UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA PROPIEDAD DE DUNFORD-PETTIS EN ESPACIOS DE BANACH

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JOSÉ JULIÁN PAVÓN ESPAÑOL

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS

Ciudad Universitaria, CDMX 2018

1. **Datos del alumno**
   Pavón
   Español
   José Julián
   55 45 31 93 68
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   312157711
2. **Datos del tutor**
   Dra.
   Carmen
   Martínez Adame
   Isais
3. **Datos del sinodal 1**
   Dra.
   Ana
   Meda
   Guardiola
4. **Datos del sinodal 2**
   Dr.
   Francisco Javier
   Torres
   Ayala
5. **Datos del sinodal 3**
   Dra.
   Natalia
   Jonard
   Pérez
6. **Datos del sinodal 4**
   Dr.
   Sergio Iván
   López
   Ortega
7. **Datos del trabajo escrito**
   Sobre la propiedad de Dunford-Pettis en espacios de Banach
   119 p.
   2018

Sobre la propiedad de Dunford-Pettis en espacios de Banach

José Julián Pavón Español

Todo ocurre siempre y nunca,
todo se repite hasta el infinito y de forma irrepetible.

-Danilo Kiš

Les han de traer ejemplos palpables,
fáciles, inteligibles, demonstrativos, indubitables,
con demostraciones matemáticas que no se pueden negar ...

-Miguel de Cervantes

A Jovita (QEPD) y Raúl,
con todo mi cariño.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi asesora Carmen por su tiempo, sus enseñanzas y por todas las oportunidades que me ha brindado a lo largo de estos últimos años, le estaré siempre agradecido.

También agradezco a cada uno de mis sinodales Ana, Natalia, Francisco y Sergio por su tiempo en resolver mis dudas, brindarme su ayuda y sus valiosos consejos para este trabajo. Y sobretodo por cada una de las cosas que me han enseñado, pues me abrieron los ojos a nuevos horizontes.

A mis amigos que han hecho con su compañía de esto un viaje inigualable: Macarena, Diego, Fernanda, Itzel, Karen, Simón y Claudio. A cada uno de ellos le agradezco su tiempo, sus consejos, su compañía y por todo su cariño.

Quiero agradecer de manera muy especial a Mamaita y a Papaúl quienes me guiaron siempre, me apoyaron en todo momento y a pesar de que Mamaita ya no está con nosotros sus consejos y su educación siempre estará conmigo, este trabajo está dedicado especialmente a ustedes. Igualmente agradezco de todo corazón a mi papá y a mi mamá que me han apoyado siempre, por cada uno de sus palabras de aliento, porque de no ser por ellos y su apoyo, yo no estaría aquí. Les agradezco infinitamente y gracias por TODO. A mi hermano Dany por su compañía y sus risas.

Agradezco también a Jesús M. F. Castillo por sus sugerencias y a Elena Oustinova por su ayuda para este trabajo.

A cada una de las personas que han sido participes de esta odisea, mil gracias.

Investigación realizada gracias al Programa UNAM-PAPIIT IN403816 ”La Comprensión Matemática”. Agradezco a la DGAPA UNAM la beca recibida.

Índice general

Introducción

La teoría de los espacios de Banach tiene su inicio a principios del siglo XX, principalmente en la escuela de Matemáticas de Lwów. Uno de los primeros trabajos es el libro de Stefan Banach *Théorie des Opérations Linéaires* (ver [3]). Un espacio de Banach es un espacio normado completo con respecto a la métrica inducida por esa norma. Algunas preguntas centrales cuando se trata con estos espacios son: ¿Cuándo dos de estos espacios son isomorfos? ¿Qué características tienen sus subconjuntos? ¿Qué tipos de operadores hay entre estos espacios?

La primera pregunta se responde utilizando características propias de cada espacio, en este caso nosotros estudiaremos cuando un espacio tiene la propiedad de Dunford-Pettis. La segunda pregunta se responde viendo el espacio como un espacio topológico; dado que tiene una métrica podemos estudiar cómo son sus subconjuntos, cerrados, compactos, etc. Como en los espacios de Banach de dimensión infinita la bola unitaria no es compacta, este estudio se acompañó con la introducción de nuevas topologías que sí cumplieran esta propiedad. Finalmente una posible respuesta a la tercera pregunta es estudiar a los operadores lineales continuos con respecto a las normas de los espacios.

La propiedad de Dunford-Pettis involucra, de cierta forma, los tres aspectos esenciales en los espacios de Banach. No solo es una propiedad que sirve para distinguir a dos espacios, sino que también involucra operadores débilmente compactos y completamente continuos en el espacio y más aún, una propiedad equivalente se define por medio de las topologías débiles en los espacios.

Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad de Dunford-Pettis si todo operador débilmente compacto de este espacio en otro espacio de Banach también es completamente continuo. Esta propiedad se estudia por primera vez en el artículo *Linear operations on summable functions* de N. Dunford y B. J.

Pettis (ver [17]). En este artículo se estudia el espacio $L_1(\lambda)$, donde λ es la medida de Lebesgue en un intervalo S de $\mathbb{R}^n$, y se muestra que este espacio tiene esta propiedad mencionada.

A partir de este resultado, pero aproximadamente diez años más tarde, Grothendieck en su gran artículo *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)* ([22]), define esta propiedad en general para cualquier espacio de Banach y además de ello muestra que cualquier espacio $C(K)$ (donde K es un espacio compacto) o del tipo $L_1(\mu)$ (donde μ es una medida finita en un espacio de Banach) tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

A partir de ese trabajo seminal se han hecho muchos avances tratando de buscar espacios que tengan esta propiedad. También, a diferencia de muchas otras propiedades en espacios de Banach, se cumple que no se hereda ni a subespacios cerrados ni a cocientes. Esto, a su vez, hace más díficil ver si un espacio en específico tiene o no la propiedad.

Grothendieck y Barces mostraron las más importantes equivalencias sobre esta propiedad. A partir de ese momento una pregunta abierta fue ¿Qué espacios tienen la propiedad de Dunford-Pettis? En el libro escrito en 1977 por Diestel y Uhl ([16], p. 83-85) se puede ver que en aquellos años se seguían buscando nuevos ejemplos de espacios con esta propiedad y que se hacían otras preguntas sobre esta propiedad. Por ejemplo, dado un espacio de Banach Y que tiene la propiedad de Dunford-Pettis ¿Se tiene que el espacio $L_1(\mu, Y)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis?

Esta pregunta fue contestada negativamente por Talagrand en 1982 ([32]) donde además de construir un espacio E con la propiedad de Dunford-Pettis, tal que también el espacio dual E^* tiene la propiedad, pero los espacios $C(K, E)$ y $L_1(E^*)$ no la tienen. Esto no solo responde a la pregunta planteada por Diestel y Uhl, sino que también responde negativamente a la pregunta análoga: dado un espacio de Banach Y que tiene la propiedad de Dunford-Pettis ¿Se tiene que el espacio $C(K, Y)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis? Este ejemplo, además de dar respuesta a esa pregunta, tiene muchas otras propiedades y que ha servido como contraejemplo en otros cuestionamientos sobre esta propiedad.

En este trabajo hablaremos sobre la propiedad de Dunford-Pettis y en especial sobre el espacio de Talagrand y sus propiedades. Para ello, el trabajo busca ser lo más autocontenido posible y se divide en tres capítulos y un apéndice. El primer capítulo contiene los fundamentos de la teoría de los espacios de Banach desde su definición, pasando por el estudio de sus subespacios, cocientes, propiedades como la reflexividad, los operadores entre espacios, el estudio de las distintas topologías y concluye con una sección completa dedicada a la propiedad de Dunford-Pettis. El segundo capítulo está dedicado a bases en espacios de Banach y los distintos tipos de éstas. En ambos capítulos seguiremos los libros de Megginson ([23]), Yosida ([33]) y Carothers ([7]).

Finalmente el tercer capítulo trata sobre el espacio de Talagrand, detallando su construcción y sus propiedades. A manera de conclusión se hace mención de otros resultados que se han dado con respecto a la propiedad de Dunford-Pettis. A diferencia de otras propiedades en espacios de Banach, el estudio de la propiedad de Dunford-Pettis tuvo su auge en los años 80 y 90 del siglo pasado. Sin embargo, en años recientes han habido algunos avances sobre esta propiedad. En este caso expondremos de manera general el artículo de Talagrand ([32]) y también usando algunos resultados del artículo de Grothendieck ([22]).

Al final se incluye un apéndice que contiene los resultados más importantes de la teoría de la medida, que son utilizados como resultados auxiliares a lo largo de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios normados y Operadores lineales

A lo largo de este texto habremos de suponer que el campo $\mathbb{F}$ sobre el cual trabajaremos será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y solo en caso necesario se hará explícito en qué campo se está trabajando. En este capítulo presentaremos los preliminares sobre espacios de Banach, es decir, propiedades en los espacios de Banach, operadores lineales, los teoremas fundamentales de la teoría en espacios de Banach, así topologías débiles y la propiedad de Dunford-Pettis. Seguiremos principalmente los libros Megginson ([23]), Yosida ([33]) y Carothers ([7]) para este capítulo.

Definición 1.1.1. *Un espacio normado* $(V, \|\|_V)$ *es una pareja donde* V *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{F}$ *y* $\|\|_V : V \to \mathbb{R}$ *es una función a la que llamaremos norma*[1] *que cumple:*

1. $\|v\|_V \geq 0$ *para todo* $v \in V$
2. $\|v\|_V = 0$ *si y solo si* $v = 0$
3. *si* $a \in \mathbb{F}$ *entonces* $\|a \cdot v\|_V = |a| \, \|v\|_V$
4. *si* $u, v \in V$ *entonces* $\|u\|_V + \|v\|_V \geq \|u + v\|_V$ *(desigualdad del triángulo).*

[1]En lo subsecuente al hacer referencia a un espacio normado se omitirá la referencia a su norma así como al subíndice en la norma.

Observación. En un espacio normado se puede definir una métrica d de forma natural $d : V \times V \to R$ como $d(x, y) := \|x - y\|$. Así todo espacio normado es un espacio métrico. Y además se define de forma natural una topología por medio de esta métrica.

Definición 1.1.2. *Un espacio normado X es un espacio de Banach si es completo con respecto a la métrica que induce la norma.*

Ejemplo. Sea $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en el campo, entonces definimos al espacio ℓ^p como

$$\ell^p = \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} | \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\right\}.$$

Y si definimos $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}$ entonces estos espacios son espacios normados para cada $p \geq 1$.

De forma abreviada daremos una prueba de que ℓ^1 es un espacio de Banach, es decir, de que toda sucesión de Cauchy en ℓ^1 es convergente. Para $p > 1$ se puede hacer una prueba similar.

Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^1 (cada $y_n = (x_j^n)_{j=1}^{\infty}$), en este caso tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|y_n - y_m\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n - x_j^m| < \epsilon.$$

Cada sumando de la serie es de la forma $|x_j^n - x_j^m|$ con $j \geq 1$ y como cada sumando es positivo entonces cada uno es menor que ϵ, así la sucesión $(x_j^n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, además sabemos que $\mathbb{R}$ es un campo completo; de esta forma tenemos que estas sucesiones para $j \geq 1$ son convergentes. Denotaremos al límite de cada una de ellas por x_j, y sea $y = (x_j)_{j=1}^{\infty}$. Se tiene que

$$\|y\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |x_j^n|\right)$$

y también sabemos que para toda n se tiene que $\|y_n\| < M$ para alguna $M > 0$, por lo cual para $n > 0$ se tiene las siguientes desigualdades:

$$\sum_{j=1}^{N} |x_j^n| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n| = \|y\| < M.$$

Luego, al tomar el límite cuando N tiende a ∞ se tiene finalmente que $\|y\| \leq M$. Basta ver que $\|y_n - y\|$ converge a 0 cuando n tiende a ∞. Para este fin, sea $\epsilon > 0$ como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, si $n, m > N$ tenemos que

$$\sum_{j=1}^{N} |x_j^n - x_j^m| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n - x_j^m| = \|y_n - y_m\|_1 < \epsilon.$$

Al dejar N, n fijas, y tomar el límite cuando m tiende a ∞ se obtiene que

$$\sum_{j=1}^{N} |x_j^n - x_j| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n - x_j^m| < \epsilon.$$

Por tanto que $\|y_n - y\|_1 < \epsilon$, con lo cual se tiene que ℓ^1 es un espacio normado completo.

Ejemplos de Espacios de Banach.

1. Con lo dicho anteriormente tenemos que los espacios ℓ^p con $p \geq 1$ son espacios de Banach.

2. Otros espacios ya conocidos son $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ no solo con la norma euclidiana sino también con las normas p, con $1 \leq p \leq \infty$.

3. Otro ejemplo es el espacio ℓ^∞ el cual se define como

$$\ell^\infty = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} : \sup\{|x_j| : j \in \mathbb{N}\} < \infty\},$$

   con la norma está dada por $\|y\|_\infty = \sup\{|x_j| : j \in \mathbb{N}\}$ si $y = (x_j)_{j=1}^{\infty}$.

4. $C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ también es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ para $f \in C([a, b])$.

5. $c_0 = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} : x_j \to 0\}$, es decir, el conjunto de sucesiones reales que convergen a 0, con la norma $\| \ \|_\infty$.

Es importante recalcar que en ocasiones se pueden definir varias normas en un espacio por lo que es importante aclarar cuál de ellas se está utilizando para hablar de completez en ese espacio. Más aún. Un resultado que se puede ver en [2] es que todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes, más no esto siempre es cierto en espacios de dimensión infinita.

Definición 1.1.3. *Sean dos espacios vectoriales X y Y. Un operador lineal de X en Y es una función $T : X \to Y$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ *para cualesquiera* $x, y \in X$,

2. *si* $\alpha \in \mathbb{F}$ *y* $x \in X$, *entonces* $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Si X es espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$ diremos que $T : X \to Y$ es funcional lineal si además de ser operador lineal se tiene que $Y = \mathbb{F}$.

Observación.

1. De la definición de operador lineal se tiene que $T(0) = 0$ por lo cual el conjunto definido como $\text{Ker}(T) := \{x : Tx = 0\}$ es no vacío, este conjunto será llamado el núcleo de T.

2. A la imagen de T la denotaremos como $\text{Im}(T) = \{Tx : x \in X\}$.

3. Al conjunto de operadores lineales entre dos espacios lo denotaremos por $L(X, Y)$.

4. $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$ son subespacios en X y Y respectivamente.

Como podemos observar, la definición de operador lineal surge de manera natural poniendo solamente atención a las funciones que se comportan *bien* con respecto a las operaciones ya definidas en un espacio vectorial. Ahora veamos cuál es la relación que tienen los operadores lineales con la norma en los espacios normados.

Proposición 1.1.4. *Dado un espacio normado X, la función norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y definimos $\delta = \epsilon$, así si $\|x - y\| < \delta$ obtenemos el resultado que buscamos, ya que aplicando la desigualdad del triángulo a $x = (x + y) - y$ y análogamente para y tenemos que $|\, \|x\| - \|y\|\, | \leq \|x - y\|$. $\square$

Definición 1.1.5. *Sean X y Y dos espacios vectoriales. Si existe un operador lineal y biyectivo $T : X \to Y$, diremos que T es un isomorfismo (algebraico) y que X y Y son isomorfos (algebraicamente). Si además X y Y son espacios normados, T es un operador continuo con inverso continuo entonces diremos que T es un isomorfismo y que X y Y son isomorfos[2]. Más aún, si X y Y son espacios normados, T es un isomorfismo y además $\|x\| = \|Tx\|$ para cada $x \in X$, entonces diremos que T es un isomorfismo isométrico.*

Recordemos que un espacio vectorial es de dimensión finita si y solo si todo elemento $x \in X$ es combinación lineal de un conjunto $A \subseteq X$ finito. Un resultado que se puede ver en [2] (Capítulo 2) es que si X y Y son espacios vectoriales de la misma dimensión entonces son isomorfos (algebraicamente). Es claro que si además ambos son espacios normados también son isomorfos, por lo tanto dos espacios normados de dimensión finita son isomorfos si y solo si son de la misma dimensión.

Definición 1.1.6. *Sean X y Y dos espacios normados. Dado un operador lineal $T : X \to Y$ diremos que T es acotado si existe $M > 0$ de modo que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$.*

Proposición 1.1.7. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es acotado.*
2. *Dada una vecindad U del $0 \in X$, se tiene que $T(U)$ es acotado en Y.*
3. *T es uniformemente continuo.*
4. *T es continuo.*
5. *T es continuo en 0.*
6. *$\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$ es finito.*

Demostración. Es claro que las implicaciones $1 \implies 2$, $3 \implies 4$ y $4 \implies 5$ se cumplen trivialmente.

$2 \implies 3$] Sea $\epsilon > 0$, dada una vecindad U del $0 \in X$, sabemos que $T(U)$ es acotado. Podemos suponer que $U = B_\delta(0)$ y que $\|Tx\| < M$ si $x \in U$. Entonces

[2]En el texto se aclarará cuándo se utiliza cada definición.

tenemos que dados $x, y \in X$ si $\|x - y\| < \delta$ entonces $\|T(x - y)\| < M$ pero $T(x - y) = Tx - Ty$ ya que T es un operador lineal, es decir, T es uniformemente continuo.

$5 \implies 6$] Como T es continuo en 0, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ entonces $\|Tx\| \leq 1$. Entonces si $\|x\| \leq 1$ se tiene que $\|Tx\| \leq \delta^{-1}$. Por lo tanto este conjunto está acotado y el supremo es finito.

$6 \implies 1$] Como $\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$ es finito, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|Tx\| \leq M$ si $\|x\| = 1$, de ahí sabemos que si $y \neq 0$ entonces $\frac{y}{\|y\|}$ es de norma 1 y aplicándole T tenemos que $\left\|T\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq M$, es decir, T es acotado. □

A partir de la demostración anterior surge la siguiente definición que nos ayudará a construir más ejemplos de espacios normados.

Definición 1.1.8. *Sean X y Y espacios normados, definimos al espacio de operadores lineales y acotados, denotado por $B(X, Y)$, como*

$$B(X, Y) = \{T : X \to Y : T \text{ es lineal y acotado}\}.$$

Teorema 1.1.9. *Sean X y Y espacios normados y $T \in B(X, Y)$. La función $\| \ \| : B(X, Y) \to \mathbb{R}$ dada por $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$ es una norma en $B(X, Y)$. Más aún también se cumple que $\|T\| = \inf\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \|x\|$ para todo $x \in X\}$*

Proposición 1.1.10. *Sean X, Y y Z espacios normados. Si $T \in B(X, Y)$ y $S \in B(Y, Z)$ entonces $ST \in B(X, Z)$ y más aún se tiene que $\|ST\| \leq \|T\| \|S\|$.*

Demostración. El resultado se sigue de que $STx = S(Tx)$ así como de que T y S son operadores acotados. □

Proposición 1.1.11. *Sean X y Y espacios normados y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $T_n \in B(X, Y)$. Si T_n tiende a T entonces $T_n x$ converge a Tx para todo $x \in X$.*

Teorema 1.1.12. *Sean X un espacio normado y Y un espacio de Banach, entonces $B(X, Y)$ es de Banach.*

Definición 1.1.13. *Sea X un espacio normado. El espacio dual de X, que denotaremos por X^* es el espacio $B(X, \mathbb{F})$, es decir, el de todas las funcionales acotadas sobre X.*

Más adelante hablaremos más de los espacios duales y el papel que desempeñan en la teoría de espacios de Banach, pero es importante recordar que si X es un espacio de dimensión finita entonces su espacio dual tiene la misma dimensión y por tanto son isomorfos.

Para terminar esta sección, veremos un resultado útil sobre subespacios de un espacio normado.

Proposición 1.1.14. *Sea (X, d_x) un espacio métrico completo. Un subespacio*[3] *$M \subseteq X$ es completo con la métrica heredada, es decir, con la métrica d_x restringida a M si y solo si M es cerrado.*

Corolario 1.1.15. *Sea X un espacio normado y $A \subseteq X$ subespacio. Entonces A es de Banach si y solo si A es cerrado en X.*

Definición 1.1.16. *Sean X un espacio de Banach y una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en X, si existe un $x \in X$ tal que $\|x_n - x\|$ converge a 0 cuando n tiende a 0.*

Definición 1.1.17. *Sean X un espacio de Banach y una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.*

Una buena caracterización de los espacios de Banach es por medio de la convergencia absoluta de las series.

Teorema 1.1.18. *Sea X un espacio normado. Entonces X es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente convergente es convergente en X.*

Demostración. $\Leftarrow$] Suponga que X no es un espacio de Banach. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy no convergente en X. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe n_j tal que $\|x_n - x_m\| < 2^{-j}$ si $n, m > n_j$. Ocurre que $n_{j+1} > n_j$. Supongamos que $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ converge a y, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a y. Sea $\epsilon > 0$, dado que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > M$ se tiene que $\|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{2}$. Como $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ converge a y, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k > K$ se tiene que $\|x_{n_k} - y\| < \frac{\epsilon}{2}$. Tomando $M := \max\{N, n_K\}$, se tiene que si $n, n_k > M$ tenemos

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y\| < \epsilon,$$

[3] En este caso subespacio hace referencia a subespacio topológico y no subespacio vectorial.

de donde obtenemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a y, la cuál es una contradicción .Por lo tanto, ya que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge entonces la subsucesión $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ tampoco converge. Tomemos la serie $\sum_{j=1}^{\infty}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$ la cual no es convergente ya que $\sum_{j=1}^{k}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) = (x_{n_{k+1}} - x_{n_1})$ para todo k. Pero $\sum_{j=1}^{\infty} \left\| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty$. Así existe una serie que converge absolutamente pero no converge en X.

$\Rightarrow$] Suponga que X es un espacio de Banach y que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ es una serie absolutamente convergente en X. Sea $n, m \in N$ con $n < m$, entonces

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{m} x_j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\| = \sum_{j=1}^{m} \|x_j\| - \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|.$$

Dado que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ es una serie absolutamente convergente entonces las sumas parciales $\sum_{n=1}^{m} \|x_n\|$ forma una sucesión de Cauchy de donde se obtiene que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge ya que X es completo. □

Proposición 1.1.19. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X, Y)$. Entonces si $\sum_{j=1}^{\infty} x_n$ es una serie absolutamente convergente en X se tiene que $\sum_{j=1}^{\infty} T(x_n)$ converge en Y.*

Demostración. El resultado se sigue de las siguientes desigualdades

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_n)\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|T\| \|x_n\| = \|T\| \sum_{j=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

□

1.2. Teoremas fundamentales

En esta sección presentamos el teorema de Hahn-Banach y otros tres teoremas fundamentales que ayudaron en el desarrollo de esta teoría. Hay varias formas de demostrar estos tres teoremas, una de ellas es utilizar el teorema de categoría de Baire pero nosotros haremos uso de otro resultado.

1.2.1. Teorema del Mapeo Abierto

Para la demostración de estos tres teoremas es necesario primero ver un resultado de Zabreiko [35]. El lema de Zabreiko puede ser demostrado por medio del teorema de Categoría de Baire o una versión más débil de éste.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio vectorial y $p : X \to \mathbb{R}$ una funcional real. Diremos que p es una seminorma en X si cumple con las siguientes condiciones:*

1. *Si $a \in \mathbb{F}$ entonces $p(a \cdot v) = |a|p(v)$.*
2. *Y si $u, v \in V$ entonces $p(u) + p(v) \geq p(u + v)$.*

De la definición se puede ver que toda norma es seminorma.

Definición 1.2.2. *Sea X un espacio normado y $f : X \to \mathbb{R}$ una función con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Diremos que f es σ-subaditiva si $f\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} f(x_j)$ para cada serie convergente $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ en X.*

Definición 1.2.3. *Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Diremos que A es convexo si para todo $x, y \in A$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que $tx + (1 - t)y \in A$.*

Definición 1.2.4. *Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Diremos que A es simétrico si el conjunto $-A := \{-x : x \in A\}$ es igual a A.*

Teorema 1.2.5. *(Lema de Zabreiko, [35].) Sea X un espacio de Banach y p una serminorma σ-subaditiva, entonces p es continua.*

Demostración. Sean $A_n := p^{-1}([0, n])$ y $F_n = \overline{A_n}$. Notemos que tanto A_n y F_n son simétricos y convexos, ya que p es una seminorma. Tenemos además que $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y del teorema 2.1.3 existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que F_N tiene interior no vacío.

Entonces existe un $x_0 \in X$ y $R > 0$ tal que $B_R(x_0) := y : \|y - x_0\| < R \subseteq F_N$. Y por simetría tenemos que $B_R(-x_0) = -B_R x_0 \subseteq F_N$. Si $\|x\| < R$ entonces

$x + x_0 \in B_R(x_0)$ y además $x - x_0 \in B_R(-x_0)$, así $x \pm x_0 \in F_N$. Por convexidad se tiene además que

$$x = \tfrac{1}{2}(x + x_0) + \tfrac{1}{2}(x - x_0) \in F_N,$$

así $B_R(0) \subseteq F_N$. Más aún podemos probar que $B_R(0) \subseteq A_N$.

Supongamos $\|x\| < R$ y elegimos $r > 0$ tal que $\|x\| < r < R$. Fijamos un $q > 0$ tal que $0 < q < 1 - \frac{r}{R}$, entonces $\frac{1}{1-q}\frac{r}{R} < 1$. Así $y = \frac{R}{r}x \in B_R(0) \subseteq F_N = \overline{A_N}$, se sigue que existe $y_0 \in A_N$ tal que $\|y - y_0\| < qR$ y entonces $q^{-1}(y - y_0) \in B_R(0)$.

Elegimos $y_1 \in A_N$ tal que $\|q^{-1}(y - y_0) - y_1\| < qR$, así $\|y - y_0 - qy_1\| < q^2R$. Haciendo este proceso recursivamente podemos obtener un $y_n \in A_N$ tal que

$$\left| y - \sum_{k=0}^{n} q^k y_k \right| < q^n R, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces tenemos que $y = \sum_{k=0}^{\infty} q^k y_k$. Además por construcción $\|y_k\| \leq R + qR$ para toda k, así la serie $\sum_{k=0}^{\infty} q^k y_k$ es absolutamente convergente. Pero p es σ-subaditiva, eso implica que

$$p(y) = p\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k y_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k p(y_k) \leq \frac{1}{1-q}N,$$

así se tiene que $p(x) \leq \frac{r}{R}\frac{1}{1-q}N < N$, es decir, $x \in A_N$ como se quería probar.

Finalmente si $x \neq 0$, tenemos que si definimos $\lambda := \frac{R}{\|x\|(1+\epsilon)}$ se tiene que $\lambda x \in B_R(0) \subseteq A_N$. Entonces $p(\lambda x) < N$, de donde $p(x) \leq \frac{N(1+\epsilon)}{R}\|x\|$. Esto prueba el resultado. $\square$

Definición 1.2.6. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es abierta si para cada $U \subseteq X$ abierto se tiene que $f(U)$ es abierto en Y.*

Primero daremos la definición de la base de una topología.

Definición 1.2.7. *Sea X un conjunto no vacío. Decimos que $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una base para una topología en X si:*

1. *Para todo $x \in X$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$.*

2. *Si $x \in B_1 \cap B_2$, donde $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

De la definición se sigue que las bolas en un espacio normado de radio $r > 0$ y centro x, es decir $B_r(x) = \{y : \|x - y\| < r\}$, son una base para una topología en un espacio normado. A esta topología la llamaremos la topología de la norma.

Teorema 1.2.8. *(Teorema del mapeo abierto) Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal suprayectivo, entonces T es un mapeo abierto*

Demostración. Basta probarlo para la base de la topología que en este caso consiste de las bolas de radio r con centro en x para todo $x \in X$, pero como X es un espacio normado toda bola $B_\epsilon(x, r)$ se puede ver como $x + rB_X$, donde B_X es la bola unitaria del espacio. Así que la prueba se hará solamente para la bola unitaria ya que T es un operador lineal.

Sea $y \in Y$, definimos $p(y) = \text{ínf}\{\|x\| : x \in X, Tx = y\}$. Si a es un escalar distinto de 0, se tiene que

$$\begin{aligned} p(a \cdot y) &= \text{ínf}\{\|a \cdot x\| : x \in X, Tx = y\} \\ &= \text{ínf}\{|a|\,\|x\| : x \in X, Tx = y\} \\ &= |a|\,\text{ínf}\{\|x\| : x \in X, Tx = y\} \\ &= |a|p(y). \end{aligned}$$

El resultado anterior se cumple trivialmente si $a = 0$. Ahora si tomamos una serie convergente $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ en Y, podemos suponer que $\sum_{j=1}^{\infty} p(y_j)$ es finita. Sea $\epsilon > 0$, podemos elegir $x_j \in X$ tal que $Tx_j = y_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y que además $\|x_j\| < p(y_j) + \frac{1}{2^j}\epsilon$, dada la definición de p. Entonces $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \sum_{j=1}^{\infty} p(y_j) + \epsilon$ y por tanto la primera serie es finita. Sabemos que toda serie que converge absolutamente en un espacio de Banach es convergente, por tanto $T\Big(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} T(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j$. Así tenemos que

$$p\left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j\right) \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} p(y_j) + \epsilon.$$

Dado que ϵ es arbitrario se deduce que $p\left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} p(y_j)$, por lo cual p es una serminorma σ-subaditiva. Así por el Lema de Zabreiko se tiene que p es continua. Por lo que finalmente

$$T(B_X) = \{y : y \in Y, \text{ y existe } x \in B_X \text{ tal que } Tx = y\} = \{y : y \in Y, p(y) < 1\},$$

el cual es abierto ya que p es continua. □

Corolario 1.2.9. *(Teorema del inverso acotado). Si X y Y son espacios de Banach y T es un operador lineal acotado y biyectivo, entonces T es un isomorfismo.*

Demostración. Recordemos de [25] (sección 22, p.137) que si una función es abierta y tiene inversa, entonces está definida su inversa y es continua. □

Definición 1.2.10. *Sea X un espacio vectorial donde podemos definir dos normas. Diremos que las normas son equivalentes si y solo si definen la misma topología en X.*

Corolario 1.2.11. *Sea X un espacio vectorial donde tenemos definidas dos normas. Si el operador identidad $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ es continuo, entonces las dos normas son equivalentes.*

Un resultado conocido que se puede ver en [23] (sección 1.4, p. 29) establece que si X y Y son espacios normados y X es de dimensión finita, entonces cualquier operador lineal $T : X \to Y$ es acotado. Así, de este resultado y del corolario anterior tenemos que todas las normas definidas en un espacio normado de dimensión finita son equivalentes.

1.2.2. Teorema del Acotamiento Uniforme

Teorema 1.2.12. *(Teorema del acotamiento uniforme) Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathfrak{F} \subseteq B(X,Y)$ una familia no vacía de operadores lineales. Si $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathfrak{F}\}$ para cada $x \in X$ es finito entonces $\sup\{\|T\| : T \in \mathfrak{F}\}$ es finito.*

Demostración. Definimos $p(x) = \sup\{\|Tx\| : T \in \mathfrak{F}\}$ para cada $x \in X$. Si a es un escalar es claro que $p(a \cdot x) = |a|p(x)$. Y si $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ es una serie convergente en X y $T \in \mathfrak{F}$ entonces

$$\left\| T\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} Tx_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} p(x_j).$$

Por tanto p es una una serminorma σ-subaditiva. Así p es continua y también existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ entonces $p(x) \leq 1$. De esta forma $p(x) \leq \delta^{-1}$ si $\|x\| \leq 1$, por lo que $\|Tx\| \leq \delta^{-1}$ si $\|x\| \leq 1$ y $T \in \mathfrak{F}$. Así $\|T\| \leq \delta^{-1}$ para cada $T \in \mathfrak{F}$ y por tanto $\{\|Tx\| : T \in \mathfrak{F}\}$ está acotado superiormente. □

1.2.3. Teorema de la Gráfica Cerrada

Definición 1.2.13. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Definimos la gráfica de f como el conjunto*

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y = f(x)\}.$$

Teorema 1.2.14. *(Teorema de la gráfica cerrada) Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. Si para cada sucesión $(x_j)_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a $x \in X$ y tal que $(T(x_j))_{n=1}^{\infty}$ converge a $y \in Y$ se tiene que $y = Tx$, entonces T es acotado.*

Demostración. Definimos $p(x) := \|Tx\|$ para cada $x \in X$. Es fácil ver que $p(a \cdot x) = |a|p(x)$ si a es un escalar, ya que T es lineal. Veamos que es σ-subaditiva. Si $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ es una serie convergente en X, supondremos que $\sum_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\|$ es finita, ya que sino tendríamos de forma trivial que

$$p\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right) = \left\| T\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right)\right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\|.$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \|Tx_j\|$ converge absolutamente y Y es de Banach entonces $\sum_{j=1}^{\infty} Tx_j$ converge a algún $y \in Y$. Sea $\left(a_j = \sum_{n=1}^{j} x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ está sucesión converge a $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ en X; además $(T(a_j))_{n=1}^{\infty}$ converge a y en Y, por las hipótesis del teorema se sigue que $T\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right) = y = \text{lím}_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} T(x_n)$. De donde se deduce que

$$\left\| T(\sum_{j=1}^{\infty} x_j) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\| \,.$$

Así p es una seminorma y existe una vecindad U del 0 tal que $T(U)$ es acotada. Por la proposición 1.1.7 se deduce que T es acotado. □

Definición 1.2.15. *Sean X y Y espacios normados sobre el mismo campo $\mathbb{F}$. Entonces definimos las operaciones $+$ y $\cdot$ en $X \times Y$ de la siguiente forma:*

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ *si* $x_1, x_2 \in X$ *y* $y_1, y_2 \in Y$.
2. $a \cdot (x_1, y_1) := (a \cdot x_1, a \cdot y_1)$ *si* $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$ *y* $a \in \mathbb{F}$.

Y también definimos una norma en $X \times Y$ dada por $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. A este espacio con estas operaciones y esta norma le llamamos el espacio producto de X y Y, lo denotamos simplemente por $X \times Y$.

No es díficil ver que el espacio producto es un espacio normado, más aún, si cada uno de los espacios es completo entonces es completo el producto ya que en particular son espacios métricos completos y se sabe el producto también lo es. Además recordemos que si tenemos dos espacios métricos y una función f entre ellos, entonces la gráfica de f es cerrada en $X \times Y$ si y solo dada una sucesión $(x_j)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que converge a algún $x \in X$ y $(f(x_j))_{n=1}^{\infty}$ converge a $y \in Y$ se tiene que $y = f(x)$.

1.2.4. Teorema de Hahn-Banach

Veremos las distintas versiones del teorema de Hahn-Banach. Presentaremos solo la prueba para espacios normados y todos sus corolarios que son muy importantes, los cuales serán utilizados a lo largo del texto.

Teorema 1.2.16. *(Teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales reales) Sea X un espacio vectorial real y p una funcional real definida en X tal que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (subaditividad),*

2. *y $p(a \cdot x) = ap(x)$ para $a > 0$.*

Sea M un subespacio de X, donde está definida una funcional real f_0. Si f_0 es tal que $f_0(x) \leq p(x)$ para cada $x \in M$, entonces existe una funcional F definida en X tal que es una extensión de f_0, es decir, $f_0 = F(x)$ para toda $x \in M$ y cumple que además $F(x) \leq p(x)$ para toda $x \in X$.

Corolario 1.2.17. *Sea X un espacio vectorial real si p es una funcional que satisface las condiciones del teorema anterior. Entonces existe una funcional lineal f definida en todo X tal que*

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x).$$

Veremos otro resultado en espacios vectoriales, pero en este caso lo haremos en espacios vectoriales complejos, antes de pasar al resultado en espacios normados y sus importantes corolarios.

Teorema 1.2.18. *(Teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales complejos) Sea X un espacio vectorial complejo y p una seminorma definida en X. Sea $M \subseteq X$ un subespacio y f una funcional compleja definida en M tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Entonces existe una funcional compleja F definida en X que es extensión de f y tal que $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Teorema 1.2.19. *(Teorema de Hahn-Banach para espacios normados) Sea X un espacio normado, $M \subseteq X$ un subespacio y f_1 una funcional lineal acotada definida en M. Entonces existe una funcional lineal acotada f definida en X, tal que f extiende a f_1 y $\|f_1\| = \|f\|$.*

Demostración. Definimos $p(x) := \|f_1\| \, \|x\|$. Es claro que p es una seminorma continua en X tal que $|f_1(x)| \leq p(x)$. Entonces por el teorema 1.2.14 existe una funcional lineal f definida en X que extiende a f_1 y tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Entonces $\|f\| \leq \sup\{p(x) : x \in X\} = \|f_1\|$. Y por otra parte, dado que f es una extensión de f_1 se tiene que $\|f\| \geq \|f_1\|$; por lo tanto $\|f_1\| = \|f\|$. $\square$

Uno de los aspectos más importantes del teorema de Hahn-Banach, además de darnos criterios para extender funcionales, es que es una herramienta que nos sirve para probar que existen funcionales lineales acotadas no triviales en los espacios normados. El teorema no habla sobre la unicidad de dicha extensión, así que nos referiremos a ella como una extensión de Hahn-Banach de dicha funcional.

Corolario 1.2.20. *Sea X un espacio normado, $M \subseteq X$ un subespacio cerrado y $x \in X - M$. Entonces existe una funcional lineal acotada f definida en X tal que $\|f\| = 1$, $f(x) = d(x, M)$ y $M \subseteq \operatorname{Ker}(f)$.*

Demostración. Definimos $f_0(m + ax) = a \cdot d(x, M)$, si $m \in M$, $x \in X - M$ y a es un escalar. Entonces f_0 es una funcional lineal en el subespacio generado por M y $\{x\}$ tal que $f_0(x) = d(x, M)$ y $M \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. Además si $m \in M$ y $a \neq 0$, se tiene que $|f_0(m + ax)| = |a|d(x, M) \leq |a| \, \|x - (a^{-1}m)\| = \|m + ax\|$. Así f_0 es acotada y se tiene que $\|f_0\| \leq 1$. Pero también se tiene que

$$\|f_0\| \, \|x - m\| \geq \|f_0(x - m)\| = d(x, M),$$

y por otro lado también

$$\|f_0\| \, d(x, M) = \|f_0\| \operatorname{ínf}\{\|x - m\| \, | m \in M\} \geq d(x, M).$$

Así $\|f_0\| = 1$ y por el teorema 1.2.18 existe una extensión de Hahn-Banach que cumple las propiedades que queríamos. □

Corolario 1.2.21. *Sea X un espacio normado y $x \in X$ un elemento no nulo. Entonces existe una funcional lineal acotada f definida en X tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$.*

Demostración. Se sigue del corolario anterior tomando $M = \{0\}$. □

1.3. Espacios Cociente

En esta sección hablaremos sobre los espacios cociente y algunas de sus propiedades. El resultado principal de esta sección es el primer teorema de isomorfismo.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio normado y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado. El espacio cociente, denotado por X/M, es el conjunto de clases de equivalencia de X bajo la relación $x \sim y$ si y solo si $x - y \in M$. Es decir, X/M son las clases para cada $x \in X$ dadas por*

$$\overline{x} = \{y \in X : x - y \in M\} = \{x + y : y \in M\} = x + M.$$

Proposición 1.3.2. *Sea X un espacio normado y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado. Entonces el espacio cociente X/M es un espacio normado con las operaciones de espacio vectorial dadas por*

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$$
$$\lambda\overline{x} = \overline{\lambda x}$$

para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, y la norma dada por $\|\overline{x}\| = \text{ínf}\{\|v - w\| : v \in \overline{x}, w \in M\}$.

Demostración. La demostración es inmediata a partir de las definiciones de las operaciones. Dado que M es cerrado, se sigue que $\|\overline{x}\| = \text{ínf}\{\|v - w\| : v \in \overline{x}, w \in M\} = \text{ínf}\{d(x, y) : y \in M\}$ es una norma. □

Definición 1.3.3. *Sea X un espacio normado y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado. Entonces el mapeo cociente, denotado por $\pi : X \to X/M$, está definido por $\pi(x) = \overline{x} = x + M$.*

Proposición 1.3.4. *Sea X un espacio normado y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado. Entonces el mapeo cociente $\pi : X \to X/M$ es un operador lineal acotado y suprayectivo, además $\text{Ker}(\pi) = M$.*

Demostración. Se sigue de las definiciones de las operaciones en X/M y del hecho que $\overline{0} = \{0 + y : y \in M\} = M$. □

El siguiente resultado nos dice da una condición suficiente para que el cociente también sea completo.

Teorema 1.3.5. *Sea X un espacio de Banach y $M \subseteq X$ un subespacio cerrado. Entonces X/M es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\sum_{j=1}^{\infty} \overline{x_n}$ una serie absolutamente convergente en X/M. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \overline{x_n}$ tal que $\|x_n\| \leq \|\overline{x_n}\| + 2^{-n}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\overline{x_n}\| + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty.$$

Así la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente, por lo que converge en X por el teorema 1.1.18. Como π es un operador continuo se tiene que $\sum_{j=1}^{\infty} \overline{x_n}$ también converge. Así del teorema 1.1.18 se sigue la afirmación. □

Definición 1.3.6. *Sean X un espacio normado, $M \subseteq X$ un subespacio cerrado y P una propiedad definida en X. Decimos que P es una propiedad de tres espacios si cada vez que dos de los espacios X, M y X/M la tienen entonces el tercero también la tiene.*

Veremos a lo largo del texto varias propiedades que son propiedad de tres espacios, pero por ejemplo la propiedad de Dunford-Pettis que definiremos más adelante y parte central de este trabajo no es una propiedad de tres espacios.

Teorema 1.3.7. *La propiedad de ser completo es una propiedad de tres espacios.*

El siguiente resultado es análogo al primer teorema de isomorfismo de grupos, de ahí su nombre. Solo enunciaremos el resultado. Este resultado es de suma importancia, porque al tratar con un cociente, pocas veces se sabe que propiedades tiene y que otras no.

Teorema 1.3.8. *(Primer Teorema de Isomorfismo de Espacios de Banach) Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X, Y)$, es decir, un operador $T : X \to Y$ lineal y continuo. Entonces la imagen de T es cerrada en Y y además tenemos que $X/\mathrm{Ker}(T) \cong T(X)$, es decir, el cociente de X con el núcleo de T es isomorfo a la imagen de T.*

1.4. Reflexividad y espacios duales

En la primera sección hablamos del espacio dual de un espacio normado y en la segunda sección vimos que ese espacio es no trivial como un corolario del Teorema de Hahn-Banach. Ahora veremos ejemplos y otros resultados importantes que ayudarán en el desarrollo de la teoría.

Ejemplos de espacios duales.

1. Los espacios duales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son isomorfos a ellos mismos.

2. Si $p > 1$ entonces el espacio dual de ℓ^p es isométricamente isomorfo a ℓ^q, donde q es tal que $q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3. El espacio dual de ℓ^1 es isométricamente isomorfo a ℓ^∞.

4. El espacio dual de c_0 es isométricamente isomorfo a ℓ^1.

Definición 1.4.1. *Sean X, Y espacios normados y $T \in B(X,Y)$. Entonces si T es inyectivo, diremos que T es un encaje de X en Y y además diremos que X está encajado en Y. Más aún si $\|x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in X$, diremos que T es un encaje isométrico y que X está encajado isométricamente en Y.*

En lo subsecuente cuando hagamos referencia a la bola unitaria de un espacio normado X, es decir, $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ lo denotaremos por B_X.

Teorema 1.4.2. *Sean X un espacio normado y $x \in X$. Entonces*

$$\|x\| = \sup\{|x^*x| : x^* \in B_{X^*}\}.$$

Demostración. Podemos suponer que $x \neq 0$, ya que si $x = 0$ el resultado se sigue trivialmente. Dado que $|x^*x| \leq \|x^*\| \|x\| = \|x\|$ si $x^* \in B_{X^*}$, se sigue que $\|x\| \geq \sup\{|x^*x| : x^* \in B_{X^*}\}$. Pero por corolario 1.2.21 existe $x^* \in B_{X^*}$ tal que $x^*x = \|x\|$, de donde se sigue el resultado. □

Definición 1.4.3. *Sea X un espacio normado. El espacio doble dual de X es el espacio dual de X^*, es decir, $(X^*)^*$ y lo denotaremos por X^{**}. Inductivamente podemos definir el n-ésimo espacio dual de X como $X^n = (X^{n-1})^*$.*

Ejemplos de espacios doble duales.

1. Los espacios dobles duales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son isomorfos a ellos mismos.

2. El espacio dual doble de ℓ^2 es isométricamente isomorfo a ℓ^2.

3. El espacio doble dual de c_0 es isométricamente isomorfo a ℓ^∞.

Hay dos cosas a destacar de los ejemplos anteriores, en dos casos el espacio doble dual es isométricamente isomorfo al espacio normado y en el otro ejemplo ℓ^∞ es mucho más grande que c_0, ya que $c_0 \subseteq \ell^\infty$. En todos los casos el doble dual tiene encajado isométricamente al espacio con el que empezamos. Veamos que esto siempre sucede. Definimos el mapeo $\mathscr{C} : X \to X^{**}$, que actua de la siguiente forma $\mathscr{C}(x)(x^*) = x^*(x)$ donde $x \in X$ y $x^* \in X^*$.

Proposición 1.4.4. *Sea X un espacio normado. Entonces $\mathscr{C}$ es un isomorfismo isométrico entre X y su imagen en X^{**}. Más aún $\mathscr{C}(X)$ es cerrado en X^{**} si y solo si X es de Banach.*

Demostración. Es claro que $\mathscr{C}$ es lineal y además $\|\mathscr{C}(x)\| = \sup\{|x^*x| : x^* \in B_{X^*}\} = \|x\|$, por definición $\mathscr{C}$. Así $\mathscr{C} \in B(X, X^{**})$ y es un isomorfismo isométrico. Además se tiene que $\mathscr{C}(X)$ es cerrado en X^{**} si y solo si es de Banach; pero es $\mathscr{C}$ isomorfismo, $\mathscr{C}(x)$ es de Banach si y solo si X lo es. □

Definición 1.4.5. *Al mapeo $\mathscr{C} : X \to X^{**}$ definido como en el resultado anterior le llamaremos el mapeo canónico de X en X^{**}.*

Definición 1.4.6. *Sea X un espacio normado. Diremos que X es reflexivo si el mapeo canónico es suprayectivo, es decir, $\mathscr{C}(X) = X^{**}$.*

La anterior definición está tratando de generalizar el ejemplo de ℓ^2 el cual es isomorfo a su propio dual y por ende a su doble dual.

Proposición 1.4.7. *Sea X un espacio reflexivo. Entonces X es de Banach.*

Demostración. Se sigue de la proposición 1.4.4 y de que todo espacio dual siempre es de Banach. □

Recordemos que para un funcional, no siempre existe un punto en el espacio de tal modo que $|x^*x| = \|x^*\|$. En los espacios reflexivos sí sucede esto.

Proposición 1.4.8. *Sea X un espacio reflexivo. Entonces para todo $x^* \in X^*$ existe $x \in X$ tal que $\|x^*\| = |x^*x|$.*

Demostración. Sabemos que $\|x^*\| = \sup\{|x^*x| : x \in B_X\}$ por la definición de la norma de operadores. Dado $x^* \in X^*$, por el teorema 1.2.19 existe $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $\|x^*\| = |x^{**}x^*|$. Como el espacio es reflexivo, el mapeo canónico es sobre, es decir, existe $x \in X$ tal que $\mathscr{C}(x) = x^{**}$. Este elemento es el buscado ya que tenemos que el mapeo canónico es isométrico. □

Teorema 1.4.9. *Sea X un espacio reflexivo y $M \subseteq X$ subespacio cerrado. Entonces M también es reflexivo.*

Corolario 1.4.10. *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es reflexivo si y solo si X^* lo es.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es reflexivo. En este caso denotaremos por $\mathscr{C}_X$ y $\mathscr{C}_{X^*}$ a los mapeos canónicos de X y X^* en sus respectivos dobles duales. Sea $x^{***} \in X^{***}$. Si $x^{**} \in X^{**}$ y $x = {\mathscr{C}_X}^{-1}(x^{**})$, entonces

$$x^{***}(x^{**}) = x^{***}(\mathscr{C}_X(x)) = x^{**}(x^{***}(\mathscr{C}_X)),$$

por lo que $x^{***} = \mathscr{C}_{X^*}(x^{***}(\mathscr{C}_X))$. Así $\mathscr{C}_{X^*}$ es suprayectivo y por tanto X^* es reflexivo.

$\Leftarrow$] Supongamos que X^* es reflexivo. Entonces X^{**} es reflexivo y por el teorema anterior también $\mathscr{C}_X(X)$, ya que es un subespacio cerrado. Por tanto X es reflexivo. □

Corolario 1.4.11. *Si X es un espacio normado y M un subespacio cerrado, entonces X/M es reflexivo. Más aún la reflexividad es una propiedad de tres espacios.*

Corolario 1.4.12. *Sean X un espacio normado reflexivo y Y un espacio de Banach. Si existe $T \in B(X,Y)$ suprayectivo, entonces Y es reflexivo.*

Luego de estos dos resultados muy importantes dados por Pettis y que nos dice que la reflexividad es una propiedad que se comporta muy bien con las construcciones que hemos dado. Ahora veremos un resultado que tiene que ver con la separabilidad del espacio.

Definición 1.4.13. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es separable si existe un subconjunto $A \subseteq X$ numerable y denso, es decir, $\overline{A} = X$.*

Teorema 1.4.14. *Sea X un espacio normado. Si X^* es separable, entonces X es separable.*

Corolario 1.4.15. *Sea X un espacio reflexivo. Entonces X es separable si y solo si X^* es separable.*

El siguiente resultado va encaminado a ver que ℓ^1 es un espacio de Banach importante y que se relaciona con la separabilidad de los espacios de Banach.

Teorema 1.4.16. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces existe A subespacio de ℓ^1 tal que X es isomorfo a ℓ^1/A, es decir, todo espacio de Banach separable es isomorfo a un cociente de ℓ^1.*

Demostración. Sea $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso numerable de la bola unitaria de X. Sea $\ell^1(D) := \{(\lambda_n)_{n=1}^\infty : \lambda_n \in D, \sum_{n=1}^\infty \|\lambda_n\| < \infty\}$, es decir todas las sucesiones sumables en D. Definimos el operador $T : \ell^1(D) \to X$ como

$$T((\lambda_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n,$$

donde $(x_n)_{n=1}^\infty$ son los elementos del conjunto denso D. Notemos que $\|T((\lambda_n)_{n=1}^\infty)\| \leq \sum_{n=1}^\infty \|\lambda_n x_n\| = \sum_{n=1}^\infty \|\lambda_n\| = \|(\lambda_n)_{n=1}^\infty\|$. Así el operador T está bien definido y además es acotado de norma 1. Además, dado que D es un conjunto denso, se puede ver que T es suprayectivo. Así por el primer teorema de isomorfismo (1.3.8) tenemos que $X \cong \ell^1(D)/\mathrm{Ker}(T)$. Además como D es numerable se puede ver que $\ell^1(D) \cong \ell^1(\mathbb{N})$. Por tanto X es un cociente de ℓ^1. $\square$

La importancia de este resultado va encaminado a ver que los espacios de Banach separables se comportan bien; este es un primer resultado de buscar un espacio universal para estos espacios, es decir, buscar un espacio de Banach X donde se puedan encajar todos los espacios separables. En este caso lo que podemos llegar a probar es que se puede encajar como cociente.

1.5. Topologías Débiles

En esta sección hablaremos de cómo definir otras topologías que no provienen de la norma y como se relacionan con la topología de la norma. Esta necesidad de dar otras topologías a los espacios normados surge como consecuencia del siguiente resultado.

Teorema 1.5.1. *Sea X un espacio normado. X es de dimensión finita si y solo si el conjunto $S_X = \{x : \|x\| = 1\}$ es compacto, es decir, la esfera unitaria es compacta.*

De este último resultado surge la necesidad de buscar otras topologías que puedan hacer que los conjuntos cerrados y acotados sean compactos en esas topologías.

Proposición 1.5.2. *Sea X un conjunto no vacío. Sea $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ entonces el conjunto*

$$\mathscr{B} = \{\cap_{n=1}^{m} S_n : S_i \in \mathscr{S} \text{ para todo } i = 1, .., m \text{ y } m \in \mathbb{N}\}$$

forma una base para una topología en X. En este caso decimos que $\mathscr{S}$ es una subbase para una topología para X.

De la definición de base se sigue que $\tau_{\mathscr{B}} = \{U : U = \bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega \text{ con } \{B_\omega\}_{\omega\in\Omega} \subseteq \mathscr{B}\}$ es una topología en X. A $\tau_{\mathscr{B}}$ se le dice la topología generada por B. Si (X, τ) es un espacio topológico, decimos que $\mathscr{B}$ es una base para la topología τ, si y solo si $\tau_{\mathscr{B}} = \tau$.

Dado un conjunto X y dos topologías τ, τ_1 , decimos que τ es más débil que τ_1 si $\tau \subseteq \tau_1$.

Definición 1.5.3. *Sea X un conjunto tal que τ_1 y τ_2 son topologías en X. Decimos que τ_1 es más débil que τ_2 si y solo si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.*

Definición 1.5.4. *Sea X un espacio vectorial con una topología τ. Se dice que X es un espacio vectorial topológico si las operaciones de suma y multiplicación por escalar son continuas de $X \times X$ a X y de $\mathbb{F} \times X$ a X respectivamente.*

Un espacio normado es un espacio vectorial topológico, ya que la suma y la multiplicación por escalar son continuas con respecto a la norma. Otro resultado importante que nos ayudará a definir topologías más débiles en un espacio normado es el siguiente.

Proposición 1.5.5. *Sea X un espacio vectorial topológico y $\mathscr{F}$ una familia de funciones de X en $\mathbb{R}$. Entonces existe la topología más pequeña τ_1 tal que las hace continuas, es decir, si τ es una topología tal que para toda $f \in \mathscr{F}$, f es continua, entonces $\tau_1 \subseteq \tau$. Más aún τ_1 tiene como subbase a*

$$S = \{f^{-1}(U) : f \in \mathscr{F} \text{ y } U \subseteq \mathbb{R} \text{ es abierto } \}.$$

En el caso que $\mathscr{F}$ una familia de funciones continuas con respecto a la topología τ del espacio vectorial topológico entonces la topología τ_1 es más débil que τ.

1.5.1. Topología Débil y la propiedad de Schur

Definición 1.5.6. *Sea X un espacio normado. A la topología inducida por la familia X^* en X se le llama la topología débil.*[4]

Observación. En general dado un espacio normado X y X^n su n-ésimo dual de X, la topología débil en X^n es la inducida por X^{n+1}.

Definición 1.5.7. *Sea X espacio topológico. Decimos que X es completamente regular si para todo $x \in X$ y $A \subseteq X$ existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(a) = 1$ para toda $a \in A$.*

Teorema 1.5.8. *Sea X un espacio normado. Entonces la topología débil es una topología más débil que la topología de la norma. Además X es completamente regular y con la topología débil también es un espacio vectorial topológico.*

Demostración. Por un corolario de Hahn-Banach sabemos que dados $x \in X$ y $A \subseteq X$ existe $x^* \in X^*$ que los separa, y por los resultados de la sección anterior sabemos que es una topología más débil que la norma. □

Esta última proposición nos dice que la topología débil definida por las funcionales en un espacio hace que las operaciones continuas. Los siguientes resultados nos muestran que en cuestión de conjuntos acotados, la topología débil y la topología de la norma son iguales. Pero a la vez nos muestra que los abiertos de la topología débil no pueden ser acotados en norma.

Teorema 1.5.9. *Sea X un espacio normado. Entonces $A \subseteq X^*$ es acotado si y solo si A es débilmente acotado.*

Demostración. Supongamos que A es débilmente acotado y no vacío. Así

$$\sup\{|x^*x| : x^* \in A\}$$

es finito para cada $x \in X$. Por el teorema del acotamiento uniforme se tiene que $\sup\{\|x^*\| : x^* \in A\}$ es finito . La otra implicación es fácil ya que toda vecindad débil de 0 también está contenida en la topología de la norma □

[4] A partir de esta sección lo relacionado con la topología débil lo denotaremos ya sea por débil o débilmente.

Corolario 1.5.10. *Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces si $A \subseteq X^*$ es un abierto en la topología débil se tiene que es no acotado en la topología de la norma.*

Ahora vamos a definir como se define la convergencia con respecto a la topología débil.

Definición 1.5.11. *Sea X un espacio normado y $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una red en X. Diremos que x_α converge débilmente a x si para todo $x^* \in X^*$ se tiene que x^*x_α converge a x^*x.*

De la anterior definición veamos que se desprende el siguiente resultado.

Proposición 1.5.12. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces es acotado si y solo si $y^*T \in X^*$ para todo $y^* \in Y^*$.*

Teorema 1.5.13. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces es continuo norma-norma si y solo si es continuo débil-débil.*

Corolario 1.5.14. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal suprayectivo. Entonces T es un isomorfismo si y solo si es un isomorfismo débil-débil.*

Un teorema importante es el siguiente que nos habla de cómo es la topología débil, así como su corolario, y que nos muestra que la topología de débil también se relaciona con la convexidad.

Teorema 1.5.15. *Sean X espacio normado y $A \subseteq X$ un subconjunto convexo. Entonces la cerradura de A con respecto a la topología de la norma y la topología débil coinciden. En particular, un subespacio es cerrado si y solo si es débilmente cerrado.*

Demostración. Denotemos por $\overline{A}^w$ a la cerradura con respecto a la topología débil y $\overline{A}$ a la cerradura con respecto a la topología de la norma. Dado que la topología débil está contenida en la topología de la norma, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{A}^w$. Para ver la otra contención sea $x \notin \overline{A}$ entonces existe $x^* \in X^*$, tal que $x^*x = 1$ y $x^*(\overline{A}) = 0$. Tomemos una vecindad débil de x dada por $V = \{y \in X : |x^*(y - x)| < 1/2\}$; ésta es disjunta de $\overline{A}$, así $x \notin \overline{A}^w$. Por lo tanto $\overline{A}^w \subseteq \overline{A}$. Recordemos que todo subespacio es convexo de donde se sigue de lo anterior que es cerrado si y solo si es débilmente cerrado. $\square$

Corolario 1.5.16. *Sean X un espacio normado y $A \subseteq X$ un subespacio. Entonces la cerradura de A con respecto a la topología de la norma y la topología débil coinciden. En particular un subconjunto convexo es cerrado si y solo si es débilmente cerrado.*

Y por último enunciaremos una propiedad importante que poseen algunos espacios: la propiedad de Schur que nace a partir de la topología débil y su relación con la topología de la norma.

Definición 1.5.17. *Sea X un espacio normado. Diremos que X tiene la propiedad de Schur si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge débilmente a algún $x \in X$ se tiene que x_n converge a x en norma.*

Observación. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X un espacio normado tal que x_n converge a x en norma entonces es claro que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x.

Ejemplos. Veremos que ℓ^1 tiene la propiedad de Schur y que ℓ^2 no la tiene. Utilizaremos la siguiente notación:

1. Si $x \in \ell^1$ entonces lo denotaremos como $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$.

2. A una sucesión en ℓ^1 la denotaremos por $(x^n)_{n=1}^{\infty}$, donde cada $x^n = (x_i^n)_{i=1}^{\infty}$.

Proposición 1.5.18. *(Schur) Sea $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en ℓ^1. Si $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente de Cauchy entonces $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ converge en norma en ℓ^1. Por tanto ℓ^1 tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. Primero probaremos que si x^n converge 0 débilmente, entonces x^n converge a 0 en norma. Supongamos que x^n no converge en norma a 0, así para algún $\epsilon > 0$ existe una subsucesión de naturales creciente $n_1 < n_2 < \ldots$ tal que $\|x^{n_j}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{n_j}| > \epsilon$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Elegimos un natural N_1 tal que $\sum_{i=N_1+1}^{\infty} |x_i^{n_1}| < \frac{\epsilon}{5}$, esto es posible ya que $x^{n_1} \in \ell^1$.

Dado que $\|x^{n_1}\| > \epsilon$, se tiene que $\sum_{i=1}^{N_1} |x_i^{n_1}| \geq \frac{4\epsilon}{5}$. Recordemos que si $y \in \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{sgn}(y)y = |y|$. Así tenemos que $\sum_{i=1}^{N_1} e_i^{n_1} x_i^{n_1} \geq \frac{4\epsilon}{5}$, donde $e_i^{n_1} = \operatorname{sgn}(x_i^{n_1})$. Sea $(e_i = \pm 1)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de signos tal que $e_i = e_i^{n_1}$ si $1 \leq i \leq N_1$, así se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{\infty} e_i x_i^{n_1}\right| &= \left|\sum_{i=1}^{N_1} e_i^{n_1} x_i^{n_1} + \sum_{i=N_1+1}^{\infty} e_i x_i^{n_1}\right| \\
&\geq \left|\sum_{i=1}^{N_1} e_i^{n_1} x_i^{n_1}\right| - \sum_{i=N_1+1}^{\infty} |x_i^{n_1}| \geq \frac{4}{5}\epsilon - \frac{1}{5}\epsilon = \frac{3}{5}\epsilon.
\end{aligned}
$$

Ahora, sea n_{j_2} un entero tal que $\sum_{i=1}^{N_1} |x_i^{n_{j_2}}| < \frac{\epsilon}{5}$. Esto es posible ya que x_i^n converge a 0 cuando n tiende a ∞. Entonces, elegimos $N_2 > N_1$ tal que $\sum_{i=N_2+1}^{\infty} |x_i^{n_{j_2}}| \leq \frac{\epsilon}{5}$ y así $\sum_{i=1}^{N_2} |x_i^{n_{j_2}}| \geq \frac{4\epsilon}{5}$. Sea ahora $(e_i = \pm 1)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de signos tal que $e_i = e_i^{n_1}$ si $1 \leq i \leq N_1$ y $e_i = e_i^{n_2}$ si $N_1 < i \leq N_2$. De este modo

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{\infty} e_i x_i^{n_{j_2}}\right| &\geq \left|\sum_{i=N_1+1}^{N_2} e_i^{n_{j_2}} x_i^{n_{j_2}}\right| - \sum_{i=1}^{N_1} |x_i^{n_{j_2}}| - \sum_{i=N_2+1}^{\infty} |x_i^{n_{j_2}}| \\
&\geq \left|\sum_{i=N_1+1}^{N_2} e_i^{n_{j_2}} x_i^{n_{j_2}}\right| - \frac{2}{5}\epsilon = \sum_{i=1}^{N_2} |x_i^{n_{j_2}}| - \sum_{i=1}^{N_1} |x_i^{n_{j_2}}| - \frac{2}{5}\epsilon \\
&= \frac{4}{5}\epsilon - \frac{1}{5}\epsilon - \frac{2}{5}\epsilon = \frac{\epsilon}{5}.
\end{aligned}
$$

Al repetir este proceso, obtenemos un vector $u = (u_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ definido como $u_i = e_i^{n_k}$, si $N_{k-1} < i \leq N_k$. Más aún, tenemos que $u(x^{n_{j_k}}) \geq \frac{\epsilon}{5}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y como $(\ell^1)^* \cong \ell^{\infty}$, esto contradice que x^n converge a 0 débilmente. Por tanto x^n converge a 0 en norma.

Supongamos que $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión débilmente de Cauchy. Y pensemos que $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ no es de Cauchy en norma. Entonces existe $\epsilon > 0$ e índices n_j, m_j que tienden a ∞ tales que $\left\|x_{n_j} - x_{m_j}\right\| \geq \epsilon$. La sucesión $(x^{n_j} - x^{m_j})_{j=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero y por lo anterior $(x^{n_j} - x^{m_j})_{j=1}^{\infty}$ converge en norma a cero. Por tanto $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a la norma y como ℓ^1 es completo, entonces $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ converge. □

Proposición 1.5.19. *Ahora veamos que ℓ^2 no tiene la propiedad de Schur.*

Demostración. Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de vectores unitarios en ℓ^2 tal que $e_n = (b^i)_{i=1}^{\infty}$ donde $b^i = 1$ si $i = n$ y $b^i = 0$ cuando $i \neq n$. Primero notemos que $(\ell^2)^* \cong \ell^2$, y así para todo $x^* \in (\ell^2)^*$ existe $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ tal que $x^*x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ donde $x = (x^i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$. Sea $b = (b^i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |b^i|^2 < \infty$ y por tanto $\lim_{i\to\infty} b^i = 0$. Entonces, si $x^* \in (\ell^2)^*$ existe $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ tal que $x^*x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$, por lo que $x^*e_n = a_n$. Así $\lim_{n\to\infty} x^*e_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ para todo $x^* \in (\ell^2)^*$. Entonces e_n converge a 0 débilmente cuando n tiende a ∞, pero $\|e_n\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{R}$, así $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge en norma a 0. Por tanto, ℓ^2 no tiene la propiedad de Schur. $\square$

Se puede probar en general que los espacios reflexivos con la propiedad de Schur deben ser de dimensión finita esto se mostrará en la sección 1,7.

1.5.2. Topología Débil*

La topología débil definida en la sección anterior no es la única que se puede definir en un espacio normado, en este caso veremos otra topología y se hará un análisis análogo a la anterior sección.

Definición 1.5.20. *Sea X un espacio normado, $\mathscr{C}$ el mapeo canónico de X en X^{**}. A la topología inducida por la familia $\mathscr{C}(X)$ en X^* se le llama la topología débil* o débil estrella.*[5]

Observación. En general si X es un espacio normado y $X^{(n)}$ es su n-ésimo espacio dual de X, la topología débil estrella de $X^{(n)}$ es la topología inducida por la familia $\mathscr{C}_{X^{(n-1)}}(X^{(n-1)})$ por medio del mapeo canónico $\mathscr{C}_{X^{(n-1)}}$ de $X^{(n-1)}$ en $X^{(n+1)}$.

Teorema 1.5.21. *Sea X un espacio normado. Entonces la topología débil* de X^* es completamente regular, localmente convexa y es una topología más débil que la topología débil en X^*. Más aún las topologías débil* y débil coinciden si y solo si X es reflexivo.*

De la definición de la topología débil* se sigue fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 1.5.22. *Sea X un espacio normado. Entonces una funcional lineal ϕ en X^* es débil*-continua si y solo si es de la forma $\phi(x^*) = x^*x_0$ para algún $x_0 \in X$.*

Corolario 1.5.23. *Sea X un espacio de Banach. Si $A \subseteq X^*$ es débil*-compacto, entonces es acotado.*

[5]En lo que sigue al referirnos a alguna propiedad referente a esta topología lo haremos utilizando débil* como adjetivo

El siguiente teorema es uno de los principales resultados al estudiar las topologías débiles en espacios normados. Además de que nos permite dar una respuesta a la motivación con la que se comenzó a desarrollar las topologías débiles que es la compacidad de la bola unitaria.

Teorema 1.5.24. *(Teorema de Banach-Alaoglu) Sea X un espacio normado. Entonces B_{X^*} es débil*-compacta.*

Demostración. Sea $D_x = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$ para cada $x \in X$; por construcción cada D_x es compacto en $\mathbb{C}$. Sea $D = \prod_{x \in X} D_x$, por el teorema de Tychonov, D es compacto en la topología producto de $\prod_{x \in X} \mathbb{C}$. Veamos que B_{X^*} se puede encajar en D, para cada $x^* \in B_{X^*}$ sea $((\mathscr{C}x)x^*)_{x \in X} = (x^*x)_{x \in X} \in D$. Este mapeo es continuo e inyectivo, considerando que B_{X^*} tiene la topología débil*. Es claro que el inverso de este mapeo definido sobre la imagen es continuo, así solo resta ver que la imagen es cerrada en D. Sea $(x^*_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en X^* tal que $(x^*_\alpha x)$ converge a (λ_x), entonces definimos y^* como $y^*x = \lambda_x$. Por construcción y^* es un funcional continuo, así el mapeo que antes habíamos definido es cerrado y por tanto B_{X^*} es compacta con la topología débil* . $\square$

Corolario 1.5.25. *Sea X un espacio normado. Entonces todo subconjunto acotado de X^* es relativamente débil*-compacto. En particular todo subconjunto acotado de X^* y débil*-cerrado es débil*-compacto.*

Corolario 1.5.26. *Sea X un espacio de Banach. Entonces toda sucesión débil* de Cauchy (x^*_n) en X^* es débil* convergente.*

El siguiente resultado es un preámbulo al teorema de Banach-Mazur, que nos habla de que el espacio $C[0, 1]$ es universal en una cierta clase de espacios de Banach.

Corolario 1.5.27. *Sea X un espacio normado. Entonces existe un espacio Hausdorff compacto K de tal modo que X es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C(K)$. En particular si X es de Banach, ese subespacio es cerrado.*

Demostración. Sea $K = B_{X^*}$ con la topología heredada de la topología débil* en X^*. Sea $T : X \to C(K)$, dado por $(T(x))(x^*) = x^*x$. Recordemos que $\|x\| = \sup\{|x^*x| : x^* \in B_{X^*}\} = \sup\{|(T(x))(x^*)| : x^* \in B_{X^*}\} = \|Tx\|_\infty$. Con lo cuál se prueba que T es isométrico, además, por definición T es lineal. En particular si X es de Banach, entonces $T(X)$ debe ser de Banach, es decir, es cerrado. $\square$

El teorema de Banach-Mazur es una generalización del resultado anterior. Nos dice que si X es un espacio de Banach separable existe un encaje isométrico de X en $C[0,1]$, aunque este resultado es muy importante no daremos su prueba ya que no es el fin de este trabajo pero se puede encontrar su demostración en [1] (sección 1.4, p. 17).

Teorema 1.5.28. *(Teorema de Banach-Mazur) Sea X un espacio de Banach separable. Entonces existe un encaje isométrico de X en $C[0,1]$.*

1.5.3. Compacidad Débil

Esta sección nos servirá para establecer resultados importantes como el teorema de Eberlein-Şmulian, además de establecer condiciones necesarias y/o suficientes para que un conjunto sea débilmente compacto. Esta noción es importante para los operadores débilmente compactos y la propiedad de Dunford-Pettis que estableceremos en la siguiente sección.

Proposición 1.5.29. *Sea X un espacio normado, $\mathscr{C}$ el mapeo canónico de X en X^{**} y $A \subseteq X$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es débilmente compacto.*

2. *El conjunto $\mathscr{C}(A)$ es débil*-compacto.*

3. *El conjunto A es acotado y $\mathscr{C}(A)$ es débil*-cerrado.*

Demostración. Sabemos que el mapeo $\mathscr{C}$ es débil-débil* continuo de X en $\mathscr{C}(X)$, más aún es un homeomorfismo. Así la equivalencia de (1) y (2) ya está probada. Para la otra equivalencia notemos que el mapeo (C) es una isometría y por tanto $\mathscr{C}(A)$ es acotado si y solo si A es acotado, aplicando el teorema de Banach- Alaoglu, se tiene que $\mathscr{C}(A)$ es débil*-compacto . □

Proposición 1.5.30. *Sea X un espacio normado. Entonces X es reflexivo si y solo si su bola unitaria cerrada es débilmente compacta.*

Ahora probaremos dos resultados antes de probar el tema principal de esta sección que es el teorema de Eberlein-Şmulian.

Definición 1.5.31. *Sea X un espacio de Banach. Decimos que $B \subseteq X^*$ es total si dado $x \in X$ tal que $x^*x = 0$ para todo $x^* \in B$ se tiene que $x = 0$.*

Proposición 1.5.32. *Si X es un espacio de Banach separable entonces X^* tiene un conjunto numerable y total. Más aún existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ una sucesión densa en B_X tal que existe una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^* de modo que $x_n^* x_n = \|x_n\| = 1$, además $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es total y se tiene que $\|x\| = \sup_n |x_n^* x|$ para cada $x \in X$.*

Lema 1.5.33. *Sea X un espacio de Banach tal que X^* contiene un conjunto numerable y total. Entonces la topología débil en un conjunto débilmente compacto es metrizable.*

Demostración. Sea $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ el conjunto numerable y total en X^* de tal forma que $\|x_n^*\| = 1$. Definimos la métrica en X como $d(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n}$. Sea $A \subseteq X$ un conjunto débilmente compacto. Para cada $x^* \in X^*$ se tiene que $x^*(A)$ es compacto, y por lo tanto acotado, y por el teorema de acotamiento uniforme sabemos que A es acotado. Sea T el mapeo identidad de A con la topología débil en A con la topología heredada de X con la métrica que definimos. Por como hemos definido la métrica T es continuo , y dado que es una función inyectiva de un espacio compacto en un espacio Hausdorff se tiene que T es homeomorfismo □

Definición 1.5.34. *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{F}$ y $A \subseteq X$ un subconjunto. Definimos el conjunto $sp(A)$ como*

$$sp(A) := \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}, x_1, ..., x_n \in A \ y \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Es decir, son todas las combinaciones lineales de elementos de A. Este conjunto $sp(A)$ es llamado el subespacio generado por A.

Es claro de la definición que $sp(A)$ sí es un subespacio de X y en particular $A \subseteq sp(A)$.

Lema 1.5.35. *Sea X un espacio de Banach y $A \subseteq X$ un subconjunto relativamente débil-compacto. Entonces A es relativamente secuencialmente compacto en la topología débil.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión relativamente compacta en A con la topología débil. Sea $sp(a_n)$ el subespacio vectorial de todas las combinaciones lineales de los vectores $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Consideremos $B = \overline{sp(a_n)}$ donde la cerradura es con la topología de la norma. Por el teorema 1.5.15 tenemos que B también es débilmente cerrado. Así B es un espacio de Banach separable y además se tiene que $A \cap B$ es relativamente débilmente compacto en B. Del lema anterior tenemos que $A \cap B$ es metrizable con la topología débil, por tanto es relativamente secuencialmente compacto con la topología débil, así $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene un punto de acumulación con la topología débil en B. Entonces $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que converge a algún $x \in B$ con la topología débil en B, por tanto también con la topología débil en X. □

Teorema 1.5.36. *(Teorema de Eberlein-Şmulian) Sea X un espacio normado y $A \subseteq X$. Tomando en cuenta la topología débil en X los siguientes enunciados son equivalentes :*

1. *A es relativamente compacto.*
2. *A es relativamente secuencialmente compacto.*
3. *A es relativamente numerablemente compacto.*

Demostración. Del corolario anterior tenemos que (1) implica (2) y es claro que (2) implica (3). Así, basta ver que (3) implica (1). Sea A un subconjunto de X relativamente numerablemente compacto. Así para cada $x^* \in X^*$ se tiene que $x^*(A)$ es relativamente secuencialmente compacto en $\mathbb{R}$, por el teorema del acotamiento uniforme se tiene que A es acotado. Sea $\mathscr{C}$ el mapeo canónico de X en X^{**}. Dado que $\mathscr{C}(A)$ es acotado, entonces $\overline{\mathscr{C}(A)}^{w^*}$ es compacto de X^{**} . Basta ver que $\overline{\mathscr{C}(A)}^{w^*} \subseteq \mathscr{C}(X)$. Supongamos que $\overline{\mathscr{C}(A)}^{w^*} \subseteq \mathscr{C}(X)$ y tenemos también que $\mathscr{C}$ es un homeomorfismo entre X y $\mathscr{C}(X)$, donde X tiene la topología débil y $\mathscr{C}(X)$ la topología débil*. Entonces A está contenido en $\mathscr{C}^{-1}(\overline{\mathscr{C}(A)}^{w^*})$ que es débilmente compacto, por tanto A es relativamente compacto en la topología débil.

Así veamos que $\overline{\mathscr{C}(A)}^{w^*} \subseteq \mathscr{C}(X)$. Sea $x^{**} \in \overline{\mathscr{C}(A)}$. Escogemos a $x_1^* \in X^*$ con norma uno, entonces existe $a_1 \in A$ tal que $|(x^{**} - \mathscr{C}a_1)x_1^*| < 1$. El espacio F de todas las combinaciones lineales de x^{**} y $x^{**} - \mathscr{C}a_1$ es de dimensión finita. Entonces podemos encontrar una 1/4-red $\{x_1^{**}, ..., x_n^{**}\} \subseteq S_F$, es decir, para cada x^{**} existe un x_m^{**} tal que $\|x^{**} - x_m^{**}\| < 1/4$. Escogemos x_p^* de norma uno en X^* para $p = 1, ..., n$, tal que $x_p^{**}(x_p^*) > 3/4$. Entonces para cualquier $x^{**} \in F$ tenemos que

$$\max\{|x_p^{**}(x_m^*)| : 1 \leq m \leq n\} \geq (1/2) \left\|x_p^{**}\right\|.$$

Regresando a nuestra construcción, escogemos puntos $x_2^*, ..., x_{n(2)}^*$ de norma uno en X^* con $\max\{|y^{**}(x_m^*)| : 2 \leq m \leq n(2)\} \geq (1/2) \|y^{**}\|$ para todo y^{**} en $sp(x^{**} - \mathscr{C}a_1, x^{**})$. De nuevo usando el hecho que $x^{**} \in \overline{\mathscr{C}(A)}$ podemos encontrar un punto a_2 en A tal que $\max\{|(x^{**} - \mathscr{C}a_1)(x_m^*)| : 2 \leq m \leq n(2)\} < (1/2)$. Entonces tomamos $x_{n(2)+1}^*, ..., x_{n(3)}^*$ de norma uno en X^* tal que $\max\{|y^{**}(x_m^*)| : n(2) < m \leq n(3)\} \geq (1/2) \|y^{**}\|$ para todo y^{**} en $sp(x^{**} - \mathscr{C}a_1, x^{**}, x^{**} - \mathscr{C}a_2)$. Así sucesivamente, utilizando el hecho que $x^{**} \in \overline{\mathscr{C}(A)}$, podemos encontrar un punto a_3 en A $\max\{|(x^{**} - \mathscr{C}a_3)(x_m^*)| : 1 \leq m \leq n(3)\} < (1/3)$ y así continuamos.

Por hipótesis, existe un punto $x \in X$ que es punto de acumulación de $(a_n)_{n=1}^\infty$ en la topología débil de X. Dado que $\overline{sp}((a_n)_{n=1}^\infty)$ es cerrado en la topología débil, x está en $\overline{sp}((a_n)_{n=1}^\infty)$ y entonces $x^{**} - \mathscr{C}x$ está en $\overline{sp}(x^{**}, x^{**} - \mathscr{C}a_1, x^{**} - \mathscr{C}a_2, ...)$. Por construcción, para todo punto y^{**} en $sp(x^{**} - \mathscr{C}a_n) + sp(x^{**})$ se tiene que $\sup|y^{**}(x_m^*)| \geq (1/2) \|y^{**}\|$ y así se sigue que esta desigualdad se cumple para cualquier punto en la cerradura de este subespacio, en particular es cierto para $x^{**} - \mathscr{C}a_n$. Otra parte de la construcción es que $|(x^{**} - \mathscr{C}a_n)x_m^*| < 1/p$ para $n > n(p) > m$. Entonces $|(x^{**} - \mathscr{C}x)(x_m^*)| \leq |(x^{**} - \mathscr{C}a_n)(x_m^*)| + |(x_m^*)(a_n - x)| \leq (1 + p) + |(x_m^*)(a_n - x)|$ para todo $n > n(p) > m$. Dado que x es un punto de acumulación débil de a_n, dado x_m^* y un entero $N > m$ existe un elemento a_n tal que $|(x^{**} - \mathscr{C}a_n)(x_m^*)| + |(x_m^*)(a_n - x)| > 2/n$. Por tanto, se tiene que $(x^{**} - \mathscr{C}x)x_m^* = 0$ para toda m. Y como se menciona arriba, $\sup|(x^{**} - \mathscr{C}x)(x_m^*)| \geq (1/2) \|x^{**} - \mathscr{C}x\|$ y así $x^{**} = \mathscr{C}x$ con lo cual $\overline{\mathscr{C}(A)}^{w^*} \subseteq \mathscr{C}(X)$. □

El resultado de Eberlein-Şmulian es esencial en la teoría de espacios de Banach, ya que es ocupado para ver distintas equivalencias. En este caso nos ayudará en las equivalencias de la propiedad de Dunford-Pettis. Pero veamos que tiene muchas consecuencias las cuáles son fáciles de demostrar.

Corolario 1.5.37. *Sea X un espacio normado. Entonces X es reflexivo si y solo si toda sucesión acotada en X admite una subsucesión débilmente convergente .*

Corolario 1.5.38. *Sea X un espacio normado reflexivo. Entonces X es secuencialmente completo con la topología débil .*

Corolario 1.5.39. *Sea X un espacio normado reflexivo. Entonces X tiene la propiedad de Schur si y solo si es de dimensión finita.*

Demostración. Suponiendo que X es de dimensión infinita por 1.5.43 toda sucesión acotada tendría una subsucesión convergente, que implicaría que X tiene la propiedad de Heine-Borel, una contradicción, así X debe ser de dimensión finita. $\square$

1.6. Operadores Lineales

En esta sección veremos tres clases de operadores lineales que nos servirán para poder definir la propiedad de Dunford-Pettis. Las tres clases de operadores resultarán ser un tipo especial de operadores acotados, más aún cada una de las siguientes propiedades es más débil que la anterior. En este caso toda la siguiente sección se basa en los resultados previos en topologías débiles.

1.6.1. Operador Adjunto

La siguiente definición surge naturalmente en álgebra lineal pero en este caso hay que restringir el dominio del operador adjunto a las funcionales lineales acotadas.

Definición 1.6.1. *Sea $T \in B(X,Y)$, donde X y Y son espacios normados. El operador adjunto T^*, es el operador lineal de Y^* a X^* definido de la siguiente forma $T^*(y^*) = y^*T$, donde $y^* \in Y^*$.*

Proposición 1.6.2. *Sean X y Y espacios normados y $T \in B(X,Y)$. Entonces $T^* \in B(Y^*, X^*)$. Más aún $\|T\| = \|T^*\|$.*

Demostración. Sea $y^* \in Y^*$ así como $x \in X$. Por definición del adjunto tenemos que $(T^*(y^*))(x) = y^*(Tx)$, por lo que

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{|Tx| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\sup\{|y^*(Tx)| : \|y^*\| \leq 1\} : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|y^*(Tx)| : \|y^*\| \leq 1, \|x\| \leq 1\}.\end{aligned}$$

Y de forma análoga

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{|T^*(y^*)(x)| : \|y^*\| \leq 1, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T^*y^*\| : \|y^*\| \leq 1\} = \|T^*\|.\end{aligned}$$

Por tanto T^* es acotado y tiene la misma norma que T. $\square$

1.6.2. Operadores Compactos

En esta parte veremos una clase de operadores lineales y acotados que surge como generalización de los operadores con rango finito.

Definición 1.6.3. *Sean X y Y espacios de Banach. Un operador $T \in B(X,Y)$ es compacto, si dado $B \subseteq X$ acotado se tiene que $T(B)$ es relativamente compacto. Al conjunto de operadores compactos de X a Y lo denotaremos por $K(X,Y)$.*

Proposición 1.6.4. *Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal de rango finito. Entonces T es compacto si y solo si es acotado. En particular, toda funcional lineal de un espacio de Banach es compacta si es acotada.*

Proposición 1.6.5. *Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es compacto.*
2. *$T(B_X)$ es relativamente compacto en Y.*
3. *$T(B) \subseteq Y$ es totalmente acotado si $B \subseteq X$ es acotado*
4. *Toda sucesión acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tiene una subsucesión $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de tal forma que $(Tx_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ converge en Y.*

Demostración. Recordemos que en un espacio métrico un conjunto es totalmente acotado si y solo si es relativamente compacto; se puede ver en [8] (capítulo 8). □

Proposición 1.6.6. *Sean X, Y y Z espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,Z)$ operadores. Si S y T son compactos, entonces ST es compacto.*

Demostración. Como T y S son acotados mandan conjuntos acotados en conjuntos acotados, y además S y T son continuos, mandan conjuntos relativamente compactos en conjuntos relativamente compactos. Además de que un conjunto relativamente compacto es acotado, por lo que se sigue fácilmente de lo anterior □

Teorema 1.6.7. *Sea $T \in B(X,Y)$, donde X y Y son espacios de Banach. Entonces T es compacto si y solo si T^* es compacto.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Sean T compacto, $K = \overline{T(B_X)}$ y B un conjunto acotado en Y^*. Notemos que

$$|z^*y_1 - z^*y_2| \leq \|y_1 - y_2\| \sup\{\|y^*\| : y^* \in B\},$$

si $z^* \in B$ y $y_1, y_2 \in K$. Así podemos ver a B como subconjunto de $C(K)$, además por lo anterior es acotado y equicontinuo, y por el teorema de Arzela-Ascoli[6] se sigue que B es relativamente compacto. Sea $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ una sucesión en B, así tiene una subsucesión $(y_{n_j}^*)_{j=1}^\infty$ que es uniformemente de Cauchy en K, por lo que $(y_{n_j}^*T)_{j=1}^\infty$ es uniformemente de Cauchy en B_X. Dado que X^* es completo, $(y_{n_j}^*T)$ converge , y dado que $(y_{n_j}^*T) = (T^*y_{n_j}^*)$, se sigue de 1.6.5 que T^* es compacto

$\Leftarrow$] Supongamos que T^* es compacto. Por la parte anterior T^{**} es compacto. Además es fácil ver que $T^{**} = Q_Y^{-1}TQ_X$, donde Q_Y y Q_X son los mapeos canónicos de Y y X respectivamente. Así por 1.6.6 T es compacto □

Teorema 1.6.8. *Sea $T \in B(X,Y)$, donde X y Y son espacios de Banach. Entonces T es compacto si T^* es débil*-norma continuo.*

Ahora veamos el siguiente tipo de operadores.

Definición 1.6.9. *Sean X y Y espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Se dice que T es un operador completamente continuo si $T(K) \subseteq Y$ es compacto para cada $K \subseteq X$ débilmente compacto.*

Proposición 1.6.10. *Todo operador compacto de un espacio de Banach X a un espacio de Banach Y es completamente continuo.*

Demostración. Sea $T \in K(X,Y)$ y $K \subseteq X$ débilmente compacto, así K es acotado. Por lo que $T(K)$ es relativamente compacto y también es débilmente compacto porque T es débil-débil continuo. De donde se sigue que $T(K)$ es compacto. □

Proposición 1.6.11. *Todo operador completamente continuo de un espacio de Banach X a un espacio de Banach Y es acotado.*

Otra forma de definir que un operador es completamente continuo es usando la siguiente equivalencia

Proposición 1.6.12. *Sea $T \in B(X,Y)$, donde X y Y son espacios de Banach. Entonces T es completamente continuo si y solo si es débil-norma secuencialmente continuo.*

[6] Una demostración de este teorema se puede ver en [8] (capítulo 19, p. 181).

Demostración. $\Rightarrow$] De la definición se sigue que si T es completamente continuo, entonces es débil-débil continuo, y dado que una sucesión débilmente convergente $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ con su límite, forman un conjunto débilmente compacto, así $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ con su límite es compacto.

$\Leftarrow$] Solo es necesario recordar que los conjuntos son débilmente compactos si y solo si son débil secuencialmente compactos. □

Proposición 1.6.13. *Sea $T \in B(X,Y)$, donde X es un espacio de Banach reflexivo y Y es un espacio de Banach. Entonces T es completamente continuo si y solo si es compacto.*

Demostración. Dado 1.6.10 basta demostrar que si T es completamente continuo también es compacto. Pero B_X es débilmente compacta dado que X es reflexivo, con lo que $T(B_X)$ es compacto en Y. □

1.6.3. Operadores Débilmente Compactos

Definición 1.6.14. *Sean X y Y espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Se dice que es un operador débilmente compacto si $T(K) \subseteq Y$ es relativamente débilmente compacto para cada $K \subseteq X$ acotado. A la colección de operadores débilmente compactos de X en Y la denotaremos por $K^w(X,Y)$*

Proposición 1.6.15. *Todo operador compacto de un espacio de Banach en otro es débilmente compacto.*

Proposición 1.6.16. *Todo operador débilmente compacto de un espacio de Banach en otro es acotado.*

Observación. Las tres propiedades arriba mencionadas son esencialmente distintas, dado que el operador identidad en ℓ^1 es acotado, pero no débilmente compacto, ya que no es reflexivo. Y como ℓ^2 es reflexivo el operador identidad en ℓ^2 es débilmente compacto, pero no es compacto ya que B_{ℓ^2} no es compacta con la topología de la norma.

Así podemos señalar que $K(X,Y) \subseteq K^w(X,Y) \subseteq B(X,Y)$, si X y Y son espacios de Banach.

Proposición 1.6.17. *Sean X y Y espacios de Banach. Si X es reflexivo o Y lo es, entonces todo operador lineal acotado de X en Y es débilmente compacto.*

Demostración. Recordemos que todo subconjunto acotado en un espacio reflexivo es débilmente compacto, además un operador acotado es débil-débil continuo. □

Usando el teorema de Eberlein-Şmulian se sigue fácilmente la siguiente proposición.

Proposición 1.6.18. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es débilmente compacto.*
2. *$T(B_X)$ es relativamente débil compacto en Y.*
3. *Toda sucesión acotada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tiene una subsucesión $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de tal forma que $(Tx_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ converge débilmente en Y.*

Teorema 1.6.19. *Sean X y Y espacios de Banach, $T \in B(X,Y)$ y $\mathscr{C}_Y$ el mapeo canónico de Y en Y^{**}. Entonces T es débilmente compacto si y solo si $T^{**}(X^{**}) \subseteq \mathscr{C}_Y(Y)$.*

Proposición 1.6.20. *Sean X,Y y Z espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,Z)$ operadores. Si S es débilmente compacto o T es débilmente compacto, entonces ST es débilmente compacto.*

Teorema 1.6.21. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$. Entonces T es débilmente compacto si y solo si T^* es débilmente compacto.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que T es débilmente compacto. Sea $y^{***} \in Y^{***}$, por el teorema 1.6.19 para ver que T^* es débilmente compacto basta verificar que $T^{***}y^{***} \in \mathscr{C}_{X^*}(X^*)$. Así es suficiente ver que $T^{***}y^{***}$ es débil*-continuo en X^{**}. Sea (x_α^{**}) una red convergente en X^{**}, denotemos por x^{**} su límite. Así $T^{**}x_\alpha^{**} \to T^{**}x^{**}$ en la topología débil*. Dado que $T^{**}(X^{**}) \subseteq \mathscr{C}_Y(Y)$ por 1.6.19, dado que la topología débil y débil* coinciden en $\mathscr{C}_Y(Y)$ como subespacio de Y^{**}, se sigue que $T^{**}x_\alpha^{**} \to T^{**}x^{**}$ en la topología débil. Más aún

$$T^{***}y^{***}x_\alpha^{**} = y^{***}T^{**}x_\alpha^{**} \to y^{***}T^{**}x^{**} = T^{***}y^{***}x^{**},$$

como se quería ver.

$\Leftarrow$] Supongamos que T^* es débilmente compacto, por lo anterior T^{**} es débilmente compacto pero dado que $T = Q_Y^{-1} T^{**} Q_X$ y por 1.6.20, se sigue que T es débilmente compacto. □

Teorema 1.6.22. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X, Y)$. Entonces T es débilmente compacto si T^* es débil*-débil continuo.*

1.7. Propiedad de Dunford-Pettis

En esta sección daremos la definición de la propiedad de Dunford-Pettis, así como resultados básicos de esta propiedad que utilizaremos más adelante en el capítulo 3. Así, esta sección es muy importante para el objetivo de este trabajo. La propiedad de Dunford-Pettis se estableció en un artículo que escribieron Nelson Dunford y Bill Pettis, que lleva por nombre *Linear Operations on Summable Functions* (ver [17]). En este artículo ellos probaron que el espacio $L_1(\mu)$ para toda medida μ en cualquier espacio de Banach, tiene la propiedad de Dunford-Pettis, es decir, que todo operador débilmente compacto es completamente continuo.

Fue Grothendieck en su famoso artículo *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$*(ver [22] , p. 11), donde define esta propiedad en general así como sus primeras consecuencias. Además de esta propiedad en este artículo, de más de 50 páginas, define muchas propiedades que hoy en día son utilizadas en el estudio de los espacios de Banach.

Definición 1.7.1. *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Dunford-Pettis (PDP) si para cada espacio de Banach Y, todo operador $T \in B(X, Y)$ débilmente compacto, es completamente continuo.*

Ejemplo. Dado que ℓ^1 tienen la propiedad de Schur, se sigue fácilmente que todo operador en $B(\ell^1, Y)$ es completamente continuo de donde se sigue que ℓ^1 tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

El ejemplo anterior nos da un resultado más general que solo depende de la propiedad de Schur.

Proposición 1.7.2. *Sea X un espacio normado con la propiedad de Schur. Entonces X tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Para terminar esta sección presentamos un resultado importante que establece equivalencias para tener la propiedad de Dunford-Pettis.

Teorema 1.7.3. *Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

2. *Todo operador débilmente compacto de X en c_0 es completamente continuo*

3. *Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que converge débilmente a algún $x \in X$ y toda sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^* que converge débilmente a algún $x^* \in X^*$ se tiene que $(x_n^* x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $x^* x$.*

4. *Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que converge débilmente a $0 \in X$ y toda sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^* que converge débilmente a $0 \in X^*$ se tiene que $(x_n^* x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.*

Demostración. $2 \Rightarrow 4$] Supongamos que (4) no se cumple. Entonces existen sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ que convergen débilmente a 0 en X y X^* respectivamente, de tal modo que $|x_n^* x_n| \geq \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ y toda $n \in \mathbb{N}$. Definamos $T : X \to c_0$ como sigue $Tx = (x_n^* x)$. Así $T \in B(X, c_0)$, pero no es completamente continuo ya que $\|Tx_m\| \geq \epsilon$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Queremos probar que T es débilmente compacto, así sea $(w_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X. Por 1.6.18 basta ver que existe una subsucesión de $(Tw_m)_{m=1}^{\infty}$ que converja débilmente. Sea $\mathscr{C}_X$ el mapeo canónico, sea x^{**} un punto de acumulación de $\mathscr{C}_X w_m$, existe una subsucesión $(w_{m_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(w_m)_{m=1}^{\infty}$ que cumple $|\mathscr{C}_X w_{m_j} x_k^* - x^{**} x_k^*| = |x_k^* w_{m_j} - x^{**} x_k^*| < j^{-1}$ para $k = 1, ..., j$. Así $(x^{**} x_n^*) \in c_0$, así basta ver que (Tw_{m_j}) converge a $(x^{**} x_n^*)$ débilmente. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$, veamos que $x_{n_0}^* w_{m_j}$ converge a $x^{**} x_{n_0}^*$, pero así construimos (w_{m_j}), así T es débilmente compacto.

$4 \Rightarrow 3$] Supongamos que se cumple (4). Sea (x_n) en X una sucesión que converge débilmente a algún $x \in X$ y $(x_n^*) \subseteq X^*$ sucesión que converge débilmente a algún x^* en X^*. Así

$$x_n^* x_n - x^* x = (x_n^* - x^*)(x_n - x) + x_n^* x + x^* x_n - 2x^* x \text{ converge a}$$
$$0 + x^* x + x^* x - 2x^* x = 0.$$

$3 \Rightarrow 1$] Supongamos que (1) no se cumple. Es decir, existe T un operador débilmente compacto que no es completamente continuo. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que converge débilmente a 0 y también $\|Tx_n\| \geq \delta$, para algún $\delta > 0$ y toda n. Para cada n sea $y_n^* \in S_{Y^*}$ tal que $y_n^* Tx_n = \|Tx_n\|$. Sabemos por 1.6.19 que T^* es débilmente compacto, así $T^* y_n^*$ tiene una subsucesión débilmente convergente. Sea $(T^* y_{n_j}^*)$ subsucesión que converge débilmente a $z^* \in X^*$. Así $T^* y_{n_j}^*(x_{n_j}) = y_{n_j}^* Tx_{n_j} \geq \delta$ para cada j, así $T^* y_{n_j}^*(x_{n_j})$ no converge débilmente a 0 aún cuando (x_n) converge a 0 débilmente y $(T^* y_{n_j}^*)$ converge a z^* débilmente. Así no se cumple (3).

$1 \Rightarrow 2$] Esta implicación solo es aplicar la definición a c_0. □

Corolario 1.7.4. *Sea X un espacio de Banach. Si X^* tiene la propiedad de Dunford-Pettis entonces X tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Demostración. Utilizaremos la última equivalencia del teorema anterior. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge débilmente a 0 y una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^* que converge débilmente a $0 \in X^*$. Entonces tomando el mapeo canónico $\mathscr{C}$, se tiene que $\mathscr{C}x_n \in X^{**}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que además $(\mathscr{C}x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ que converge débilmente a $0 \in X^{**}$. Así dado que X^* tiene la propiedad de Dunford-Pettis se tiene que $(\mathscr{C}x_n x_n^*)_{n=1}^{\infty} = (x_n^* x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. □

El recíproco de este resultado es falso, como se puede ver en [30]. En este se muestra un espacio de Banach X con la propiedad de Schur y por tanto tiene la propiedad de Dunford-Pettis pero que X^* no tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Veremos el resultado más a detalle en esta misma sección.

Proposición 1.7.5. *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Dunford-Pettis. Si $T : X \to X$ es débilmente compacto entonces $T^2 : X \to X$ es compacto.*

Demostración. Dado que T es débilmente compacto entonces $T(B_X)$ es relativamente débilmente compacto. Y dado que X tiene la propiedad de Dunford-Pettis, T^2 es completamente continuo, y así $T^2(B_X)$ es relativamente compacto con respecto a la topología de la norma. □

Definición 1.7.6. *Sea X un espacio normado y $M \subseteq X$ un subespacio. Decimos que M es un subespacio complementado si existe un subespacio $N \subseteq X$ tal que para todo $x \in X$ existen de forma única $m \in M$ y $n \in N$ tal que $n + m = x$.*

Definición 1.7.7. *Sea X un espacio normado y $M \subseteq X$ un subespacio complementado. Definimos $P_M : X \to X$ la proyección sobre M dada por $Px = m$, donde x se escribe como $x = m + n$ de forma única.*

Observación.

1. Para todo subespacio complementado P_M es una función bien definida y lineal.
2. $P_M P_M = P_M^2 = P_M$, es decir, es la identidad en M.
3. El núcleo de P_M es N y el rango de P_M es M.

Proposición 1.7.8. *Sea X un espacio de Banach y $M \subseteq X$ un subespacio complementado. Entonces la proyección $P_M : X \to X$ es continua.*

Proposición 1.7.9. *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Dunford-Pettis. Si Y es un subespacio complementado y reflexivo de X, entonces Y es de dimensión finita.*

Demostración. Sea $P_Y : X \to X$ la proyección sobre Y, entonces P_Y es débilmente compacto, más aún $P_Y(B_X) = B_Y$ es débilmente compacto dado que Y es reflexivo por el teorema de Banach-Alaoglu. Entonces $P_Y^2 = P^2$ es compacto. Por tanto B_Y es compacto con la topología de la norma y entonces Y debe ser de dimensión finita. □

Corolario 1.7.10. *Todo espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Por 1.4.16, ℓ^2 es un cociente de ℓ^1 y por el corolario anterior ℓ^2 no tiene la propiedad de Dunford-Pettis, pero por la proposición 1.7.2 ℓ^1 sí tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Por tanto la propiedad no se hereda a cocientes.

Veamos que el recíproco del corolario 1.7.4 es falso.

Definición 1.7.11. *Sean X y Y espacios de Banach y $R : X \to Y$ un operador continuo. Decimos que R admite selecciones de aproximación local si existe $M \geq 1$ tal que si Z es un espacio de Banach de dimensión finita y S es un operador continuo con $S : Z \to Y$ entonces para toda $\epsilon > 0$, existe $\hat{S} : Z \to X$, con $\left\|\hat{S}\right\| \leq M \|S\|$, tal que $\left\|R\hat{S} - S\right\| < \epsilon$.*

La siguiente proposición nos dice una equivalencia de la definición anterior, este resultado lo usaremos para ver que el recíproco de 1.7.4 es falso. La demostración de esta proposición se puede ver en [31].

Proposición 1.7.12. *Sean X y Y espacios de Banach y $R : X \to Y$ un operador continuo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *R admite selecciones de aproximación local.*

2. *R es sobre y $R^*(Y^*)$ es complementado en X^*.*

Ejemplo. Sea $X := \ell^1(\ell^2_n)$. Recordemos que ℓ^2_n es el espacio de las n-adas con la norma 2, este es un espacio de Banach con la propiedad de Dunford-Pettis, dado que la topología débil y la de la norma coinciden. Así $X = \{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \ell^2_n, \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_2 < \infty\}$. Dado que ℓ^1 tiene la propiedad de Dunford-Pettis, se puede ver que el dual de X es $\ell^\infty(\ell^2_n)$. Sea $T : X \to \ell^2$ definido como $T((x_n)_{n=1}^\infty) = T((\sum_{i=1}^n r_{n,i})_{n=1}^\infty) = (\sum_{n=1}^\infty r_{n,i})_{i=1}^\infty$ para $x_n = \sum_{i=1}^n r_{n,i}$. Este operador además de ser lineal y continuo, por como hemos definido la norma en X, admite secciones locales, así ℓ^2 es complementado en X^*. Si X^* tuviera la propiedad de Dunford-Pettis, entonces la proyección sobre ℓ^2 sería débilmente compacta, tomando el operador adjunto. Pero por lo tanto $P^2 = P$ sería un operador compacto, entonces ℓ^2 debe ser de dimensión finita ya que es reflexivo, lo cuál es absurdo. Por tanto X^* no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

Ya vimos que el recíproco de 1.7.4 es falso, pero los siguientes dos resultados nos muestran qué se necesita para que se cumpla la otra implicación. Empezaremos enunciando una equivalencia de que un espacio de Banach tenga una copia de ℓ^1; este resultado se debe a Rosenthal (ver [27]). Nosotros enunciaremos solo una equivalencia que nos permita probar el recíproco de 1.7.4.

Teorema 1.7.13. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X no contiene una copia de ℓ^1.*

2. *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión débilmente de Cauchy.*

Teorema 1.7.14. *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Dunford-Pettis que no contiene una copia de ℓ^1. Entonces X^* tiene la propiedad de Schur, y por tanto también la propiedad de Dunford-Pettis.*

Demostración. Supongamos que X^* no tiene la propiedad de Schur. Existe una sucesión $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ de elementos de norma uno en X^* que converge débilmente a cero.

Sea $x_n \in X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y además $x_n^* x_n > 1/2$. Por el teorema de Rosenthal existe una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ débilmente de Cauchy. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que la subsucesión es la misma sucesión. Entonces tenemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente de Cauchy y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión débilmente convergente a 0 y además $x_n^* x_n > 1/2$. Esto implica que X no tiene la propiedad de Dunford-Pettis, pero esto contradice las hipótesis. Por tanto X^* tiene la propiedad de Schur. $\square$

El recíproco del resultado anterior también se cumple.

Teorema 1.7.15. *Sea X un espacio de Banach tal qqe X^* tiene la propiedad de Schur. Entonces X tiene la propiedad de Dunford-Pettis y no contiene una copia de ℓ^1 .*

Y finalmente veamos algunos ejemplos de espacios que tienen la propiedad de Dunford-Pettis. Utilizaremos varios resultados de teoría de la medida como el teorema de Egorov o el de Lusin. Para ver estos resultados se puede ver el apéndice al final de este trabajo donde hacemos mención de ellos.

Teorema 1.7.16. *Sea K un espacio compacto y Hausdorff. Entonces $C(K)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Demostración. Supongamos que f_n converge a 0 débilmente en $C(K)$ y que μ_n converge a 0 débilmente en $C(K)^*$. Sea

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_n|}{2^n \|\mu_n\|},$$

donde $\|\mu_n\| = |\mu_n|(K)$. Entonces $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ es absolutamente convergente con respecto a λ. Así dado $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|\mu_n|(A) < \epsilon$, para toda n, cuando $\lambda(A) < \delta$.

Dado que f_n converge a 0 puntualmente en K, entonces por el teorema de Egorov, f_n converge a 0 uniformemente en algún conjunto K/A con $\lambda(A) < \delta$. Entonces tenemos que

$$\mu_n(f_n) = \int_K f_n d\mu_n = \int_{K/A} f_n d\mu_n + \int_A f_n d\mu_n$$

y $\int_{K/A} f_n d\mu_n$ converge a 0 cuando n tiende a∞ dado que f_n converge a 0 uniforme en K/A. Finalmente

$$\left|\int_A f_n d\mu_n\right| \leq \|f_n\|_\infty |\mu_n|(A) \leq \epsilon \sup_k \|f_k\|_\infty$$

dado que $\lambda(a) < \delta$. Por tanto $\mu_n(f_n)$ converge 0. $\square$

Corolario 1.7.17. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita, separable y reflexivo. Entonces X es isométricamente isomorfo a un espacio no complementado de $C[0,1]$*

Veamos que $L_1[0,1]$ también tiene la propiedad de Dunford-Pettis pero antes debemos ver el siguiente resultado. En este caso para abreviar la notación denotamos por L_P al espacio $L_P[0,1]$ a menos que se especifique lo contrario.

Proposición 1.7.18. *Supongamos que g_n converge a 0 débilmente en L_∞, entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto boreliano $A \subseteq [0,1]$ con $m(A) > 1 - \epsilon$ tal que g_n converge a 0 uniforme en A.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ aplicamos el teorema de Lusin de manera inductiva y así podemos encontrar un conjunto boreliano B con $m(B) > 1 - \epsilon/2$ y una sucesión de funciones $\overline{g}_n$ todas continuas en B tal que $g_n = \overline{g}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ en todo B salvo en un conjunto de medida cero. Más aún, por el teorema de densidad de Lebesgue, podemos asumir que para cada punto $x \in B$ tiene densidad 1, es decir,

$$\text{lím}_{r\to 0} \tfrac{m((x-r,x+r)\cap B)}{2r} = 1$$

para cada B. En particular B no tiene puntos aislados. Se sigue que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{g}_k(x)\right| \leq ess. \sup_{x\in B}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k g_k\right| \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k g_k(x)\right\|_\infty$$

para toda sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty$ de escalares y $x \in B$. Por tanto el mapeo definido por $g_n \to \overline{g}_n$ se puede extender a una funcional lineal acotada en $sp((g_n)_{n=1}^\infty)$. Pero entonces, dado que $(g_n)_{n=1}^\infty$ converge débilmente a 0, entonces $\overline{g}_n(x)$ converge a 0 para todo $x \in B$. Finalmente por el teorema de Egorov, existe un conjunto $A \subseteq B$

boreliano tal que $m(A) > 1 - \epsilon$ de tal forma que g_n converge a 0 uniformemente en A. $\square$

Corolario 1.7.19. *L_1 tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Demostración. Sea f_n converge a 0 en L_1 débilmente y g_n converge a 0 débilmente en L_∞. Entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable en L_1, es decir, dada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $\int_B |f_n| < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$, sabiendo que $m(B) < \delta$. Por la proposición anterior, existe un conjunto A, con $m(A) > 1 - \delta$ tal que g_n converge a 0 en A uniformemente. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f_n g_n\right| &\leq \int_{A^c} f_n g_n + \int_A f_n g_n \\ &\leq \epsilon \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_\infty + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n \chi_A\|_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 ,\end{aligned}$$

y la última suma tiende a 0 cuando n tiende ∞. $\square$

Corolario 1.7.20. *Todo subespacio complementado de dimensión infinita de L_1 es no reflexivo.*

Capítulo 2

Bases en espacios de Banach

En este capítulo introduciremos el concepto de base de Schauder, que fue introducido por el matemático alemán J. Schauder en 1927. Este concepto es una generalización de las bases (de Hamel) que se estudian en espacios vectoriales. En este capítulo hablaremos de sus propiedades así como distintas clases de base de Schauder para un espacio de Banach; en este capítulo seguiremos los libros de Megginson ([23]), Carothers ([7]), Fabian ([20]) y Albiac ([1]).

2.1. Bases de Schauder y sucesiones básicas

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para X si para todo $x \in X$ existe una sucesión única de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{F}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.*

Observación.

1. Dado un espacio de Banach X y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de Schauder se tiene que $sp((x_n)_{n=1}^{\infty})$ es denso en X.

2. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder entonces es linealmente independiente.

3. Si X es un espacio de Banach real y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de Schauder el conjunto $A = \{\sum_{n=1}^{m} a_n x_n : m \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Q}\}$ es denso en X y por tanto separable.

Ejemplo. Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión en ℓ^p con $1 \leq p < \infty$ o c_0 dada por

$$e_n^k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = n \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para ℓ^p donde $1 \leq p < \infty$ y para c_0. Dado que ℓ^{∞} no es separable y es un espacio de Banach real entonces no tiene base de Schauder. Esta base es la llamada la base canónica de ℓ^p y c_0.

Definición 2.1.2. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica si es una base de Schauder para $\overline{sp((x_n)_{n=1}^{\infty})}$.*

Recordemos que cuando hablamos de que un espacio normado X es de dimensión infinita es que su base de Hamel es infinita. Veamos que para un espacio de Banach X de dimensión infinita podemos decir que una base de Hamel es no numerable pero antes enunciaremos un resultado para probar nuestra afirmación.

Teorema 2.1.3. *(Categoría de Baire) Sea X un espacio métrico completo. Entonces en X se cumplen las siguientes afirmaciones*

1. *Sea $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ subconjuntos abiertos y densos en X. Entonces $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso en X.*
2. *Si $U \subseteq X$ es abierto en X entonces U no es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [25] (sección 48, p. 296).

Teorema 2.1.4. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y A una base de Hamel para X. Entonces A es no numerable*

Demostración. Supongamos que A es numerable, es decir, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos el subespacio $X_m = sp((x_n)_{n=1}^{m})$, como X_m es de dimensión finita es cerrado en X, más aún tiene interior vacío, por lo que son conjuntos densos en ninguna parte. Además como $X = sp((x_n)_{n=1}^{\infty})$, entonces $X = \cup_{m=1}^{\infty} X_m$, es decir, es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Pero esto contradice el teorema de Baire dado que X es espacio métrico completo, por tanto A es no numerable . $\square$

Con este teorema podemos ver que las bases de Schauder y las bases de Hamel son esencialmente diferentes en espacios de dimensión infinita. Así en lo subsecuente si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para X solo diremos que es $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es base para X.

Proposición 2.1.5. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares distintos de cero. Entonces $(\lambda_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ también es una base para X.*

Definición 2.1.6. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X. Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$. En particular si cada x_n tiene norma 1 diremos que la base está normalizada.*

El siguiente resultado muestra cómo podemos construir una base de Schauder en un espacio de Banach isomorfo a otro espacio de Banach que sí posee una.

Proposición 2.1.7. *Sean X y Y espacios de Banach, $T \in B(X, Y)$ un isomorfismo y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X. Entonces $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en Y. En particular si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X entonces $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para Y.*

Demostración. T mapea $\overline{sp((x_n)_{n=1}^{\infty})}$ en $\overline{sp((Tx_n)_{n=1}^{\infty})}$ dado que es un isomorfismo. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X y $T(X) = Y$, dado que $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} T a_n x_n$ para toda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ se sigue que $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para Y. □

Las bases en espacios de Banach definen operadores lineales continuos y funcionales, además que estos operadores cumplen propiedades que veremos en los siguientes resultados.

Definición 2.1.8. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X. Definimos las proyecciones canónicas $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ asociadas a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ como sigue dado $x \in X$ entonces $P_n x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ donde $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$.*

Definición 2.1.9. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X. Definimos las funcionales coordenadas $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ asociadas a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ como sii¿gue: dado $x \in X$ entonces $x_n^* x = a_n$ donde $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Además diremos que la sucesión $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es biortogonal.*

Lema 2.1.10. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X. Las proyecciones canónicas cumplen lo siguiente*

1. *$dim(P_n(X)) = n$,*
2. *$P_nP_m = P_mP_n = P_{\min\{n,m\}}$,*
3. *$P_n(x) \to x$ cuando n tiende a ∞ para todo $x \in X$.*

Más aún, si $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ son proyecciones lineales acotadas en X que satisfacen las tres condiciones anteriores, entonces $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ son proyecciones canónicas asociadas a alguna base de Schauder de X.

Demostración. La primera parte de la prueba se sigue de la definición de las proyecciones y de la definición de Base de Schauder.

Probaremos la segunda parte. Sean $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ proyecciones lineales acotadas en X que satisfacen las tres condiciones. Definimos $P_0 = 0$, es decir, el operador trivial y elegimos $x_i \in P_i(X) \cap \operatorname{Ker}(P_{i-1})$ para toda $i \in \mathbb{N}$, con $x \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) &= \lim_{n\to\infty} P_n(x) - P_0(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (P_i(x) - P_{i-1}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (P_i(x) - P_{i-1}(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \end{aligned}$$

donde los a_i son escalares dado que $\dim(P_n(X)/P_{n-1}(X)) = 1$, para toda $i \in \mathbb{N}$.

La unicidad de los $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ se sigue del hecho que si $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$, entonces por la continuidad de P_n tenemos que $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$, y por tanto $b_i x_i = P_i(x) - P_{i-1}(x) = a_i x_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para X y las $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ son proyecciones lineales asociadas a ésta. □

Teorema 2.1.11. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X. Entonces las proyecciones canónicas $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ son continuas. Más aún $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$.*

Demostración. Dado $x \in X$ definimos la norma $|||x||| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|$. Dado que $P_n x$ converge a x se tiene que $|||x||| < \infty$ para todo $x \in X$. Es fácil ver que $|||\ |||$ define una norma en X.

Veamos que las proyecciones $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ están uniformemente acotadas. Primero notemos que la identidad $id : (X, ||| \, |||) \to (X, \| \, \|)$ es continua dado que $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n x\| \leq |||x|||$. Es claro que la identidad es inyectiva así para que id sea un isomorfismo basta ver que $(X, ||| \, |||)$ es un espacio de Banach, por el corolario 1.2.6.

Sea $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(X, ||| \, |||)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $(P_n y_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \| \, \|)$. Más aún $\|P_n y_i - P_n y_j\| \leq |||y_i - y_j|||$ para todo n, con lo cuál $(P_n y_k)_{k=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy uniformemente en n. Sea $z_n = \lim_{n\to\infty} P_n y_k$ en $(X, \| \, \|)$, así $\|P_n y_k - z_n\|$ converge a 0 cuando k tiende a ∞ uniformemente en n. Con lo cuál se sigue que z_n es una sucesión de Cauchy en $(X, \| \, \|)$, ya que

$$\|z_n - z_m\| \leq \|z_n - P_n y_k\| + \|P_n y_k - P_m y_k\| + \|P_m y_k - z_k\|.$$

Ahora sea $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ en $(X, \| \, \|)$. Veamos que $\lim_{k\to\infty} y_k = z$ en la norma $||| \, |||$. Primero notemos que $\lim_{n\to\infty} P_n z = z_n$, ya que P_n es continuo en $P_m(X)$ dado que es un espacio de dimensión finita y además

$$P_n(z_m) = P_n(\lim_{k\to\infty} P_m y_k) = \lim_{k\to\infty} P_n P_m y_k = \lim_{k\to\infty} P_{\min\{n,m\}} y_k = z_{\min\{n,m\}}.$$

Por lo que existe una única sucesión de escalares tal que $z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ y así $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ y más aún $P_n z = z_n$. Finalmente

$$|||y_k - z||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n y_k - z_k\| \text{ converge a 0 cuando } k \text{ tiende a } \infty.$$

Por tanto $(X, ||| \, |||)$ es un espacio de Banach y por el corolario 1.2.9 existe el inverso de $id : (X, ||| \, |||) \to (X, \| \, \|)$ y es continuo, con lo que existe K tal que $|||x||| \leq K \|x\|$ para todo $x \in X$, con lo que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| \leq K$. □

Corolario 2.1.12. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X. Entonces las funcionales coordenadas $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ son continuas.*

Definición 2.1.13. *Sea X espacio de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X y $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ las proyecciones canónicas asociadas a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Definimos la constante básica $K := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|$ de la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Si $K = 1$ decimos que la base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona*

La constante básica no solo es una constante para acotar la norma de las proyecciones, como veremos en el siguiente resultado.

Teorema 2.1.14. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos no nulos en X. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X si y solo si existe K positiva tal que*

1. *$sp((x_n)_{n=1}^{\infty})$ es denso en X y*
2. *$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right\| \leq K \left\|\sum_{j=1}^{m} a_j x_j\right\|$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ y cualquier sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Por definición de una base $sp((x_n)_{n=1}^{\infty})$ es denso en X y dado $n < m$ tenemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| = \left\|P_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right)\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

$\Leftarrow$] Sea $S = sp((x_n)_{n=1}^{\infty})$, así S es denso en X. Solo nos hace falta verificar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ son linealmente independientes ya que por inducción y la desigualdad (2) cuando $n < m$ tenemos que

$$|a_n| \, \|x_n\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\right\| \leq 2K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

Definimos los mapeos $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ dados por $P_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ cuando $n < m$. Estos están bien definidos y son proyecciones lineales en S. Más aún tenemos que (1) nos dice que cada P_n tiene a lo más norma K en S. Por lo tanto cada P_n se extiende de manera única a un mapeo lineal y continuo $\overline{P_n}$, los cuales también son proyecciones y satisfacen que $\left\|\overline{P_n}\right\| \leq K$. Solo basta ver que $\overline{P_n}x$ converge a x para todo $x \in X$.

Dado $x \in X$ y $\epsilon > 0$, sea $s = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \in S$ tal que $\|x - s\| < \epsilon$. Entonces para $m < n$ tenemos que

$$\left\|x - \overline{P_n}x\right\| \leq \|x - s\| + \left\|s - \overline{P_n}s\right\| + \left\|\overline{P_n}s - \overline{P_n}x\right\| \leq (1 + \left\|\overline{P_n}\right\|)\epsilon \leq (1 + K)\epsilon.$$

Por tanto se deduce que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X. $\square$

Corolario 2.1.15. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica si cada x_n es distinto de 0 y existe K positiva tal que*

$$\left\| \sum_{=1}^{n} a_j x_j \right\| \leq K \left\| \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \right\|$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ y cualquier sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ejemplos.

1. Sea $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos distintos en $[0,1]$ tal que $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ y $\overline{\{t_j\}_{j=1}^{\infty}} = [0,1]$. Definimos las proyecciones de $C[0,1]$ en $C[0,1]$ por $P_1(f) = f(0)$ y $P_n(f)$ la interpolación lineal con nodos en t_j, con $1 \leq j \leq n$, y además que $P_n(f)(t_j) = f(t_j)$.

   Entonces por el lema 2.1.10 y que las funciones continuas en $[0,1]$ son continuas uniformemente, ocurre las proyecciones que acabamos de definir cumplen las tres condiciones de 2.1.10 y por tanto determinan una base monótona de Schauder para $C[0,1]$.

2. Definimos las funciones h_i para $i \in \mathbb{N}$ como sigue:

   $h_0(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$; $h_1(x) = 1$ para $x \in [0, \frac{1}{2})$ y $h_1(x) = -1$ para $x \in [\frac{1}{2}, 1]$; $h_2(x) = 1$ para $x \in [0, \frac{1}{4})$, $h_2(x) = -1$ para $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ y $h_2(x) = 0$ para $x \in (\frac{1}{2}, 1]$; $h_3(x) = 1$ para $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $h_3(x) = -1$ para $x \in (\frac{3}{4}, 1]$ y $h_3(x) = 0$ para $x \in [0, \frac{1}{2})$; y así sucesivamente. El conjunto de $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ es linealmente independiente. Y dado que $H := sp(\{h_i\}_{i=1}^{\infty})$ contiene a las funciones características de los intervalos diádicos, entonces $\overline{H}^{L_1} = L_1$.

   Para $x \in H$ dado por $x = \sum_{i=0}^{m} a_i h_i$ definimos $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i h_i$, suponiendo que $m \geq n$. Las proyecciones satisfacen las tres condiciones de 2.1.10. Así para probar que $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para $L_1[0,1]$, basta ver que las proyecciones P_n son acotadas uniformemente en H. A esta base se le llama el sistema de Haar.

   Supongamos que $f = \sum_{i=0}^{n} a_i h_i$ y $g = \sum_{i=0}^{n+1} a_i h_i$ para $a_i \in \mathbb{R}$. Entonces f y g difieren en un intervalo diádico I, donde f es constante, supongamos que $f(x) = b$ para todo $x \in I$, y en ese intervalo $g(x) = b + a_{n+1}$ en la primer mitad de I y $g(x) = b - a_{n+1}$ para la segunda mitad. Pero tenemos que $|b| = |\frac{1}{2}(b + a_{n+1}) + \frac{1}{2}(b - a_{n+1})| \leq \frac{1}{2}|b + a_{n+1}| + \frac{1}{2}|b - a_{n+1}|$, entonces tenemos que $\|f\| \leq \|g\|$, entonces se sigue que las proyecciones P_n tienen a lo más norma 1. Por tanto $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de Schauder para $L_1[0,1]$.

Como vimos en los ejemplos no todo espacio de Banach tiene una base, por ejemplo ℓ^{∞}. Pero lo que sí podemos asegurar es que dado un espacio de Banach de dimensión infinita existe una sucesión básica. Los siguientes resultados mostrarán cómo se obtiene.

Lema 2.1.16. *Sea X un espacio de Banach y $F \subseteq X$ un subespacio de dimensión finita. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ con $\|x\| = 1$ tal que $\|y\| \leq (1 + \epsilon)\|y + \lambda x\|$ para todo $y \in F$ y todo λ escalar.*

Demostración. Sea $1 > \epsilon > 0$. Dado que F es de dimensión finita, $S_F = \{y \in F : \|y\| = 1\}$ es compacto en X. Entonces podemos tener una $\epsilon/2$-red $\{y_1, ..., y_n\}$, es decir, para todo $y \in F$ existe una $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $\|y_i - y\| < \epsilon/2$. Para cada y_i existe un funcional $y_i^* \in X^*$ tal que $y_i^* y_i = 1$.

Notemos que $\cap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(y_i^*)$ es un espacio de codimensión finita y por lo tanto existe $x \in X$ distinto de cero con $x \in \cap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(y_i^*)$, ya que sino entonces $\cap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(y_i^*)$ tendría codimensión infinita lo cual es una contradicción. Más aún, existe $x \in \cap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(y_i^*)$ tal que $\|x\| = 1$. Dado $y \in S_F$ tenemos que existe y_i tal que se cumplen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\|y + \lambda x\| &\geq \|y_i + \lambda x\| - \|y - y_i\| \geq \|y_i + \lambda x\| - \epsilon/2 \\
&\geq y_i^*(y_i + \lambda x) - \epsilon/2 = 1 - \epsilon/2 \\
&\geq \frac{1}{1+\epsilon}.
\end{aligned}$$

Entonces $\|y\| \leq (1 + \epsilon)\|y + \lambda x\|$, para toda λ y y con $\|y\| = 1$. Como esto se cumple para toda λ, $\|y\| \leq (1 + \epsilon)\|y + \lambda x\|$ para toda $y \in F$. □

Teorema 2.1.17. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión básica en X.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, elegimos una sucesión de números positivos $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\Pi_{n=1}^{\infty}(1 + \epsilon_n) \leq (1 + \epsilon)$.

Vamos a construir la sucesión básica de manera inductiva utilizando el lema anterior. Sea $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$. Sea x_2 de norma uno tal que $\|y\| \leq (1+\epsilon_1)\|y+\lambda x_2\|$ para todo $y \in sp(\{x_1\})$. Sea x_3 de norma uno tal que $\|y\| \leq (1+\epsilon_2)\|y+\lambda x_3\|$ para todo $y \in sp(\{x_1, x_2\})$. Y así sucesivamente. Por el corolario 2.1.16, con constante básica a lo más $K = \Pi_{n=1}^{\infty}(1+\epsilon_n) \leq (1+\epsilon)$, se sigue el resultado. □

Así, aunque no podemos afirmar que todo espacio de Banach tiene base, sabemos que existe al menos una sucesión básica.

2.1.1. Bases equivalentes

Un concepto importante es el de bases equivalentes ya que nos ayudará a obtener resultados, no solo con respecto a bases en espacios de Banach, sino también sobre propiedades en los espacios como es la propiedad de Dunford-Pettis.

Definición 2.1.18. *Sean X y Y espacios de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ bases para X y Y respectivamente. Decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes si para toda sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ lo hace.*

Proposición 2.1.19. *Sean X y Y espacios de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ bases para X y Y respectivamente. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes si y solo si existe un isomorfismo T de X en Y tal que $Tx_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. $\Leftarrow$] Es claro que si existe un isomorfismo T de X en Y tal que $Tx_n = y_n$ entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes.

$\Rightarrow$] Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes. Si $\left(x_j\right)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión en X, donde cada x_j tiene la forma $x_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,j} x_n$, que converge a algún x de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ en X y $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,j} y_n\right)_{j=1}^{\infty}$ converge a algún $y \in Y$, se sigue de la continuidad de las funcionales coordenadas que $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n$. Así aplicando el teorema de la gráfica cerrada y dado que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes tenemos que el mapeo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ es un isomorfismo de X en Y y que además a cada x_n lo manda en y_n. $\square$

Los siguientes resultados nos darán de forma sencilla bases en $C[0,1]$ o en ℓ^p con $1 \leq p < \infty$.

Proposición 2.1.20. *Suponga que X es un espacio de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X con constante básica K_b y que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} < 1/(2K_b)$. Entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica equivalente a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. En particular si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X también lo es $(y_n)_{n=1}^{\infty}$*

Demostración. Es claro que $(x_n/\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada con la misma constante básica que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Así que supondremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica normalizada.

Sean x_n^* y P_n la n-ésima funcional coordenada y la n-ésima proyección asociadas a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, además sabemos que ambos mapeos tienen dominio en $\overline{sp((x_n)_{n=1}^{\infty})}$. Si $x \in \overline{sp((x_n)_{n=1}^{\infty})}$ y $m > 1$, entonces

$$|x_m^* x| = \|(x_m^* x)x_m\| = \|(P_m - P_{m-1})x\| \leq 2K_b \|x\|,$$

así $\|x_m^*\| \leq 2K_b$ cuando $m > 1$. De forma análoga también tenemos que $\|x_1^*\| \leq 2K_b$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea z_n^* una extensión de Hahn-Banach para x_n^* a todo X. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n^* x| \|x_n - y_n\| \leq 2K_b(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|) \|x\|$ cuando $x \in X$, así el operador T definido como $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(z_n^* x)(x_n - y_n)$ es acotado y además $\|T\| \leq 2K_b \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < 1$. Sea $id : X \to X$ el operador identidad. Entonces el operador $id - T$ es un operador invertible en X. Además $(id - T)x_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue de la proposición anterior y de la proposición 2.1.7 que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base equivalente a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Si además $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es sucesión básica para X entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ también lo es. $\square$

Corolario 2.1.21. *Sean X un espacio de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X y D un subconjunto denso de X. Entonces X tiene una base equivalente a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ cuyos elementos están en D.*

Veamos una definición y uno de los teoremas más importantes que sirven para probar distintas propiedades en los espacios de Banach. El teorema es conocido por el Principio de selección de Bessaga-Pelczynski.

Definición 2.1.22. *Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X y $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de enteros positivos crecinte, tal que $p_1 = 1$. Para cada $n \in N$, sean $a_{p_n}, ..., a_{p_{n+1}-1}$ escalares con alguno de ellos distinto de cero. Si definimos $y_n = \sum_{j=p_n}^{p_{n+1}-1} a_j x_j$, entonces decimos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia básica de bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Proposición 2.1.23. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica con constante básica K. Entonces si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también es una sucesión básica y su constante básica K_1 cumple que $K \geq K_1$.*

Demostración. Supongamos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces cada y_n es un elemento no nulo por la unicidad de la expansión en términos de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Sea K la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces $\left\|\sum_{n=1}^{m_1} a_n x_n\right\| \leq K \left\|\sum_{n=1}^{m_2} a_n x_n\right\|$ cuando $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 \leq m_2$, y $a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$. Entonces se sigue por construcción que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ cumple la misma desigualdad, por tanto es una sucesión básica y además tiene constante básica menor o igual a K. $\square$

Teorema 2.1.24. *(Principio de selección de Bessaga-Pelczynski) Sean X un espacio de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X, $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ las funcionales coordenadas y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\lim_{m\to\infty} x_n^* y_m = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ pero tal que $\inf_{n\mathbb{N}} \|y_n\| > 0$. Entonces existe una subsucesión de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que es una sucesión básica equivalente a una secuencia básica de bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Demostración. Sea K la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y sean $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ las proyecciones canónicas asociadas a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces se tiene

$$\|x_n^*\| = \tfrac{\|P_n - P_{n-1}\|}{\|x_n\|}$$

y esto nos da $1 \leq \|x_n^*\| \, \|x_n\| = \|P_n - P_{n-1}\| \leq 2K$. Ahora definimos $\epsilon = \inf_{n\mathbb{N}} \|y_n\|$, tomando $n_1 = 1$, y elegimos m_1 tal que $\frac{4K}{\epsilon} \left\|\sum_{i=m_1+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_1}) x_i\right\| < \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Luego elegimos un entero n_2 tal que $n_2 > n_1$ y $\frac{4K}{\epsilon}\left\|\sum_{i=1}^{m_1} x_i^*(y_{n_2})x_i\right\| < \left(\frac{1}{2}\right)^3$, y luego seleccionamos m_2 de modo que $m_2 > m_1$ y $\frac{4K}{\epsilon}\left\|\sum_{i=m_2+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_2})x_i\right\| < \left(\frac{1}{2}\right)^4$ además. Seguimos por inducción con el proceso y obtenemos dos sucesiones crecientes $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ tales que $\frac{4K}{\epsilon}\left\|\sum_{i=m_k+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_k})x_i\right\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ y $\frac{4K}{\epsilon}\left\|\sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+}})x_i\right\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $z_k := \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i$. Entonces tenemos que

$$y_k = \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i + z_k + \sum_{i=m_{k+}+1}^{m_{k+1}} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\|z_k\| &\geq \|y_k\| - \left\|\sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i\right\| - \left\|\sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i\right\| \\
&\geq \epsilon - \frac{\epsilon}{4K2^{k+2}} - \frac{\epsilon}{4K2^{k+3}} \\
&\geq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces, $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de bloques de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ por la proposición anterior.

Sean $(z_k^*)_{k=1}^{\infty}$ la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $(z_k)_{k=1}^{\infty}$, y sea K' la constante básica. Entonces se tiene que $(z_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq sp\left((z_k^*)_{k=1}^{\infty}\right)$, también $K' \leq K$ por la proposición anterior, más aùn $1 \leq \|z_k\|\,\|z_k^*\| \leq 2K' \leq 2K$ y así se tiene que $\|z_k^*\| \leq \frac{2K}{\|z_k\|} \leq \frac{4K}{\epsilon}$. Más aún, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k^*\|\,\|z_k - y_k\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4K}{\epsilon}\left\|\sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i + \sum_{i=m_{k+}+1}^{m_{k+1}} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i\right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4K}{\epsilon}\left(\frac{\epsilon}{4K}\frac{1}{2^{k+2}} + \frac{\epsilon}{4K}\frac{1}{2^{k+3}}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,el teorema 2.1.20 nos dice que $(y_{n_{k+1}})_{k=1}^{\infty}$ es equivalente a $(z_k)_{k=1}^{\infty}$. Y solo basta notar que cada z_k^* se puede extender por el teorema de Hahn-Banach a todo X^* preservando su norma. $\square$

2.2. Bases incondicionales

Definición 2.2.1. *Sea X un espacio normado y* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *una serie en X. Decimos que* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *converge incondicionalmente si para toda permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se tiene que* $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ *también converge.*

Proposición 2.2.2. *Sea X un espacio normado y* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *una serie en X. Entonces si* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *converge incondicionalmente se tiene que* $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

Definición 2.2.3. *Sea X un espacio normado y* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *una serie en X. Decimos que* $\sum_{j=1}^{\infty} x_{i_j}$ *es una subserie de* $\sum_{j=1}^{\infty} x_i$ *cuando* $(x_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ *es una subsucesión de* $(x_i)_{i=1}^{\infty}$.

Los siguientes resultados nos sirven para la definición de base incondicional en un espacio de Banach, no daremos su demostración las cuales se pueden encontrar en [23] (p. 370).

Proposición 2.2.4. *Sea X un espacio de Banach y* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *una serie en X. Entonces* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *converge incondicionalmente si y solo si toda subserie de* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *converge.*

Corolario 2.2.5. *Sea X un espacio de Banach y* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *una serie en X. Si* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *converge incondicionalmente entonces toda subserie* $\sum_{j=1}^{\infty} x_{i_j}$ *converge incondicionalmente.*

Veamos un criterio de convergencia incondicional en espacios de Banach.

Lema 2.2.6. *Sea Y un subespacio cerrado de ℓ^∞ tal que contiene todas las sucesiones cuyos términos son 0 o 1. Entonces $Y = \ell^\infty$.*

Demostración. Sea $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ con $t_n > 0$ para todo n en S_{ℓ^∞}, donde S_{ℓ^∞} denota a la esfera unitaria. Basta ver que $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in Y$. Para cada t_n como $0 < t_n < 1$, consideremos su expansión binaria $t_n = 0.s_{n,1}s_{n,2}s_{n,3}...$. Se tiene que $((s_{n,j}))_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión en Y, y $(t_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}(s_{n,j}) \in Y$. $\square$

Lema 2.2.7. *Sea X un espacio de Banach y $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie en X tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x^* x_i$ converge absolutamente para todo $x^* \in X$. Entonces existe $M > 0$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leq M \left\| (a_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\infty}$ cuando $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$.*

Demostración. Definimos $T : X^* \to \ell^1$ dado por $T(x^*) = (x^* x_n)_{n=1}^{\infty}$. Es claro que T es lineal y por el teorema de la gráfica cerrada T es acotado. Sea $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$. Si $m \in \mathbb{N}$ y $x^* \in B_{X^*}$, entonces

$$\left| x^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{m} x^* a_i x_i \right| \leq \left\| (a_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\infty} \left\| T x^* \right\|_1 \leq \left\| (a_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\infty} \left\| T \right\|,$$

Por tanto $\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leq \left\| (a_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\infty} \left\| T \right\|$ cuando $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 2.2.8. *Sea X un espacio de Banach y $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie en X . Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge incondicionalmente si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge para toda $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$.*

Demostración. $\Leftarrow$] Para cualquier sucesión $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ donde $a_i = 0$ o $a_i = 1$ se tiene que $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$. Entonces si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge para toda $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$, se tiene que cualquier subserie de $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge . Así $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge incondicionalmente.

$\Rightarrow$] Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge incondicionalmente, y sea Y el subespacio de ℓ^{∞} de todas las sucesiones $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge. Por la proposición 2.2.4 toda subserie de $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge, así $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in Y$ cuando se tiene que $a_i = 0$ o $a_i = 1$ para toda i. Luego, por el lema 2.2.6, basta ver que Y es cerrado para concluir que $Y = \ell^{\infty}$. $\square$

Corolario 2.2.9. *Sea X un espacio de Banach y $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie en X . Entonces si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge incondicionalmente, se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge incondicionalmente para toda $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$.*

Ahora mencionaremos la definición de base incondicional y algunos resultados que se desprenden de ella.

Definición 2.2.10. *Sea X un espacio de Banach y $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una base para X. Decimos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base incondicional si para toda $x \in X$, donde $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ es una serie incondicionalmente convergente en X. Diremos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base condicional si no es una base incondicional.*

Ejemplo. Sea $X = c_0$ o $X = \ell^p$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces la base de vectores unitarios estándar es una base incondicional para X. Esto dado que si $x \in X$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, esta serie converge absolutamente si $X = \ell^p$ con $1 \leq p < \infty$ y por tanto converge incondicionalmente.

Proposición 2.2.11. *Sean X un espacio de Banach, $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una base incondicional para X y $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares distintos de cero. Entonces $(\lambda_i x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base incondicional para X.*

Proposición 2.2.12. *Sean X y Y espacios de Banach, $T \in B(X, Y)$ un isomorfismo y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica incondicional en X. Entonces $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica incondicional en Y. En particular si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional para X entonces $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional para Y.*

Teorema 2.2.13. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos no nulos en X. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional para X si y solo si existe K positiva tal que*

1. *$sp((x_n)_{n=1}^{\infty})$ es denso en X y*
2. *$\left\| \sum_{j \in A} a_j x_j \right\| \leq K \left\| \sum_{j \in B} a_j x_j \right\|$ para toda pareja de $A, B \subseteq \mathbb{N}$ con $A \subseteq B$ y cualquier sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Demostración. Por los resultados si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional para X se cumplen 1 y 2.

Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión nula que cumple 1 y 2. Por el teorema 2.1.14, se tiene que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X. Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$ y además $\sum_{j=1}^{\infty} a_{i_j} x_{i_j}$ una subserie de la serie anterior. Basta ver que $\sum_{j=1}^{\infty} a_{i_j} x_{i_j}$ converge, pero esto se sigue de la convergencia de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ y de

$$\left\| \sum_{j=m_1}^{m_2} a_{i_j} x_{i_j} \right\| \leq K \left\| \sum_{n=n_{m_1}}^{n_{m_2}} a_n x_n \right\|,$$

cuando $m_1 \leq m_2$. Por lo tanto se sigue el resultado. □

Corolario 2.2.14. *Sean X un espacio de Banach y $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica incondicional en X. Entonces cualquier permutación de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión básica incondicional en X.*

Veamos que las bases para $C[0,1]$ y $L_1[0,1]$, son condicionales. Primero veamos una definición, un pequeño resultado y finalmente un teorema de Daugavet.

Definición 2.2.15. *Sea X un espacio de Banach. Decimos que tiene la propiedad de aproximación si para todo espacio de Banach Y y todo operador compacto $T : Y \to X$, se tiene que existe una sucesión $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ de operadores $S_n : Y \to X$ de rango finito tal que $S_n \to T$ en $B(Y, X)$.*

Teorema 2.2.16. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder. Entonces X tiene la propiedad de aproximación.*

La prueba del anterior teorema se puede ver en [23] (p. 364).

La propiedad de aproximación fue estudiada ampliamente por Grothendieck. Por mucho tiempo se pensó que todo espacio de Banach separable tenía la propiedad de aproximación. Esto fue contestado negativamente por Pen Enflo (ver [19]) que construyó un espacio de Banach separable que no tiene la propiedad de aproximación y por el resultado anterior este espacio no puede tener base de Schauder. El siguiente resultado es una traducción del artículo de Daugavet ([14]). Se utilizará para probar que la base de $C[0,1]$ es condicional.

Teorema 2.2.17. *(Daugavet) Sea A un operador compacto $A : C[0,1] \to C[0,1]$. Entonces $\|I + A\| = 1 + \|A\|$, donde I denota al operador identidad.*

Demostración. Notemos que $C[0,1]$ tiene base de Schauder, entonces tiene la propiedad de aproximación. Así si $A : C[0,1] \to C[0,1]$ es un operador compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de operadores de rango finito tal que A_n converge a A y que además $\|I + A_n\| = 1 + \|A_n\|$, por continuidad de la norma se tendría que $\|I + A\| = 1 + \|A\|$. Así basta probar que la igualdad se cumple para operadores de rango finito.

Sea A un operador de rango finito, entonces se puede ver como

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(x) z_k$$

donde $x \in C[0,1]$, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ son funciones en $C[0,1]$ y $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ son funcionales continuas en $C[0,1]$. Por el teorema de representación de Riesz cada ϕ_k se puede ver como $\phi_k(x) = \int x(t) d\sigma_k(t)$, donde cada $\sigma_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada.

Definimos $M = \text{máx}_{1\leq k\leq n} \|z_k\|$ y tomando $\epsilon > 0$. Entonces existe $x_0 \in C[0,1]$ con $\|x_0\| = 1$ y además $\|Ax_0\| > \|A\| - \frac{\epsilon}{2}$. Denotemos $y_0 := Ax_0$. Se puede suponer que hay un conjunto $\Delta \subseteq [0,1]$, tal que para todo $y_0(t) \geq \|A\| - \frac{\epsilon}{2}$ para $t \in \Delta$. Más aún se puede elegir un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeña, de modo que para cada k con $1 \leq k \leq n$ se tiene

$$V_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \sigma_k \leq \tfrac{\epsilon}{4nM},$$

donde $V_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \sigma_k$ es la variación de σ_k en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Ahora podemos construir una función continua x_1 que cumpla con las siguientes tres propiedades:

1. $x_1(t) = x_0(t)$ para $t \in [0, t_0 - \delta] \cup [t_0 + \delta, 1]$,

2. $x_1(t_0) = 1$,

3. $x_1(t)$ es lineal en los intervalos $(t_0 - \delta, t_0]$ y $[t_0, t_0 + \delta)$.

Por como la hemos definido ocurre $\|x_1\| = 1$. Llamemos $y_1 := Ax_1$. Mostraremos que $\|y_0 - y_1\| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Primero tenemos que

$$y_1 - y_0 = \sum_{k=1}^{n} (\phi_k(x_1) - \phi_k(x_0)) z_k,$$

donde

$$\phi_k(x_1) - \phi_k(x_0) = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (x_1(t) - x_0(t)) d\sigma_k,$$

y por la variación de las σ_k y que $\|x_1 - x_0\| \leq 2$ tenemos que

$$|\phi_k(x_1) - \phi_k(x_0)| \leq \tfrac{\epsilon}{2nM}.$$

Además tenemos las siguientes dos igualdades

$$(I + A)x_1 = x_1 + y_1$$
$$x_1(t_0) = 1, y_1(t_0) = y_0(t_0) + [y_1(t_0) - y_0(t_0)].$$

Ya que $t_0 \in \Delta$, entonces $y_0(t_0) \geq \|A\| - \frac{\epsilon}{2}$, además dado que $\|y_0 - y_1\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ se tiene que $y_1(t_0) \geq \|A\| - \epsilon$. Tomando en cuenta lo siguiente

$$x_1(t_0) + y_1(t_0) \geq 1 + \|A\| - \epsilon$$
$$\|(I + A)x_1\| = \|x_1 + y_1\| \geq 1 + \|A\| - \epsilon,$$

y por construcción $\|x_1\| = 1$, también se tiene que

$$\|I + A\| \geq 1 + \|A\| - \epsilon,$$

de donde se tiene que $\|I + A\| \geq 1 + \|A\|$. La otra desigualdad ocurre por la desigualdad del triángulo. Por tanto la igualdad se cumple. □

A $\|I + A\| = 1 + \|A\|$ se le llama ecuación de Daugavet. Se puede probar que para todo operador $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$ débilmente compacto también se cumple esta ecuación. También esta ecuación define una propiedad en los espacios de Banach.

Definición 2.2.18. *Sea X un espacio de Banach. Decimos que tiene la propiedad de Daugavet si para todo operador $T : X \to X$ de rango 1, se cumple que $\|I + T\| = 1 + \|T\|$.*

Teorema 2.2.19. *La base estándar de $C[0,1]$ es una base condicional.*

Demostración. Por como hemos definido las proyecciones canónicas. Se tiene que P_n es un operador compacto sobre $C[0,1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún, supongamos que $C[0,1]$ tiene una base incondicional. Sea P_A la proyección sobre el subespacio generado por $\{x_i\}_{i\in A}$, donde $A \subseteq \mathbb{N}$ y es finito. Sea $\alpha := \sup_{A\subseteq\mathbb{N}} \|P_A\|$. Entonces al ser una base incondicional las proyecciones P_A son compactas. Sea $A_1 \subseteq \mathbb{N}$, tal que $\|P_{A_1}\| > \alpha - \frac{1}{2}$. Entonces utilizando la ecuación de Daugavet tenemos que

$$\|I - P_{A_1}\| = 1 + \|P_{A_1}\| > 1 + \alpha - \tfrac{1}{2} = \alpha + \tfrac{1}{2},$$

donde I es el operador identidad. Por otra parte, se tiene que $\|I - P_{A_1}\| = \left\|P_{\mathbb{N}/A_1}\right\| \leq \alpha$. Lo cual es una contradicción. Por tanto, la base canónica de $C[0,1]$ es condicional. □

Para la prueba del siguiente teorema se puede ver en [20] (sección 45., p. 203).

Teorema 2.2.20. *La base estándar de $L^1[0,1]$ es una base condicional.*

2.3. Bases que encogen y bases acotadamente completas

En esta sección veremos como caracterizar la reflexividad a través de diferentes tipos de bases en los espacios.

Proposición 2.3.1. *Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_{n=1}^\infty$ una base para X y $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ la sucesión de funcionales coordenadas. Entonces $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica en X^* con constante básica no mayor a la de $(x_n)_{n=1}^\infty$.*

Demostración. Denotemos por $(S_N^*)_{n=1}^\infty$ la sucesión de operadores adjuntos de las sumas parciales de las proyecciones asociadas a $(x_n)_{n=1}^\infty$, es decir,

$$S_N^* : X^* \to X^*,\ S_N^* = \sum_{k=1}^{N} x^*(x_k)x_k^*.$$

Sea $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ la sucesión de funcionales coordenadas y consideremos el subespacio de X^* dado por

$$H = \{x^* : \|S_N^*(x^*) - x^n\| \to 0\}$$

Claramente $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ es una base para H, entonces $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ es una sucesión básica. Notemos que

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left\| S_N^*\big|_H \right\| \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\| S_N^*\big|_{X^*} \right\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\|$$

y así, tiene a lo más la misma constante básica que la base para X. $\square$

Definición 2.3.2. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^\infty$ una base para X. Diremos que $(x_n)_{n=1}^\infty$ encoge si la sucesión de sus coordenadas funcionales $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ es una base para X^*.*

Proposición 2.3.3. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^\infty$ una base para X. Entonces $(x_n)_{n=1}^\infty$ encoge si y solo si dado $x^* \in X^*$,*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x^*\big|_{sp((x_n^*)_{n=N}^\infty)} \right\| = 0,$$

donde $\left\| x^*\big|_{sp((x_n^*)_{n=N}^\infty)} \right\| = \sup\{|x^* y| : y \in sp((x_n)_{n=N}^\infty)\}$.

Demostración. Supongamos que $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ es una base para X^*. Entonces todo $x^* \in X^*$ se puede descomponer como $(x^* - S_N^* x^*) + S_N^* x^*$ para toda N. Además se siguen las siguientes desigualdades

$$\left\| x^*\big|_{sp((x_n)_{n=N}^\infty)} \right\| \leq \left\| x^* - S_N^* x^*\big|_{sp((x_n)_{n=N}^\infty)} \right\| + \left\| S_N^* x^*\big|_{sp((x_n)_{n=N}^\infty)} \right\| \leq \|x^* - S_N^* x^*\|.$$

La segunda desigualdad se tiene ya que $\left\| S_N^* x^*\big|_{sp((x_n)_{n=N}^\infty)} \right\|$ es 0 y como $\|x^* - S_N^* x^*\|$ tiende a 0 obtenemos el límite que buscamos.

Ahora supongamos que

$$\lim_{N\to\infty} \left\| x^*\big|_{sp((x_n)_{n=N}^\infty)} \right\| = 0.$$

Sea K la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $x^* \in X^*$. Para cada $x \in X$, se tiene que $(I_X - S_N)(x)$ está en el subespacio $sp((x_n)_{n=N}^{\infty})$, y además tenemos que

$$\begin{aligned}
|(x^* - S_N^* x^*)(x)| &= |x^*(I_X - S_N)(x)| \\
&\leq \left\| x^*|_{sp((x_n^*)_{n=N}^{\infty})} \right\| \|I_X - S_N\| \|x\| \\
&\leq (K+1) \left\| x^*|_{sp((x_n^*)_{n=N}^{\infty})} \right\| \|x\|,
\end{aligned}$$

así $\|x^* - S_N^* x^*\| \leq (K+1) \left\| x^*|_{sp((x_n^*)_{n=N}^{\infty})} \right\|$ y dado que $\left\| x^*|_{sp((x_n^*)_{n=N}^{\infty})} \right\|$ converge a 0 cuando N tiende a ∞ entonces $\lim\limits_{N\to\infty} \|x^* - S_N^* x^*\| = 0$. Por lo tanto $X^* = sp((x_n)_{n=1}^{\infty})$. □

Otra propiedad que pueden tener las bases, que está relacionada con la que acabamos de ver, es la de ser acotadamente completas.

Definición 2.3.4. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X. Diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa si para cada sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\| < \infty$$

se tiene que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge.

Ejemplo. (1) Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ la base canónica de ℓ^p con $1 < p < \infty$. Entonces $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa y encoge en ℓ^p dado que $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ y además $(e_n^*)_{n=1}^{\infty} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ en ℓ^q. En el caso de ℓ^1 la base canónica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa por como definimos ℓ^1 pero no encoge dado que ℓ^{∞} no es separable.

(2) En el en caso de c_0 la base canónica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge ya que su dual es isomorfo a ℓ^1 pero no es acotadamente completa. Esto se debe a que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ no es convergente en c_0 a pesar de que

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^{N} e_n \right\|_{\infty} = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|(1,1,...,1,0,0,...)\|_{\infty} = 1.$$

En el caso que tomamos la base sumativa de c_0, es decir, $\left(f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k\right)_{n=1}^{\infty}$. Esta base no encoge ya que la funcional lineal e_1^* satisface que $e_1^*(e_n) = 1$ para toda

$n \in \mathbb{N}$, así no cumple el límite de la proposición 2.3.3. Tampoco es acotadamente completa ya que

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^{N} (-1)^n f_n \right\|_\infty = 1,$$

pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ no converge.

Los siguientes resultados complementan la sección. Dado que son solo una forma de caracterizar las propiedades que ya hemos visto, no incluiremos su demostración. Su demostración se puede encontrar en [1] (p. 57).

Teorema 2.3.5. *Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funcionales coordenadas. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa,*
2. *$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge para H, donde,*

$$H = \{x^* : \|S_N^*(x^*) - x^*\| \to 0\}$$

3. *El mapeo canónico $\mathscr{C} : X \to H^*$ definido por $\mathscr{C}(x)(h) = h(x)$, para todo $x \in X$ y $h \in H$, es un isomorfismo.*

Corolario 2.3.6. *c_0 no tiene base acotadamente completa.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior, dado que $(c_0)^{**} \ncong c_0$. □

Teorema 2.3.7. *Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X y $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funcionales coordenadas. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge,*
2. *$(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa para H,*
3. *$H = X^*$.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$] Supongamos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tal que la sucesión $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n x_n^*\right)_{N=1}^{\infty}$ es acotada en X^* y sea x^* un punto de acumulación de la sucesión. Entonces si denotamos por $a_k = \text{lím}_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n x_n^*(x_k)$, se tiene que $x^*(x_k) = a_k$ para todo k. Entonces la serie converge a x^*.

$2 \Rightarrow 3$] Supongamos que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base acotadamente completa. Para cada x^* en X^* sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)x_n^*$ converge en la topología débil* de X^* a x^*. En particular la sucesión $\left(\sum_{n=1}^{N} x^*(x_n)x_n^*\right)_{N=1}^{\infty}$ es acotada en norma en X^*. Entonces, dado que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)x_n^*$ debe converger en norma a x^*. Por tanto $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X^*.

$3 \Rightarrow 1$] Es inmediato de la definición de H. □

Teorema 2.3.8. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X. Entonces X es reflexivo si y solo si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge y es acotadamente completa.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para X y X es reflexivo. Entonces $X^* = H$, donde $H = \{x^* : \|S_N^*(x^*) - x^*\| \to 0\}$. Si no, utilizando el teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar $x^{**} \in X^{**}$, con $x^{**} \neq 0$, tal que $x^{**}(h) = 0$ para todo $h \in H$. Por reflexividad tenemos que si $x \neq 0$, entonces existe $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$ tal que $x = x^{**}$. En particular $0 = x^{**}(x_n^*) = x_n^*(x)$ para toda n, entonces $x = 0$. Se sigue que$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge. Por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es base de X^{**} y es biortogonal con $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Esto implica que $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base que encoge de $X^* = H$, entonces por el teorema 2.3.5 se tiene que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa.

$\Leftarrow$] Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ encoge entonces $X^* = H$ y dado que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotadamente completa también, el mapeo canónico $\mathscr{C} : X \to H^*$ definido en el teorema 2.3.5 es el mapeo canónico $\mathscr{C} : X \to X^{**}$ y además es sobre. Por tanto X es reflexivo. □

La demostración de los siguientes dos resultados se pueden encontrar en [1] (p. 59-61).

Teorema 2.3.9. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional para X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que no encoge,*
2. *X contiene un subespacio complementado isomorfo a ℓ^1,*

3. *X contiene un subespacio isomorfo a ℓ^1.*

Teorema 2.3.10. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional para X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base que no es acotadamente completa,*

2. *X contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0,*

3. *X contiene un subespacio isomorfo a c_0.*

A partir de los resultados anteriores podemos obtener un resultado sobre espacios de Banach que contienen un subespacio complementado isomorfo a c_0 o a ℓ^1.

Teorema 2.3.11. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional para X. Entonces X no es reflexivo si c_0 es un subespacio complementado en X, o ℓ^1 es un subespacio complementado (o ambos). En ambos casos X^{**} es no separable.*

Demostración. La primera parte de la prueba se sigue de los teoremas 2.3.7 y 2.3.8. Para la última parte de la prueba, si c_0 es un subespacio complementado en X entonces X^{**} sería no separable ya que contendría una copia de ℓ^∞. Recordemos que si $Z \cong Y \bigoplus W$, se tiene que $Z^* \cong Y^* \bigoplus W^*$. De igual forma, si ℓ^1 es un subespacio complementado, entonces X^* sería no separable ya que contendría una copia de ℓ^∞. En ambos casos X^{**} es no separable. $\square$

Capítulo 3

El espacio de Talagrand y la propiedad de Dunford-Pettis.

Este último capítulo se dividirá en dos secciones, primero la construcción del espacio de Talagrand y sus propiedades. En la segunda sección veremos otros ejemplos de espacios con la propiedad de Dunford-Pettis, un resultado más sobre el espacio de Talagrand y finalmente dos resultados sobre la propiedad de Dunford-Pettis, en esta sección introduciremos la propiedad de Dunford-Pettis hereditaria. Primero se verá el espacio de Talagrand (ver [32]) E, que fue construido por Talagrand para mostrar un espacio E tal que tuviera la propiedad de Dunford-Pettis pero tal que los espacios $C(K,E)$ y $L_1(E^*)$ no la tuviera, donde K es cualquier espacio compacto. El espacio de Talagrand también sirve como ejemplo de un espacio que tiene la propiedad de Dunford-Pettis, cuyo espacio dual también la tiene, pero un resultado de Núñez (ver [26]) muestra que el espacio E^{**} (es decir el doble dual del espacio de Talagrand) no tiene la propiedad.

Como vimos en la sección 1.7:

1. Todo espacio con la propiedad de Schur tiene la propiedad de Dunford-Pettis.
2. Un espacio tiene la propiedad de Dunford-Pettis, si y solo si, para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ que converge débilmente a $0 \in X$ y toda sucesión $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ que converge débilmente a $0 \in X^*$ se tiene que $(x_n^* x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.
3. Si el espacio dual de un espacio de Banach X tiene la propiedad de Dunford-

Pettis, entonces X también la tiene. Y notemos que el recíproco es falso. Sin embargo, si X tiene la propiedad de Dunford-Pettis y no contiene una copia de ℓ^1, entonces X^* tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

4. Si X es un espacio de Banach reflexivo y de dimensión infinita, entonces no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

5. La propiedad de Dunford-Pettis no se hereda a cocientes ni a subespacios cerrados.

6. Los espacios $C(K)$ y $L_1(K)$, donde K es un espacio compacto, tienen la propiedad de Dunford-Pettis.

3.1. El espacio de Talagrand

En esta sección hablaremos del espacio de Talagrand que fue construido por Talagrand (ver [32]) para mostrar que existe un espacio de Banach que tiene la propiedad de Dunford-Pettis pero que los espacios $C(K,E)$ y $L_1(E^*)$ no la tienen.

Primero veremos la definición de este espacio, luego veremos que tiene la propiedad de Dunford-Pettis y finalmente probaremos que los espacios $C(K,E)$ y $L_1(E^*)$ no la tienen. Además de ser un ejemplo para esta situación, este espacio ha sido ampliamente estudiado porque cumple otras propiedades interesantes.

Definimos el conjunto $T := \cup_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}^n$. Es decir, el conjunto T son todas las sucesiones finitas de ceros y unos. En el conjunto T definiremos la siguiente relación: dados $\phi, \psi \in T$, donde $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ y $\psi = (\psi_1, ..., \psi_m)$, decimos que $\phi \leq \psi$ si $n \leq m$ y $\phi_i = \psi_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Sea $\mathbb{R}^T$ el espacio de todas las funciones de T en $\mathbb{R}$.

Proposición 3.1.1. *Sea $x \in \mathbb{R}^T$, definimos*

$$\|x\|_* = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{|\phi|=n} \big(\sup_{\psi\geq\phi} |x(\psi)| \big)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\| \ \|_*$ *cumple las siguientes propiedades:*

1. $\|x\|_* \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^T$,

2. $\|x\|_* = 0$ *si y solo si* x *es la función cero,*

3. $\|ax\|_* = |a| \times \|x\|_*$,

4. *y dados* $x, y \in \mathbb{R}^T$ *se tiene que* $\|x + y\|_* \leq \|x\|_* + \|y\|_*$.

Demostración. Es claro que $\|x\|_* \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^T$. Es claro que $\|ax\|_* = |a| \|x\|$ dados $a \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^T$.Ahora bien, también se tiene que $|x(\phi)|^2 \leq \left(\sup_{\psi \geq \phi} |x(\psi)|\right)^2$, de donde podemos ver que $|x(\phi)| \leq \|x\|_*$. Así tenemos que $\|x\|_* = 0$, si y solo si $x \equiv 0$. Ahora falta ver que se cumple la desigualdad de triángulo. Notemos que $\sup_{\psi \geq \phi} |x(\phi) + y(\psi)| \leq \sup_{\psi \geq \phi} |x(\psi)| + \sup_{\psi \geq \phi} |y(\psi)|$, cuando $x, y \in \mathbb{R}^T$. Así, al aplicar la desigualdad de Minkowski, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{|\phi|=n} \left(\sup_{\psi \geq \phi} |x(\psi) + y(\psi)|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{|\phi|=n} \left(\sup_{\psi \geq \phi} |x(\psi)| + \sup_{\psi \geq \phi} |y(\psi)|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{|\phi|=n} \left(\sup_{\psi \geq \phi} |x(\psi)|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{|\phi|=n} \left(\sup_{\psi \geq \phi} |y(\psi)|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Por tanto $\|x + y\|_* \leq \|x\|_* + \|y\|_*$ y así $\| \ \|$ define una norma en $\mathbb{R}^T$. □

Sea $E_0 := \{x \in \mathbb{R}^T : \|x\|_* < \infty\}$. Con base en el conjunto E_0 construiremos el espacio de Talagrand, pero primero veamos un resultado sobre E_0.

Proposición 3.1.2. *Sea* E_0 *equipado con la norma* $\| \ \|$ *definida como* $\|x\| = \|x\|_*$ *para todo* $x \in E_0$. *Entonces* $(E_0, \| \ \|)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Solo resta ver que E_0 es completo. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en E_0 una sucesión de Cauchy. Recordemos que $|x(\phi)|^2 \leq \left(\sup_{\psi \geq \phi} |x(\psi)|\right)^2$ para todo $x \in E_0$. Así dado $\phi \in T$ tenemos que $(x_n(\phi))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Llamemos $y(\phi) := \lim_{n \to \infty} x_n(\phi)$, y así si $y \in \mathbb{R}^T$, veamos que $y \in E_0$ y que $\|x_n - y\|$ tiende a 0 cuando n tiende a ∞. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, entonces la sucesión $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$está acotada, es decir, existe $C > 0$ tal que

$$\sum_{|\phi|=j} \left(\sup_{\psi \geq \phi} |x_n(\psi)|\right)^2 \leq C,$$

para toda $j \in \mathbb{R}$. También tenemos que $\sup_{\psi \geq \phi} |y(\psi)| \leq \lim_{n \to \infty} \sup_{\psi \geq \phi} |x_n(\psi)|$, y como la suma sobre las ϕ, tal que $|\phi| = j$, es una suma de 2^j elementos, tenemos que

$$\sum_{|\phi|=j}\big(\sup_{\psi\geq\phi}|y(\psi)|\big)^2 \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{|\phi|=j}\big(\sup_{\psi\geq\phi}|x_n(\psi)|\big)^2 \leq \lim_{n\to\infty} C = C.$$

Por tanto $y \in E_0$. De modo análogo tenemos que

$$\sup_{\psi\geq\phi}|x_n(\psi)-y(\psi)| \leq \lim_{m\to\infty}\sup_{\psi\geq\phi}|x_n(\psi)-x_m(\psi)|.$$

Así tenemos que si $n, m \geq N$ entonces

$$\sum_{|\phi|=j}\big(\sup_{\psi\geq\phi}|x_n(\psi)-y(\psi)|\big)^2 \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{|\phi|=j}\big(\sup_{\psi\geq\phi}|x_n(\psi)-x_m(\psi)|\big)^2 \leq \epsilon^2.$$

Por tanto E_0 es un espacio de Banach. $\square$

Denotamos por $\mathbb{R}_0^T$ al subespacio de $\mathbb{R}^T$ de las funciones de soporte finito, es decir, $x \in \mathbb{R}_0^T$ si $x(\phi) = 0$ excepto para un número finito de $\phi \in T$. Es claro que dado $x \in \mathbb{R}_0^T$, se tiene que $\|x\| < \infty$, por tanto $x \in \mathbb{R}_0^T \subseteq E_0$.

Definición 3.1.3. *Sea $E = \overline{\mathbb{R}_0^T}$ la cerradura de $\mathbb{R}_0^T$ en E_0. E es el espacio de Talagrand.*

Veamos que E es un subespacio propio de E_0. Para hacer esto ϕ_n para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen como sigue

$$\begin{aligned}\phi_1 &= (1)\\ \phi_2 &= (1,1)\\ &\dots\\ \phi_n &= (1,\dots,1)\\ &\dots\end{aligned}$$

y así sucesivamente, es decir, ϕ_n es la n-ada con solo 1 como entradas. Sea $x_1 \in \mathbb{R}^T$ la función tal que $x_1(\phi_n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y si ψ no es de la forma ϕ_n para alguna n, entonces $x_1(\psi) = 0$. Es claro que x_1 no tiene soporte finito, además tampoco está en la cerradura de $\mathbb{R}_0^T$, pero $\|x_1\| = 1$. Así $x_1 \in E_0$ pero no está en la cerradura de $\mathbb{R}_0^T$.

Ahora procederemos a ver que el espacio que acabamos de construir tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

Teorema 3.1.4. *Dada una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en E, tal que existen $\delta, a > 0$ que cumplen que $0 < \delta \leq \text{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \leq a$ y además que para todo $\phi \in T$ se tiene que $x_n(\phi)$ converge a 0 cuando n tiende a ∞, entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que es equivalente a la base canónica de c_0.*

Demostración. Supongamos que para cada x_n, podemos encontrar un y_n tal que $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{2^{n+1}K}$ y que además la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ fuese una sucesión básica con constante K equivalente a c_0. Entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sería equivalente a la base de c_0 por la proposición 2.1.20.

Sea $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos. Definimos $m_1 = 1$, dado que las funciones de soporte son densas en E por construcción, existe $y_1 \in E$ tal que es de soporte finito, es decir, $\text{sop}(y_1) \subseteq \{1, 2, ..., k_1 - 1\}$ para algún $k_1 \in \mathbb{N}$ y además que $\|x_{m_1} - y_1\| < \epsilon_1$. Dado que $x_n(\phi)$ converge a 0 cuando n tiende a ∞, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ con $m_2 > m_1$ tal que $|x_{m_2}(\phi)| < \frac{\epsilon_2}{2^{1+k_1}}$ si $|\phi| < k_1$. Entonces si definimos $\widehat{y_2} \in E$ tal que $\widehat{y_2}(\phi) = x_{m_2}(\phi)$ si $|\phi| \geq k_1$ y $\widehat{y_2}(\phi) = 0$ si $|\phi| < k_1$, entonces se tiene que $\|x_{m_2} - \widehat{y_2}\| < \frac{\epsilon_2}{2}$. Más aún, podemos encontrar y_2 de soporte finito, de modo que $\text{sop}(y_2) \subseteq \{1, 2, ..., k_2 - 1\}$ pero además $\text{sop}(y_2) \cap \{1, 2, ..., k_1 - 1\} = \emptyset$ y también que $\|y_2 - \widehat{y_2}\| < \frac{\epsilon_2}{2}$. Entonces $\|x_{m_2} - y_2\| < \epsilon_2$ y además si $|\phi| < k_1$ o $|\phi| \geq k_2$ se tiene que $y_2(\phi) = 0$. Supongamos que existen $x_{m_1}, ..., x_{m_s}$ y $y_1, ..., y_s$ de modo que $\|x_{m_r} - y_r\| < \epsilon_k$ si $1 \leq r \leq s$ y además si $|\phi| < k_{r-1}$ o $|\phi| \geq k_r$ se tiene que $y_r(\phi) = 0$ si $1 \leq r \leq s$, donde definimos $k_0 = 0$. Ahora existe $m_{s+1} \in \mathbb{N}$ con $m_{s+1} > m_s$ tal que $|x_{m_{s+1}}(\phi)| < \frac{\epsilon_{s+1}}{2^{1+k_s}}$ si $|\phi| < k_s$. Entonces si definimos $\widehat{y_{s+1}} \in E$ tal que $\widehat{y_{s+1}}(\phi) = x_{m_{s+1}}(\phi)$ si $|\phi| \geq k_s$ y $\widehat{y_{s+1}}(\phi) = 0$ si $|\phi| < k_s$, entonces se tiene que $\left\|x_{m_{s+1}} - \widehat{y_{s+1}}\right\| < \frac{\epsilon_{s+1}}{2}$. Más aún, podemos encontrar y_{s+1} de soporte finito, de modo que $\text{sop}(y_{s+1}) \subseteq \{1, 2, ..., k_{s+1} - 1\}$ pero además $\text{sop}(y_{s+1}) \cap \{1, 2, ..., k_s - 1\} = \emptyset$ y también que $\|y_{s+1} - \widehat{y_{s+1}}\| < \frac{\epsilon_{s+1}}{2}$. Entonces $\left\|x_{m_{s+1}} - y_{s+1}\right\| < \epsilon_{s+1}$ y además si $|\phi| < k_s$ o $|\phi| \geq k_{s+1}$ se tiene que $y_{s+1}(\phi) = 0$. Así inductivamente podemos encontrar una subsucesión $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dada $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos , tal que $\|x_{m_s} - y_s\| < \epsilon_s$ y que además si $|\phi| < k_s$ o $|\phi| \geq k_{s+1}$ se tiene que $y_{s+1}(\phi) = 0$ para todo $s \in \mathbb{N}$.

Así, por las dos afirmaciones anteriores, podemos suponer que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ cumple que existe una sucesión creciente $(k_m)_{m=1}^{\infty}$ tal que si $|\phi| < k_{m-1}$ o $|\phi| \geq k_m$ entonces $x_m(\phi) = 0$.

Para cada $\phi \in T$, definimos $t(\phi, m) := \sup_{\psi \geq \phi} |x_m(\psi)|$. Por hipótesis $\|x_m\| \leq a$ y tenemos que

$$\sum_{|\phi|=n} t^2(\phi, m) \leq a^2$$

para todo n y m.

Ahora se construirá por inducción una sucesión de enteros $m_q, m_2, ..., m_p$ y de conjuntos infinitos de enteros $N_1, ..., N_p$ tal que si $r \in N_i$ entonces $m_i < r$, y que cumplan lo siguiente

1. $m_{p+1} \in N_p$, y además $N_{p+1} \subseteq N_p$,
2. y para todo $n \leq k_{m_p}$, se tiene que $\sum_{|\phi|=n} \sup_{m\in N_p} t^2(\phi, m) \leq 2a^2$.

Comencemos con $N_0 = \mathbb{N}$. Supongamos que ya hemos contruido los primeros p enteros $m_q, m_2, ..., m_p$ y los primeros p conjuntos $N_1, ..., N_p$ que satisfacen las dos condiciones necesarias. Sea cualquier entero $m_{p+1} \in N_p$. Afirmamos que para cada $m > m_{p+1}$ si $|\phi| \leq k_{m_{p+1}}$ se tiene que $t^2(\phi, m) \leq 2^{-k_{m_{p+1}}}a^2$. Supongamos que para cada $|\phi| \leq k_{m_{p+1}}$ existe $m > m_{p+1}$ de modo que $t^2(\phi, m) > 2^{-k_{m_{p+1}}}a^2$. Entonces en particular tendríamos que $\sum_{|\phi|=k_{m_{p+1}}} t^2(\phi, m) > \sum_{|\phi|=k_{m_{p+1}}} 2^{-k_{m_{p+1}}}a^2 = a^2$, que es una contradicción ya que por hipótesis $\|x_m\| \leq a$. Así si $|\phi| \leq k_{m_{p+1}}$ se tiene que $t^2(\phi, m) \leq 2^{-k_{m_{p+1}}}a^2$. Entonces elegimos un subconjunto N_{p+1} de N_p y por la afirmación tenemos que si $|\phi| \leq k_{m_{p+1}}$ se tiene que $\sup_{m\in N_p} t^2(\phi, m) \leq 2^{-k_{m_{p+1}}}a^2$, de donde tenemos que $\sum_{|\phi|=n} \sup_{m\in N_p} t^2(\phi, m) \leq \sum_{|\phi|=n} 2^{-k_{m_{p+1}}}a^2 = 2^{n-k_{m_{p+1}}}a^2 \leq 2a^2$.

Ahora vamos a ver que a partir de las construcciones anteriores podemos construir una subsucesión equivalente a c_0. Tomemos la subsucesión $(x_{m_p})_{p=1}^{\infty}$. Sea $(a_p)_{p=1}^{\infty}$ una sucesión de reales tal que a partir de un $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_n = 0$ si $n \leq N$. Sea $\phi \in T$ de modo que $|\phi| < k_{m_1}$ o $|\phi| \geq k_{m_N}$, entonces se tiene que $\sum_{p=1}^{N} a_p x_{m_p}(\phi) = 0$. Si ahora suponemos que $k_{m_i} \leq |\phi| < k_{m_{i+1}}$ entonces se tiene que $\sum_{p=1}^{N} a_p x_{m_p}(\phi) = a_i x_{m_i}(\phi)$, dado que tienen soporte disjunto por hipótesis. Y dado que $\|x_{m_i}\| \geq \delta$ para toda i con $1 \leq i \leq N$. Entonces tenemos que $\left\|\sum_{p=1}^{N} a_p x_{m_p}\right\| \geq \delta \sup_{1\leq n\leq N} |a_n|$.

Tomemos n fijo. Sea l el primer entero tal que $k_{m_l} \geq n$. Entonces para toda $\psi \in T$ con $\psi \geq n$, existe un entero r tal que $x_{m_r}(\psi) \neq 0$ y por tanto $r \geq l$. Además resulta que si $\phi \in T$ con $|\phi| \geq n$ y además $r > l$, entonces

$$\left|\sum_{p=1}^{N} a_p x_{m_p}(\phi)\right| = |a_r x_{m_r}(\phi)| \leq \sup_{1\leq n\leq N} |a_n| \times \sup_{r>l} t(\phi, x_r).$$

Ahora tomando $\phi \in T$ con $|\phi| \geq n$ y además $r = l$, entonces se tiene que

$$\left|\sum_{p=1}^{N} a_p x_{m_p}(\phi)\right| = |a_l x_{m_l}(\phi)| \leq \sup_{1\leq n\leq N} |a_n| \times t(\phi, m_l).$$

Por lo tanto tenemos que

$$\sup_{\psi\geq\phi} |\sum_{p=1}^{N} a_p x_{m_p}(\phi)| \leq \sup_{1\leq n\leq N} |a_p| \times \sup(\sup_{r>l} t(\phi, m), t(\phi, m_l)).$$

Pero si $r > l$ tenemos que $m_r \in N_l$, y así por como construimos los conjuntos, implica que

$$\sum_{|\phi|=n} \sup_{r>l} t^2(\phi, m_r) \leq 2a^2.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\left(\sup_{\psi\geq\phi} |\sum_{p=1}^{N} a_p x_{m_p}(\phi)|\right)^2 &\leq \left(\sup_{1\leq n\leq N} |a_p|\right)^2 \times \sup\left(t^2(\phi, m_l), \left(\sup_{r>l} t(\phi, m)\right)^2\right)\\ &\leq \left(\sup_{1\leq n\leq N} |a_p|\right)^2 \times \sup(a^2, 2a^2) \leq \left(\sup_{1\leq n\leq N} |a_p|\right)^2 \times 3a^2.\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\left(\sum_{|\phi|=n} \left(\sup_{\psi\geq\phi} |\sum_{p=1}^{N} a_p x_{m_p}(\phi)|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq a\sqrt{3} \sup_{1\leq n\leq N} |a_p|,$$

de donde se deduce que $\left\|\sum_{p=1}^{N} a_p x_{m_p}\right\| \leq a\sqrt{3} \sup_{1\leq n\leq N} |a_p|$. Entonces tenemos que $\delta \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_p| \leq \left\|\sum_{p=1}^{\infty} a_p x_{m_p}\right\| \leq a\sqrt{3} \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_p|$ si $(a_p)_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que a partir de N, se tiene que $a_n = 0$ si $n \leq N$. Dado que en c_0 el conjunto de sucesiones $(a_p)_{p=1}^{\infty}$ tales que a partir de N, se tiene que $a_n = 0$ si $n \leq N$, es denso en c_0 podemos concluir que se siguen cumpliendo las desigualdades decir, si $(a_p)_{p=1}^{\infty} \in c_0$ entonces $\delta \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_p| \leq \left\|\sum_{p=1}^{\infty} a_p x_{m_p}\right\| \leq a\sqrt{3} \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_p|$. Y así se tiene que $(x_{m_p})_{p=1}^{\infty}$ es equivalente a la base de canónica de c_0 por definición. □

Corolario 3.1.5. *E^* tiene la propiedad de Schur. Por tanto E^* tiene la propiedad de Dunford-Pettis y así también E.*

Demostración. Sea una $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ sucesión en E^* que converge débilmente a 0, pero no converge en norma a 0. Existe un $\delta > 0$ tal que $\|x_n^*\| \leq \delta$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\|x_n\| \leq 1$ y $\delta \leq |x_n^* x_n| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente existe una subsucesión $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$ equivalente a la base canónica de c_0 por el resultado anterior. Así, si llamamos $M := sp((x_{n_j})_{j=1}^\infty)$ tenemos que $M^* \cong \ell^1$ y $M^{**} \cong \ell^\infty$. Más aún podemos restringir cada $x_{n_j}^*$ a M y como $x_{n_j}^* \in E^*$, entonces $x_{n_j}^*|_M$ está en M^*. Además también tenemos que $M^{**} \subseteq E^{**}$.

De esta manera podemos ver a $(x_{n_j}^*)_{j=1}^\infty$ como una sucesión encajada en ℓ^1 y que además converge débilmente a 0 en ℓ^1. Por tanto converge en norma a 0 en ℓ^1. Es decir, $\left\|x_{n_j}^*\right\|$ converge a 0 cuando j tiende a ∞. Pero como $x_{n_j} \in M$ entonces $|x_{n_j}^* x_{n_j}| \leq \left\|x_{n_j}^*\right\|_1$. Esto es una contradicción, ya que $|x_{n_j}^* x_{n_j}| \geq \delta > 0$. Por tanto $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ también converge en norma a 0, y E^* tiene la propiedad de Schur. $\square$

Otra forma de probar este corolario sería usando el siguiente teorema que se puede consultar en [22] (p. 171-173).

Teorema 3.1.6. *Sea X un espacio de Banach de tal modo que es isomorfo a un subespacio de c_0 o es isomorfo a un coeicnte de c_0 . Entonces X tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Más aún toda sucesión en X^* que es débilmente Cauchy se tiene que es convergente en el sentido de la norma.*

Hemos probado que el espacio E, así como el espacio E^* tienen la propiedad de Dunford-Pettis. Ahora veamos que los espacios $C([0,1], E)$ y el espacio $L_1(E^*)$ no la tienen. Para hacer esto necesitamos la siguiente construcción:

Construcción. Sea $K := [0,1]$. K es un conjunto compacto, más aún a cada $x \in [0,1]$ le podemos una representación binaria única. Así denotaremos como $\mathcal{P}_n$ la proyección de K sobre $\{0,1\}^n$, es decir, si $x \in K$, entonces $\mathcal{P}_n(x)$ son sus primeras n entradas de dicha representación binaria. Dado $\phi \in T$ denotaremos por $e_\phi \in E$, a la función tal que $e_\phi(\phi) = 1$ y $e_\phi(\psi) = 0$ si $\psi \neq \phi$. En este caso e_ϕ es la función indicadora sobre ϕ. De forma análoga denotaremos por e_ϕ^* a la función tal que, dado $x \in E$ entonces $e_\phi^*(x) = x(\phi)$, así $e_\phi^* \in E^*$.

Definimos la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^\infty$ como sigue: dado $t \in K$ entonces $f_n(t) = e_{\mathcal{P}_n(t)}$. Veamos que $f_n \in C(K, E)$. Dada la representación de $s, t \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta > 0$ tal que si $|t - s| < \delta$, entonces $\mathcal{P}_k(t) = \mathcal{P}_k(s)$, donde $k \geq n$. Entonces si $|t - s| < \delta$, se tiene que $\mathcal{P}_n(t) = \mathcal{P}_n(s)$, con lo que $\|f_n(t) - f_n(s)\| =$

$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{|\phi|=n}(\sup_{\psi\geq\phi}|e_{\mathcal{P}_n(t)}-e_{\mathcal{P}_n(s)}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}=0$ dado que $e_{\mathcal{P}_n(t)}=e_{\mathcal{P}_n(s)}$. Por tanto $f_n\in C(K,E)$ para toda $n\in\mathbb{N}$.

Tomemos la medida de Lebesgue en $[0,1]$, denotada por λ. Definimos las funciones $g_n\in L_1(\lambda,E^*)$ como sigue: dado $t\in K$ entonces $g_n(t)=e^*_{\mathcal{P}_n(t)}$. Veamos que $g_n\in L_1(\lambda,E^*)$. Pero notemos primero que $\|g_n(t)\|_{E^*}=\left\|e^*_{\mathcal{P}_n(t)}\right\|_{E^*}=\sup\{|x(\mathcal{P}_n(t))|:\|x\|_E\leq 1\}$, así si $\|x\|_E\leq 1$ entonces $|x(\phi)|\leq 1$ para toda $\phi\in T$. Así tenemos que $\|g_n(t)\|_{E^*}\leq 1$. De donde tenemos que

$$\|g_n\|_1\leq\int_{[0,1]}\|g_n(t)\|_{E^*}\,d\lambda(t)\leq\int_{[0,1]}1d\lambda(t)=1.$$

Por tanto $g_n\in L_1(\lambda,E^*)$ y además $\|g_n\|_1\leq 1$.

A partir de este momento y en lo subsecuente $(f_n)_{n=1}^\infty$ y $(g_n)_{n=1}^\infty$ denotarán a las sucesiones que acabamos de construir. Dadas estas dos sucesiones, veamos que ambas sucesiones de funciones convergen débilmente a cero en sus respectivos espacios.

Proposición 3.1.7. *La sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^\infty$ que acabamos de construir converge débilmente a 0 en $C([0,1],E)$.*

Demostración. Sea $k\in\mathbb{N}$ y sean $m_1,...,m_k$ enteros distintos. Si tomamos $t\in[0,1]$ y $n\in\mathbb{N}$ fijos, entonces para toda $\phi\in T$ con $|\phi|=n$ tenemos que

$$\sup_{\psi\geq\phi}|\sum_{1\leq i\leq k}f_{m_i}(t)(\psi)|\leq 1,$$

dado que a lo más uno de los $f_{m_i}(t)(\phi)$ puede ser no nulo por su definición. Por otra parte si $\phi_1,\phi_2\in T$ tal que $|\phi_1|=n=|\phi_2|$ y $\phi_1\neq\phi_2$, entonces si $\psi\geq\phi_1$ se sigue que $\psi\ngeq\phi_2$, y también se da el recíproco. Notemos que el soporte de $\sum_{1\leq i\leq k}f_{m_i}(t)$ solo tiene k puntos de T, por lo que

$$\sum_{|\phi|=n}\left(\sup_{\psi\geq\phi}|\sum_{1\leq i\leq k}f_{m_i}(t)(\psi)|\right)^2\leq k.$$

Así se tiene que $\left\|\sum_{1\leq i\leq k}f_{m_i}(t)\right\|\leq k^{\frac{1}{2}}$ y entonces $\left\|\sum_{1\leq i\leq k}f_{m_i}\right\|\leq k^{\frac{1}{2}}$. Pero esto implica que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge débilmente a 0. Supongamos que no es así, es decir supongamos que existen $g\in C(K,E)^*$ y $\alpha>0$ tal que $\|g\|\leq 1$ y $g(f_m)>\alpha>0$

para una cantidad finita de enteros. Entonces tenemos que $\alpha k \leq g(\sum_{1\leq i\leq k} f_{m_i}) \leq \left\|\sum_{1\leq i\leq k} f_{m_i}\right\| \leq k^{\frac{1}{2}}$. Esto es una contradicción ya que la sucesión $(\frac{1}{\sqrt{k}})_{k=1}^{\infty}$ converge a 0. Por tanto $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a 0. □

Veremos que también la otra sucesión de funciones que construimos, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, converge débilmente a cero en su espacio, pero primero probaremos los siguientes lemas.

Lema 3.1.8. *Sea $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(K,E)^*$. Si existe una sucesión de números $A(l,k)$ tal que $\lim_{k\to\infty} k^{-1}A(l,k) = 2^{-\frac{l}{2}}$ y tales que para cada subsucesión de naturales $l < m_1 < ... < m_k$ se cumple que*

$$\left\|\sum_{1\leq i\leq k} \mu_{m_i}\right\| \leq A(l,k),$$

entonces la sucesión $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a 0.

Demostración. Supongamos que $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge débilmente a 0. Entonces existe $g \in C(K,E)^{**}$ y $\alpha > 0$ tal que $\|g\| \leq 1$ y que $g(\mu_n) > \alpha > 0$ para una cantidad infinita de enteros. Podemos elegir l tal que $2^{-\frac{l}{2}} < \alpha$. Además también podemos elegir k tal que $A(l,k) < \alpha k$ por la hipótesis. Y elegimos enteros tales que $l < m_1 < ... < m_k$ y además $g(\mu_{m_i}) > \alpha$ para cada $1 \leq i \leq k$. Entonces tendríamos

$$\alpha k < g(\sum_{1\leq i\leq k} \mu_{m_i}) < \left\|\sum_{1\leq i\leq k} \mu_{m_i}\right\| < \alpha k.$$

Pero esto es una contradicción, por tanto la sucesión $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a 0. □

Lema 3.1.9. *Sea $A \subseteq T$ tal que para todo $\phi \in A$ se tiene que $|\phi| = l$. Definimos $T(\phi) := \{\psi \in T : \psi \geq \phi\}$ y $d = \sup_{|\phi|=l} |T(\phi) \cap A|$, es decir, el supremo de la cardinalidad de la intersección $T(\phi) \cap A$ cuando $|\phi| = l$. Entonces $\left\|\sum_{\phi\in A} e_{\phi}^*\right\| \leq 2^{\frac{l}{2}} d$.*

Demostración. Dado $|\phi| = l$ entonces si $T(\phi) \cap A \neq \emptyset$ podemos escribir

$$T(\phi) \cap A = \{\psi_j : 1 \leq j \leq d\}.$$

Se sigue que $A = \cup_{1\leq i\leq d} A_i$, donde cada $A_i = \{\psi_i : \psi_i \in T(\phi) \cap A, |\psi| = l\}$. Así, para cada $\phi \in T$ con $|\phi| = l$, se tiene que $|T(\phi) \cap A| \leq 1$. Más aún $|A_i| \leq 2^l$. Además dado $x \in E$, se tiene que $(\sum_{\phi\in A_i}(x(\phi)))^2 \leq 2^l \sum_{\phi\in A_i}(x(\phi))^2$. Por tanto, se siguen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{\phi\in A} e^*_\phi\Big\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} |\sum_{\phi\in A_i} x(\phi)| \leq 2^{\frac{l}{2}} \sup_{\|x\|\leq 1} \Big(\sum_{\phi\in A_i}(x(\phi))^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \Big(\sum_{\phi\in A_i}(\sup_{\psi\geq\phi} x(\psi))^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{l}{2}}.\end{aligned}$$

La última desigualdad se tiene porque $\|x\| \leq 1$. Así se deduce que $\Big\|\sum_{\phi\in A} e^*_\phi\Big\| \leq 2^{\frac{l}{2}} d$. ☐

Antes de probar que las funciones que definimos convergen débilmente, mencionaremos la ley de los grandes números, un resultado de probabilidad que aquí no probaremos, pero es necesario para nuestro trabajo. La demostración se puede consultar por ejemplo en [13] (capítulo 3, p. 118).

Teorema 3.1.10. *(Ley de los grandes números) Sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media $\mu \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Entonces*

$$\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mu,$$

cuando n tiende a ∞, donde esta convergencia es en probabilidad.

Ahora sí veamos que la sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a 0.

Proposición 3.1.11. *Sea $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por $\mu_n(f) := \int_0^1 g_n(t)(f(t))d\lambda(t)$, donde $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión que construimos. Entonces se tiene que $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a 0 en $C(K,E)^*$ y por tanto $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge también débilmente a 0 en su espacio.*

Demostración. Basta encontrar una cota como en el lema 3.1.8. Sea $f \in C(K,E)$ con $\|f\| \leq 1$, entonces

$$\Big|\sum_{1\leq i\leq k} \mu_{m_i}(f)\Big| \leq \int_0^1 \Big|\sum_{1\leq i\leq k} g_{m_i}(t)(f(t))\Big| d\lambda(t),$$

por lo que

$$\left\| \sum_{1\le i\le k} \mu_{m_i} \right\| \le \int_0^1 \left\| \sum_{1\le i\le k} g_{m_i}(t) \right\|_{E^*} d\lambda(t),$$

y utilizando el lema anterior donde l es tal que $l \le m_1 < ... < m_k$ tenemos que

$$\left\| \sum_{1\le i\le k} \mu_{m_i} \right\| \le 2^{\frac{l}{2}} \int_0^1 d_k(t) d\lambda(t),$$

donde $d_k(t) = \sup_{|\phi|=l} |\{i \le k : \mathcal{P}_{m_i}(t) \le \phi\}|$. Ahora veamos que cumple la propiedad límite del lema 3.1.8. Definimos para $\phi \in T$, con $|\phi| = l$, las funciones $h_i^{\phi} : [0,1] \to \{0,1\}$, dadas por

$$h_i^{\phi}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathcal{P}_{m_i}(t) \le \phi \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por definición se cumple entonces que $d_k(t) = \sup_{|\phi|=l} \sum_{i=1}^{k} h_i^{\phi}$.

Ahora, por como hemos definido a las funciones h_i^{ϕ}, se pueden ver como variables aleatorias del $[0,1]$. Como $l \le m_1 < ... < m_k$ entonces $p_{m_i}(t) \ge \phi$ si y solo si $p_{m_j}(t) \ge \phi$ cuando $1 \le i,j \le k$. Por tanto las h_i^{ϕ} están idénticamente distribuidas. Dado que las h_i^{ϕ} se pueden ver como variables aleatorias del tipo Bernoulli, éstas son independientes si y solo si $Cov(h_i^{\phi}, h_j^{\phi}) = 0$ para $i \ne j$. Pero esto sucede si $P[h_i^{\phi} = 1, h_j^{\phi} = 1] = 2^{-2l}$, pero esto sucede ya que el evento $\{h_i^{\phi} = 1, h_j^{\phi} = 1\}$ sucede si tanto el l-segmento inicial de h_i^{ϕ} y h_j^{ϕ} coinciden con ϕ y esa probabilidad es 2^{-2l}. Por tanto las $\{h_i^{\phi}\}_{i=1}^{\infty}$ son variables aleatorias e idénticamente distribuidas. Y su media es $\mathbb{E}(h_i^{\phi}) = \int_0^1 h_i^{\phi} = \mathbb{P}\{x : \phi \le \mathcal{P}_{m_i}(x)\}$ pero esto sucede si el l-segmento inicial de su representación como sucesión de ceros y unos, es decir, los primeros l elementos de esta sucesión coinciden con ϕ, dado que hay 2^l distintos l-segmentos iniciales, tenemos que $\mathbb{P}\{x : \phi \le \mathcal{P}_{m_i}(x)\} = 2^{-l}$.

Así la ley de los grandes números nos dice que $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} h_i^{\phi}$ tiende a 2^{-l} cuando k tiende a ∞ en probabilidad. Por tanto tenemos que también $\frac{1}{k} d_k(t)$ tiende a 2^{-l} cuando k tiende a ∞ en probabilidad. Con lo que tenemos por convergencia dominada el siguiente límite

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 d_k(t) d\lambda(t) = 2^{-l}.$$

Entonces $2^{\frac{l}{2}} \int_0^1 d_k(t)d\lambda(t)$ es la cota que buscamos y cumple con la hipótesis del lema, así la sucesión $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a 0. $\square$

A partir de los resultados previos, podemos ver los dos resultados principales para lo que fue construido el espacio de Talagrand; los siguientes dos resultados fueron demostrados por Talagrand en [32].

Teorema 3.1.12. *(Talagrand, 1982) Dado el espacio de Talagrand E, se tiene que $L_1(\lambda, E^*)$ no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Demostración. Vamos a denotar por I_1 al operador lineal de $C(K, E)$ en $(L_1(\lambda, E^*))^*$. Dadas $f \in C(K, E)$ y $g \in L_1(\lambda, E^*)$, se tiene que

$$I_1(f)(g) = \int_0^1 g(t)(f(t))d\lambda(t).$$

I_1 es un operador acotado, dado que

$$\int_{[0,1]} |g(t)(f(t))|d\lambda(t) \leq \int_{[0,1]} \|f(t)\|_{E^*} d\lambda(t) \leq 1 = \|f\|$$

si $\|g\|_{E^*} \leq 1$ y $\|f\| = 1$. Por las dos proposiciones anteriores tenemos que tanto $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ así como $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ convergen débilmente a 0 en sus respectivos espacios. Es decir, tenemos que si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a 0, entonces $(I_1(f_n))_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a cero en $(L_1(\lambda, E^*))^*$. Si $L_1(\lambda, E^*)$ tuviera la propiedad de Dunford-Pettis, entonces $I_1(f_n)(g_n)$ converge a 0 cuando n tiende a ∞. Pero $f_n(t) = e_{P_n(t)}$ y $g_n(t) = e^*_{P_n(t)}$, así tenemos que

$$(g_n(t))(f_n(t)) = e_{P_n(t)}(P_n(t)) = 1.$$

Por tanto $I_1(f_n)(g_n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así el espacio $L_1(\lambda, E^*)$ no tiene la propiedad de Dunford-Pettis. $\square$

Teorema 3.1.13. *(Talagrand, 1982) Dado el espacio de Talagrand E, se tiene que $C([0, 1], E)$ no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

Demostración. Tomemos I_1 el operador que definimos en el teorema anterior, es decir, I_1 es un operador lineal de $C(K, E)$ en $(L_1(\lambda, E^*))^*$, que actua de la siguiente forma: dadas $f \in C(K, E)$ y $g \in L_1(\lambda, E^*)$, se tiene que

$$I_1(f)(g) = \int_0^1 g(t)(f(t))d\lambda(t).$$

Sea I_1^* el operador adjunto, se tiene que $I_1^* : (L_1(\lambda, E^*))^{**} \to (C(K,E))^*$ es lineal y acotado. Definimos el operador I_2 como la restricción de I_1^* a $L_1(\lambda, E^*)$, es decir, $I_2(g)(f) = I_1^*(g)(f) = g(I_1(f)) = I_1(f)(g)$ donde $f \in L_1(\lambda, E^*)$ y $g \in C(K,E)$. Entonces tenemos que tanto $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ como $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ convergen débilmente a 0. Dado que I_2 es un operador continuo, tenemos que es débilmente continuo y así $(I_2(g_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 débilmente en $(C(K,E))^*$ y por hipótesis $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a 0 en $C([0,1],E)$. Pero $I_2(g_n)(f_n) = I_1(f_n)(g_n) = 1$ por lo que vimos en la prueba anterior. Por tanto $C(K,E)$ tampoco tiene la propiedad de Dunford-Pettis. $\square$

3.2. Otros aspectos de la propiedad de Dunford-Pettis

En esta sección concluiremos con los temas presentados en la tesis. Primero se mencionarán más ejemplos de espacios con la propiedad de Dunford-Pettis, luego se presentarán algunos resultados que complementan lo visto en la sección 1,7 y se mencionarán algunas propiedades adicionales del espacio de Talagrand.

Ejemplos.

1. El álgebra del disco, es decir, $A(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa}\}$, donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$, tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Más aún, las álgebras de los discos de radio $r > 0$ y las álgebras de los polidiscos también la poseen.

2. El espacio de Hardy $H^1 = \{f \in A(\mathbb{D}) : \sup\limits_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty\}$ no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

3. Los espacios $C^k[0,1]^n$ tienen la propiedad de Dunford-Pettis. Es decir, las funciones k veces diferenciables con derivada continua con dominio en $[0,1]^n$.

3.2.1. Resultado de Núñez

En [26] se prueba que el espacio de Talagrand E, es tal que E^{**} no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

Teorema 3.2.1. *Sea E el espacio de Talagrand. Entonces E^{**} no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.*

El resultado se obtiene primero viendo que si definimos $e_\phi \in E$ como

$$e_\phi(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi = \phi \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $\psi, \phi \in T$. Entonces $\{e_\phi : \phi \in T\}$ es un conjunto numerable y que además de generar a cualquier elemento en E de soporte finito, se puede ver que constituyen una base incondicional para el espacio. A partir de ello y utilizando la proposición 1.7.12 se construye un operador $R : E^* \to \ell^2$. En este caso Núñez muestra que este operador admite selecciones de aproximación local y además es un isomorfismo. Entonces usando la proposición 1.7.12, se tiene que $R^*(T^{**})$ es complementado en ℓ^2. Pero sabemos que ℓ^2 no tiene la propiedad de Dunford-Pettis. Por tanto E^{**} no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

Este artículo se complementa haciendo la pregunta: ¿Si X es un espacio de Banach tal que X^{**} tiene la propiedad de Dunford-Pettis, entonces $C(K, X)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis?

3.2.2. Propiedad de Dunford-Pettis hereditaria

Como la propiedad de Dunford-Pettis no se hereda de forma natural a subespacios cerrados se tiene la siguiente definición.

Definición 3.2.2. *Sea X un espacio de Banach, se dice que X tiene la propiedad de Dunford-Pettis hereditaria (PDPH) si todo subespacio cerrado $A \subseteq X$ la tiene.*

Esta propiedad es más fuerte que la propiedad de Dunford-Pettis. La prueba de la siguiente proposición se puede encontrar en [22].

Proposición 3.2.3. *El espacio c_0 tiene la propiedad de Dunford-Pettis hereditaria.*

Más aún, dado el teorema 3.1.6 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.2.4. *Sea X un espacio de Banach isomorfo a un subespacio de c_0 o a un cociente de c_0. Entonces X tiene la propiedad de Dunford-Pettis hereditaria. Más aún, por el teorema 3.1.4, se tiene que el espacio de Talagrand tiene la propiedad de Dunford-Pettis hereditaria.*

Otro ejemplo es:

1. $C(K)$ tiene la PDPH si K es perfecto, es decir, es cerrado y no tiene puntos aislados. Y, $C(K, X)$ tiene la PDPH si tanto $C(K)$ como X la tienen.

Los dos resultados anteriores se pueden consultar en [12].

Ahora veamos un resultado debido a Castillo y González, (ver [10]), que muestra que además de que la propiedad de Dunford-Pettis no solo no hereda a cocientes ni a subespacios cerrados, tampoco es una propiedad de tres espacios.

Definición 3.2.5. *Sea $A = \{n_1, ..., n_k\} \subseteq \mathbb{N}$. Decimos que A es un conjunto admisible si $k \leq n_1$, es decir, si la cardinalidad de A es menor o igual que su primer elemento.*

Sea R el espacio definido por $R := \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}^n$, es decir, de todas las n-adas de reales para alguna $n \in \mathbb{N}$. Definimos la norma $\| \; \|_R$ de la siguiente forma: si $x \in R$, entonces

$$\|x\|_R = \sup\{\textstyle\sum_{j\in A} |x_j| : A \text{ es admisible } \}.$$

Veamos que R es un espacio normado con esta norma. Definimos el espacio de Banach S como la completación de R con esta norma. Es decir, $R \subset S$ y se tiene $\|x\|_S = \|x\|_R$ si $x \in R$, además que S es un espacio completo por construcción.

El espacio S se conoce como el espacio de Schreier y veamos que también tiene una base incondicional formada por la sucesión de vectores canónicos.

Lema 3.2.6. *Sea X un espacio de Banach. X tiene la PDPH si toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que converge débilmente a cero, tiene una subsucesión $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, tal que para alguna $K > 0$, se tiene que*

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} x_{n_j} \right\| \leq K.$$

En [10] muestran que S no tiene la propiedad de Dunford-Pettis, ya que tanto en S como S^*, los vectores unitarios forman una sucesión débilmente convergente.

S se puede encajar en c_0, y entonces podemos definir un operador $T : \ell^1 \bigoplus S \to c_0$ de la siguiente forma $T(x, y) = q(x) + i(y)$, donde $i : S \to c_0$ es la inclusión o el encaje de S en c_0 y $q : \ell^1 \to c_0$ es el mapeo cociente definido en 1.4.16. Entonces T es un mapeo cociente. Utilizando el principio de Bessaga-Pelczynski y el lema anterior se tiene que $\mathrm{Ker}(T)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis hereditaria.

Dado que es T un mapeo cociente entonces $\ell^1 \bigoplus S/\mathrm{Ker}(T)$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis ya que es isomorfo a un subespacio cerrado de c_0. Y también tenemos que $\mathrm{Ker}(T)$ es un subespacio de $\ell^1 \bigoplus S$ con la propiedad de Dunford-Pettis. Pero $\ell^1 \bigoplus S$ no la tiene ya que por construcción S no la tiene y dado que $(\ell^1 \bigoplus S)^* \cong \ell^\infty \bigoplus S^*$, entonces $\ell^1 \bigoplus S$ no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

Teorema 3.2.7. *La propiedad de Dunford-Pettis no es propiedad de tres espacios.*

Después de este resultado en [10], Castillo y González encontraron una forma restringida de ser propiedad de tres espacios y nuevamente aparece como hipótesis que no haya una copia de ℓ^1 en el espacio.

Teorema 3.2.8. *Sea X un espacio de Banach que no contiene copias de ℓ^1. Entonces X^{**} tiene la propiedad de Dunford-Pettis si y solo si , tanto X como $X^{**}/\mathscr{C}(X)$ la tienen, donde $\mathscr{C}$ es el mapeo canónico de X en X^{**}.*

Como corolario se tiene que $E^{**}/\mathscr{C}(E)$, donde E es el espacio de Talagrand, no tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

Además en el mismo artículo muestran dos espacios X y Y de Banach que cumplen que X^* y Y^* son isomorfos, pero que son tales que X tiene la PDPH y Y ni siquiera tiene la propiedad de Dunford-Pettis.

Finalmente, mencionaremos otro resultado debido a Castillo junto con Simoes (ver [11]):

Definición 3.2.9. *Sean X, Y y Z espacios de Banach. Decimos que X es la suma torcida de Y y Z, si existe un subespacio A de X que es isomorfo a Y y tal que X/A es isomorfo a Z.*

En términos categóricos, que X sea la suma torcida de Y y Z significa que existen operadores lineales tal que hacen a la siguiente una sucesión exacta:

$$0 \xrightarrow{T_1} Y \xrightarrow{T_2} X \xrightarrow{T_3} Z \xrightarrow{T_4} 0,$$

es decir, cada T_i es un operador lineal , y además $\text{Ker}(T_i) = \text{Im}(T_{i-1})$.

Teorema 3.2.10. *(Castillo y Simoes, 1999) Todo espacio de Banach es un subespacio complementado de la suma torcida de dos espacios con la propiedad de Dunford-Pettis. Es decir, dado un espacio de Banach X, existen espacios de Banach Y y Z con la propiedad de Dunford-Pettis, tal que X es un subespacio de la suma torcida de Y y Z, y más aún, X es un subespacio complementado.*

En la prueba se construyen dos espacios, primero un espacio $C(K)$ para algún espacio K compacto, tal que exista un subespacio isomorfo a X contenido en $C(K)$. Y el espacio $\ell^1(\Gamma)$ donde Γ es un conjunto de indices adecuado. Ambos tienen la propiedad de Dunford-Pettis y hacen una sucesión exacta de la forma:

$$0 \xrightarrow{T_1} B \xrightarrow{T_2} \ell^1(\Gamma) \bigoplus X \xrightarrow{T_3} C(K) \xrightarrow{T_4} 0,$$

donde $B \subseteq \ell^1(\Gamma)$ es un subespacio cerrado.

Demostración. Sea X un espacio de Banach. Por el corolario 1.5.27 existe un compacto K, tal que X es isomorfo a un subespacio cerrado de $C(K)$. Sea Γ el conjunto de índices tal que $C(K)$ es isomorfo a un cociente de $\ell^1(\Gamma)$, como en el teorema 1.4.16. Denotemos por j a la inclusión canónica, es decir, $j : X \to C(K)$. Denotemos por R al mapeo cociente, es decir, $R : \ell^1(\Gamma) \to C(K)$. Veamos que $B := R^{-1}(j(X))$ es un subespacio de $\ell^1(\Gamma)$ y que por tanto tiene la propiedad de Schur y también la propiedad de Dunford-Pettis. Si $p \in B$ entonces existe un único $x \in X$ tal que $Rp = jx$, esto sucede ya que tanto R como j son mapeos inyectivos. Así el operador $T : B \to \ell^1(\Gamma) \bigoplus X$ definido por $T(p) = (p, x)$ está bien definido y además es inyectivo, por tanto es un encaje. Ahora definimos al operador $S : \ell^1(\Gamma) \bigoplus X \to C(K)$ como $S(l, x) = Rl - jx$. S es un mapeo cociente ya que R y j lo son y que además $\text{Ker}(S) = T(B)$. Por tanto la siguiente cadena es exacta

$$0 \xrightarrow{T_1} B \xrightarrow{T} \ell^1(\Gamma) \bigoplus X \xrightarrow{S} C(K) \xrightarrow{T_4} 0,$$

donde T_1 y T_4 son los mapeos triviales, y X es un subespacio completado de $\ell^1(\Gamma) \bigoplus X$. $\square$

Apéndice A

Teoría de la Medida

En este apéndice incluimos algunos resultados básicos de teoría de la medida que se utilizan a lo largo del texto. Todos los resultados se puede consultar con mayor detalle en [29] (caps. 1 y 2) y [5] (caps. 2, 3, 4, 5, 6 y 7).

A.1. Espacios de Medida y Medida de Lebesgue

Definición A.1.1. *Sean X un conjunto y Σ una colección de subconjuntos de X no vacía. Se dice que Σ es una σ-álgebra de X si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Si $E \in \Sigma$ entonces $E^c \in \Sigma$.*

2. *Si $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ entonces $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.*

Definición A.1.2. *Sea X un conjunto y μ^* una función tal que $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$. Decimos que μ^* es medida exterior si es no negativa y además:*

1. *Si $E, F \subseteq X$ tal que $E \subseteq F$ entonces $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.*

2. *$\mu^*(\emptyset) = 0$.*

3. *Si $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{P}(X)$ entonces $\mu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$.*

Observación. $\overline{\mathbb{R}}$ denota a los reales extendidos, es decir, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Definición A.1.3. *Sean X un conjunto, Σ una σ-álgebra de X y $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ una función . Entonces decimos que μ es una medida en Σ si cumple con las siguientes condiciones:*

1. *Si $E \in \Sigma$, entonces $\mu(E) \geq 0$.*
2. *$\mu(\emptyset) = 0$.*
3. *Si $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos, entonces $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.*

Definición A.1.4. *Un espacio de medida es una tripleta (X, Σ, μ), donde X es un conjunto, Σ es una σ-álgebra de X y $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ es una medida en Σ.*

Definición A.1.5. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\{I_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una colección de intervalos en $\mathbb{R}$. Decimos que $\{I_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es cubierta de Lebesgue de A si $A \subseteq \cup_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$.*

Proposición A.1.6. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Definimos $m^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ como*

$$m^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda(I_\gamma) : \{I_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \text{ es cubierta de Lebesgue de } A \},$$

donde λ denota la longitud del intervalo. Entonces μ^* es una medida exterior en $\mathbb{R}$. A esta medida exterior le llamamos medida exterior de Lebesgue.

Definición A.1.7. *Sea X un conjunto y μ^* una medida exterior en X. Decimos que $E \subseteq X$ es un conjunto μ^*-medible si para todo A subconjunto de X se tiene que:*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Teorema A.1.8. *(Proceso de Carathéodory) Sea X un conjunto y μ^* una medida exterior en X. Denotemos por M al conjunto de todos los subconjuntos de X que son μ^*-medibles. Entonces M es una σ-álgebra y μ^* restringida a M es una medida.*

A la σ-álgebra obtenida por el proceso de Carathéodory a partir de la medida exterior de Lebesgue le llamamos la σ-álgebra de Lebesgue. En este caso denotaremos a la σ-álgebra de Lebesgue por $\mathcal{L}$ y a la medida de Lebesgue por m. Para la construcción más detallada de esta se puede ver [5]. Además $\mathcal{L}$ contiene a todos los intervalos abiertos y cerrados. Por tanto contiene a los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$.

Definición A.1.9. *Sean* (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función. Se dice que* f *es Lebesgue medible, si para todo* $E \in \mathcal{L}$ *se tiene que* $f^{-1}(E) \in \Sigma$.

A.2. Integral de Lebesgue y Espacios L_p

Dado un conjunto X y $E \subseteq X$ la función indicadora denotada por χ_E es la función tal que

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E \\ 0, & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Definición A.2.1. *Sean* (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* f *función medible . Decimos que* f *es simple si se puede ver como* $f = \sum_{n=1}^{k} a_n \chi_{E_n}$, *donde* $k \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$ *y* $E_1, ..., E_k$ *son subconjuntos de* X *disjuntos.*

Esta representación puede no ser única.

Definición A.2.2. *Sean* (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* f *una función simple no negativa, es decir, si* $f = \sum_{n=1}^{k} a_n \chi_{E_n}$ *se tiene que* $a_i > 0$ *para* $1 \leq n \leq k$ *. Definimos la integral de* f *como:*

$$\int_X f d\lambda := \sum_{n=1}^{k} a_n \mu(E_n).$$

Esta definición no depende de la representación de f.

Definición A.2.3. *Sean* (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* f *una función medible no negativa . Entonces definimos la integral de* f *como:*

$$\int_X f \ d\lambda := \sup \left\{ \int g \ d\lambda : g \textit{ es una función simple y } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Definición A.2.4. *Sean* (X, Σ, μ) *un espacio de medida,* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión creciente de funciones medibles y* f *función medible . Decimos que* $f_n \to f$ *casi donde sea, si existe* $E \in \Sigma$*tal que* $\mu(E) = 0$ *y para todo* $x \in E^c$ *se tiene que* $f_n(x) \to f(x)$.

Teorema A.2.5. *(Teorema de Convergencia Monótona) Sean* (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles no negativas tal que* $f_n \to f$ *casi donde sea para una función* f, *y para cada* $x \in X$ *y para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. *Entonces*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Demostración. Notemos que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para todo $x \in X$, dado que $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente. Más aún, como f es medible y es no negativa, se siguen estás dos desigualdades $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ y $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu$. Por tanto

$$\int_X f \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Ahora basta probar la otra desigualdad. Sea g una función simple no negativa, tal que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Consideremos el conjunto $E_{n,\alpha} = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha g(x)\}$, donde $\alpha \in (0,1)$. Entonces

$$\int_{E_{n,\alpha}} ag \, d\mu \leq \int_{E_{n,\alpha}} f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

Dado que la sucesión es creciente tenemos que $E_{n,\alpha} \subseteq E_{n+1,\alpha}$. Si $g(x) = 0$ entonces $x \in E_{n,\alpha}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y si $g(x) > 0$, se tiene que $\lim f_n(x) = f(x) \geq g(x) > \alpha g(x)$, así $x \in E_{n,\alpha}$ para n suficientemente grande. Así $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_{n,\alpha}$ y

$$\int \alpha g \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Por tanto $\int g \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$, y $\int f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. □

Teorema A.2.6. *(Lema de Fatou) Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

Definición A.2.7. *Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida. Denotaremos por $\mathcal{L}_1(X)$ al espacio de funciones medibles tal que*

$$\int_X f^+ \, d\lambda < \infty \ y \int_X f^- \, d\lambda < \infty,$$

donde f^+ y f^- denotan la parte positiva y negativa de f.

Teorema A.2.8. *(Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue) Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{L}_1$ tal que $f_n \to f$ casi donde sea para una función f. Entonces:*

1. *$f \in \mathcal{L}_1$.*
2. *$\int_X f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\lambda$.*

Definición A.2.9. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Definimos la relación $\sim$ en $\mathcal{L}_1(X)$ como sigue: decimos que $f \sim g$ si y solo si $\int_X |f - g| \, d\lambda = 0$, donde $f, g \in \mathcal{L}_1(X)$. Denotaremos por $L_1(X)$ al espacio que resulta de tomar al espacio $\mathcal{L}_1(X)$ cociente la relación que acabamos de definir.*

Definición A.2.10. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Definimos los espacios $L_p(X)$, con $1 \leq p < \infty$, como*

$$L_p(X) = \{f : |f|^p \in L_1(X)\}.$$

Proposición A.2.11. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Entonces los espacios $L_p(X)$, con $1 \leq p < \infty$, con la norma $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$ son espacios normados. Más aún son espacios de Banach.*

Definición A.2.12. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Definimos el espacio $L_\infty(X)$ como*

$$L_\infty(X) = \{f : f \text{ es acotada casi donde sea }\},$$

es decir, f es acotada excepto en conjunto de medida cero.

Proposición A.2.13. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Entonces el espacio $L_\infty(X)$ con la norma $\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 : \mu(\{x : f(x) > M\}) = 0\}$ es un espacio normado. Más aún es un espacio de Banach.*

A.3. Convergencia

En espacios de medida hay distintos tipos de convergencia (en medida, en L_p, casi donde sea, uniforme). En el texto solo ocuparemos dos tipos de convergencia, la convergencia casi donde sea (a. e.) y la convergencia uniforme. En este caso mencionaremos el teorema de Egorov y el teorema de Lusin. Las pruebas de ambos teoremas se pueden encontrar en [29] (p 73 y 55 respectivamente) o de igual forma en [21] (sección 2.3, p. 62 y 64).

Teorema A.3.1. *(Teorema de Egorov) Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \to f$ casi donde sea para una función medible f. Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe un conjunto $E \subseteq X$ tal que $\mu(E) < \infty$ y $f_n \to f$ en E^c.*

Teorema A.3.2. *(Teorema de Lusin) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue medible y $\epsilon > 0$, entonces existe un conjunto compacto $E \subseteq [a, b]$ tal que $m(E^c) < \epsilon$ y f restringida a E es continua.*

A.4. Densidad de Lebesgue

Definición A.4.1. *Sea A un subconjunto Lebesgue-medible de $\mathbb{R}$. Denotemos por m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Definimos la densidad de A en el punto x, denotada por $D_A(x)$, como*

$$D_A(x) := \lim_{r \to 0^+} \frac{m(A \cap B_r(x))}{m(B_r(x))},$$

cuando este límite existe. $B_r(x)$ es la bola de radio r centrada en x.

Para $E \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ definimos las funciones:

$$d_+(E, x) := \liminf_{y \to x^+} \frac{m^*(E \cap (x, y))}{y - x},$$

$$d_-(E, x) := \liminf_{y \to x^-} \frac{m^*(E \cap (x, y))}{x - y}.$$

Lema A.4.2. *Sea $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $U \subseteq (a, b)$ un conjunto abierto. Entonces el conjunto*

$$U_G := \{x \in U : \text{ existe } y > x \text{ tal que } (x, y) \subseteq U \text{ y } G(x) > G(y)\}$$

es abierto. Más aún, si (c, d) es un subconjunto de U_G, entonces $G(c) \geq G(d)$.

Demostración. Por como hemos definido U_G es abierto. Sea (c,d) un subconjunto de U_G. Veamos que $G(x) \geq G(d)$ para todo $x \in (c,d)$. Sea $s := \max\{r \in [x,d] : G(x) \geq G(r)\}$ y supongamos que $s < d$. Entonces $G(x) < G(d)$ y $s \in U_G$. Entonces existe $t > s$ con $(s,t) \subseteq U$ y $G(s) > G(t)$. Si $t \leq d$, entonces $G(x) \geq G(s) > G(t)$, lo que contradice la maximalidad de s. Y si $t > d$, entonces $G(d) > G(x) \geq G(s) > G(t)$ implica que $d \in U_G$, una contradicción. Entonces $s = d$ y por tanto $G(x) \geq G(d)$. □

Teorema A.4.3. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible. Entonces el conjunto $A := \{x \in E : d_+(E,x) < 1\}$ tiene medida exterior cero.*

Demostración. Es suficiente probar que $A_n := \{x \in E \cap [-n,n] : d_+(E,x) < \frac{n}{n+1}\}$ tiene medida exterior cero. Consideremos la función $G : [-n,n] \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = m^*(E \cap (-n,n)) - \tfrac{n}{n+1}x.$$

Si $x < y$ se tiene que $G(y) - G(x) = m^*(E \cap (x,y)) - n\frac{y-x}{n+1}$ por las propiedades de medida exterior. Dado que $0 \leq m^*(E \cap (x,y)) \leq y - x$, se sigue que G es continuo.

Sea $\epsilon > 0$. Por monotonía de la medida exterior existe $U \subseteq (-n,n)$ tal que $A_n \subseteq U$ y $m^*(U) < m^*(A_n) + \epsilon$. Dado que $d_+(E,x) < \frac{n}{n+1}$ para todo $x \in A_n$, entonces $A_n \subseteq U_G$. Sea (c_k,d_k) los subconjuntos de U_G. Entonces por el lema tenemos que $G(c_k) \geq G(d_k)$ para todo k y por tanto $m^*(E \cap (c_k,d_k)) \leq \frac{n(c_k-d_k)}{n+1}$. Entonces por las propiedades y la definicón de una medida exterior tenemos que

$$m^*(A_n) \leq \sum_k m^*(A_n \cap (c_k,d_k)) \leq \sum_k \frac{n}{n+1}(d_k - c_k) = \frac{n}{n+1}m^*(U_G).$$

Entonces $m^*(A_n) < \frac{n(m^*(A_n)+\epsilon)}{n+1}$, y así $m^*(A_n) < n\epsilon$. Por tanto $m^*(A_n) = 0$, lo que prueba el teorema. □

De forma análoga tenemos que $B := \{x \in E : d_-(E,x) < 1\}$ tiene medida exterior cero. Entonces $d_-(E,x) = d_+(E,x) = 1$ para casi todo $x \in E$ y esto prueba el siguiente teorema.

Teorema A.4.4. *(Teorema de densidad de Lebesgue) Sea A un subconjunto Lebesgue-medible de $\mathbb{R}$. Entonces para casi todo punto x de A se tiene que*

$$D_A(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{m(A \cap B_r(x))}{m(B_r(x))}$$

existe y es igual a 1.

Bibliografía

[1] F. Albiac , N. J. Kalton *Topics in Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York, 2006.

[2] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, Springer-Verlag, New York, 2015.

[3] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Hafner Publishing, Warsaw, 1932.

[4] S. Banach, *Theory of Linear Operations*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[5] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[6] F. Bombal, *Sobre algunas propiedades de espacios de Banach*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid 84 (1990), 83-116.

[7] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press, New York, 2004.

[8] N. L. Carothers, *Real Analysis*, Cambridge University Press, New York, 2000.

[9] J.M.F.Castillo , M. González, *The Dunford-Petttis property is not a three-space property*, Israel J. Math. 81 (1993), 297-299.

[10] J.M.F.Castillo , M. González, *New Results on the Dunford-Pettis property*, Bull. London Math. Soc. 27 (1995), 599-605.

[11] J.M.F.Castillo , M.A. Simoes, *On the Three-space problem for the Dunford-Pettis property*, Bull. Austral. Math. Soc. 60 (1999), 487-493.

[12] P. Cembranos, *The hereditary Dunford-Pettis property*, Illinois Journal of Math. 31 (1987), 365-373.

[13] E. Çinlar, *Probability and Stochastics*; Springer-Verlag, New York, 2011.

[14] I.K. Daugavet, *On a property of completely continuous operators in the space C*, Uspekhi Mat. Nauk 18 (1963), 157-158 (Russian).

[15] J. Diestel, *A survey of results related to the Dunford-Pettis Property*, AMS Contemp Math. 2 (1980), 15-60.

[16] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, AMS, Providence, R.I., 1977.

[17] N. Dunford, B.J. Pettis, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1940), 323-392.

[18] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators, Volumes 1, 2 & 3*, Wiley Classic's Library, New York, 1988.

[19] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. 130 (1973), 309-317.

[20] M. Fabian, et. al., *Banach Space Theory. The Basis for Linear and nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2010.

[21] G. B. Folland, *Real Analysis: Mdern Techniques and Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[22] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)*, Canad. J. Math. 5 (1953), 129-173.

[23] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[24] T. J. Morrison, *Functional Analysis. An Introduction to Banach Space Theory*, John Wiley & Sons, New York, 2000.

[25] J. R. Munkres, *Topology*, Pretince-Hall, New York, 2000.

[26] C. Núñez, *A conjecture about the Dunford-Pettis property* , Portugaliae Math. 46 Fasc. 2 (1989) , 131-135.

[27] H.P. Rosenthal, *On injective Banach spaces and the spaces $L_\infty(\mu)$ for finite measures μ.*, Acta Math. 124 (1970), 205-248.

[28] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Singapore, 1991.

[29] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Singapore, 1987.

[30] C. Stegall, *Duals of certain spaces with the Dunford-Pettis property*, Notices of AMS 19 (1972), 799.

[31] C. Stegall, *Banach spaces whose duals contain $\ell^1(\Gamma)$ with applications to the study of dual L_1 spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 463-477.

[32] M. Talagrand, *La propiété de Dunford-Pettis dans $C(K, E)$ et $L_1(E)$*, Israel J. Math. 44 (1983), 317-321.

[33] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[34] R. Whitley, *An elementary proof or the Eberlein-Şmulian theorem*, Mathematische Annalen 172 (1967), 116-188.

[35] P. P. Zabreiko, *A theorem for semiadditive functionals*, Functional Anal. Appl. 3 (1969), 70-72.