UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Ajuste a la Valoración de Instrumentos Financieros Derivados por Riesgo de Contraparte. Credit Valuation Adjustment (CVA).

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ALEJANDRO SANTOYO CANO

DIRECTORA DE TESIS
DRA. MARÍA ASUNCIÓN BEGOÑA FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CDMX, MAYO 2018

Índice general

1. Preliminares **7**

1.1. Instrumentos financieros derivados . . . 7

1.1.1. Derivados sobre equity . . . 8

1.4.1. Derivados sobre divisas . . . 10

1.7.1. Derivados sobre tasas de interés . . . 12

1.14.1. Derivados de crédito . . . 19

2. Riesgo de Crédito **21**

2.1. Modelo para el tiempo de default . . . 21

2.10. Modelo de riesgo de crédito con filtración alargada . . . 27

2.15. Valuación de derivados de crédito básicos . . . 30

2.15.1. Bonos sujetos a incumplimiento . . . 30

2.15.2. Credit Default Swaps . . . 33

3. Riesgo de contraparte **39**

3.3. Riesgo de contraparte . . . 41

3.3.1. Payoff general sujeto a incumplimiento . . . 41

3.6.1. Fórmulas semi-analíticas de CVA . . . 44

3.7. Mitigantes de crédito . . . 46

3.7.1. Netting . . . 46

3.7.2. Colateral . . . 47

3.7.3. Recouponing . . . 48

3.7.4. Cláusulas de término de contrato . . . 49

3.7.5. Contrapartes centrales . . . 50

3.7.6. CVA de un portafolio de derivados 50

3.8. Implementación en R del cálculo de CVA de un Forward de FX 51

3.9. Observaciones y Conclusiones 62

A. Implementaciones del cálculo de CVA 65

A.1. Calibración de crédito 65

A.2. CVA de un forward de FX 66

A.3. CVA de un forward de FX por Monte Carlo 69

A.4. CVA de un swap 73

B. Glosario 77

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por todo el apoyo que me han brindado, por siempre motivarme a llegar más lejos. A mis amigos, que gracias a las gratificantes pláticas siempre hay algo nuevo que aprender. A la Dra. María Asunción Begoña Fernández Fernández, que gracias a su apoyo he concluido este trabajo, así como a mis sinodales, que se dieron el tiempo de discutir conmigo este trabajo y con cuyas observaciones sin duda mejoró.

Agradezco a CONACyT por la beca que me otorgó mientras cursé la Maestría.

Introducción

Las finanzas cuantitativas han tenido diferentes enfoques desde 1973 con el trabajo de Black, Scholes y Merton. En esa época se buscaba modelar matemáticamente los conceptos básicos de las finanzas, como el arbitraje, los portafolios autofinanciables y el precio de derivados simples. Ya con los conceptos básicos bien definidos, el siguiente boom fue estructurar productos cada vez más complejos, en cuanto a las condiciones de pago, fechas de observación intermedias, dependencia sobre otro tipo de instrumentos, etc. Los derivados OTC ganaron popularidad y este mercado creció mucho más que el estandarizado, la cantidad de productos exóticos permitió el uso de muchas más herramientas matemáticas, así como mezclas de ellas, como la teoría de probabilidad, cálculo estocástico, ecuaciones diferenciales parciales, métodos numéricos y métodos de simulación estocástica en general.

Antes de las crisis el 2008 empezaron a venderse en el mercado derivados de crédito. Esto reflejó el hecho de que algunas contrapartes estaban al tanto de la existencia del riesgo de crédito o de incumplimiento de sus contrapartes. Pero no fue sino después de la crisis financiera de 2008 que se tuvo consciencia de la importancia del riesgo de contraparte; el problema de los derivados exóticos es que en general es mucho más difícil construir un portafolio de cobertura, y en caso de incumplimiento se puede tener una pérdida importante.

Es por eso que ahora parece que el mercado va convergiendo de alguna manera a los mercados estandarizados, en el sentido de que buscan garantizar el dinero invertido en derivados mediante cláusulas en los contratos, o acuerdos para mitigar el riesgo de contraparte. Es decir, el mercado OTC sigue teniendo suficiente flexibilidad en cuanto al tipo de productos que se cotizan, pero con la posibilidad de añadir condiciones en el contrato de compra/venta que reduzcan el riesgo de contraparte.

La mayor parte de los libros sobre finanzas cuantitativas tratan sobre los modelos básicos que se ocupan por tipo de producto o por tipo de estrategia de cobertura, pero casi ninguno habla acerca de la calibración de dichos modelos a los datos de mercado. En general esta parte puede ser la más complicada, pues requiere de una implementación eficiente y bien estructurada que dependen de las condiciones del mercado, principalmente de los instrumentos que cotizan de manera regular.

La principal complejidad que se tiene al querer ofrecer un modelo de riesgo de contraparte es que su verdadera utilidad se ve reflejada a nivel portafolio y no instrumento por instrumento. Esto en términos de modelación exige un modelo híbrido que incluya modelos de riesgo de crédito, de valuación de derivados de equity, fx, commodities o tasas de interés, así como las posibles correlaciones que pueda haber entre todos los productos que conforman el portafolio.

El objetivo de este trabajo es mostrar el desarrollo de uno de estos ajustes a la valoración, el Credit Valuation Adjustment (CVA). Como veremos más adelante el CVA se puede pensar como el precio que tiene el riesgo de que la contraparte no haga frente a sus obligaciones en el contrato derivado y se calcula como la diferencia del precio del derivado si la contraparte fuese libre de default y el precio del derivado considerando que la contraparte tiene probabilidad positiva de default:

$$CVA_t = V_t^{\text{default free}} - V_t^{\text{default}}$$

La razón de que sea un ajuste *aditivo* es porque de esta manera es más sencillo separar la cobertura del derivado riesgoso en la cobertura del derivado como siempre se hace más la cobertura del CVA.

Cuando se considera que las dos partes involucradas en el derivado tienen posibilidad de default, el que compra el derivado tiene que considerar el precio sin probabilidad de default menos el CVA y agregando un precio a su propio incumplimiento, este se conoce como el Debit Valuation Adjustment (DVA), quedando el precio de la siguiente manera:

$$V_t^{\text{default}} = V_t^{\text{default free}} - CVA_t + DVA_t$$

Este es el precio considerando el posible incumplimiento de ambas partes del contrato derivado; sin embargo, no es el único ajuste que en la práctica se le hace al precio. Cuando se tiene un derivado siempre hay una cobertura para mitigar el riesgo de mercado por contratarlo, y cuando se ha considerado tanto el CVA y el DVA puede ser que la cobertura esté formada por instrumentos donde no se cobren estos ajustes, surgiendo así una asimetría y es por ello que se cobra un ajuste conocido como Funding Valuation Adjustment (FVA), cuando es positivo se conoce como Funding Benefit (FB) y cuando es negativo se conoce como Funding Cost (FC).

En general, todos los ajustes que se agregan al precio se conocen como XVA, donde la "X" es variable para el Valuation Adjustment, i.e. incluye al CVA, DVA, FVA, entre otros ajustes.

En este trabajo solo consideraremos al CVA unilateral, esto es, cuando una de las contrapartes del derivado tiene probabilidad de default.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se hace un resumen de los preliminares, que incluyen la definición y valuación de los derivados sobre los que es más común calcular el CVA; en el Capítulo 2 se da una introducción al cálculo del riesgo de crédito con el modelo basado en la intensidad, que será la manera de modelar el tiempo de default que se ocupará en el cálculo del CVA, en este apartado se considera que la información del mercado y la información sobre el default son distintas y se considera una filtración aumentada que considera ambas y con ello en mente se valoran los derivados de crédito más comunes, en particular los CDS's que es con lo que se calibra la curva de probabilidades de supervivencia asociadas a la contraparte a la que se le cobra el CVA, al final del capítulo se incluye un método numérico para calibrar dichas probabilidades a partir de primas de CDS y la implementación con ayuda de una librería del lenguaje R llamada *credule*; en el Capítulo 3 es donde desarrollaremos el cálculo del CVA, haremos el desarrollo teórico a partir de la ecuación de valuación sujeta a riesgo de contraparte, se darán ejemplos de cómo calcular el CVA para un solo derivado en el caso de un forward de FX y de un swap, donde podemos calcular de manera semi-analítica el CVA de ambos. Más adelante se considera el CVA de un portafolio contemplando algunos de los mitigantes de riesgo de contraparte. Por último se presentan las implementaciones del CVA del forward de FX y del swap y se muestran gráficas de como cambian las exposiciones y el CVA cuando se varían algunos de los parámetros que conforman la fórmula del CVA.

Capítulo 1

Preliminares

Con el objetivo de que el trabajo esté autocontenido, en este capítulo vamos a definir los conceptos financieros básicos, su taxonomía, la interrelación que existe entre los distintos instrumentos y la valuación de los que nos serán de utilidad más adelante. Se explicará en qué consiste calibrar un modelo, de qué factores depende y se mencionarán algunos ejemplos de calibración que son parte del día a día en el mercado financiero.

1.1. Instrumentos financieros derivados

Los instrumentos financieros derivados, o simplemente derivados, son instrumentos cuyo valor depende de algún activo subyacente, que usualmente sirven como cobertura o para formar estrategias que dependen del precio de dicho activo subyacente. Por el momento queda muy ambiguo el concepto de derivado, pues realmente son contratos bien estructurados donde se definen todas las características y las condiciones en las que se pagan o reciben flujos durante la vida del contrato.

Dividiremos a los derivados por tipo de subyacente, es decir, daremos las características y los ejemplos de derivados en los distintos tipos de mercados financieros: equity, divisas, tasas de interés y crédito. La razón de esta división es porque el riesgo de contraparte, a pesar de tener una fórmula general, los supuestos para realizar los cálculos dependen fuertemente del tipo de mercado al que pertenece el derivado.

En los diferentes tipos de subyacentes, cada vez que trabajemos con un modelo lo haremos bajo la medida de riesgo neutral, o en una medida asociada a algún numerario que más nos convenga, dejando atrás el, no siempre tan sencillo, paso de la medida objetivo $\mathbb{P}$ a una medida equivalente conveniente.

Para este capítulo se utilizaron varias referencias estándar en la literatura de finanzas cuantitativas: para una introducción sencilla tanto cualitativa como cuantitativa se puede consultar el libro de Hull [HB16], el libro de Robert Macdonald [MCF06] el libro de Mark Joshi [Jos03] y el libro de Baxter y Rennie [BR96]; Los textos especializados por subyacente son: (Equity) el libro de Bouzoubaa y Osseiran [BO10], (FX) el libro de Kotze [Kot11], (Tasas de interés) el libro de Brigo y Mercurio [BM07], los 3 volúmenes de Andersen y Piterbarg [AP10] y el libro de Guyon y Labordere [GHL13].

1.1.1. Derivados sobre equity

El mercado de equity está formado por acciones e índices; éstos son los subyacentes sobre los que se hacen derivados. Los derivados sobre equity son complicados de valuar y por tanto de cubrir por varias razones, por ejemplo:

- Pagan dividendos periódicamente, que a priori no se conoce su valor; estos dividendos esperados pueden ser absolutos o relativos, lo cual también complica la dinámica asociada al precio del subyacente.
- No necesariamente dependen de un solo activo, de hecho son bastante comunes los derivados sobre el valor de un portafolio de equities.
- Hay payoffs que pagan en una divisa distinta a la que cotiza el equity en mercado, *payoff quanto*, agregando así incertidumbre de tipo de cambio.

El modelo más común para el precio del activo subyacente es el modelo de Black-Scholes-Merton, aunque en la práctica suele hacerse un par de modificaciones para poder incluir los dividendos en la simulación de las trayectorias del proceso, pues no todos los derivados tienen una fórmula cerrada incluso bajo este modelo, por lo que se recurre a la valuación por el método de Monte Carlo.

El modelo de Black-Scholes-Merton consiste en un activo subyacente, que supondremos que paga dividendos a tasa continua q, y una cuenta corriente que evolucionan con la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} d\beta_t &= r_t\beta_t dt \\ dS_t &= S_t\left((r_t - q_t)dt + \sigma_t dW_t\right), \end{aligned}$$

donde r_t, q_t y σ_t son funciones deterministas. r_t es la tasa libre de riesgo, q_t la tasa de dividendos continua, σ_t es la volatilidad del equity y $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano bajo la medida de riesgo neutral $\mathbb{Q}$, que es la medida asociada al numerario $\{\beta_t\}_{t\geq 0}$, además sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración canónica asociada al Browniano.

En el caso de los equities la mayoría de los derivados tienen vencimientos a corto plazo, por lo que el efecto de las tasas de interés no es suficientemente grande como para modelarlas con un proceso estocástico. Estamos suponiendo que el equity paga dividendos de manera continua para simplificar las fórmulas, aunque en la práctica los dividendos juegan un papel muy importante en la calibración de la curva de forwards de mercado.

Los derivados de equity más comunes en mercado son:

- Forwards y futuros.
- Opciones call y put, tanto europeas como americanas.
- Derivados exóticos, por ejemplo: barreras, asiáticas, dividend swaps y variance swaps.

En este trabajo utilizaremos los forwards y las opciones call y put. Empecemos definiendo un contrato forward.

Definición 1.2. *Un forward de equity es un contrato bilateral que consiste en intercambiar una unidad del activo subyacente al vencimiento del contrato por una cantidad de dinero pactada al inicio del contrato.*

Si suponemos que el vencimiento del contrato es T y el precio que se pacta al inicio es K entonces el payoff de la contraparte que recibe el activo al tiempo T es $V_T = S_T - K$. Al precio K que hace que el contrato tenga valor cero al incio del contrato se le conoce como *precio forward* y está dado por

$$F_{0,T} = S_0 e^{-\int_0^T q_u du} \beta_T.$$

De manera más general, si al tiempo t pactamos un forward de precio cero con vencimiento en T , entonces el precio forward está dado por

$$F_{t,T} = \frac{S_t e^{-\int_t^T q_u du}}{P(t,T)},$$

donde $P(t,T) = B(t)/B(T)$. Cuando se toma como numerario a $P(t,T)$ la medida asociada se conoce como la medida forward $\mathbb{Q}^T$, pero en el caso en que las tasas son deterministas coincide con la medida de riesgo neutral $\mathbb{Q}$. Se puede probar que bajo esta medida el precio forward $F(t,T)$ es una martingala. Con esto es sencillo ver que el precio del contrato forward al tiempo t, con vencimiento T y strike K está dado por

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-\int_t^T r_u du}\mathbb{E}(S_T - K|\mathcal{F}_t) \\ &= P(t,T)\mathbb{E}\left(\left.\frac{S_T}{P(T,T)}\right| \mathcal{F}_t\right) - P(t,T)K \\ &= P(t,T)\mathbb{E}\left(F_{T,T}|\, \mathcal{F}_t\right) - P(t,T)K \\ &= P(t,T)F_{t,T} - P(t,T)K \\ &= S_t e^{-\int_t^T q_u du} - P(t,T)K. \end{aligned}$$

Definiremos ahora una opción call y put y veremos su relación con el forward.

Definición 1.3. *Una opción call de equity es un contrato bilateral que da el derecho, más no la obligación, de comprar un activo al vencimiento del contrato a un precio pactado al inicio llamado strike.*

Es decir, el payoff de un call con strike K al tiempo de vencimiento T es $V_T = (S_T - K)_+$.

Definición 1.4. *Una opción put de equity es un contrato bilateral que da el derecho, más no la obligación, de vender un activo al vencimiento del contrato a un precio pactado al inicio llamado strike.*

Es decir, el payoff de un put con strike K al tiempo de vencimiento T es $V_T = (K - S_T)_+$.

El precio de estos tres derivados satisface la relación conocida como *paridad put-call*, la cual está dada por

$$C_t - P_t = S_t e^{-\int_t^T q_u du} - P(t,T)K.$$

Los precios al tiempo t de un call y un put son C_t y P_t, respectivamente. En el modelo de Black-Scholes-Merton se pueden calcular los precios de estos instrumentos de manera analítica. Por simplicidad supongamos que $r_t = r$, $q_t = q$ y $\sigma_t = \sigma$ para toda $0 \leq t \leq T$ y están dados por

$$\begin{aligned} C_t &= S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - P(t,T)KN(d_2), \\ P_t &= P(t,T)KN(-d_2) - S_t e^{-q(T-t)} N(-d_1), \end{aligned}$$

donde $N(x)$ es la distribución Normal estándar y d_1, d_2 están dados por

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Como estos son los derivados más líquidos en el mercado de equity generalmente son los que se ocupan para calibrar las superficies de volatilidad. Lo que se hace es encontar la volatilidad de Black-Scholes-Merton implícita en el precio de mercado y utilizar un modelo de volatilidad para interpolar. Los modelos más comunes son Volatilidad Local ([Gat01]), Volatilidad Estocástica Implícita ([GJ14]) y el modelo SABR, stochastic alpha beta rho ([HKLW14]).

1.4.1. Derivados sobre divisas

El mercado de derivados sobre divisas presenta varias similitudes con respecto al de equity, de hecho, la fórmula para el precio de un call o un put será prácticamente la misma que vimos en el caso de los equities. Sin embargo, su construcción es ligeramente distinta, ya que en este caso no se tiene un activo "tangible" como lo es una acción o un índice, pues en este mercado el activo subyacente será un tipo de cambio entre una divisa doméstica y una foránea.

Supongamos que X_t es el número de unidades de divisa doméstica equivalentes a una unidad de divisa foránea. Es claro que hay dos divisas que debemos considerar, por lo que supondremos que existe una cuenta corriente en cada una de ellas y la dinámica de estos procesos está dada por

$$\begin{aligned}
dX_t &= X_t\left((r_t^d - r_t^f)dt + \sigma_t dW_t\right),\\
dB_t &= r_t^d B_t dt,\\
dD_t &= r_t^f D_t dt.
\end{aligned}$$

donde r_t^d, r_t^f y σ_t son funciones deterministas, $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano bajo la medida asociada al numerario $\{B_t\}_{t\geq 0}$, que es la cuenta corriente en la divisa doméstica y por último, $\{D_t\}_{t\geq 0}$ es la cuenta corriente en la divisa foránea. Siguiendo la notación de la sección anterior, podemos asociar bonos cupón cero en cada divisa, denotaremos por $P^d(t,T)$ y $P^f(t,T)$ al precio de un bono cupón cero al tiempo t con vencimiento al tiempo T en la divisa doméstica y foránea respectivamente.

La definición de forward de FX es similar a la de un forward de equity, así como la de un call y un put de FX.

Definición 1.5. *Un forward de FX es un contrato bilateral que consiste en intercambiar una unidad de divisa foránea al vencimiento del contrato por una cantidad de divisa doméstica pactada al inicio del contrato.*

De igual manera, existe el concepto de precio forward de FX, que es el strike que hace que el valor del forward sea cero al momento de pactarlo. Se puede probar que el precio forward de FX al tiempo t está dada por

$$\mathrm{FX}_{t,T} = X_t \frac{P^f(t,T)}{P^d(t,T)}$$

En este caso el payoff al tiempo T del forward de FX es $V_T = X_T - K$, y como también se tiene que el precio forward de FX es martingala bajo la medida asociada a la cuenta corriente en divisa doméstica, si denotamos por $\mathbb{E}(\cdot) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_d}(\cdot)$, podemos valuarlo como

$$\begin{aligned}
V_t &= e^{-\int_t^T r_u^d du}\mathbb{E}(X_T - K|\mathcal{F}_t)\\
&= P^d(t,T)\mathbb{E}\left(\left.\frac{X_T}{P^d(T,T)}\right|\mathcal{F}_t\right) - P^d(t,T)K\\
&= P^d(t,T)\mathbb{E}\left(\mathrm{FX}_{T,T}|\,\mathcal{F}_t\right) - P^d(t,T)K\\
&= P^d(t,T)\mathrm{FX}_{t,T} - P^d(t,T)K\\
&= X_t P^f(t,T) - P^d(t,T)K.
\end{aligned}$$

La definición de un call y un put también es similar al de la sección anterior, tan solo cambia el activo subyacente, como podemos verlo en las siguientes definiciones.

Definición 1.6. *Una opción call de FX es un contrato bilateral que da el derecho, más no la obligación, de comprar una unidad de divisa doméstica al vencimiento del contrato por una cantidad de divisa foránea pactada al inicio del contrato llamada strike.*

Es decir, el payoff de un call de FX con strike K al tiempo de vencimiento T es $V_T = (X_T - K)_+$.

Definición 1.7. *Una opción put de FX es un contrato bilateral que da el derecho, más no la obligación, de vender una unidad de divisa doméstica al vencimiento del contrato por una cantidad de divisa foránea pactada al inicio llamada strike.*

Es decir, el payoff de un put de FX con strike K al tiempo de vencimiento T es $V_T = (K - X_T)_+$.

La dinámica del subyacente también es un movimiento Browniano geométrico, por lo que el precio de un call y un put al tiempo t también puede calcularse como en la sección anterior. Sin embargo, es más común dar el precio en términos del forward de FX en lugar del tipo de cambio per se. Para aligerar la notación supongamos que $r_t^d = r^d$, $r_t^f = r^f$ y $\sigma_t = \sigma$ para toda $0 \leq t \leq T$, entonces el precio de estos derivados está dado por la fórmula de Black:

$$
\begin{aligned}
C_t &= P^d(t,T)\left[\mathrm{FX}_{t,T} N(d_1) - K N(d_2)\right], \\
P_t &= P^d(t,T)\left[K N(d_2) - \mathrm{FX}_{t,T} N(d_1)\right],
\end{aligned}
$$

donde $N(x)$ es la distribución Normal estándar y d_1, d_2 están dados por

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{\mathrm{FX}_{t,T}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.
\end{aligned}
$$

Las superficies de volatilidad de FX no son tan sencillas de obtener como en el caso de los equities, esto se debe principalmente a que los activos con volatilidad que más se operan en el mercado de FX no son directamente calls y puts, sino estrategias formadas por ellos, esta son los risk reversals y los butterflies. A partir de los precios que se ven en el mercado de estas estrategias se construye una superficie de volatilidad local, y con ella poder valorar payoffs exóticos. El método más común para construir estas superficies es el llamado Vanna-Volga, que puede revisarse en el artículo de Janek [Jan11] o en el artículo de Castagna y Mercurio [CMT07].

1.7.1. Derivados sobre tasas de interés

En el mercado de tasas de interés el activo subyacente será precisamente una tasa de interés, es decir, estaremos preocuados por protegernos frente a cambios en las tasas de interés. Esto puede pasar por diferentes razones, pero las principales son cuestiones económicas, como la subida (o bajada) de tasas por parte de la Fed y en nuestro caso por parte de Banxico. Estos cambios pueden afectar el pago de hipotecas, o préstamos en general que están sujetos a tasas variables, como por ejemplo la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE).

En este mercado los derivados típicos son los swaps, que como más adelante vermos no son más que una colección de forwards; los cross currency swaps, que también se pueden ver como una colección de forwards. Ambos derivados se conocen como *derivados delta uno*, pues no requieren de un modelo estocástico de tasas de interés para valorarlos, basta con un modelo que considere un mercado libre de arbitraje.

Los derivados más comunes que si dependen de la volatilidad de las tasas de interés son los swaptions, los cap/floors y las bermudas. El precio de estos derivados si depende de qué dinámica le asignemos a las tasas de interés.

La gran diferencia de este mercado con los dos anteriores es que no se tiene un modelo *base* como lo es el de Black-Scholes-Merton. Dependiendo de las condiciones del mercado, principalmente la geografía y los intrumentos líquidos en ella, se elige un modelo que se adecue a estas condiciones, e incluso la facilidad para calibrarlo puede ser determinante para decidir uno sobre otro. Por poner un ejemplo sencillo, en Europa y Japón las tasas de interés a corto plazo son negativas, a diferencia de los mercados latino-americanos, en los que tenemos tasas de interés bastante elevadas, como México o Brasil, a comparación de las tasas de interés de Estados Unidos, que aunque son positivas son relativamente bajas.

Supongamos por el momento solo una divisa y una cuenta corriente en esta divisa, la dinámica que vamos a suponer tiene la misma forma que en las secciones anteriores, es decir,

$$dB(t) = r_t B(t)dt, \quad B(0) = 1$$

Donde r_t es la tasa de interés instantánea o tasa corta, es decir, la tasa a la que se gana interés en un intervalo de tiempo $[t, t + dt]$.

Resolviendo la ecuación podemos ver que $B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$ y podemos definir el descuento entre t y T de la siguiente forma

$$D(t,T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right).$$

Este factor de descuento es estocástico, y esta ligado al concepto de *bono cupón cero*, que será de gran utilidad no sólo para este capítulo si no para el resto del trabajo.

Definición 1.8. *Un bono cupón cero es un contrato en el que una contraparte se compromete a pagar una unidad monetaria en una fecha futura T, a cambio de $P(t,T)$ unidades monetarias al tiempo $t < T$. Donde $P(T,T) = 1$ para todo $T \geq 0$.*

Es decir $P(t,T)$ es el precio del bono cupón cero. Este concepto es muy importante, pues es el instrumento más sencillo que se ocupa al calibrar curvas de tasas de interés. A partir del valor de un bono cupón cero podemos encontrar una tasa de interés equivalente, y esta puede ser suponiendo interés simple (común en instrumentos a corto plazo) o interés compuesto continuo (común en instrumentos a mediano y largo plazo), y a partir de estas tasas podemos encontrar una curva que se conoce como *yield curve.*

$$\begin{aligned} L(t,T) &:= \frac{1-P(t,T)}{\tau(t,T)P(t,T)}, \quad \text{interés simple} \\ R(t,T) &:= -\frac{\ln P(t,T)}{\tau(t,T)}, \quad \text{interés continuo.} \end{aligned}$$

Nos hace falta el concepto de tasa forward que está implícita en un contrato análogo de un forward, que en este mercado se conce como Forward Rate Agreement (FRA), para después construir con ellos los swaps y los cross currency swaps.

Definición 1.9. *Un forward rate agreement o FRA, es un contrato que consiste en garantizar una tasa a la que se puede invertir en un periodo futuro. En este contrato hay tres fechas relevantes: la fecha de valuación t, y las fechas que conforman el periodo futuro en el que se desea invertir $[S,T]$, con $t < S < T$. El contrato da derecho a pagar una tasa fija K en lugar de pagar una tasa flotante $L(S,T)$ que gana intereses sobre un nominal N en el periodo $[S,T]$.*

El payoff al tiempo de expiración T es $N(T-S)\left(L(S,T)-K\right)$. Recordando la definición de la tasa $L(S,T)$, podemos ver que el payoff es igual a

$$N\left((T-S)K - \frac{1}{P(S,T)} + 1\right),$$

Si llevamos el valor del payoff de la fecha T a la fecha de valuación t no es muy difícil ver que el valor del FRA al tiempo t es igual a

$$\mathrm{FRA}(t,S,T,N,K) = N\left(P(t,T)(T-S)K - P(t,S) + P(t,T)\right).$$

Igual que en el caso de los forward de equity, podemos encontrar el K que hace que el FRA tenga valor cero al tiempo t y se conoce como la tasa forward para el periodo $[S,T]$ vista al tiempo t. Se puede probar que esta es igual a

$$F(t;S,T) = \frac{1}{T-S}\left(\frac{P(t,S)}{P(t,T)} - 1\right).$$

Haciendo uso de la ecuación anterior podemos ver que el valor del FRA se puede expresar como

$$\mathrm{FRA}(t,S,T,N,K) = N(T-S)P(t,T)\left(K - F(t;S,T)\right)$$

Cuando $T \to S^+$, se define la tasa forward instantánea, el único supuesto que se requiere es que el $\ln P(t,S)$ sea diferenciable respecto a S.

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to S^+} F(t;S,T) &= -\lim_{T\to S^+} \frac{1}{T-S}\frac{P(t,T)-P(t,S)}{T-S} \\
&= \frac{1}{P(t,S)}\frac{\partial P(t,S)}{\partial S} \\
&= -\frac{\partial \ln P(t,S)}{\partial S} \\
&:= f(t,S).
\end{aligned}$$

Sustituyendo T por S para ser consistentes con la notación y despejando el precio del bono tenemos la siguiente relación:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right).$$

Habiendo definido los conceptos e instrumentos básicos, a saber, tasa corta, tasa forward, bono cupón cero y FRA, podemos definir los swaps, cross currency swaps, caps, floors y swaptions. Lo haremos en ese orden y daremos el precio de cada uno en los modelos más comunes, además de que serán justo los precios a los que haremos referencia más adelante en este trabajo.

Los swaps de tasas de interés y los cross currency swaps son instrumentos que no dependen de la dinámica con la que modelemos la tasa de interés, es decir, no tienen vega, esto significa que no tiene sensibilidad a la volatilidad de las tasas de interés. El primero se define en una única divisa, mientras que el segundo es un instrumento *multicurrency*, en particular es el intercambio de tasas que viven en divisas diferentes. Empezaremos por los swaps de tasas de interés en una única divisa, que como veremos, son una generalización de un FRA.

Definición 1.10. *Un swap de tasas de interés de tipo Payer (Receiver), que denotaremos por IRS^p (IRS^r) es un contrato que permite pagar (recibir) una tasa fija K y recibir (pagar) una tasa flotante $L(T_{i-1},T_i)$ sobre un valor nominal N en cada fecha T_i, $i \in \alpha+1,\dots,\beta$. Usualmente son fechas equidistantes y el tamaño de cada periodo se conoce como day count fraction y lo denotaremos por τ_i.*

Para entender mejor este instrumento, notemos que en cada fecha T_i, $i \in \alpha+1,\dots,\beta$ la pata fija vale $N\tau_i K$, mientras que el valor de la pata flotante vale $N\tau_i L(T_{i-1},T_i)$. Donde el valor de $L(T_{i-1},T_i)$ se fija al tiempo T_{i-1} y se paga en T_i, es decir, la tasa flotante se fija en las fechas $T_\alpha, T_{\alpha+1},\dots,T_{\beta-1}$ y paga en las fechas $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2},\dots,T_\beta$.

Así, el valor de un swap de tasas de interés de tipo payer al tiempo t consiste en llevar a todos los flujos a fecha t y restar la pata fija de la pata flotante, pues se paga la tasa fija, quedando la ecuación

$$\mathrm{IRS}^p(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} N\tau_i P(t, T_i) \left(F(t; T_{i-1}, T_i) - K \right).$$

En el caso del swap de tasas de interés de tipo receiver basta multiplicar el precio anterior por menos uno, pues en lugar de pagar la tasa fija, ésta se recibe. Además también puede calcularse el valor de K que haga que el IRS valga cero al inicio del contrato, es decir al tiempo t, y se conoce como la tasa *par swap* al tiempo t y se denota por $S_{\alpha,\beta}(t)$.

Las generalizaciones más comunes son:

- La frecuencia de pago de la pata fija y la flotante es distinta.
- Se intercambia una tasa flotante por otra tasa flotante de la misma divisa.
- El valor nominal no es igual en cada periodo, si no que se tiene un valor nominal N_i para cada $i \in \alpha + 1, \ldots, \beta$.
- La tasa que se ocupa para descontar no es la misma que se ocupa para estimar las tasas forward futuras.

En ocasiones es preferible estar expuesto al cambio en las tasas flotantes de una divisa en lugar de otra en la que originalmente teníamos alguna posición, ya sea por cobertura o incluso por especulación. Para este tipo de escenarios podemos ocupar un instrumento de tasas de interés conocido como *cross currency swap*, que definimos a continuación.

Definición 1.11. *Un cross currency swap (xccy swap) es un contrato en donde se intercambian periódicamente tasas flotantes de divisas distintas, llamémoslas divisa doméstica y divisa foránea, una de ellas tiene un spread aditivo conocido como cross currency basis, las tasas flotantes se representan por $L^d(T_{i-1}, T_i)$ y $L^f(T_{i-1}, T_i)$ respectivamente. El intercambio de tasas es sobre un valor nominal N en cada fecha T_i, $i \in \alpha+1, \ldots, \beta$. Usualmente son fechas equidistantes y el tamaño de cada periodo se conoce como day count fraction y lo denotaremos por τ_i.*

Este instrumento no es muy distinto de un IRS, la diferencia principal es que hay dos divisas involucradas. A pesar de lo que en un principio podría pensarse, este instrumento no tiene riesgo de FX. Además de que su valor es independiente de en qué divisa se value, por simplificar las cuentas pensemos que este instrumento se valuará en la divisa doméstica. En principio se podrían tener frecuencias distintas en cada pata e incluso los valores nominales ir variando o reajustándose el tipo de cambio que haya en cada fecha de intercambio de tasas de interés, este instrumento se conoce como cross currency mark to market (xccy MtM).

No es muy difícil ver que al igual que un IRS el valor del xccy swap es la resta de la pata en divisa doméstica y la pata en divisa foránea. Utilizando la misma notación para las fechas y accruals del IRS podemos escribir

$$\text{XCCY}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} N\tau_i P^d(t,T_i) L^d(T_{i-1},T_i) - \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} N X_t \tau_i P^f(t,T_i) \left(L^f(T_{i-1},T_i) + s_t \right)$$

donde b_t es el xccy basis, en mercado se cotiza el b_t tal que el valor del xccy swap es cero, y X_t es el tipo de cambio de foránea a doméstica al tiempo de valuación t.

Con esto hemos terminado con los instrumentos de tasas de interés que no dependen del modelo que se le asigne a la tasa de interés, basta un supuesto de no arbitraje. Ahora definiremos y mencionaremos como se valúan en mercado los derivados que si dependen de la volatilidad. Iniciaremos con los caps y floors, para terminar con los swaptions.

Definición 1.12. *Un cap es un contrato que se puede ver como un IRS de tipo payer donde cada intercambio sucede solo si tiene valor positivo. Formalmente se tiene una serie de fechas de pago* $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}, \dots, T_\beta$ *y en cada una de ellas hay un flujo del tipo* $(L(T_{i-1},T_i) - K)^+$ *cuya tasa flotante fija en* $T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta-1}$ *respectivamente.*

Podemos expresar el payoff descontado a una fecha $t \leq T_{\alpha+1}$ de la siguiente forma

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} N\tau_i D(t,T_i) \left(L(T_{i-1},T_i) - K \right)^+ .$$

El floor se puede definir de manera análoga:

Definición 1.13. *Un floor es un contrato que se puede ver como un IRS de tipo receiver donde cada intercambio sucede solo si tiene valor positivo. Formalmente se tiene una serie de fechas de pago* $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}, \dots, T_\beta$ *y en cada una de ellas hay un flujo del tipo* $(K - L(T_{i-1},T_i))^+$ *cuya tasa flotante fija en* $T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta-1}$ *respectivamente.*

Cada sumando en un cap y floor se conoce como caplet y floorlet respectivamente. Haciendo uso de la técnica de cambio de numerario se pueden valuar estos derivados con la fórmula de Black, esto es:

$$\begin{aligned} V^{\text{Cap}}(t) &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t,T_i)\tau_i \text{Bl}\left(F(t,T_{i-1},T_i), K, v_i, \omega = 1\right), \\ V^{\text{Floor}}(t) &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t,T_i)\tau_i \text{Bl}\left(F(t,T_{i-1},T_i), K, v_i, \omega = -1\right). \end{aligned}$$

Donde se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bl}\left(F,K,v,\omega\right) &= F\omega\Phi\left(\omega d_1(F,K,v)\right) - K\omega\Phi\left(\omega d_2(F,K,v)\right),\\
d_1(F,K,v) &= \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right)+\frac{v^2}{2}}{v},\\
d_2(F,K,v) &= \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right)-\frac{v^2}{2}}{v},\\
v_i &= \sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_{i-1}},
\end{aligned}$$

y $\sigma_{\alpha,\beta}$ se obtiene a partir de la superficie de volatilidad implícita de los cap/floors de mercado. Cuando el strike K es igual a la tasa par swap $S_{\alpha,\beta}(t)$ se dice que el cap o floor están at-the-money (ATM), si $K < K_{\mathrm{ATM}}$ se dice que el cap está in-the-money (ITM) y si $K > K_{\mathrm{ATM}}$ se dice que el cap está out-of-the-money (OTM), para el floor la relación está invertida.

Definición 1.14. *Un swaption europeo, es una opción que da el derecho más no la obligación de entrar en un IRS en una fecha futura, llamada fecha de ejercicio. Lo más común es que el día en que decide entrar o no en el IRS es la fecha en la que se fija la primera tasa flotante del IRS en cuestión. El periodo entre que se pacta el IRS y la fecha de vencimiento del mismo se conoce como tenor del swaption.*

Adoptando la misma notación de fechas que en los derivados anteriores, podemos pensar en T_α como la fecha de ejercicio del swaption y es claro que el valor del IRS que inicia en esa fecha tiene valor al tiempo T_α igual a

$$N\sum_{\alpha+1}^{\beta}\tau_i P(T_\alpha,T_i)\left(F(T_\alpha;T_{i-1},T_i)-K\right).$$

Como la opción será ejercida solo si el valor de este IRS es positivo, es claro que el valor del swaption en una fecha $t < T_\alpha$ es igual a

$$ND(t,T_\alpha)\left(\sum_{\alpha+1}^{\beta}\tau_i P(T_\alpha,T_i)\left(F(T_\alpha;T_{i-1},T_i)-K\right)\right)^{+}.$$

Al igual que en el caso de los caps y floors, haciendo uso de la técnica de cambio de numerario se puede expresar el valor del swaption a tiempo $t < T_\alpha$ mediante la fórmula de Black. Hay dos tipos de swaptions, payers y receivers, la diferencia es el tipo de IRS al que se tiene derecho a entrar. Usando la misma notación que en los instrumentos anteriores podemos ver que el valor del swaption está dado por:

$$\begin{aligned}
V^{\mathrm{PS}}(t) &= N\mathrm{Bl}\left(S_{\alpha,\beta}(t),K,\sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_\alpha},\omega=1\right)\sum_{\alpha+1}^{\beta}\tau_i P(t,T_i),\\
V^{\mathrm{RS}}(t) &= N\mathrm{Bl}\left(S_{\alpha,\beta}(t),K,\sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_\alpha},\omega=-1\right)\sum_{\alpha+1}^{\beta}\tau_i P(t,T_i),
\end{aligned}$$

donde $\sigma_{\alpha,\beta}$ se obtiene de cotizaciones del mercado de swaptions y dependen básicamente de la fecha de vencimiento T_α y el tenor del swaption $T_\beta - T_\alpha$.

Al igual que en el caso de los caps y floors, cuando el strike K es igual a la tasa par swap $S_{\alpha,\beta}(t)$ se dice que el swaption está at-the-money (ATM), si $K < K_{\text{ATM}}$ se dice que el swaption payer está in-the-money (ITM) y si $K > K_{\text{ATM}}$ se dice que el swaption payer está out-of-the-money (OTM), para el swaption receiver la relación está invertida.

Con esto terminamos de definir y valuar los instrumentos de tasas más comunes. Este mercado en general es el más grande de todos y también es crucial tener un buen método que permita obtener superficies de volatilidad, que son necesarias para valuar instrumentos exóticos como las opciones bermudas, los rangos o alguna función de opciones digitales a la medida del cliente. Los modelos más comunes para generar superficies de volatilidad local son los llamados Constant Elasticity Variance y un caso particular de ellos es el SABR, que es la abreviación de Stochastic Alpha Beta Rho, que permite generar superficies libres de arbitraje y en general una para los cap/floors y otra para los swaptions.

1.14.1. Derivados de crédito

El mercado de derivados de crédito es un poco más complicado que los anteriores, pues el activo subyacente es la quiebra de alguna contraparte, que en principio es un concepto demasiado ambiguo. Los modelos más comunes para el riesgo de crédito son los *modelos estructurales* y los *modelos basados en la intensidad*; en este trabajo utilizaremos los modelos basados en la intensidad porque nos llevarán de manera natural al concepto de CVA.

En este mercado hay varios instrumentos derivados; sin embargo, nos concetraremos únicamente en los bonos sujetos a incumplimiento y los credit default swaps (CDS), en los que ahondaremos en el siguiente capítulo. La razón es que para el cálculo de CVA necesitamos encontrar las probabilidades de incumplimiento y éstas se obtienen típicamente de los CDS's mediante un método de boostrapping que vaya recuperando los niveles de mercado.

En el siguiente capítulo profundizaremos en el riesgo de crédito, que como veremos, el hecho de suponer que el mercado no puede anticipar la llegada de un tiempo de default, nos lleva a utilizar una filtración aumentada, donde se incluye la información de mercado y la información del default. Demostraremos los resultados más importantes a los que nos llevan estos supuestos y veremos de qué manera nos vamos acercando al concepto de riesgo de contraparte y el cálculo del CVA.

Capítulo 2

Riesgo de Crédito

La literatura que cubre este tipo de derivados es bastante extensa y hay una clara división entre los libros académicos que proveen de modelos probabilistas para valuar este tipo de derivados y los libros aplicados que se concentran en la calibración de estos modelos a instrumentos de mercado. Para esta capítulo nos basamos en los trabajos y adoptamos la notación (prácticamente estándar) de los siguientes autores: Jeanblanc y Rutkowski [BJPR09], [JYC09], [BJR04] y [BJR05]; Brigo, Mercurio y Morini [BM07], [BMP13], [BC09], [BM05]; Lichters [LSG15]. Las referencias para la parte de calibración son Brigo [BA03], Jamshidian [Jam04] y Pelsser [Pel00].

El riesgo de contraparte está conformado básicamente por riesgo de mercado y riesgo de crédito. El riesgo de mercado depende del tipo de instrumento que se está valorando; sin embargo, el riesgo de crédito está presente en todo caso, pues está asociado al riesgo de incumplimiento por alguna de las contrapartes. En este capítulo vamos a estudiar los conceptos y resultados importantes sobre la valuación de derivados de crédito, pues a partir de ellos, en particular de los Credit Default Swap (CDS), obtendremos las probabilidades de incumplimiento bajo la medida de riesgo neutral que también se ocupa en el modelo general de valuación sujeto a riesgo de contraparte.

2.1. Modelo para el tiempo de default

El riesgo de crédito está asociado al evento de incumplimiento, también llamado *default*, que consideraremos como un factor aleatorio exógeno. Vamos a definir formalmente el evento de default, haremos la distinción entre la información que proviene del mercado y la información que concierne al default, de tal manera que podamos valorar derivados incorporando ambas fuentes de información.

Para entender de manera más clara los procesos asociados al tiempo de default, en esta sección vamos a considerar únicamente la información del tiempo de default, dejando para la próxima sección el caso general en donde consideraremos las dos fuentes de información.

Trabajaremos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$, donde denotaremos al tiempo de default por τ, y la información sobre el default está definida como $\mathcal{H}_t = \sigma(\{\tau \leq u\} : u \leq t)$, es decir, $\mathbb{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$ una filtración continua por la derecha generada por el evento de default.

Proposición 2.2. *Si definimos el proceso* $H_t = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$*, entonces la filtración canónica asociada a* $\{H_t\}_{t \geq 0}$ *coincide con* $\mathbb{H}$*. Más aún,* $\mathcal{H}_t = \sigma\left(\sigma(\tau) \cap \{\tau \leq t\}\right)$*, que nos será de ayuda más adelante para caracterizar a las variables aleatorias* $\mathcal{H}_t$*-medibles.*

Demostración. Para la primera parte de la proposición basta ver que tanto $\sigma(\{\tau \leq u\} : u \leq t)$ como $\sigma(H_u : u \leq t)$ tienen la misma clase generadora. Consideremos $0 < s \leq t$ entonces $\sigma(H_s) = \left\{\emptyset, \Omega, H_s^{-1}(0), H_s^{-1}(1)\right\}$, pues H_s sólo toma dos valores, cero o uno. Por otro lado podemos ver que

$$\begin{aligned} H_s^{-1}(0) &= \left\{\omega \in \Omega | \mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}(\omega) = 0\right\} \\ &= \{\omega \in \Omega | \tau(\omega) > s\} \\ &= \{\tau(\omega) > s\}. \end{aligned}$$

De manera similar para $H_s^{-1}(1)$, por lo que $\sigma(H_s) = \{\emptyset, \Omega, \{\tau(\omega) > s\}, \{\tau(\omega) \leq s\}\}$. Con lo que terminamos la prueba de la primera parte. Para la segunda parte basta notar que:

$$\begin{aligned} \sigma\left(\sigma(\tau) \cap \{\tau \leq t\}\right) &= \sigma\left(\left\{\tau^{-1}\left((-\infty, u] : u \in \mathbb{R}\right)\right\} \cap \left\{\tau^{-1}\left((-\infty, t]\right)\right\}\right) \\ &= \sigma\left(\left\{\tau^{-1}\left((-\infty, u] : u \leq t\right)\right\}\right) \\ &= \sigma(\{\tau \leq u\} : u \leq t) \end{aligned}$$

Con lo que concluimos la demostración. $\square$

Si $F(t)$ es la distribución del tiempo de default τ, trabajaremos bajo el supuesto de que $F(t) < 1$ para toda $0 \leq t$, de tal manera que no exista un $0 \leq t_0$ tal que $F(t_0) = 1$, pues esto significaría que el evento de default ocurre al tiempo t_0 con probabilidad 1.

Además podemos suponer por practicidad que $F(t)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, de tal manera que

$$\mathbb{Q}[\tau \leq t] = F(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

donde $f(t)$ es la densidad de τ.

Gracias al supuesto de que $F(t) < 1$ para toda $0 \leq t$ podemos definir la función de fallo y veremos que si $F(t)$ es absolutamente continua, implica que la función de fallo asociada a F también lo es y la densidad de la función de fallo se conoce como tasa de fallo.

Definición 2.3 (Función de fallo). *La función de fallo de* τ *es una función* $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *dada por la siguiente expresión*

$$\Gamma(t) = -\ln(1 - F(t)), \qquad 0 \leq t.$$

Podemos ver de la definición que Γ es una función no decreciente que inicia en cero y tiende a infinito cuando t tiende a infinito. En la siguiente proposición probaremos que basta con que τ sea absolutamente continua para que exista la tasa de fallo.

Proposición 2.4. *Si τ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue con función de distribución de F y densidad f, entonces la función de fallo Γ es absolutamente continua también y su densidad, denotada por γ, se conoce como la tasa de fallo.*

Demostración. Partiendo de la definición de Γ tenemos que $\Gamma(t) = -\ln(1 - F(t))$ para toda $0 \leq t$, por lo que

$$\gamma(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \qquad 0 \leq t,$$

y es claro que γ es una función densidad, pues es positiva e integra uno. $\square$

Cuando se tiene bien definida la función y la tasa de fallo para τ podemos calcular la probabilidad de supervivencia de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q}[\tau > t] = 1 - F(t) = \exp[-\Gamma(t)] = \exp\left[\int_0^t \gamma(s)ds\right].$$

De tal manera que podemos decir que $\gamma(t)$ representa la probabilidad instantánea de que ocurra el default, de ahí que se conozca como tasa de fallo, en el intervalo $[t, t + dt]$, dado que no ha ocurrido antes de t. Sea $h > 0$ muy pequeña, entonces tenemos que

$$\mathbb{Q}(t < \tau \leq t + h|\tau > t) = \gamma(t)h$$

Observación 2.5. *Esta ecuación sugiere que Γ se puede pensar como la intensidad de un proceso Poisson no homogéneo, cuyo primer salto es justamente τ.*

A τ se puede pensar como el primer salto en un proceso Poisson no homogéneo $\{N_t\}_{t\geq 0}$ de intensidad $\Gamma(t)$, una función estrictamente creciente, continua y por tanto invertible.

Al ser un proceso Poisson no homogéneo, N cumple las siguientes propiedades:

(a) El proceso $M_t = N_{\Gamma^{-1}(t)}$ es un proceso Poisson homogéneo de intensidad $\tilde{\gamma} = 1$.

(b) Se cumple que $N_t = M_{\Gamma_t}$, por lo que si τ es el tiempo de primer salto de N entonces $\Gamma(\tau)$ es el tiempo de primer salto de M.

(c) Como $M_t \sim$ Poisson(1), entonces $\Gamma(\tau) \sim \exp(1)$, por lo que $\mathbb{Q}[\Gamma(\tau) \leq s] = 1 - \exp(-s)$

(d) Como Γ es invertible tenemos que $\mathbb{Q}[s < \tau \leq t] = \mathbb{Q}[\Gamma(s) < \Gamma(\tau) \leq \Gamma(t)] = e^{-\Gamma(s)} - e^{-\Gamma(t)}$

Trabajando con la filtración $\mathbb{H}$ será bastante útil caracterizar a las variables aleatorias $\mathcal{H}_t$-medibles, que será el resultado de la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Sea X una v.a. $\mathcal{H}_t$-medible, entonces X es de la forma*

$$X = h(\tau)\,\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} + h(t)\,\mathbb{1}_{\{t<\tau\}},$$

con $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función medible.

Demostración. En la proposición 2.2 que $\mathcal{H}_t = \sigma(\tau \wedge t)$ y utilizando el lema de Doob-Dynkin, véase [Øks00], sabemos que existe una función $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ Borel medible tal que $X = h(\tau \wedge t)$, así que tomando los dos casos posibles tenemos que

$$X = h(\tau)\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} + h(t)\mathbb{1}_{\{t<\tau\}},$$

□

El siguiente lema es fundamental, pues nos permite dar una expresión para calcular la esperanza condicional con respecto a la filtración $\mathbb{H}$.

Lema 2.7. *Si X es una v.a. $\mathcal{G}$-medible entonces*

$$\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}\left(X|\mathcal{H}_t\right) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\frac{\mathbb{E}(X\,\mathbb{1}_{\{t<\tau\}})}{\mathbb{Q}(t<\tau)}. \tag{2.1}$$

Demostración. Como $\mathbb{E}\left(X|\mathcal{H}_t\right)$ es $\mathcal{H}_t$-medible entonces puede escribirse como $\mathbb{E}\left(X|\mathcal{H}_t\right) = h(\tau)\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} + h(t)\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}$ para alguna función h Borel medible, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}\left(X|\mathcal{H}_t\right) &= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}h(t) \\
\Rightarrow \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}\left(X|\mathcal{H}_t\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}h(t)\right) \\
\Rightarrow \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}X\right) &= h(t)\mathbb{Q}(t<\tau) \\
\Rightarrow h(t) &= \frac{\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}X\right)}{\mathbb{Q}(t<\tau)}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera línea obtenemos el resultado

$$\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}\left(X|\mathcal{H}_t\right) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\frac{\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}X\right)}{\mathbb{P}(t<\tau)}.$$

□

En el siguiente resultado definimos el proceso $\{M_t\}_{t\geq 0}$, conocido como la martingala fundamental asociada al tiempo de default τ, la cual nos permite relacionar al proceso $\{H_t\}_{t\geq 0}$ con un proceso Poisson, lo que será de gran ayuda en las simulaciones de este proceso.

Proposición 2.8. *El proceso* $\{M_t\}_{t\geq 0}$ *definido como*

$$M_t = H_t - \Gamma(\tau \wedge t) = H_t - \int_0^{\tau\wedge t} \frac{dF(s)}{G(s)} = H_t - \int_0^t (1 - H_s)\frac{dF(s)}{G(s)}$$

es una $\mathbb{H}$*-martingala.*

Demostración. Recordemos que si X es $\mathcal{G}$-medible entonces se cumple la ecuación 2.1. Para ver que es martingala, primero observemos que este proceso es integrable pues H_t es integrable y $\Gamma(\tau \wedge t)$ está acotado pues $F(t) < 1$ para toda $0 \leq t$ por hipótesis. Nos falta probar que $\mathbb{E}\left(M_t - M_s|\mathcal{H}_s\right) = 0$ si $s < t$. Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(H_t - H_s|\mathcal{H}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} - \mathbb{1}_{\{\tau\leq s\}}|\mathcal{H}_s\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{s<\tau\leq t\}}|\mathcal{H}_s\right)\\
&= \mathbb{1}_{\{s<\tau\}}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{s<\tau\leq t\}}|\mathcal{H}_s\right)\\
&= \mathbb{1}_{\{s<\tau\}}\frac{\mathbb{Q}(s<\tau\leq t)}{\mathbb{Q}(s<\tau)}\\
&= \mathbb{1}_{\{s<\tau\}}\frac{F(t)-F(s)}{G(s)}.
\end{aligned}$$

Y por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_s^t 1 - H_u\frac{dF(u)}{G(u)}|\mathcal{H}_s\right) &= \int_s^t \mathbb{E}\left(1 - H_u|\mathcal{H}_s\right)\frac{dF(u)}{G(u)}\\
&= \int_s^t \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{u<\tau\}}|\mathcal{H}_s\right)\frac{dF(u)}{G(u)}\\
&= \int_s^t \mathbb{1}_{\{s<\tau\}}\frac{\mathbb{Q}(u<\tau)}{\mathbb{Q}(s<\tau)}\frac{dF(u)}{G(u)}\\
&= \frac{\mathbb{1}_{\{s<\tau\}}}{G(s)}\int_s^t dF(u)\\
&= \mathbb{1}_{\{s<\tau\}}\frac{F(t)-F(s)}{G(s)}.
\end{aligned}$$

Con lo que podemos concluir que si $s < t$ entonces $\mathbb{E}\left(M_t - M_s|\mathcal{H}_s\right) = 0$ y por lo tanto el proceso $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una $\mathbb{H}$-martingala.

□

De la proposición anterior, podemos ver que el proceso H_t tiene descomposición de Doob-Meyer igual a $M_t + \Gamma(t \wedge \tau)$, donde este proceso creciente, $\Gamma(t \wedge \tau)$ se conoce como el compensador de H_t. Además en el caso en que τ es absolutamente continuo, podemos expresar a la martingala M_t como

$$M_t = H_t - \int_0^{t\wedge\tau} \gamma(s)ds = \int_0^t \gamma(s)\left(1 - H_s\right)ds,$$

donde $\gamma(s) = \frac{f(s)}{1-F(s)}$ es la intensidad de falla asociada al tiempo de default τ.

Otra martingala asocida al proceso de default $\{H_t\}_{t\geq 0}$, que también está en función del proceso e intensidad de fallo está dada por la siguiente proposición.

Proposición 2.9. *Considere el proceso $\{L_t\}_{t\geq 0}$ tal que para cada $0 \leq t$ $L_t = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \exp(\Gamma(t))$, es una $\mathbb{H}$-martingala. Teniendo así la siguiente descomposición*

$$1 - H_t = L_t \exp(-\Gamma(t)).$$

Demostración. Primero probaremos que el proceso L es una martingala. Es claro que es un proceso integrable y adaptado a $\mathbb{H}$, por lo que basta probar la propiedad de martingala, sea $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(L_t \middle| \mathcal{H}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \exp(\Gamma(t)) \middle| \mathcal{H}_s\right) \\
&= \exp(\Gamma(t))\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \middle| \mathcal{H}_s\right) \\
&= \exp(\Gamma(t))\, \mathbb{1}_{\{s<\tau\}} \frac{1-F(t)}{1-F(s)} \\
&= \exp(\Gamma(t))\, \mathbb{1}_{\{s<\tau\}} \exp(-\Gamma(t) + \Gamma(s)) \\
&= \mathbb{1}_{\{s<\tau\}} \exp(\Gamma(s)) \\
&= L_s
\end{aligned}$$

Para ver la descomposición recordemos que $1 - H_t = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}$, despejando tenemos que $1 - H_t = L_t \exp(-\Gamma(t))$. □

Notemos que en particular la propiedad de martingala aplicada para los tiempos $t < T$ y suponiendo que τ es absolutamente continua nos da como resultado

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{T<\tau\}} \exp\left(\int_0^T \gamma(s)ds\right) \middle| \mathcal{H}_t\right) &= \mathbb{E}\left(L_T \middle| \mathcal{H}_t\right) \\
&= L_t \\
&= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \exp\left(\int_0^t \gamma(s)ds\right)
\end{aligned}$$

Despejando tenemos que

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{T<\tau\}} \middle| \mathcal{H}_t\right) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \exp\left(-\int_t^T \gamma(s)ds\right),$$

que es una generalización de la probabilidad de que no haya default antes de T dada la información sobre τ acumulada hasta el tiempo, que claramente solo puede ser mayor a cero en el caso en que hasta el tiempo t aún no ocurra el default.

Generalizaremos estas proposiciones para el caso en el que la filtración consta de información de mercado e información del default, de tal manera que consideraremos la filtración alargada conformada por las dos filtraciones anteriores.

2.10. Modelo de riesgo de crédito con filtración alargada

Consideremos de nuevo un espacio de probabildad $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$, donde está definido el tiempo de default τ, tal que $\mathbb{Q}(\tau > 0) = 1$ y $\mathbb{Q}(\tau > t) > 0$ para toda $t \geq 0$. Al igual que en la sección anterior, consideremos el proceso $H_t = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$ con $t \geq 0$ y de igual forma sea $\mathbb{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración generada por el proceso H.

Sea $\mathbb{F}$ la filtración que contiene la información del mercado sin considerar el evento de default, de tal forma que toda la información disponible se puede modelar con la filtración $\mathbb{G} := \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$, esto es, $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0} = \{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0} \vee \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ para toda $t \geq 0$. Donde supondremos que tanto $\mathbb{F}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{G}$ satisfacen las hipótesis habituales: son continuas por la derecha son completas.

Observación 2.11. *Es claro que el proceso H es $\mathbb{G}$-adaptado, sin embargo no podemos asegurar que sea $\mathbb{F}$-adaptado. En particular, τ es $\mathbb{G}$-tiempo de paro pero no necesariamente $\mathbb{F}$-tiempo de paro.*

Para cada $t \geq 0$ definimos la distribución condicional de τ como $F_t = \mathbb{Q}\left(\tau \leq t \middle| \mathcal{F}_t\right)$, es decir, ahora no tenemos solo una función de distribución asociada al default sino un proceso estocástico, de igual manera podemos definir la supervivencia condicional como $G_t := 1 - F_t = \mathbb{Q}\left(\tau > t \middle| \mathcal{F}_t\right)$.

Notemos que por definición la distribución es una $\mathbb{F}$-submartingala y la supervivencia una $\mathbb{F}$-supermartingala. Con esto podemos definir el proceso de fallo asociado a τ. Cabe destacar que depende de $\mathbb{F}$ por la defición de F_t.

Definición 2.12 ($\mathbb{F}$-Proceso de falla)**.** *Supongamos que para toda $t \geq 0$ se tiene que $F_t < 1$, entonces el $\mathbb{F}$-Proceso de falla de tau bajo $\mathbb{Q}$ se define como*

$$\Gamma_t = -\ln G_t = -\ln\left(1 - F_t\right), \quad t \geq 0.$$

Dadas estas condiciones necesitaremos calcular esperanzas condicionales de la forma $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \middle| \mathcal{G}_t\right)$, donde X es una v.a. $\mathbb{Q}$-integrable.

Lema 2.13 (Lema Clave)**.** *Sea X $\mathbb{G}$-medible y $\mathbb{Q}$-integrable, entonces para toda $t \geq 0$ se tiene que*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \middle| \mathcal{G}_t\right) &= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(X \middle| \mathcal{G}_t\right) \\ &= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \middle| \mathcal{F}_t\right)}{\mathbb{Q}\left(t < \tau \middle| \mathcal{F}_t\right)}. \end{aligned}$$

Demostración. Como $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ basta probar que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \mathbb{Q}\left(\{t < \tau\} \middle| \mathcal{F}_t\right) \middle| \mathcal{G}_t\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \middle| \mathcal{F}_t\right) \middle| \mathcal{G}_t\right).$$

Sea $A \in \mathcal{G}_t$ supongamos que $A \cup \{t < \tau\} = B \cup \{t < \tau\}$ para algún $B \in \mathcal{F}_t$, por lo que

$$\begin{aligned}
\int_A \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \mathbb{Q}\left(\{t<\tau\}|\, \mathcal{F}_t\right) d\mathbb{Q} &= \int_{A\cap\{t<\tau\}} X \mathbb{Q}\left(\{t<\tau\}|\, \mathcal{F}_t\right) d\mathbb{Q} \\
&= \int_{B\cap\{t<\tau\}} X \mathbb{Q}\left(\{t<\tau\}|\, \mathcal{F}_t\right) d\mathbb{Q} \\
&= \int_B \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \middle|\, \mathcal{F}_t\right) \mathbb{Q}\left(\{t<\tau\}|\, \mathcal{F}_t\right) d\mathbb{Q} \\
&= \int_B \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \middle|\, \mathcal{F}_t\right) \middle|\, \mathcal{F}_t\right) d\mathbb{Q} \\
&= \int_{B\cap\{t<\tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \middle|\, \mathcal{F}_t\right) d\mathbb{Q} \\
&= \int_{A\cap\{t<\tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \middle|\, \mathcal{F}_t\right) d\mathbb{Q} \\
&= \int_A \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} X \middle|\, \mathcal{F}_t\right) d\mathbb{Q}
\end{aligned}$$

Con lo que concluye la demostración. □

En el caso particular $X = 1$ y $t \leq s$ tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\left(t < \tau \leq s|\, \mathcal{G}_t\right) &= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \frac{\mathbb{Q}\left(t<\tau\leq s|\, \mathcal{F}_t\right)}{\mathbb{Q}\left(t<\tau|\, \mathcal{F}_t\right)} \qquad (2.2) \\
&= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(1 - e^{\Gamma_t - \Gamma_s} \middle|\, \mathcal{F}_t\right). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

El siguiente resultado nos permitirá hacer una cuenta en la valoración de un CDS.

Proposición 2.14. *Sea ϕ un proceso $\mathbb{F}$-predecible tal que la v.a. $\phi_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}$ es $\mathbb{Q}$-integrable. Entonces se tiene para toda $t \leq T$ que*

$$\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\phi_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}} \middle|\, \mathcal{G}_t\right) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \phi_u dF_u \middle|\, \mathcal{F}_t\right)$$

Si consideramos la descomposición de Doob-Meyer de F_t tenemos que $F = M + A$, donde M es una $\mathbb{F}$-martingala y A es un proceso creciente $\mathbb{F}$-predecible, se tiene que para toda $t \leq T$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \phi_u dF_u \middle|\, \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \phi_u dA_u \middle|\, \mathcal{F}_t\right),$$

de tal manera que si F es un proceso creciente se tiene que $A_t = F_t = e^{-\Gamma_t}$ por lo que $dA_t = e^{-\Gamma_t} d\Gamma_t$, con lo que se puede concluir que

$$\mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\phi_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}} \middle|\, \mathcal{G}_t\right) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \phi_u e^{\Gamma_t - \Gamma_u} d\Gamma_u \middle|\, \mathcal{F}_t\right).$$

Demostración. Utilizando el lema anterior, podemos ver que:

$$\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\phi_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}\middle|\,\mathcal{G}_t\right) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\phi_\tau \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}\middle|\,\mathcal{F}_t\right).$$

Supongamos que ϕ es acotado [1], la prueba consistirá en demostrarlo primero para funciones de payoff simples y acotadas, y posteriormente argumentar la convergencia de las esperanzas condicionales resultantes.

Entonces, sea $\phi_u = \sum_{i=0}^n \phi_{t_i}\mathbb{1}_{\{t_i<u\leq t_{i+1}\}}$, con $t < u \leq T$ y $\{t_i\}_{i=0}^n$ una partición del intervalo $[t,T]$ y donde cada ϕ_{t_i} es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible. Con esto se sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\phi_\tau \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}\middle|\,\mathcal{F}_t\right) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=0}^n \phi_{t_i}\mathbb{1}_{\{t_i<u\leq t_{i+1}\}}\middle|\,\mathcal{F}_t\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\sum_{i=0}^n \phi_{t_i}\mathbb{1}_{\{t_i<u\leq t_{i+1}\}}\middle|\,\mathcal{F}_{t_i}\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\phi_{t_i}\sum_{i=0}^n \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{t_i<u\leq t_{i+1}\}}\middle|\,\mathcal{F}_{t_i}\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\phi_{t_i}\left(F_{t_{i+1}}-F_{t_i}\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \phi_u dF_u\middle|\,\mathcal{F}_t\right).
\end{aligned}$$

Utilizando que $dF_u = e^{-\Gamma_u}d\Gamma_u$ tenemos que:

$$\mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\phi_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}\middle|\,\mathcal{G}_t\right) = \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^T \phi_u e^{\Gamma_t-\Gamma_u}d\Gamma_u\middle|\,\mathcal{F}_t\right).$$

Por lo que el resultado se cumple para las funciones simples y acotadas, y como además ϕ es acotado podemos utilizar el teorema de convergencia dominada para concluir que el resultado es válido tomando una sucesión de simples y acotadas $\{\phi^n\}_{n\geq 1}$ tal que $\phi^n \to \phi$. Con esto termina la prueba.

□

Para terminar con esta sección, notemos que si el proceso F es absolutamente continuo, es decir, que $F_t = \int_0^t f_s ds$ para algún proceso no negativo y $\mathbb{F}$-progresivo f, entonces F es creciente y así Γ también es creciente y absolutamente continuo, por lo que $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds$ donde γ también es un proceso no negativo y $\mathbb{F}$-progresivo, además se tiene que

$$\gamma_t = \frac{f_t}{1-F_t},$$

y en general se conoce a γ como la $\mathbb{F}$-intensidad.

[1] en la práctica los payoffs que se consideran siempre son acotados, por lo que no es tan restrictiva esta hipótesis

En la siguiente sección veremos algunos instrumentos de crédito sencillos y terminaremos el capítulo con la valuación de CDS's, además de un algoritmo para boostrapear las probabilidades de incumplimiento implícitas en los CDS's a distintas fechas de vencimiento de alguna contraparte fija.

2.15. Valuación de derivados de crédito básicos

Con la herramienta introducida hasta el momento podemos empezar a considerar los intrumentos de crédito básicos, a saber, los bonos cupón cero sujetos a incumpliento. Junto con estos bonos definiremos los Credit Default Swaps (CDS), a partir de los cuales obtendremos las probabilidades de default y con ello podremos calibrar el modelo para valorar derivados sujetos a riesgo de contraparte.

2.15.1. Bonos sujetos a incumplimiento

Vamos a considerar dos tipos de bonos sujetos a incumplimiento, sin pérdida de generalidad podemos pensar que el pago es de 1 unidad monetaria al tiempo T si no hay default antes de T, o de una cantidad $R \in [0, 1)$ fija en caso de que haya default. La diferencia entre los dos bonos es cuándo se paga la cantidad R en caso de que ocurra el default, en la fecha de vencimiento, T, o en la fecha en que ocurre el default, τ.

- **Bono sujeto a incumplimiento que paga en T si hay default**
  Supongamos que la cantidad R se paga en T dado que $\tau \leq T$. El payoff de un bono sujeto a incumplimiento con estas condiciones está en función de que ocurra cualquiera de los siguientes eventos:

  (a) Si $\tau > T$ se paga una unidad monetaria en T.

  (b) Si $\tau \leq T$ se pagan R unidades monetarias en T; a R se le conoce como *recovery* y es una constante predeterminada.

  Podemos calcular el precio de este payoff al tiempo cero, que además de ser bastante sencillo es muy ilustrativo en términos del valor que tiene asociado la posibilidad de incumplimiento. Sea $\mathbb{Q}$ la medida neutral al riesgo asociada a $B(t, T)$, el valor de un bono cupón cero sin incumplimiento al tiempo t que paga una unidad monetaria al tiempo T y que es determinista, entonces el payoff descontado bajo $\mathbb{Q}$ al tiempo cero de un bono sujeto a incumpliento está dado por:

$$
\begin{aligned}
D^R(0,T) &= B(0,T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{T<\tau\}} + R\mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}] \\
&= B(0,T)\,[1 - F(T) + RF(T)] \\
&= B(0,T) - (1-R)B(0,T)F(T).
\end{aligned}
$$

Podemos notar algo interesante, el precio de un bono sujeto a incumplimiento es el precio del bono sin incumplimiento menos el valor esperado de la pérdida en caso de que ocurra el default. Si $R = 1$ quiere decir que no hay pérdida y en consecuencia el bono realmente no estaría sujeto a incumplimiento y su valor sería simplemente $B(0, T)$.

Para calcular el valor de este bono en cualquier $t \in [0, T]$, $D^R(t, T)$, tenemos que considerar dos casos:

(a) Si $\tau \leq t$, se pagará R en T, por lo que el bono en t vale $RB(t, T)$.

(b) Si $\tau > t$, aún no sabemos si $\tau \leq T$ o no, por lo que en este caso el payoff del bono es $B(t, T)\mathbb{1}_{\{T<\tau\}} + R\mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}$.

Por lo que el precio del bono sujeto a incumplimiento al tiempo $t \leq T$ se puede expresar como:

$$D^R(t, T) = \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} RB(t, T) + \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} \tilde{D}^R(t, T),$$

donde $\tilde{D}^R(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B(t, T)\mathbb{1}_{\{T<\tau\}} + R\mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}} \middle| t < \tau\right]$. Bajo los supuestos del modelo podemos calcular esta esperanza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}^R(t, T) &= B(t, T)\left(1 - \mathbb{Q}[\tau \leq T | t < \tau] + R\mathbb{Q}[\tau \leq T | t < \tau]\right) \\
&= B(t, T)\left(1 - (1 - R)\mathbb{Q}[\tau \leq T | t < \tau]\right) \\
&= B(t, T)\left(1 - (1 - R)\frac{\mathbb{Q}[t < \tau \leq T]}{\mathbb{Q}[t < \tau]}\right) \\
&= B(t, T)\left(1 - (1 - R)\frac{F(T) - F(t)}{\bar{F}(t)}\right),
\end{aligned}$$

donde $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$.

Podemos reexpresar la ecuación anterior como $\tilde{D}^R(t, T) = B(t, T)(1 - \mathrm{LGD} \times \mathrm{DP})$, donde el *loss given default* (LGD) se define como $1 - R$ y DP es la probabilidad de default condicional, $\mathrm{DP} = \mathbb{Q}[\tau \leq T | t < \tau]$.

Además, utilizando el supuesto de que $F(t) = 1 - e^{\int_0^t \gamma_s ds}$, donde γ es la tasa de fallo y si $R = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{D}^0(t, T) &= B(t, T)\left(1 - \frac{F(T) - F(t)}{\bar{F}(t)}\right) \\
&= B(t, T)\left(\frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(t)} - \frac{F(T) - F(t)}{\bar{F}(t)}\right) \\
&= B(t, T)\left(\frac{\bar{F}(T)}{\bar{F}(t)}\right) \\
&= \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\exp\left(-\int_t^T \gamma_s ds\right) \\
&= \exp\left(-\int_t^T (r + \gamma)_s ds\right).
\end{aligned}$$

Como γ es positivo tenemos que un bono cupón cero sujeto a incumplimiento sin recovery es más barato que un bono cupón cero que no está sujeto a incumplimiento, como esperaríamos.

- **Bono sujeto a incumplimiento que paga en τ si hay default**
  Este tipo de pago al tiempo de default es el más común en la práctica, pues entre más tiempo pase sin efectuarse el pago hay mayor riesgo de no recibir el recovery tampoco.

  Supongamos que la cantidad R se paga en τ dado que $\tau \leq T$. El payoff de un bono sujeto a incumplimiento con estas condiciones está en función de que ocurra cualquiera de los siguientes eventos:

  (a) Si $\tau > T$ se paga una unidad monetaria en T.
  (b) Si $\tau \leq T$ se pagan R unidades monetarias en τ.

  Empecemos calculando su precio al tiempo $t = 0$

$$\begin{aligned} D^R(0,T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[B(0,T)\mathbb{1}_{\{T<\tau\}} + RB(0,\tau)\mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}] \\ &= B(0,T)\bar{F}(T) + \int_0^T RB(0,s)dF(s) \\ &= B(0,T)\bar{F}(T) + R\int_0^T B(0,s)f(s)ds. \end{aligned}$$

  En el caso en que haya default antes de t el bono ya no vale nada, pues el recovery se pagó en $\tau < t$ y ya no hay flujos futuros que descontar. Por otro lado si $0 \leq t$ está fijo y $t \leq \tau$ el precio del bono está dado por

$$\begin{aligned} D^R(t,T) &= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\tilde{D}^R(t,T) \\ &= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[B(t,T)\mathbb{1}_{\{T<\tau\}} + RB(t,\tau)\mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}\middle| t<\tau\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\left[B(t,T)\frac{\bar{F}(T)}{\bar{F}(t)} + \frac{1}{\bar{F}(t)}\int_t^T RB(t,s)dF(s)\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\left[B(t,T)\frac{\bar{F}(T)}{\bar{F}(t)} + \frac{R}{\bar{F}(t)}\int_t^T B(t,s)f(s)ds\right]. \end{aligned}$$

  Utilizando el supuesto de que $F(t) = 1 - e^{\int_0^t \gamma_s ds}$, donde γ es la tasa de fallo, tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{D}^R(t,T) &= \exp\left(-\int_t^T (r+\gamma)_s ds\right) + R\int_t^T \frac{\bar{F}(s)}{\bar{F}(T)}B(t,s)\frac{f(s)}{\bar{F}(s)}ds \\ &= \exp\left(-\int_t^T (r+\gamma)_s ds\right) + R\int_t^T \exp\left(-\int_t^s (r+\gamma)_u du\right)\gamma(s)ds. \end{aligned}$$

  En el caso en que $R = 0$ volvemos a tener el mismo resultado que en el caso anterior donde se pagaba el recovery hasta la fecha de vencimiento T.

De esta manera hemos calculado el precio de un bono sujeto a incumplimiento de manera general, utilizando tanto la función de fallo como la tasa de fallo. Bajo el supuesto de que tanto la tasa de interés como la tasa de fallo son deterministas podemos identificar de manera sencilla las propiedades básicas al incorporar la posibilidad de incumplimiento, por ejemplo que el precio de un bono cupón cero que no está sujeto a incumplimiento es menor que el riesgoso, lo cual tiene sentido pues deberíamos recibir un *descuento* por asumir dicho riesgo.

En la práctica no es que realmente coticen bonos sujetos a incumplimiento, si no que con este concepto se trata de modelar los bonos corporativos, que al no ser una institución financiera es más riesgoso invertir en ellos a través de la compra de bonos de estas compañías. Es decir, partimos del supuesto de que el riesgo de crédito inherente a la compañía viene incluido en el precio de los bonos. En principio se podrían obtener las probabilidades de incumplimiento a partir de precios de bonos corporativos; sin embargo, no están estandarizados ni son tan líquidos como lo son los CDS.

2.15.2. Credit Default Swaps

El instrumento financiero de crédito por excelencia es el Credit Default Swap (CDS), pues son instrumentos estandarizados que permiten calibrar la curva de crédito asociada a la contraparte sobre la que está definido.

Es un contrato que *asegura* el cumplimiento de un instrumento derivado entre dos partes. Supongamos que hay un instrumento derivado entre dos contrapartes, digamos A y B, donde B pagará cierto flujo de efectivo incierto a A en una fecha de vencimiento T, como A está consciente del posible incumplimiento por parte de B, pacta con otra contraparte C un contrato que le pague cierta cantidad R en caso de que B entre en default antes de la fecha de vencimiento T. El contrato que pacta A con C se conoce como CDS.

Podemos pensar a los CDS como seguros contra el default de cierta contraparte. Algunas características de los CDS son:

- Estos instrumentos cotizan en mercado.
- Llevan implícitamente las probabilidades de default de la contraparte.
- Al ser instrumentos de mercado, su precio descontado es martingala con respecto a la medida neutral al riesgo.

Por otro lado, algunas desventajas son que:

- Últimamente ha disminuido su liquidez en mercado.

- No se tienen CDS para todas las contrapartes que cotizan en mercado y a veces es necesario tomar algún proxy.
- El pago R es fijo y podría no ser suficiente para cubrir la posible pérdida en caso de default.

En relación a la última desventaja, algunas instituciones financieras venden un instrumento conocido como Contingent Credit Default Swap (CCDS), de tal manera que el pago final sea proporcional a la pérdida que se tiene en caso de default; sin embargo, resultan bastante complicados de valuar y son aún menos líquidos por lo que son mucho más caros.

El pago que hace un CDS en caso de que ocurra el default antes de la fecha de vencimiento T exige una prima que se paga periódicamente durante la vida del derivado original. A continuación daremos la definición de un CDS en términos de todos los elementos que lo componen.

Definición 2.16 (CDS). *Un CDS es un derivado de crédito que a cambio de una prima periódica h, que se paga en las fechas $t_1, \ldots, t_n$ donde $t_n \leq T$ y un último pago en τ en caso de que $\tau \leq T$, se recibe una cantidad R por unidad de valor nominal al tiempo de default τ de una contraparte de referencia. Sea $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$ y $t_0 = 0$, el payoff descontado a tiempo t de un CDS para B es igual a:*

$$\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\left[\sum_{k=j(t)}^{n} D(t,t_k)\Delta_k h \mathbb{1}_{\{\tau>T_k\}} + D(t,\tau)\left(\tau - T_{j(\tau)-1}\right) h \mathbb{1}_{\{\tau<T_n\}} - \mathbb{1}_{\{\tau<T\}} D(t,\tau) R\right],$$

donde $t \in [t_{j(t)-1}, t_{j(t)})$ y $t_{j(t)} = \min_k \{t_k | t_k > t\}$.

Recordemos que $D(s,t) = \exp\left(\int_s^t r_u du\right)$, donde r_t es posiblemente estocástica.

Utilizando la fórmula de valuación neutral al riesgo podemos obtener el precio de un CDS al tiempo t, el cuál lo denoratemos por CDS_t. En términos generales, es decir, sin suponer ninguna dinámica particular para la tasa de interés r_t ni una distribución particular para el tiempo de default τ, el precio de un CDS está dado por:

$$\mathrm{CDS}_t = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{k=j(t)}^{n} D(t,t_k)\Delta_k h \mathbf{1}_{\{\tau>T_k\}} + D(t,\tau)\left(\tau - T_{j(\tau)-1}\right) h \mathbf{1}_{\{\tau<T_n\}} - \mathbf{1}_{\{\tau<T\}} D(t,\tau) R \,\middle|\, \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t\right]. \tag{2.4}$$

Como podemos ver está formado por flujos en dos sentidos, uno que paga la prima y se conoce como la *pata de protección* (protection leg) y otro que paga el recovery en caso de default antes de T que se conoce como la *pata de recuperación* (recovery leg).

Recordemos que $\mathcal{F}_t$ es la información de mercado al tiempo t, sin contemplar el default, y $\mathcal{H}_t$ es la información al tiempo t generada por los eventos de la forma $\{\tau < u\}$, tal que $u \leq t$.

El valor del CDS al tiempo t que obtuvimos en (2.4) es simplemente el valor presente de los flujos que lo componen; ahora utilizaremos la teoría de las secciones anteriores, es decir, supondremos que τ es el primer salto de un proceso Poisson no homogéneo o de un proceso de Cox. Utilizando estos supuestos podremos calibrar las probabilidades de default implícitas por los precios de mercado de CDS's para obtener una curva de probabilidades de supervivencia asociada a una contraparte.

Valuación de un CDS en caso de intensidad de default determinista.

Recordemos que bajo modelo de intensidad determinista no podemos correlacionar la tasa de interés y las probabilidades de default; sin embargo, es un buen ejercicio atacar este problema más simple pues nos ayudará a comprender la estructura básica para modelar y calibrar las probabilidades de default.

En este modelo el tiempo de default τ está dado por el primer salto de un proceso Poisson no homogéneo, y siguiendo la notación que vimos anteriormente, $\tau = \Gamma^{-1}(\xi)$ donde $\xi \sim \exp(1)$ y es independiente de la tasa de interés r_t para toda $t \geq 0$. Continuaremos con el cálculo de la ecuación (2.4) bajo este modelo. Además definimos $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$ como la σ-álgebra que contiene tanto la información de mercado como la información que tenemos sobre el default hasta el tiempo t.

Calculemos por separado el valor de cada pata del CDS. Para el caso de la pata de protección tenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{k=j(t)}^{n} D(t,t_k)\Delta_k h \mathbb{1}_{\{\tau>T_k\}}\middle|\,\mathcal{G}_t\right] &= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\sum_{k=j(t)}^{n}\Delta_k h\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,t_k)\mathbb{1}_{\{\tau>T_k\}}\middle|\,\mathcal{G}_t\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\sum_{k=j(t)}^{n}\Delta_k h\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,t_k)\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau>T_k\}}\middle|\,\mathcal{H}_t\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\sum_{k=j(t)}^{n}\Delta_k h P(t,t_k)e^{\Gamma(t)-\Gamma(t_k)}.
\end{aligned}
$$

Consideremos el flujo que paga el recovery

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau<T\}}D(t,\tau)R\middle|\mathcal{G}_t\right] &= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{\tau<T\}}D(t,\tau)R\middle|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_\infty\right)\middle|\mathcal{G}_t\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau<T\}}R\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(D(t,\tau)\middle|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_\infty\right)\middle|\mathcal{G}_t\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau<T\}}RP(t,\tau)\middle|\mathcal{G}_t\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}R\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau<T\}}P(t,\tau)\middle|\mathcal{F}_t\right]}{\mathbb{Q}(\tau>t|\mathcal{F}_t)} \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}Re^{\Gamma(t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau<T\}}P(t,\tau)\middle|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}Re^{\Gamma(t)}\int_t^T P(t,u)dF_u \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}Re^{\Gamma(t)}\int_t^T P(t,u)\gamma(u)e^{\Gamma(u)}du \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}Re^{\Gamma(t)}\int_t^T P(t,u)\gamma(u)e^{\Gamma(u)}du \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}Re^{\Gamma(t)}\int_t^T P(t,u)\gamma(u)e^{\Gamma(u)}du.
\end{aligned}
$$

Por último, consideremos la pata de recuperación

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(t,\tau)\left(\tau-T_{j(\tau)-1}\right)h\mathbb{1}_{\{\tau<T_n\}}\middle|\mathcal{G}_t\right] \\
=\;& \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}h\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(D(t,\tau)\left(\tau-T_{j(\tau)-1}\right)\mathbb{1}_{\{\tau<T_n\}}\middle|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_\infty\right)\middle|\mathcal{G}_t\right] \\
=\;& \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}h\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\tau-T_{j(\tau)-1}\right)\mathbb{1}_{\{\tau<T_n\}}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(D(t,\tau)\middle|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_\infty\right)\middle|\mathcal{G}_t\right] \\
=\;& \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}h\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\tau-T_{j(\tau)-1}\right)\mathbb{1}_{\{\tau<T_n\}}P(t,\tau)\middle|\mathcal{G}_t\right] \\
=\;& \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}h\int_t^{t_n} P(t,u)\left(u-T_{j(u)-1}\right)dF_u \\
=\;& \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}h\int_t^{t_n} P(t,u)\left(u-T_{j(u)-1}\right)\gamma(u)\exp(-\Gamma(u))du
\end{aligned}
$$

Sumando los términos de cada una de las patas tenemos el precio del CDS. Podemos notar que dadas las curvas de descuento lo único que queda como variable desconocida es justo la tasa de fallo $\gamma(t)$, que vamos a calibrar a partir de CDS's de mercado, donde dada una fecha de vencimiento T se muestra en pantalla la h tal que el CDS vale cero. Tomando todos los vencimientos disponibles en mercado podemos calibrar la función $\gamma(t)$, al haber una cantidad finita de cotizaciones de mercado, existen una infinidad de curvas de intensidad que se ajusten a esos precios, por lo que supondremos que $\gamma(t)$ es constante entre fechas de vencimientos de mercado y calibraremos por el método de boostrapping.

Si tenemos precios de primas de CDS's para los vencimientos $\{T_1, \ldots, T_N\}$ el algoritmo de calibración es

1. Encontrar el valor γ_{0,T_1} que calibre la prima del CDS con vencimiento en T_1.

2. La prima del CDS con vencimiento en T_2 estará en función de γ_{0,T_1} ya calibrado, por lo que resta calibrar el valor γ_{T_1,T_2}

3. La prima del CDS con vencimiento en T_k estará en función de $\gamma_{0,T_1}, \ldots, \gamma_{T_{k-2},T_{k-1}}$ ya calibrados, por lo que resta calibrar el valor γ_{T_{k-1},T_k}

4. Iterar el paso anterior hasta terminar con todos los CDS's de mercado.

Al final lo que queremos calcular es la curva de probabilidades de supervivencia asociada a la contraparte, así que una vez dada la función de tasa de fallo para cada tiempo podemos calcular las probabilidades de supervivencia. Recordemos que la probabilidad de supervivencia bajo nuestro modelo la podemos expresar como:

$$\mathbb{Q}\left[\tau > T \middle| \mathcal{G}_t\right] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \exp\left(-\int_t^T \lambda_s ds\right) \tag{2.5}$$

Entonces para calcular la probabilidad de que el default sea mayor a cierta fecha basta con descomponer la integral en cada fecha en la que calibramos las intensidades $\lambda_{T_i,T_{i+1}}$ y podemos suponer que la función de intensidad es constante por pedazos y así calcular las probabilidades de supervivencia.

En R existe una paquetería llamada *credule* que permite calibrar probabilidades de supervivencia a partir de spreads de CDS de la manera en que vimos arriba. En el apéndice se encuentra el código de las gráficas que muestraré a continuación.

En esta paquetería se puede incluso definir una estructura de tasas de interés, es decir, podemos considerar que hay distintas tasas de descuento al día de hoy para distintas fechas futuras, pero como no consideramos estructura temporal de tasas a lo largo del trabajo supondremos que hay una única tasa de descuento. Dicho esto, supondremos una estructura de spreads de mercado igual a $\{0.200, 0.250, 0.300, 0.350, 0.400, 0.450, 0.500, 0.550, 0.600, 0.650\}$ y que están asociados a los tenors $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20, 30\}$ en años. Si suponemos una tasa del 7.5 % para descontar los flujos y que para los CDS la frecuencia de pago de la prima es semestral, así como las posibles fechas de pago en caso de que haya default y por último un recovery de 0.40 entonces obtenemos la siguiente gráfica:

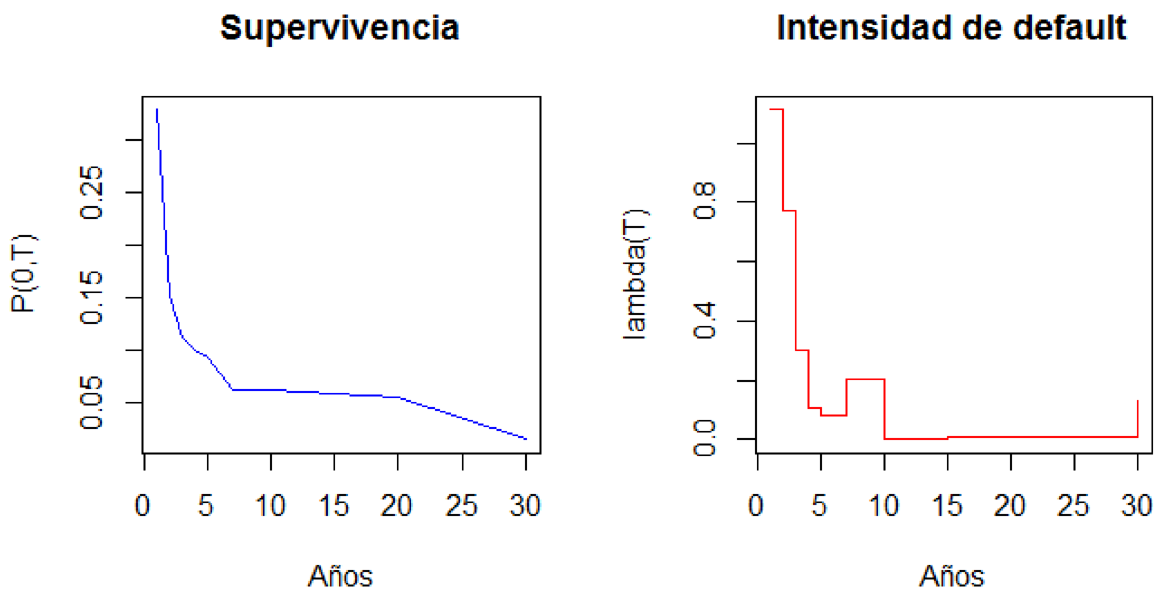

Figura 2.1: Probabilidades de supervivencia e Intensidad de default

Capítulo 3

Riesgo de contraparte

Después de la crisis del 2008 la literatura sobre el riesgo de contraparte ha aumentado considerablemente y conforme han ido surgiendo y/o modificando las regulaciones bancarias tanto las generales como Basilea III, así como las más particulares como Dodd-Frank, FRTB o MiFID, el riesgo de contraparte, así como otros riesgos "similares" como los riesgos de fondeo, liquidez, capital, márgenes iniciales, etc., han exigido a los bancos incorporarlos en sus valuaciones y darles seguimiento, es decir, hacer la cobertura de estos ajustes. La principal complejidad que presentan todos estos ajustes, mejor conocidos como "XVA's", es que deben calcularse a nivel portafolio y no solo a nivel instrumento, lo cual conlleva una carga numérica muy pesada y exige no solo tecnología de vanguardia si no también que el código que se escribe sea eficiente y con la capacidad de ir evolucionando conforme van cambiando las reglas del juego con cada nueva regulación.

En este apartado consideraremos lo que podríamos pensar como el primer XVA, el Credit Valuation Adjustment (CVA). Como mencionamos en la Introducción, en este capítulo consideraremos el precio de un derivado cuando la contraparte con la que se cierra el derivado no tiene riesgo de contraparte, es decir, no se considera que pueda tener default en el tiempo de vida del derivado y el precio del mismo derivado cuando esta contraparte tiene probabilidad positiva de entrar en default y no poder hacer frente a las obligaciones que le quedan antes de la fecha de vencimiento del derivado. La diferencia entre estos dos precios es precisamente el CVA:

$$CVA_t = V_t^{\text{default free}} - V_t^{\text{default}}.$$

Como podemos ver, el CVA es un ajuste aditivo al precio de un derivado. La principal razón de que esto sea así, es por motivos de cobertura, pues en la práctica el derivado sin considerar el riesgo de contraparte lo cubre la mesa de trading correspondiente al riesgo al que esté expuesto el derivado, que puede ser FX, Equity, Tasas de Interés, Commodities, etc; la cobertura del CVA la lleva a cabo la mesa de trading de CVA la cuál no cubrirá este ajuste derivado por derivado si no más bien considerando la cartera completa de derivados que se tienen con cada contraparte.

Las referencias que se utilizaron para este trabajo son: el libro de Brigo, Morini y Pallavicini [BMP13], el libro de Gregory [Gre12], los artículos de Brigo, et al [BC09], [BP07]. Un libro que plantea varios problemas a la vanguardia del mercado es el libro de Glau, et al [GGSZ16].

El riesgo de contraparte es el riesgo de tener una pérdida debido a que una de las contrapartes en un contrato financiero no haga frente a sus obligaciones. En este caso se dice que la compañía ha incurrido en incumplimiento o en default. El default no necesariamente se refiere a la bancarrota, podría ser también el caso de un retraso de un pago importante, una reestructura del contrato o que hayan rebasado cierto límite de capital o liquidez que se haya puesto como condición en el contrato.

Estamos interesados en modelar el tiempo en que llega el default, lo denotaremos por τ a lo largo de este trabajo. Pensaremos en τ como una variable aleatoria, en particular un tiempo aleatorio. Pero dejemos de lado a τ por un momento; es verdad que nos interesa el momento de default, pero a lo que en realidad tenemos que ponerle atención es a la pérdida que se tendría al tiempo τ.

El concepto principal en la modelación del riesgo de contraparte es el de *exposición*:

Definición 3.1 (Exposición)**.** *La exposición de un contrato en una fecha* $0 \leq t \leq T$*, con pago final en fecha* $T > 0$*, tal que la suma de sus flujos futuros descontados a* t *son* $g(t,T)$ *se define como:*

$$Ex(t) = (\mathbb{E}_t[g(t,T)])^+.$$

La expresión $\mathbb{E}_t[g(t,T)]$ también es conocida como NPV (Net Present Value) al tiempo t y la esperanza $\mathbb{E}_t(\cdot)$ es en la medida neutral al riesgo. En particular estaremos interesados en la exposición al tiempo de default.

Definición 3.2 (EAD)**.** *La exposición al tiempo de default se define como la exposición evaluada en el tiempo aleatorio de default* τ*,*

$$EAD = Ex(\tau) = (\mathbb{E}_\tau[g(\tau,T)])^+.$$

Cuando ocurre el default al tiempo τ, se pierde todo el NPV en τ salvo por el recovery multiplicado por la parte positiva del valor de portafolio. Es decir, la pérdida la podemos expresar como:

$$\text{Pérdida} := \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}(1-R)(\mathbb{E}_t[g(t,T)])^+,$$

donde R es la fracción que se recupera al momento de default y se conoce como *Recovery.*

Necesitamos modelar la probabilidad de que τ ocurra en algún intervalo de tiempo $[s_1, s_2)$ con $0 \leq s_1 < s_2 \leq T$. Esto puede hacerse de varias maneras y la mayor parte de este trabajo se concentrará en ello.

En resumen, los ingredientes básicos para modelar el riesgo de contraparte son:

(a) Modelo para el tiempo de default τ.

(b) Modelo para calcular la exposición y en particular la EAD.

(c) Modelo para las probabilidades de default.

3.3. Riesgo de contraparte

Una vez que se tiene modelado el riesgo de crédito y el riesgo de mercado, podemos plantear una fórmula general para la valuación de derivados sujetos a riesgo de incumplimiento. Lo primero que haremos será considerar que ocurre con el payoff de un derivado cuando se considera la posibilidad de que no se lleven a cabo todos los flujos de efectivo futuros debido a que alguna de las contrapartes caiga en incumplimiento.

En este trabajo vamos a considerar que el riesgo de contraparte es unilateral, es decir, una de las contrapartes se considera *libre de riesgo de contraparte* y la otra es *riesgosa*, es decir, tiene probabilidad positiva de entrar en default. Este supuesto, aunque poco realista, permite explicar con claridad los conceptos clave del riesgo de contraparte.

Lo primero que debemos notar es que el precio de un derivado con posibilidad de incumplimiento siempre debe ser más barato que el precio de ese mismo derivado libre de riesgo de contraparte. Lo que haremos ahora es definir el payoff general de un derivado con riesgo de incumplimiento y posteriormente calcularemos el precio de este payoff bajo la medida neutral al riesgo.

3.3.1. Payoff general sujeto a incumplimiento

Trabajaremos en un espacio de probabilidad filtrado $\left(\Omega, \mathcal{G}, \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{Q}\right)$, donde $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$. $\{\mathcal{F}_t\}$ es una filtración completa y continua por la derecha que contiene la información de mercado hasta el tiempo t sin tomar en cuenta el evento de default, usualmente es la filtración asociada a un movimiento Browiniano $\{W_t\}_{t\geq 0}$. $\mathcal{H}_t = \sigma(\{\tau \leq u\} : u \leq t)$, es decir, $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$ es la filtración continua por la derecha generada por el evento de default. Definimos $\mathbb{E}_t(\cdot) := \mathbb{E}_t(\cdot | \mathcal{G}_t)$.

La medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ es la medida de riesgo neutral. Es la medida asociada al numerario de la cuenta corriente libre de riesgo local B_t, que tiene asociada la siguiente ecuación:

$$dB_t = r_t B_t dt, \qquad B_0 = 1.$$

Nota 3.4. *La cuenta corriente libre de riesgo es la que está asociada a la tasa que pagaría la cuenta de colateral en el caso de un derivado completamente colateralizado.*

Consideremos un contrato entre dos partes con fecha de vencimiento T. Supondremos que el inversionista (B), típicamente un banco, se considera asimismo libre de incumplimiento y la contraparte riesgosa, C, está de acuerdo con este supuesto. Esto se conoce como riesgo de contraparte es *unilateral.*

Durante la vida del contrato pueden ocurrir los siguientes escenarios:

- Si $\tau > T$, no hay default por parte de C durante la vida del contrato y se pagan todos los flujos de efectivo de manera normal.

- Si $\tau \leq T$, la contraparte no puede cubrir por completo sus obligaciones y al tiempo τ se calcula el NPV residual del payoff hasta vencimiento.
  (a) Si el NPV(τ) es negativo para B, se paga en su totalidad a C.
  (b) Si el NPV(τ) es positivo para B, C tan solo pagará RNPV(τ), donde R es el recovery.

Denotamos por $g(s,t)$ a los flujos de efectivo entre s y t llevados a valor presente a fecha s suponiendo que no hay default, esto es, el payoff en caso de que no ocurra el default. El *Valor Presente Neto* al tiempo t se define como $\mathrm{NPV}(t) = \mathbb{E}_t(g(t,T))$ [1].

Si denotamos por $\bar{g}(t,T)$ al mismo payoff pero sujeto a incumplimiento, tenemos que:

$$\bar{g}(t,T) = \mathbb{1}_{\{\tau>T\}} g(t,T) + \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}} \left[g(t,\tau) + D(t,\tau) \left(R(\mathrm{NPV}(\tau))^+ - (\mathrm{NPV}(\tau))^- \right) \right].$$

Esta última expresión es el payoff incorporando el riesgo de contraparte.

Proposición 3.5 (Fórmula general de valuación con riesgo de contraparte unilateral)**.** *Al tiempo t, en el evento $\{\tau > t\}$, el precio del payoff con vencimiento en T e incorporando riesgo de contraparte está dado por*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[\bar{g}(t,T)] &= \mathbb{E}_t[g(t,T)] - \mathbb{E}_t[(1-R)\mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}} D(t,\tau)(NPV(\tau))^+] \\ &:= \mathbb{E}_t[g(t,T))] - CVA(t,T). \\ \textit{Entonces: } CVA(t,T) &:= \mathbb{E}_t[g(t,T))] - \mathbb{E}_t[\bar{g}(t,T)]. \end{aligned}$$

Demostración. Empecemos por el lado derecho de la ecuación, en el evento $\{\tau > t\}$, lo que hay dentro de la esperanza es:

$$\begin{aligned} & g(t,T) - (1-R)\mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}} D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^+ \\ = \; & \mathbb{1}_{\{\tau>T\}} g(t,T) + \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}} g(t,T) + (R-1)\mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}} D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^+ \\ = \; & \mathbb{1}_{\{\tau>T\}} g(t,T) + \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}} g(t,T) + R\mathbb{1}_{\{\tau\geq T\}} D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^+ - \mathbb{1}_{\{\tau\geq T\}} D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^+. \end{aligned}$$

[1] NPV(t): Net Present Value al tiempo t. Es el valor del derivado en la fecha t.

Haremos uso del hecho de que τ es un tiempo de paro y de su σ-álgebra asociada, $\mathcal{F}_\tau$. Condicionando a la información en τ, para el segundo y el cuarto término tenemos que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\tau\left[\mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}g(t,T) - \mathbb{1}_{\{\tau\geq T\}}D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^+\right] \\ = \;& \mathbb{E}_\tau\left[\mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}\left[g(t,\tau)+D(t,\tau)g(\tau,T) - D(t,\tau)(\mathbb{E}_\tau[g(\tau,T)])^+\right]\right] \\ = \;& \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}\left[g(t,\tau)+D(t,\tau)\mathbb{E}_\tau[g(\tau,T)] - D(t,\tau)(\mathbb{E}_\tau[g(\tau,T)])^+\right] \\ = \;& \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}\left[g(t,\tau) - D(t,\tau)(\mathbb{E}_\tau[g(\tau,T)])^-\right] \\ = \;& \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}\left[g(t,\tau) - D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^-\right]. \end{aligned}$$

Donde usamos que $f = f^+ - f^-$. Como $t<\tau$ tenemos que $\mathbb{E}_t[\mathbb{E}_\tau(\cdot)] = \mathbb{E}_t[\cdot]$, por lo que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t\left[\mathbb{E}_\tau\left[g(t,T) - (1-R)\mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^+\right]\right] \\ = \;& \mathbb{E}_t\left[\mathbb{E}_\tau\left[\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}g(t,T) + R\mathbb{1}_{\{\tau\geq T\}}D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^+\right] + \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}\left[g(t,\tau) - D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^-\right]\right] \\ = \;& \mathbb{E}_t\left[\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}g(t,T) + R\mathbb{1}_{\{\tau\geq T\}}D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^+ + \mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}\left[g(t,\tau) - D(t,\tau)(\mathrm{NPV}(\tau))^-\right]\right] \end{aligned}$$

Agrupando estos términos vemos que lo que está dentro de la esperanza es justo la definición del payoff general con riesgo de contraparte. □

Observación 3.6. *El recovery, R, se supone especificado y determinista. De esta ecuación es claro que el precio sujeto a incumplimiento es más barato que el precio libre de riesgo de contraparte. El ajuste que se le resta es precisamente el CVA (unilateral) y depende de dos factores principales: el perfil de exposición y la probabilidad de default de la contraparte. Además se puede interpretar como un call, con strike cero sobre el NPV residual al momento de default. El riesgo de contraparte agrega opcionalidad al payoff original, y se vuelve dependiente del modelo incluso valuando forwards o swaps, que originalmente son independientes de la dinámica del subyacente que supongamos.*

Otra manera de decir esto, es que suponiendo que hay riesgo de contraparte el precio de un derivado es el precio libre de riesgo de contraparte menos el CVA:

$$\begin{aligned} V_t^{\text{risky}} &= V_t^{\text{risk-free}} - \mathrm{CVA}_t \\ &= V_t^{\text{default free}} - (1-R)\mathbb{E}_t\left[\mathbb{1}_{\{t<\tau\leq T\}}D(t,\tau)\mathrm{NPV}^+(s)])^+\right] \\ &= V_t^{\text{default free}} - (1-R)\int_t^T \mathbb{E}_t\left[D(t,s)(\mathbb{E}_s[\mathrm{NPV}^+(s,T)])^+\right] d_s\mathbb{Q}\left\{\tau\leq s\right\}. \end{aligned}$$

Esta fórmula debe ser aproximada, de tal forma que sea posible su cálculo numérico. Una de las aproximaciones más comunes está dada de la siguiente manera: sea $t=0$ por simplicidad y hagamos una discretización del tiempo $T_0, T_1, \ldots, T_b = T$, entonces el precio con riesgo de contraparte está dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{g}(0,T_b)] &= \mathbb{E}[g(0,T_b)] - (1-R)\sum_{j=1}^{b}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{j-1}<\tau\leq T_j\}}D(0,\tau)(\mathbb{E}_\tau[g(\tau,T_b)])^+] \\ &\approx \mathbb{E}[g(0,T_b)] - (1-R)\sum_{j=1}^{b}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_{j-1}<\tau\leq T_j\}}D(0,T_j)(\mathbb{E}_{T_j}[g(T_j,T_b)])^+], \end{aligned}$$

donde la aproximación consiste en desplazar el tiempo de default hasta el primer $T_i > \tau$.

Otra aproximación se puede obtener suponiendo independencia entre la exposición y el tiempo de default, es decir entre g y τ, en este caso está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\bar{g}(0,T_b)] &\approx \mathbb{E}[g(0,T_b)] - (1-R)\sum_{j=1}^{b} \mathbb{Q}\left(T_{j-1} < \tau \leq T_j\right) \mathbb{E}[D(0,T_j)(\mathbb{E}_{T_j}[g(T_j,T_b)])^+] \\
&= \mathbb{E}[g(0,T_b)] - (1-R)\sum_{j=1}^{b} \left(P(0,T_{j-1}) - P(0,T_j)\right) B(0,T_j)(\mathbb{E}_{T_j}[g(T_j,T_b)])^+.
\end{aligned}$$

De esta manera no se necesita un modelo para el tiempo de default pues con las probabilidades de supervivencia, $P(0,T_j)$ $j \in \{0,\ldots,b\}$ basta, y pueden obtenerse de los CDS's. Esta última aproximación es la menos usada, pues en general el default y los factores de riesgo están correlacionados, provocando un sesgo conocido como Wrong Way Risk o Right Way Risk, dependiendo del efecto que tiene. Esta característica de dependencia entre el default y los factores de riesgo se puede modelar utilizando un modelo de crédito estocástico, donde se puede correlacionar de manera sencilla la dinámica de la intensidad estocástica, típicamente un CIR, con la dinámica de los factores de riesgo, típicamente una difusión de Itô, a través de los Brownianos de cada dinámica.

3.6.1. Fórmulas semi-analíticas de CVA

En la mayoría de los casos no es posible obtener una fórmula semi-analítica para el cálculo de CVA incluso considerando un solo deal. Veremos un par de casos en los que es posible obtener de manera analítica el precio del CVA: un forward y un swap. Ambos son instrumentos cuyo precio no depende de ningún modelo para el subyacente, basta con un argumento de no arbitraje para calcular su precio, es decir, dado que suponemos un mercado completo existe un único precio libre de arbitraje y no requerimos de suponer una dinámica estocástica en particular para el precio del subyacente sobre el que se suscriben el forward y el swap. Sin embargo, veremos que al momento de considerar el CVA de estos dos tipos de instrumentos será necesario considerar la volatilidad, pues como se mencionó anteriormente el CVA se puede ver como una opción donde el valor del subyacente es el NPV del contrato y donde el strike es cero (o el nivel del Threshold en caso de que fuera mayor a cero).

Consideremos primero el caso de un **forward de tipo de cambio**, para esto supongamos que X_t es el tipo de cambio dom/for al tiempo t, $B^d(t,T)$ es el descuento en la divisa doméstica que aplica para el periodo $[t,T]$, $P\left(t,T_{j-1},T_j\right)$ la probabilidad de supervivencia del periodo $(T_{j-1},T_j]$ vista al tiempo t, es decir, $P\left(t,T_{j-1},T_j\right) = P\left(t,T_{j-1}\right) - P\left(t,T_j\right)$.

Si suponemos que ya tenemos curvas de tasas de interés y de crédito calibradas, entonces solo hace falta calcular la exposición al tiempo $s \in [t,T]$, que para el caso de un forward de FX se convierte en un call de FX de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t\left[\mathrm{NPV}_s^+\right] &= \mathbb{E}_t\left[(FX_{s,T}-K)^+\right]\\ &= \mathrm{BS}\left(\mathrm{FX}_{t,T},K,\tau=s-t,r^d,\sigma\right).\end{aligned}$$

De esta manera podemos expresar el CVA de un forward de FX con la integral ya discretizada como:

$$\mathrm{CVA}_t=(1-R)\sum_{j=1}^{b}\left(P(t,T_{j-1})-P(t,T_j)\right)B(t,T_j)\mathrm{BS}\left(\mathrm{FX}_{t,T},K,\tau=T_j-t,r^d,\sigma\right),$$

donde $\mathrm{BS}\left(\mathrm{FX}_{t,T},K,\tau=s-t,r^d,\sigma\right)$ es el precio bajo el modelo de Black-Scholes de un call sobre el forward de FX $\mathrm{FX}_{t,T}$, con strike K, tiempo al vencimiento τ, tasa de interés r y volatilidad σ.

Esto es una fórmula semi-analítica pues a pesar de que se puede calcular la exposición en cualquier tiempo utilizando la fórmula de Black-Scholes tuvimos que discretizar la integral para el cálculo del CVA, en la práctica incluso escoger las fechas de discretización podría ser un tanto complicado ya que deben ser consistentes con otros elementos que deben calcularse, sobre todo cuando ya no se tiene una fórmula analítica para la exposición, en cuyo caso se suele calcular el CVA con un motor de Monte Carlo.

Otro instrumento que al igual que el forward de FX tiene una fórmula analítica para su exposición es un **swap de tasas de interés**, del que también hablamos en el primer capítulo. Al tomar la parte positiva del NPV lo que obtenemos es una opción sobre un swap y esto se puede ver como un swaption, que como vimos anteriormente se puede expresar también en términos del modelo de Black-Scholes donde el subyacente es la tasa par swap.

Para calcular la exposición primero veamos como es su valor en algún tiempo $s\in[t,T]$, donde t es la fecha de valuación y T es la fecha de vencimiento del swap. Para simplificar un poco la notación, supongamos que es un swap de tipo payer con tasa fija k y con n flujos en cada una de las patas. De tal manera que el swap al tiempo s se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\mathrm{NPV}_s &= \sum_{i=j(s)}^{n}L\left(t_i,t_{i+1}\right)\tau_iB\left(s,t_i\right)-\mathrm{DV01}\left(s,t_j(s),t_n\right)k\\ &= \mathrm{DV01}\left(s,t_{j(s)},t_n\right)\left(S_{t_j(s),t_n}(t)-k\right),\end{aligned}$$

donde $j(t)=\min_k\{t_k|t_k>t\}$. De esta manera conveniente, al tomar la esperanza de la parte positiva, si suponemos una dinámica lognormal para la tasa par swap $S_{\alpha,\beta}(t)$ entonces obtenemos el precio de un swaption bajo el modelo de Black-Scholes, por lo que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t\left[\mathrm{NPV}_s^+\right] &= \mathbb{E}_t\left[\mathrm{DV01}\left(t, t_j(s), t_n\right)\left(S_{t_j(s),t_n}(t) - k\right)^+\right] \\
&= \mathrm{NPV}_{swaption}\left(t, t_{j(s)}, t_n, k, \sigma\right).
\end{aligned}$$

Por lo que el valor del CVA de un swap payer está dado por:

$$\mathrm{CVA}_t = (1-R)\sum_{j=1}^{b}\left(P(t,T_{j-1}) - P(t,T_j)\right)B(t,T_j)\mathrm{NPV}_{swaption}(t, t_{j(T_j)}, t_n, k, \sigma).$$

3.7. Mitigantes de crédito

En esta sección hablaremos un poco sobre algunos métodos que se ocupan en la práctica para mitigar el riesgo de contraparte. Lo primero que debemos tomar en cuenta, es que el riesgo de contraparte debe calcularse para todo el portafolio que se tenga con alguna entidad y no contrato por contrato. Pues algunos derivados podrían ser parte de una estrategia de inversión y el riesgo de contraparte asociado podría sufrir un *efecto portafolio* distinto de si se consideraran uno por uno.

Es por esto que, en general, se busca mitigar este riesgo considerando todo el portafolio de la contraparte en cuestión. Los mitigantes de crédito más comunes en la práctica son:

(a) Netting.

(b) Colateral.

(c) Recouponing.

(d) Cláusulas de término de contrato.

(e) Contrapartes centrales.

Estos mitigantes de crédito generalmente se conjuntan en portafolios completos. Aunque son sencillos de expresar en palabras, al considerarlos en la valuación del portafolio, complican bastante el cálculo del precio que incluye el riesgo de contraparte.

Explicaremos con mayor detalle en qué consiste cada uno de estos mitigantes de crédito.

3.7.1. Netting

El *Netting* consiste en agrupar varios derivados de un portafolio, de tal manera que en caso de default la pérdida sea considerando todo el portafolio como un solo contrato.

Si τ es la v.a. que modela el tiempo de default y R el *Recovery*, al tiempo de default podemos identificar dos casos, en los derivados donde el $\mathrm{NPV}(\tau)$ es positivo la pérdida es

$(1-R)\mathrm{NPV}(\tau)$; en los derivados donde el NPV es negativo tenemos que pagarlo completo (esto no es pérdida, pues ya lo debíamos). Por lo que la pérdida se puede expresar como:

$$(1-R)\sum_{i=1}^{N}\mathrm{NPV}_i^{+}(\tau).$$

El netting consiste en no considerar los instrumentos por separado, si no el NPV del portafolio completo. Por lo que en caso de neteo la pérdida al tiempo de default está dada por:

$$(1-R)\left(\sum_{i=1}^{N}\mathrm{NPV}_i(\tau)\right)^{+} \leq (1-R)\sum_{i=1}^{N}\mathrm{NPV}_i^{+}(\tau).$$

De tal manera que se reduce la exposición en caso de default. Por poner un ejemplo sencillo podemos considerar el siguiente portafolio, dos swaps con las mismas condiciones de contrato sal que uno es payer y otro receiver a 5 años, ambos a precio cero al día de hoy. Simplificando más, supongamos que $\tau \in \{0,1,2,3,4,5\}$, es decir, cada año puede llegar el default, si consideramos un recovery $R = 0.4$ entonces podemos ver en la siguiente tabla la posible pérdida con y sin netting año con año si llegara el default:

t	NPV receiver	NPV payer	Pérdida con Netting	Pérdida sin Netting
0	0	0	0	0
1	5000	-5000	3000	0
2	8000	-8000	4800	0
3	11000	-11000	6600	0
4	4000	-4000	2400	0
5	-1000	1000	600	0

3.7.2. Colateral

El **colateral** es una garantía que se paga para cubrir parcial o totalmente una deuda en caso de default. Se pacta mediante un contrato bilateral, donde una o ambas partes se comprometen a llevar una cuenta donde va depositando alguna garantía conforme va aumentando su deuda. Esta garantía puede ser en dinero en efectivo, bonos, acciones, etc. Puede ser en la misma divisa del contrato o en otra.

En el mercado Over the Counter (OTC) los contratos de colateral suele acordarse de manera estandarizada mediante un Credit Support Annex (CSA) que forma parte de un acuerdo más general conocido como ISDA Master Agreement (International Swaps and Derivatives Assosiation). Cuando dos contrapartes firman un CSA se establecen las características con las que se intercambiará el colateral. Algunas características que incluyen los contratos de colateral son:

- **Threshold**. Cantidad de MtM sobre el que inicia el intercambio de colateral. Éste puede depender de como cambia la calificación o rating durante la vida del contrato.

- **Minimum transfer amount**. Es la diferencia entre el MtM y el threshold para empezar a postear colateral. Es el verdadero nivel a partir del cuál se empieza a pagar el colateral.
- **Tipo de colateral**. Esto es, qué tipo de garantía se entregará: dinero en efectivo, bonos, acciones, etc. Además de especificar la divisa de la garantía.
- **Tasa de interés sobre el colateral**. Usualmente se utiliza la tasa overnight de la divisa en la que está el colateral.
- **Haircut**. En caso de que aplique, es un costo extra por concepto de liquidez. Por ejemplo si se postean bonos con 10 % de haircut significa que se deben postear $110 en valor de bonos para cubrir una exposición con valor de $100.
- **Frecuencia de posteo**. Establece la frecuencia con la que se rebalancea la cuenta de colateral. Generalmente depende de qué tan grandes son las contrapartes que firman el CSA, pues no todos todas las entidades poseen la liquidez necesaria para rebalancear periódicamente.
- **Margen inicial**. Es una cantidad que se deposita al inicio del contrato.
- **Re-Hypothecation**. Especifica si el colateral posteado puede reinvertirse o reutilizarse como colateral en algún otro contrato de colateral.

Como mitigante de crédito, el pago de colateral, es muy importante, pues por ejemplo, en caso de que además haya netting set la pérdida al tiempo de default tiene la siguiente forma:

$$(1-R)\left(\sum_{i=1}^{N}\mathrm{NPV}_i(\tau)-C(\tau)\right)^+,$$

donde $C(\tau)$ es lo que hay en la cuenta de colateral al tiempo τ. De tal manera que la pérdida se reduce en caso de se pague colateral. Observe además de que en el caso de colateral perfecto la pérdida se hace cero. Es decir, el colateral perfecto mitiga por completo el riesgo de contraparte. Es por esto que la tasa a la cual paga interés el colateral se puede considerar como la *tasa libre de riesgo de contraparte.* Para más detalle sobre la valuación de derivados en presencia de colateral perfecto puede consultarse el libro de Brigo, Morini y Pallavicini [BMP13].

3.7.3. Recouponing

Un acuerdo de recouponing consiste en reestructurar el portafolio con una contraparte cuando se rebasa el nivel de una barrera. Si el MtM del portafolio sobrepasa la barrera en alguna fecha de observación t, la contraparte que tiene NPV negativo paga cierta cantidad, K, a la otra contraparte y se renegocían algunos derivados dentro del portafolio de tal manera que el valor del portafolio sea igual al MtM (antes del pago) menos la cantidad pagada. Podemos expresar ese ajuste con la siguiente ecuación:

$$\widehat{\mathrm{NPV}}(t) = \mathrm{NPV}(t) - K.$$

Las condiciones se establecen cada vez que la barrera sea sobrepasada. De esta manera si la pérdida va aumentando, se *amortiza* cierta fracción de ella y se modifican algunos instrumentos para cuadrar el ajuste.

3.7.4. Cláusulas de término de contrato

Las cláusulas de término de contrato se conocen como *break clauses* o *additional termination events*. Como su nombre indica, son cláusulas que permiten a una de las partes del contrato cancelar el contrato, la razón principal es el deterioro de la calidad crediticia y anterior a la bancarrota de la contraparte. Éstas claúsulas generalmente pueden ser ejercidas por ambas partes del contrato, esto agrega bastante complejidad al momento de valuar el deal, además de que debe establecerse en el acuerdo cúal es el valor de cierre del contrato (*Close-out NPV*) al momento de cancelar el contrato.

Son bastante comunes cuando se tiene un contrato a largo plazo, ya que hay suficiente tiempo para que el valor del contrato se aprecie bastante y la calidad crediticia de la contraparte se deteriore, por lo que se podría mitigar la pérdida si se cancela *a tiempo* el contrato. También cabe aclarar que son bastante restrictivas y usalmente no se llevan a cabo porque influyen de una u otra manera en la reputación de la contraparte, no es bien visto cancelar contratos cada vez que convenga. Además de tener implícito riesgo sistémico [2].

Al ser bastante rígidas las condiciones de término, pueden clasificarse en tres tipos:

1. **Mandatorias.** Terminan el contrato en la fecha especificada sin importar las condiciones en las que se encuentre el mercado.

2. **Opcionales.** Se tiene la opción de terminar el contrato en fechas preestablecidas. Generalmente es bilateral, es decir, ambas contrapartes pueden terminar el contrato en esas fechas.

3. **Dependientes de cierto umbral.** Para poder ejercer el término del contrato se tiene que rebasar un umbral preestablecido, típicamente bajar de cierta calidad crediticia.

En conclusión, las cláusulas de término de contrato pueden ser muy útiles para mitigar el riesgo de contraparte; sin embargo, debe tenerse mucho cuidado en establecer las condiciones para ejercerlas y establecer el valor del contrato al momento de cancelación en caso de ejercerlas.

[2] El riesgo sistémico es el que se da cuando la caída o bancarrota de alguna entidad genera una reacción en cadena, afectando a otras entidades.

3.7.5. Contrapartes centrales

La principal fuente de riesgo de contraparte se ve reflejada en mercado OTC, pues no están regulados y generalmente conllevan mucho riesgo de crédito. Una forma de mitigar el riesgo de contraparte es cerrar contratos a través de una contraparte central, ya que ésta es como una especie de *aseguradora*, en el sentido de que tiene una *cartera* de contrapartes y se encarga de manejar la cuenta de colateral de cada una de ellas y en caso de que alguna entre en incumplimiento, el riesgo sistémico lo absorbe la contraparte cental y las contrapartes que tenían contratos con esta contraparte reducen su pérdida.

Por supuesto que tiene sus desventajas y son bastante claras, aún siendo una contraparte central no está excenta de caer en incumplimiento y el riesgo sistémico es elevado. Otra posible desventaja clara es el hecho de que al pertencer a su cartera de contrapartes, las pérdidas de unos implican una pérdida para todos.

3.7.6. CVA de un portafolio de derivados

Por último, para concluir debemos enfatizar que el CVA de un instrumento solo no es lo que se calcula en la práctica, sino el valor del CVA de un portafolio completo de alguna contraparte. En estos casos es donde los mitigantes de riesgo de contraparte que hemos discutido anteriormente cobran sentido, pues usualmente se firma un contrato que incluye todas las características con las que se cerrarán instrumentos derivados con esta contraparte. Por ejemplo, se puede contar con un Netting Set, con pago de colateral ya sea en efectivo o en especie; además de que el portafolio no tiene porqué estar conformado por instumentos del mismo tipo, es decir, bien podrían haber swaps, cross currency swaps, equities, swaptions o cap/floors, las posibilidades son muchas y esto complica muchísmo el cálculo del CVA relacionado al portafolio de esta contraparte.

A pesar de todo esto, se puede expresar la fórmula que debería de calcularse de la siguiente manera:

$$CVA_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}(1-R)\int_t^T \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^s r_u du} \sum_{j=0}^{N^{netting}} \left(\sum_{k=0}^{N_j^{collateral}} \left(\sum_{i=0}^{N_k^{product}} V_s^{(i)} - C_s^k \right)\right)^+ dP_s \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

donde $N^{netting}$ es el número de netting sets, $N_j^{collateral}$ el número de acuerdos de colateral en el netting set j y $N_k^{product}$ el número de derivados que hay en el acuerdo de colateral k.

Para implementar dicho cálculo es claro que lo primero es tener un motor suficientemente robusto para incluir cualquier tipo de derivado para calcular la exposición y en general un motor de Monte Carlo en donde podamos agrupar todas las fechas relevantes de los instrumentos, pues no tienen porqué coincidir en la fecha en que se pactaron, en las que hacen pagos intermedios o en las que vencen.

3.8. Implementación en R del cálculo de CVA de un Forward de FX

Los scripts de R están en el apéndice al final de este trabajo. Lo que pretendo hacer en esta sección es dar intuición sobre el cálculo de CVA para un forward de FX y un swap. Para el caso del forward de FX se hizo una implementación de la exposición calculada analíticamente y una donde se calcula por Monte Carlo. Para el swap se hizo una implementación con la exposición calculada analíticamente. El objetivo es ver como se comporta el CVA durante la vida de los contratos y cómo varía en función de algunos de sus parámetros.

Para llevar a cabo las comparaciones vamos a variar los siguientes parámetros en el cálculo de CVA de un forward de FX:

- Tasa de Recovery.
- Intensidad de default.
- Strike del forward de FX.
- La volatilidad del forward de FX.

Los demás parámetros los consideraremos fijos, en particular, vamos a calcular el CVA de un forward de USD/MXN a 5 años con nominal de 1,000,000. Tomando como divisa doméstica al MXN y como foránea al USD, con respectivas tasas de descuento igual a 7 % y 2 %. Discretizando la integral del CVA en 30 fechas.

En el escenario base las gráficas de la exposición y del CVA nos quedan de la siguiente manera:

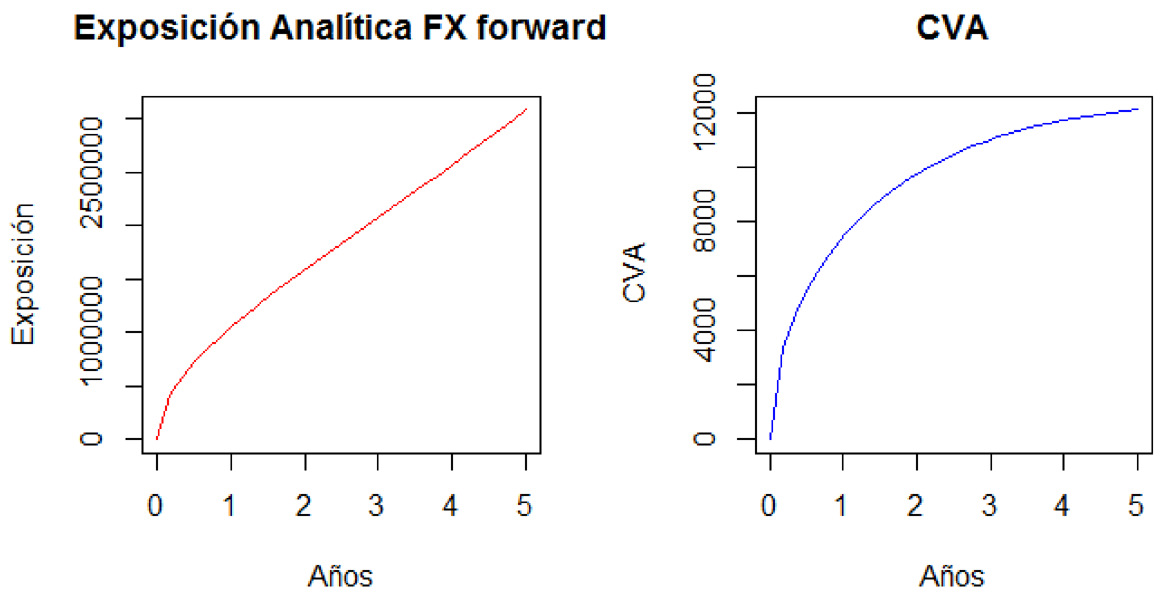

Figura 3.1: Escenario base

Variando el recovery, graficamos la exposición y CVA en las fechas de simulación, donde el recovery toma los valores $\{0.1, 0.4, 0.9\}$.

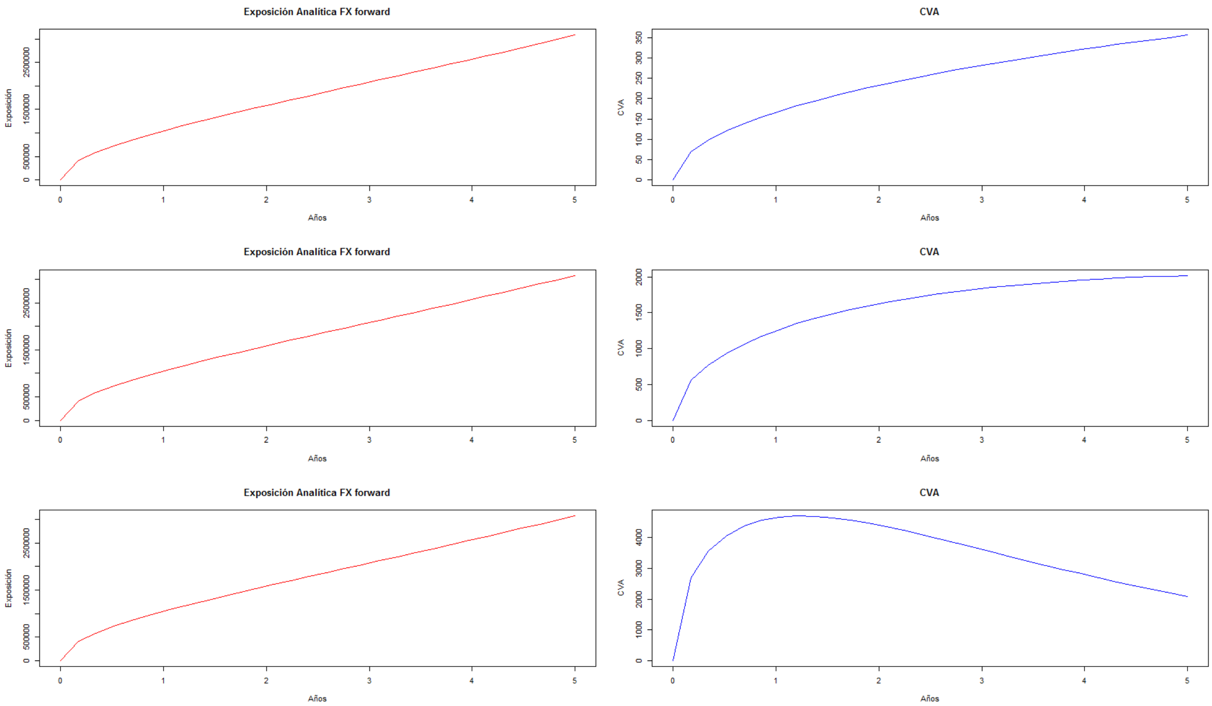

Figura 3.2: Variando el Recovery

Notemos que lo único que cambia es la escala, pues en nuestra fórmula de CVA aparece el término $(1 - R)$ y recordemos que lo que representa es la pérdida dado que hay default. Es por esta razón que a menor recovery tendremos una pérdida mayor y así el CVA es mayor también. Cabe aclarar que la exposición no depende del recovery y es por ello que no se ve afectada en ningún caso.

Variando la intensidad de default, graficamos la exposición y CVA en las fechas de simulación, donde la intensidad toma los valores $\{0.01, 0.08, 0.4\}$.

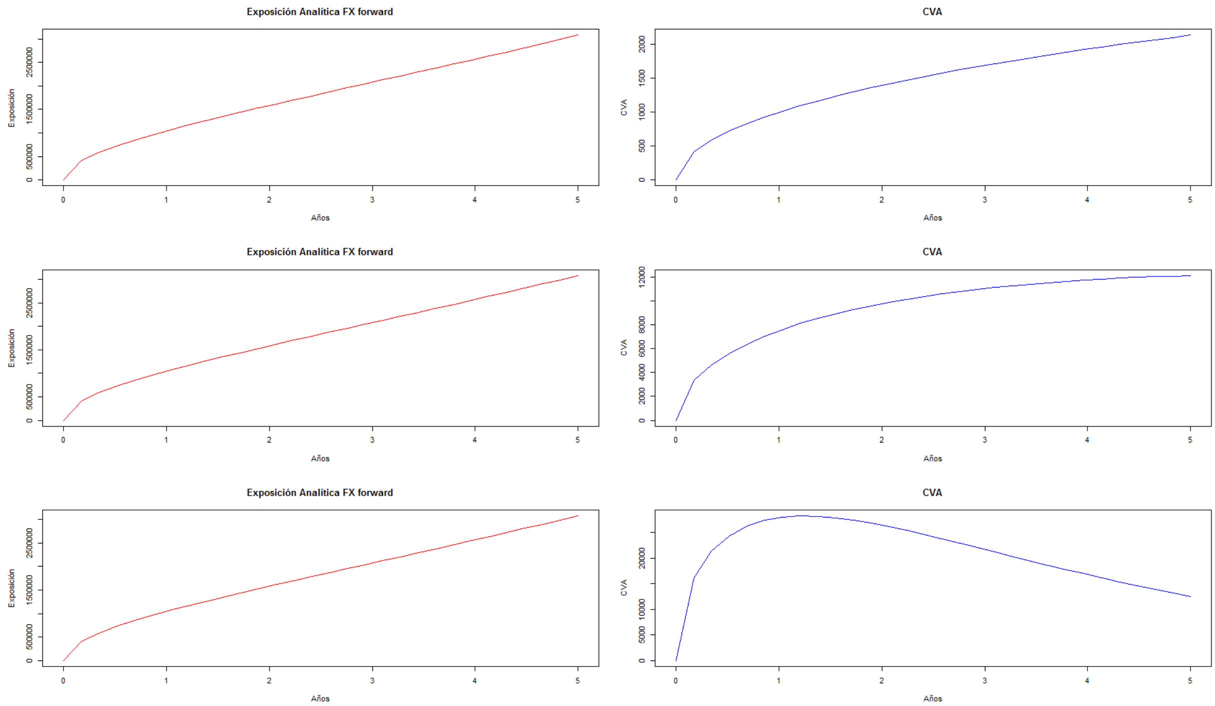

Figura 3.3: Variando la intensidad de default

De las gráficas podemos apreciar que al igual que al variar el recovery la exposición es invariante, pues el forward de FX no depende de la calidad crediticia de la compañía con la que se cerrará el contrato. Lo que si podemos ver es un cambio sustancial en el CVA, donde al ir aumentando la intensidad, esto es, al disminuir la probabilidad de supervivencia, el CVA es mayor en las primeras fechas, pues es más probable que se de el default si la intensidad aumenta.

Variando el strike del forward, graficamos la exposición y CVA en las fechas de simulación, donde el strike toma los valores $\{0.75FX_{0,5}, FX_{0,5}, 5FX_{0,5}\}$, es decir cuando el forward está In the Money, At the Money y Out of the Money, respectivamente.

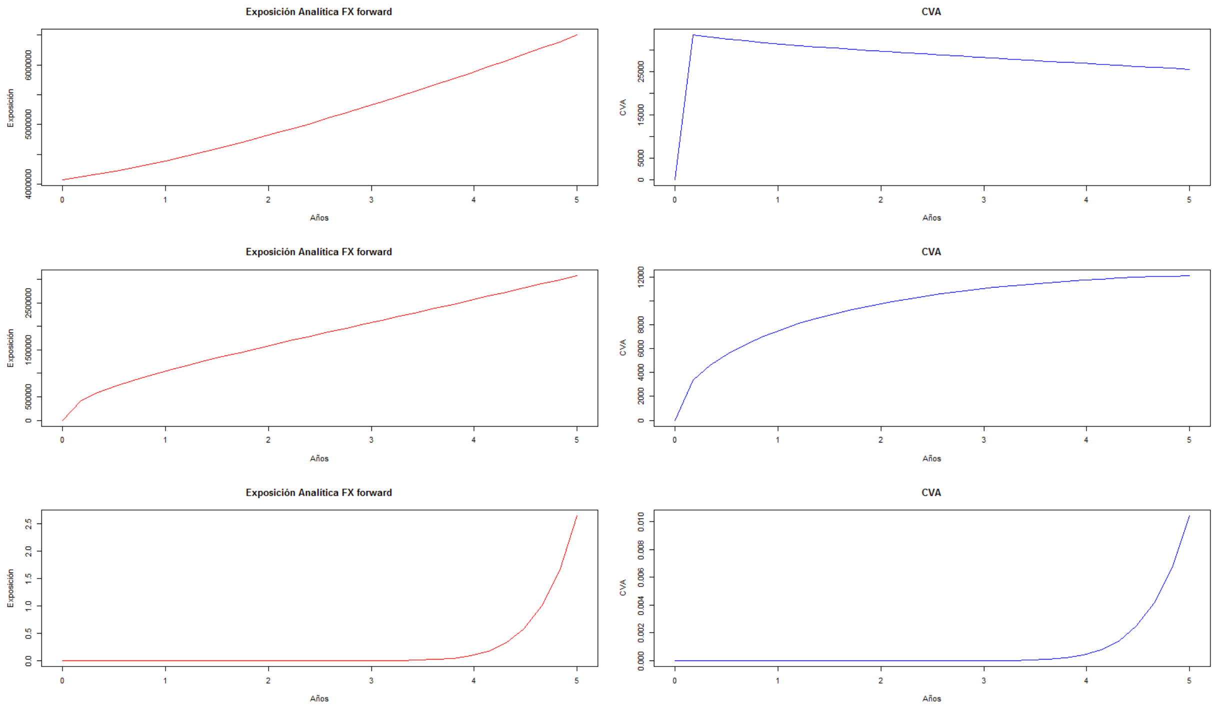

Figura 3.4: Variando el strike del forward

En este caso, el componente del CVA que se ve afectado es la exposición, es por eso que tanto la gráfica de exposición como la de CVA por fechas de simulación difiere en cada caso.

Cuando el forward está In the Money es porque es positivo para el que vendió el contrato, es decir, que si se ejerciera en este momento la contraparte debería pagar un payoff positivo, entonces el que vende el derivado está muy expuesto, pues si la contraparte entra en default perdería, salvo por el recovery, esta ganancia, es por esto que en la primera gráfica podemos ver que la exposición es muy alta y sigue aumentando conforme pasa el tiempo pues dadas las tasas doméstica y foránea el Forward de FX tiende a seguir creciendo y cada vez debería más dinero. Esto explica también el "salto" que se ve en el CVA desde el inicio del contrato, pues desde el principio tiene mucha exposición al default de la contraparte.

En el caso en que el forward esté At the Money, esto es, cuando el strike es justo el forward de FX tiene una exposición que va aumentando pues el forward como ya habíamos comentado tiende a crecer bajo estos supuestos, aunque tanto la exposición como el CVA crecen de manera logarítmica conforme pasa el tiempo.

En la última gráfica vemos el efecto contrario que en la primera, ya que el forward está Out of the Money, al incio del contrato tiene un payoff negativo y por tanto la exposición es cero y conforme pasa el tiempo el tipo de cambio tiene mayor probabilidad de superar el nivel del strike y así presentar una exposición positiva así como un CVA residual hacia el final de la vida del contrato.

Variando la volatilidad, graficamos la exposición y CVA en las fechas de simulación, donde la volatilidad toma los valores $\{0.01, 0.15, 0.75\}$

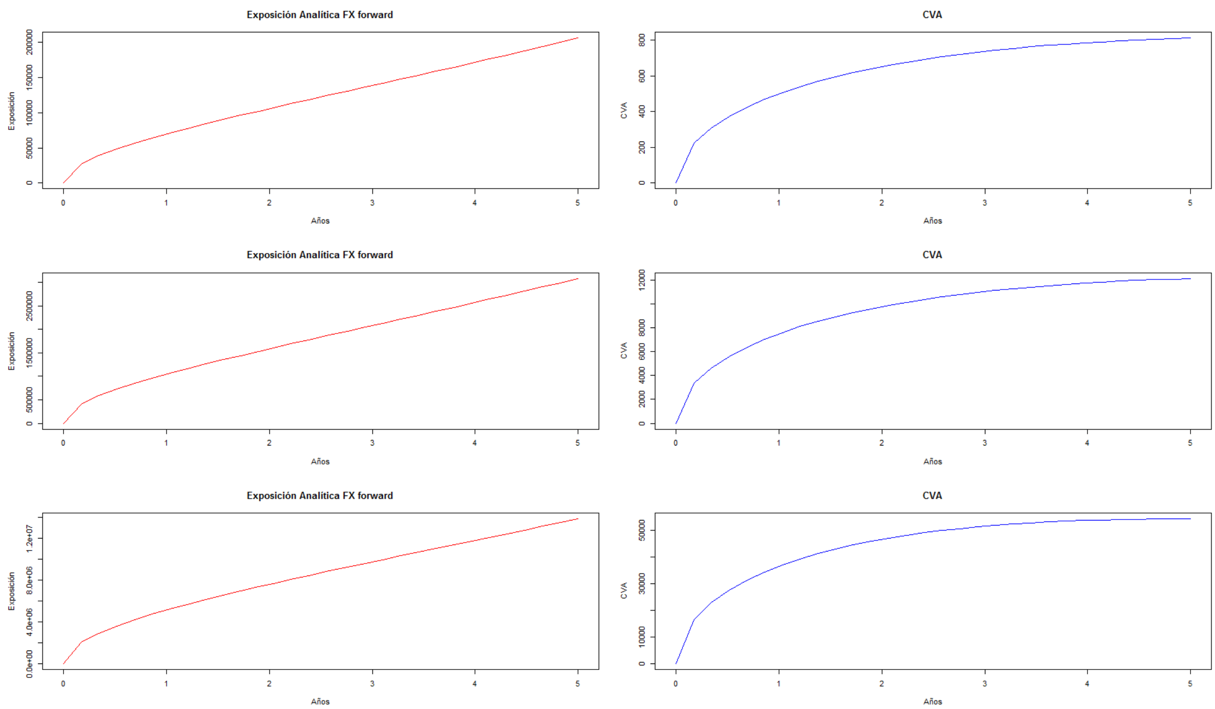

Figura 3.5: Variando la volatilidad

De las gráficas podemos notar que la forma no cambia, sino la escala. Esto sucede porque que la exposición se puede pensar como un call sobre el forward de FX y sabemos que el valor de la opción aumenta cuando aumenta la volatilidad. Así, al aumentar la exposición también aumenta el CVA.

En el apéndice A se encuentra la implementación del cálculo de CVA usando el método de Monte Carlo para calcular la exposición, con el objetivo de ejemplificar como se calcula en la mayoría de los casos el CVA, pues al no contar con una fórmula analítica como en el caso del FX o de un swap, es necesario recurrir a este importante método numérico.

La gráfica en el mismo escenario base que en el caso de la exposición analítica es la siguiente:

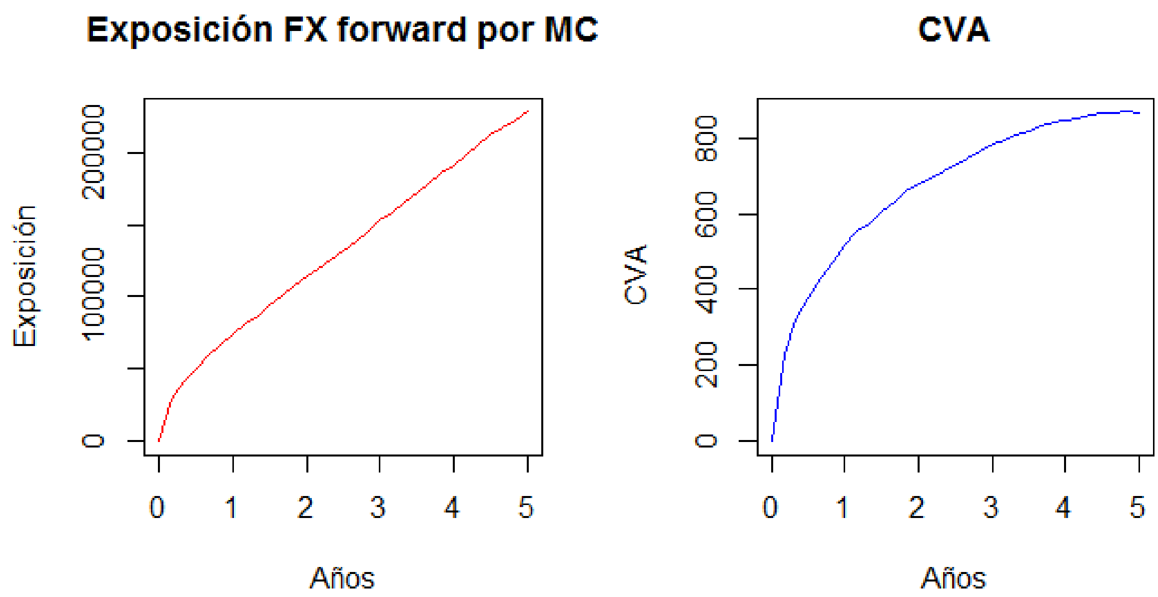

Figura 3.6: Exposición y CVA del forward de FX por Monte Carlo

Por último, para ver un ejemplo de exposición un poco más interesante, mostraremos una comparación como la que hicimos en caso del forward de FX pero para el cálculo de CVA de un swap calculando la exposición de manera analítica.

Al igual que en el caso del forward vamos a variar los siguientes parámetros en el cálculo de CVA del swap:

- Tasa de Recovery.
- Intensidad de default.

- Strike del forward de FX.
- La volatilidad del forward de FX.

Con los demás parámetros los consideraremos fijos vamos a calcular el CVA de un payer swap a 5 años y pago de cupones semestrales, con nominal de 1,000,000. En este caso la tasa par swap es la que consideramos estocástica. Discretizando la integral del CVA en 30 fechas.

En el escenario base las gráficas de la exposición y del CVA nos quedan de la siguiente manera:

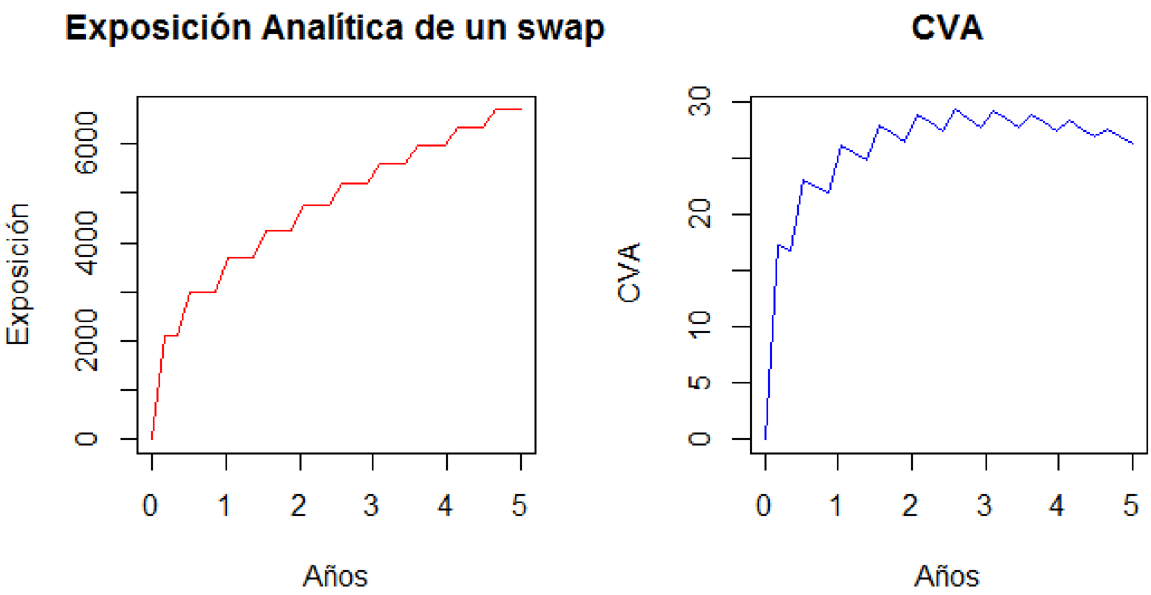

Figura 3.7: Escenario base

Como podemos ver, en este caso la gráfica de la exposición y del CVA mismo reflejan la "caída" de riesgo de contraparte en cada fecha de pago de cupón, pues el riesgo es creciente mientras nos deban dinero; sin embargo, el día que hay pago de cupón, la exposición se reduce proporcionalmente al pago que se realiza.

Variando el recovery, graficamos la exposición y CVA en las fechas de simulación, donde el recovery toma los valores $\{0.1, 0.4, 0.9\}$.

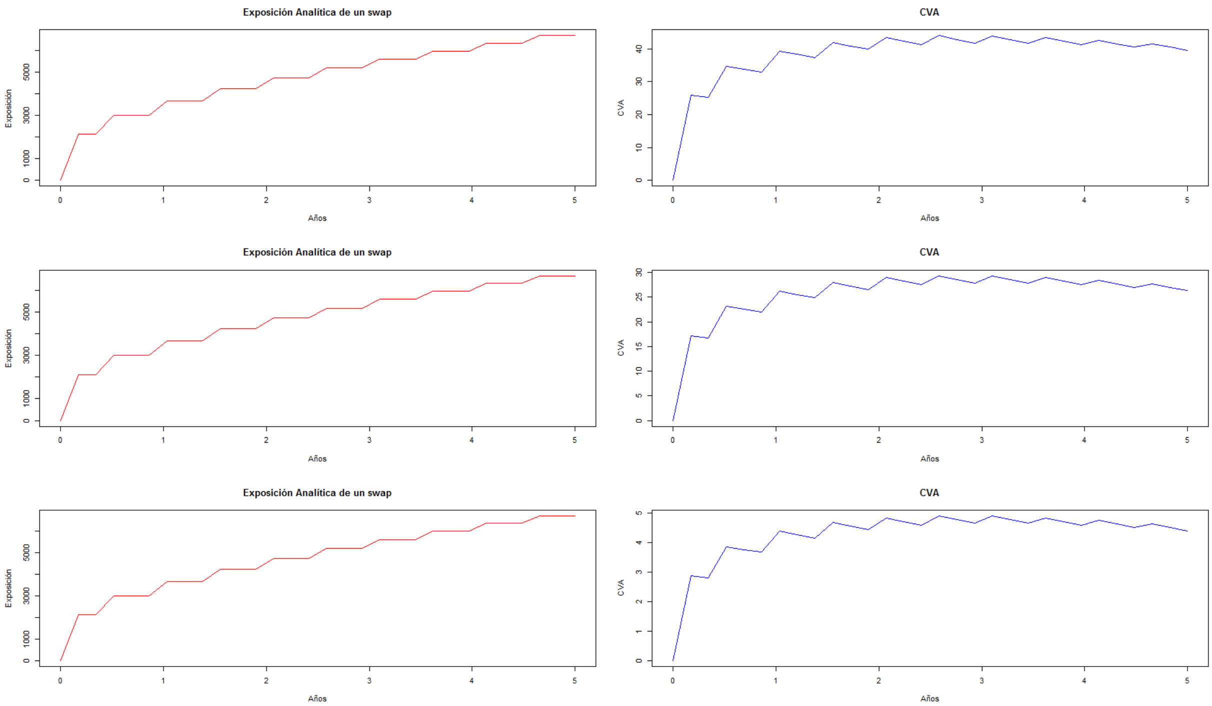

Figura 3.8: Variando el Recovery

Al igual que para el forward, lo único que cambia en la gráfica del CVA es la escala. A menor recovery tendremos una pérdida mayor y así el CVA es mayor también.

Variando la intensidad de default, graficamos la exposición y CVA en las fechas de simulación, donde la intensidad toma los valores $\{0.01, 0.08, 0.4\}$.

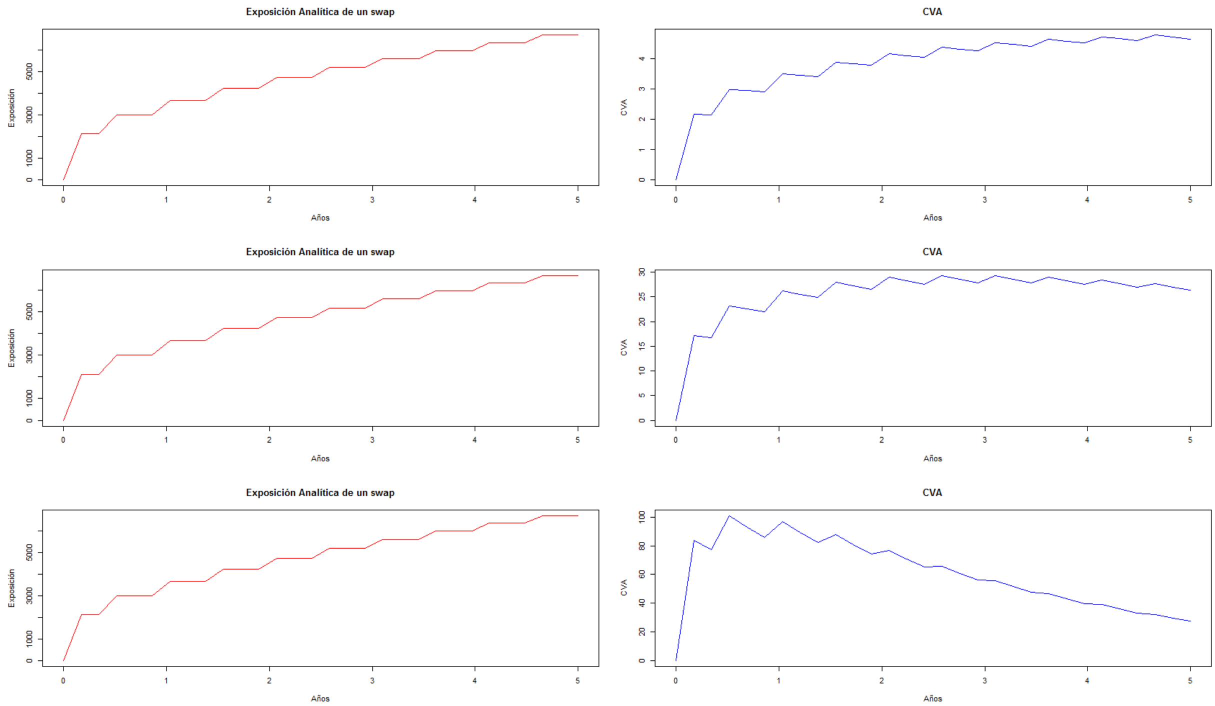

Figura 3.9: Variando la Intensidad de default

La exposición es invariante, pues el swap no depende de la probabilidad de supervivencia de la compañía con la que se cerrará el contrato. Al igual que en el forward podemos ver un gran cambio en el CVA: al ir aumentando la intensidad, esto es, al disminuyendo la probabilidad de supervivencia, el CVA es mayor en las primeras fechas, pues es muy probable que se de el default si la intensidad aumenta.

Variando el strike del swap, graficamos la exposición y CVA en las fechas de simulación, donde el strike toma los valores $\{0.95S_{\tau=1/2,T=5}(0), S_{\tau=1/2,T=5}(0), 5S_{\tau=1/2,T=5}(0)\}$, es decir cuando el swap está In the Money, At the Money y Out of the Money, respectivamente.

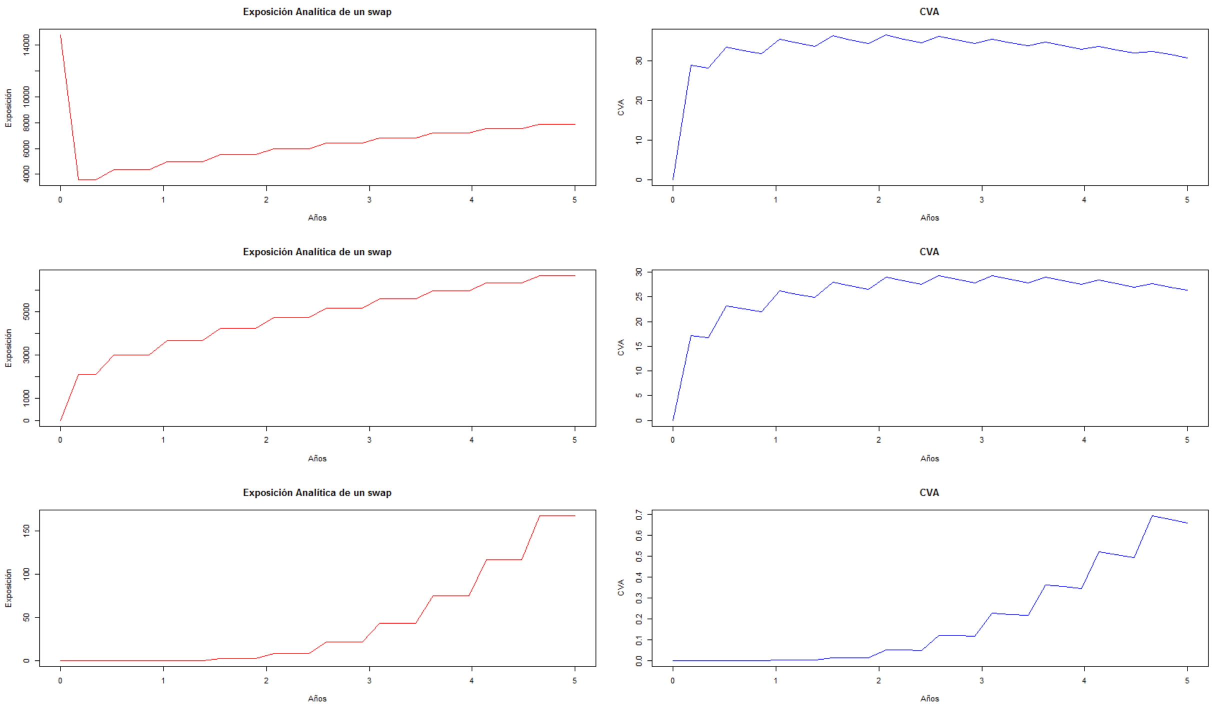

Figura 3.10: Variando el strike del swap

Tanto la exposición como el CVA dependen del strike del swap, es por esto que vemos un cambio en todas las gráficas respecto al escenario base.

Cuando la par swap está In the Money es porque es positivo para el que vendió el contrato y al igual que en el caso del forward, en la primera gráfica podemos ver que la exposición es muy alta y sigue aumentando conforme pasa el tiempo. El "salto" que se ve en el CVA desde el inicio del contrato se debe a que desde el principio tenemos mucha exposición al default de la contraparte.

En el caso en que la par swap esté At the Money se parte de un swap que tiene precio cero y conforme pasa el tiempo va generándose exposición pues hay probabilidad positiva de estar por arriba del strike At the Money.

En la última gráfica vemos el efecto contrario que en la primera cuando la par swap esté Out of the Money, al incio del contrato tiene un payoff negativo y por tanto la exposición es cero y conforme pasa el tiempo el tipo de cambio tiene mayor probabilidad de superar el nivel del strike y así presentar una exposición positiva así como un CVA residual hacia el final de la vida del contrato.

Variando la volatilidad, graficamos la exposición y CVA en las fechas de simulación, donde la volatilidad toma los valores $\{0.01, 0.15, 0.75\}$

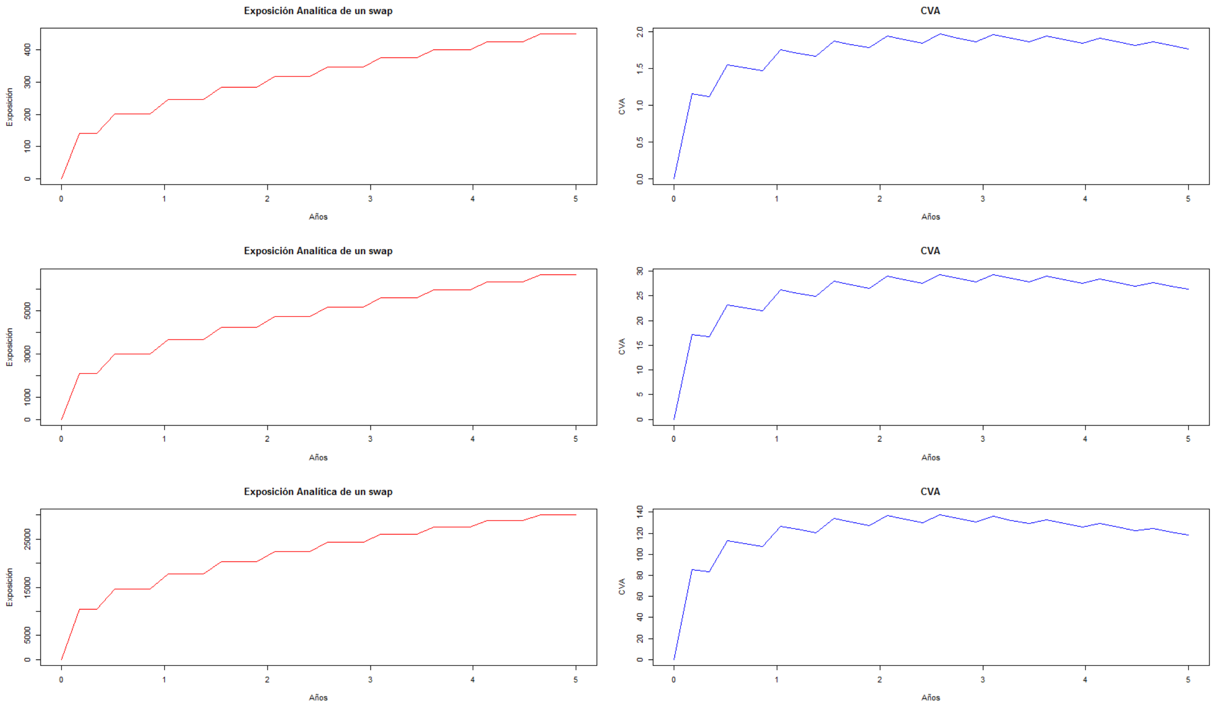

Figura 3.11: Variando la volatilidad

De nuevo lo único que se ve afectado es la escala como en el caso del forward.

3.9. Observaciones y Conclusiones

El cálculo del CVA y en general de los XVA's ha cambiado el paradigma de valuación de derivados, pues es importante ver el efecto que se tiene en el portafolio completo cuando un derivado termina, cuando es reestructurado o cuando se incluyen nuevos instrumentos en dicho portafolio. El objetivo de cobrar estos ajustes en el precio de los derivados es para poder estar cubierto en caso de que ocurra el default de la compañía con la que se tiene este portafolio, es decir, se tiene que formar una cobertura con estos ajustes y por lo tanto tiene sentido hablar de una mesa de Trading de XVA's que se encargue de gestionar estos riesgos construyendo portafolios compuestos por instrumentos ligados a los factores de riesgo a los que están expuestos, por ejemplo: riesgo de FX, riesgo crediticio y riesgo de tasas de interés. De tal manera que vayan rebalanceando su portafolio de acuerdo a los ajustes que van cobrando y los riesgos que vayan gestionando.

En cuanto a este trabajo, solo hemos considerado el cálculo de CVA de forma unilateral, suponiendo que una de las contrapartes está libre de riesgo de incumplimiento. Por identificar algunas mejoras a las que podríamos dar seguimiento después de este trabajo están:

- Considerar el CVA bilateral al olvidarnos del supuesto de que una de las contrapartes es libre de riesgo de default. Esto conlleva a calcular otro XVA, el DVA (Debit Valuation Adjustment). Éste puede pensarse en el CVA propio visto desde la contraparte; sin embargo, su cobertura es bastante complicada pues se reduce a la pregunta: ¿cómo cubro mi propio default sin usar instrumentos de mercado que estén correlacionados con mi quiebra? Esto es complicado puesto que lo que queremos cubrir es el posible evento de quiebra propio.

- El hecho de que el colateral no sea dinero en una cuenta puede llevar implícito otro tipo de riesgos. Por ejemplo, si el colateral está en acciones o bonos que emite la contraparte puede ser contraproducente, pues al tiempo de quiebra de la contraparte estos activos subyacentes también reducen su valor y no resultan en una buena garantía.

- Otro XVA que se presenta de manera natural al considerar portafolios colateralizados es el FVA. Cuando este es positivo se conoce como Funding Benefit y cuando es negativo como Funding Cost, y surgen al realizar la cobertura del portafolio, ya que si la cobertura no tiene el mismo tipo de colateral o simplemente no está colateralizada se tienen asimetrías entre los pagos que deben realizarse conforme pasa el tiempo.

- Es común, no solo en este trabajo, considerar al Recovery como constante; sin embargo, dependiendo del nivel de detalle que se pretenda tener convendría agrupar contrapartes por sector al menos y asociarles un recovery adecuado, pero esto puede ir más allá y considerar al recovery como un proceso estocástico que dependerá de distintas variables financieras y económicas.

- En este trabajo consideramos a la intensidad de default como una función determinista del tiempo y una generalización común es pensar que es un proceso estocástico postivo, típicamente un CIR, donde se capture una dinámica aleatoria. Lo que se hace es calibrar los parámetros del CIR de tal manera que recupere los precios de CDS's de mercadol.

- La correlación entre crédito y exposición no la consideramos en este trabajo, pero para calcular el CVA de derivados de crédito sería imposible no considerar una correlación entre ellas, pues en este caso tendríamos que la exposición depende explícitamente de la probabilidad de default de una o más contrapartes.

Además, como ya hemos mencionado antes, los verdaderos problemas al implementar un motor de cálculo de XVA's son principalmente numéricos, pues la cantidad ingente de datos que se requieren para su cálculo deben estar eficientemente implementados y siempre con la posibilidad de refactorizar código ágilmente conforme las regulaciones van agregando o quitando ciertas cláusulas para su cálculo.

A pesar de que ya han pasado varios años desde que surgieron estos ajustes siguen abiertas varias líneas de investigación para mejorar los tiempos de cálculo, por ejemplo:

- Mejoras en el uso de diferenciación algorítmica. Este último permite mejorar los tiempos de cómputo obteniendo tanto los precios como las griegas de portafolios en un solo Monte Carlo y no haciendo un Monte Carlo para cada uno de ellos. Básicamente se puede pensar como la regla de la cadena implementada de manera inteligente para poder obtener derivadas (verdaderas) y no derivadas númericas, como en el método de diferencias finitas. Para una introducción a este tema está el libro de Griewank [GW08] y sobre la aplicación al cálculo de Griegas se puede consultar el artículo de Capriotti [Cap10].

- Agrupar flujos de subconjuntos del portafolio, de tal manera que podamos pensar que en lugar de tener muchos contratos pequeños tenemos pocos contratos muy grandes. La parte complicada es como hacer esta selección de contratos, por ejemplo, podríamos serparar por netting sets y posteriormente por divisa. O quizá por tipo de factor de riesgo al que está expuesto. Un artículo que habla sobre este tipo de optimizaciones es el de Antonov y Brecher [AB12].

- Mejoras usando GPU (Graphics Processing Unit). Esta opción es complicada porque su costo y mantenimiento es muy caro, además de que se necesita programar especialmente para este tipo de hardware y requiere un equipo especializado para programar las funciones de cálculo. La ventaja es que una vez que está bien implementado es notorio el aumento en la velocidad de cálculo, pues es la manera ideal de programar en paralelo los diferentes cálculos independientes que se necesitan. El artículo de Kenyon y Green [KG14] describe como usar GPU's para implementar el cálculo de XVA's. Otro artículo más reciente es el de Abbas-Turki et al [ATCD18] donde utilizan GPU's para hacer más eficiente el cálculo de Monte Carlo's anidados que surgen de manera natural en el cálculo de los XVA's.

Apéndice A

Implementaciones del cálculo de CVA

En este apéndice están las implementaciones escritas en R que se usaron a lo largo del trabajo.

A.1. Calibración de crédito

El código para calibrar la intensidad de default y la curva de probabilidades de supervivencia usando la paquetería *credule* es el siguiente:

```
### "Credule" para calibrar curvas de credito ###
library("credule")

premiumFrequency ← 2 #Estandar de Mercado
defaultFrequency ← 2 #Estandar de Mercado
accruedPremium = TRUE #Estandar de Mercado
rec ← 0.4 #Recovery

###La estructura de tasas de interes flat
###y la estructura de spreads de CDS siguiente

#Definir la estructura temporal de tasas de interes
yieldcurveTenor ← c(1.0,2.0,3.0,4.0,5.0,7.0,10.0,15.0,20.0,30.0)
yieldcurveRate ← c(0.075,0.075,0.075,0.075,0.075,0.075,0.075,0.075,0.075,0.075)

#Definir la estructura temporal de primas de CDS de mercado
cdsTenor ← c(1,2,3,4,5,7,10,15,20,30)
cdsSpread_RSH ← c(0.650,0.600,0.550,0.510,0.480,0.450,0.410,0.380,0.360,0.350)

```

```
#bootstrapping de la curva de tasa de fallo y probabilidades de
    supervivencia
creditcurve_RSH <- bootstrapCDS(yieldcurveTenor, yieldcurveRate,
                                cdsTenor, cdsSpread_RSH,
                                rec, premiumFrequency, defaultFrequency,
                                    accruedPremium)
creditcurve_RSH

#Grafica ambas: probabilidades y lambda
par(mfrow=c(1,2))
plot(creditcurve_RSH[,1],creditcurve_RSH[,2],main="Supervivencia",xlab=
    "Anios",ylab="P(0,T)",type='l',col='blue')
plot(creditcurve_RSH[,1],creditcurve_RSH[,3],main="Intensidad de
    default",xlab="Anios",ylab="lambda(T)",type='s',col='red')
```

A.2. CVA de un forward de FX

El código del cálculo de CVA para un forward de FX utilizando expresión analítica para la exposición es el siguiente:

```
###Funcion para calcular el precio forward de FX, es decir,
###el strike que hace que el contrato fwd valga cero
FXFwdPrice <- function(X_0, #tipo de cambio spot, i.e. a fecha t=0
                       mat, #fecha de vencimiento anualizada del fwd
                       r_dom, #tasa domestica anualizada
                       r_for) #tasa foranea anualizada
{
  dom_DF <- exp(-mat * r_dom)
  for_DF <- exp(-mat * r_for)
  FX_Fwd_Price <- X_0 * for_DF/dom_DF
  return(FX_Fwd_Price)
}

###Funcion para valuar opciones con el modelo de Black-Scholes
###en terminos del precio forward, pues de esta manera "nos ahorramos"
###los problemas de dividendos en caso del equity, pues el forward
###ya los incluye...
call_put_fwdPriceBS <- function(fwd_price, #precio forward
                                strike, #precio de ejercicio o strike
                                mat, #fecha de vencimiento anualizada
                                    del fwd
                                vol, #volatilidad
                                disc_fact, #factor de descuento
                                call_put_fwd) #"call", "put" o "forward
                                    "
{
  mat <- ifelse(mat==0,0.000000001, mat)
  signo <- NULL
```

```
  if(call_put_fwd == "call"){signo <- 1}
  else if(call_put_fwd =="put"){signo <- -1}

  d1 <- (log(fwd_price/strike)+(0.5*vol*vol)*mat)/(vol*sqrt(mat))
  d2 <- d1-(vol*sqrt(mat))
  Nd1 <- pnorm(signo*d1,0,1)
  Nd2 <- pnorm(signo*d2,0,1)
  price <- signo*disc_fact*(fwd_price*Nd1 - strike*Nd2)
  return(price)
}


###Funcion para calcular el precio de un call, put y forward de FX
priceFXcall_put_fwd <- function(X_0, #tipo de cambio spot, i.e. a fecha
    t=0
                                mat, #fecha de vencimiento anualizada
                                    del fwd
                                r_dom, #tasa domestica anualizada
                                r_for, #tasa foranea anualizada
                                strike, #precio de ejercicio o strike
                                vol, #volatilidad
                                call_put_fwd) #"call", "put", "forward"
{
  FXFwdPrice <- FXFwdPrice(X_0, mat, r_dom, r_for)
  price <- NULL
  dom_DF <- exp(-mat*r_dom)
  if(call_put_fwd == "call" | call_put_fwd == "put")
  {
    price <- call_put_fwdPriceBS(FXFwdPrice,strike, mat,
                                vol, dom_DF, call_put_fwd)
  }
  else if(call_put_fwd == "forward")
  {
    price <- dom_DF*(FXFwdPrice - strike)
  }
  return(price)
}

########################CVAFXfwd############################
###Graficas de la exposicion y CVA por fecha de simulacion###
############################################################

##Datos de credito
defInt <- 0.08 #intensidad de default, supondremos el modelo exponencial
rec <- 0.4 #recovery, porcentaje que se va a recuperar en caso de
    default

##Info de mercado
r_dom <- 0.03
```

```
r_for ← 0.05
nominal ← 1000000
BrS ← "buy"
X_0 ← 1.33
strike ← 1.20
vol ← 0.15
###para hacerlo mas facil no incluiremos fechas per se, si no un
###tiempo hasta la fecha de vencimiento

mat ← 5 #vencimiento del derivado en anios
call_put_fwd ← "forward" #en nuestro ejemplo, un forward

##Numero de fechas en las que calcularemos el CVA
TimeSteps ← 30

###CVA con formula analitica de la exposicion###

CVA_AnaliticExposure ← function(nominal, #nominal
                                r_dom, #tasa domestica
                                r_for, #tasa foranea
                                mat, #vencimiento del derivado anualizado
                                vol, #volatilidad anualizada
                                X_0, #el spot de FX, i.e. al tiempo t=0
                                strike, #strike de derivado
                                TimeSteps, #discrtizacion de la integral
                                defInt, #intensidad de default
                                rec, #recovery
                                call_put_fwd) #"call", "put" o "forward"
{
  dates ← rep(0,TimeSteps)
  exposure ← rep(0,TimeSteps)
  cva ← rep(0,TimeSteps)
  FXfwd ← 0

  for(i in 1:TimeSteps)
  {
    dates[i] ← (i-1) * mat / (TimeSteps-1) #son las fechas T_j
    domDF ← exp(-r_dom * (mat - dates[i])) #descuento con la divisa dom
    forDF ← exp(-r_for * (mat - dates[i])) #descuento con la divisa for
    cva_dateDF ← exp(-r_dom * dates[i]) #descuento desde T_j
    strike_adj ← strike * domDF / forDF #por conveniencia para mas adelante en el codigo

    if(i>1)
    {
```

```
      #proba de supervivencia en t_i-1 y t_i
      defProb <- exp(-defInt * dates[i-1]) - exp(-defInt * dates[i])

      exposure[i] <- priceFXcall_put_fwd(X_0, dates[i], r_dom, r_for,
                                         strike_adj, vol, "call")

      exposure[i] <- nominal * exposure[i] * forDF / cva_dateDF

      cva[i] <- (1-rec) * cva_dateDF * exposure[i] * defProb
    }
    else
    {
      dum <- mat - dates[i]
      FXfwd <- FXFwdPrice(X_0, dum, r_dom, r_for)
      if(FXfwd > strike)
      {
        exposure[i] <- exposure[i] + nominal * (FXfwd - strike) * domDF
      }

    }

  }
  par(mfrow=c(1,2))
  plot(dates,exposure,xlab="Anios",ylab="Exposicion",type='l',col="red"
      , main="Exposicion Analitica FX forward")
  plot(dates,cva,xlab="Anios",ylab="CVA",type='l',col="blue", main="CVA
      ")

}
```

A.3. CVA de un forward de FX por Monte Carlo

El código del cálculo de CVA para un forward de FX utilizando Monte Carlo es el siguiente:

```
###Simulacion de la trayectoria del FX entre dos tiempos###
FX_sim <- function(dt,X_p,vol,r_dom,r_for,z)
{
  X_n <- X_p * exp((r_dom - r_for - 0.5 * vol * vol) * dt + vol * z *
      sqrt(dt))
  return(X_n)
}

###Funcion para calcular el precio forward de FX, es decir,
###el strike que hace que el contrato fwd valga cero
FXFwdPrice <- function(X_0, #tipo de cambio spot, i.e. a fecha t=0
                       mat, #fecha de vencimiento anualizada del fwd
                       r_dom, #tasa domestica anualizada
                       r_for) #tasa foranea anualizada
```

```
{
  dom_DF <- exp(-mat * r_dom)
  for_DF <- exp(-mat * r_for)
  FX_Fwd_Price <- X_0 * for_DF / dom_DF
  return(FX_Fwd_Price)
}

###Funcion para valuar opciones con el modelo de Black-Scholes
###en terminos del precio forward, pues de esta manera "nos ahorramos"
###los problemas de dividendos en caso del equity, pues el forward
###ya los incluye...
call_put_fwdPriceBS <- function(fwd_price, #precio forward
                                strike, #precio de ejercicio o strike
                                mat, #fecha de vencimiento anualizada del fwd
                                vol, #volatilidad
                                disc_fact, #factor de descuento
                                call_put_fwd) #"call", "put" o "forward"
{
  mat <- ifelse(mat == 0,0.000000001, mat)
  signo <- NULL
  if(call_put_fwd == "call"){signo <- 1}
  else if(call_put_fwd =="put"){signo <- -1}

  d1 <- (log(fwd_price / strike) + (0.5 * vol * vol) * mat) / (vol * sqrt(mat))
  d2 <- d1 - (vol * sqrt(mat))
  Nd1 <- pnorm(signo * d1,0,1)
  Nd2 <- pnorm(signo * d2,0,1)
  price <- signo * disc_fact * (fwd_price * Nd1 - strike * Nd2)
  return(price)
}

###Funcion para calcular el precio de un call, put y forward de FX
priceFXcall_put_fwd <- function(X_0, #tipo de cambio spot, i.e. a fecha t=0
                                mat, #fecha de vencimiento anualizada del fwd
                                r_dom, #tasa domestica anualizada
                                r_for, #tasa foranea anualizada
                                strike, #precio de ejercicio o strike
                                vol, #volatilidad
                                call_put_fwd) #"call", "put" o "forward"
{
  FXFwdPrice <- FXFwdPrice(X_0, mat, r_dom, r_for)
  price <- NULL
  dom_DF <- exp(-mat * r_dom)
  if(call_put_fwd == "call" | call_put_fwd == "put")
  {
```

```
    price ← call_put_fwdPriceBS(FXFwdPrice, strike, mat,
                                 vol, dom_DF, call_put_fwd)
  }
  else if(call_put_fwd == "forward")
  {
    price ← dom_DF * (FXFwdPrice − strike)
  }
  return(price)
}

#######Calculo de CVA del fwd FX con Monte Carlo#######

##Datos de credito
defInt ← 0.08 #intensidad de default, supondremos el modelo exponencial
rec ← 0.4 #recovery, porcentaje que se va a recuperar en caso de default

##Info de mercado
r_dom ← 0.05
r_for ← 0.03
nominal ← 1000000
BrS ← 1 #1=buy, −1=sell
X_0 ← 1.33
strike ← 1.46985719965443
vol← 0.15
###para hacerlo áms facil no incluiremos fechas per se, si no un
###tiempo hasta la fecha de T

mat ← 5 #vencimiento del derivado en anios
call_put_fwd ← "forward" ### deberia ser un forward

##Numero de fechas en las que calcularemos el CVA
TimeSteps ← 30

##Numero de trayectorias del Monte Carlo
No_Tray ← 7000

###CVA la exposicion calculada por MC###
dt ← mat / TimeSteps
cva_total ← rep(0,No_Tray)
FX ← 0
FutureCF ← 0
CVA_FX_MC ← function(nominal, #nominal
                     r_dom, #tasa domestica
                     r_for, #tasa foranea
                     mat, #vencimiento del derivado anualizado
                     vol, #volatilidad anualizada
                     X_0, #el spot de FX, i.e. al tiempo t=0
                     strike, #strike de derivado
```

```
                        TimeSteps, #ódiscrtizacin de la integral
                        No_Tray, #numero de trayectorias del MC
                        defInt, #intensidad de default
                        rec, #recovery
                        BrS, #buy or sell
                        call_put_fwd) #"call", "put" o "forward"
{


  dates ← seq(0,mat,mat / TimeSteps) #vector de fechas de simulacion
  exp_tray ← rep(0,TimeSteps + 1) #vector para guardar la exposicion por trayectoria
  cva_tray ← rep(0,TimeSteps + 1)
  exposure ← rep(0,TimeSteps + 1)
  cva ← rep(0,TimeSteps + 1)
  for ( k in 1:No_Tray)
  {
    FX ← X_0
    for (i in 1:TimeSteps + 1)
    {
      dum_exp ← 0
      dum_cva ← 0
      norm ← rnorm(1)
      FX ← FX_sim(dt,FX, vol, r_dom, r_for, norm)

      dummy ← mat − dates[i]
      FutureCF ← priceFXcall_put_fwd(FX, dummy, r_dom, r_for, strike, vol, call_put_fwd)
      FutureCF ← BrS ∗ nominal ∗ FutureCF

      dum_exp ← if(FutureCF > 0) FutureCF else 0
      exp_tray[i] ← dum_exp

      if (i > 1)
      {
        #proba de supervivencia en t_i−1 y t_i
        defProb ← exp(−defInt ∗ dates[i−1]) − exp(−defInt ∗ dates[i])
        cva_dateDF ← exp(−r_dom ∗ dates[i]) #descuento desde T_j
        cva_tray[i] ←(1−rec) ∗ cva_dateDF ∗ exp_tray[i] ∗ defProb
      }

    }
    cva_total[k] ← sum(cva_tray)
    exposure ← exposure + exp_tray / No_Tray
    cva ← cva + cva_tray / No_Tray
  }
  par(mfrow=c(1,2))
  plot(dates,exposure,xlab="Anios",ylab="Exposicion",main="Exposicion FX forward por MC",type = 'l', col = 'red')
```

```
  plot(dates,cva, xlab="Anios",ylab="CVA", main="CVA",type = 'l', col =
      'blue')
  return(sum(cva_total) / No_Tray)
}

CVA_FX_MC(nominal, r_dom, r_for, mat, vol, X_0, strike, TimeSteps, No_
    Tray, defInt, rec, 1, "forward")
```

A.4. CVA de un swap

El código del cálculo de CVA para un swap utilizando expresión analítica para la exposición es el siguiente:

```
###DV01 o anualida del swap
dv01 <- function(tenor,disc_rate,mat)
{
  v_dcf <- rep(tenor,mat / tenor)
  t <- cumsum(v_dcf)
  disc_fact <- exp(- disc_rate * t)
  dv01 <- sum(v_dcf * disc_fact)
  return(dv01)
}
###Pata flotante de un swap
float_leg <- function(disc_rate,mat)
{
  return(1 - exp(- disc_rate*mat))
}

###Tasa Par Swap
ParSwap <- function(float_leg,dv01)
{
  return(float_leg / dv01)
}

###Funcion para valuar swaptions con el modelo de Black-Scholes
###en terminos de la tasa par swap
BS<-function(S_0, #tasa par swap a tiempo cero
              strike, #strike
              expiry, #fecha de opcion anualizada
              vol, #volatilidad anualizada
              disc_factor, #factor de descuento
              swpt_p_swpt_r_swap) #"swpt_p", "swpt_r" o "swap"
{
  expiry <- ifelse(expiry == 0,0.000000001, expiry)
  signo <- NULL
  price <- NULL
  if(swpt_p_swpt_r_swap == "swpt_p"){signo <- 1}
  else if(swpt_p_swpt_r_swap =="swpt_r"){signo <- -1}
```

```

  d1 <- (log(S_0 / strike) + (0.5 * vol * vol) * expiry) / (vol * sqrt(
      expiry))
  d2 <- d1 - (vol * sqrt(expiry))
  Nd1 <- pnorm(signo * d1,0,1)
  Nd2 <- pnorm(signo * d2,0,1)
  price <- signo * disc_factor * (S_0 * Nd1 - strike * Nd2)
  return(price)
}


###Funcion para calcular el precio de un swaption payer, swaption
###receiver y swap
priceSwaption <- function(tenor, #tiempo entre cupones, anualizado
                          expiry, #fecha de opcionalidad anualizada
                          mat, #Fecha de vencimiento anualizada del swap
                          disc_rate, #tasa domestica anualizada
                          strike, #strike
                          vol, #volatilidad
                          swpt_p_swpt_r_swap) #"swpt_p", "swpt_r" o "swap
                              "
{
  price <- NULL
  annuity <- dv01(tenor,disc_rate,mat)
  f_leg <- float_leg(disc_rate,mat)
  ParSwap <- ParSwap(f_leg,annuity)
  disc_factor <- exp(- disc_rate * mat)
  if(swpt_p_swpt_r_swap == "swpt_p" | swpt_p_swpt_r_swap == "swpt_r")
  {
    price <- BS(ParSwap, strike, expiry, vol, disc_factor,swpt_p_swpt_r_
        swap)
  }
  else if(swpt_p_swpt_r_swap == "swap")
  {
    price <- annuity * (ParSwap - strike)
  }
  return(price)
}

###cva Swap###
#############

##Datos de credito
defInt <- 0.08 #intensidad de default, supondremos el modelo exponencial
rec <- 0.4 #recovery, porcentaje que se va a recuperar en caso de
    default

##Info de mercado
disc_rate <- 0.05
```

```
nominal ← 1000000
P_R ← "payer"
strike ← 0.051
vol ← 0.15
###para hacerlo mas facil no incluiremos fechas per se, si no un
###tiempo hasta la fecha de vencimiento

tenor ← 1/2 #tiempo entre fechas de cupon, anualizada
mat ← 5 #vencimiento del swap en anios
swpt_p_swpt_r_swap ← "swap" ### deberia ser un swap

##Numero de fechas en las que calcularemos el CVA
TimeSteps ← 30

###CVA con formula analitica de la exposicion###

CVA_AnaliticExposure_swap ← function(nominal, #nominal
                                disc_rate, #tasa de descuento
                                tenor,  #fraccion de anio de pagos entre cupones
                                mat, #vencimiento del swap anualizado
                                vol, #volatilidad anualizada
                                strike, #strike de swap
                                TimeSteps, #discrtizacion de la integral
                                defInt, #intensidad de default
                                rec, #recovery
                                swpt_p_swpt_r_swap) #"swpt_p", "swpt_r" o "swap"
{
  dates ← rep(0,TimeSteps)
  exposure ← rep(0,TimeSteps)
  cva ← rep(0,TimeSteps)
  coupon_dates ← cumsum(rep(tenor,mat / tenor))
  j ← 1

  for(i in 1:TimeSteps)
  {
    dates[i] ← (i-1) * mat / (TimeSteps-1) #son las fechas T_j
    cva_dateDF ← exp(- disc_rate * dates[i]) #descuento desde T_j

    if(i > 1)
    {
      #proba de supervivencia en t_i-1 y t_i
      defProb ← exp(-defInt * dates[i-1]) - exp(-defInt * dates[i])
      if(dates[i] > coupon_dates[j]){j ← j + 1}

      exposure[i] ← priceSwaption(tenor, coupon_dates[j], mat, disc_rate, strike, vol, "swpt_p")
      exposure[i] ← nominal * exposure[i]
```

```

      cva[i] <- (1 - rec) * cva_dateDF * exposure[i] * defProb
    }
    else
    {
      annuity <- dv01(tenor, disc_rate,mat)
      fl_leg <- float_leg(disc_rate,mat)
      ParSwap <- ParSwap(fl_leg,annuity)
      if(ParSwap > strike)
      {
        exposure[i] <- exposure[i] + nominal * (ParSwap - strike) *
          annuity
      }

    }

  }
  par(mfrow=c(1,2))
  plot(dates,exposure,xlab="Anios",ylab="Exposicion",main="Exposicion
     Analitica de un swap",type='l',col="red")
  plot(dates,cva,xlab="Anios",ylab="CVA",main="CVA",type='l',col="blue"
     )
  return(sum(cva))
}

CVA_AnaliticExposure_swap(nominal, disc_rate, tenor, mat, vol, strike,
    TimeSteps, defInt, rec, "swap")
```

Apéndice B

Glosario

De tal manera que este trabajo esté autocontenido, haré un breve glosario de los términos en inglés que no traduje pues son estándar en la jerga del mercado financiero.

- **Call**. Es un derivado, en particular una opción de compra.
- **Cap**. Es un derivado de tasas de interés, podemos pensarlo como un swap pero donde cada intercambio se lleva a cabao solo si la tasa es mayor al strike.
- **CDS**. Credit default swap, es un tipo de swap, pero donde lo que se intercambia a es una prima periódica por cierta cantidad en caso de que una contraparte entre en default.
- **Cross Currency Swap**. Es un tipo especial de swap, donde se intercambian tasas de interés de dos economías distintas y cada pata está en la divisa original de cada tasa.
- **Day cont fraction**. Es el tiempo entre fechas de pago en un contrato derivado y existen varias convenciones para contar los días.
- **Default**. Se refiere principalmente a la quiebra de una contraparte; sin embargo, podría referirse solo al hecho de no hacer frente a sus obligaciones financieras aún sin estar en banca rota.
- **Equity**. Son instrumentos financieros que englobana las acciones e índices, su valor está ligado al valor de una empresa o compañía. Suelen pagar dividendos, ya sea relativos o absolutos, que de igual manera dependen del desempeño de la empresa.
- **Floor**. Es un derivado de tasas de interés, podemos pensarlo como un swap pero donde cada intercambio se lleva a cabao solo si la tasa es menor al strike.
- **Forward**. Tiene dos connotaciones: puede referirse al derivado que consiste en fijar el valor futuro al que se intercambiará ya sea un equity; o bien, al derivado que consiste en fijar una tasa e intercambiarla por una aleatoria en cierta fecha futura.

- **FX**. Son las siglas de Foreign Exchange, es decir, se refiere a tipo de cambio entre dos divisas.
- **FRA**. Forward Rate Agreement, es un contrato forward en el que se intercambia una tasa fija por una flotante.
- **LGD**. Loss Given Default, es la proporción de nocional que se pierde en caso de default.
- **Multicurrency**. Se refiere a un contrato en el que los flujos están en más de una divisa.
- **Netting**. Se refiere a agrupar varios derivados de un portafolio y considerarlos de alguna manera con un contrato más grande donde los flujos futuros de todos se unen.
- **Pata fija/flotante**. Se refiera a la serie de flujos que se pagan en un swap, los que corresponden a la tasa fija y a la flotante respectivamente. Se deriva del término en inglés fixed/floating leg.
- **Payer**. Característica de un derivado de tasa de interés, en el que se paga la tasa fija.
- **Payoff**. Es la representación matemática de la función de pago, es decir, encapsula el valor (posiblemente aleatorio) de una función de algún activo subyacente implícito.
- **Put**. Es un derivado, en particular una opción de venta.
- **Quanto**. Es una característica de un payoff e implica que el valor se considerará como si estuviese en una divisa distinta de en la que originalmente está definida. Esta característica conlleva un ajuste que involucra a la volatilidad del tipo de cambio entre las dos divisas y la correlación entre éste y el precio del activo subyacente.
- **Recovery**. Se define como 1-LGD, es decir, la proporción que se recupera en caso de default.
- **Receiver**. Característica de un derivado de tasa de interés, en el que se recibe la tasa fija.
- **Swap**. Es un derivado que consiste en un intercambio periódico de tasas de interés.
- **Swaption**. Es un derivado dque consiste en la opción de entrar en un swap en una fecha futura.
- **Yield curve**. Es la curva de tasas de interés en una fecha fija que es consistente con los precios de bonos de mercado.

Bibliografía

[AB12] Alexandre Antonov and Dominic Brecher. Exposure & cva for large portfolios of vanilla swaps: The thin-out optimization. 2012.

[AP10] Leif BG Andersen and Vladimir V Piterbarg. *Interest Rate Modeling*. Atlantic Financial Press, 2010.

[ATCD18] Lokman Abbas-Turki, Stéphane Crépey, and Babacar Diallo. Xva principles, nested monte carlo strategies, and gpu optimizations. 2018.

[BA03] Damiano Brigo and Aurélien Alfonsi. Credit default swaps calibration and option pricing with the ssrd stochastic intensity and interest-rate model. In *Proceedings of the 6-th Columbia= JAFEE International Conference*. Citeseer, 2003.

[BC09] Damiano Brigo and Kyriakos Chourdakis. Counterparty risk for credit default swaps: Impact of spread volatility and default correlation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 12(07):1007–1026, 2009.

[BJPR09] Tomasz R Bielecki, Monique Jeanblanc-Picqué, and Marek Rutkowski. *Credit risk modeling*, volume 5. Osaka University Press Osaka, 2009.

[BJR04] Tomasz R Bielecki, Monique Jeanblanc, and Marek Rutkowski. Modeling and valuation of credit risk. In *Stochastic methods in finance*, pages 27–126. Springer, 2004.

[BJR05] Tomasz R Bielecki, Monique Jeanblanc, and Marek Rutkowski. Pricing and trading credit default swaps. Technical report, Working paper, 2005.

[BM05] Damiano Brigo and Massimo Morini. Cds market formulas and models. In *Proceedings of the 18th annual Warwick options conference*, 2005.

[BM07] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer Science & Business Media, 2007.

[BMP13] Damiano Brigo, Massimo Morini, and Andrea Pallavicini. *Counterparty credit risk, collateral and funding. With Pricing Cases for All Asset Classes*. John Wiley & Sons, 2013.

[BO10] Mohamed Bouzoubaa and Adel Osseiran. *Exotic options and hybrids: A guide to structuring, pricing and trading.* John Wiley & Sons, 2010.

[BP07] Damiano Brigo and Andrea Pallavicini. Counterparty risk and contingent cds valuation under correlation between interest-rates and default. 2007.

[BR96] Martin Baxter and Andrew Rennie. *Financial calculus: an introduction to derivative pricing.* Cambridge university press, 1996.

[Cap10] Luca Capriotti. Fast greeks by algorithmic differentiation. 2010.

[CMT07] Antonio Castagna, Fabio Mercurio, and Marco Tarenghi. Smile-consistent cms adjustment in closed form: Introducing the vanna–volga approach. Technical report, Working paper, 2007.

[Gat01] Jim Gatheral. Stochastic volatility and local volatility. *Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University*, 2001.

[GGSZ16] Kathrin Glau, Zorana Grbac, Matthias Scherer, and Rudi Zagst. *Innovations in Derivatives Markets: Fixed Income Modeling, Valuation Adjustments, Risk Management, and Regulation*, volume 165. Springer, 2016.

[GHL13] Julien Guyon and Pierre Henry-Labordère. *Nonlinear option pricing.* CRC Press, 2013.

[GJ14] Jim Gatheral and Antoine Jacquier. Arbitrage-free svi volatility surfaces. *Quantitative Finance*, 14(1):59–71, 2014.

[Gre12] Jon Gregory. *Counterparty credit risk and credit value adjustment: A continuing challenge for global financial markets.* John Wiley & Sons, 2012.

[GW08] Andreas Griewank and Andrea Walther. *Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation*, volume 105. Siam, 2008.

[HB16] John C Hull and Sankarshan Basu. *Options, futures, and other derivatives.* Pearson Education India, 2016.

[HKLW14] Patrick S Hagan, Deep Kumar, Andrew Lesniewski, and Diana Woodward. Arbitrage-free sabr. *Wilmott*, 2014(69):60–75, 2014.

[Jam04] Farshid Jamshidian. Valuation of credit default swaps and swaptions. *Finance and Stochastics*, 8(3):343–371, 2004.

[Jan11] Agnieszka Janek. The vanna-volga method for derivatives pricing. 2011.

[Jos03] Mark Suresh Joshi. *The concepts and practice of mathematical finance*, volume 1. Cambridge University Press, 2003.

[JYC09] Monique Jeanblanc, Marc Yor, and Marc Chesney. *Mathematical Methods for Financial Markets.* Springer, 2009.

[KG14] Chris Kenyon and Andrew Green. Efficient xva management: Pricing, hedging, and allocation using trade-level regression and global conditioning. 2014.

[Kot11] AA Kotze. Foreign exchange derivatives: effective theoretical and practical techniques for trading, hedging and managing fx derivatives. *Financial Chaos Theory Pty. Ltd*, 2011.

[LSG15] Roland Lichters, Roland Stamm, and Donal Gallagher. *Modern Derivatives Pricing and Credit Exposure Analysis: Theory and Practice of CSA and XVA Pricing, Exposure Simulation and Backtesting.* Springer, 2015.

[MCF06] Robert Lynch McDonald, Mark Cassano, and Rüdiger Fahlenbrach. *Derivatives markets*, volume 2. Addison-Wesley Boston, 2006.

[Øks00] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations, an introduction with applications.* Springer, 2000.

[Pel00] Antoon Pelsser. *Efficient methods for valuing interest rate derivatives.* Springer Science & Business Media, 2000.