



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**MODELO Y SIMULACIÓN DE UN CUADRICÓPTERO (EN CRUZ) CON
APLICACIONES EN LA INDUSTRIA DE LAS PINTURAS**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
JESÚS ANTONIO ROSAS GUTIÉRREZ

TUTOR PRINCIPAL
JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
CARLOS IGNACIO MENDOZA RUÍZ
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

JOSÉ ALBERTO OLIVARES LECONA
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN POLÍMEROS

CD.MX., 10 DE SEPTIEMBRE DE 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Modelo y simulación de un cuadricóptero (en cruz) con aplicaciones en la industria de las pinturas.

Resumen

En este trabajo se desarrolla el modelo matemático y la simulación computacional del vuelo de un cuadricóptero en determinadas trayectorias llevando sobre su centro de masa una pistola con pintura, siendo capaz de pintar una pared en el plano XZ describiendo trayectorias planas verticales como los son círculos, elipses y funciones armónicas, entre otras.

Se trató al cuadricóptero como un cuerpo rígido para modelar su orientación en el espacio a través de las ecuaciones de Euler y el movimiento de su centro de masa con la mecánica de Newton. Se hará notar que se requieren parámetros de control diferentes para cada caso de vuelo, es decir, para diferentes trayectorias y varios tiempos de recorrido, ya que este último caso implica que las tasas de aplicación de pintura sean distintas.

Se verifica que el modelo mecánico y matemático realizado basado en las formulaciones de la mecánica analítica de Newton y Euler resulta idóneo para tratar el vuelo del cuadricóptero.

Comité tutor

Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes, IF, UNAM.

Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruíz, IIM, UNAM.

Dr. José Alberto Olivares Lecona, CIP, COMEX.

Jurado

Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes, IF, UNAM.

Dra. Catherine García Reimbert, IIMAS, UNAM.

Dra. Mirna Villavicencio Torres, FC, UNAM.

Dr. Omar Guillermo Morales Saavedra, ICAT, UNAM.

Dr. Daniel Martínez Sánchez, UACM.

Agradecimientos

Este tema me lo sugirió José Alberto como trabajo de tesis y a Adrián y a mi nos gustó, así que voy a empezar por ellos.

Al Dr. Adrián Reyes, por haber sido mi tutor, porque con sus conocimientos y consejos pero sobre todo infinita paciencia consiguió guiarme hasta el final; al Dr. Alberto Olivares, por abrirme las puertas del CIP y hacer que en cada visita me sintiera como en casa; al Dr. Carlos Mendoza, por siempre estar dispuesto a recibirme en su oficina.

A mis sinodales, por darse el tiempo de leer mi trabajo y hacer aportaciones para perfeccionarlo; a la Dra. Catherine García, porque se emocionó tanto como yo con el cuadricóptero; a la Dra. Mirna Villavicencio, porque sus buenos comentarios sobre mi trabajo me motivaron aún más; al Dr. Omar Morales, por ayudarme y ser mi sidodal una vez más; al Dr. Daniel Martínez, que sin conocernos previamente aceptó revisar mi trabajo y cooperó de gran manera a mejorarlo.

A mis amigos del Taller de control y electrónica, porque con ellos los días en la Facultad no son aburridos y porque sin proponérselo su dedicación al estudio me motiva a continuar. Al profe José Luis del Río, que sigue siendo mi gran amigo y al que tanto le debo; a Luis Fernando, que me ayudó, otra vez, con aportaciones que fueron determinantes en el desarrollo de mi trabajo; a mis nobles amigos Marisol y Guille, que juntos empezamos este camino; al siempre sonriente Gabo; al siempre ocurrente Marco; a la siempre presente Paola; a los chiquitos Fernanda y Félix; a mi colega ayudante Juan Carlos y al tremendo Mario, que completan esa familia que habita el laboratorio.

A Mari, que sigue siendo tan linda conmigo.

A mis mamás Tere y Lupe, que esperaron otros cuatro años pero que les da tanto gusto verme concluir; a mis hermanos Diana, Zayra, Toto y Raúl, por su apoyo y compañía; a mis sobrinas Sofía y Danna, que espero sigan mi camino y esto les sirva de motivación para hacerlo; a Dalila y al más pequeño de todos que es Mateo, porque con ellos ya estamos toda la familia.

A papá Chucho, por ser la estrella que yo sigo.

Para ellos va mi agradecimiento.

Contenido

Introducción	5
Capítulo 1 : Modelo mecánico analítico del sistema	9
1.1 Modelo	
1.2 Rotación general del cuerpo	
1.2.1 Ángulos de Tait-Bryan	
1.2.1.1 Balanceo	
1.2.1.2 Cabeceo	
1.2.1.3 Guiñada	
1.2.1.4 Matrices de rotación	
1.3 Vector velocidad angular	
Capítulo 2 : Movimiento de traslación	24
2.1 Peso W	
2.2 Fuerza de empuje generada por los motores	
2.3 Fuerza de arrastre (rozamiento)	
2.4 Retroceso generado en la salida de la boquilla de la pistola	
2.4.1 Pistolas aerográficas	
2.4.1.1 Funcionamiento	
2.4.1.2 Pistolas HVPL	
2.4.1.3 Pistolas híbridas	
2.4.1.4 Abanico de proyección	
2.5 Ecuación de movimiento del centro de masa	
Capítulo 3 : Movimiento de rotación	32
3.1 Torca de guiñada	
3.1.1 Torca de arrastre del aire	
3.1.2 Conservación de momento angular	
3.2 Torca de balanceo	
3.3 Torca de cabeceo	
Capítulo 4 : Formulación de Euler (movimiento de rotación)	36
4.1 Ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido	
4.2 Ecuaciones de movimiento angulares	

Capítulo 5 : Problema inverso	39
5.1 Ecuaciones que gobiernan el movimiento del centro de masa	
5.2 Movimiento confinado al plano vertical XZ	
5.2.1 Movimiento vertical ascendente (despegue)	
5.2.2 Suspendido en un punto fijo	
5.2.3 Movimiento horizontal	
5.2.4 Movimiento circular	
5.2.5 Movimiento en una elipse horizontal	
5.2.6 Movimiento en un seno vertical	
5.3 Movimiento en una trayectoria no plana sin giro de guiñada	
5.4 Cualquier trayectoria en el espacio y un grado de libertad interno	
5.5 Compensación del empuje de la pistola	
Capítulo 6 : Simulaciones	59
6.1 Parámetros del sistema	
6.1.1 Velocidad mínima de sustentación u_0	
6.1.2 Coeficiente de rozamiento k_{roz} y de arrastre k_D	
6.2 Tipos y detalles de vuelo	
6.2.1 Movimiento vertical ascendente (despegue)	
6.2.2 Suspendido en un punto fijo	
6.2.3 Movimiento horizontal	
6.2.4 Movimiento circular	
6.2.5 Movimiento en un seno vertical	
Conclusiones	90
Bibliografía	93

Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados UAV (Unmanned Aerial Vehicle), conocidos comúnmente como drones (plural de dron de acuerdo al Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española), han ganado mucho interés en la actualidad debido a la gran cantidad de tareas que se pueden desarrollar con ellos. Inicialmente su uso era con fines militares y con aspecto de avión, pero se han vuelto tan populares entre la sociedad civil, que se les han encontrado múltiples aplicaciones como pueden ser: vigilancia, combate de incendios, filmación, rescate, exploración, construcción, recreación, entre otros.

Existen diversos tipos y clasificaciones de estos drones: según su uso, se clasifican en militares y civiles; según sus alas, hay drones de ala fija y drones multirrotor; según su control, los hay autónomos o controlados remotamente. De entre los drones multirrotor, los hay con cuatro motores (cuadricóptero) en forma de *cruz* o en forma de *equis*, con 6 motores (hexacóptero) y 8 motores (octacóptero).

Sobre este tema se han presentado diversos trabajos en el ámbito académico, por ejemplo la tesis de maestría que Guilherme Vianna Raffo [6], en la que establece el modelo y control de seguimiento de trayectoria de un cuadricóptero; o el artículo [7] en el que primero obtienen las ecuaciones completas que describen la dinámica del cuadricóptero, tanto rotacional como traslacional, para después crear un entorno de simulación en el programa Matlab con el cual se prueban y observan los resultados de varias entradas y controladores, para conseguirlo resuelven las ecuaciones diferenciales utilizando el método de Euler y realizan ajustes utilizando un algoritmo de control.

También, utilizando controladores PID se desarrolló un sistema capaz de navegación autónoma y detección vía remota de incendios [8]. Se usan estos controladores para lograr un vuelo estabilizado en las trayectorias de navegación y ayudar en la planificación de las mismas, quedando el dron como un sistema de sensor aéreo autónomo para la planificación del movimiento.

En el sector de la construcción también están incursionando los drones. Por ejemplo, la compañía japonesa Komatsu que fabrica principalmente maquinaria para la industria de la construcción y la empresa californiana desarrolladora de software para el análisis de datos Skycatch tienen un acuerdo de colaboración, con el que Komatsu comenzó a utilizar la tecnología de Skycatch para hacer su maquinaria más eficaz [9]. Hasta antes, Komatsu utilizaba topógrafos humanos para sus mapeos tardando varios días en dicho proceso, pero con los drones de

Skycatch a su cargo le toma minutos escanear y crear mapas tridimensionales precisos del terreno, mismos que se envían directamente a los vehículos de la construcción. Principalmente su plan es que los drones monitoreen el sitio de construcción y a los vehículos desde el aire y sobre la marcha ir actualizando los planes según sea necesario.

También la compañía de tecnología china DJI llegó a un acuerdo en el año 2016 con Skycatch para lanzar una aplicación de vuelo en el sistema iOS que se podrá integrar en los últimos modelos de drones de DJI. Esta aplicación permite recopilar datos de forma autónoma y el usuario solo tiene que delimitar el terreno a analizar, la aplicación genera la ruta más adecuada y el dron vuela sin salirse de ese espacio. Finalmente se crean mapas 3D de alta resolución a los que se pueden acceder en la propia aplicación.

Incluso empresas importantes en desarrollo de software y programación establecen récords Guinness además de crear espectáculos al volar el mayor número de drones de forma simultánea. Inicialmente fue Intel quien lo hizo al volar 100 drones en noviembre de 2015. Más tarde, la misma compañía rompió su récord al volar 500 drones en un festival de Alemania en octubre de 2016, dos años después volvería a romper su récord al volar más de 1200 drones en conjunto durante la ceremonia de apertura de los Juegos Olímpicos de Invierno de 2018 celebrados de Pionchang, Corea del Sur. Meses después, la compañía china Beijing Yi-Hang Creation Science & Technology Co rompió el récord al volar 1374 drones modelo «Ehang» simultáneamente en la ciudad de Xi'an de ese mismo país.

Esta última empresa, dedicada a la creación de los UAV, anunció en el año de 2016 nuevos drones con la capacidad de transportar pasajeros y en 2017 anunció planes para lanzar un servicio autónomo de taxi aéreo en Dubái. También ha trabajado con un proyecto del Instituto de Sistemas Autónomos de Nevada para un taxi teledirigido que transporta un solo pasajero hasta por 23 minutos con el dron «Ehang 184», mismo que fue presentado en 2016 y es el primer avión no tripulado de pasajeros en el mundo.

Cada vez más compañías, como Amazon, DHL, Google, 7-Eleven, Uber, Domino's, entre otras, tratan de aprovecharse de la facilidad que brindaría utilizar drones para la entrega de productos y servicios. Hay una disputa por quién realizó la primera entrega con drones en el mundo, pues en 2014 una pizzería logró la primera entrega a domicilio en la ciudad de Bombay en la India.

Estos trabajos y hechos sirvieron como motivación y apoyo para la realización de la presente tesis en la cual se realiza el modelo y la simulación de un cuadricóptero en forma de *cruz* capaz de pintar superficies verticales, como una pared en el plano XZ , de manera autónoma, para ello el cuadricóptero carga en su centro de masa una pistola con pintura que podría decidirse vaya disminuyendo con el tiempo al ser aplicada en la pared o que se mantenga constante mediante un sistema de realimentación.

En los primeros capítulos se describe la Física involucrada en el vuelo del cuadricóptero, se muestra que es conveniente tratarlo como «cuerpo rígido» por lo que la formulación matemática utilizada es la mecánica del cuerpo rígido de Euler, además de la mecánica de Newton necesaria para describir el movimien-

to del centro de masa, es decir, Euler para describir las rotaciones y Newton para describir las traslaciones. Entonces fue necesario definir dos sistemas coordenados tridimensionales, uno fijo en Tierra llamado sistema de laboratorio y denotado como S_I y otro fijo al cuerpo con su origen en el centro de masa del cuadricóptero y los ejes alineados con los brazos denotado como S_B , el eje X de este sistema se alinea con la parte frontal y trasera del cuadricóptero mientras que el brazo izquierdo y derecho se alinean con el eje Y . La formulación de la mecánica analítica de Euler y Newton ha sido aplicada en diversos trabajos para describir tanto la dinámica del centro de masa como del sistema rígido en términos de los «ángulos de Euler».

El cuadricóptero estará sometido a cuatro fuerzas, algunas inherentes al propio cuerpo y otras externas. Si se elige que la pintura que lleva el cuadricóptero no sea recargable, el peso del sistema cuadricóptero-pintura disminuirá con el tiempo de manera lenta debido a la aplicación de la pintura. La fuerza de sustentación y responsable de los movimientos del cuadricóptero en el espacio tridimensional se debe principalmente al empuje generado por los cuatro motores colocados cada uno en el extremo de sus brazos, variando estas fuerzas de empuje se consiguen movimientos horizontales, verticales y rotatorios del cuerpo pero es necesario introducir una matriz de rotaciones sucesivas para ir del sistema fijo al cuerpo hacia el sistema de laboratorio. Al moverse en el aire, el cuerpo presenta resistencia aerodinámica que, haciendo analogía con la fricción, se dirige en sentido opuesto al movimiento por lo que el término llevará signo negativo, esta fuerza se considera en las tres dimensiones x, y, z del sistema de laboratorio y se tratará con la ley de Stokes, aunque se mostrará al final de la tesis que el coeficiente necesario para que los resultados numéricos coincidan con las soluciones analíticas deberá ser enormemente mayor que el obtenido a través de la ley de Stokes. Las tres fuerzas señaladas corresponden al vuelo simple del cuadricóptero y para esta tesis se agrega una cuarta fuerza considerada de retroceso ya que es originada en la boquilla de la pistola al aplicarse la pintura, dicho empuje será pequeño pero dado que el vuelo del cuadricóptero es susceptible a pequeñas perturbaciones serán consideradas sus repercusiones. Para facilitar el problema del vuelo del cuadricóptero, la pistola que aplica la pintura se coloca sobre el centro del mismo, es decir, sobre su centro de masa, de esta manera se mantiene la simetría del cuerpo y las ecuaciones con su tensor de inercia son más simples.

En los capítulos posteriores se muestran algunas de las trayectorias que el cuadricóptero puede realizar en el plano XZ , las ecuaciones de movimiento que se obtienen para resolver dichas trayectorias y finalmente se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones haciendo la comparación entre las soluciones analíticas y las numéricas. Inicialmente se propone una trayectoria paramétrica $x(t), y(t), z(t)$ en el plano vertical XZ que el cuadricóptero recorra cubriendo toda la pared. Dada la trayectoria se obtienen la primera y segunda derivada temporal de las coordenadas paramétricas y se sustituyen en las ecuaciones diferenciales obtenidas con las formulaciones de Newton y Euler, luego se obtiene el ángulo θ que corresponde al ángulo principal de los cálculos debido a que se eligió que el vuelo sea en un plano vertical; una vez conocido el comportamiento

del ángulo θ se obtienen las velocidades que deben tener cada uno de los cuatro motores en función del tiempo para que el cuadricóptero se mueva describiendo la trayectoria previamente definida. Finalmente, las velocidades de los motores se introducen en las ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan el vuelo del cuadricóptero y se resuelven numéricamente con un paquete que incluye una rutina simple de Runge-Kutta [16]. El control debe ser tal que balancee el peso del sistema que va cambiando con el tiempo de manera lenta, el empuje generado por los cuatro motores, la fricción del cuerpo con el medio (aire) y el retroceso generado en la boquilla de la pistola al aplicar la pintura. Al resolver dicho problema, se consigue que el cuadricóptero recupere la trayectoria antes dada, es decir, realice los desplazamientos tridimensionales necesarios para «cubrir» la superficie que se desea pintar.

Como trabajo posterior, también se podría elegir que la pintura sea enviada a la pistola a través de una manguera conectada a una compresora que puede estar a nivel de piso o en el techo del lugar. En este modo de realimentación se elimina el problema de que la masa va disminuyendo, pues se mantendría constante el nivel de pintura dentro de la pistola en todo momento, solo que este caso el peso del sistema cambiaría debido a que la columna de pintura dentro de la manguera variará con la altura del cuadricóptero, además de que dicha manguera aplicaría una fuerza adicional cuando el cuadricóptero se desplace con movimiento horizontales.

Esta tesis se planteó con la finalidad de mostrar la aplicación que se le puede dar, dentro de la industria de las pinturas, a un objeto como lo es el cuadricóptero y a la Física que lo envuelve, y es tan sólo una de la gran variedad de aplicaciones que se le pueden dar dentro de otras áreas, siendo estas las razones por la que cada vez este tipo de drones va ganando mayor interés en la sociedad. Esta vez se decidió pensar en un área como la industria de las pinturas y de llevarse a cabo la construcción de un proyecto como el de esta tesis, podría sustituirse el trabajo de varias personas por el de sólo un cuadricóptero, y si acaso el de un operador, beneficiándose en casos como el de reducir gastos pero sobre todo el de evitar accidentes al pintar superficies a gran altura, lo que representa un alto riesgo para la integridad de la persona y más gastos para la industria en pólizas de seguro.

En conclusión, el objetivo de esta tesis es establecer el comportamiento de los motores del cuadricóptero, es decir, las velocidades de cada uno de ellos como función del tiempo y de la trayectoria paramétrica dada para que el centro de masa del cuerpo describa trayectorias prescritas que permitan pintar una superficie de forma automatizada.

Capítulo 1

Modelo mecánico analítico del sistema

Para la obtención del modelo matemático se seguirán los lineamientos de las tesis de maestría [5], [6] y el artículo [7].

1.1. Modelo

Para la descripción del modelo se usarán dos sistemas coordenados tridimensionales considerados sistemas derechos, es decir, si se hace el producto cruz de los ejes X e Y se obtiene el eje Z , Fig.(1.1).

$$X \times Y = Z. \quad (1.1)$$

Se considera al cuadricóptero, cuya configuración es en «cruz», como un cuerpo rígido en el espacio, situado en un sistema de coordenadas tridimensional que será llamado S_B y que está fijo al él, cuyo origen del sistema está en el centro de masa y los ejes alineados con los brazos del cuerpo. Al alinear los brazos del cuadricóptero con los ejes coordenados se elige de manera arbitraria que la parte frontal corresponda al $motor_1$ apuntando en la dirección del eje X positiva y la parte trasera corresponda al $motor_3$ apuntando en la dirección X negativa, mientras que el brazo izquierdo corresponda al $motor_2$ apuntando en la dirección Y positiva y el brazo derecho corresponda al $motor_4$ apuntando en la dirección Y negativa, Fig.(1.2). Para contrarrestar los efectos giroscópicos que los motores provocan en el vuelo del cuadricóptero, el $motor_1$ y $motor_3$ girarán en el sentido horario y sus velocidades de rotación serán denotadas como u_1 y u_3 respectivamente, mientras que el $motor_2$ y $motor_4$ girarán en sentido antihorario y sus velocidades de rotación serán denotadas como u_2 y u_4 respectivamente.

Además del sistema coordenado fijo al cuerpo S_B , ya que se tratará al cuadricóptero como cuerpo rígido, para localizarlo en el espacio también se definirá un sistema inercial S_I fijo respecto a Tierra, que será llamado sistema de labora-

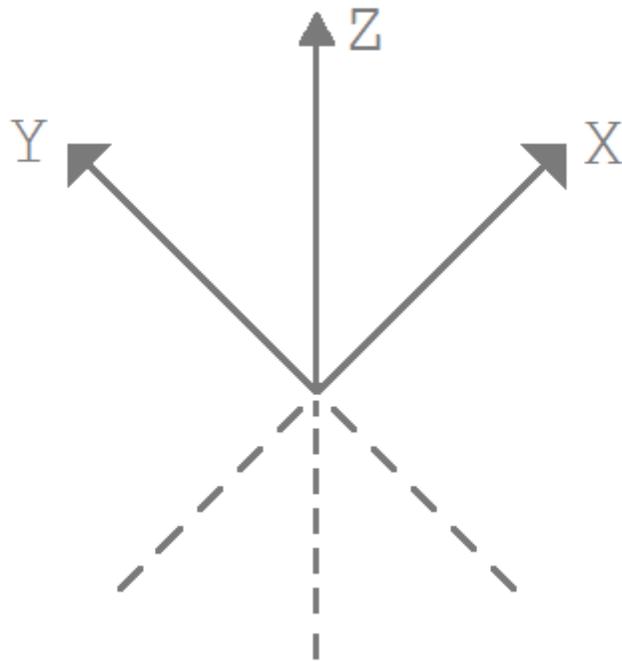


Figura 1.1: Sistema derecho de coordenadas. Si se hace el producto cruz de los ejes X e Y se obtiene el eje Z .

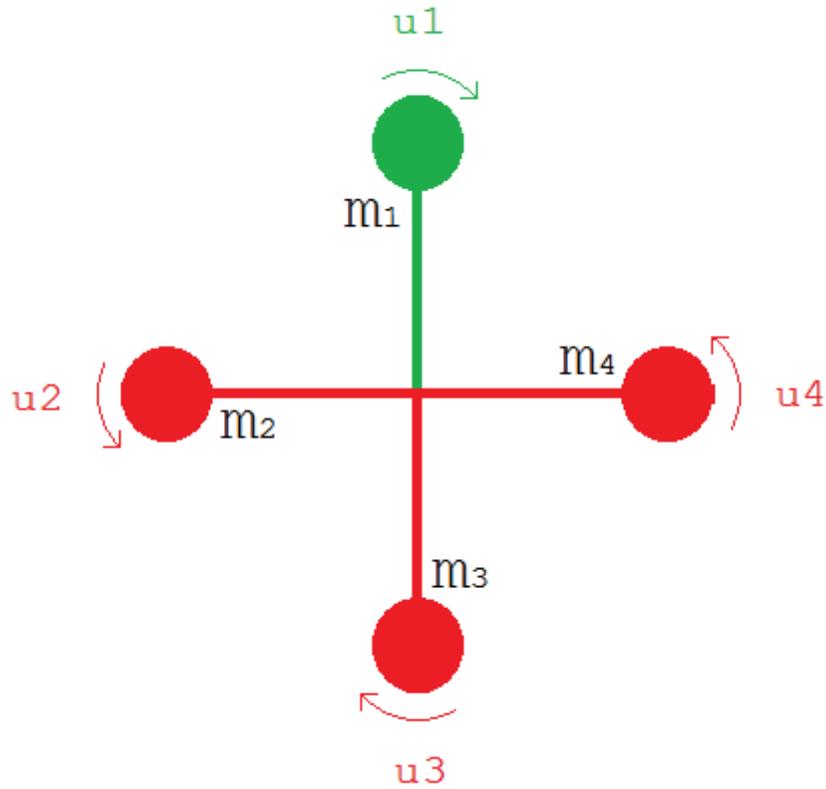


Figura 1.2: Configuración de un cuadricóptero del tipo «cruz». Se muestra la dirección de rotación, representada por flechas, de cada uno de los motores, representados por círculos, para compensar los efectos giroscópicos ocasionados por ellos mismos. La parte frontal del cuadricóptero es el $motor_1$ representado en círculo color verde y su velocidad de rotación se denota como u_1 mientras que la parte trasera del cuadricóptero es el $motor_3$ representado en círculo color rojo y su velocidad de rotación se denota como u_3 , estando ambos motores alineados sobre el eje X del sistema S_B fijo al cuerpo; el lado izquierdo del cuadricóptero es el $motor_2$ representado en círculo color rojo y su velocidad de rotación se denota como u_2 mientras que el lado derecho del cuadricóptero es el $motor_4$ representado en círculo color rojo y su velocidad de rotación se denota como u_4 , estando ambos motores alineados sobre el eje Y del sistema fijo al cuerpo.

torio, entonces para ir del sistema fijo al cuerpo hacia el sistema de laboratorio será necesario introducir una matriz de rotaciones sucesivas que relacione los dos sistemas. Ambos sistemas coordinados se muestran en la Fig.(1.3).

El cuerpo estará sometido principalmente al empuje generado por las cuatro fuerzas coplanares (en el plano XY del sistema S_B del cuerpo) que sus cuatro motores provocan, Fig.(1.4), y a tres torcas que éstos motores generan. El cuerpo es simétrico, por lo que dos fuerzas estarán alineadas con el *eje X* y dos fuerzas con el *eje Y*. Por la manera arbitraria en que se eligió la disposición de los motores, las fuerzas f_1 y f_3 están sobre el *eje X*, quedando f_1 en el extremo positivo y f_3 en el extremo negativo, mientras que las fuerzas f_2 y f_4 quedaron en los extremos positivo y negativo del *eje Y* respectivamente. Con esta elección se definió que el frente del cuerpo apunte en la dirección positiva del eje X del sistema fijo al cuerpo y será correspondiente a la fuerza f_1 , la parte trasera del cuerpo apunta en la dirección negativa del eje X del sistema fijo al cuerpo y será correspondiente a la fuerza f_3 , el lado izquierdo del cuerpo apunta en la dirección positiva del eje Y del sistema fijo al cuerpo y será correspondiente a la fuerza f_2 y el lado derecho del cuerpo apunta en la dirección negativa del eje Y del sistema fijo al cuerpo y será correspondiente a la fuerza f_4 .

Debido a las tres torcas que generan las cuatro fuerzas de empuje de los motores, el cuerpo describe tres movimientos giroscópicos denominados balanceo (roll), cabeceo o inclinación (pitch) y guiñada u orientación (yaw), Fig.(1.5). Estos movimientos se identifican mediante los ángulos ϕ , θ y ψ respectivamente y son conocidos como ángulos de Tait-Bryan. Sobre dichos ángulo se detallará más en la siguiente sección.

En la Fig.(1.5) se ilustra que el eje de balanceo ϕ corresponde al eje X del sistema del cuerpo, el eje de cabeceo θ corresponde al eje Y del sistema del cuerpo y el eje de guiñada ψ corresponde al eje Z del sistema del cuerpo.

Las dos fuerzas restantes que se habrán de introducir en el modelo, son las fuerzas de fricción con el aire y el empuje (retroceso) generado en la boquilla de la pistola al aplicar la pintura. En términos generales, estas fuerzas contrarrestan a las fuerzas anteriores.

1.2. Rotación general del cuerpo

Para expresar las rotaciones y orientación de un cuerpo rígido se requieren nueve elementos, pero los ángulos de Euler representan una alternativa que solo usa tres ángulos. De ellos existen las convenciones ZXZ , ZYZ y XYZ ; esta última convención es conocida en matemáticas como ángulos de Tait-Bryan o Ángulos de Cardano y son tres ángulos usados para describir una rotación general en el espacio Euclideo tridimensional a través de tres rotaciones sucesivas en torno de ejes del sistema móvil en el cual están definidos; primero se rota en torno al eje X , después el sistema resultante se rota en torno al eje Y y finalmente el nuevo sistema obtenido se rota en torno al eje Z .

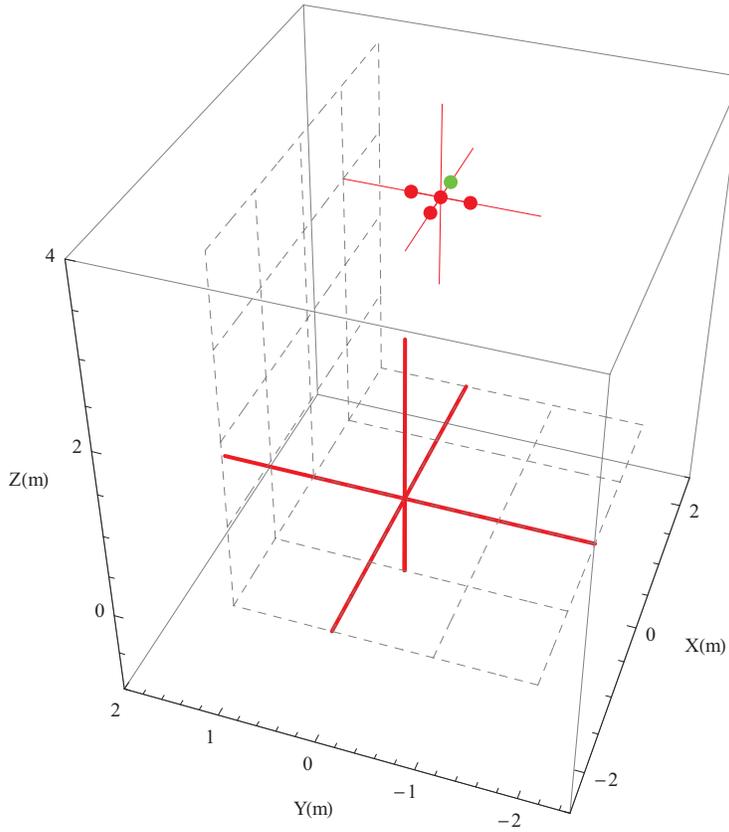


Figura 1.3: Sistemas coordenados. El sistema derecho de coordenadas S_I llamado sistema de laboratorio se representa en línea roja gruesa mientras que el sistema derecho coordenado S_B se muestra en línea roja delgada y está fijo al quadricóptero con origen en su centro de masa; se aprecia que los brazos del quadricóptero están alineados con este último sistema, siendo el frente del quadricóptero el motor representado en círculo color verde y apuntando en la dirección positiva del eje X . El cuadro horizontal en líneas punteadas simula el suelo, es decir, está alineado con el plano XY del sistema de laboratorio y el cuadro vertical en líneas punteadas representa la pared que habrá de pintarse y que se encuentra a 1 m de distancia del lado izquierdo del quadricóptero, esto es, un plano paralelo al plano XZ en el sistema de laboratorio.

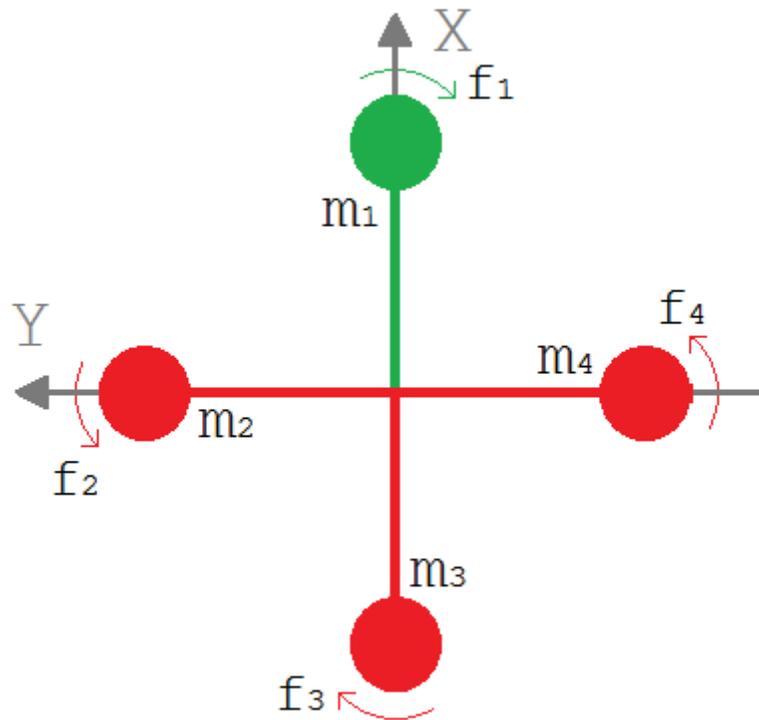


Figura 1.4: Fuerzas coplanares en el plano XY del sistema S_B fijo al cuerpo. Se muestra la dirección de rotación representada por flechas, de cada uno de los cuatro motores del cuadricóptero y la fuerza ascendente que cada uno de ellos genera: la fuerza f_1 corresponde al $motor_1$ representado en círculo color verde que apunta en la dirección positiva del eje X , la fuerza f_2 corresponde al $motor_2$ representado en círculo color rojo que apunta en la dirección positiva del eje Y , la fuerza f_3 corresponde al $motor_3$ representado en círculo color rojo que apunta en la dirección negativa del eje X y la fuerza f_4 corresponde al $motor_4$ representado en círculo color rojo que apunta en la dirección negativa del eje Y .

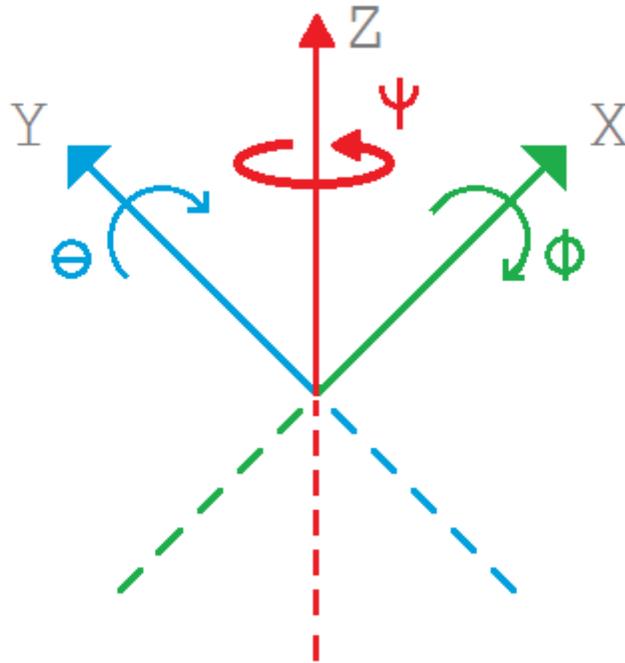


Figura 1.5: Rotación general del cuadricóptero. En la figura se aprecia que el eje de balanceo ϕ , representado en línea verde, corresponde al eje X del sistema del cuerpo, es decir, el cuadricóptero se balancea hacia la derecha o izquierda alrededor del eje X y resulta positivo en sentido horario; el eje de cabeceo θ , representado en línea azul, corresponde al eje Y del sistema del cuerpo, es decir, el cuadricóptero se inclina hacia adelante o atrás alrededor del eje Y y resulta positivo en sentido horario; finalmente, el eje de guiñada ψ , representado en línea roja, corresponde al eje Z del sistema del cuerpo, es decir, el cuadricóptero gira sobre su eje vertical Z y resulta positivo en sentido antihorario.

1.2.1. Ángulos de Tait-Bryan

Es la convención de los ángulos de Euler XYZ y es la utilizada en navegación por lo que se trata de tres ángulos ϕ , θ y ψ que corresponden al balanceo, cabeceo y guiñada del cuerpo.

1.2.1.1. Balanceo

Es la rotación de un ángulo ϕ o la inclinación a la derecha e izquierda del cuerpo tomando como eje de giro el *eje X* que es el eje de balanceo en el sistema de cuerpo S_B , siendo el ángulo positivo en sentido horario, Fig.(1.7). Las responsables de este movimiento son las fuerzas f_2 y f_4 correspondientes al *motor*₂ y *motor*₄, respectivamente. Debe existir un desequilibrio entre ellas para generar una variación en el ángulo y éste resulta positivo cuando f_2 es mayor que f_4 .

1.2.1.2. Cabeceo

Es la rotación de un ángulo θ o la inclinación hacia adelante y atrás del cuerpo tomando como eje de giro el *eje Y*, que es el eje de cabeceo en el sistema del cuerpo S_B , siendo el ángulo positivo en sentido horario. Para generar este movimiento debe haber un desequilibrio entre las fuerzas f_1 y f_3 correspondientes al *motor*₁ y *motor*₃, respectivamente. El ángulo resulta positivo cuando f_3 es mayor que f_1 . En la Fig.(1.6) se muestra la inclinación hacia el frente del cuadricóptero tomada de una de las simulaciones justo antes de iniciar el vuelo.

1.2.1.3. Guiñada

Es la rotación de un ángulo ψ respecto al eje vertical Z , perpendicular al cuerpo, siendo positivo en sentido antihorario. También se conoce como movimiento de deriva y para generarlo debe existir un desequilibrio entre los pares de fuerzas (f_1, f_3) y (f_2, f_4) y el ángulo resulta positivo cuando el empuje de la pareja de fuerzas (f_1, f_3) es mayor que el empuje de la pareja de fuerzas (f_2, f_4) .

1.2.1.4. Matrices de rotación

A continuación se muestran las matrices de rotación que representan la orientación de un cuerpo rígido rotando alrededor de cada eje.

La primera es la rotación tipo X y corresponde al movimiento de balanceo, es decir, rotación de un ángulo ϕ alrededor del eje X , dando origen a un sistema coordenado $X'Y'Z'$ y se obtiene a través de la siguiente matriz:

$$\tilde{R}_x(x, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

En la Fig.(1.7) se ilustra este tipo de rotación.

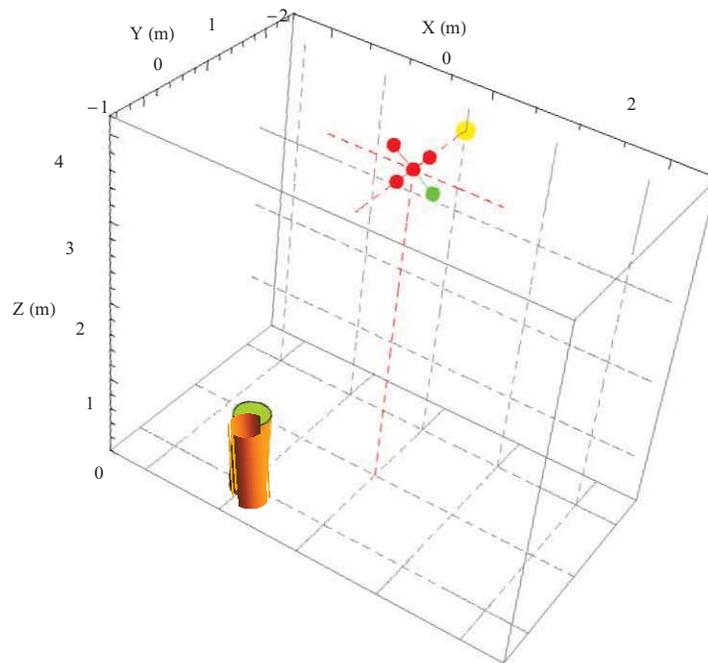


Figura 1.6: Ángulo de cabeceo. Se muestra al cuadricóptero a una altura de 3.95 m inclinado hacia el frente tomado de una de las simulaciones antes de iniciar el vuelo. Las líneas punteadas en rojo son auxiliares para visualizar mejor la ubicación del cuadricóptero en el espacio, el cuadro horizontal en líneas punteadas grises simula el suelo y el cuadro vertical al fondo en líneas punteadas grises simula la pared que habrá de pintarse, finalmente el cilindro amarillo muestra la cantidad de pintura en tiempo real que queda en la pistola.

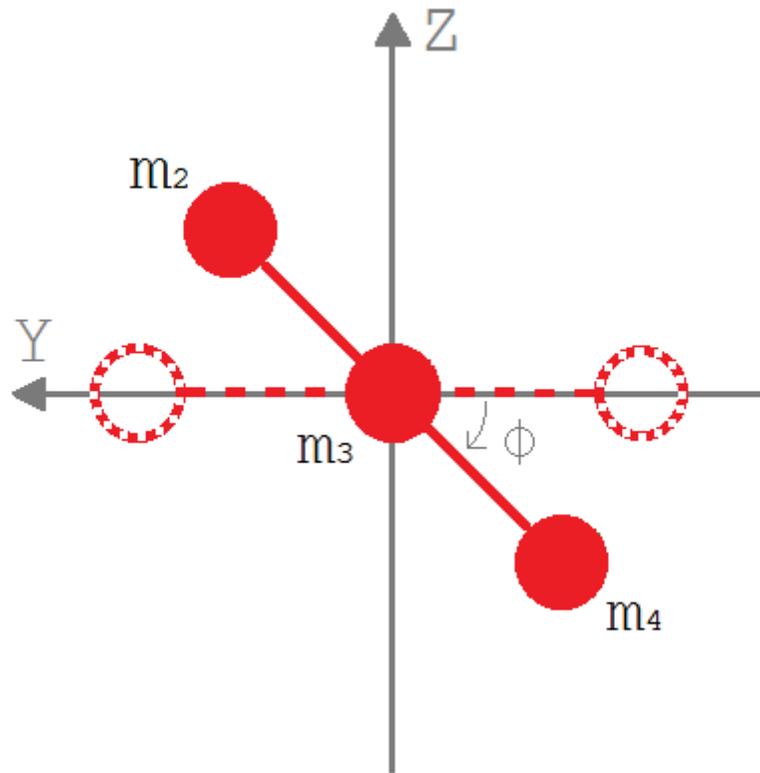


Figura 1.7: Rotación del ángulo de balanceo ϕ . Se rota un ángulo ϕ alrededor del eje X , por lo que este eje queda fijo, es decir, $X = X'$, el eje Y se convierte en el nuevo eje Y' y el eje Z se convierte en el nuevo eje Z' , ambos rotados el ángulo ϕ . En la figura se muestra el cuadricóptero inclinado hacia su derecha en una vista trasera alineada con el eje X que entra a la imagen, por lo que el *motor*₁ está oculto por el *motor*₃ representado en círculo color rojo.

La segunda es la rotación tipo Y y corresponde al movimiento de cabeceo, es decir, rotación de un ángulo θ alrededor del nuevo eje Y' , dando origen al sistema coordenado $X''Y''Z''$ y se obtiene a través de la siguiente matriz:

$$\tilde{R}_y(y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

En la Fig.(1.8) se ilustra este tipo de rotación.

La última rotación es la rotación tipo Z y corresponde al movimiento de guiñada, es decir, rotación de un ángulo ψ alrededor del nuevo eje Z'' , quedando el sistema coordenado $X'''Y'''Z'''$ y se obtiene a través de la siguiente matriz:

$$\tilde{R}_z(z, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

En la Fig.(1.9) se ilustra este tipo de rotación.

1.3. Vector velocidad angular

Es posible relacionar las tres rotaciones sucesivas arriba mencionadas a través de la siguiente matriz producto

$$\tilde{R}_I = \tilde{R}_z(z, \psi) \cdot \tilde{R}_y(y, \theta) \cdot \tilde{R}_x(x, \phi). \quad (1.5)$$

La matriz resultante describe la orientación relativa del sistema S_B con el sistema S_I y está dada por

$$\tilde{R}_I = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \sin \psi \cos \phi & \sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \cos \phi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Esta matriz lleva del sistema de coordenadas del cuerpo S_B al sistema fijo inercial S_I mediante la relación

$$S_I = \tilde{R}_I \cdot S_B. \quad (1.7)$$

Se puede asociar la derivada temporal de estos ángulos de rotación $\dot{\tilde{\Theta}} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$ con las componentes del vector velocidad angular del cuerpo $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Es importante hacer notar que $\dot{\tilde{\Theta}} \neq \bar{\omega}$, es decir

$$\begin{aligned} \omega_1 &\neq \dot{\phi}, \\ \omega_2 &\neq \dot{\theta}, \\ \omega_3 &\neq \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

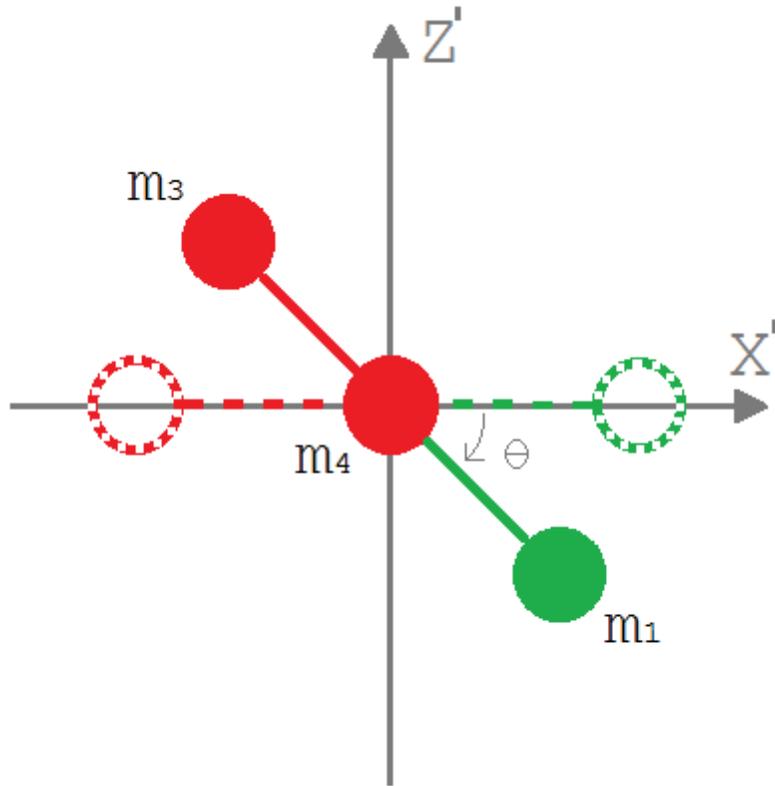


Figura 1.8: Rotación del ángulo de cabeceo θ . La figura muestra al cuadricóptero inclinado hacia adelante visto de perfil desde su lado derecho por lo que el $motor_2$ queda oculto por $motor_4$ representado en círculo color rojo. Después de haber hecho la rotación de balanceo anterior del cuadricóptero alrededor del eje X se obtuvo un nuevo sistema original $X'Y'Z'$ fijo al cuerpo representado en color gris, ahora se rota un ángulo θ alrededor del eje Y' cuya dirección positiva entra a la figura, con lo que este eje queda fijo, es decir, $Y' = Y''$, el eje X' se convierte en el nuevo eje X'' y el eje Z' se convierte en el nuevo eje Z'' , ambos rotados el ángulo θ . El frente del cuadricóptero es el $motor_1$ representado en círculo color verde, mientras que el $motor_3$ es la parte trasera del cuadricóptero representado en círculo color rojo, mientras que el $motor_2$ y $motor_4$ están alineados sobre el eje Y' .

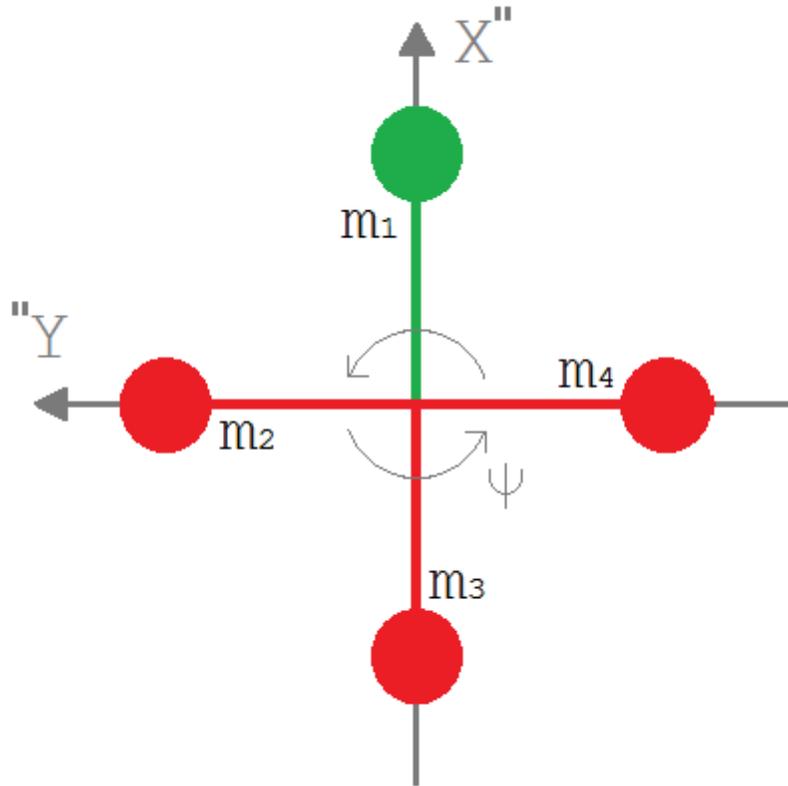


Figura 1.9: Rotación del ángulo de guiñada ψ . Después de haber hecho las dos rotaciones anteriores de balanceo y cabeceo del cuerpo alrededor de los ejes X y Y' respectivamente, se obtuvo un nuevo sistema original $X''Y''Z''$ fijo al cuerpo que en la figura se representa en color gris, ahora se rota un ángulo ψ alrededor del eje Z'' cuya dirección positiva sale de la figura, por lo que este eje queda fijo, es decir, $Z'' = Z'''$, el eje X'' se convierte en el nuevo eje X''' y el eje Y'' se convierte en el nuevo eje Y''' , ambos rotados el ángulo ψ . En la figura se muestra el cuadricóptero desde una vista superior, el frente del cuadricóptero es el *motor*₁ representado en círculo color verde, mientras que el *motor*₃ es la parte trasera del cuadricóptero representado en círculo color rojo, finalmente el *motor*₂ y *motor*₄ representados en círculos color rojo son el lado izquierdo y derecho del cuadricóptero respectivamente.

El vector velocidad angular $\bar{\omega}$ es un vector que apunta a lo largo del eje de rotación del cuerpo, mientras que $\dot{\Theta}$ es la derivada temporal de los ángulos de balanceo, cabeceo y guiñada. Es conveniente expresar las ecuaciones del cuerpo rígido en el sistema de coordenadas del cuerpo S_B , por lo que se deben expresar las componentes del vector velocidad angular $\bar{\omega}$ en dicho sistema. Las componentes de estas velocidades angulares a lo largo de los ejes del sistema coordenado del cuerpo S_B son [1]

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= \dot{\phi}, \\ \dot{\phi}_2 &= 0, \\ \dot{\phi}_3 &= 0,\end{aligned}\tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= 0, \\ \dot{\theta}_2 &= \dot{\theta} \cos(\phi), \\ \dot{\theta}_3 &= -\dot{\theta} \sin(\phi),\end{aligned}\tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\dot{\psi} \sin(\theta), \\ \dot{\psi}_2 &= \dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta), \\ \dot{\psi}_3 &= \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Con estas componentes de $\bar{\omega}$, se tiene

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \left[\dot{\phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 \right] = \left[\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) \right], \\ \omega_2 &= \left[\dot{\phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 \right] = \left[\dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \sin(\phi) \cos(\theta) \right], \\ \omega_3 &= \left[\dot{\phi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 \right] = \left[-\dot{\theta} \sin(\phi) + \dot{\psi} \cos(\phi) \cos(\theta) \right].\end{aligned}\tag{1.12}$$

Finalmente, esta relación puede expresarse como

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.\tag{1.13}$$

La estimación de la orientación mediante el uso de los ángulos de Euler no es aplicable bajo ciertas circunstancias, dado que la representación posee una

singularidad en el punto donde el ángulo de cabeceo $\theta = \pi/2$, ya que esto no permite distinguir entre el ángulo de cabeceo θ y el ángulo de guiñada ψ , lo cual tampoco permite el cálculo de la orientación (a este fenómeno se conoce como *gimbal lock*). Cualquier representación de los ángulos de Euler utilizada tendrá dicho problema, sin importar el orden de las rotaciones.

Cuando se estudia el movimiento de un cuerpo rígido resulta conveniente descomponerlo en un movimiento de traslación y un movimiento de rotación. Para analizar el movimiento de traslación se utiliza la formulación de Newton y para estudiar el movimiento de rotación, se utiliza el formalismo de Euler [1, 3]. En el siguiente capítulo se estudiará la dinámica del cuadricóptero respecto al centro de masa utilizando el formalismo de Newton.

Capítulo 2

Movimiento de traslación

En este capítulo se establecerán las ecuaciones dinámicas que gobiernan el centro de masa del cuadricóptero y que dan origen a su movimiento de traslación.

Como primer punto se discutirán las fuerzas a las que el cuadricóptero está sometido, estas son: su propio peso más el de la pistola con pintura, las fuerzas aerodinámicas ejercidas por sus cuatro motores coplanares, denotadas en magnitud como f_1 , f_2 , f_3 y f_4 , Fig.(1.4), las fuerzas de rozamiento con el aire y la fuerza de retroceso ejercida por la boquilla de la pistola al aplicar la pintura.

2.1. Peso W

El peso (*Weight*) es la fuerza con la que la gravedad atrae al cuadricóptero hacia la Tierra y, visto desde el sistema inercial S_I , solo tiene componente en la coordenada Z . De acuerdo a los fines buscados en esta tesis, el peso será variable en el tiempo pues la masa de la pintura irá disminuyendo lentamente conforme ésta se va aplicando a alguna superficie. Entonces, la masa total del sistema será conformada por un valor constante m_q que es la masa del cuadricóptero y la masa de la pintura $m_p(t)$ que es variable en el tiempo.

A diferencia del problema del «cohetes» [1], que es también un sistema donde la masa del cuerpo es variable, esta disminución en la masa de la pintura no proporciona empuje alguno en la dirección vertical del cuadricóptero, pero sí un empuje horizontal (retroceso) contrario a la dirección de salida de la pintura.

Se toma el valor de la gravedad como

$$g = -9.81 \frac{m}{s^2}, \quad (2.1)$$

entonces el peso se considera negativo apuntando hacia abajo en el sistema de laboratorio y se expresa de la manera siguiente

$$\bar{W}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_T(t)g \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

donde

$$m_T(t) = m_q + m_p(t). \quad (2.3)$$

El subíndice T se refiere a la masa total del sistema, misma que irá disminuyendo conforme se pinta la superficie. A partir de este momento, para simplificar la redacción se tomará la siguiente notación

$$m_T \equiv m_T(t). \quad (2.4)$$

2.2. Fuerza de empuje generada por los motores

El empuje (*Thrust*), denotado en magnitud por la letra T , es la fuerza hacia arriba que habrá de sustentar al cuadricóptero y será proporcionada por las hélices de los cuatro motores, cuyas fuerzas en magnitud se denotan como f_1, f_2, f_3 y f_4 , Fig.(1.4). Para su análisis se supondrá que los cuatro motores son idénticos.

El torque de un motor es la torca que éste ejerce sobre el eje de transmisión de potencia, es decir, la tendencia de una fuerza para girar un objeto alrededor de un eje o punto de apoyo

$$\bar{\tau}_m = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (2.5)$$

La potencia desarrollada por el torque del motor resulta proporcional a la velocidad angular u_m de su eje de transmisión [7] y está dada por

$$Pot_m = \tau_m u_m. \quad (2.6)$$

Con esto se tiene que la magnitud de la fuerza de empuje T_i que provee cada motor [7] resulta proporcional al cuadrado de su velocidad angular u_m , así

$$T_i = k_m u_{m_i}^2, \quad (2.7)$$

donde k_m es una constante propia del motor con las dimensiones apropiadas. Este modelo utilizado en las formulaciones de cuadricópteros corresponden a la fuerza de arrastre en un fluido a velocidades altas con flujo laminar [2].

Al ser coplanares los cuatro motores, siempre estarán ubicados en el plano XY del sistema del cuerpo S_B , por lo que el empuje ascendente total \bar{T}_B sobre el cuadricóptero también tiene solo componente en el eje vertical Z de su sistema coordenado. Por lo tanto, sumando el empuje de los cuatro motores, el empuje total en el sistema del cuerpo es

$$\bar{T}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_m \sum_{i=1}^4 u_{m_i}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Los diferentes movimientos posibles del cuadricóptero (traslaciones y rotaciones), dependen directamente de los valores de estas fuerzas de empuje generadas por los motores.

2.3. Fuerza de arrastre (rozamiento)

Al moverse en el aire los cuerpos presentan resistencia aerodinámica. Análogamente a la fricción, tal resistencia se presenta en sentido opuesto al movimiento del cuerpo a través del aire, por lo que en el modelo del cuadricóptero se considerará esta fuerza con signo negativo oponiéndose al movimiento a través del aire. Dicha fuerza es referida en la ley de Stokes [2], con la que se estudia la fricción de objetos esféricos y en general es válida cuando dichos objetos se mueven a velocidades bajas. En magnitud, la fuerza de rozamiento se expresa como sigue

$$F_{roz} = 6\pi\eta R_{sph}V, \quad (2.9)$$

donde R_{sph} es el radio del objeto esférico, η será la viscosidad del aire y V la velocidad del objeto. Renombrando el término constante como un factor de arrastre

$$k_{roz} = 6\pi\eta R_{sph}, \quad (2.10)$$

la fuerza de arrastre desde el sistema inercial S_I puede verse como

$$\bar{F}_{roz_I} = -k_{roz} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Por tanto, se observa que la resistencia está dada por una fuerza proporcional a la velocidad lineal en cada dirección. Más adelante se detallará bajo qué correcciones resulta conveniente el uso de esta aproximación.

Hay que mencionar el hecho de que dicha aproximación se realiza cuando se trata con velocidades relativamente bajas y objetos esféricos, pues cuando las velocidades son grandes, la magnitud de la fuerza de rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad, esto es

$$F_{roz} = -kV^2. \quad (2.12)$$

2.4. Retroceso generado en la salida de la boquilla de la pistola

Al aplicar la pintura en cierta dirección, por conservación del momento angular [1, 3] la presión de salida provoca una fuerza de retroceso en sentido contrario. A pesar de que dicha fuerza será muy pequeña, es necesario introducirla en el modelo ya que el vuelo de un cuadricóptero es bastante susceptible a cualquier perturbación.

Se puede estimar la fuerza de retroceso [2, 3] con el apoyo de las siguientes dos ecuaciones

$$F = P \cdot A, \quad (2.13)$$

$$P = \frac{1}{2}\rho v^2, \quad (2.14)$$

donde P es la presión de trabajo de la pistola, A el área de la boquilla, ρ la densidad de la pintura y v su velocidad de salida. La Ec.(2.14) es la denominada presión dinámica.

Conociendo la presión a la que trabaja la pistola aerográfica y el área de la boquilla utilizada [11, 12], con la Ec.(2.13) se hace una estimación rápida de la presión de salida de la pintura. Una forma alternativa requiere que además de saber el área de la boquilla se conozca la densidad de la pintura y midiendo con un anemómetro la velocidad de salida, también se puede estimar el valor de la presión usando la Ec.(2.14).

Para el modelo planteado en esta tesis se elige de manera arbitraria que la pintura sea aplicada en la dirección positiva del eje Y vista desde el sistema inercial S_I , entonces la fuerza de retroceso se dará en la dirección opuesta $-Y$ quedando como

$$\bar{F}_{R_I} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \cdot A \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Como se verá en la siguiente sección, estos cálculos de la presión podrían evitarse si en la pistola se tiene un barómetro digital. También se puede confiar en las especificaciones del fabricante que indican que las pistolas HVLP trabajan con 0.7 bares y las Híbridas con 1.5 bares de presión en la boquilla [11, 12].

La equivalencia entre las unidades de presión *bar* y *Pascal* es la siguiente

$$1 \text{ bar} = 100\,000 \frac{N}{m^2}. \quad (2.16)$$

Si se elige una boquilla cuya abertura es de 0.017 pulgadas [11, 12], esto es aproximadamente 0.43 mm , y si se considerara la abertura circular, el área es

$$A = \pi r^2 = 1.45 \times 10^{-7} m. \quad (2.17)$$

Ahora, si se utiliza una pistola HVLP, de la Ec.(2.16) se tiene que la presión de salida en la boquilla es de

$$P = 70\,000 \frac{N}{m^2}. \quad (2.18)$$

Finalmente, para las especificaciones de la boquilla y presión consideradas, de la Ec.(2.13) resulta que la magnitud de la fuerza de retroceso originada en la boquilla es

$$F_{roz} = 0.1016 \frac{N}{m^2}. \quad (2.19)$$

2.4.1. Pistolas aerográficas

El objetivo de esta sección es dar una visión general para tener conocimiento de esta herramienta.

2.4.1.1. Funcionamiento

La pistola aerográfica [11, 12] es la herramienta mediante la cual se realiza la aplicación de las pinturas por pulverizado convirtiendo la pintura líquida en finísimas partículas que se depositan en la superficie a pintar formando una película lisa y uniforme. La tasa de transferencia y la ergonomía son las características que mejor la definen. Son usadas comúnmente en la aplicación de pintura en automóviles y los objetivos principales son que la pintura llegue a la superficie a pintar denominada soporte, se asiente en este mismo y que el rebote sea el menor posible. Las pistolas funcionan con el aporte de aire comprimido que gracias a su diseño interno, arrastra la pintura que se encuentra en el depósito de carga. Este depósito puede encontrarse en la parte superior y entonces se le denomina «pistola de gravedad», o en la parte inferior, lo que se conoce como «pistola de succión». Otro tipo de pistola aerográfica es la «pistola de presión», en la que la pintura llega al cuerpo de la pistola por una conducción desde un depósito alejado, por la impulsión de la pintura con una sobrepresión en el citado depósito.

Son tres los tipos de pistolas que más se utilizan: las pistolas HVPL, las híbridas de gravedad y las pistolas convencionales.

2.4.1.2. Pistolas HVLP

Las pistolas aerográficas denominadas HVLP (High Volume Low Pressure) se caracterizan por necesitar una presión de entrada en cachea de 2 bares y por pulverizar la pintura a tan solo 0.7 bares de presión en la boquilla ($1\text{ bar} = 14.5038\text{ psi}$), lo que demanda un mayor consumo de aire para producir una buena atomización, por lo que el compresor debe tener suficiente potencia y las instalaciones de aire han de estar acondicionadas. Con esta menor presión de salida se tiene más aprovechamiento de la pintura ya que al formar un abanico de proyección con menos presión, se pulveriza menos pintura fuera de las piezas a pintar, se disminuye el rebote de la pintura y se genera menos nube de pintura en el aire. Sin embargo, la distancia de aplicación es menor, casi la mitad que la de las pistolas convencionales. La distancia a la superficie a pintar es entre 10 y 15 cm.

2.4.1.3. Pistolas híbridas

Son una combinación de las pistolas HVLP y las pistolas convencionales, pero se están posicionando por encima de ellas. Trabajan a una presión de aire a la salida de la boquilla mayor que las HVLP con lo que los requerimientos al compresor son menores, demandando un consumo de aire similar al de las pistolas convencionales. También en la aplicación son semejantes a las convencionales, en la distancia y velocidad de aplicación, pero con una presión de trabajo menor, siendo esta de 2 a 2.5 bares de presión contra los 3 a 4 bares de presión de las convencionales y, en la boquilla, de 1.5 bares . Una gran ventaja de este tipo de pistola es que permiten el uso de diversos tipos de casquillos, pudiendo trabajar

con productos de distintas viscosidades. Con este tipo de pistolas se pierde algo en el aprovechamiento de la pintura pero se gana en una aplicación más fácil.

2.4.1.4. Abanico de proyección

La presión de aplicación debe ser ajustada a las características de la pistola que se utilice. Una novedad de algunas de las pistolas actuales es la posibilidad de llevar incorporado un medidor digital de presión en la empuñadura de la pistola. De esta manera se obtiene un valor más exacto de la presión. El diámetro de boquilla debe ajustarse a la viscosidad de la pintura y al tipo de pistola, el que ha de emplearse se indica en la ficha técnica de los productos.

La forma del chorro de pintura proyectado se llama «abanico» y se puede regular la pistola para que sea mayor o menor, más redondeado o alargado. Para conseguir esto es importante el diseño del cabezal de la pistola aerográfica. El regulador de abanico permite el paso de aire por los cuernos del casquillo y ayuda en la atomización del producto que sale por el pico. El regulador de abanico permite variar la huella de aplicación, o patrón de pulverización. Si se tiene el regulador de abanico abierto totalmente la huella alcanza su valor máximo (con forma ovalada o rectangular) y el resultado es un acabado de máxima calidad. Pero si se cierra el abanico la huella sería más pequeña (con forma circular), la concentración de producto mayor y el acabado más basto. Esto permite ajustarse a las características de la superficie a pintar. Referente a la regulación de la presión, conviene situar en la entrada de cacha un manómetro.

2.5. Ecuación de movimiento del centro de masa

A excepción de la fuerza de empuje, Ec.(2.8), nótese que las otras tres fuerzas analizadas arriba se toman desde el sistema inercial S_I . Es conveniente describir la mecánica del cuadricóptero (formulación de Newton) desde este sistema inercial, por lo que será necesario expresar la fuerza de empuje en dicho sistema. De la Ec.(1.7) se tiene que el empuje en el sistema inercial es

$$\bar{T}_I = \tilde{R}_I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_m \sum_{i=1}^4 u_{m_i}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Sustituyendo en la Ec.(1.6) se desarrolla el producto, por lo que el empuje \bar{T}_I visto desde el sistema inercial queda como sigue

$$\bar{T}_I = \begin{pmatrix} [\sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi] k_m \sum_{i=1}^4 u_{m_i}^2 \\ [\sin \theta \sin \psi \cos \phi - \sin \phi \cos \psi] k_m \sum_{i=1}^4 u_{m_i}^2 \\ [\cos \phi \cos \theta] k_m \sum_{i=1}^4 u_{m_i}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

La sumatoria es el empuje generado por los motores y se puede renombrar como

$$T_h = k_m (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2). \quad (2.22)$$

Recordando que la segunda ley de Newton dice que la derivada del momento respecto al tiempo es igual a la suma de las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo

$$\frac{d}{dt} \left(m(t) \frac{d\bar{r}(t)}{dt} \right) = \sum \bar{F}, \quad (2.23)$$

como ya se han obtenido las fuerzas que actuarán sobre el cuadricóptero, solo falta el término de la izquierda en la ecuación anterior.

Al agrupar las fuerzas involucradas se pueden ver las ecuaciones del movimiento de traslación del centro de masa del cuadricóptero de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m_T \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_T g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [\sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi] T_h \\ [\sin \theta \sin \psi \cos \phi - \sin \phi \cos \psi] T_h \\ [\cos \phi \cos \theta] T_h \end{pmatrix} \\ &- k_{roz} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ P \cdot A \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Desarrollando el lado izquierdo

$$\frac{d}{dt} \left[m_T \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \right] = m_T \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \end{pmatrix} + \frac{dm_T}{dt} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Entonces la Ec.(2.24) queda como sigue

$$\begin{aligned} m_T \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \end{pmatrix} + \frac{dm_T}{dt} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} &= \\ &\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_T g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [\sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi] T_h \\ [\sin \theta \sin \psi \cos \phi - \sin \phi \cos \psi] T_h \\ [\cos \phi \cos \theta] T_h \end{pmatrix} \\ &- k_{roz} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ P \cdot A \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Agrupando el término para la velocidad queda

$$\begin{aligned} m_T \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_T g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [\sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi] T_h \\ [\sin \theta \sin \psi \cos \phi - \sin \phi \cos \psi] T_h \\ [\cos \phi \cos \theta] T_h \end{pmatrix} \\ &- \left(\frac{dm_T}{dt} + k_{roz} \right) \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ P \cdot A \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nótese que el efecto de la rotación del cuadricóptero es utilizar parte del empuje T_h proporcionado por los motores a través de la rotación como fuerzas netas hacia adelante, hacia atrás o hacia los costados, dando lugar a propulsiones además de la sustentación de la aeronave en el aire. De esta manera, en el cuadricóptero se utiliza el movimiento de rotación respecto al centro de masa para controlar la dirección en que se desea impulsarlo.

En el vuelo simple del cuadricóptero, es decir, en su tipo de vuelo más estable, no hay fuerzas ajenas y resulta obvio que no aparece el término de la fuerza de retroceso de la ecuación de arriba. En los primeros análisis de esta tesis se omitirá dicha componente para mostrar las soluciones del vuelo simple y después se considerará la fuerza de retroceso que se tiene al aplicar la pintura.

En el siguiente capítulo se estudiarán las torcas que origina cada empuje de los motores.

Capítulo 3

Movimientos de rotación

Una vez detalladas las cuatro fuerzas principales que intervienen en la dinámica del cuadricóptero, en este capítulo se hará el estudio de su movimiento respecto al centro de masa, para ello se hará uso de tres variables angulares que suelen utilizarse en la literatura y que son consistentes con los ángulos de Euler para la descripción del cuerpo rígido, pero que son más adecuadas para la descripción del cuadricóptero.

3.1. Torca de guiñada

La rotación del cuadricóptero sobre su propio eje es el movimiento de guiñada y es el giro de los motores quien lo origina por conservación del momento angular [1, 3].

3.1.1. Torca de arrastre del aire

El torque de los motores se necesita para hacer girar las hélices y ejercer la fuerza ascendente que al superar las fuerzas de arrastre sustente al cuerpo.

Se tomará como modelo la resistencia aerodinámica total creada por un avión en vuelo

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D A V_{Avion}^2, \quad (3.1)$$

donde ρ es la densidad del fluido, C_D el coeficiente aerodinámico de resistencia que es función del número de Reynolds, A es la superficie alar y V_{Avion} es la rapidez del objeto relativa al fluido (en el caso del cuadricóptero se trata de la velocidad de giro de la hélice). Nótese que aparece el término de la presión dinámica $\frac{1}{2} \rho V^2$ de la Ec.(2.14).

Como las hélices son las que habrán de sustentar al cuadricóptero, entonces la torca de arrastre de una de ellas se obtiene por

$$\bar{\tau}_D = \bar{r}_{prop} \times \bar{F}_D, \quad (3.2)$$

donde \bar{r}_{prop} es el radio de la hélice (propeller) y \bar{F}_D la resistencia creada a través de ella. En la ecuación anterior se ha considerado que toda la fuerza se ejerce en la punta de la hélice, es decir, se considera el radio completo de la hélice para calcular el brazo de palanca.

La ecuación que relaciona las velocidades lineal \bar{V} y angular \bar{u} de la hélice [1, 3] está dada por

$$\bar{V} = \bar{u} \times \bar{r}_{prop}, \quad (3.3)$$

tomando en cuenta esta ecuación y combinando con la Ec.(3.1), la torca del arrastre a través de la hélice está dada por

$$\tau_D = \left(\frac{1}{2} r^3 \rho C_D A \right) u^2, \quad (3.4)$$

renombrando como k_D el término constante

$$k_D = \left(\frac{1}{2} r^3 \rho C_D A \right), \quad (3.5)$$

se encuentra que la torca de arrastre en la hélice resulta ser proporcional al cuadrado de su velocidad angular

$$\tau_{D_i} = k_D u_i^2. \quad (3.6)$$

Cada motor contribuirá con una parte de torca alrededor del eje Z del sistema del cuerpo.

3.1.2. Conservación de momento angular

Por definición, el momento angular \bar{L} de una partícula [1, 3] respecto de un punto desde el cual se mide \bar{r} es

$$\bar{L} \equiv \bar{r} \times \bar{p}, \quad (3.7)$$

donde \bar{p} es el momento, definido como el producto de la masa por la velocidad

$$\bar{p} \equiv m\bar{v}. \quad (3.8)$$

La torca $\bar{\tau}$ respecto del mismo punto es, también por definición

$$\bar{\tau} \equiv \bar{r} \times \bar{F}, \quad (3.9)$$

donde \bar{F} es la segunda ley de Newton que se expresa como

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\bar{v}). \quad (3.10)$$

Combinando las Ecs.(3.9) y (3.10) se tiene

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times m\dot{\bar{v}} = \bar{r} \times \dot{\bar{p}}. \quad (3.11)$$

Entonces

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = (\dot{\vec{r}} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}), \quad (3.12)$$

pero como

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} = m (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) \equiv 0, \quad (3.13)$$

resulta

$$\dot{\vec{L}} = (\vec{r} \times \dot{\vec{p}}) = \vec{\tau}. \quad (3.14)$$

Esta expresión define el concepto de torca $\vec{\tau}$, que es una medida de la tendencia de una fuerza a producir o modificar el momento angular de un cuerpo. Sus unidades en el Sistema Internacional son *metro-Newton*, es decir, las mismas que las de trabajo, aunque se trata de conceptos distintos. Los pares de fuerzas acción-reacción son iguales pero de signo contrario por los que los momentos internos se anulan mutuamente, quedando únicamente los momentos externos.

De la ecuación anterior se observa que en ausencia de torcas externas la derivada temporal del momento angular es cero, es decir, se conserva. Se dijo que cada hélice contribuye con una parte de la torca total alrededor de eje Z del sistema del cuerpo, es decir, la rotación de cada hélice origina un movimiento de rotación al cuadricóptero. Esta es la razón por la que dos hélices deberán girar en el sentido de las manecillas del reloj y las otras dos en sentido antihorario, para que las unas compensen el movimiento giroscópico de las otras. Dicho lo anterior, conviene escribir la Ec.(3.6) como sigue

$$\tau_z = (-1)^{i+1} k_D u_i^2. \quad (3.15)$$

Ahora ya se puede calcular la torca de guiñada. Se dijo que el movimiento de guiñada es la rotación de un ángulo ψ respecto al eje vertical Z en el sistema del cuerpo, Fig.(1.9), y está dada por la suma del torque de las cuatro hélices que superan las fuerzas de arrastre, Ec.(3.15), entonces

$$\tau_\psi = k_D (u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2), \quad (3.16)$$

donde los términos positivos corresponden a las hélices del *motor*₁ y *motor*₃ que giran en sentido horario y los términos negativos a las hélices del *motor*₂ y *motor*₄ que giran en sentido antihorario.

3.2. Torca de balanceo

Se dijo que el movimiento de balanceo (descrito por el ángulo ϕ), Fig.(1.7), lo origina el desequilibrio entre las fuerzas de empuje \vec{T}_2 y \vec{T}_4 generadas por el *motor*₂ y el *motor*₄ respectivamente, Ec.(2.7). Si se denota como L a la distancia del centro del cuadricóptero a cualquier hélice, entonces la torca de estos motores es

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{\phi_{m_2}} &= \vec{L}_2 \times \vec{T}_2, \\ \vec{\tau}_{\phi_{m_4}} &= \vec{L}_4 \times \vec{T}_4. \end{aligned} \quad (3.17)$$

También de la Ec.(2.7) se deriva que

$$\begin{aligned}\tau_{\phi_{m2}} &= Lk_m u_2^2, \\ \tau_{\phi_{m4}} &= Lk_m u_4^2.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Recuérdese que los brazos de balanceo del cuadricóptero están alineados con el eje Y del sistema del cuerpo y que el ángulo ϕ es positivo en sentido horario. Por lo tanto, que este ángulo resulte positivo ocurre cuando el cuadricóptero se inclina hacia la derecha, por lo que para obtener la torca correspondiente de balanceo se resta a la torca del *motor*₂ la torca del *motor*₄, es decir

$$\tau_\phi = Lk_m (u_2^2 - u_4^2). \quad (3.19)$$

Es evidente que si estas torcas son iguales, no hay balanceo.

3.3. Torca de cabeceo

De manera análoga a la torca anterior, el movimiento de cabeceo (ángulo θ), Fig.(1.8), lo origina el desbalance entre las fuerzas \bar{T}_1 y \bar{T}_3 generadas por el *motor*₁ y el *motor*₃ respectivamente

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{\theta_{m1}} &= \bar{L}_1 \times \bar{T}_1, \\ \bar{\tau}_{\theta_{m3}} &= \bar{L}_3 \times \bar{T}_3.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\tau_{\theta_{m1}} &= Lk_m u_1^2, \\ \tau_{\theta_{m3}} &= Lk_m u_3^2.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Los brazos de cabeceo del cuadricóptero están alineados con el eje X del sistema del cuerpo, y el ángulo θ es positivo en sentido horario. Por lo tanto, este ángulo es positivo cuando el cuadricóptero se inclina hacia adelante, por lo que la torca correspondiente al cabeceo se obtiene restando a la torca del *motor*₃ la torca del *motor*₁, esto es

$$\tau_\theta = Lk_m (u_3^2 - u_1^2). \quad (3.22)$$

Con esto, se obtuvieron las torcas en el sistema S_B

$$\begin{aligned}\tau_\phi &= Lk_m (u_2^2 - u_4^2), \\ \tau_\theta &= Lk_m (u_3^2 - u_1^2), \\ \tau_\psi &= k_D (u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2).\end{aligned}\quad (3.23)$$

Estas son las ecuaciones dinámicas que gobiernan el movimiento del cuadricóptero respecto a su centro de masa y permiten describir la orientación instantánea del mismo respecto a un sistema de referencia fijo en el cuerpo.

En el próximo capítulo se revisará la manera de trasladar la descripción de un sistema de coordenadas fijo en el cuerpo a un sistema de coordenadas situado en Tierra.

Capítulo 4

Formulación de Euler (movimientos angulares)

Ahora, se estudiará la dinámica del cuadricóptero respecto al centro de masa utilizando el formalismo de Euler.

4.1. Ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido

Para obtener las ecuaciones de movimiento de rotación en un campo de fuerzas hay que partir de la ecuación fundamental Ec.(3.14) para la dinámica rotacional [1]

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fijo} = \bar{\tau}, \quad (4.1)$$

donde el subíndice «fijo» se refiere a que esta relación fue deducida a partir de la fórmula de Newton y sólo será válida en un sistema de referencia inercial que se halla en el suelo también conocido como sistema de laboratorio.

Para un vector \bar{Q} arbitrario [1] se tiene que

$$\left(\frac{d\bar{Q}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\bar{Q}}{dt}\right)_{rot} + (\bar{\omega} \times \bar{Q}), \quad (4.2)$$

entonces, combinando con la Ec.(4.1)

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{Body} + (\bar{\omega} \times \bar{L}), \quad (4.3)$$

o sea

$$\dot{\bar{L}}_{Body} + (\bar{\omega} \times \bar{L}) = \bar{\tau}, \quad (4.4)$$

que son las ecuaciones de movimiento de Euler de un cuerpo rígido en un campo de fuerzas.

Ahora, el momento angular se relaciona con la velocidad angular (en notación tensorial) de la siguiente manera

$$\bar{L} = \tilde{I} \cdot \bar{\omega}, \quad (4.5)$$

donde \tilde{I} es el tensor de inercia del cuerpo que permanece constante en el tiempo si el cuerpo es rígido; se aprecia de esta ecuación una propiedad de los tensores: que el producto de un tensor por un vector da otro vector. Además

$$\dot{\bar{L}} = \tilde{I} \cdot \dot{\bar{\omega}}. \quad (4.6)$$

Finalmente, de la Ec.(4.4) se reescriben las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido

$$\bar{\tau} = \tilde{I} \cdot \dot{\bar{\omega}} + (\bar{\omega} \times \tilde{I} \cdot \bar{\omega}). \quad (4.7)$$

Como se consideran los ejes coordenados alineados con los ejes del cuadricóptero, el tensor de inercia es de forma diagonal, esto es

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Además, de la simetría del cuadricóptero resulta que

$$I_{xx} = I_{yy}. \quad (4.9)$$

Ahora, desarrollando el producto cruz de la Ec.(4.7) se obtiene

$$\begin{aligned} & (\bar{\omega} \times \tilde{I} \bar{\omega}) = \\ & ((I_{zz}\omega_y\omega_z - I_{yy}\omega_y\omega_z), (I_{xx}\omega_x\omega_z - I_{zz}\omega_x\omega_z), (I_{yy}\omega_x\omega_y - I_{xx}\omega_x\omega_y)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Entonces, de la Ec(4.7) se tienen las ecuaciones de Euler desarrolladas

$$\begin{aligned} \tau_\phi &= I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z, \\ \tau_\theta &= I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z, \\ \tau_\psi &= I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para el cuadricóptero se tiene que el vector de fuerzas externas es

$$\bar{\tau} = (\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi). \quad (4.12)$$

4.2. Ecuaciones de movimiento angulares

A diferencia de las ecuaciones del centro de masa, es conveniente describir los movimientos angulares del cuadricóptero (formulación de Euler) desde el sistema S_B que está fijo en el cuerpo.

Reescribiendo la Ec.(4.11), las aceleraciones angulares están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{\tau_\phi}{I_{xx}} - \left(\frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} \right) \omega_y \omega_z, \\ \dot{\omega}_y &= \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} - \left(\frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} \right) \omega_x \omega_z, \\ \dot{\omega}_z &= \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} - \left(\frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} \right) \omega_x \omega_y.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Entonces, introduciendo las torcas de la Ec.(3.23), las ecuaciones del movimiento rotacional serán

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dt^2} &= \frac{Lk_m(u_2^2 - u_4^2)}{I_{xx}} - \left(\frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} \right) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\psi}{dt}, \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{Lk_m(u_3^2 - u_1^2)}{I_{yy}} - \left(\frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} \right) \frac{d\phi}{dt} \frac{d\psi}{dt}, \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= \frac{k_D(u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2)}{I_{zz}} - \left(\frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} \right) \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Nótese que por la simetría del cuadricóptero la última ecuación se simplifica porque los momentos de inercia I_{xx} e I_{yy} son iguales. Sin embargo, se ha dejado la forma general de la ecuación para que pueda usarse en futuras aplicaciones, como en las que el cuadricóptero lleve algún peso adicional y que éste no se coloque sobre su centro de masa.

Capítulo 5

Problema inverso

En este capítulo se estudiará cómo deben depender con el tiempo los ángulos de descripción del cuadricóptero para dar lugar a una trayectoria preestablecida, es decir, si se pide que el centro de masa de la aeronave describa determinada trayectoria se mostrarán cuáles deben ser sus ángulos de inclinación como función del tiempo para que ello se cumpla. Esta es la razón de llamarle problema inverso, ya que no se trata del problema del seguimiento de una trayectoria a partir del conjunto de fuerzas y torcas dado, sino establecer la misma y obligar que el cuadricóptero la recorra.

Primero se analizará el vuelo simple del cuadricóptero (cargando la pistola pero sin aplicación de pintura).

5.1. Ecuaciones que gobiernan el movimiento del centro de masa

Para el problema del vuelo del cuadricóptero, las ecuaciones que describen su movimiento se obtuvieron en el Cap.(2), Ec.(2.27). Para el análisis del vuelo simple, sin fuerza de retroceso en la boquilla, se separa la ecuación de movimiento del centro de masa en sus componentes x , y , z y se reescriben de la manera siguiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{T_h}{m_T} (\sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) , \quad (5.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} = \frac{T_h}{m_T} (\sin \theta \sin \psi \cos \phi - \sin \phi \cos \psi) , \quad (5.2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g = \frac{T_h}{m_T} (\cos \phi \cos \theta) , \quad (5.3)$$

donde T_h es el empuje generado por motores, Ec.(2.22), y se ha usado $m_T \equiv m_T(t)$.

Las ecuaciones de movimiento angulares se obtuvieron el Cap.(4), Ec.(4.14). De igual manera, para los siguientes análisis se renombrarán estas ecuaciones

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \left(\frac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} \right) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\psi}{dt} = \frac{Lk_m}{I_{xx}} (u_2^2 - u_4^2), \quad (5.4)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} \right) \frac{d\phi}{dt} \frac{d\psi}{dt} = \frac{Lk_m}{I_{yy}} (u_3^2 - u_1^2), \quad (5.5)$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(\frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} \right) \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{k_D}{I_{zz}} (u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2). \quad (5.6)$$

Estas ecuaciones se simplifican debido a la simetría del cuadricóptero pues los momentos de inercia I_{xx} e I_{yy} son iguales. Sin embargo, se ha decidido dejarlas en su forma más general para utilizarse en casos en los cuáles el cuadricóptero transporte algún objeto fuera de la posición de su centro de masa o por si el objeto de estudio no sea simétrico.

Cuando se analiza el vuelo de un dron (ya sea cuadricóptero, hexacóptero u octacóptero), generalmente se calcula su recorrido a partir del conjunto de fuerzas a las que está sometido, pero para propósitos de esta tesis se requiere que el cuadricóptero siga cierta trayectoria y entonces determinar las velocidades angulares de cada uno de los motores como función del tiempo para que la aeronave la describa. A esto se le ha considerado como el problema inverso del vuelo del cuadricóptero.

A continuación se analizarán diversos tipos de movimientos fijando varias trayectorias en el espacio.

5.2. Movimiento confinado al plano vertical XZ

Si se quiere que el centro de masa del cuadricóptero permanezca en un plano vertical basta con constreñir los valores de las variables $\phi = \psi = 0$ y permitir que el ángulo de cabeceo θ cambie con el tiempo. Al insertarse estas condiciones en la Ec.(5.2) se muestra que la proyección del empuje T_h es nulo, Ec.(2.22), de donde se infiere que el cuadricóptero permanece confinado al plano vertical XZ del sistema de laboratorio. Al no permitir que el cuadricóptero gire sobre su propio eje ($\psi = 0$) los ejes X e Y de ambos sistemas coordenados S_I y S_B quedan paralelos entre ellos en todo momento, Fig.(1.3).

Como las partes frontal y trasera del cuadricóptero apuntan en la dirección X positiva y negativa, respectivamente, dicho movimiento puede inducirse si se permite que el cuadricóptero se incline hacia adelante o hacia atrás generando un ángulo θ distinto de cero mientras que los otros dos ángulos permanecen fijos e iguales a cero. Insertando estas condiciones en las ecuaciones de movimiento

de arriba se obtiene las siguientes expresiones reducidas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{T_h}{m_T} \sin \theta, \quad (5.7)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g = \frac{T_h}{m_T} \cos \theta, \quad (5.8)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Lk_m}{I_{yy}} (u_3^2 - u_1^2), \quad (5.9)$$

en donde, de la Ec.(5.4), se deriva que

$$u_2 = u_4, \quad (5.10)$$

es decir, las velocidades del *motor*₂ y *motor*₄ son iguales. Además, de la Ec.(5.6) se tiene

$$u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = 0, \quad (5.11)$$

combinando estas ecuaciones

$$u_1^2 + u_3^2 = 2u_2^2, \quad (5.12)$$

finalmente el empuje de la Ec.(2.22) queda

$$T_h = 4k_m u_2^2. \quad (5.13)$$

Despejando de la Ec.(5.7), se llega a

$$u_2^2 = u_4^2 = \frac{m_T}{4k_m \sin \theta} \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} \right], \quad (5.14)$$

o bien, sumando los cuadrados de las Ecs.(5.7), (5.8) y usando la Ec.(5.13) se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_h}{m_T} \right)^2 &= \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} \right]^2 \\ &+ \left[\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g \right]^2, \end{aligned} \quad (5.15)$$

sustituyendo T_h , Ec.(5.13), queda

$$\begin{aligned} u_2^4 \left(\frac{4k_m}{m_T} \right)^2 &= \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} \right]^2 \\ &+ \left[\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g \right]^2, \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde al despejar u_2 y por la Ec.(5.10) ya se pueden obtener las velocidades del *motor*₂ y *motor*₄.

Al dividir las Ecs.(5.7) y (5.8) se obtiene la expresión

$$\tan \theta = \frac{\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g}, \quad (5.17)$$

la cual proporciona el ángulo de cabeceo θ como función del tiempo si se conoce de antemano la forma de la trayectoria que se desea imponer al centro de masa del cuadricóptero en el plano XZ .

Para calcular las dos frecuencias de los motores restantes como función del tiempo, se usan las Ecs.(5.9) y (5.12). Primero se obtiene u_1

$$u_1^2 = u_2^2 - \frac{I_{yy}}{2Lk_m} \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (5.18)$$

sustituyendo en la Ec.(5.12) se obtiene u_3

$$u_3^2 = u_2^2 + \frac{I_{yy}}{2Lk_m} \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (5.19)$$

En estas ecuaciones, la segunda derivada se puede calcular directamente a partir de la Ec.(5.17). Si el ángulo $\theta = 0$, la velocidad de los cuatro motores es la misma y su vuelo solo será vertical; si $\theta > 0$, la velocidad u_3 será mayor que u_1 y el cuadricóptero se inclinará hacia adelante; si $\theta < 0$, la velocidad u_1 será mayor que u_3 y el cuadricóptero se inclinará hacia atrás.

En estas velocidades, el término que está restando en el *motor*₁ es el mismo que está sumando en el *motor*₃, nótese entonces que el valor que disminuye el cuadrado de la velocidad u_1 es el mismo que debe aumentar el cuadrado de la velocidad u_3 , esto ya se apreciaba desde la Ec.(5.12) pero da un resultado más general y se trata del hecho de que para que el vuelo sea estable, el empuje total de los cuatro motores habrá de ser constante en todo momento.

Hasta ahora, en todas las ecuaciones del vuelo confinado al plano XZ es claro que solo interviene el ángulo θ de la trayectoria vertical, por lo que es suficiente obtener todos sus valores durante el recorrido. En conclusión, dadas las ecuaciones paramétricas de una trayectoria plana, que arbitrariamente se confinó al plano XZ , se han encontrado cuáles deben ser las velocidades de cada uno de los motores como función del tiempo para que el cuadricóptero describa dicha trayectoria.

A continuación se analizarán ejemplos particulares en donde se podrá saber cómo la dinámica específica de los motores origina ciertos movimientos comunes. En todos los casos, las trayectorias son recorridas en el plano XZ del sistema de laboratorio S_I .

5.2.1. Movimiento vertical ascendente (despegue)

Si se quiere que el cuadricóptero despegue verticalmente con velocidad constante v_{0z} , las ecuaciones paramétricas de la trayectoria ascendente que se han

de utilizar son

$$\begin{aligned}x(t) &= 0, \\y(t) &= 0, \\z(t) &= v_{0z}t.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Con estas ecuaciones se traza la trayectoria mostrada en la Fig.(5.1), donde se ha elegido que la velocidad sea $v_{0z} = 0.2 \text{ m/s}$. De la Ec.(5.17) se tiene que $\theta = 0$ y de las Ecs.(5.18) y (5.19) la velocidad de los cuatros motores debe ser igual

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_{vertical},\tag{5.21}$$

por lo que, usando la Ec.(5.16), su valor común en este caso es

$$u_{vertical} = \sqrt{\frac{m_T}{4k_m} \left[\left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) v_{0z} - g \right]}.\tag{5.22}$$

5.2.2. Suspendido en un punto fijo

Después de haber despegado, para mantener estable al cuadricóptero a una altura fija solo será necesario que el empuje de los cuatro motores compense el peso del sistema, entonces haciendo el término $v_{0z} = 0$ en la ecuación anterior es suficiente que los cuatro motores tengan velocidad

$$u_{fijo} = \sqrt{-\frac{m_T g}{4k_m}}.\tag{5.23}$$

5.2.3. Movimiento horizontal

Como el cuadricóptero estará en el plano XZ , el desplazamiento horizontal equivale a moverse hacia adelante o hacia atrás. Para este caso particular de que la aeronave se desplace horizontalmente a velocidad constante v_{0x} sin cambiar su altura z_0 las ecuaciones paramétricas de la trayectoria serán

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0x}t, \\y(t) &= 0, \\z(t) &= z_0.\end{aligned}\tag{5.24}$$

Con estas ecuaciones se traza la trayectoria mostrada en la Fig.(5.2) en el sistema de laboratorio, donde también se ha elegido que la velocidad sea $v_{0x} = 0.2 \text{ m/s}$. Sustituyendo estas expresiones en la Ec.(5.17) se obtiene

$$\tan \theta = - \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{v_{0x}}{g},\tag{5.25}$$

lo cual dice que si la masa permanece constante, es decir, si el desplazamiento es sin aplicar pintura, el ángulo de cabeceo θ también permanece constante en el tiempo.

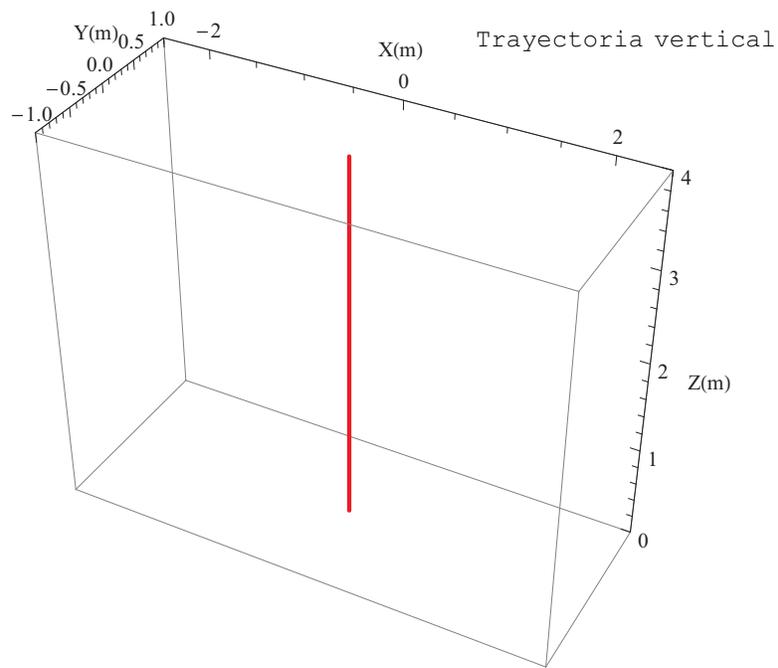


Figura 5.1: Trayectoria xz vertical. Representa el despegue y ascenso para iniciar el proceso de pintado desde la parte alta de la pared, con la finalidad de evitar descuelgues en la pintura. La trayectoria inicia en el origen coordenado $(x, y, z) = (0, 0, 0) m$ y asciende verticalmente hasta alcanzar el punto $(x, y, z) = (0, 0, 3.95) m$. Ya que se eligió una velocidad de ascenso de $v_{0z} = 0.2 m/s$, para alcanzar esta altura el tiempo de vuelo debe ser de 19.75 s. La gráfica se obtiene a partir de la solución analítica del problema.

Como ejemplo, si se quisiera desplazar hacia adelante, dirección positiva X del sistema de laboratorio, el cuadricóptero deberá inclinarse un ángulo θ abriendo en sentido horario y esta inclinación se consigue aumentando el valor del cuadrado de la velocidad del *motor*₃ pero disminuyendo el mismo valor del cuadrado de la velocidad del *motor*₁. Dicho término está en las Ecs.(5.18) y (5.19)

$$\frac{I_{yy}}{2Lk_m} \frac{d^2\theta}{dt^2} . \quad (5.26)$$

Por tanto, como se quiere que el desplazamiento solo sea horizontal y no se vaya elevando, una vez que el cuadricóptero ya tiene la inclinación debida el ángulo θ debe permanecer constante

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 , \quad (5.27)$$

por lo que, de las mencionadas Ecs.(5.18) y (5.19), se observa que las velocidades de los cuatro motores son iguales

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_{horizontal} , \quad (5.28)$$

y de la Ec.(5.16) se deduce su valor común

$$u_{horizontal} = \sqrt{\frac{m_T}{4k_m}} \sqrt{\left[\left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) v_{0x} \right]^2 + g^2} . \quad (5.29)$$

En el hecho de que el ángulo resulte constante, es importante hacer notar que inicialmente en su modo estable el cuadricóptero está completamente horizontal, es decir, el ángulo de cabeceo θ es nulo y los cuatro motores tienen la misma magnitud de velocidad angular, pero para desplazarse horizontalmente la aeronave debe inclinarse en un instante de tiempo muy breve, para ello uno de los dos motores alineados sobre el eje X aumenta su velocidad de giro mientras que el motor opuesto debe disminuir la suya. Esto es para cumplir con la condición de que en el caso de vuelo estable el empuje total de los motores permanezca constante por lo que, una vez obtenida la debida inclinación, los cuatro motores vuelven a girar con el mismo valor de velocidad angular entre ellos, Ec.(5.29), manteniendo así el ángulo de cabeceo fijo, pero esta inclinación origina un desplazamiento horizontal a velocidad constante v_{0x} sin variar la altura z_0 . Se verá en la sección 6.2.3 que a pesar de que la altura se mantendrá constante, la magnitud del empuje obtenido con estos valores de velocidad resulta mayor que la del empuje que se tiene en el caso del vuelo suspendido, debido a que esta vez el empuje tendrá dos componentes: una vertical para mantener fija la altura y otra horizontal para desplazar la aeronave hacia adelante, Fig.(6.4).

Como dato adicional, para el caso en el que el cuadricóptero también se mueva horizontalmente pero hacia sus costados, izquierda o derecha, se estaría hablando de un movimiento en el plano YZ y el procedimiento sería análogo pero con el ángulo de balanceo ϕ .

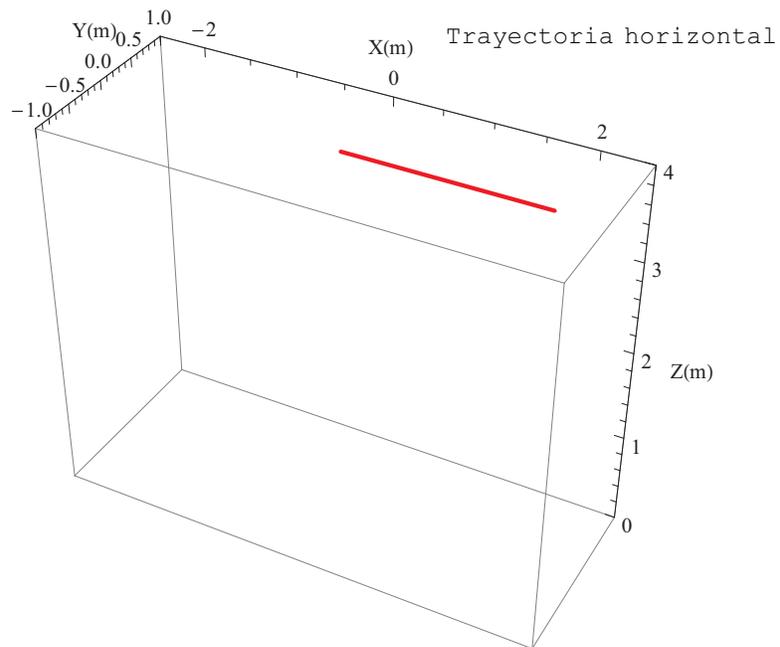


Figura 5.2: Trayectoria xz horizontal. El cuadricóptero parte del centro de la pared en el punto $(x, y, z) = (0, 0, 3.95) m$ y recorre a la velocidad constante $v_{0x} = 0.2 m/s$ dos metros en la dirección X positiva durante un lapso de diez segundos hasta alcanzar el punto $(x, y, z) = (2, 0, 3.95) m$. La gráfica se obtiene a partir de la solución analítica del problema.

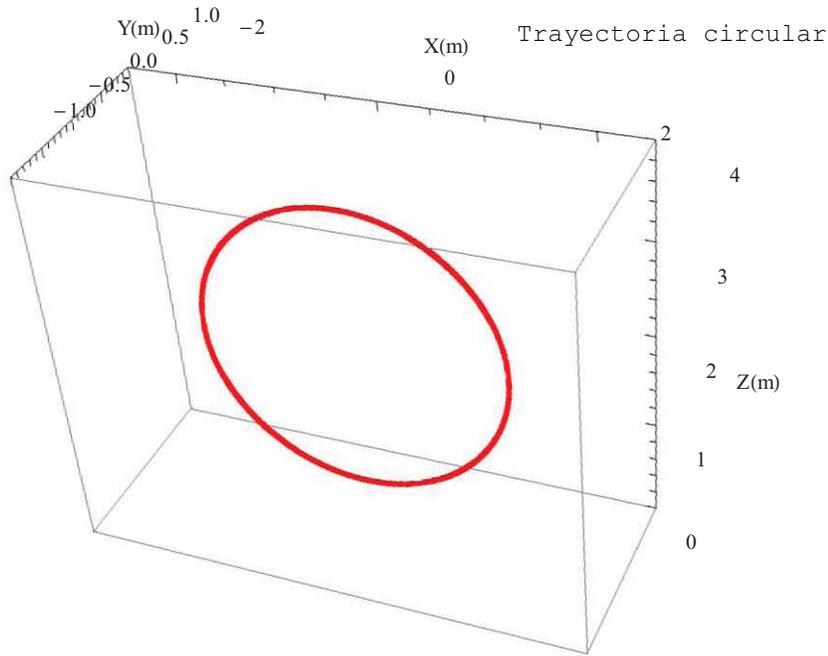


Figura 5.3: Trayectoria xz circular. Se traza en sentido horario y el cuadricóptero partirá del punto $(x, y, z) = (0, 0, 3.5) m$ del plano XZ , descendiendo hasta $0.5 m$ sobre el nivel del suelo para evitar tocarlo y regresa al punto de partida en un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2\pi$. La gráfica se obtiene a partir de la Ec.(5.30).

5.2.4. Movimiento circular

Una trayectoria más elaborada surge si se permite que el cuadricóptero trace un círculo vertical. Para los fines de esta tesis, se elige de forma arbitraria que el cuadricóptero lo describa en sentido horario pero sin llegar hasta el suelo, es decir, iniciando con movimiento horizontal hacia la derecha pero partiendo de cierta altura z_0 por lo que las ecuaciones paramétricas que conviene utilizar son

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin t, \\ y(t) &= 0, \\ z(t) &= A \cos t + z_c, \end{aligned} \tag{5.30}$$

donde A es el radio del círculo cuyo centro es el punto $C(x, y, z) = C(0, 0, z_c)$.

Si se elige que el radio sea $A = 1.5 m$ y que $z_c = 2 m$, con estas ecuaciones se completa un círculo en el plano XZ del sistema de laboratorio en un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2\pi$, Fig.(5.3), cuyo centro es el punto $C(x, y, z) = C(0, 0, 2) m$, que el cuadricóptero recorrerá en sentido horario partiendo del punto $(x, y, z) = (0, 0, 3.5) m$ y descendiendo hasta $0.5 m$ de altura para evitar tocar el suelo.

Insertando estas relaciones en la Ec.(5.17) se llega a

$$\tan \theta = \frac{A \left[\sin t - \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \cos t \right]}{A \left[\cos t + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \sin t \right] + g}. \quad (5.31)$$

Obteniendo θ durante toda la trayectoria, se calculan las velocidades de los cuatro motores como función del tiempo.

5.2.5. Movimiento en una elipse horizontal

Modificando un poco las ecuaciones utilizadas para trazar el círculo, Ec.(5.30), se consigue la figura de una elipse. Las ecuaciones paramétricas quedan

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin t, \\ y(t) &= 0, \\ z(t) &= B \cos t + z_c, \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde A es el semieje mayor (semieje horizontal), B el semieje menor (semieje vertical) y el centro de la elipse es el punto $C(x, y, z) = C(0, 0, z_c)$.

Si se elige que la longitud de los semiejes sea $A = 2m$, $B = 1m$ y que $z_c = 2m$, con las ecuaciones anteriores se completa una elipse horizontal en el plano XZ del sistema de laboratorio en un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2\pi$, Fig.(5.4), cuyo centro es el punto $C(x, y, z) = C(0, 0, 2)m$, que el quadricóptero recorrerá en sentido horario partiendo del punto $(x, y, z) = (0, 0, 3)m$ y descendiendo hasta $1m$ de altura para evitar tocar el suelo.

Insertando estas relaciones en la Ec.(5.17) se llega a

$$\tan \theta = \frac{A \left[\sin t - \cos t \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \right]}{B \left[\cos t + \sin t \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \right] + g}. \quad (5.33)$$

Obteniendo θ durante toda la trayectoria, se calculan las velocidades de los cuatro motores como función del tiempo.

5.2.6. Movimiento en un seno vertical

Es la trayectoria más importante para los fines que se buscan en esta tesis. Dado que se desea pintar una superficie vertical como la que podría ser una pared, conviene empezar desde la parte más alta de la misma para evitar descuelgues en la pintura y pintar con movimientos horizontales e ir bajando poco a poco hasta haber cubierto toda su superficie. Entonces, se elige trazar una trayectoria senoidal vertical con las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(k - \omega t), \\ y(t) &= 0, \\ z(t) &= v_{0z}t + z_0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

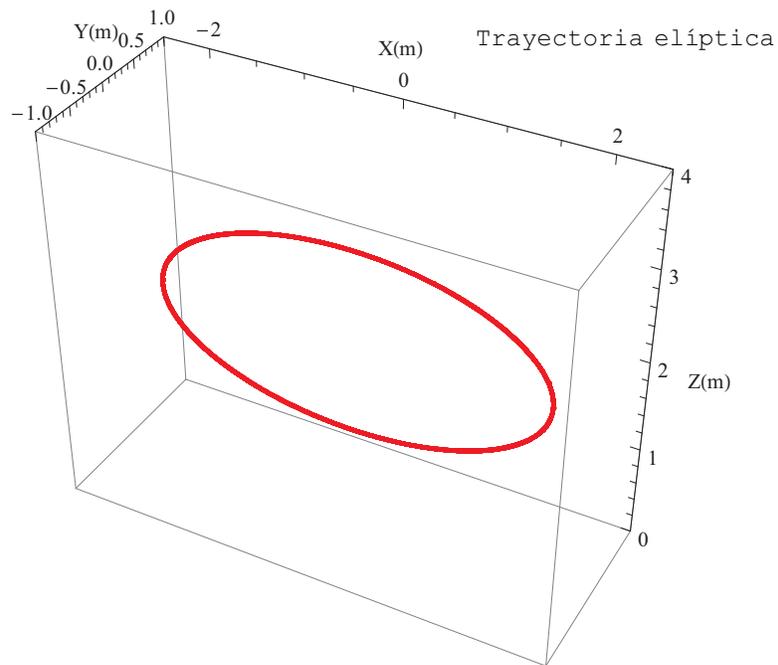


Figura 5.4: Trayectoria xz elíptica horizontal. Se traza en sentido horario y el cuadricóptero partirá del punto $(x, y, z) = (0, 0, 3) m$ del plano XZ descendiendo hasta $1 m$ sobre el nivel del suelo para evitar tocarlo y regresando al punto de partida durante el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2\pi$. La gráfica se obtiene a partir de la Ec. (5.32).

En estas ecuaciones, $2A$ es el ancho de la pared, de la componente z se tiene que el descenso será a la velocidad constante v_{0z} (cuyo valor es negativo) y que el cuadricóptero tendrá altura inicial z_0 . Insertando estas relaciones en la Ec.(5.17) se llega a

$$\tan \theta = - \frac{A\omega \left[\omega \sin(k - \omega t) + \cos(k - \omega t) \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \right]}{\left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) v_{0z} - g}. \quad (5.35)$$

Eligiendo $v_{0z} = -0.01 \text{ m/s}$, con estas ecuaciones se traza la trayectoria senoidal mostrada en la Fig.(5.5), con la que se recorrerá una pared cuadrada de 4 m por lado en un tiempo de vuelo de $108\pi \text{ s}$ equivalente a 339.292 s , descendiendo 1 cm cada segundo. La razón de tomar este tiempo de vuelo es que la aeronave trace ciclos completos del seno, pero se busca que la trayectoria no termine hasta el suelo ya que como el cuadricóptero volará inclinándose continuamente y sus brazos tienen longitud $L = 0.3 \text{ m}$, al considerar este tiempo el vuelo terminará a 0.557 m de altura y así se evita llegar al suelo. El resto de los parámetros necesarios para conseguir esta trayectoria son: $k = \pi$, $\omega = \frac{1}{6} \text{ 1/s}$, $A = 2 \text{ m}$ y $z_0 = 3.95 \text{ m}$.

5.3. Movimiento en una trayectoria no plana sin giro de guiñada

Considere un caso más general para el cual el cuadricóptero no gira sobre sí mismo ($\psi = 0$), pero sí puede inclinarse hacia sus costados ($\phi \neq 0$), además de hacerlo hacia el frente o hacia atrás ($\theta \neq 0$), como ya se estudió en las secciones anteriores. Estas consideraciones permiten describir una trayectoria del cuadricóptero muy general, la cual no está limitada a permanecer en un plano, sino que puede ser arbitraria y está descrita por las tres coordenadas paramétricas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Las ecuaciones de movimiento angulares, Ecs.(5.4), (5.5), (5.6), para la orientación del cuadricóptero se simplifican como

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{Lk_m}{I_{xx}} (u_2^2 - u_4^2), \quad (5.36)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{Lk_m}{I_{yy}} (u_3^2 - u_1^2), \quad (5.37)$$

$$(I_{yy} - I_{xx}) \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} = k_D (u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2). \quad (5.38)$$

Por otro lado, las ecuaciones para el centro de masa, Ecs.(5.1), (5.2), (5.3),

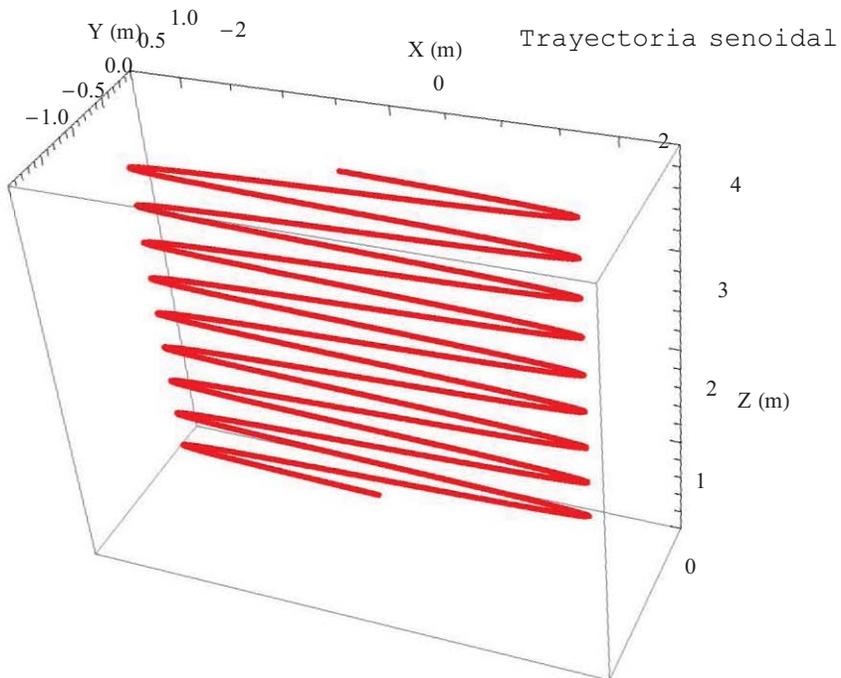


Figura 5.5: Trayectoria xz senoidal. Es la trayectoria utilizada para el proceso de pintado, inicia en el centro de la pared a una altura de 3.95 m para evitar descuelgues en la pintura y desciende a una velocidad constante $v_{0z} = -0.01\text{ m/s}$, es decir, desciende 1 cm cada segundo durante un tiempo vuelo de $108\pi\text{ s}$ equivalente a 339.292 s , tiempo en el que ha trazado nueve ciclos completos del seno hasta quedar nuevamente en el centro de la pared y a una altura de 0.557 m sobre el nivel del suelo para evitar tocarlo. La gráfica se obtiene a partir de la Ec.(5.34) en la que los valores de los parámetros son: $k = \pi$, $\omega = \frac{1}{6}\text{ 1/s}$ y $A = 2\text{ m}$.

se pueden escribir como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{T_h}{m_T} \sin \theta \cos \phi, \quad (5.39)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} = -\frac{T_h}{m_T} \sin \phi, \quad (5.40)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g = \frac{T_h}{m_T} \cos \phi \cos \theta. \quad (5.41)$$

Más adelante, cuando se aborde el caso de vuelo con aplicación de pintura, para compensar la fuerza de retroceso originada en la boquilla de la pistola se deberá agregar en la Ec.(5.40) un factor de empuje

$$-\frac{P \cdot A}{m_T}, \quad (5.42)$$

que ya había aparecido en la Ec.(2.27), donde P es la presión de salida de la pintura y A el área de la boquilla, en tanto que las Ecs.(5.39) y (5.41) permanecen sin cambio. Si se dividen estas últimas ecuaciones se obtiene

$$\tan \theta = \frac{\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g}, \quad (5.43)$$

que coincide con la Ec.(5.17). Además, al dividir las Ecs.(5.40) y (5.41) se encuentra la expresión

$$\sec \theta \tan \phi = -\frac{\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g}, \quad (5.44)$$

elevando al cuadrado se tiene

$$\sec^2 \theta \tan^2 \phi = \frac{\left[\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right]^2}{\left[\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g \right]^2}, \quad (5.45)$$

sustituyendo $\sec^2 \theta$ por la siguiente identidad

$$\sec^2 \theta = \tan^2 \theta + 1, \quad (5.46)$$

se tiene

$$(\tan^2 \theta + 1) \tan^2 \phi = \frac{\left[\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right]^2}{\left[\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g \right]^2}, \quad (5.47)$$

que permite obtener $\phi(t)$ si antes ya fue determinado $\theta(t)$, pues insertando la Ec.(5.17) en la ecuación anterior se encuentra que

$$\tan \phi = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left[\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} \right]^2 + \left[\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g \right]^2}}. \quad (5.48)$$

De las Ecs.(5.17) y (5.48) se pueden determinar explícitamente ambos ángulos del cuadricóptero en términos de la trayectoria previamente impuesta.

Una vez conocidos los ángulos, de las Ecs.(5.36), (5.37), (5.38), (5.40) y (2.22) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales para el cuadrado de las velocidades de los motores

$$u_2^2 - u_4^2 = \frac{I_{xx}}{Lk_m} \frac{d^2 \phi}{dt^2}, \quad (5.49)$$

$$u_3^2 - u_1^2 = \frac{I_{yy}}{Lk_m} \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad (5.50)$$

$$u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{k_D} \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt}, \quad (5.51)$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \frac{-m_T}{k_m \sin \phi} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right]. \quad (5.52)$$

Al sumar el lado izquierdo de las Ecs.(5.51) y (5.52) queda

$$(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) + (u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2) = 2(u_1^2 + u_3^2), \quad (5.53)$$

ahora, si a esta última ecuación se le suma el doble del lado izquierdo de la Ec.(5.50), entonces

$$2(u_1^2 + u_3^2) + 2(u_3^2 - u_1^2) = 4u_3^2. \quad (5.54)$$

Finalmente, de las ecuaciones anteriores se obtiene la expresión para la velocidad del *motor*₃ denotada como u_3

$$4u_3^2 = \frac{-m_t}{k_m \sin \phi} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right] + \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{k_D} \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} + 2 \frac{I_{yy}}{Lk_m} \frac{d^2 \theta}{dt^2}. \quad (5.55)$$

Con un procedimiento análogo se encuentran las expresiones para el resto de las velocidades, que están determinadas completamente a través de la trayectoria tridimensional del cuadricóptero y de los ángulos de balanceo ϕ y cabeceo θ , mismos que ya fueron expresados arriba en las Ecs.(5.17) y (5.48) también únicamente en términos de la trayectoria

$$\begin{aligned}
u_1^2 &= \frac{-m_T}{4k_m \sin \phi} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{k_D} \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} - \frac{I_{yy}}{2Lk_m} \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \tag{5.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2^2 &= \frac{-m_T}{4k_m \sin \phi} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{k_D} \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{I_{xx}}{2Lk_m} \frac{d^2 \phi}{dt^2}, \tag{5.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3^2 &= \frac{-m_T}{4k_m \sin \phi} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{k_D} \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{I_{yy}}{2Lk_m} \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \tag{5.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4^2 &= \frac{-m_T}{4k_m \sin \phi} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{k_D} \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} - \frac{I_{xx}}{2Lk_m} \frac{d^2 \phi}{dt^2}. \tag{5.59}
\end{aligned}$$

Para esta tesis, la simetría del cuadricóptero permite que las ecuaciones generales anteriores se simplifiquen aún más, pues los momentos I_{xx} e I_{yy} son iguales, Ec.(4.9). Por lo tanto, las ecuaciones para las velocidades angulares de cada uno de los motores del cuadricóptero en términos de la trayectoria prescrita en el espacio tridimensional quedan

$$u_1^2 = \frac{-m_T}{4k_m \sin \phi} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right] - \frac{I_{yy}}{2Lk_m} \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \tag{5.60}$$

$$u_2^2 = \frac{-m_T}{4k_m \sin \phi} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right] + \frac{I_{xx}}{2Lk_m} \frac{d^2 \phi}{dt^2}, \tag{5.61}$$

$$u_3^2 = \frac{-m_T}{4k_m \sin \phi} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right] + \frac{I_{yy}}{2Lk_m} \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \tag{5.62}$$

$$u_4^2 = \frac{-m_T}{4k_m \sin \phi} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right] - \frac{I_{xx}}{2Lk_m} \frac{d^2 \phi}{dt^2}. \tag{5.63}$$

Nótese que solo aparece la trayectoria en la coordenada Y explícitamente, pero las trayectorias en X y Z se utilizan para calcular $\phi(t)$ y $\theta(t)$.

Estas ecuaciones muestran que una trayectoria arbitraria en el espacio puede ser descrita por el cuadricóptero si las velocidades angulares de cada uno de sus motores están dadas por estas expresiones en función del tiempo. Además, es importante enfatizar que bastó con controlar dos de los tres ángulos respecto al centro de masa de la aeronave para lograr trazar la trayectoria arbitraria, esto es, el ángulo ψ que se ha tomado nulo en este cálculo tiene cierto grado de arbitrariedad.

5.4. Cualquier trayectoria en el espacio y un grado de libertad interno

El caso más general para el cual ninguno de los ángulos del cuadricóptero es fijo se puede estudiar si se dividen las Ecs.(5.1), (5.3), y las Ecs.(5.2), (5.3), con lo que se tienen las siguientes expresiones

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T}\right) \frac{dx}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T}\right) \frac{dz}{dt} - g} = \tan \theta \cos \psi + \tan \phi \frac{\sin \psi}{\cos \theta}, \quad (5.64)$$

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T}\right) \frac{dy}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T}\right) \frac{dz}{dt} - g} = \tan \theta \sin \psi - \cos \psi \frac{\tan \phi}{\cos \theta}, \quad (5.65)$$

de esta última ecuación se obtiene

$$\frac{\tan \phi}{\cos \theta} = \tan \theta \tan \psi - \sec \psi \frac{\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T}\right) \frac{dy}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T}\right) \frac{dz}{dt} - g}, \quad (5.66)$$

ahora, elevando al cuadrado las Ecs.(5.64) y (5.65) y sumándolas se obtiene

$$\frac{\left[\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T}\right) \frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T}\right) \frac{dy}{dt}\right]^2}{\left[\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T}\right) \frac{dz}{dt} - g\right]^2} = \tan^2 \theta + \left(\frac{\tan \phi}{\cos \theta}\right)^2, \quad (5.67)$$

al sustituir la Ec.(5.66) se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\left[\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} \right]^2 + \left[\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right]^2}{\left[\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g \right]^2} \\ &= \tan^2 \theta + \left[\tan \theta \tan \psi - \sec \psi \frac{\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g} \right]^2, \end{aligned} \quad (5.68)$$

desarrollando el cuadrado y tomando en cuenta la identidad trigonométrica de la Ec.(5.46), la última expresión conduce a

$$\begin{aligned} 0 &= \tan^2 \theta - 2 \sin \psi \tan \theta \frac{\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g} + \quad (5.69) \\ & \frac{\sin^2 \psi \left[\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right]^2 - \cos^2 \psi \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} \right]^2}{\left[\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g \right]^2}, \end{aligned}$$

esta ecuación tiene forma de una ecuación de segundo orden

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad (5.70)$$

donde los coeficientes son

$$A = 1, \quad (5.71)$$

$$B = -2 \sin \psi \frac{\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g}, \quad (5.72)$$

$$C = \frac{\sin^2 \psi \left[\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} \right]^2 - \cos^2 \psi \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} \right]^2}{\left[\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g \right]^2}, \quad (5.73)$$

por lo que sus dos soluciones quedan determinadas por

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \sin \psi \frac{\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g} \\ &\pm \cos \psi \frac{\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Por tanto, para que el cuadricóptero describa una trayectoria específica será necesario imponer la dinámica de dos de sus ángulos de inclinación mientras que el tercer ángulo es arbitrario y se le podría dar un movimiento adicional, por ejemplo hacerlo rotar sobre su propio eje.

5.5. Compensación del empuje de la pistola

Se vió que para que el cuadricóptero vuele en el plano XZ se requiere que el ángulo de cabeceo θ sea distinto de cero. Ahora, al elegir que se aplique la pintura en la dirección positiva Y , la aeronave experimentará un retroceso en la dirección $-Y$ debido al empuje originado por el chorro de pintura que sale de la boquilla de la pistola, Ec.(5.42), obligando a que también el ángulo de balanceo ϕ sea distinto de cero. Por lo tanto, dicho factor se agrega solamente en la Ec.(5.40) pero las Ecs.(5.39) y (5.41) no cambian.

Entonces, las ecuaciones particulares con retroceso para el centro de masa son las siguientes

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{T_h}{m_T} \sin \theta \cos \phi, \quad (5.75)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} = -\frac{T_h}{m_T} \sin \phi - \frac{P \cdot A}{m_T}, \quad (5.76)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g = \frac{T_h}{m_T} \cos \phi \cos \theta. \quad (5.77)$$

Las ecuaciones para los ángulos se mantienen igual, esto es

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{LK_m}{I_{xx}} (u_2^2 - u_4^2), \quad (5.78)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{LK_m}{I_{yy}} (u_3^2 - u_1^2), \quad (5.79)$$

$$(I_{yy} - I_{xx}) \frac{d\phi}{dt} \frac{d\theta}{dt} = k_D (u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2). \quad (5.80)$$

Para que se satisfaga la Ec.(5.76) de tal forma que no haya desplazamiento en la coordenada Y se requiere que

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dy}{dt} = 0, \quad (5.81)$$

por lo tanto

$$\sin \phi = -\frac{P \cdot A}{T_h}, \quad (5.82)$$

es decir, para contrarrestar el empuje originado en la boquilla se necesita que el cuadricóptero permanezca inclinado este ángulo de balanceo ϕ determinado

por la fuerza de retroceso $P \cdot A$. Por otro lado, la ecuación para el ángulo θ se obtiene de dividir la Ecs.(5.75) y (5.77), entonces

$$\tan \theta = \frac{\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt}}{\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g}, \quad (5.83)$$

que coincide con la Ec.(5.17), es decir, los resultados para el movimiento confinado en un plano deducidas en la sección 5.2 siguen siendo válidos aún cuando el cuadricóptero se debe inclinar en el ángulo de balanceo ϕ para compensar el empuje ejercido en la boquilla de la pistola al pintar.

De esta manera, las Ecs.(5.17), (5.18) y (5.19) proporcionan las velocidades angulares de los motores, pero la Ec.(5.16) debe cambiar por un factor del ángulo de balanceo ϕ . Entonces, sumando los cuadrados de las Ecs.(5.75) y (5.77) se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_h}{m_T} \cos \phi \right)^2 &= \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} \right]^2 \\ &+ \left[\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g \right]^2, \end{aligned} \quad (5.84)$$

sustituyendo T_h , Ec.(5.13), queda

$$\begin{aligned} u_2^4 \left(\frac{4k_m \cos \phi}{m_T} \right)^2 &= \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dx}{dt} \right]^2 \\ &+ \left[\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{1}{m_T} \frac{dm_T}{dt} + \frac{k_{roz}}{m_T} \right) \frac{dz}{dt} - g \right]^2, \end{aligned} \quad (5.85)$$

donde al despejar u_2 y por la Ec.(5.10) se obtienen las velocidades del *motor*₂ y *motor*₄.

En este capítulo se han obtenido expresiones para calcular explícitamente las velocidades angulares de cada uno de los motores del cuadricóptero para que su centro de masa describa trayectorias prescritas para realizar labores específicas. Se han considerado en particular trayectorias planas verticales y, dentro de éstas, ciertos casos especiales que permitan llevar a cabo la labor de pintado. Se consideró además el caso de trayectorias generales no planas y se mostró finalmente que en el caso general una de las variables angulares puede permanecer arbitraria si solo se pretende controlar la posición del centro de masa.

Capítulo 6

Simulaciones

Se aplicará el formalismo desarrollado en el capítulo anterior para especificar trayectorias que debe seguir el cuadricóptero. Se llevarán a cabo simulaciones numéricas de las trayectorias de la aeronave utilizando valores realistas para los parámetros del sistema. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Se define una trayectoria para efectuar cierta labor como el proceso de pintado en el plano XZ del sistema de laboratorio, lo que resulta en ecuaciones paramétricas que dependen solo de las coordenadas X y Z en el tiempo. Luego, se obtienen la primera y segunda derivada en el tiempo de estas coordenadas para sustituirlas en las ecuaciones del centro de masa del cuadricóptero, Ecs.(5.1) y (5.3).
2. Dada la trayectoria prescrita y calculadas sus dos primeras derivadas temporales, se calculan analíticamente las velocidades angulares de los cuatro motores como función del tiempo utilizando las Ecs.(5.10) a (5.19).
3. Dichas expresiones para las velocidades u_1 , u_2 , u_3 y u_4 como función del tiempo se insertan en las ecuaciones diferenciales ordinarias, Ecs.(5.1) a (5.6), de tal forma que todas las cantidades estén bien definidas.
4. Se resuelve numéricamente este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, Ecs.(5.1) a (5.6), fijando condiciones iniciales tanto para los ángulos de orientación del cuadricóptero $\phi(0)$, $\theta(0)$, $\psi(0)$, como para las posiciones del centro de masa del cuadricóptero $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$. Se comienza por resolver numéricamente el subconjunto de Ecs.(5.4) a (5.6) que corresponde a la dinámica rotacional del cuadricóptero de donde se obtienen $\phi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ utilizando un paquete que incluya una rutina simple de Runge-Kutta para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias [16]. Se sustituye interpolando para las funciones $\phi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ en el intervalo de tiempo de vuelo en las Ecs.(5.1) a (5.6) junto con los valores de velocidades u_1 , u_2 , u_3 y u_4 . De esta manera se resuelve el sistema de ecuaciones para $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de donde se recupera la trayectoria seguida por el centro de masa del cuadricóptero a partir de las velocidades angulares de sus motores.

5. Una vez conocidos los movimientos angulares y la trayectoria del centro de masa como función del tiempo, a partir de estos se obtiene la posición de cada uno de los motores. Esto se consigue sabiendo las rotaciones $\phi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ del centro de masa del cuerpo y que la distancia de cada motor al centro de masa es $L = 0.3m$, ya que es la longitud de cada brazo del cuadricóptero. Al obtenerse estas cinco posiciones, correspondientes al centro de masa y los cuatro motores, se trazan con ayuda del mismo paquete de programación en tiempo real [16], lo que permite visualizar de manera muy gráfica los resultados obtenidos.

6.1. Parámetros del sistema

Seguindo la ley de Stokes se obtendrá el valor de coeficiente de rozamiento k_{roz} que se tiene sobre el cuadricóptero en las tres coordenadas espaciales debido al roce con el aire. Para la constante propia del motor k_m , el coeficiente de arrastre k_D en cada hélice, los valores de masa, momentos de inercia y dimensiones del cuadricóptero se tomarán los datos utilizados en la tesis de maestría [5].

La masa total del cuadricóptero sin cargar la pistola con pintura es

$$m_q = 1.247 \text{ kg}, \quad (6.1)$$

de la cual la masa de cada motor con su hélice es

$$m_{motor} = 0.067 \text{ kg}. \quad (6.2)$$

Considerando el valor de la gravedad, Ec.(2.1), la magnitud del peso del cuadricóptero sin llevar la pistola es

$$W_q = 12.233 \text{ N}. \quad (6.3)$$

De manera arbitraria, para simplificar el desarrollo de los cálculos y la obtención de los datos se considerará que la masa de la pistola más la carga de pintura sea de 1 kg

$$m_p(t = 0) = 1 \text{ kg}. \quad (6.4)$$

Finalmente, la masa inicial del sistema cuadricóptero-pintura será

$$m_T(t = 0) = [m_q + m_p(t = 0)] = 2.247 \text{ kg}, \quad (6.5)$$

por lo que el peso inicial del sistema al comenzar el vuelo, Ec.(2.2), es

$$W_{sistema}(t = 0) = 22.043 \text{ N}. \quad (6.6)$$

Para estimar la constante propia k_m de cada motor, en la tesis de maestría [5] deducen que la frecuencia de trabajo ω_0 mínima de rotación de los motores para sustentar solamente la masa del cuadricóptero m_q es

$$\omega_0 = 555.018 \text{ rad/s}, \quad (6.7)$$

insertando este valor en la Ec.(2.22) e igualando con la Ec.(6.3)

$$k_m (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) = 12.233 N ,$$

se tiene que la constante del motor es

$$k_m = 9.928 \times 10^{-6} \frac{N}{(\text{rad}/s)^2} . \quad (6.8)$$

Este valor ha de tomarse para los cuatro motores ya que se considera que son idénticos. Se puede ver que las unidades de esta constante son

$$[k_m] = kg \cdot m . \quad (6.9)$$

Al ser más cómodo visualizar revoluciones por minuto (*rpm*) que radianes por segundo (*rad/s*), en los resultados que se tenga velocidad angular de los motores se mostrará su equivalencia en *rpm* haciendo uso de la siguiente relación

$$1 \text{ rad}/s = \frac{30}{\pi} \text{ rpm} = 9.549 \text{ rpm} , \quad (6.10)$$

por lo que convirtiendo a *rpm*, la frecuencia de trabajo que debe tener cada motor para sustentar solamente al cuadricóptero es

$$\omega_0 = 5300.03 \text{ rpm} . \quad (6.11)$$

6.1.1. Velocidad mínima de sustentación u_0

Con los datos anteriores es posible obtener la frecuencia de trabajo u_0 para sustentar el sistema cuadricóptero-pintura. La velocidad angular mínima que deberá tener cada motor se obtiene igualando las Ecs.(2.22) y (6.6) con lo que resulta

$$u_0 = 745.032 \text{ rad}/s , \quad (6.12)$$

y usando la equivalencia de la Ec.(6.10) se tiene

$$u_0 = 7114.540 \text{ rpm} . \quad (6.13)$$

Con dicha velocidad de rotación de los motores, se puede sustentar el sistema manteniéndolo fijo en algún punto del espacio tridimensional.

6.1.2. Coeficiente de rozamiento k_{roz} y de arrastre k_D

En la sección 2.3, siguiendo la ley de Stokes se dijo que el coeficiente de rozamiento que experimentará el cuadricóptero en su vuelo está dado por la Ec.(2.10)

$$k_{roz} = 6\pi\eta R_{sph} , \quad (6.14)$$

donde el valor de la viscosidad del aire es

$$\eta = 1.8 \times 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot s}, \quad (6.15)$$

de estas dos ecuaciones se aprecia que las unidades de k_{roz} son

$$[k_{roz}] = \frac{kg}{s}. \quad (6.16)$$

Para utilizar la ley de Stokes y calcular los momentos de inercia del cuadricóptero, éste se considerará como un objeto esférico [5], para ello se supone que toda su masa, sin considerar la masa de los motores, se concentra en una esfera en la que para determinar su radio se toman en cuenta el tamaño de la batería, el chasis y la electrónica, pero no el de sus brazos ni el tamaño de la pistola. Los motores se toman como masas puntuales a una distancia $L = 0.3 m$ del centro de masa. Bajo estas consideraciones, el radio de la esfera es

$$R_{sph} = 0.085 m, \quad (6.17)$$

dada esta aproximación, se tiene que el coeficiente de rozamiento, Ec.(2.10), tiene el valor

$$k_{roz} = 2.88 \times 10^{-5} \frac{kg}{s}. \quad (6.18)$$

Como se considera que toda la masa se concentra en la esfera de radio R_{sph} , la masa de la esfera dependerá del tiempo $m_{sph}(t)$ pues la pintura va disminuyendo, por lo que los momentos de inercia también variarán con el tiempo, quedando

$$\begin{aligned} I_{xx}(t) = I_{yy}(t) &= 2m_r L^2 + \frac{2}{5} m_{sph}(t) R_{sph}^2, \\ I_{zz}(t) &= 4m_r L^2 + \frac{2}{5} m_{sph}(t) R_{sph}^2, \end{aligned} \quad (6.19)$$

por ejemplo, al inicio del vuelo ($t = 0 s$) se tienen los siguientes valores

$$\begin{aligned} I_{xx}(0 s) = I_{yy}(0) &= 0.01777 kg \cdot m^2, \\ I_{zz}(0 s) &= 0.02983 kg \cdot m^2, \end{aligned} \quad (6.20)$$

y a un tiempo arbitrario $t = 96\pi s = 301.593 s$ los valores son

$$\begin{aligned} I_{xx}(96\pi s) = I_{yy}(96\pi s) &= 0.014889 kg \cdot m^2, \\ I_{zz}(96\pi s) &= 0.026949 kg \cdot m^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Para el caso del coeficiente de arrastre k_D , se consideró un valor de

$$k_D = 0.0005. \quad (6.22)$$

Se verá que el valor de la k_{roz} se encuentra lejos del necesario para que las trayectorias obtenidas en las simulaciones a través de las soluciones numéricas coincidan con las trayectorias analíticas.

6.2. Tipos y detalles de vuelo

El cuadricóptero tiene seis grados de libertad, que son sus desplazamientos en el espacio tridimensional y las respectivas rotaciones en cada dimensión, pero solo se tienen cuatro grados de control que corresponden a los cuatro motores. Esto obliga a que la aeronave tenga que inclinarse si se quiere tener un desplazamiento horizontal en el plano XZ del sistema de laboratorio. Los diferentes tipos de vuelo que realizará el cuadricóptero se especificaron en la sección 5.2.

A continuación se detallan las condiciones que habrán de establecerse en los parámetros del cuadricóptero para que describa dichos tipos de vuelo.

6.2.1. Movimiento vertical ascendente (despegue)

Para que el cuadricóptero ascienda verticalmente, la velocidad angular de los cuatro motores debe ser la misma para cada uno y superior a la requerida para mantenerlo suspendido en un punto fijo. La ecuación que describe la velocidad de los motores en el ascenso del cuadricóptero es la Ec.(5.22), donde interviene el factor de velocidad constante v_{0z} a la que el cuadricóptero se va elevando.

En la simulación se elige que el cuadricóptero despegue del origen coordenado $(x, y, z) = (0, 0, 0) m$ con una velocidad de ascenso de $20 cm$ cada segundo, $v_{0z} = 0.2 m/s$, Fig.(6.1). Si por ejemplo se elige que el tiempo de vuelo vertical sea de $19.75 s$, se alcanzará una altura de $3.95 m$ con lo que se consigue empezar a pintar la pared desde la parte superior para reducir descuelgues de pintura. Como durante el despegue no se irá aplicando pintura, en este tiempo la masa del sistema permanece constante, Ec.(6.5). Introduciendo los parámetros en la Ec.(5.22), la velocidad angular u de cada motor para este tipo de vuelo vertical del cuadricóptero a la velocidad constante mencionada resulta ser

$$u_{vertical} = 887.417 rad/s, \quad (6.23)$$

o por la equivalencia de la Ec.(6.10) se tiene

$$u_{vertical} = 8474.210 rpm. \quad (6.24)$$

Comparado con la frecuencia de trabajo, Ec.(6.7), se tienen $142.384 rad/s$ más en la velocidad de giro de cada motor, o equivalentemente $1359.670 rpm$ extra. Finalmente, con esta velocidad angular $u_{vertical}$ se obtiene un empuje total, Ec.(2.22), generado por los cuatro motores de

$$T_{hvertical} = 31.273 N, \quad (6.25)$$

que, comparado con la Ec.(6.6), es $9.230 N$ mayor que el empuje requerido para sustentar el peso del sistema, lo que correspondería a una masa de $0.940 kg$. Con esta resultante positiva se consigue el despegue a velocidad constante y cabe mencionar que para moverse verticalmente no debe haber inclinación de balanceo ni cabeceo ($\phi = \theta = 0$).

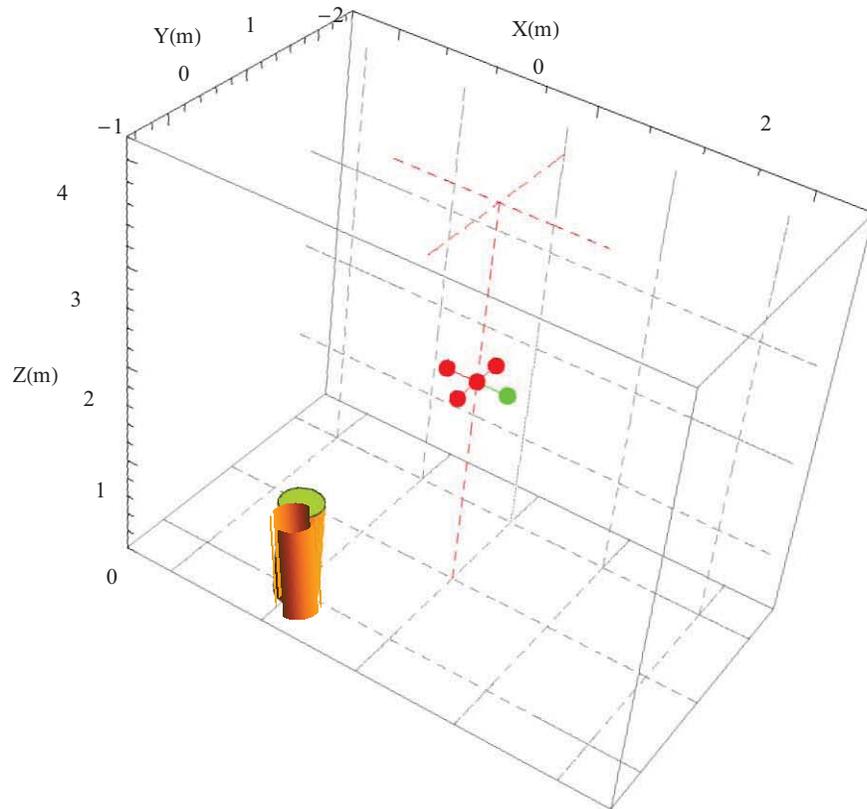


Figura 6.1: Vuelo de despegue sin consumo de pintura. El cuadricóptero asciende con velocidad constante $v_{0z} = 0.2 \text{ m/s}$ durante un tiempo de 19.75 s con lo que alcanza una altura de 3.95 m . La figura muestra a la aeronave en el segundo 11 de vuelo, el cilindro amarillo simula la masa de la pistola con carga de pintura en tiempo real, por lo que en este caso del despegue que no hay consumo de pintura el cilindro corresponde a 1 kg completo. Las líneas punteadas horizontales en color gris simulan el suelo y las verticales simulan la pared que se encuentra a 1 m de distancia del lado izquierdo del cuadricóptero, las líneas punteadas rojas son auxiliares para visualizar la ubicación del cuadricóptero. La gráfica se obtiene a partir de la solución numérica del problema.

6.2.2. Suspendido en un punto fijo

Dado que los cuatro motores se han considerado idénticos, para que el cuadricóptero se mantenga volando fijo en un punto del espacio, Fig. (6.2), cada uno de los motores habrá de sustentar la cuarta parte del peso del sistema, girando todos con la velocidad angular descrita en la Ec.(5.23). La velocidad angular mínima para sustentar el peso del sistema, Ec.(6.6), se obtuvo en la Ec.(6.12) y debe ser para cada motor

$$u_0 = 745.032 \text{ rad/s},$$

o por la equivalencia de la Ec.(6.10) se tiene

$$u_0 = 7114.540 \text{ rpm}. \quad (6.26)$$

También se obtuvo que con esta velocidad angular se consigue un empuje total, Ec.(6.6), por los cuatro motores

$$T_{h_0} = 22.043 \text{ N}. \quad (6.27)$$

Como en el caso del ascenso vertical, en este tipo de vuelo no disminuye la pintura y al pedir que el cuadricóptero se mantenga estable y fijo en un punto tampoco debe haber inclinación de balanceo ni cabeceo ($\phi = \theta = 0$).

6.2.3. Movimiento horizontal

Para moverse en dirección paralela al eje X del sistema de laboratorio se utiliza la Ec.(5.24), de donde se aprecia que el cuadricóptero se desplazará hacia adelante o hacia atrás según el signo del término de velocidad constante v_{0x} volando a una altura fija z_0 . De la Ec.(5.25) se tuvo como resultado que el ángulo θ permanece constante en el tiempo si no se va perdiendo masa (pintura).

Si se quisiera que la aeronave se desplazara hacia adelante, la inclinación del ángulo θ se tendrá que hacer en sentido horario bajando el frente, esto se consigue aumentando el cuadrado de la velocidad del *motor*₃ y disminuyendo la misma cantidad del cuadrado de la velocidad del *motor*₁. Una vez que el cuadricóptero ya está inclinado, para mantener fija esa inclinación del ángulo θ los cuatro motores deberán girar con la misma velocidad angular entre ellos descrita en la Ec.(5.29).

Si se quisiera que el cuadricóptero se desplazara hacia atrás, la inclinación del ángulo θ se tendrá que hacer en sentido antihorario subiendo el frente, esto se consigue aumentando el cuadrado de la velocidad del *motor*₁ y disminuyendo la misma cantidad del cuadrado de la velocidad del *motor*₃. Una vez que la aeronave ya está inclinada, para mantener fija esa inclinación del ángulo θ los cuatro motores deben girar con la misma velocidad angular entre ellos, Ec.(5.29).

La Fig.(6.3) muestra el vuelo del cuadricóptero hacia adelante en la dirección positiva X a la velocidad constante $v_{0x} = 0.2 \text{ m/s}$ a una altura fija de 3.95 m . Se aprecia la inclinación $\theta = 22.721^\circ$, Ec.(5.25), hacia el frente del cuadricóptero que se requiere para conseguir el movimiento horizontal a la velocidad mencionada.

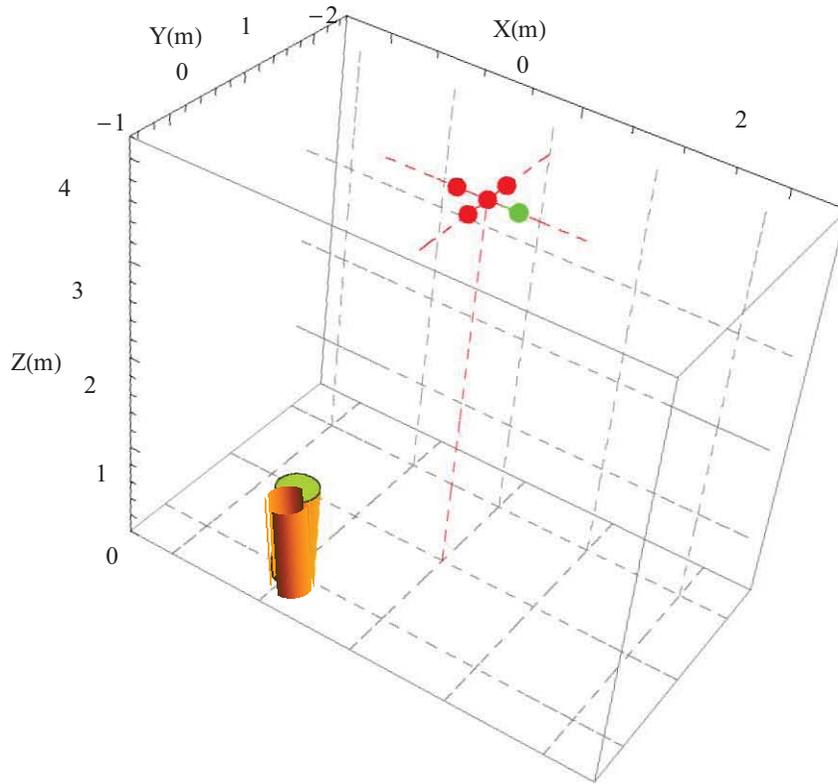


Figura 6.2: Vuelo suspendido sin consumo de pintura. La figura muestra al cuadricóptero en vuelo estable suspendido a una altura de 3.95 m . Con este tipo de vuelo se consigue colocar la aeronave en un punto fijo en la parte alta de la pared para empezar a recorrer la trayectoria que cubra la superficie que se desea pintar ubicada en el plano vertical XZ . El cilindro amarillo simula la pistola con carga de pintura en tiempo real, como en este caso de estado suspendido no hay consumo de pintura el cilindro corresponde a 1 kg completo. Las líneas punteadas horizontales en color gris simulan el suelo y las verticales simulan la pared que se encuentra a 1 m de distancia del lado izquierdo del cuadricóptero, las líneas punteadas rojas son auxiliares para visualizar la ubicación del cuadricóptero. La gráfica se obtiene a partir de la solución numérica del problema.

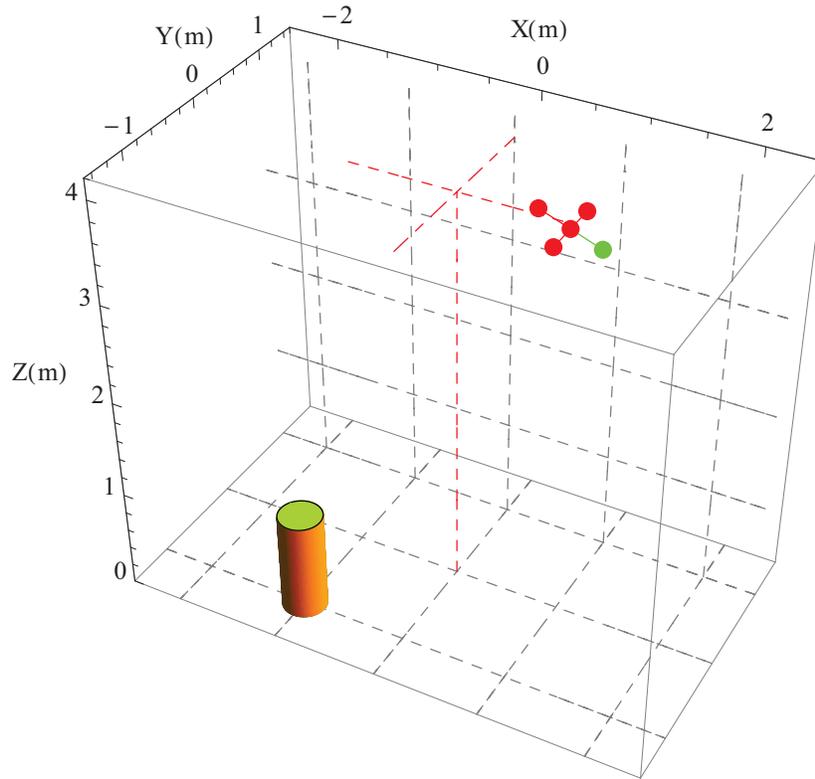


Figura 6.3: Vuelo horizontal sin consumo de pintura. La figura muestra al cuadricóptero en el segundo cinco de iniciado el vuelo horizontal hacia la derecha del plano XZ , dirección positiva X de la pared, partiendo del punto $(0, 0, 3.95) m$ a una velocidad de $0.2 m/s$ con un ángulo de inclinación positivo, es decir en sentido horario, de $\theta = 22.721^\circ$. Con este tipo de vuelo se mantiene al cuadricóptero a altura constante. Como en las figuras anteriores en las que no se va pintando, el cilindro amarillo simula el peso de la pistola más la carga de pintura en tiempo real que corresponde a $1 kg$ completo. Las líneas punteadas horizontales en color gris simulan el suelo, las verticales simulan la pared que se encuentra a $1 m$ de distancia del lado izquierdo del cuadricóptero y las líneas punteadas rojas son auxiliares para visualizar la ubicación de la aeronave. La gráfica se obtiene a partir de la solución numérica del problema.

Para este tipo de vuelo no se requiere que el cuadricóptero ascienda sino que se mantenga a la altura fija. Una vez que el cuadricóptero ya está inclinado un ángulo $\theta = 22.721^\circ$ y recordando que la velocidad angular será la misma en los cuatro motores

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_{horizontal}, \quad (6.28)$$

la velocidad de cada uno para este caso de vuelo horizontal es

$$u_{horizontal} = 775.741 \text{ rad/s}, \quad (6.29)$$

o por la equivalencia de la Ec.(6.10) se tiene

$$u_{horizontal} = 7407.790 \text{ rpm}. \quad (6.30)$$

Comparado con la frecuencia de trabajo, Ec.(6.7), se tienen 30.708 rad/s más en la velocidad de giro de cada motor, o equivalentemente 293.248 rpm extra. Finalmente, con esta velocidad angular $u_{horizontal}$ se obtiene un empuje total, Ec.(2.22), generado por los cuatro motores

$$T_{horizontal} = 23.897 \text{ N}, \quad (6.31)$$

que comparado con el peso inicial, Ec.(6.6), es 1.854 N mayor que el empuje mínimo requerido para sustentar el sistema, lo que correspondería a una masa de 0.189 kg . Esta diferencia se debe a que el cuerpo está volando inclinado, entonces la dirección del empuje de cada motor ya no es vertical respecto al sistema S_I , pues el plano que forman los cuatro motores en el sistema del cuadricóptero S_B estará inclinado el ángulo θ respecto al eje Z del sistema de laboratorio, Fig.(6.4). Por lo tanto, el empuje $T_{horizontal}$ se verá dividido en dos componentes, una horizontal T_{h_x} que se encarga de desplazar el cuadricóptero hacia la derecha y otra vertical T_{h_z} que se encarga de sustentarlo a la altura fija z_0 .

Para conocer el valor del empuje vertical T_{h_z} se hace uso de la Fig.(6.4) y de la relación

$$\cos \theta = \frac{T_{h_z}}{T_{horizontal}}, \quad (6.32)$$

entonces

$$T_{h_z} = 22.043 \text{ N}, \quad (6.33)$$

que coincide con el empuje T_{h_0} , Ec.(6.27), del caso de vuelo suspendido.

Usando la misma figura, para conocer el valor del empuje horizontal T_{h_x} se utiliza la relación

$$\sin \theta = \frac{T_{h_x}}{T_{horizontal}}, \quad (6.34)$$

entonces

$$T_{h_x} = 9.230 \text{ N}, \quad (6.35)$$

que correspondería a una masa de 0.940 kg . Este valor coincide con el empuje vertical extra obtenido en el caso del movimiento vertical (despege), pues en ambos se eligió de manera arbitraria una velocidad constante $v_0 = 0.2 \text{ m/s}$.

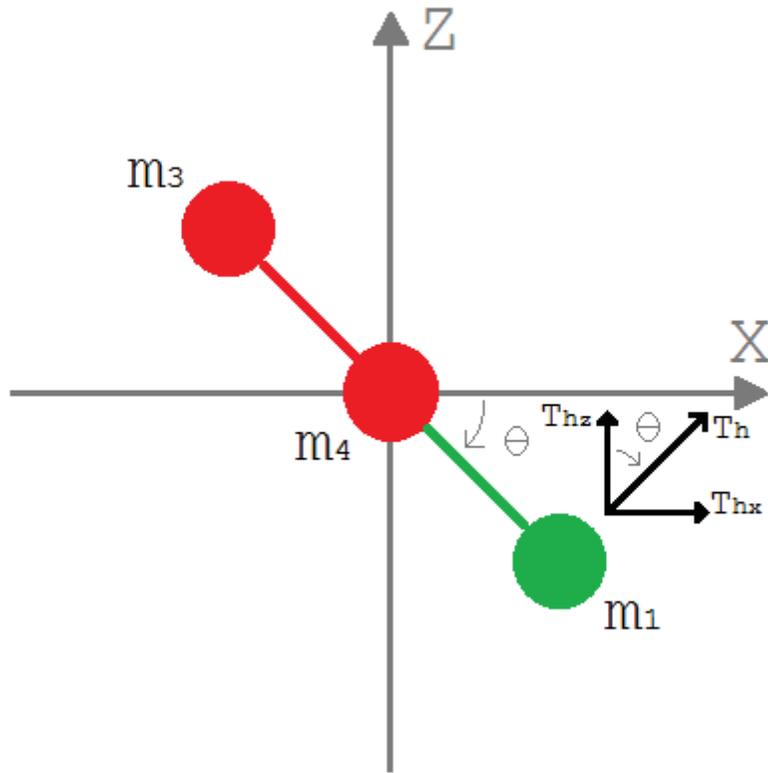


Figura 6.4: Componentes del empuje en el vuelo horizontal. El empuje generado por los cuatro motores para desplazar al cuadricóptero de manera horizontal a cierta altura z_0 es $T_{horizontal} = 23.897 N$. El plano que forman los motores en el sistema del cuadricóptero formará un ángulo $\theta = 22.721^\circ$ respecto al plano horizontal XY del sistema de laboratorio, por lo que dicho empuje tendrá dos componentes, una horizontal $T_{hx} = 9.230 N$ y otra vertical $T_{hz} = 22.043 N$.

6.2.4. Movimiento circular

En la sección 5.2.4, se vio que para describir una trayectoria circular las ecuaciones paramétricas a utilizar están dadas por la Ec.(5.30), mediante la cual el cuadricóptero inicia su vuelo a una altura $z_0 = 3.5\text{ m}$ y completa un círculo en un tiempo $t = 2\pi\text{ s}$. Sin embargo, para aproximarse más al valor ideal de la constante de rozamiento k_{roz} conviene pedir que se tracen más círculos, pues esto permite visualizar en la gráfica resultante las desviaciones de cada círculo trazado respecto del anterior y entonces se puede ir corrigiendo el parámetro k_{roz} hasta aproximarse a un valor ideal. Para entender mejor esto, las Figs.(6.5), (6.6) y (6.7) muestran la trayectoria recorrida usando tres valores de k_{roz} ligeramente distintos. Las tres trayectorias se obtienen con un tiempo de vuelo $t = 96\pi\text{ s}$ que equivale a 5.026 minutos o 301.593 s , en el cual se trazan 48 círculos completos. Como se eligió que la pintura sea aplicada en su totalidad al cabo de los $96\pi\text{ s}$, la tasa de consumo resultante para este tipo de vuelo es

$$\frac{dm_T(t)}{dt} = \frac{-1}{96\pi} \text{ kg/s} = -0.00331 \text{ kg/s}, \quad (6.36)$$

donde $m_T(t) = m_q + m_p(t)$, es la masa total del sistema cuadricóptero-pintura.

En la Fig.(6.5), el círculo en color rojo representa la trayectoria ideal trazada con la Ec.(5.30) y los círculos en color amarillo representan el vuelo descrito por el cuadricóptero obtenidos con los resultados numéricos. El valor de la constante de rozamiento utilizado en la simulación es $k_{roz} = 5.24885\text{ kg/s}$. Se aprecia que el centro de masa de la aeronave se va desviando de la trayectoria ideal ligeramente hacia la derecha, esto se debe a que la k_{roz} es menor que el valor ideal y entonces traza los círculos más «abiertos».

En la Fig.(6.6), se aprecia que los círculos en color amarillo trazados a través de los resultados numéricos coinciden con el círculo en color rojo correspondiente a la solución analítica, es decir, el centro de masa del cuadricóptero se mantiene dentro de la trayectoria ideal. El valor de la constante de rozamiento utilizado en la simulación es $k_{roz} = 5.28295\text{ kg/s}$.

Finalmente, en la Fig.(6.7) el círculo en color rojo representa la trayectoria ideal trazada con la Ec.(5.30) y los círculos en color amarillo representan el vuelo descrito por el cuadricóptero obtenidos con los resultados numéricos. El valor de la constante de rozamiento utilizado en la simulación es $k_{roz} = 5.31229\text{ kg/s}$. Se aprecia que el centro de masa del cuadricóptero se va desviando de la trayectoria ideal ligeramente hacia la izquierda, esto se debe a que la k_{roz} es mayor que el valor ideal y entonces traza los círculos más «cerrados».

En la Fig.(6.8), se muestra el comportamiento del ángulo de cabeceo θ durante los cinco minutos que se trazan los círculos, el cuadricóptero inicia el vuelo inclinado hacia adelante por lo que su valor inicial es positivo

$$\theta(t = 0\text{ s}) = +22.982^\circ,$$

y dado que para describir círculos la aeronave se debe inclinar hacia adelante y hacia atrás, el ángulo θ oscila entre valores positivos y negativos, pero nótese que conforme la masa de pintura disminuye el ángulo θ va aumentando, Fig.(6.8).

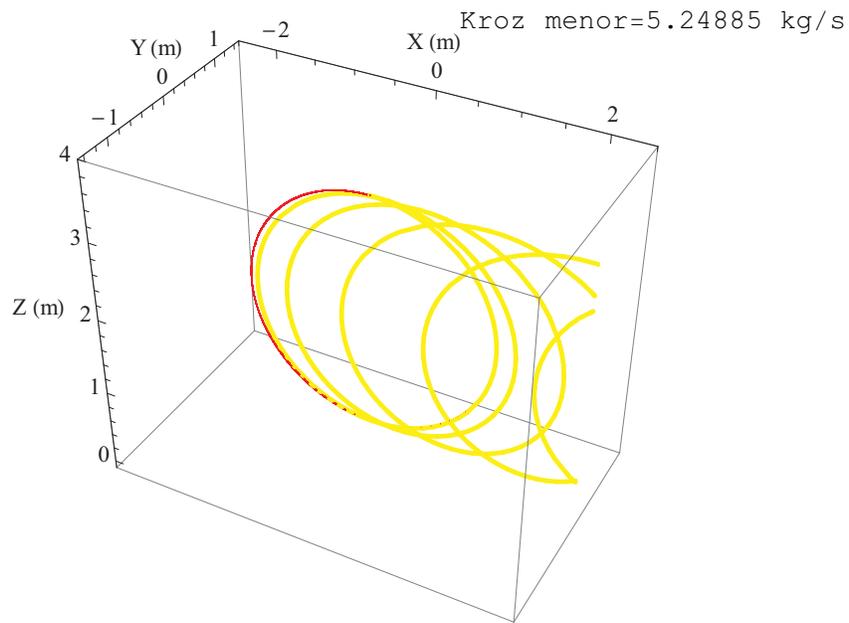


Figura 6.5: Vuelo circular con una constante de rozamiento menor que el valor ideal. El círculo en color rojo representa la trayectoria ideal trazada con la Ec.(5.30) y los círculos en color amarillo se obtienen a través de la solución numérica, se observa que éstos se van desplazando ligeramente a la derecha debido a que la $k_{roz} = 5.24885 \text{ kg/s}$ es menor que el valor ideal.

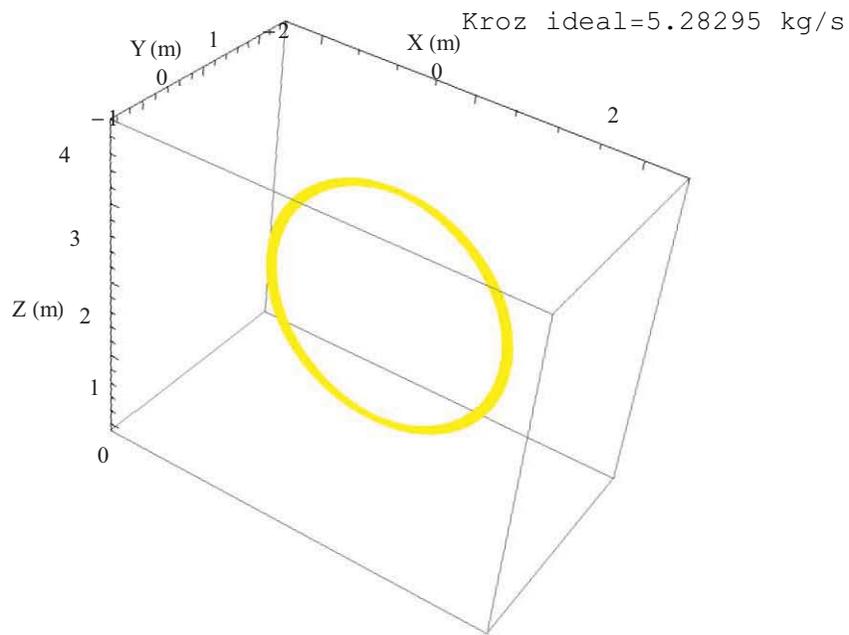


Figura 6.6: Vuelo circular con un valor ideal de la constante de rozamiento. Se observa que los círculos en color amarillo trazados a través de los resultados numéricos coinciden con el círculo en color rojo correspondiente a la solución analítica, el valor ideal utilizado en la simulación es $k_{roz} = 5.28295 \text{ kg/s}$.

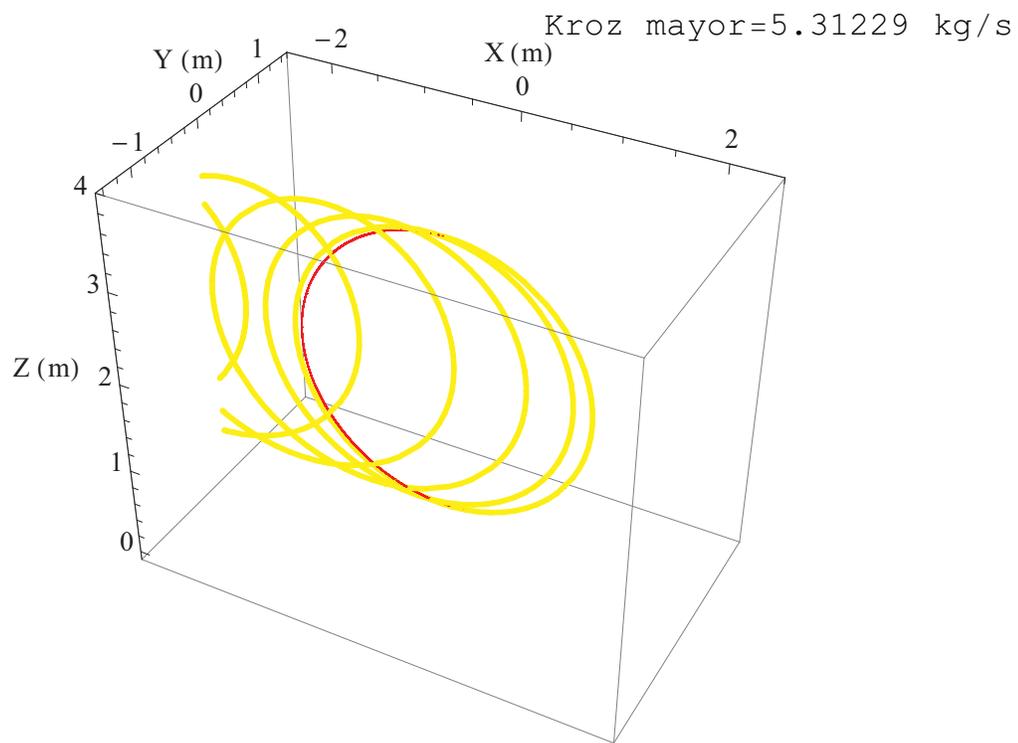


Figura 6.7: Vuelo circular con una constante de rozamiento mayor que el valor ideal. El círculo en color rojo representa la trayectoria ideal trazada con la Ec.(5.30) y los círculos en color amarillo se obtienen a través de la solución numérica, se observa que éstos se van desplazando ligeramente a la izquierda debido a que la $k_{roz} = 5.31229 \text{ kg/s}$ es mayor que el valor ideal.

El incremento de este ángulo se debe a las condiciones que se le impusieron a la trayectoria, pues se pide que describa 48 círculos completos en un tiempo $t = 96\pi s$, por lo que su velocidad debe ser periódica y debe alcanzar los mismos valores extremos en cada círculo. Sin embargo, al ir perdiendo masa los motores deben disminuir su frecuencia de rotación para evitar que la aeronave se eleve y así pueda permanecer dentro de la trayectoria, entonces debe inclinarse cada vez más para compensar la disminución en el empuje y trazar los círculos a un tiempo constante. En las Figs.(6.9) y (6.10) se muestra que las velocidades en las direcciones X y Z oscilan de forma periódica alcanzando siempre los mismos valores extremos, con lo que el tiempo de vuelo de cada círculo se mantiene constante.

A continuación se muestra el valor de la inclinación θ que tendrá el cuadricóptero en cuatro puntos distintos de la primera trayectoria circular

$$\begin{aligned}\theta\left(t = \frac{\pi}{2} s\right) &= -13.439^\circ, \\ \theta(t = \pi s) &= -17.384^\circ, \\ \theta\left(t = \frac{3}{2}\pi s\right) &= +6.406^\circ, \\ \theta(t = 2\pi s) &= +23.175^\circ.\end{aligned}$$

Para visualizar mejor las variaciones del ángulo θ , en la Fig.(6.11) se muestra su comportamiento durante el primer círculo de vuelo. En los 47 círculos restantes su conducta es análoga pero con la característica de que el ángulo va aumentando poco a poco hasta terminar en un valor final

$$\theta(t = 301.593 s) = +37.394^\circ.$$

La Fig.(6.12) muestra el comportamiento del $motor_2$ durante los cinco minutos de vuelo. La velocidad inicial es $u_{2_{ini}} = 714.662 rad/s$ y es la que se requiere para cuando el cuadricóptero aún carga toda la pintura, su equivalente es $u_{2_{ini}} = 6824.520 rpm$. La velocidad final es $u_{2_{fin}} = 573.080 rad/s$ y es la que se necesita para sustentar solo el peso del cuadricóptero, su equivalente es $u_{2_{fin}} = 5472.520 rpm$. Es importante recordar que se tendrán los mismos valores para el $motor_4$, Ec.(5.10). Para visualizar mejor el comportamiento del u_2 , en la Fig.(6.13) se muestra cómo se comporta al recorrer el primer círculo de vuelo.

Una vez conocidas las velocidades u_2 y u_4 , de las Ecs.(5.18) y (5.19) se calculan las velocidades u_1 y u_3 . La Fig.(6.14) muestra estas velocidades correspondientes al $motor_1$ y $motor_3$, respectivamente, durante los cinco minutos que dura el vuelo.

La velocidad inicial del $motor_1$ es $u_{1_{ini}} = 715.546 rad/s$ y es la que se requiere para cuando el cuadricóptero aún carga toda la pintura, su equivalente es $u_{1_{ini}} = 6832.970 rpm$. La velocidad final es $u_{1_{fin}} = 573.683 rad/s$ y es la

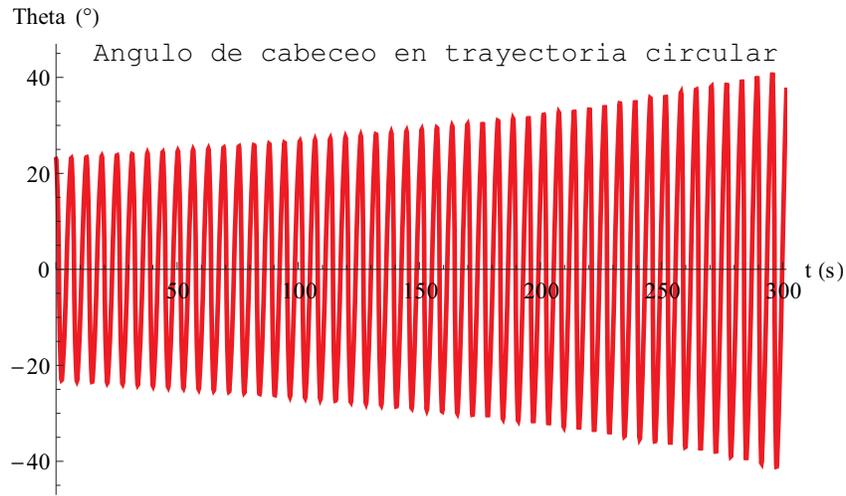


Figura 6.8: Ángulo de cabeceo θ . Se muestra el comportamiento del ángulo θ durante los 48 círculos que traza el cuadricóptero, se aprecia que el ángulo aumenta conforme va disminuyendo la cantidad de pintura y que además oscila entre valores positivos y negativos debido a que para trazar los círculos la aeronave debe irse inclinando hacia el frente y hacia atrás. El ángulo inicial es $\theta_{ini} = 22.982^\circ$ mientras que el ángulo final es $\theta_{fin} = 37.394^\circ$.

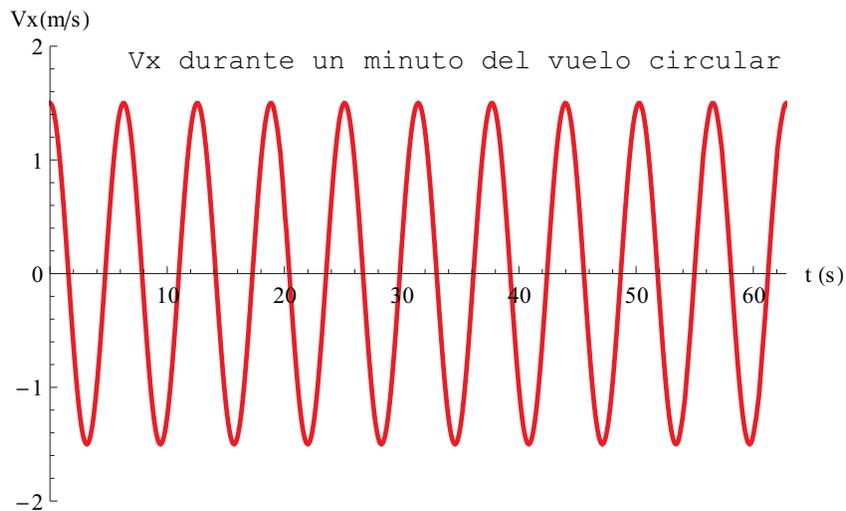


Figura 6.9: Velocidad en la dirección X . Se muestra que el desplazamiento en la dirección X oscila de forma periódica alcanzando siempre los mismos valores extremos, con lo que el tiempo de vuelo de cada círculo se mantiene constante.

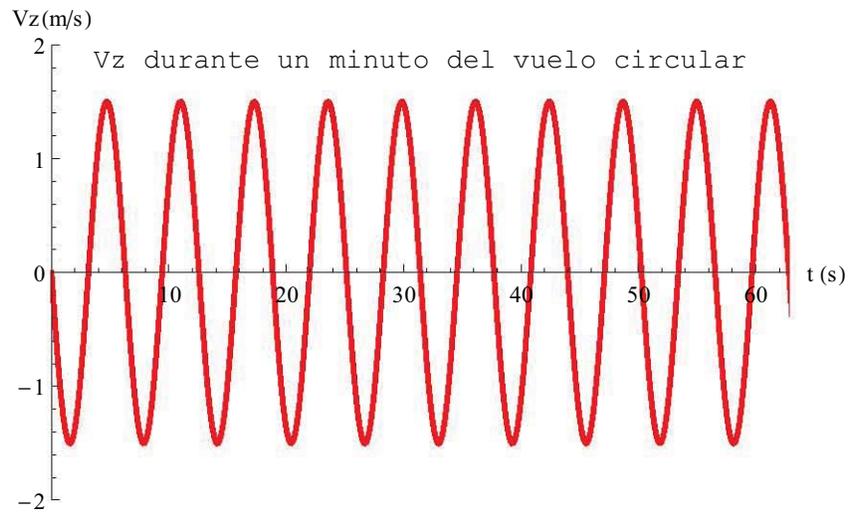


Figura 6.10: Velocidad en la dirección Z . Se muestra que el desplazamiento en la dirección Z oscila de forma periódica alcanzando siempre los mismos valores extremos, con lo que el tiempo de vuelo de cada círculo se mantiene constante.

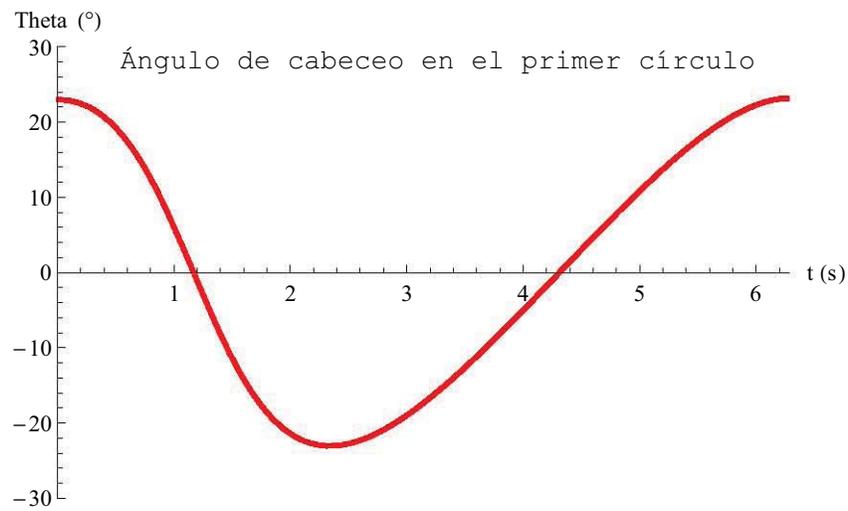


Figura 6.11: Ángulo de cabeceo θ durante el primer círculo de vuelo. El cuadricóptero empieza el recorrido con un ángulo de inclinación $\theta(t = 0 \text{ s}) = 22.982^\circ$ y cierra el primer círculo con un ángulo $\theta(t = 2\pi \text{ s}) = 23.175^\circ$.

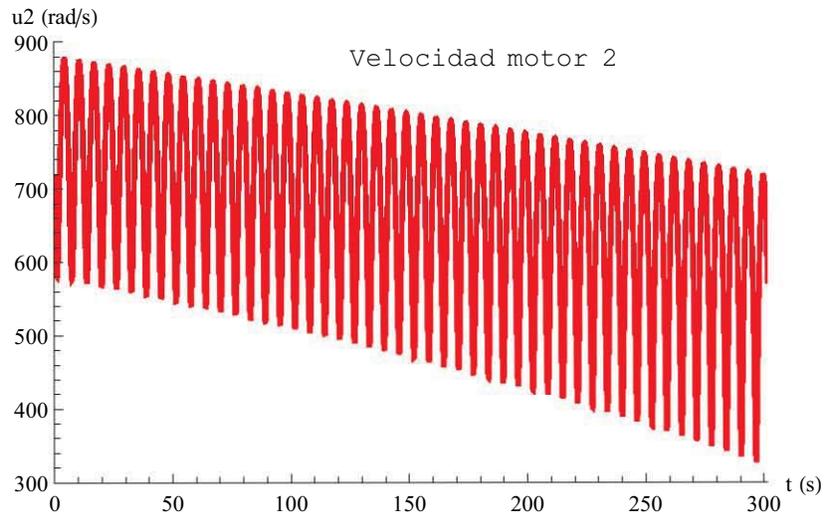


Figura 6.12: Velocidad u_2 . Se muestra el comportamiento del $motor_2$ durante los cinco minutos de vuelo. La velocidad inicial es $u_{2_{ini}} = 714.662 \text{ rad/s}$ y su equivalente es $u_{2_{ini}} = 6824.520 \text{ rpm}$. La velocidad final es $u_{2_{fin}} = 573.080 \text{ rad/s}$ y su equivalente es $u_{2_{fin}} = 5472.520 \text{ rpm}$.

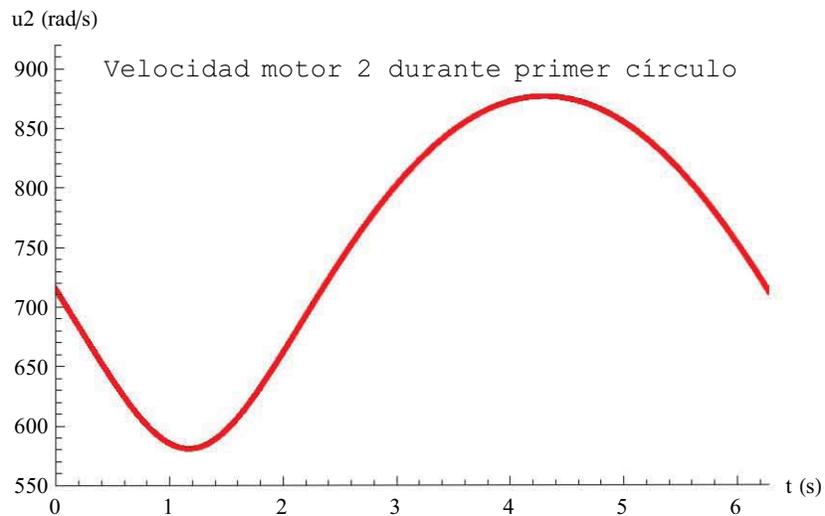


Figura 6.13: Velocidad u_2 durante el primer círculo. Se muestra la conducta del $motor_2$ para trazar el primer círculo; el comportamiento durante los círculos restantes es totalmente análogo, con la característica de que va disminuyendo su velocidad de giro.

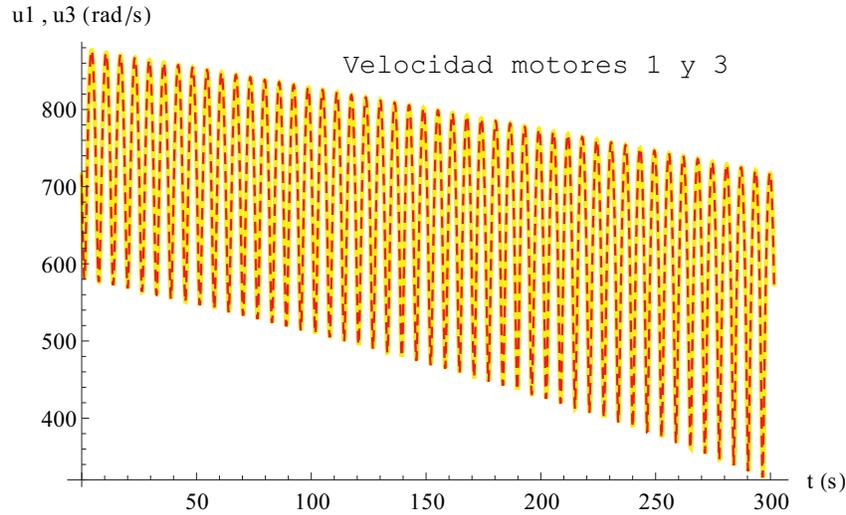


Figura 6.14: Velocidades u_1 y u_3 . Se muestran las velocidades del $motor_1$ y $motor_3$ durante los cinco minutos que dura el vuelo, la línea continua en color amarillo representa la velocidad u_1 y la línea punteada en color rojo la velocidad u_3 . Nótese que los valores son sumamente cercanos.

que se necesita para sustentar solo el peso del cuadricóptero, su equivalente es $u_{1fin} = 5478.270 rpm$.

La velocidad inicial del $motor_3$ es $u_{3ini} = 713.776 rad/s$ y es la que se requiere para cuando el cuadricóptero aún carga toda la pintura, su equivalente es $u_{3ini} = 6816.060 rpm$. La velocidad final es $u_{3fin} = 572.477 rad/s$ y es la que se necesita para sustentar solo el peso del cuadricóptero, su equivalente es $u_{3fin} = 5466.760 rpm$.

Para visualizar mejor estas velocidades, la Fig.(6.15) muestra su comportamiento durante el primer círculo de recorrido. Se aprecia que sus valores son sumamente cercanos, esto demuestra que el vuelo del cuadricóptero es muy sensible incluso a perturbaciones pequeñas por lo que basta con variar ligeramente la velocidad de sus motores para obtener los desplazamientos requeridos.

El empuje T_h que se obtiene con las velocidades encontradas durante los cinco minutos de vuelo se muestra en la Fig.(6.16), se aprecia que el empuje va disminuyendo debido a que los motores reducen su velocidad porque el sistema va perdiendo masa y de esta manera poder mantener al cuadricóptero dentro de la trayectoria circular prescrita. Con las velocidades iniciales que se mostraron se tiene un empuje inicial $T_{hini} = 20.282 N$, mientras que el peso inicial del sistema es $W_{sistema} = 22.043 N$. De las velocidades finales se tiene que el empuje final es $T_{hfin} = 13.042 N$, en tanto que el peso del cuadricóptero sin pistola es $W_q = 12.233 N$. En la Fig.(6.17) se muestra el comportamiento del empuje T_h en el primer círculo de recorrido.

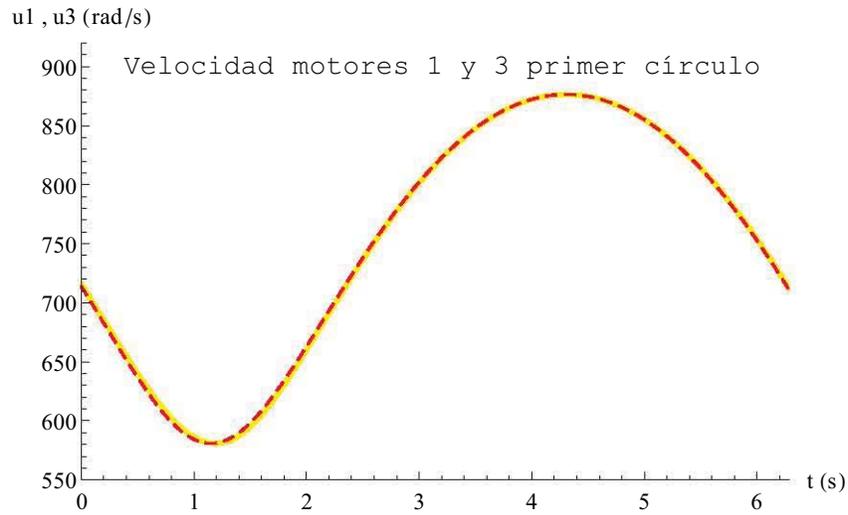


Figura 6.15: Velocidades u_1 y u_3 durante el primer círculo. Se muestra el comportamiento del $motor_1$ y $motor_3$ en el primer círculo de recorrido, la línea continua en color amarillo representa la velocidad u_1 y la línea punteada en color rojo la velocidad u_3 .

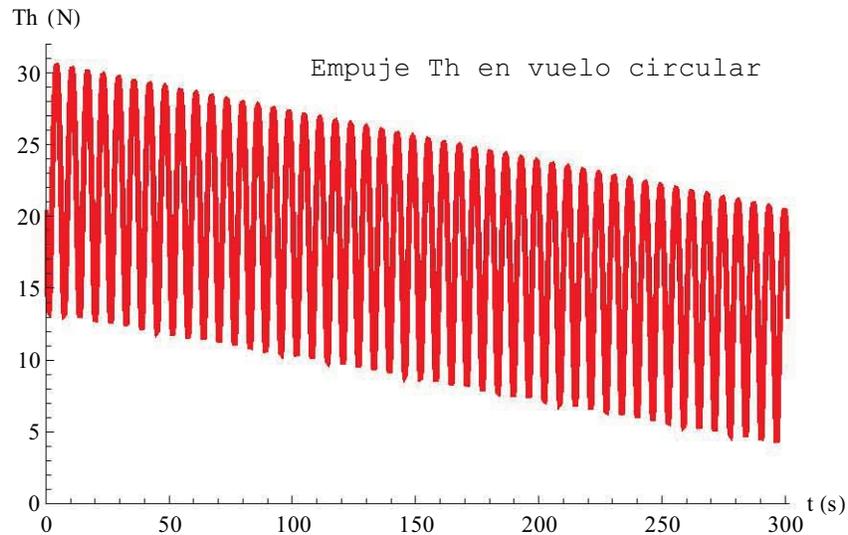


Figura 6.16: Empuje T_h en vuelo circular. El empuje se obtiene a partir de las velocidades encontradas, se aprecia que va disminuyendo debido a que los motores reducen su velocidad porque el sistema va perdiendo masa y de esta manera poder mantener al cuadricóptero dentro de la trayectoria circular prescrita.

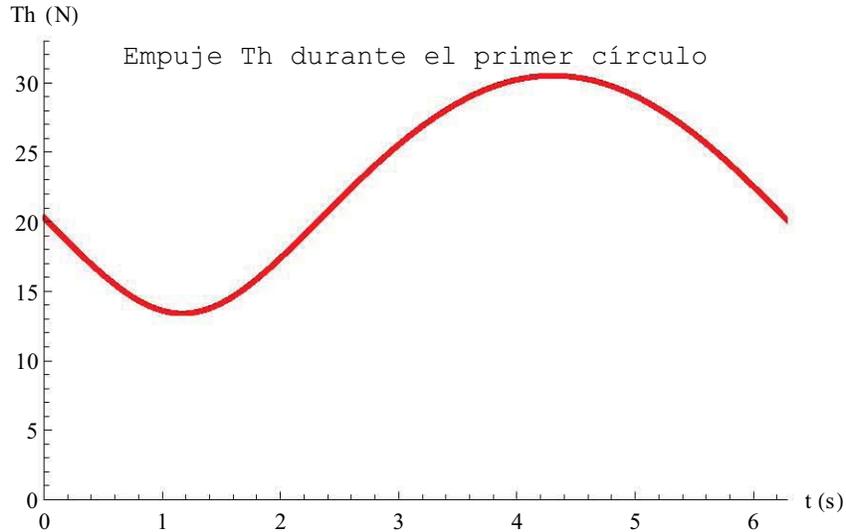


Figura 6.17: Empuje T_h en el primer círculo de recorrido. Se muestra el empuje generado por los cuatro motores mientras el cuadricóptero recorre el primer círculo. El vuelo lo empieza con un empuje $T_{h_{ini}} = 20.282 N$.

Finalmente, en la Fig. (6.18) se muestra la figura pintada por el cuadricóptero en la pared XZ después de haber completado el primer círculo de vuelo.

El análisis del movimiento en una elipse horizontal es totalmente análogo al desarrollado para este caso de la trayectoria circular.

6.2.5. Movimiento en un seno vertical

Para que el cuadricóptero recorra toda la pared se eligió trazar una trayectoria senoidal vertical cuya amplitud A sea de $2 m$ para cubrir entonces un ancho de pared de $4 m$, iniciando el vuelo en el punto $(x, y, z) = (0, 0, 3.95) m$, es decir, en el centro y en el punto alto de la pared, Fig.(5.5). Como se dijo en el capítulo anterior, para recorrer esta trayectoria se usará la Ec.(5.34) con los parámetros $k = \pi$ y $\omega = \frac{1}{6} 1/s$. Se simula el vuelo durante un tiempo $t = 108\pi s$, esto equivale a $5.654 minutos$ o $339.292 s$, con este tiempo se completan exactamente nueve ciclos de la función seno ya que con las ecuaciones paramétricas cada $12\pi s$ se cumple un ciclo.

De la mismas ecuaciones del seno vertical, Ec.(5.34), y dado el peso del sistema cuadricóptero-pintura, se tiene que la velocidad inicial en cada coordenada es

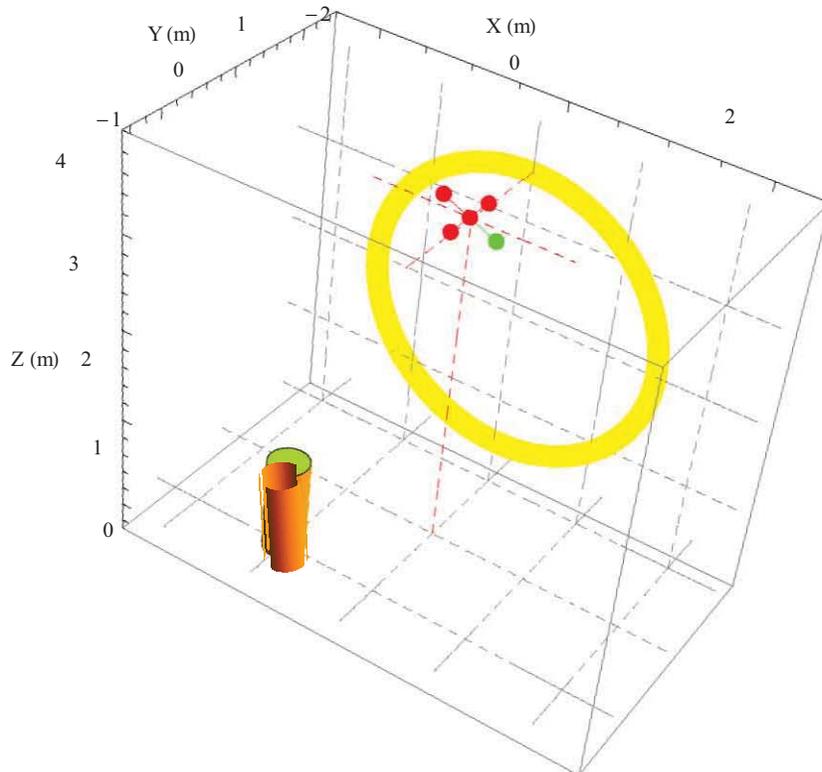


Figura 6.18: Círculo pintado. Se muestra la figura pintada de color amarillo sobre la pared por el cuadricóptero después de completar un círculo de vuelo, las líneas punteadas horizontales en color gris simulan el suelo y las verticales simulan la pared que se encuentra a 1 m de distancia del lado izquierdo del cuadricóptero, el cilindro amarillo ubicado en el suelo simula el peso de la pistola más la carga de pintura en tiempo real que inicialmente correspondía a 1 kg , las líneas punteadas en color rojo son auxiliares para visualizar mejor la ubicación de la aeronave. La gráfica se obtiene a partir de la solución numérica del problema.

$$\begin{aligned}
\dot{x}(0) &= \frac{1}{3} \text{ m/s}, \\
\dot{y}(0) &= 0 \text{ m/s}, \\
\dot{z}(0) &= -0.01 \text{ m/s}.
\end{aligned}
\tag{6.37}$$

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria requerida y el peso del sistema fijan las velocidades iniciales así como el ángulo inicial de inclinación, por lo que si se cambia el peso se obtendrá un ángulo inicial diferente. Este conjunto de condiciones iniciales dice que para que el cuadricóptero describa la trayectoria senoidal vertical descendente, su vuelo deberá iniciar con una inclinación en el ángulo de cabeceo $\theta = 35.480^\circ$, Fig.(1.6), moviéndose hacia la derecha y descendiendo 1 cm cada segundo. Como el tiempo de vuelo elegido de $t = 108\pi \text{ s}$ equivale a 339.292 s , el cuadricóptero descenderá aproximadamente 3.393 m y dado que inicia a una altura $z_0 = 3.95 \text{ m}$ es esta es la razón por la que su vuelo termina a 0.557 m sobre el nivel del suelo, Fig.(6.19).

Como se elige que toda la pintura sea aplicada en el tiempo de vuelo establecido, la tasa de consumo es

$$\frac{dm_T}{dt} = \frac{-1}{108\pi} \text{ kg/s} = -0.00294 \text{ kg/s}.
\tag{6.38}$$

Al cumplirse un ciclo del seno cada $12\pi \text{ s}$ que equivalen a 37.699 s , el cuadricóptero desciende 37.699 cm , de aquí se deduce que para asegurarse de cubrir toda la pared con pintura trazando este tipo de vuelo, basta con ajustar la boquilla de la pistola de tal forma que el abanico de proyección sea de 19 cm . Es decir, la separación vertical más grande entre dos líneas de la trayectoria será de 37.699 cm , entonces será suficiente con que el tamaño del abanico sea de la mitad para que se cubran 19 cm de la pared en el recorrido de ida y otros 19 cm en el de regreso. Esta deducción también puede hacerse al ver la Fig.(6.19). El tiempo y la altura final se eligieron así porque la longitud de cada brazo del cuadricóptero es $L = 0.3 \text{ m}$ y dado que éste vuela inclinado por tener que realizar movimientos horizontales, entonces con el tiempo de vuelo mencionado termina a una altura de 0.557 m , evitando así tocar el suelo, Fig.(6.19).

Una vez iniciado su vuelo con el ángulo de inclinación mencionado, durante el tiempo del recorrido dicho ángulo θ va cambiando como se muestra en la Fig.(6.20), dado que la trayectoria son ciclos de la función seno en la que el cuadricóptero vuela hacia adelante y hacia atrás, el ángulo θ va oscilando entre valores positivos y negativos. Nótese que conforme transcurre el tiempo y la masa de pintura va disminuyendo, el ángulo de cabeceo θ va aumentando.

Para entender la razón de este aumento conviene mostrar que al ir oscilando en valores positivos y negativos, el desplazamiento del cuerpo en la dirección horizontal X siempre alcanza sus valores extremos $V_{x_{\text{mín}}} = -\frac{1}{3} \text{ m/s}$ y $V_{x_{\text{máx}}} = \frac{1}{3} \text{ m/s}$, como se aprecia en la Fig.(6.21), sin importar que el sistema vaya perdiendo masa. Esta situación es inherente a las ecuaciones paramétricas elegidas para este tipo de vuelo, pues de la Ec.(5.34) se tiene que la velocidad en la dirección X es

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{t}{6}\right) \text{ m/s}.
\tag{6.39}$$

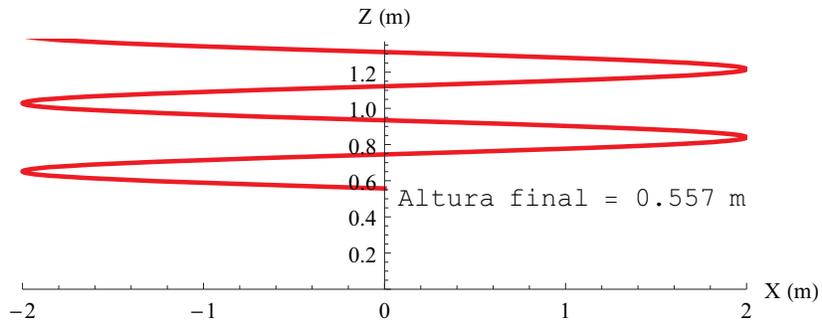


Figura 6.19: Altura final. El cuadricóptero inicia su vuelo a una altura de 3.95 m y lo termina a una altura sobre el suelo de 0.557 m después de haber completado nueve ciclos del seno, esto se elige así para evitar tocar el suelo, tomando en cuenta que el cuadricóptero se inclina en el vuelo y que la longitud de sus brazos es $L = 0.3\text{ m}$. La gráfica se obtiene a partir de la solución analítica del problema.

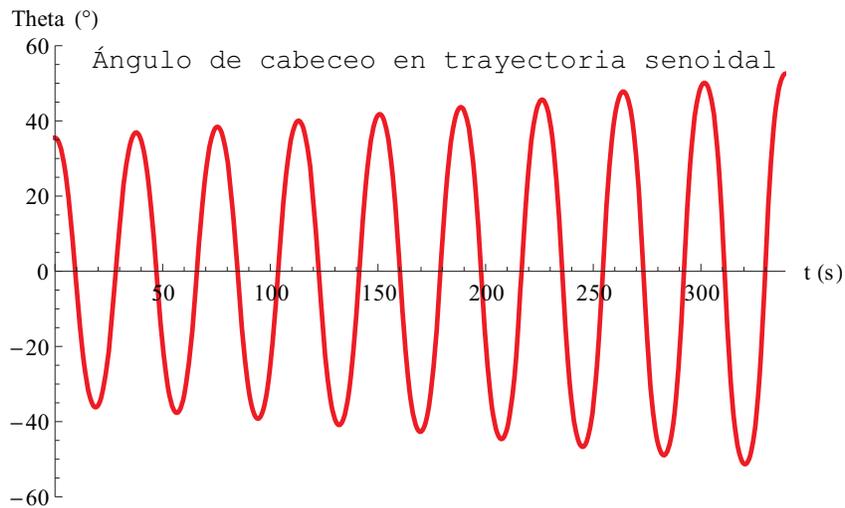


Figura 6.20: Comportamiento de θ durante el vuelo senoidal. El ángulo inicial es $\theta = 35.480^\circ$ y el ángulo final después de haber completado nueve ciclos es $\theta = 52.693^\circ$. Se aprecia que conforme va disminuyendo la masa del sistema cuadricóptero-pintura el ángulo de cabeceo va aumentando. La gráfica se obtiene a partir de la solución analítica del problema.

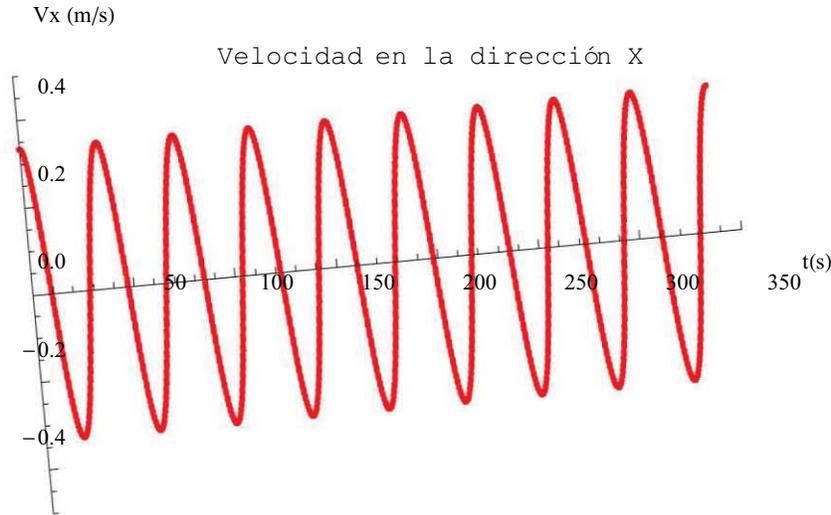


Figura 6.21: Velocidad en la dirección X . Se muestra que el desplazamiento en la dirección X oscila de forma periódica alcanzando siempre los mismos valores extremos, con lo que el tiempo de vuelo de cada ciclo del seno se mantiene constante.

A ir disminuyendo la masa de pintura, también los motores deberán disminuir su frecuencia de rotación para obligar así que el cuadricóptero permanezca en la trayectoria prescrita, de lo contrario éste se elevaría por la pérdida en el peso, entonces para compensar la reducción en la velocidad de sus motores el cuadricóptero debe ir inclinándose cada vez más para mantener constante el desplazamiento en la dirección X . Esta situación también se observó en el análisis del vuelo horizontal sin aplicación de pintura, sección 6.2.3, en la que se dijo que por volar inclinado el empuje total T_h se divide en una componente de empuje vertical T_{h_z} y otra de empuje horizontal T_{h_x} y que mientras mayor es el ángulo de inclinación θ , mayor es este último empuje. De aquí se concluye que el ángulo de cabeceo θ está directamente relacionado con el desplazamiento horizontal del cuadricóptero, esto es, si se quiere ir más rápido en movimiento horizontal pero sin aumentar la velocidad de los motores la aeronave debe inclinarse más.

Después de saber cómo se comporta el ángulo de cabeceo θ , de las Ecs.(5.10) y (5.16) se obtienen las velocidades u_2 y u_4 correspondientes al *motor*₂ y *motor*₄, respectivamente. Su comportamiento se muestra en la Fig.(6.22). La velocidad inicial es $u_{2_{ini}} = 816.932 \text{ rad/s}$ y es la que se requiere para cuando el cuadricóptero aún carga toda la pintura, su equivalente es $u_{2_{ini}} = 7801.130 \text{ rpm}$. La velocidad final es $u_{2_{fin}} = 698.406 \text{ rad/s}$ y es la que se necesita para sustentar solo el peso del cuadricóptero su equivalente es $u_{2_{fin}} = 6669.290 \text{ rpm}$.

Hay que recordar que la velocidad u_4 del *motor*₄ es la misma que la del *motor*₂, Ec.(5.10). Para visualizar mejor su comportamiento, en la Fig.(6.23) se muestra la variación de u_2 durante el primer ciclo del seno.

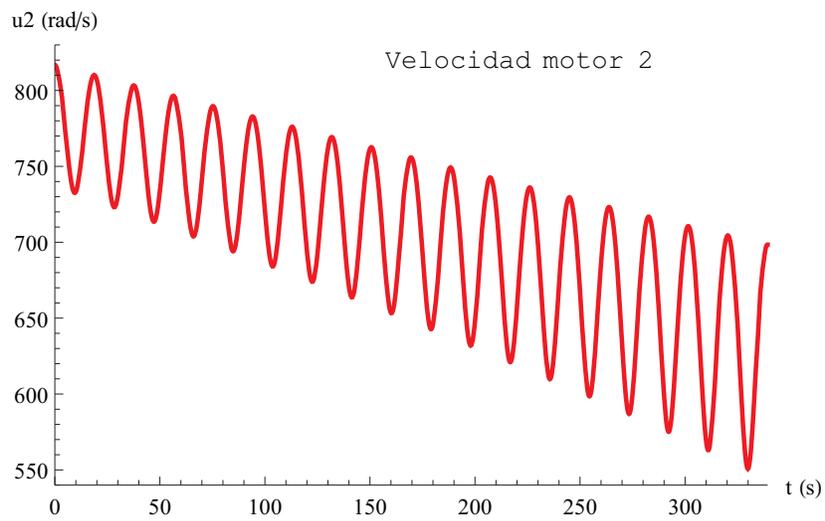


Figura 6.22: Velocidad u_2 . Se muestra el comportamiento del $motor_2$ durante el vuelo senoidal; la velocidad inicial es $u_{2_{ini}} = 816.932 \text{ rad/s}$ y es la que se requiere para cuando el cuadricóptero aún carga toda la pintura, su equivalente es $u_{2_{ini}} = 7801.130 \text{ rpm}$; la velocidad final es $u_{2_{fin}} = 698.406 \text{ rad/s}$ y es la que se necesita para sustentar solo el peso del cuadricóptero, su equivalente es $u_{2_{fin}} = 6669.290 \text{ rpm}$. La gráfica se obtiene a partir de la solución analítica del problema.

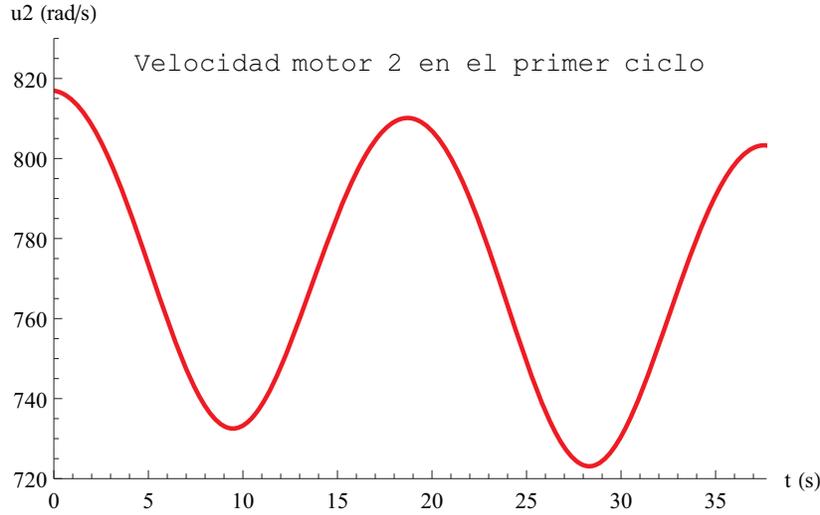


Figura 6.23: Velocidad u_2 durante el primer ciclo del vuelo senoidal. Se aprecia que su comportamiento es cíclico pero que su valor va disminuyendo, la velocidad inicial es $u_{2_{ini}} = 816.932 \text{ rad/s}$ y su equivalente es $u_{2_{ini}} = 7801.130 \text{ rpm}$. La gráfica se obtiene a partir de la solución analítica del problema.

Una vez conocida la velocidad u_2 , de las Ecs.(5.18) y (5.19) se calculan las velocidades u_1 y u_3 correspondientes al *motor*₁ y *motor*₃, respectivamente. En la Fig.(6.24) se muestra su comportamiento durante todo el recorrido, como en el caso del vuelo circular, se aprecia que sus valores son sumamente cercanos.

La velocidad inicial del *motor*₁ es $u_{1_{ini}} = 816.956 \text{ rad/s}$ y es la que se requiere para cuando el cuadricóptero aún carga toda la pintura, su equivalente es $u_{1_{ini}} = 7801.360 \text{ rpm}$. La velocidad final es $u_{1_{fin}} = 698.430 \text{ rad/s}$ y es la que se necesita para sustentar solo el peso del cuadricóptero, su equivalente es $u_{1_{fin}} = 6669.520 \text{ rpm}$.

La velocidad inicial del *motor*₃ es $u_{3_{ini}} = 816.908 \text{ rad/s}$ y es la que se requiere para cuando el cuadricóptero aún carga toda la pintura, su equivalente es $u_{3_{ini}} = 7800.900 \text{ rpm}$. La velocidad final es $u_{3_{fin}} = 698.382 \text{ rad/s}$ y es la que se necesita para sustentar solo el peso del cuadricóptero, su equivalente es $u_{3_{fin}} = 6669.060 \text{ rpm}$.

Con las velocidades iniciales que se mostraron se tiene un empuje inicial $T_{h_{ini}} = 26.502 \text{ N}$, mientras que el peso inicial del sistema es $W_{sistema} = 22.043 \text{ N}$. De las velocidades finales se tiene que el empuje final es $T_{h_{fin}} = 19.370 \text{ N}$, en tanto que el peso del cuadricóptero sin pistola es $W_q = 12.233 \text{ N}$.

El empuje T_h que se obtiene con las velocidades encontradas se muestra en la Fig.(6.26), se aprecia que va disminuyendo debido a que los motores reducen su velocidad porque el sistema va perdiendo masa y de esta manera poder mantener al cuadricóptero dentro de la trayectoria senoidal requerida.

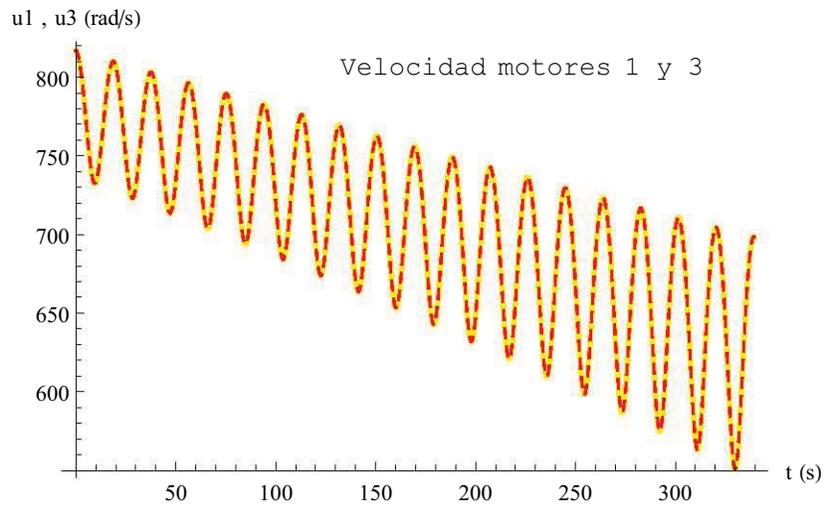


Figura 6.24: Velocidades u_1 y u_3 . Se muestra el comportamiento del $motor_1$ y $motor_3$ en toda la trayectoria, la línea continua en color amarillo representa la velocidad u_1 y la línea punteada en color rojo la velocidad u_3 . Se aprecia que van disminuyendo conforme la cantidad de pintura disminuye y que los valores entre ellos son sumamente cercanos.

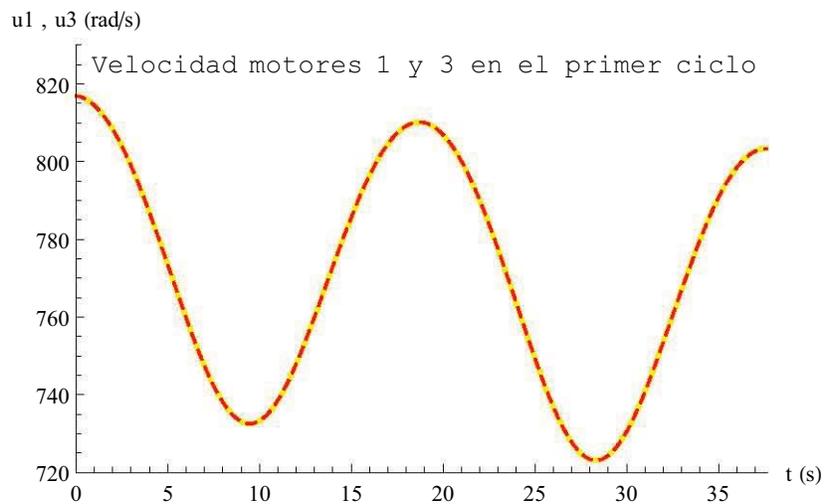


Figura 6.25: Velocidades u_1 y u_3 en el primer ciclo de recorrido. Se muestra el comportamiento del $motor_1$ y $motor_3$ durante el primer ciclo del seno, la línea continua en color amarillo representa la velocidad u_1 y la línea punteada en color rojo la velocidad u_3 .

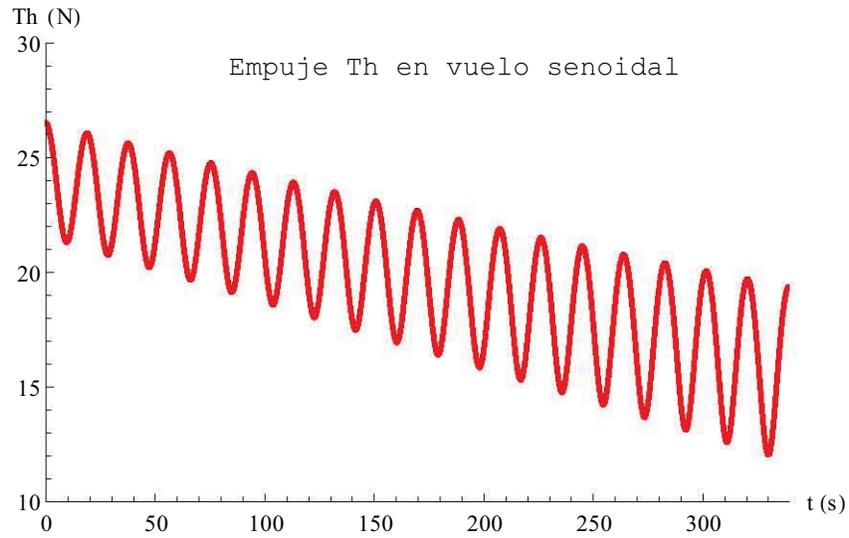


Figura 6.26: Empuje T_h en vuelo senoidal. El empuje se obtiene a partir de las velocidades encontradas, se aprecia que va disminuyendo debido a que los motores reducen su velocidad porque el sistema va perdiendo masa y de esta manera poder mantener al cuadricóptero dentro de la trayectoria senoidal requerida.

Finalmente, en la Fig.(6.27) se muestra la pared XZ pintada por el cuadricóptero después de 305.363 s de vuelo.

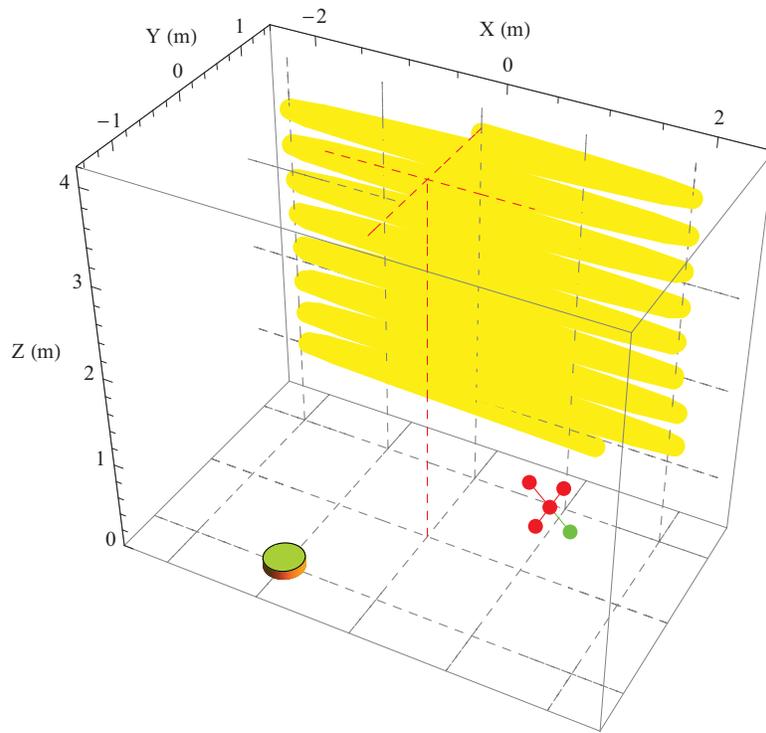


Figura 6.27: Pared pintada después de 305.363 s de vuelo. Se muestra la pared pintada de color amarillo por el quadricóptero usando la trayectoria senoidal, las líneas punteadas horizontales en color gris simulan el suelo y las verticales simulan la pared que se encuentra a 1 m de distancia del lado izquierdo del quadricóptero, el cilindro amarillo que se ubica en el suelo simula el peso de la pistola más la carga de pintura en tiempo real que inicialmente correspondía a 1 kg, las líneas punteadas en color rojo son auxiliares para visualizar mejor la ubicación de la aeronave. La gráfica se obtiene a partir de la solución numérica del problema.

Conclusiones

- La constante de rozamiento k_{roz} necesaria para forzar que el cuadricóptero describa la trayectoria prescrita tuvo que aumentarse en cinco órdenes de magnitud, de donde se infiere que la aproximación usando la ley de Stokes en cuanto a la fuerza de fricción con el aire no resulta del todo idónea. Es conveniente efectuar una medición del ángulo de inclinación θ del cuadricóptero para una trayectoria a velocidad constante en línea recta horizontal y de esta manera determinar experimentalmente el valor de la constante de rozamiento k_{roz} .
- Una manera experimental de obtener el valor de la constante de rozamiento k_{roz} sería grabar el vuelo de un cuadricóptero desde una vista lateral, pudiendo medir el ángulo de inclinación y la velocidad con la que se desplaza. Estos dos parámetros son necesarios para poder despejar de las ecuaciones la constante de rozamiento en un vuelo real.
- Teniendo en cuenta que los recorridos son trazados en sentido horario, si el coeficiente de rozamiento k_{roz} es menor que el valor ideal, la trayectoria experimental se desfasa hacia la derecha de la trayectoria analítica; si el coeficiente de rozamiento k_{roz} es mayor que el valor ideal, la trayectoria experimental se desfasa hacia la izquierda de la trayectoria analítica.
- Si se cambian los tiempos de vuelo, la tasa de consumo o la masa del sistema cuadricóptero-pintura, siempre será posible recuperar la trayectoria prescrita modificando el valor de la constante de rozamiento k_{roz} . Este resultado sugiere la posibilidad de una k_{roz} dependiente del tiempo e incluso dependiente de la masa del sistema.
- Se eligió arbitrariamente una tasa de transferencia en el consumo de pintura «uno a uno», es decir, se fijó el tiempo de vuelo y se pide que la totalidad de pintura debe agotarse en ese tiempo, sin importar que esto implique una tasa de consumo lineal. La razón de poder hacer esto se debe a que no es necesaria elegir una tasa de transferencia específica de consumo de pintura, pues aumentar el tiempo de vuelo equivale a disminuir la tasa de consumo y disminuir el tiempo de vuelo equivale a aumentar la tasa de consumo.

- En tipos de vuelo como el circular o el elíptico, pedir un mayor número de ciclos, es decir, aumentar el tiempo de vuelo, permite obtener una constante de rozamiento k_{roz} más precisa. Por ejemplo, si el tiempo definido corresponde al de una sola vuelta en la trayectoria circular quizá se aproxime a la trayectoria analítica deseada pero al pedir que el cuadricóptero recorra más vueltas, los pequeños desfases respecto de la trayectoria ideal son más apreciables. Esto hace que el método de aproximación de la constante de rozamiento sea muy aceptable. Este tema se discutió en la sección 6.2.4
- Conforme la masa de la pintura que carga el cuadricóptero va disminuyendo, el ángulo de cabeceo θ va aumentando. Esto se debe a que los motores disminuyen su velocidad porque el sistema va perdiendo masa, por lo que el cuadricóptero debe inclinarse más para compensar esta situación.
- Se derivaron las ecuaciones de movimiento angulares y del centro de masa del cuadricóptero a partir de los formalismos de Newton y Euler, incluyendo fuerzas externas como la del rozamiento con el aire y el empuje de retroceso originado en la boquilla de la pistola. A partir de dichas ecuaciones de movimiento se hicieron las modificaciones adecuadas para resolver el problema de que el cuadricóptero se mueva en una trayectoria útil para pintar una pared vertical. Se simuló distintos tipos de movimiento del cuadricóptero confinado al plano vertical XZ con ayuda de un lenguaje de programación que permitió visualizar el proceso de pintado del cuadricóptero.
- El ángulo de cabeceo θ está directamente relacionado con el desplazamiento horizontal del cuadricóptero, es decir, a mayor inclinación de la aeronave se tendrá mayor empuje horizontal en esa dirección.
- De los movimientos vertical y horizontal, se aprecia que al disminuir la constante de rozamiento también disminuye el ángulo de inclinación, disminuye la velocidad angular de los motores y por tanto disminuye el empuje total; ahora bien, al aumentar la constante de rozamiento también aumenta el ángulo de inclinación, aumenta la velocidad angular de los motores y el empuje total. A mayor fricción, mayor ángulo de inclinación.
- En todos los tipos de vuelo en los que se requiere un ángulo de inclinación θ diferente de cero se supone que θ ya está listo.
- Se deja como trabajo posterior el caso en que el nivel de pintura se mantenga constante realimentando la pistola mediante una manguera conectada a una compresora. Si, por ejemplo, la compresora estuviera a nivel del suelo, se tendría que tomar en cuenta que a mayor altura del cuadricóptero la presión a la entrada de la pistola disminuye, además de que también habrá inercia y torques asociados a dicha manguera, detalles que no se pueden despreciar dado que se mostró que el sistema es muy sensible incluso a perturbaciones leves.

- Se verificó que el vuelo del cuadricóptero envuelve mucha Física, que para describirlo fue necesario tratar con rotaciones y diferentes teorías como la de Newton y Euler, y que a pesar de ello no fue suficiente debido a lo susceptible que resulta el vuelo a perturbaciones y pequeños cambios en las condiciones de cada tipo de recorrido. Con esto se intuyen las razones por las que compañías que desarrollan este tipo de drones requieren agregarles electrónica muy avanzada, como giróscopos, acelerómetros, GPS y tipos de control como el PID que son muy comunes en Robótica y Electrónica.
- Se mostró que la solución al problema planteado en esta tesis pudo reducirse solamente a variar la constante de rozamiento con el aire k_{roz} , ya que modificando este parámetro pudieron hacerse coincidir las soluciones analíticas con las soluciones numéricas. Se verificó también que dicha constante resulta muy alejada del valor que se obtiene al usar la teoría de Stokes, a pesar de que las tesis y artículos que sirvieron como apoyo para el desarrollo de esta tesis introducen dicha teoría.
- Analizar primero los movimientos básicos como el vertical y horizontal ayudaron a comprender más fácilmente lo que sucede en vuelos complejos como lo fueron el circular y el senoidal.
- El objetivo de esta tesis se cumplió satisfactoriamente. Los parámetros que debieron incluirse para que los resultados se obtuvieran satisfactoriamente se encuentran dentro de una realidad fiable y posible de realizar, por lo que llevar a cabo el modelo propuesto en este trabajo es posible siempre y cuando se agreguen componentes electrónicos auxiliares como los ya mencionados.

Bibliografía

- [1] «Dinámica clásica de las partículas y sistemas», Jerry B. Marion. Editorial Reverté, S.A., 2000.
- [2] «Fluid Mechanics», L. D. LANDAU and E. M. LIFSHITZ. Elsevier Ltd, Segunda Edición, 2004.
- [3] «Classical mechanics», Hebert Goldstein. Addison-Wesley Publishing Company, INC., sexta edición, Junio 1959.
- [4] «Introducción a los principios de mecánica», Walter Hauser. Unión tipográfica editorial hispano-americana, 1969.
- [5] "Diseño e implementación de un controlador para la orientación de un quadrotor", Daniel Martín Schermuk, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, 2012.
- [6] "Modelado y control de un helicóptero quadrorotor", Guilherme Vianna Raffo, Universidad de Sevilla 2007.
- [7] «Quadcopter Dynamics, Simulation, and Control».
- [8] «Drone as an autonomous aerial sensor system for motion planning», Fouché, Gavin J.; Malekian, Reza. MEASUREMENT, Volume: 119, Pages: 142-155, April 2018.
- [9] «Drones control construction gear», www.sciencedirect.com/science/journal.
- [10] «An introduction to mechanics», Daniel Kleppner, Robert J. Kolenkow. Mc Graw Hill, 1973.
- [11] «Las pistolas aerográficas, en continua evolución». Pilar Santos Espí. Revista Centro Zaragoza, revista técnica trimestral de reparación y peritación del automóvil, número 33, Julio/Septiembre de 2007.
- [12] «Pistolas aerográficas, manual de uso». Ángel González-Tablas Sastre. Revista CESVIMAP, revista técnica trimestral de reparación y peritación de daños en carrocería y pintura de automóviles, número 62, Diciembre de 2007.

- [13] «Mathematical methods of classical mechanics», V. I. Arnold. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg.
- [14] «University Physics». Hugh D. Young, Roger A. Freedman. Addison-Wesley Publishing Company, INC, 9th Edition, 1996.
- [15] «Física». Robert Resnick, David Halliday, Editorial Continental, 1991.
- [16] «Wolfram Mathematica 9.0»