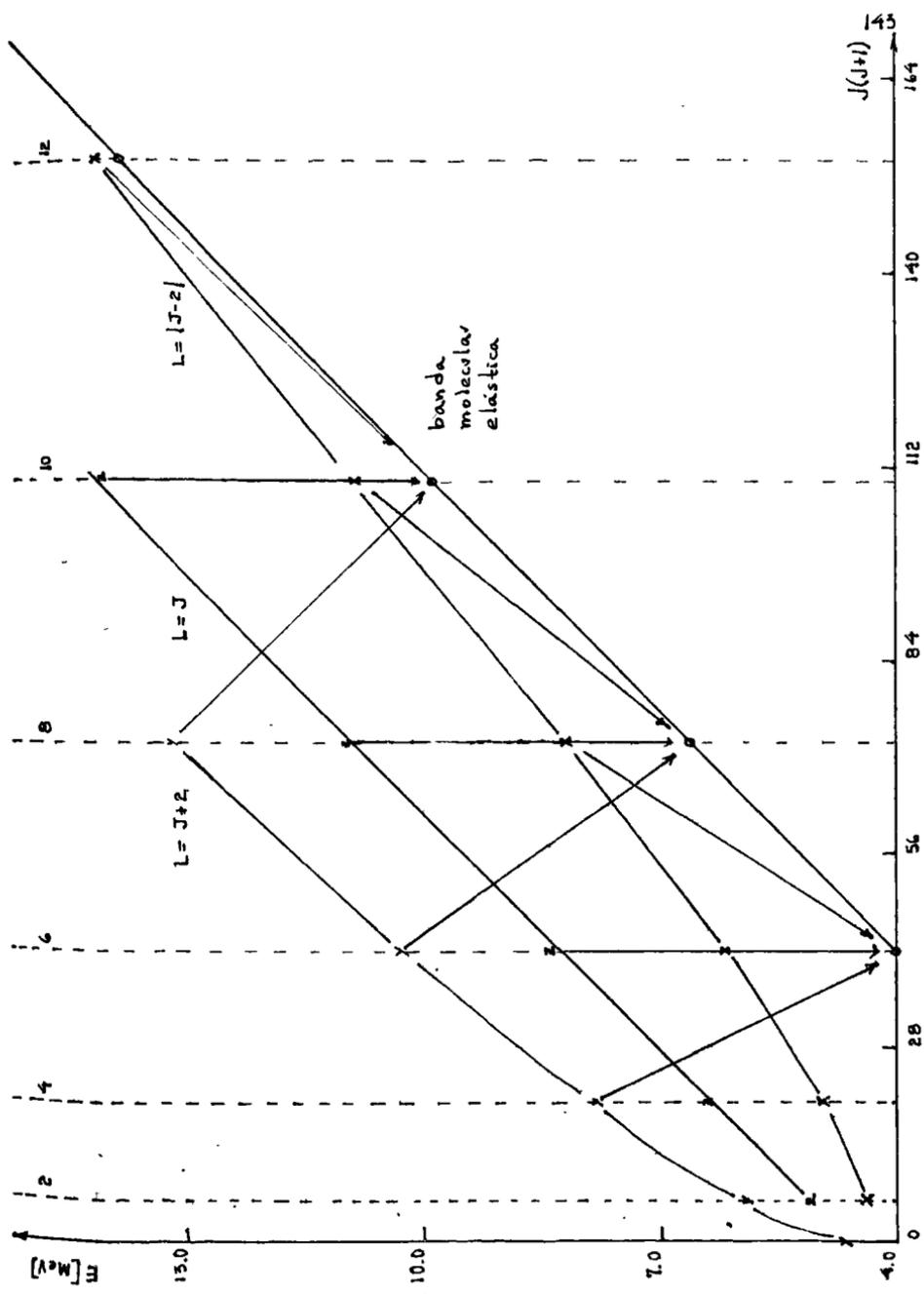


FIGURA 11

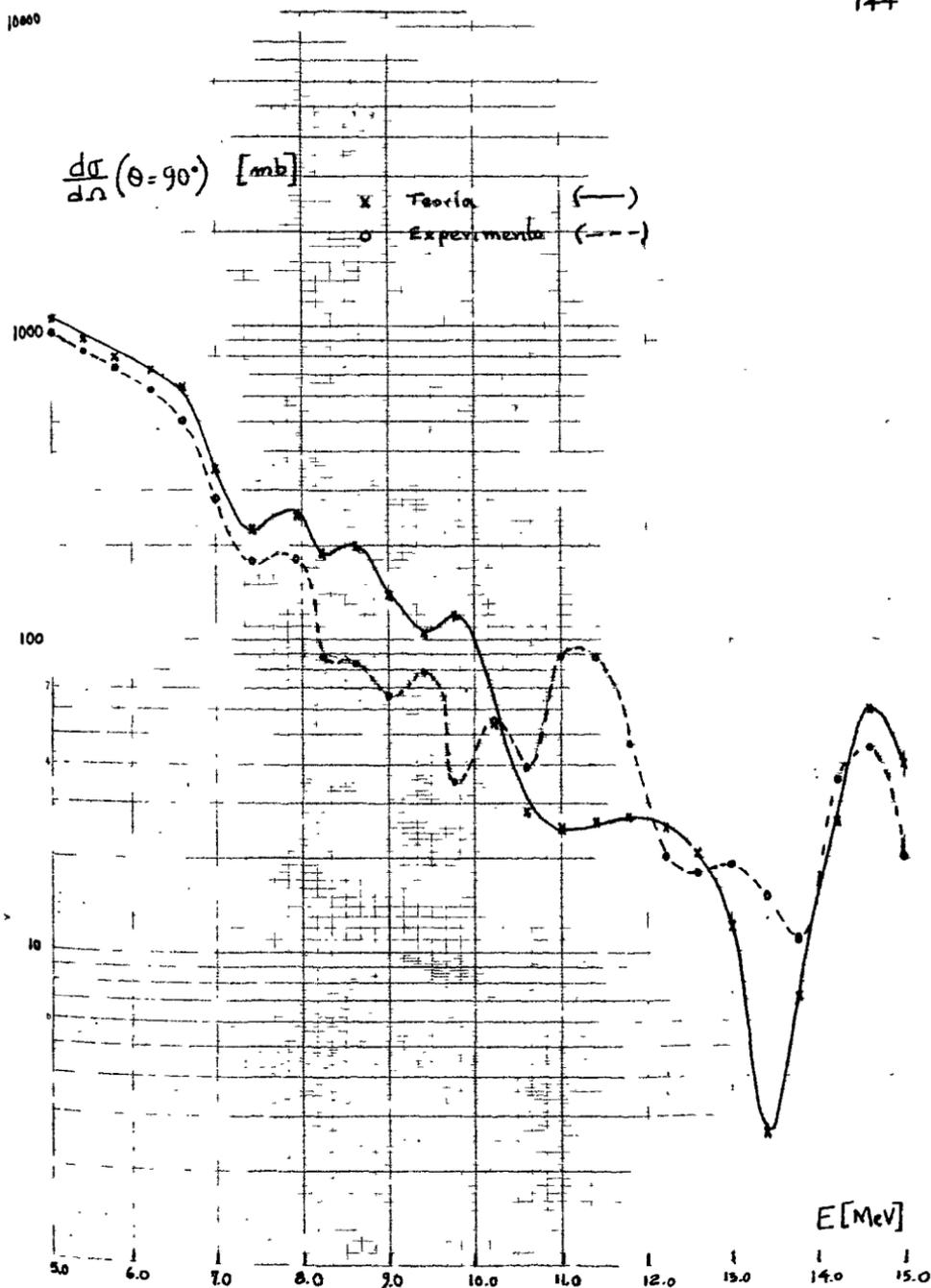


FIGURA 12a

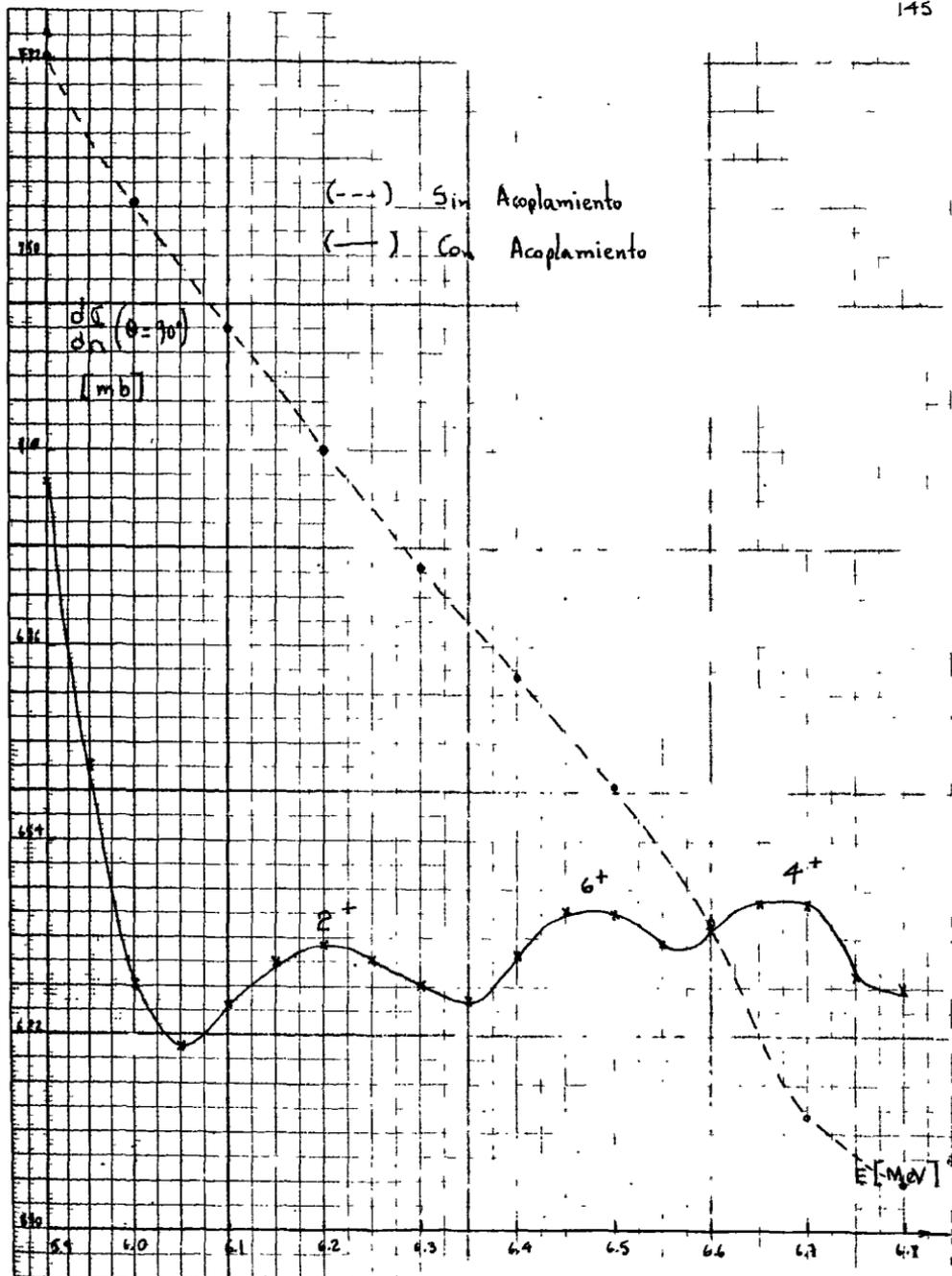


FIGURA 12b

IV CONCLUSIONES

En este trabajo hemos considerado dos aspectos dentro de la física nuclear en que los grados de libertad colectivos juegan un papel preponderante: a) Los espectros a bajas energías de los núcleos par-par, así como las correspondientes probabilidades de transición y b) Las reacciones nucleares entre iones pesados.

En la primera parte de la tesis se presenta una revisión del modelo de Bohr-Mottelson, que interpretan la dinámica nuclear de naturaleza colectiva como proveniente de la excitación cuadrupolar de la superficie de los núcleos. Se indica la posibilidad de incluir una extensa gama de fenómenos a través del concepto de S.E.P., que contiene como límites particulares a los modelos del vibrador, rotor y rotor asimétrico.

Posteriormente se hizo notar la importancia de la base "física" del oscilador armónico en cinco dimensiones, encontrada en forma analítica por Chacón et. al., que utilizamos para calcular de manera explícita los elementos de matriz relevantes del modelo colectivo. Como aplicación de estos resultados se construyó la S.E.P. asociada al núcleo ^{14}Dy , encontrando que es posible reproducir el espectro experimental

hasta momentos angulares muy altos con mucha precisión, así como las probabilidades de transición cuadrupolares. Aunque el procedimiento utilizado en este caso es muy complicado, se ha desarrollado un programa de ajuste automático de parámetros que puede utilizarse en el cálculo de las S.E.P. del modelo. Este nuevo método se ha implementado ya en conexión con el modelo de bosones con interacción ⁶⁸⁾ en la descripción de la transición de forma observada en los isótopos del Sm.

En la segunda parte de este trabajo hemos presentado un formalismo que permite incorporar las excitaciones colectivas dentro de la teoría de reacciones nucleares. Se consideraron dos tipos de interacciones que hemos denominado "directa" y "a través de núcleo compuesto", aunque es importante hacer notar que la primera es un caso particular de la segunda. La "directa" se relaciona con la interacción entre fragmentos cuya estructura interna se describe por medio de los grados de libertad colectivos superficiales de tipo cuadrupolar.

Como aplicación del primer tipo de interacción se consideró el problema de los "estados moleculares moleculares" en la dispersión $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$, utilizando un modelo simplificado que ha permitido sin embargo entender claramente la naturaleza de los estados moleculares excitados e interpretarlos en

términos de configuraciones en forma de mancuerna con momentos de inercia efectivos mayores que en el caso de los estados moleculares elásticos, debido esencialmente a la asimetría en la distribución de carga de los fragmentos. Señalamos además que la aparición de otras resonancias puede explicarse permitiendo la excitación simultánea de ambos ^{12}C y la participación de mayor número de estados excitados ⁶⁹⁾. El ajuste a la sección eficaz es razonable, así como la localización de la estructura intermedia. Esperamos que este formalismo también sea de utilidad en la descripción de otras reacciones de iones pesados, involucrando un número mayor de estados colectivos que para el sistema $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ ó $^{12}\text{C} - ^{16}\text{O}$, etc.

Por último, discutimos también la interacción a través de núcleo compuesto, que muestra ya en la versión simplificada, la posibilidad de predecir anchuras y posiciones de las resonancias tanto en un problema de reacción como en el decaimiento de un sistema compuesto excitado tal como fisión de $^{236}\text{U}^*$.

La aplicación de este formalismo a estos problemas presenta algunas dificultades por su complejidad, pero se piensa investigar más a fondo esta posibilidad en el futuro.

APENDICE A

Evaluación de los Coeficientes de Wigner Reducidos de la Cadena de Grupos

$O(5) \supset O(3)$.

En la relación (7.7) del capítulo II, falta únicamente evaluar el coeficiente de Wigner reducido de la cadena $O(5) \supset O(3)$ dado por la expresión

$$\begin{aligned} & (\Lambda \mu L; \Lambda' \mu' L'; \Lambda'' \mu'' L'') = \\ & \int_0^\pi \sum_{\kappa \kappa' \kappa''} \begin{pmatrix} L & L' & L'' \\ \kappa & \kappa' & \kappa'' \end{pmatrix} \phi_{\kappa}^{\Lambda \mu L}(\gamma) \phi_{\kappa'}^{\Lambda' \mu' L'}(\gamma) \phi_{\kappa''}^{\Lambda'' \mu'' L''}(\gamma) \sin \gamma d\gamma \end{aligned} \quad (A.1)$$

En particular estamos interesados en los coeficientes

$(3 \mu \mu 0; \Lambda' \mu' L'; \Lambda'' \mu'' L'')$, que están relacionados con la determinación de las S.E.P. mencionadas anteriormente, así como en

$$(102; \Lambda' \mu' L'; \Lambda'' \mu'' L''), \quad (202, \Lambda' \mu' L'; \Lambda'' \mu'' L'')$$

y

$$(204, \Lambda' \mu' L'; \Lambda'' \mu'' L'')$$

que aparecen en conexión con las probabilidades de transición •

Estos coeficientes han sido programados; los programas correspondientes aparecen al final de este apéndice.

La evaluación de elementos de matriz resulta más conveniente en términos de las funciones de onda expresadas en el sistema de laboratorio. Podemos concretarnos además al caso en que las funciones de onda satisfacen las relaciones,

$$J = \Lambda \quad , \quad M = L \quad , \quad (A.2)$$

ya que los coeficientes (A.1) son independientes de los índices J y M .

Estas funciones se denotan por $|\Lambda \mu L\rangle$ y

vienen dadas por la relación

$$|\Lambda \mu L\rangle = \exp(-A^{1/2}) P_{\Lambda \mu L}(\alpha_m),$$

con

$$P_{\Lambda \mu L}(\alpha_m) = \pi^{-3/4} 2^{N_2} \sum_{r,n} C_{r,n}^{\sigma \epsilon \mu S_L} \{1,2\}^{\sigma+\epsilon-n}$$

$$\{2,2\}^n \{2,0\}^{3r-\epsilon+n} \{3,0\}^{\mu+\epsilon-2r-n} \{3,3\}^{S_L}, \quad (A.3a)$$

en donde $\delta_L = \frac{1}{2} (1 - (-1)^L)$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\mu 1} \\ r_n \end{pmatrix} \equiv \bar{C} \begin{pmatrix} \sigma_{\mu} \\ r_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.3b})$$

y

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\mu 0} \\ r_n \end{pmatrix} \equiv C \begin{pmatrix} \sigma_{\mu} \\ r_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.3c})$$

encontrando además

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\mu 1} \\ r_n \end{pmatrix} = (\mu + \tau - n - 2r + 1) \begin{pmatrix} \sigma_{\mu+1} \\ r_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.3d})$$

Aprovechando ahora que conocemos el comportamiento de las

α_m ante conjugación, i.e., $\alpha_m^* = (-1)^m \alpha_{-m}$, proponemos

el cambio de variables

$$\alpha_{\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho_2 e^{\pm i\psi}$$

$$\alpha_{\pm 1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \rho_1 e^{\pm i\phi} \quad (\text{A.4a})$$

$$\alpha_0 = \rho_0$$

donde

$$0 \leq \vartheta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

$$0 \leq \rho_1, \rho_2 < \infty, \quad -\infty < \rho_0 < \infty \quad (\text{A.4b})$$

Obviamente debido a la relación

$$\sum_m \alpha_m \alpha^m = \beta^2,$$

ρ_1, ρ_2 y ρ_0 deben satisfacer a su vez

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_0^2 = \beta^2,$$

lo que sugiere reescribirlas en términos de las coordenadas esféricas

β, χ, δ

$$\rho_1 = \beta \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \delta$$

$$\rho_2 = \beta \operatorname{sen} \chi \cos \delta$$

$$\rho_0 = \beta \cos \chi \quad (\text{A.5})$$

donde para satisfacer las desigualdades (A.4b) χ y δ están limitadas

a

$$0 \leq \chi < \pi, \quad 0 \leq \delta < \pi/2 \quad (\text{A.6})$$

El elemento de volumen correspondiente está dado por

$$dv = d^5\alpha = dx_2 d\alpha_1 dx_0 dx_{-1} dx_{-2},$$

y usando los Jacobianos de las transformaciones (A.4a) y (A.5) encontramos que

$$dv = \beta^4 \text{Sen}^3 \chi \text{Sen} \delta \cos \delta d\rho dx ds d\theta d\phi \quad (\text{A.7})$$

Usando la forma explícita de los d.e.p.'s que aparecen en (A.3a) y aplicando las transformaciones (A.4a) y (A.5), encontramos

$$\{1, 2\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \text{Sen} \chi \text{Sen} \delta e^{i\theta},$$

$$\{2, 2\} = \beta^2 e^{i\theta} \left[2 \text{Sen} \chi \cos \chi \text{Sen} \delta - \sqrt{3/2} \text{Sen}^2 \chi \cos^2 \delta e^{i(2\phi - \theta)} \right],$$

$$\{3, 0\} = \beta^3 \left[-\sqrt{2} \cos^3 \chi - 3\sqrt{2} \text{Sen}^3 \chi \text{Sen} \delta \cos^2 \delta \cos(2\phi - \theta) \right. \\ \left. - 3\sqrt{2} \text{Sen}^2 \chi \cos \chi \cos^2 \delta + 6/\sqrt{2} \text{Sen}^2 \chi \cos \chi \text{Sen}^2 \delta \right]$$

$$\{3, 3\} = \beta^3 \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sen}^3 \chi \text{Sen}^2 \delta \cos \delta e^{i(2\theta - \phi)} - \sqrt{3/2} \text{Sen}^2 \chi \right. \\ \left. \cos \chi \text{Sen} \delta \cos \delta e^{i(\theta + \phi)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Sen}^3 \chi \cos^3 \delta e^{i\phi} \right].$$

El operador más general en el que estaremos interesados puede siempre ser expresado en términos de sumas del operador general

$$A = \{2,0\}^p \{3,0\}^m.$$

$$\beta^{x_1} \text{Sen}^{x_2} \chi \text{Cos}^{x_3} \chi \text{Sen}^{x_4} \delta \text{Cos}^{x_5} \delta e^{ix_6 \phi} e^{ix_7 \epsilon}, \quad (\text{A.8})$$

de modo que los elementos de matriz buscados se escriben como

$$\begin{aligned} & \{N'' \mu'' L'' | A | N' \mu' L'\} \\ &= \pi^{-3/2} 2^{\frac{N'+N''}{2}} \sum_{r'n'} \sum_{r''n''} C_{r'n'}^{\sigma' \tau' \mu' \delta L'} C_{r'n''}^{\sigma'' \tau'' \mu'' \delta L''} I, \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

donde

$$I = \int_V \{1,2\}^{*k} \{2,2\}^{*m} \{1,2\}^p \{2,2\}^q \{2,0\}^{r+r'} e^{ix_6 \phi} e^{ix_7 \epsilon} \{3,3\}^{\delta L'} \{3,0\}^{s+r''} \{3,3\}^{* \delta L''} \beta^{x_1} \text{Sen}^{x_2} \chi \text{Cos}^{x_3} \chi \text{Sen}^{x_4} \delta \text{Cos}^{x_5} \delta dV. \quad (\text{A.10})$$

La integral (A.10) se transforma a las coordenadas $\beta, \lambda, \delta,$
 θ, ϕ se llega a la expresión

$$I = \pi^2 \int \left[\frac{1}{2} (L'/2 + L''/2 + 3M + T + 2\rho + X_1 + 3S_{L'} + 3S_{L''} + 5) \right]$$

$$\sum_{t'=0}^{\delta_{L'}} \sum_{t''=0}^{\delta_{L''}} (-1)^{t'+t''} \int_{L'/2 + X_1 + 3S_{L'/2} + X_{1/2} + t', L'/2 + 3S_{L''/2} + t''} \begin{pmatrix} \delta_{L'} \\ t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{L''} \\ t'' \end{pmatrix}$$

$$\sum_{a', b'} \begin{pmatrix} \delta_{L''} - t'' \\ a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{L'} - t' \\ b' \end{pmatrix} (-1)^{h'-a' + \frac{3}{2}\delta_{L''} + S_{L'/2} - X_{1/2}} 2^{-2t'' - X_1 + 2a' - 2b}$$

$$3^{-\delta_{L'/2} - t'' + \frac{3}{2}\delta_{L''} - X_{1/2} - a' - X_{1/2}} 2^{-\delta_{L'} + X_{1/2} - 1} \sum_{a, b, k, u, v} (-1)^k \begin{pmatrix} n'' \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n' \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M+T-2R-n''-n' \\ a-b+2k-X_{1/2}-\frac{\delta_{L'}}{2}-a'+\frac{\delta_{L''}}{2}+b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b+2k-X_{1/2}-\delta_{L'/2}-a'+\delta_{L''/2}+b' \\ k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M+T-2R-n'-n''-a+b-2k+a'-b'+\frac{1}{2}(S_{L'}+S_{L''}+X_0) \\ u \end{pmatrix} \cdot 2^{M_{1/2} + T_{1/2} - R + n'' + n' + L''/4}$$

$$2^{-\frac{3}{4}L' - 1a - 1k - v} \cdot 3^{M+T-2R-n'-n''+v+k+a-u-\frac{1}{4}L' + \frac{1}{4}L''}$$

$$\frac{\Gamma \left[\chi_2 (M + T - 2R - 2a - 2k + 2u - 2v + \frac{\delta_L''}{2} + \frac{3}{2} \delta_L' - t - t' - 2b' + x_3 + \frac{x_0}{2} + 1) \right]}{\Gamma \left[\chi_2 (3M + 3T - 6R + \frac{L'}{2} + \frac{L''}{2} - 2n' - 2n'' + 3\delta_L' + 3\delta_L'' + x_2 + x_3 + 5) \right]}$$

$$\left[1 + (-1)^{M + T - t' - t'' + x_3 + \delta_L''/2 + \frac{3}{2} \delta_L' + x_4/2} \right]$$

$$\Gamma \left[\chi_2 (2M + 2T - 4R - 2n' - 2n'' - 2a - 2u + \frac{L''}{2} + \frac{L'}{2} + \frac{\delta_L''}{2} + \frac{3}{2} \delta_L' - 2k - t - t' + x_4/2 + 2a' + x_4 + 2) \right]$$

$$\Gamma \left[2a + v + 2k + t + t' + \delta_L'' - a' + b' + x_4/2 - x_0/2 + 1 \right].$$

(A.11)

donde $R = r' + r''$, $T = t' + t''$ y $M = m + m' + m''$.

Las ecuaciones (A.10) y (7.7) constituyen la base de los programas numéricos desarrollados.


```

6410 PA[72] := -1/3 * A[7] * C[5]; PA[73] := 7; PA[74] := 1; PA[75] := 1; PA[76] := 2;
6411 PA[77] := 1; PA[78] := 2; PA[79] := 1; PA[80] := 1; PA[81] := 2;
6412 PA[82] := 1; PA[83] := 2; PA[84] := 1; PA[85] := 1; PA[86] := 1; PA[87] := 0;
6413 PA[88] := 1; PA[89] := 0; PA[90] := 0; PA[91] := -1/16 * (3/7) ** .5; NP := 15; ENL;
6414 END
6415 ELSL BEGIN
6416 PA[1] := 1; PA[2] := 0; PA[3] := 3; PA[4] := 0; PA[5] := 3; PA[6] := -5;
6417 PA[7] := 1; PA[8] := 1; PA[9] := 2; PA[10] := 1; PA[11] := 2; PA[12] := 3 ** .5 / 2;
6418 PA[13] := 1; PA[14] := 0; PA[15] := 1; PA[16] := 2; PA[17] := 1; PA[18] := 2.5; EL;
6419 B[1] := 1; PA[9] := 0; PA[13] := 2; PA[14] := 0; PA[16] := 1; PA[17] := 0; PA[18] := 2.5; EL;
6420 PA[13] := 0; PA[14] := 2; PA[15] := 0; PA[16] := 0; PA[17] := 0; PA[18] := (1/3) ** .5;
6421 NP := 3;
6422 END;
6423 B[1] := 5; PA[2] := 0; PA[3] := 3; PA[4] := 0; PA[5] := 1;
6424 PA[6] := -1/2 * SQRT(7);
6425 PA[7] := 1; PA[9] := 2; PA[10] := 1; PA[11] := 0; PA[12] := -1/2 * (3/7) ** .5;
6426 PA[13] := 3; PA[14] := 1; PA[15] := 2; PA[16] := 1; PA[17] := 2; PA[18] := (3/7) ** .5;
6427 PA[19] := 3; PA[20] := 2; PA[21] := 1; PA[22] := 0; PA[23] := 1; PA[24] := 3/7 ** .5;
6428 PA[25] := 4; PA[26] := 1; PA[27] := 0; PA[28] := 1; PA[29] := 0; PA[30] := -1/2 * (3/7) ** .5;
6429 5;
6430 PA[31] := 5; PA[32] := 0; PA[33] := 1; PA[34] := 2; PA[35] := -1; PA[36] := 1/4 *
6431 7 * (-.5); NP := 6; END;
6432 B[1] := 1; PA[2] := 1; PA[3] := 1; PA[4] := 0; PA[5] := 1; PA[6] := (3/7) ** .5;
6433 PA[7] := 0; PA[8] := 0; PA[9] := 0; PA[10] := 1; PA[11] := 0; PA[12] := 1/7 ** .5;
6434 NP := 2; EL;
6435 B[1] := 5; PA[2] := 0; PA[3] := 3; PA[4] := 0; PA[5] := 1; PA[6] := 1/2 * 7 * (-.5);
6436 PA[7] := 0; PA[8] := 0; PA[9] := 1; PA[10] := 1; PA[11] := 0; PA[12] := 1; PA[13] := 1/4 * 7 * (-.5);
6437 PA[14] := 1; PA[15] := 2; PA[16] := 0; PA[17] := 0; PA[18] := -1/2 * (3/7) ** .5;
6438 5;
6439 PA[19] := 3; PA[20] := 1; PA[21] := 0; PA[22] := 1; PA[23] := 1; PA[24] := -3/7 ** .5;
6440 PA[25] := 1; PA[26] := 1; PA[27] := 0; PA[28] := 2; PA[29] := 0; PA[30] := -3/7 ** .5;
6441 1/2 * (3/7) ** .5;
6442 NP := 5; L[0];
6443 BEGIN PA[1] := 2; PA[2] := 0; PA[3] := 2; PA[4] := 0; PA[5] := 2; PA[6] := .5; NP := 1; END;
6444 B[1] := 5; PA[2] := 0; PA[3] := 3; PA[4] := 0; PA[5] := 3; PA[6] := -5;
6445 -SQRT(3 * .5); PA[13] := 5; PA[14] := 0; PA[15] := 1; PA[16] := 2; PA[17] := 1;
6446 PA[18] := 2.5; NP := 3; EL;
6447 BEGIN PA[1] := 0; PA[2] := 0; PA[3] := 6; PA[4] := 0; PA[5] := 0; PA[6] := .5 * SQRT(70);
6448 PA[7] := 7; PA[8] := 1; PA[9] := 4; PA[10] := 1; PA[11] := 1; PA[12] := 5 * SQRT(3/70);
6449 PA[13] := 0; PA[14] := 0; PA[15] := 1; PA[16] := 2; PA[17] := 2; PA[18] := 1.5 * SQRT(3/70);
6450 SQRT(70); PA[19] := 7; PA[20] := 1; PA[21] := 5; PA[22] := -1; PA[23] := 1; PA[24] :=
6451 1; PA[25] := 1; PA[26] := 4; PA[27] := 6; PA[28] := 2; PA[29] := 4; PA[30] := 0;
6452 PA[31] := 3; PA[32] := 2; PA[33] := 4; PA[34] := 2; PA[35] := 1; PA[36] := -1;
6453 PA[37] := 2; .25 * SQRT(3/70); PA[37] := 8; PA[38] := 0; PA[39] := -1; PA[40] := -2;
6454 PA[41] := 2; PA[42] := -.25 * SQRT(70); PA[43] := 7; PA[44] := 1; PA[45] := 3;
6455 PA[46] := 1; PA[47] := 1; PA[48] := 1; PA[49] := 2; .25 * SQRT(3/70); PA[50] := 0;
6456 PA[51] := 2; PA[52] := 0; PA[53] := 0; PA[54] := 1; .25 * SQRT(3/70); PA[55] := 0;
6457 PA[56] := 1; PA[57] := 8; PA[58] := 0; PA[59] := 0; PA[60] := -SQRT(2/35);
6458 1/2 * 0; PA[61] := 2; PA[62] := 2; PA[63] := 2; PA[64] := 2; PA[65] := 1; PA[66] := SQRT(
6459 PA[72] := -3 * SQRT(2/35); PA[73] := 7; PA[74] := 1; PA[75] := 1; PA[76] := 1;
6460 PA[77] := 1; PA[78] := 1; SQRT(3/70); PA[79] := 8; PA[80] := 0; PA[81] := 2;
6461 PA[82] := 2; PA[83] := 2; PA[84] := 1; SQRT(70); PA[85] := 7; PA[86] := 1;
6462 PA[87] := 1; PA[88] := -1; PA[89] := 1; PA[90] := SQRT(3/70); PA[91] := 8;
6463 PA[92] := 1; PA[93] := 0; PA[94] := 0; PA[95] := 0; PA[96] := -.25 * SQRT(2/35);
6464 PA[97] := 1; PA[98] := 3; PA[99] := 3; PA[100] := 1; PA[101] := 1; PA[102] :=
6465 SQRT(2/70); PA[103] := 6; PA[104] := 2; PA[105] := 2; PA[106] := 2; PA[107] :=

```

4

```

0000069116
0000069118
0000069200
0000069220
0000069222
0000069224
0000069226
0000069228
0000069300
0000069302
0000069330
0000069334
0000069336
0000069338
0000069340
0000069342
0000069344
0000069346
0000069348
0000069350
0000069352
0000069354
0000069356
0000069358
0000069360
0000069362
0000069364
0000069366
0000069368
0000069370
0000069372
0000069374
0000069376
0000069378
0000069380
0000069382
0000069384
0000069386
0000069388
0000069390
0000069392
0000069394
0000069396
0000069398
0000069400
0000069402
0000069404
0000069406
0000069408
0000069410
0000069412
0000069414
0000069416
0000069418
0000069420
0000069422
0000069424
0000069426
0000069428
0000069430
0000069432
0000069434
0000069436
0000069438
0000069440
0000069442
0000069444
0000069446
0000069448
0000069450
0000069452
0000069454
0000069456
0000069458
0000069460
0000069462
0000069464
0000069466
0000069468
0000069470
0000069472
0000069474
0000069476
0000069478
0000069480
0000069482
0000069484
0000069486
0000069488
0000069490
0000069492
0000069494
0000069496
0000069498
0000069500
0000069502
0000069504
0000069506
0000069508
0000069510
0000069512
0000069514
0000069516
0000069518
0000069520
0000069522
0000069524
0000069526
0000069528
0000069530
0000069532
0000069534
0000069536
0000069538
0000069540
0000069542
0000069544
0000069546
0000069548
0000069550
0000069552
0000069554
0000069556
0000069558
0000069560
0000069562
0000069564
0000069566
0000069568
0000069570
0000069572
0000069574
0000069576
0000069578
0000069580
0000069582
0000069584
0000069586
0000069588
0000069590
0000069592
0000069594
0000069596
0000069598
0000069600
0000069602
0000069604
0000069606
0000069608
0000069610
0000069612
0000069614
0000069616
0000069618
0000069620
0000069622
0000069624
0000069626
0000069628
0000069630
0000069632
0000069634
0000069636
0000069638
0000069640
0000069642
0000069644
0000069646
0000069648
0000069650
0000069652
0000069654
0000069656
0000069658
0000069660
0000069662
0000069664
0000069666
0000069668
0000069670
0000069672
0000069674
0000069676
0000069678
0000069680
0000069682
0000069684
0000069686
0000069688
0000069690
0000069692
0000069694
0000069696
0000069698
0000069700
0000069702
0000069704
0000069706
0000069708
0000069710
0000069712
0000069714
0000069716
0000069718
0000069720
0000069722
0000069724
0000069726
0000069728
0000069730
0000069732
0000069734
0000069736
0000069738
0000069740
0000069742
0000069744
0000069746
0000069748
0000069750

```

```

70300 =2; PA[100] := 1; PA[50] := 5; PA[99] := 1; PA[70] := 2; PA[40] := 9; PA[15] := 1; PA[10] := 1; PA[3] := 1; PA[112] :=
70330 PA[11] := 5; PA[12] := 6; PA[13] := 0; PA[14] := 0; PA[15] := 0; PA[16] := 0; PA[17] := 0; PA[18] := 0; PA[19] := 0; PA[20] := 0;
70360 PA[21] := 0; PA[22] := 0; PA[23] := 0; PA[24] := 0; PA[25] := 0; PA[26] := 0; PA[27] := 0; PA[28] := 0; PA[29] := 0; PA[30] := 0;
70400 PA[31] := 0; PA[32] := 0; PA[33] := 0; PA[34] := 0; PA[35] := 0; PA[36] := 0; PA[37] := 0; PA[38] := 0; PA[39] := 0; PA[40] := 0;
70440 PA[41] := 0; PA[42] := 0; PA[43] := 0; PA[44] := 0; PA[45] := 0; PA[46] := 0; PA[47] := 0; PA[48] := 0; PA[49] := 0; PA[50] := 0;
70480 PA[51] := 0; PA[52] := 0; PA[53] := 0; PA[54] := 0; PA[55] := 0; PA[56] := 0; PA[57] := 0; PA[58] := 0; PA[59] := 0; PA[60] := 0;
70520 BEGIN PA[1] := 7; PA[2] := 1; PA[3] := 5; PA[4] := 6; PA[5] := 1; PA[6] := 5; PA[7] := 3; PA[8] := 7;
70550 PA[9] := 0; PA[10] := 1; PA[11] := 0; PA[12] := 1; PA[13] := 1; PA[14] := 1; PA[15] := 3; PA[16] := 1; PA[17] := 1;
70580 PA[18] := 7; PA[19] := 2; PA[20] := 3; PA[21] := 4; PA[22] := 1; PA[23] := 1; PA[24] := 1; PA[25] := 1; PA[26] := 1; PA[27] := 1;
70620 PA[28] := 1; PA[29] := 1; PA[30] := 1; PA[31] := 1; PA[32] := 1; PA[33] := 1; PA[34] := 1; PA[35] := 1; PA[36] := 1; PA[37] := 1;
70650 PA[38] := 1; PA[39] := 1; PA[40] := 1; PA[41] := 1; PA[42] := 1; PA[43] := 1; PA[44] := 1; PA[45] := 1; PA[46] := 1; PA[47] := 1;
70680 PA[48] := 1; PA[49] := 1; PA[50] := 1; PA[51] := 1; PA[52] := 1; PA[53] := 1; PA[54] := 1; PA[55] := 1; PA[56] := 1; PA[57] := 1;
70720 PA[58] := 1; PA[59] := 1; PA[60] := 1; PA[61] := 1; PA[62] := 1; PA[63] := 1; PA[64] := 1; PA[65] := 1; PA[66] := 1; PA[67] := 1;
70750 PA[68] := 1; PA[69] := 1; PA[70] := 1; PA[71] := 1; PA[72] := 1; PA[73] := 1; PA[74] := 1; PA[75] := 1; PA[76] := 1; PA[77] := 1;
70780 PA[78] := 1; PA[79] := 1; PA[80] := 1; PA[81] := 1; PA[82] := 1; PA[83] := 1; PA[84] := 1; PA[85] := 1; PA[86] := 1; PA[87] := 1;
70820 PA[88] := 1; PA[89] := 1; PA[90] := 1; PA[91] := 1; PA[92] := 1; PA[93] := 1; PA[94] := 1; PA[95] := 1; PA[96] := 1; PA[97] := 1;
70850 PA[98] := 1; PA[99] := 1; PA[100] := 1; PA[101] := 1; PA[102] := 1; PA[103] := 1; PA[104] := 1; PA[105] := 1; PA[106] := 1; PA[107] := 1;
70880 PA[108] := 1; PA[109] := 1; PA[110] := 1; PA[111] := 1; PA[112] := 1; PA[113] := 1; PA[114] := 1; PA[115] := 1; PA[116] := 1; PA[117] := 1;
70920 PA[118] := 1; PA[119] := 1; PA[120] := 1; PA[121] := 1; PA[122] := 1; PA[123] := 1; PA[124] := 1; PA[125] := 1; PA[126] := 1; PA[127] := 1;
70950 PA[128] := 1; PA[129] := 1; PA[130] := 1; PA[131] := 1; PA[132] := 1; PA[133] := 1; PA[134] := 1; PA[135] := 1; PA[136] := 1; PA[137] := 1;
70980 PA[138] := 1; PA[139] := 1; PA[140] := 1; PA[141] := 1; PA[142] := 1; PA[143] := 1; PA[144] := 1; PA[145] := 1; PA[146] := 1; PA[147] := 1;
71020 PA[148] := 1; PA[149] := 1; PA[150] := 1; PA[151] := 1; PA[152] := 1; PA[153] := 1; PA[154] := 1; PA[155] := 1; PA[156] := 1; PA[157] := 1;
71050 NP1 := 9; END;
71080 END ENU;
71120 NP1 := 8; NP2 := NP1 - 5;
71150 WRITE(SAL, NP1, NP2);
71200 C1CLO(L, 0, 2, 8); EEGIN;
71250 C1CLO(M, 1, 0, 1, MF+1); BEGIN;
71300 C4 := 2 * (-M1);
71350 *(FACT(L/(2+3*M1+T1))/FACT(L+6*M1+2*T1+1)*FACT(L/2-T1))**2*
71400 SCALE(2+1)*2**((2+T1));
71450 C1CLO(R, 0, 1, (M1+T1)/2); BEGIN;
71500 Z3 := (-2)*M1*(FACT(2*M1+2*T1-2*R1)/FACT(L1+T1-R1)*
71550 (FACT(-R1)/FACT(R1))**2);
71600 Z3 := Z3*24;
71650 C1CLO(N, MAX(0, T1-3*R1), 1, MIN(L/2, M1+T1-2*R1)); BEGIN;
71700 Z2 := (1+1)**N/(FACT(N)*FACT(L1+T1-2*R1-N))**2;
71750 Z2 := Z2*Z3; Z1 := 0;
71800 C1CLO(SS, MAX(0, N-T1), 1, MIN(L/2-T1, 3*R1-T1+N)); BEGIN;
71850 Z11 := Z1+1)**SS-1)**2**((2*SS1)*FACT(T1+SS1)/FACT(T1+SS1-1))*
71900 FACT(L+6*M1+2*T1-2*SS1+1)/FACT(L/2+3*M1+T1-SS1)*

```

5

```

00000 70300
00000 70330
00000 70360
00000 70400
00000 70440
00000 70480
00000 70520
00000 70550
00000 70580
00000 70620
00000 70650
00000 70680
00000 70720
00000 70750
00000 70780
00000 70820
00000 70850
00000 70880
00000 70920
00000 70950
00000 70980
00000 71020
00000 71050
00000 71080
00000 71120
00000 71150
00000 71200
00000 71250
00000 71300
00000 71350
00000 71400
00000 71450
00000 71500
00000 71550
00000 71600
00000 71650
00000 71700
00000 71750
00000 71800
00000 71850
00000 71900
00000 71950
00000 72000

```

8700U
8740U
8780U
8820U
8860U
8900U
8940U
8980U
9020U
9060U
9100U
9140U
9180U
9220U
9260U
9300U
9340U
9380U
9420U
9460U
9500U
9540U
9580U
9620U
9660U
9700U
9740U
9780U
9820U
9860U
9900U
9940U
9980U
0020U
0060U
0100U
0140U
0180U
0220U
0260U
0300U
0340U
0380U
0420U
0460U
0500U
0540U
0580U
0620U
0660U
0700U
0740U
0780U
0820U
0860U
0900U
0940U
0980U
1020U
1060U
1100U
1140U
1180U
1220U
1260U
1300U
1340U
1380U
1420U
1460U
1500U
1540U
1580U
1620U
1660U
1700U
1740U
1780U
1820U
1860U
1900U
1940U
1980U
2020U
2060U
2100U
2140U
2180U
2220U
2260U
2300U
2340U
2380U
2420U
2460U
2500U
2540U
2580U
2620U
2660U
2700U
2740U
2780U
2820U
2860U
2900U
2940U
2980U
3020U
3060U
3100U
3140U
3180U
3220U
3260U
3300U
3340U
3380U
3420U
3460U
3500U
3540U
3580U
3620U
3660U
3700U
3740U
3780U
3820U
3860U
3900U
3940U
3980U
4020U
4060U
4100U
4140U
4180U
4220U
4260U
4300U
4340U
4380U
4420U
4460U
4500U
4540U
4580U
4620U
4660U
4700U

```

FACT(SS1)*FACT(L/2-T1-SS1)*FACT(3*I1-T1+L-SS1))**2)
Z1=Z1*2; CES[0]=Z;
J1=4+6*Z; C46=M1+1122*T1+3366*C1;
WHITE(L,C46,C1); 2; POINTLR.(CLST0));
END L=0; END;
RBY=0;
C1CLOB(L/2+1,0,0,0); BEGIN BYEEL+7*5*(A19775A[2]);
C1CLOB(T1,0,0,0); BEGIN K1=0;
C1CLOB(T1,0,0,0); BEGIN K1=1;
LDM1=(L/2+3)*N1; LDM2=L1; LDM3=L1/2+3*N1/2+T2;
SIGN1=(L/2+3)*N1; SIGN2=L1; SIGN3=L1/2+3*N1/2+T2;
LDM=LAM*UR;
LDM=SCAL(LAM,UR) OR THEN BEGIN
T1=T1+1;
J1=NOT (LUM=0); IF (LUM=0) THEN BEGIN
3*(M+MU+T));
C1CLOB(K1,0,1,(M+T1)/2); BEGIN Z61=2**(-K1)*3**(-2*K1);
Z61=Z61*2; C1CLOB(R2,0,1,(M+T2)/2); BEGIN
Z6A1=2**(-R2)*4**(-2*R2); Z6A2=2**Z6A1*Z61;
Z71=K1*2; C1CLOB(N1,MAX(0,1-3*K1)); L1=L1*(L/2+M1+T1-2*R1)) BEGIN
C1CLOB(N2,MAX(0,1-3*R2)); L1=MIN((L/2+M2+T2-2*R2)); PTGIN.
Z61=2**L2*3**(-N2)*FACT(N2)*FACT(M+MU+T-2*R1)*L1**2;
Z61=Z61*Z71; AS[0]=0; K1=6*Y1; QO=M+MU+T-2*R1-N1;
C1CLOB(ND,1,6,NP2); BEGIN Z51=0;
Z61=PA[NL]; Y2=PA[NU+1]; Y3=PA[NU+2]; Y4=PA[NL+3]; Y5=PA[NU+4];
Z61=(2*(-1)**Y4+2**(-2*Y4)+3**(-Y4/2))*
(GAMC(L+3*H+T+Y1+Y2+Y3+Y4+5)/2)/GAMC(L/2+3*(M+T)/2
+2-3*MP2);
C1CLOB(A1,0,1,N2); BEGIN Z41=0;
Z1=0; G6=-A1+Y4 THEN BEGIN
Z1=0;
C1CLOB(A3,MAX(0,-A1+Y4),1,MIN((QO+(QO+H1-A1+Y4)/2)); BEGIN
Z21=0;
C1CLOB(A4,0,1,MIN(QO-A3,QO-A1+H1-2*A3+Y4)); BEGIN
Z11=0; C1CLOB(A5,0,1,A4); BEGIN
Z11=Z1+2**(-A5)*3**A5*(GAMC(M+MU+T+Y4+Y2)/2**A4-A1-A3-A5+1/2)
+GAMC(2*A1+A5+2*A3-Y4+Y1/2-Y3/2+1)/(FACT(A-A5)*FACT(A5))**2;
END;
Z21=Z2+(-1)**A4*3**(-A4)*(GAMC(L/2+QO-A1-A3-A4+(Y5+Y3+2*Y4)/2+1)
+GAMC(QO+H1-A1-2*A3-A4+Y4)*FACT(QO+H1-A3-A4)/FACT(QO-A3-A4))**2*Z1;
Z31=Z3+2**(-4+A3)*3**A3*(1/(FACT(A3)*FACT(A1+A3+Y4)))**2
+L1*L1*END;
Z51=Z5+2**(-4+A1)*3**A1*(1/(FACT(A1)*FACT(N2-A1)))**2+L3; ENL;
Z1=Z5+Z6L1; Zx=2*PA[NU+5];
AS[0]=AS[0]+Zx;
END;
WRITE(L,C3,K+DIR[0],2,POINTLR.(AS[0]));
R1=L1; END; END;
J1=1+6*2; E2=E1+1734*L;
DIR[0]=L1+L3+L;
WRITE(L,C2,L); 2; POINTLR.(DIR[0]);
DIR[0]=L1R[0]; END END E1;

```

0000U
0040U
0080U
0120U
0160U
0200U
0240U
0280U
0320U
0360U
0400U
0440U
0480U
0520U
0560U
0600U
0640U
0680U
0720U
0760U
0800U
0840U
0880U
0920U
0960U
1000U
1040U
1080U
1120U
1160U
1200U
1240U
1280U
1320U
1360U
1400U
1440U
1480U
1520U
1560U
1600U
1640U
1680U
1720U
1760U
1800U
1840U
1880U
1920U
1960U
2000U
2040U
2080U
2120U
2160U
2200U
2240U
2280U
2320U
2360U
2400U
2440U
2480U
2520U
2560U
2600U
2640U
2680U
2720U
2760U
2800U
2840U
2880U
2920U
2960U
3000U
3040U
3080U
3120U
3160U
3200U
3240U
3280U
3320U
3360U
3400U
3440U
3480U
3520U
3560U
3600U
3640U
3680U
3720U
3760U
3800U
3840U
3880U
3920U
3960U
4000U
4040U
4080U
4120U
4160U
4200U
4240U
4280U
4320U
4360U
4400U
4440U
4480U
4520U
4560U
4600U
4640U
4680U
4720U

74400
74500
74600
74700
74800
74900
75000
75100
75200
75300
75400
75500
75600
75700
75800
75900
76000
76100
76200
76300
76400
76500
76600
76700
76800
76900
77000
77100
77200
77300
77400
77500
77600
77700
77800
77900
78000
78100
78200
78300
78400
78500
78600
78700
78800
78900
79000
79100
79200
79300
79400
79500
79600
79700
79800
79900
80000

```
WRITE (SAL, <"ACABE AS">);  
WRITE (I, ILE(2), <"TIE">);  
WRITE (C, <"TEMPD FIN AS"> I2, E14.7 > L, <"TIE">);  
WRITE (CALL, <"TIE MPD FIN AS"> I2, E14.7 > L, <"TIE">);  
W2=0;  
C1=C(LC, H1, 0, 1, M1) BEGIN C1=C(LC, H2, 0, 1, M1) BEGIN  
C1=C(LC, H1, 0, 1, L/2) BEGIN M1=C1;  
J1=I+T1+6*M2+102*M1+1734*L;  
REAL(C1, C1, L2, J1, 2, 2, POINT, LR(AS1[0]));  
C1=C(LC, H1, 2, 0, 1, LB/2) BEGIN  
M1=M1+M2;  
LM1=L/2+3*M1+T1; LM2=LB/2+3*M2+T2;  
DLM=L/2+3*M1+M2; LMP2=L/2+3*M1+M2;  
SIGN1=M1-1)*SIGN(M1);  
IF LULY=LAN OR  
DLM=50*LAH-100 THEN BEGIN  
T1=T1+2;  
IF NOT BOOLEAN (M1+M2+PA[4]+PA[2]) THEN BEGIN  
M1=V0; I=I+FACT(C1+L+LB+1+3*I+M1+3*I+L/2)/FACT(P1+L+6*I+P2)+  
FACT(L+L+L+3*I+M1+3*I+M2)/FACT(L+L+6*I+P1)+FACT(LAM+LM1  
+LM2+4+3*I+M1+3*I+M2)/FACT(LAM+LM1+LM2+4+3*I+M1  
+3*I+M2)*2*TEL;  
C1=C(LC, H1, 0, 1, (M1+T1)/2) BEGIN;  
C1=C(LC, H2, 0, 1, (M2+T2)/2) BEGIN;  
C1=C(LC, H1, 0, 1, (M1+T1-3*M1)/2+1, NIL, (L/2+M1+T1-2*R1)) BEGIN  
I=I+66*(M1+IMP1)+1122*(T1+3366*L);  
REAL(VISC[1]), 2, POINT, LR(CES[0]));  
CES[0]=CES[0]+IMP1*(M1+T1-1.2*R1);  
SIGL[0]=SIGL[0]+TR2*TR2+1*(M1+T1+3366*(T2+R2)) PEG2(K:=K+1)  
REAL(DISC[1]), 2, POINT, LR(CES[0]));  
REAL(CES[1], 0, 1, 2, 2, POINT, LR(PAS[0]));  
M1=CES[0]+CES[0]*ASC[0]; M2=CES[0]+CES[0]*ASC[0];  
M1=M2+M1; END END END END;  
M2=M2+M1; M1=M1+M2;  
LM1=L/2+3*IMP1)/2+3;  
LM2=L/2+3*IMP2)/2+3;  
IF L LSS 6 OR LM1+3*IMP1 LSS 1 THEN S1:=1 ELSE  
ELGIN  
IF (LM1-L)/3 EQL ENTIER((LM1-L)/3) THEN  
MUM1=(L-L)/3 ELSE MUM1=ENTIER((L-L)/3+1);  
S1=M1-MUM1; END;  
IF LB LSS 6 OR LM2+3*IMP2 LSS 1 THEN S2:=1 ELSE  
BEGIN  
IF (LM2-LB)/3 EQL ENTIER((LM2-LB)/3) THEN  
MUM2=(LM2-LB)/3 ELSE MUM2=ENTIER((LM2-LB)/3+1);  
S2=M2-MUM2; END;  
WRITE(SAL, <"3JC"> I2, <"1"> I2, <"6(I2">")")="E30+23">  
LAM=LG, LM1+3*IMP1, S1, L+3*IMP1, L/2+3*IMP2, S2, L+4*IMP1, W, A);  
WRITE(CALL, <"3JC"> I2, <"1"> I2, <"6(I2">")")="E30+23">  
LAM=LG, LM1+3*IMP1, S1, L+3*IMP1, L/2+3*IMP2, S2, L+4*IMP1, W, A);  
W2=0; END END END END END END END;  
END END
```

7
000148700
000149000
000149300
000149600
000149900
000150200
000150500
000150800
000151100
000151400
000151700
000152000
000152300
000152600
000152900
000153200
000153500
000153800
000154100
000154400
000154700
000155000
000155300
000155600
000155900
000156200
000156500
000156800
000157100
000157400
000157700
000158000
000158300
000158600
000158900
000159200
000159500
000159800
000160100
000160400
000160700
000161000
000161300
000161600
000161900
000162200
000162500
000162800
000163100
000163400
000163700
000164000
000164300
000164600
000164900
000165200
000165500
000165800
000166100
000166400
000166700
000167000
000167300
000167600
000167900
000168200
000168500
000168800
000169100
000169400
000169700
000170000
000170300
000170600
000170900
000171200
000171500
000171800
000172100
000172400
000172700
000173000
000173300
000173600
000173900
000174200
000174500
000174800
000175100
000175400
000175700
000176000
000176300
000176600
000176900
000177200
000177500

```

100 BEGIN
110 *ESTE PROCEDIMIENTO CALCULA LOS SINUSOS Y LOS COSENOS (3*PI) PARA LA ANGULAR
120 *SPRUEBA LAS FUNCIONES SINUSO Y COSENO
130 *CORRESPONDIENTES A LA CADENA DE CARACTERES (3)
140 *ESTE PROCEDIMIENTO FUNCIONA PARA VALORES DEL MOMENTO ANGULAR
150 *MEJORES Y IGUALES A 10 Y PARA UN NUMERO DE CUANTOS SI PI (SI L=0)
160 FILE ENT (IND=REMOTE); FILE DISC1 (KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXRECLZL=2
170 ,BLOCKSIZL=30);
180 FILE ALL (IND=PRINTER);
190 FILE DISC2 (KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXRECLZL=2
200 ,BLOCKSIZL=30);
210 FILE DISC3 (KIND=DISK,SAVEFACTOR=99,MAXRECLZL=2
220 ,BLOCKSIZL=30);
230 *INTEGRAL DE LA FUNCION SINUSO Y COSENO EN LA ANGULAR
240 *DE 0 A PI
250 *DE 0 A PI
260 *DE 0 A PI
270 *DE 0 A PI
280 *DE 0 A PI
290 *DE 0 A PI
300 *DE 0 A PI
310 *DE 0 A PI
320 *DE 0 A PI
330 *DE 0 A PI
340 *DE 0 A PI
350 *DE 0 A PI
360 *DE 0 A PI
370 *DE 0 A PI
380 *DE 0 A PI
390 *DE 0 A PI
400 *DE 0 A PI
410 *DE 0 A PI
420 *DE 0 A PI
430 *DE 0 A PI
440 *DE 0 A PI
450 *DE 0 A PI
460 *DE 0 A PI
470 *DE 0 A PI
480 *DE 0 A PI
490 *DE 0 A PI
500 *DE 0 A PI
510 *DE 0 A PI

```



```

T1:=T1+2;
C1:=C1+(N1+2)*MU;2*MU) BEGIN
IF ABS(C1) LEQ 3*KK THEN BLG1;
SIG:=3*KK;
IF NOT BOOLEAN(DLM+SIG) THEN BEGIN;
IF NOT BOOLEAN(M+KK+PALA1+PAL2)) THEN BEGIN
Z4:=Z4+(-1)**(MU+K1)/2*(FACT(MU+K1)/FACT((MU+K1)/2)*
FACT((MU+K1)/2)*FACT(KK))**2*(-K1/2);
Z9:=Z9+Z4**2*M+KK/2+T)**
**((M+K1+T);
C1:=C1*(1+0.1*(M1+T1)/2) BEGIN; ZB:= 2**(-1)**3**(-2*R1);
ZB1:=ZB1*(1+0.1*(C1+2*0.1*(M1+T1)/2) BLG1;
Z8A1:= 2**(-R2)*9**(-2*R2)-Z8A:=Z8A*ZB;
B1:=K1+K2; C1:=C1*(1+MAX(0,T1-3*1)/1)*I1*(L/2*(1+T1-2*Q1)) BEGIN;
Z71:=Z71*(1+3**(-N1)); Z71:=Z71*ZB1;
C1:=C1*(1+0.1*(0+T2-3*R2))*1/2*(L/2*(2+T2-2*R2)) BLG1;
Z61:=Z61*(1+0.1*(0+T2-3*R2))*1/2*(L/2*(2+T2-2*R2)) BLG1;
Z61:=Z61*Z71; ASFO1:=0; K1:=K1+1; Q1:=M+K1+T-2*R-N1-M2;
C1:=C1*(N1+0.1*(NP1)) BEGIN; Z51:=0;
Y1:=PA[N1]; Y2:=PA[N1+1]; Y3:=PA[N1+2]; Y4:=PA[N1+3]; Y5:=PA[N1+4];
Z6B1:=0; Y1:=Y1+Y2**2+Y3**2+Y4**2+Y5**2;
Z6A:=L/2*(1+0.1*(M1+T1)/2)**2*(Y1+Y2+Y3+Y4+Y5)/2)**2;
C1:=C1*(A1+0.1*(N2)) BEGIN; Z41:=0;
IF UO GLL =A1+Y4 THEN BEGIN
Z3:=0; GLL =A1+Y4 THEN BEGIN
C1:=C1*(A3+MAX(0,-A1+Y4))*1*(L/2*(0.9*(0.9+1-A1+Y4)/2)) BEGIN
Z2:=0;
C1:=C1*(A4+0.1*(MIN(0.9-A3,0.9-A1+N1-2*A3+Y4)) BEGIN
Z1:=Z1*(C1*(A5+0.1*(A4)) BEGIN;
Z1:=Z1*(2**(-A5))*3**A5*(GAM((1+KK+T+Y4+Y2)/2-B+1+A4-A1-A3+5+1/2)
*(GAM(2*A1+A5+2*A3-Y4+Y1/2-Y3/2+1)/FACT(A4-A5)+FACT(A5))**2);
END;
Z2:=Z2*(+1)**A4*(A4)*GAM((L/2*(0.9-A1-A3+Y4)+Y5+Y3+2*Y4)/2+1)
/FACT(0.9+1-A1-2*A3-A4+Y4)*FACT(0.9+1-A1-A3+Y4)/FACT(0.9+2*Y4)+Z1;
E1:=0;
Z41:=Z41*(2**(-A4+A3))*3**A3*(1/(FACT(A3)+FACT(A1+A3-Y4))**2
Z5:=Z5*(L/2*(ND);
Z51:=Z5*(2**(-4+A1))*3**A1*(1/(FACT(A1)+FACT(N2-A1))**2+43); END;
Z1:=Z5+Z6L; ZX1:=2*PA[N1+5];
ASFO1:=ASFO1+ZX;
END;
WRITE(C1:3,K:DIR[0],2,PDATE(ASFO1));
END END END END END END END END;
J1:=T1+0.1*(2+102*N1+1734*L;
DIR[0]=DIR[0]+1;
WRITE(C1:2,J1,2, POINTER(DIR[0]));
DIR[0]=DIR[0]; END END ELL;
WRITE(SALL<<"ACAU AS">>);
TIME:=TIME+1/60-1IF;
WRITE(SALL<<"CRJ/60-1IF);
WRITE(SALL<<"TIMEP D F1 AS">>12,14,7>>L,1+T1);
WRITE(SALL<<"TIMEP D F1 AS">>12,14,7>>L,1+T1);
C1:=C1*(M1+0.1*(M1)) BEGIN; C1:=C1*(M2+0.1*(M1)) BEGIN
C1:=C1*(1+0.1*(L/2) BEGIN; M1:=0;
J1:=T1+0.1*(12+102*N1+1734*L;
READ(C1:2,J1,2, POINTER(AS1[0]));
C1:=C1*(2+0.1*(L/2) BEGIN;
M1:=M1+M2;
LM1:=L/2+3*M1+T1; LM2:=L/2+3*M2+T2;
DLM1:=LM2-LM1;

```

```

10
000100912
000100913
000100914
000100915
000100916
000100917
000100918
000100919
000100920
000100921
000100922
000100923
000100924
000100925
000100926
000100927
000100928
000100929
000100930
000100931
000100932
000100933
000100934
000100935
000100936
000100937
000100938
000100939
000100940
000100941
000100942
000100943
000100944
000100945
000100946
000100947
000100948
000100949
000100950
000100951
000100952
000100953
000100954
000100955
000100956
000100957
000100958
000100959
000100960
000100961
000100962
000100963
000100964
000100965
000100966
000100967
000100968
000100969
000100970
000100971
000100972
000100973
000100974
000100975
000100976
000100977
000100978
000100979
000100980
000100981
000100982
000100983
000100984
000100985
000100986
000100987
000100988
000100989
000100990
000100991
000100992
000100993
000100994
000100995
000100996
000100997
000100998
000100999
000101000

```


TESASO (07/31/79)

Programa de Computo utilizado en la
Dispersión del Sistema ¹²C-¹²C

12
1:25 PM SATURDAY, OCTOBER

100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350
360
370
380
390
400
410
420
430
440
450
460
470
480
490
500
510
520
530
540
550
560
570
580
590
600
610
620
630
640
650
660

```

SSLET AUTOBIND
SPRIND=FROM, SUBJECT, CDULOMH
FILE=FROM, UNIT=DISK, RECOLL=14, BLOCKING=30
UNIT=PRINTER
DISPERSION ELASTICA CON ACOPLAMIENTO A FONDOS CUANTUMOLECULARES
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COLUMN /CONST, PI, DEPI, P12, P14, GA, ALG2, ALG2PI, ALG2PI2, TMO, ACCY
DATA /3, 141, 586, 633, 789, 893, 6, 283, 188, 307, 167, 568, 0,
*, 0, 837, 877, 608, 901, 533, 0, 693, 147, 180, 57, 945, 0,
*, 1, 060, 1, 0=147
END
COMPLEX FUNCTION CFHG(A1,B1,X)
IMPLICIT COMPLEX (A-B)
DOUBLE PRECISION: NZET,ERR,X,XII
A=(0,0,1,0)
BTERM=(1,0,0,0)
ASUM=(1,0,0,0)
ERR=1.0D-8
IF (CABS(A1) .GE. CABS(B1)) GO TO 23
B1=B
X1=X
GO TO 24
A1=B1-A1
B1=X
X1=X
K=1
24 DO 12 I=0,K
  ATERM=BTERM
  NZET=1.0D+11*(CABS(A1I),CABS(B1I))
  AFAC1=(A1I+1)ZL1L1+1
  AFAC2=1.0D+11*(ZL1L1+1)B
  AFAC3=B1L1N=BTERM*AFAC1/(I+1)*X1
  K=K+1
ASUM=ASUM+BTERM
I2=CABS(ATERM-BTERM) .LT. LRR) GO TO 13
12 CONTINUE
13 CUNTEN=CUNTEN+1
IF (CUNTEN-2) 1,15,15
15 CFHG=ASUM
IF (CABS(A1) .GE. CABS(B1)) CFHG=DI.XF(X)+CFHG
RETURN
END
FUNCTION FHG(A,B,X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
SUM=1.0D0
TERM=1.0D0
LRR=1.0D-8
ACXH=1.0D0
IF (A .GE. L) GO TO 23
A1=A
B1=B
X1=X

```

00000100
00000110
00000120
00000130
00000140
00000150
00000160
00000170
00000180
00000190
00000200
00000210
00000220
00000230
00000240
00000250
00000260
00000270
00000280
00000290
00000300
00000310
00000320
00000330
00000340
00000350
00000360
00000370
00000380
00000390
00000400
00000410
00000420
00000430
00000440
00000450
00000460
00000470
00000480
00000490
00000500
00000510
00000520
00000530
00000540
00000550
00000560
00000570
00000580
00000590
00000600
00000610
00000620
00000630
00000640
00000650
00000660

```

070 GU TD 24
080 23 AN=B-A
090 BN=X
100 X4 H=1
110 24 H=1
120 1 00 12 I=0,K
130 ANTERM=TLRM
140 WZET=1.0*UMAX1(DABS(AN),DALS(BN))
150 FACT=(AU+1)/(BN+1)
160 IF(LI.LT.HZL) GU TO E
170 FACT=1.0LO+(AN-BN)/(BN+1)
180 A TERM=TERM*FACT/(I+1)*XI.
190 K=K+1
200 SUM=SUM+TERM
210 IF(TERM.GL.AUXM)TERM=TERM/AUXM
220 IF(DABS(AU*TERM-TLRM).LT.ERI.) GO TO 13
230 12 CONTINUE
240 IF(CUN)LL 25CONTED 1
250 IF(CUN)LL 1915P15
260 15 FHG=SUM
270 IF(A.GL.B) FHG=DEXP(X)*FHG
280 RETURN
290
300 DOUBLE PRECISION FUNCTION CC(J,L)
310 * CALCULATE COEF. CLLSCH=GO*J200/LO>
320 * REF. CUMMONS:SHORTLEY THE THE PY OF ATOMIC SPECTRA P.77
330 * IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
340 IF(J.GE.O)AND(L.EQ.2)CC=1.00
350 IF(CG.L.1.00)GO TO 60
360 IF(J.L.0)GO TO 50
370 IF(L.LT.9)GO TO 50
380 IF(L.NE.J-2)GO TO 20
390 CG=SUBJ(1.50+J*(J-1)/(2*J-1)/(2*J+1))
400 GO TO 60
410 20 IF(L.NE.J)GO TO 40
420 CG=J*(J+1)/DSQRT(1.00*(2*J-1)*J*(J+1)*(2*J+3))
430 GO TO 60
440 40 IF(L.NE.J+2)GO TO 50
450 CG=(J+1)*USQRT(3.00*(J+2)/(2*J+1)/(2*J+2)/(2*J+3))
460 GO TO 60
470 50 CG=C.000
480 60 RETURN
490 END
500 DOUBLE PRECISION FUNCTION I(L1,J1,J)
510 * CALCULATE COEF. RAGAH W(J1,J2,2,2,2,2,J)
520 * REF. DEGENERHARN W OF ANG. MOMENTUM"
530 * IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
540 JP=ABS(J1-2)
550 JPMAX=J1+2
560 IF(L1.LT.JP)GO TO 83
570 IF(L1.LT.JPMAX)GO TO 83
580 IF(L1.NE.(J1-2))GO TO 91
590 X=(J+J1+3)*(J+J1+2)*(J=J1+4)*(J-J1+3)*(J+J1-2)*(J+J1-3)+
600 *(J+J1-3)*(J+J1-1)
610 Y=(2*J1-1)*(2*J1-2)*(2*J1-1)*J1+(2*J1+1)*RAU
620 W=DSQRT(X/Y)
630 GU CN+QUL
640 91 CN+QUL
650 IF(L1.NE.J)GO TO 93
660 X1=(2*J1-3)*(2*J1+2)*(2*J1+1)*J1*(2*J1-1)*140
670 Y1=(J*(J+1)-J1*(J1+1)-6)*(J*(J+1)-J1*(J1+1)-5)-8*J1*(J1+1)

```

```

13
00000670
00000680
00000690
00000700
00000710
00000720
00000730
00000740
00000750
00000760
00000770
00000780
00000790
00000800
00000810
00000820
00000830
00000840
00000850
00000860
00000870
00000880
00000890
00000900
00000910
00000920
00000930
00000940
00000950
00000960
00000970
00000980
00000990
00001000
00001010
00001020
00001030
00001040
00001050
00001060
00001070
00001080
00001090
00001100
00001110
00001120
00001130
00001140
00001150
00001160
00001170
00001180
00001190
00001200
00001210
00001220
00001230
00001240
00001250
00001260
00001270

```

```

11260 W=Y1/DSQRT(X1)
11261 GO TO 101
11300 93 CONTINUE
11310 IF(L1.NE.L2)J1+2)GO TO 95
11320 X2=(J+J1+5)*(J+J1+4)*(J+J1)*(J+J1-1)*
11330 *(-J+J1+4)*(-J+J1+3)*(J+J1+2)*(J+J1+1)
11340 Y2=(2*J1+3)*(2*J1+4)*(2*J1+3)*(2*J1+2)*(2*J1+1)*A20
11350 U=SQRT(A2/Y2)
11360 GO TO 101
11370 95 CONTINUE
11380 A=0.0D0
11390 101 RETURN
11400 END
11410 DOUBLE PRECISION FUNCTION H(J,L1,L2,J1,J2,C02,C22)
11420 IMPLICIT REAL*8(A-H,D=2)
11430 IF(L2.LL.2.AND.L1.LE.2)GO TO 64
11435 IF(L1.EQ.0.AND.L2.EQ.0)GO TO 88
11440 Y1=1.0D0*SQRT(4.0D0*3.141592653589793170)*C0(J,J2)*C02
11450 GO TO 90
11460 Y1=1.0D0/LSQRT(4.0D0*3.141592653589793170)*C0(J,J1)*C02
11470 GO TO 90
11480 Y1=H(J1,J2,J)*DSQRT((2*J1+1)/(4.0D0*3.141592653589793170))*
11490 *C0(J1,J2)*5.0D0*C22
11500 GO TO 90
11510 88 Y1=0
11520 RETURN
11530 90 Y1=0
11540 RETURN
11550 END
11560 SUBROUTINE DELOIN(LMAX,FRE,LAMDA,RA,TA,LA,CON,EXA,EA,DEI,D)
11570 COMPLEX A(1:2),A3,Z1,Z2,BIN,MUL,AL
11580 LUM=EXTL(L1,C01)*A-H*D=2)
11590 L=COMPLEX(A(1),A(2),A(3),Z1,Z2,BIN,MUL,AL)
11600 DOUBLE PRECISION LAMDA
11610 A=(0.0,1.0)
11620 X=FRE**2
11630 FK=FRE**2
11640 I=0
11650 DO 20 J=C,LMAX*2
11660 DO 20 LB=0,2*2
11670 LU=J+LB*(J-LB)
11680 LF=J-LB
11690 LAM=1/(4*FRE)*(2*EA*FRE**2+LAMDA**2/(FA**2)-A*TA**2/(QA**2)
11700 *(-CON/LA)-EXA/(2*FRE)*LB/2+A*LA/(2*FK)
11710 DO 20 L=L0,LF*2
11720 MUL=5*CON/LAMDA**2-A*TA**2*(L+1)+.25)
11730 A1=2*MUL+1
11740 A2=MUL-LA1+.5
11750 AJ=-5-X+A1
11760 AB=2*X-A-A1
11770 Z1=CFHC(A2+1,A1+1,X)
11780 Z2=CFHC(A2,A1,X)
11790 BIN=A3+LL*Z1/22
11800 I=I+1
11810 GOTO(I)=LIM
11820 20 CONTINUE
11830 RETURN
11840 END
11850 SUBROUTINE DERLOG(LMAX,RA,TA,LA,LA,FFI,FCUN,EXA,EA,CG2,C22
11860 *DA,LA,DLRLO)
11870 * CALCULA LA J-ESIMA DERIV. LOG. EXTLINA (DERIV) EN RA
11880

```

4

```

000011270
000011300
000011310
000011320
000011330
000011340
000011350
000011360
000011370
000011380
000011390
000011400
000011410
000011420
000011430
000011440
000011450
000011460
000011470
000011480
000011490
000011500
000011510
000011520
000011530
000011540
000011550
000011560
000011570
000011580
000011590
000011600
000011610
000011620
000011630
000011640
000011650
000011660
000011670
000011680
000011690
000011700
000011710
000011720
000011730
000011740
000011750
000011760
000011770
000011780
000011790
000011800
000011810
000011820
000011830
000011840
000011850
000011860
000011870
000011880
000011890
000011900

```

```

1400      2  A  A  I  T  I  R  P  E  F  I  A  I  N  T  E  R  V  A  L  L  E  T  E  I  D  A  R  F  O  N  P  O  T  E  N  C  I  A  L  D  E  C  O  S  C  O
1410      I  M  P  L  I  C  I  T  R  E  A  L  *  B  C  A  -  H  0  -  Z  )
1420      D  O  U  B  L  E  P  L  C  Y  S  I  O  N  L  A  M  D  A
1430      C  C  M  P  L  E  X  D  E  L  L  O  ( 1 0 0  )  D  E  R  I  V  O  ( 1  )
1440      C  A  L  L  D  E  L  L  I  (  L  M  A  X  ,  F  R  E  ,  L  A  M  D  A  ,  F  A  ,  T  A  ,  D  A  ,  C  O 1  ,  L  X  ,  E  A  ,  D  E  I  O  )
1450      Y  =  0
1460      D  O  3 0  J  =  0  ,  L  M  A  X  ,  2
1470      L  U  =  1  A  B  S  (  J  -  L  U  )
1480      L  F  =  J  +  L  B
1490      D  O  3 0  L  =  L  U  ,  L  F  ,  2
1500      K  =  0
1510      D  O  3 0  L  B  P  =  U  ,  2  ,  2
1520      L  P  =  1  A  B  S  (  J  -  L  B  P  )
1530      L  F  P  =  J  +  L  L  P
1540      L  U  3 0  L  F  =  L  O  P  ,  L  F  P  ,  2
1550      Y  =  1  +  1
1560      X  1  =  2  *  A  *  I  .  A  *  *  2  *  M  (  J  ,  L  B  P  ,  L  B  ,  L  P  ,  L  ,  C  O 2  ,  C  2  2  )
1570      K  =  K  +  1
1580      I  F  (  L  B  ,  C  C  ,  L  B  P  ,  .  A  N  D  .  L  P  ,  E  Q  .  1  )  G  O  T  O  8 0
1590      C  O  R  R  E  C  T  I  O  N  3 0
1600      H  U  C  O  N  T  I  N  U  E
1610      I  F  (  J  ,  E  U  ,  Y  )  G  O  T  O  8 2
1620      N  =  2  *  (  J  -  1  )  +  1
1630      D  E  L  L  O  ( 1  )  =  X  1  +  D  E  L  L  (  N  )
1640      G  O  T  O  3 0
1650      R  2  3 0  D  E  L  L  ( 1  )  =  X  1  +  D  E  L  O  (  K  )
1660      3 0  C  O  N  T  I  N  U  E
1670      R  T  U  R  N
1680      E  N  D
1690      S  U  B  P  R  O  C  E  D  U  R  E  E  N  S  A  L  (  L  M  A  X  ,  E  T  A  1  ,  L  T  A  2  ,  R  O  1  ,  C  2  ,  L  A  ,  L  X  ,  A  ,  S  I  G  M  A  ,  L  ,  I  P  ,  K  B  ,  K  B  F
1700      I  M  P  L  I  C  I  T  L  (  L  A  L  Y  B  C  A  -  H  0  -  Z  )
1710      O  I  M  P  L  E  X  A  ,  1  (  F  1  ,  F  2  ,  F  3  ,  F  4  ,  Y  6  ,  Y  4  ,  Y  B
1720      *  F  2  (  S  1  )  ,  1  (  F  1  ,  F  2  ,  F  3  ,  F  4  )  ,  C  (  S  1  )  ,  4  (  S  1  )  ,  T  E  X  I  (  S  1  )  ,  S  I  G  M  A  (  1  )  ,
1730      *  L  M  F  L  E  X  ,  1  (  1  )  ,  K  P  (  1  )  ,  K  B  (  1  )  ,  K  B  F  (  1  )  ,  C  R  I  K  F  (  1  )  ,  S  I  G  M  A  2  (  S  1  )  ,
1740      A  =  (  C  O  ,  0  ,  1  ,  C  )
1750      A  1  =  S  Q  R  T  (  2  *  E  A  )  *  *  .  .  )
1760      A  2  =  S  Q  R  T  (  2  *  E  A  -  2  *  E  X  A  )  *  *  .  .  )
1770      (  A  L  L  C  O  U  L  U  N  (  L  M  A  X  ,  E  T  A  1  ,  R  O  1  ,  F  ,  I  P  ,  G  ,  G  F  ,  I  C  X  F  ,  S  I  G  M  A  )
1780      K  K  F  =  L  M  A  X  +  1
1790      C  A  L  L  C  O  U  L  U  N  (  K  K  F  ,  E  T  A  2  ,  R  O  2  ,  F  2  ,  1  ,  2  ,  G  2  ,  G  F  2  ,  I  L  X  F  2  ,  S  I  G  M  A  2  )
1800      T  =  0
1810      D  O  4 0  J  =  L  ,  L  M  A  X  ,  2
1820      L  U  =  1  A  B  S  (  J  -  L  U  )
1830      L  F  =  J  +  L  B
1840      D  O  4 0  L  =  L  U  ,  L  F  ,  2
1850      I  =  1  +  1
1860      L  L  =  L  +  1
1870      I  F  (  L  B  ,  E  Q  .  2  )  G  O  T  O  1 0 0
1880      Y  1  =  1  /  A  1  *  (  G  (  L  L  )  -  A  *  F  (  L  L  )  )
1890      Y  2  =  C  O  N  J  U  G  (  Y  1  )
1900      Y  3  =  A  1  *  (  G  I  (  L  L  )  -  A  *  F  P  (  L  L  )  )
1910      Y  4  =  C  O  N  J  U  G  (  Y  3  )
1920      G  O  T  O  1 2 0
1930      I  F  O  Y  1  =  1  /  A  2  *  (  G  2  (  L  L  )  -  A  *  F  2  (  L  L  )  )
1940      Y  2  =  C  O  N  J  U  G  (  Y  1  )

```

15

```

0000013300
0000013400
0000013500
0000013600
0000013700
0000013800
0000013900
0000014000
0000014100
0000014200
0000014300
0000014400
0000014500
0000014600
0000014700
0000014800
0000014900
0000015000
0000015100
0000015200
0000015300
0000015400
0000015500
0000015600
0000015700
0000015800
0000015900
0000016000
0000016100
0000016200
0000016300
0000016400
0000016500
0000016600
0000016700
0000016800
0000016900
0000017000
0000017100
0000017200
0000017300
0000017400
0000017500
0000017600
0000017700
0000017800
0000017900
0000018000
0000018100
0000018200
0000018300
0000018400
0000018500
0000018600
0000018700
0000018800
0000018900
0000019000
0000019100
0000019200
0000019300
0000019400
0000019500
0000019600
0000019700
0000019800
0000019900
0000020000

```



```

3110 FCUL=FACTOR*CEXP(-2*A*BETA*AUX)/DSI/(TLTA/2)**2
3120 SUMA=70.0
3130 IF (IC=1) 40,80,60
3140 X PARTICULAS DISTINGUIBLES
3150 DO 50 L=1,LMAX+1
3160 ZX=SQ(L)
3170 SK(L)=KCAL(ZX)
3180 SI(L)=AIFAU(ZX)
3190 DELTA(L)=DATAN2(SI(L),SR(L))
3200 ZZ=SR(L)**2+SI(L)**2
3210 AA(L)=USLRT(ZZ)
3220 WRITE(6,5)J,DELTA(L),AA(L)
3230 F5 FUKMAT(1X,"J=",I2,3X,"DLTA(J)=",E10.4,3X,"AA(J)=",F10.4)
3240 WRITE(10,6)J,DELTA(L),AA(L)
3250 F6 FUKMAT(1X,"J=",I2,3X,"DLTA(J)=",E10.4,3X,"AA(J)=",F10.4)
3260 50 SUMA=SUMA+(2*L-1)*(ZX-1)*LEXI(A*2*ETA(L))*P(I)
3270 SUMA=-A*SUMA/2+CA+FCUL
3280 GO TO 80
3290 PARTICULAS IDENTICAS MULTIPLA SUMA=AMPL(TETA)+AMPL(PI-TETA)
3300 X DO ADX=L/LOG(COS(TETA/2))
3310 FCUL=L*LVLEMA*F1/2*CEXP(-2*A*BETA*AUX1)/LCCS(TETA/2)**2
3320 SUMA=70.0
3330 ZX=SQ(L)
3340 SK(L)=KCAL(ZX)
3350 SI(L)=AIFAU(ZX)
3360 DELTA(L)=DATAN2(SI(L),SR(L))
3370 ZZ=SR(L)**2+SI(L)**2
3380 AA(L)=USLRT(ZZ)
3390 J=L-1
3400 WRITE(6,6)J,DELTA(L),AA(L)
3410 F8 FUKMAT(1X,"J=",I2,3X,"DLTA(J)=",E10.4,3X,"AA(J)=",F10.4)
3420 WRITE(10,7)J,DELTA(L),AA(L)
3430 F9 FUKMAT(1X,"J=",I2,3X,"DLTA(J)=",E10.4,3X,"AA(J)=",F10.4)
3440 70 SUMA=SUMA+(2*L-1)*CEXP(A*2*ETA(L))*P(I)
3450 SUMA=-A*SUMA/CA+FCUL
3460 X CALCULO DE SLCCION
3470 SEC=L*LAL(SUMA*CONJG(SUMA))*1.E27
3480 NN=1,N*1
3490 DATOS(NN)=SEC
3500 WRITE(6,7) TETA1,SEC
3510 F9 FUKMAT(1X,"TETA1=CH (GRADOS)=",F6.2,3X,"SECCION (VIL)BARN)=",F7.2)
3520 WRITE(10,8) TETA1,SEC
3530 F9 FUKMAT(1X,"TETA1=CH (GRADOS)=",F6.2,3X,"SECCION (VIL)BARN)=",F7.2)
3540 IF (TETA1.LE.0) RETURN
3550 IFLT=TETA1/2
3560 IF (100*IFLT) 100,20,20
3570 RETURN
3580 LML
3590 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
3600 DIMENSION DATOS(800),PTOS(78),SIGMA(51)
3610 COMPLEX CKLUDY(200)
3620 CUMPLX=1.0,528.30,MOC,M01,1.1,M00,1.11,1.10,MFN00
3630 REAL TIL,TEC
3640 DOUBLE PRECISION LAMDA
3650 COMPLEX AK(100),KBP(100),K(100),M(20),M1(20),KSC(51)
3660 * MEN(10),CKPKP(100)
3670 DATA PLAI,CI,CARCA,ANU,FLNMI,1',/1.05459L-27,8.80325D-,0,
3680 * 1.6590L-4,1.60L-13,1.6020L-,/
3690 DATA F10U,371.6,841.4,741.3,631.0,501.2,2*1.4,177.8,1*2.0,89.1,
3700 * 84.1,66.6,79.4,35.5,55.0,39.1,89.1,89.1,47.3,20.0,17.8,18.4,

```

```

000000410
000000420
000000430
000000440
000000450
000000460
000000470
000000480
000000490
000000500
000000510
000000520
000000530
000000540
000000550
000000560
000000570
000000580
000000590
000000600
000000610
000000620
000000630
000000640
000000650
000000660
000000670
000000680
000000690
000000700
000000710
000000720
000000730
000000740
000000750
000000760
000000770
000000780
000000790
000000800
000000810
000000820
000000830
000000840
000000850
000000860
000000870
000000880
000000890
000000900
000000910
000000920
000000930
000000940
000000950
000000960
000000970
000000980
000000990
000001000

```

3120
3130
3140
3150
3160
3170
3180
3190
3200
3210
3220
3230
3240
3250
3260
3270
3280
3290
3300
3310
3320
3330
3340
3350
3360
3370
3380
3390
3400
3410
3420
3430
3440
3450
3460
3470
3480
3490
3500
3510
3520
3530
3540
3550
3560
3570
3580
3590
3600
3610
3620
3630
3640
3650
3660
3670
3680
3690
3700
3710
3720
3730
3740
3750
3760
3770
3780
3790
3800
3810
3820
3830
3840
3850
3860
3870
3880
3890
3900
3910
3920
3930
3940
3950
3960
3970
3980
3990
4000
4010
4020
4030
4040
4050
4060
4070
4080
4090
4100
4110
4120
4130
4140
4150
4160
4170
4180
4190
4200
4210
4220
4230
4240
4250
4260
4270
4280
4290
4300
4310
4320

```
* 15.9,11.2,35.5,44.7,20.0,14.1,12.6,22.4,8.1,7.9,7.1,4.3,
* 11.2,5.0,15.9,15.9,8.5,22.4,12.6,7.9,6.4,4.1,4.1,1.1,1.4,1.1,1.1,1.1,
* 9.9,2.2,3.0,3.0,7.5,7.5,1.8,4.5,3.3,4.4,2.3,8.2,1.3,1.3,1.0,1.1,1.1,4.1,1.1,
* 2.1,6.7,2.8,2.5,1.0,1.8,2.0,2.2,1.7,1.1,3.1,1.3,1.5,3.2,1.0,1.0,1.7,
OU
K1=3+1
Z1=1
LATUS(K1)=PTGS(I)
CUMPLX(A,Z)
A=(0.0,1.0)
RLAL(5,7) Z1,Z2,A1,A2,LX,KK
RLAU(5,7) VO,RMIN,R,T,A,L,C02,C22,B2,D
RLAL(5,7) VO,RMIN,R,T,A,L,C02,C22,B2,D
WRITE(6,14)C22
41 FURNAT(11)X,"C22=","F7.4)
WRITE(6,14)Z1,Z2,A1,A2,LX
151 FURNAT(11)X,"C22=","F7.4)
WRITE(6,14)Z1,Z2,A1,A2,LX
41 FURNAT(11)X,"Z1=","F12.3X","Z2=","F12.5X","A1=","F13.3X","A2=","F13.
* 5X","E0=","F10.4X","E1=","F10.4X","PARA=","F10.4X","DEF
* POTEN(LXC INTERNO)
WRITE(6,8)VO,RMIN,R,T,A,B,C02,B2,D
6 FURNAT(11)X,"VO=","F10.4,1X","RMIN=","L10.4,1X","B=","F9.4,3X,
* 7JAB=","F8.4,1X","B=","L10.4,1X","C02=","L10.4,1X","P2=","F10.4,1X,
OU
WRITE(15)Z1,Z2,A1,A2,EX
41 FURNAT(11)X,"Z1=","F12.3X","Z2=","F12.5X","A1=","F13.3X","A2=","F13.
* 5X","E0=","F10.4,1X","E1=","F10.4,1X","PARA=","F10.4,1X","DEF
* POTEN(LXC INTERNO)
WRITE(10,7)VO,RMIN,R,T,A,B,C02,B2,D
7 FURNAT(11)X,"VO=","F10.4,1X","RMIN=","L10.4,1X","B=","F9.4,3X,
* 7JAB=","F8.4,1X","B=","L10.4,1X","C02=","L10.4,1X","P2=","F10.4,1X,
OU
* 8E=","F10.4,1X,
WRITE(10,11)E0,E,F,DE,TETA0,TETA,F,DLTA
11 FURNAT(11)X,"E0=","F9.4,3X","LF=","F9.4,3X","DI=","F9.4,1X,
* 11X","TETA=","F7.3,3X","TETALE=","F7.3,3X","TETA=","F7.3,1X,
WRITE(6,8)E0,E,F,DE,TETA0,TETA,F,DLTA
12 FURNAT(11)X,"E0=","F9.4,3X","LF=","F9.4,3X","DI=","F9.4,1X,
* 11X","TETA=","F7.3,3X","TETALE=","F7.3,3X","TETA=","F7.3,1X,
RC=R*FERMI
AIGR=A1*AIU
AZGB=A2*AIU
ATOTCK=A1CK+A2GR
AKEUGR=AIGR+A2GR/ATOTGR
RMIN=KMIN*FERMI
VOERG=VO*LG
* FREC2=SQRT(CALDGR*(RMINC**4/(2*RC**2))+
RC*W2-RMIN)C1/PLANK*RMINC**2
LAMBDA=AKEUGR*FREC1/PLANK*RMINC**2
WRITE(6,4)FREQ1,BHDA
41 FURNAT(11)X,"FREC1=","D10.4,2X","LAMBDA=","D10.4)
DLHG=B*E*LG
EXE=EX*LG
FREC2=EX/L/PLANK
WRITE(10,7)FREC2
EUNIT=PLANK*FREC2
FLU=FLU1/FREC2
EXA=EX/EUNIT
DA=DE/EUNIT
RLRU=B*LG
BA=BE/EUNIT*DSORT(PLANK/(F2*FREC2))
RA=K*USLRT(ARELGR*FREC2/PLANK)
```

18
00003720
00003730
00003740
00003750
00003760
00003770
00003780
00003790
00003800
00003810
00003820
00003830
00003840
00003850
00003860
00003870
00003880
00003890
00003900
00003910
00003920
00003930
00003940
00003950
00003960
00003970
00003980
00003990
00004000
00004010
00004020
00004030
00004040
00004050
00004060
00004070
00004080
00004090
00004100
00004110
00004120
00004130
00004140
00004150
00004160
00004170
00004180
00004190
00004200
00004210
00004220
00004230
00004240
00004250
00004260
00004270
00004280
00004290
00004300
00004310
00004320

```

19
4330 CUA=DSGRT(AREGGL/(FREC2*PLA*(K**3)))*2*Z1*Z2*CARGA**2
4340 WKT=DE(10**7)*HATA*BA*CON*EA(LA,LA)
4350 F1=1
4360 F1=L1*LIG
4370 NN=NN+2
4380 DATUS(NI)=L1
4390 WRITE(C,45) E1
4400 * 45 FUMLT(1X,"ENERGIA C.M. EN PLV=",F7.3//,?X,"COEFICIENTES
4410 * DE FUMLT(1X,"TRANSICION Y TRANSICION Y",?)
4420 * 45 FUMLT(1X,"ENERGIA C.M. EN PLV=",F7.3//,?X,"COEFICIENTES
4430 * DE FUMLT(1X,"TRANSICION Y TRANSICION Y",?)
4440 FA=Z1*Z2
4450 CA=DSGRT(2*AREGGR*E)/PLANCK
4460 PLA=ANLUGR*Z1*Z2*CARGA**2/(PLANCK**2*CA)
4470 LMAX=LIMIT(RU1)*KX
4480 CA22=2*ANLUGR*(E-EXE)/(PLANCK**2)
4490 IF(CA22.GT.0) GO TO 10
4500 WRITE(C,5) CA22
4510 * 5 FORMAT(1X,"ERROR EN PARALELLO CA22:",
4520 * /,?X,CA22**2E"015.4,"DEIL"SLR POSITIVO"/)
4530 CALL EXIT
4540 IJA=ANLUGR*Z1*Z2*CARGA**2/(PLANCK**2*CA2)
4550 RU2=CA2**1.5
4560 WRITE(10,*)LMAX,FRE,EXA,EA
4570 CALL DELUG(LMAX,RA,TA,LANLA,FRE,CON,EXA,EA,C02,C22*,A,DA,DELU)
4580 WKT=(10**7)*ETA1*ETA2*RU1*RU2
4590 CALL ENSAL(LMAX,ETA1,ETA2,RL1,RO2,EA,EXA,SIGMA,K,KP,KPB,CKPKEF)
4600 Y=0
4610 IND=0
4620 DU 50 J=LMAX,2
4630 I1=0
4640 DU 50 LB=0,2,2
4650 LU=ABS(J-LB)
4660 LF=J-LB
4670 DU 50 L=LO,LF,2
4680 N=0
4690 DU 50 LBP=0,2,2
4700 LOP=ABS(J-LBP)
4710 LFP=J-LBP
4720 DU 50 LP=LUP,LFP,2
4730 I=I+1
4740 Y=INT(1+I)
4600 IF(LB.EQ.LBP.AND.LP.EQ.L)GO TO 130
4610 IF(LB.EQ.L)GO TO 125
4620 I=2*(I+1)*N
4630 NV=(I-L-10+2*J-2)/4+2*J-1
4640 Z1=DELUG(I)/RA*(KB(I)/KPB(I,0))*CKI(KLP(I,L))
4650 Z2=DELUG(I)/RA*(KB(I)/KPB(I,0))
4660 GU TO 140
4670 I1=(I-N)/2+1
4680 Z1=(-DELUG(I)/LA*(K(N)/KPB(NA))*CKPKEP(NA)
4690 Z2=DELUG(I)/RA*(KB(N)/KPB(I,A))
4700 GU TO 140
4710 I30 CONTINUE
4720 IF(J.LU.0)GO TO 135
4730 I4=2*(J-1)+1

```

```

00004330
00004340
00004350
00004360
00004370
00004380
00004390
00004400
00004410
00004420
00004430
00004440
00004450
00004460
00004470
00004480
00004490
00004500
00004510
00004520
00004530
00004540
00004550
00004560
00004570
00004580
00004590
00004600
00004610
00004620
00004630
00004640
00004650
00004660
00004670
00004680
00004690
00004700
00004710
00004720
00004730
00004740
00004750
00004760
00004770
00004780
00004790
00004800
00004810
00004820
00004830
00004840
00004850
00004860
00004870
00004880
00004890
00004900
00004910
00004920
00004930

```


REFERENCIAS

- 1.- A. de Shalit y H. Feshbach, "Theoretical Nuclear Physics Volume I: Nuclear Structure", (Wiley, New York, 1974).
- 2.- G.C. Baldwin y G.S. Klaiber, Phys. Rev. 71 (1947) 3; Phys. Rev. 73 (1948) 1156.
- 3.- E. Feenberg Phys. Rev. 55 (1939) 504.
- 4.- N. Bohr y J.A. Wheeler Phys. Rev. 56 (1939) 426.
- 5.- J. Rainwater, Phys. Rev. 79 (1950) 432.
- 6.- J. M. Eisenberg y W. Greiner "Nuclear Models" (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- 7.- A. Bohr y B. Mottelson "Nuclear Structure" Volumen II Nuclear Deformations (Benjamín, Massachusetts, 1975).
- 8.- O. Castaños y A. Frank, "El Modelo Colectivo del Núcleo y sus Aplicaciones", tesis, U.N.A.M. (1974).
- 9.- M. Baranger y K. Kumar, Nucl. Phys. A192 (1967).
- 10.- D.R. Bes, Nucl. Phys. 10 (1959) 373.
- 11.- D.R. Bes y G. Dussel, Nucl. Phys. A143 (1970) 623.
- 12.- G. Gneuss y W. Greiner, Nucl. Phys. A171 (1971) 449.
- 13.- M. Sedlmayr, "Das Periodensystem der GG-Kerne im Massenbereich Von A=40 Bis A=254", Instituto de Frankfurt, Alemania (1976).
- 14.- E. Chacón, M. Moshinsky y R. Sharp, J. Math Phys. 17 (1976) 668.

- 15.- E. Chacón y M. Moshinsky, *J. Math. Phys.* 18 (1977) 870.
- 16.- D.A. Bromley, in *Proceedings of The Second International Conference on Clustering Phenomena in Nuclei, 1975, Univ. of Maryland.*
- 17.- D.A. Bromley, J.A. Kuehner y E. Almquist, *Phys. Rev. Lett.* 4 (1960) 365.
- 18.- L. V. Bernus, et. al., "A Collective Model for Transitional Nuclei", in *Heavy Ion, High Spin States and Nuclear Structure (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1975).*
- 19.- P. Hess y W. Greiner, "Collective Models and Their Applications", *Proceedings of the Eighteenth Scottish Universities Summer School in Physics St. Andrews, 1977.*
- 20.- U. Mosel y W. Greiner, *Z. Phys.* 271 (1968) 254; M. Brack, J. Damgaard, A.S. Jensen, H.C. Pauli, V.M. Strutinsky, C.V. Wong, *Rev. Mod. Phys.* 44(1972) 320.
- 21.- L. V. Bernus, W. Schneider y W. Greiner, *Lett. Nuovo Cim.* 6 (1973) 527.
- 22.- M. Hamermesh, "Group Theory and Its Application to Physical Problems" (Addison-Wesley, Reading, Mass, 1962).
- 23.- N. Kemmer, D.L. Pursey y S.A. Williams, *J. Math. Phys.* 9 (1968) 1224; *J. Math. Phys.* 9 (1968) 1231.
- 24.- M. Moshinsky, "Group Theory and The Many Body" (Gordon & Breach, New York, 1966).
- 25.- M. Moshinsky, "The Harmonic Oscillator in Modern Physics: From Atoms to Quarks (Gordon & Breach, New York, 1968).
- 26.- M. Moshinsky y V.S. Devi, *J. Math. Phys.* 10 (1969) 455.

- 27.- R. Sharp y C.S. Lam J. Math. Phys. 10 (1969) 2033.
- 28.- N.Y. Vilenkin, "Special Functions and Theory of Groups Representations" (A.M.S. transl, Providence, R.I., 1968).
- 29.- M. A. Lohe, "The Development of the Boson Calculus for the Orthogonal and Symplectic Groups", Thesis, University of Adelaide (1974).
- 30.- J. D. Louck y H. W. Galbraith, Rev. Mod. Phys. 44 (1972) 540.
- 31.- M. Moshinsky y C. Quesne, J. Math. Phys. 12 (1971) 1780.
- 32.- M. E. Rose, "Elementary Theory of Angular Momentum" (Wiley, New York, 1957).
- 33.- O. Castaños, A. Frank y M. Moshinsky, J. Math. Phys. 19 (1978) 1781.
- 34.- P. Hess, J. Phys. G.: Nucl. Phys. 4(3) 1978 L59 .
- 35.- M. Moshinsky, "Confrontation of Nuclear Collective Models" preprint I.F.U.N.A.M. (1979).
- 36.- O. Castaños, E. Chacón, A. Frank, M. Moshinsky, J. Math. Phys. 20 (1979) 35.
- 37.- B.R. Judd, "Lie Groups and The Jahn-Teller Effect for a Color Center", Forth International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, University of Nijmegen, Junio 1975.
- 38.- D. F. Jackson, "Nuclear Reactions" (Chapman and Hall, London, 1970).
- 39.- E. Aguilera, O. Castaños, A. Frank y M. Moshinsky, "Memorias del Primer Simposio de Física Nuclear de Oaxtepec", ed. A. Dacal, P. Federman, P. A. Mello, M. E. Ortíz, Instituto de Física, U.N.A.M. pág.1.

- 40.- L. J. Schiff, "Quantum Mechanics, (Mc Graw-Hill, 1968).
- 41.- T. Tamura, Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 679.
- 42.- Ver referencia 20.
- 43.- U. Mosel y H.W. Schmith, Phys. Rev. C4 (1971) 2185;
Nucl. Phys. A165 (1971) 73.
- 44.- K. Pruess y W. Greiner Phys. Lett. 33B (1970) 197.
- 45.- W. Scheid y W. Greiner Z. Phys. 226 (1969) 364.
- 46.- E. Aguilera, O. Castaños y A. Frank, "Dispersión de Partículas Cargadas Sujetas a un Potencial de Corto Alcance", notas del Instituto de Física de la U.N.A.M. (1978).
- 47.- H. J. Fink, W. Scheid y W. Greiner, Nucl. Phys. A188 (1972) 259.
- 48.- J. V. Park, W. Scheid y W. Greiner Phys. Rev. C16 (1977) 2276.
- 49.- D. A. Bromley, "Nuclear Molecules", Scientific American diciembre de 1978.
- 50.- C. M. Jachcinski, T.M. Comier, P. Braun - Munzinger, G.M. Berkowitz, P.M. Comier, M. Gai y J. W. Harris, Phys. Rev. C17 (1978) 1263.
- 51.- E. P. Wigner, Am. J. Phys. 17 (1949) 99.
- 52.- M. Moshinsky, Phys. Rev. 81 (1951) 347.
- 53.- E. P. Wigner, Phys. Rev. 70 (1946) 606.
- 54.- A.M. Lane y R.G. Thomas, Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 257.
- 55.- H. Feshbach, J. Phys. 37 (1976) C5-177.

- 56.- R.G. Stokstadt, Proc. of The Europhysics Study Conf. on Intermediate Processes in Nuclear Reactions, 1972, ed. by Cindro et al.
- 57.- A. Gobbi, R. Wieland, L. Chua, D. Shapira y D.A. Bromley, Phys. Rev. C7 (1973) 30.
- 58.- E.R. Cosman, T.M. Cormier, K. Van Bibber, A. Sperduto, G. Young, J. Erskine y L. R. Greenwood, Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 265.
- 59.- B. Imaniski Phys. Lett. 27B (1968) 265.
- 60.- D. Scott, "A Review on the Experimental Situation of Heavy-Ion Physics", notas del Instituto de Física, U.N.A.M. (1978).
- 61.- A. M. Lane, "Nuclear Theory", (W. A. Benjamín, Inc. New York 1963).
- 62.- Ver referencia 45.
- 63.- I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, "Table of Integrals Series and Products", (Academic Press, New York, 1965).
- 64.- M.A. Preston, "Physics of The Nucleos", (Addison - Wesley, Reading, Mass., 1962).
- 65.- Ver referencia 49.
- 66.- K. A. Erb y D.A. Bromley, "Nuclear molecular resonances in heavy-ion collisions", Phys. Today, enero de 1979.
- 67.- R. Konnecke y W. Greiner, "Molecules in Heavy Ion Collisions", Heavy Ion Conference Hvar, Yugoslavia (1977).
- 68.- O. Castaños, A. Frank y P. Federman, Phys. Lett. (en prensa).