UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ENTROPÍA DE LA FUNCIÓN INDUCIDA EN EL LÍMITE INVERSO

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
LEONEL RITO RODRIGUEZ

DIRECTOR DE LA TESINA:
DR. HÉCTOR MÉNDEZ LANGO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CDMX, MARZO DE 2018

ENTROPÍA DE LA FUNCIÓN INDUCIDA EN EL LÍMITE INVERSO

LEONEL RITO RODRIGUEZ

Índice

Introducción

Sea X un espacio compacto y $f : X \to X$ una función continua. Mediante la herramienta de los límites inversos se define un nuevo espacio compacto X_∞ y un homeomorfismo $\hat{f} : X_\infty \to X_\infty$. Es natural preguntarse sobre la relación entre propiedades dinámicas de (X, f) y $(X_\infty, \hat{f})$. En 1970 R. Bowen demostró que la entropía de f es igual a la entropía de $\hat{f}$. En 1995 Xiandong Ye. demostró una generalización del resultado de R. Bowen. En este trabajo analizaremos la generalización de Xiandong Ye. Este análisis está basado en el artículo [20], *Topological entropy of the induced map of the inverse limit space*, de Xiandong Ye.

Para explicar con más detalle de que trata este trabajo, es necesario mencionar antes algunas definiciones y herramientas que necesitaremos.

Sean X un espacio compacto y $\varphi : X \to X$ una función continua. Sea α una cubierta abierta de X, $N(\alpha)$ denota el número de elementos de una subcubierta de α de cardinalidad mínima.

Si α y β son dos cubiertas abiertas de X, sean

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha \text{ y } B \in \beta\},$$

y $\varphi^{-1}(\alpha) = \{\varphi^{-1}(A) : A \in \alpha\}$.

Para una cubierta abierta α de X y $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\alpha) = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha).$$

En el Corolario 1.17 demostramos que el siguiente límite existe

$$h(f,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\alpha)\right).$$

Definimos la *entropía topológica de* f como

$$h(f)=\sup\{h(f,\alpha):\alpha \text{ es una cubierta abierta de } X\}.$$

Esta definición de entropía fue dada en 1965 por Adler, Konheim y McAndrew en el artículo [1].

Ahora vamos a definir lo que es un límite inverso. Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios compactos de Hausdorff y para cada $i\in\mathbb{N}$ $f_i:X_{i+1}\to X_i$ funciones continuas y suprayectivas. Sea

$$X_\infty=\varprojlim(X_i,f_i)=\left\{(x_1,x_2,\ldots)\in\prod_{i=1}^{\infty}X_i : f_i(x_{i+1})=x_i,\ \text{para todo } i\in\mathbb{N}\right\}.$$

El espacio X_∞ es llamado el *límite inverso* de las funciones $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ y las funciones $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ son llamadas *funciones de ligadura*. En particular si $X_i=X$ y $f_i=f$ para cada $i\in\mathbb{N}$, denotaremos al límite inverso como

$$X_f=\varprojlim(X,f)=\left\{(x_1,x_2,\ldots)\in\prod_{i=1}^{\infty}X_i : f(x_{i+1})=x_i,\ \text{para todo } i\in\mathbb{N}\right\}.$$

En la sección 2.1 del libro [11], se da un estudio detallado sobre los límites inversos. Ahí se demuestra que el límite inverso de espacios compactos de Hausdorff es un espacio compacto de Hausdorff.

Si X y Y son espacios compactos y de Hausdorff, y $h:X\to Y$, $f:X\to X$ y $g:Y\to Y$ son funciones continuas, decimos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[from=u, "g"'] & X \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

conmuta si para todo $x\in X$, $h(f(x))=g(h(x))$

Siguiendo con la notación que llevamos de límite inverso, $X_\infty=\varprojlim(X_i,f_i)$, ahora consideraremos una sucesión de funciones continuas $\{g_i:X_i\to X_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que los siguientes diagramas conmutan.

(1)
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "g_1"'] & X_2 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "g_2"'] & X_3 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[d, "g_3"'] & \cdots \arrow[l] \\ X_1 & X_2 \arrow[l, "f_1"'] & X_3 \arrow[l, "f_2"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Las funciones $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ son llamadas *funciones originales*. Estas funciones inducen una función continua $g_\infty:X_\infty\to X_\infty$ dada por

$$g_\infty(\overline{x})=(g_1(x_1),g_2(x_2),\ldots),\qquad \text{para } \overline{x}=(x_1,x_2,\ldots)\in X_\infty.$$

A g_∞ se le llama *función inducida en el límite inverso* X_∞. Si g_∞ es un homeomorfismo g_∞ se llama *homeomorfismo inducido*.

Si en el diagrama (1) tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $X_i = X_{i+1}$ y $f_i = g_i$, denotaremos a g_∞ como $g_\infty = \hat{f}$ y se le llamará *función corrimiento de* f. En este caso para todo $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in X_\infty$

$$\hat{f}(x_1, x_2, \ldots) = (f(x_1), x_1, x_2, \ldots).$$

Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo. En el libro [11] se prueba que el límite inverso de continuos es un continuo. Un continuo es *descomponible* si se puede expresar como unión de dos subcontinuos propios. Un continuo es *indescomponible* si no es descomponible. Diremos que un continuo es *hereditariamente descomponible* si todo subcontinuo no degenerado es descomponible.

Al intervalo cerrado $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ lo denotaremos como I. Un continuo no degenerado M es *encadenable* si M es el límite inverso X_∞ de funciones continuas y suprayectivas $\{f_i : I \to I\}_{i=1}^{\infty}$. Un estudio detallado sobre continuos encadenables se da en la tesis [10].

Sea X un espacio compacto y $f : X \to X$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-veces}.$$

Dado $x \in X$, decimos que *x es un punto periódico de f de periodo n* si $f^n(x) = x$ y $f^i(x) \neq x$ para toda $1 \leq i < n$.

Después de haber mencionado las herramientas que necesitaremos, ahora sí daremos la explicación de lo que trata este trabajo.

En la sección 1.1 empezaremos dando algunas propiedades sobre cubiertas abiertas de un espacio compacto, para luego demostrar algunas propiedades de la entropía topológica.

En la sección 1.2 daremos una prueba de que la entropía de la función corrimiento es igual a la entropía de la función original. La prueba que haremos es una versión detallada de la prueba que dio R. Bowen en [6]. La demostración dada por R. Bowen utiliza muy fuerte las propiedades de la función corrimiento, mientras la demostración del Teorema 2.1, que da como corolario el resultado de R. Bowen, utiliza otras técnicas.

En la sección 1.3 daremos algunos lemas que nos ayudarán a demostrar los resultados principales, sólo demostraremos dos de esos lemas, los demás daremos la referencia.

Los resultados principales de este trabajo se encuentran en el capítulo 2. El teorema principal es el Teorema 2.1 que nos dice que la entropía de la función inducida en el límite inverso, $g_\infty : X_\infty \to X_\infty$, es igual al límite de las entropías de las funciones originales $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. Este teorema tendrá varias consecuencias. La consecuencia inmediata es un corolario que nos dice que la entropía de una función $f : X \to X$ es igual a la entropía de su función corrimiento, $\hat{f} : X_f \to X_f$. Este resultado fue demostrado en 1970 por R. Bowen en [6]. Así el Teorema 2.1 generaliza el resultado de R. Bowen.

Otra aplicación que tendremos es el Teorema 2.4 que nos dice que todo homeomorfismo inducido sobre un continuo hereditariamente descomponible y encadenable tiene entropía cero. El Teorema 2.4 apoya a la conjetura de M. Barge dada en [8] que nos dice que todo homeomorfismo en un continuo hereditariamente descomponible y encadenable tiene entropía cero.

Finalizaremos el capítulo 2 con un par de corolarios, que son una generalización de un resultado conocido por M. Barge y J. Martin dado en [4].

En el capítulo 3 daremos algunos ejemplos de como calcular la entropía de algunas funciones inducidas usando el Teorema 2.1. También daremos el ejemplo de un homeomorfismo en un continuo encadenable y hereditariamente descomponible que no es un homeomorfismo inducido, mostrando así que el Teorema 2.4 no demuestra directamente la conjetura de M. Barge dada en [8].

Cabe mencionar que la conjetura de M. Barge dada en [8] ya fue demostrada en el 2010 por Christopher Mouron en el artículo [14].

1. Preliminares

1.1. Entropía. En esta sección empezaremos con algunas definiciones y propiedades que tienen que ver con cubiertas abiertas de un espacio compacto, con ayuda de estas herramientas podremos demostrar algunas propiedades de la entropía de una función.

Siempre que nos refiramos a un espacio X estaremos pensando que X es un espacio compacto y Hausdorff.

Si α es una cubierta abierta de X, denotaremos a $|\alpha|$ como el número de elementos de la cubierta abierta α.

Definición 1.1. *Si α es una cubierta abierta de X, N(α) denota el número de conjuntos de una subcubierta de α de cardinalidad mínima. Si α y β son dos cubiertas abiertas de X, entonces*

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha \ y \ B \in \beta\}.$$

Observación 1.2. *Si α, β, γ son tres cubiertas abiertas de X, entonces*

i) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$.
ii) $\alpha \vee \beta = \beta \vee \gamma$.

Definición 1.3. *Sean α, β cubiertas abiertas de X, diremos que*

$$\alpha \prec \beta$$

si para todo $B \in \beta$ existe $U \in \alpha$ tal que $B \subseteq U$.

Proposición 1.4. *Sean α, α', β, β' cubiertas abiertas de X tales que $\alpha \prec \alpha'$ y $\beta \prec \beta'$, entonces*

$$\alpha \vee \beta \prec \alpha' \vee \beta'.$$

Demostración. Sean $A' \cap B' \in \alpha' \vee \beta'$, con $A' \in \alpha'$ y $B' \in \beta'$. Por hipótesis existen $A \in \alpha$ y $B \in \beta$ tal que $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$. Luego

$$A' \cap B' \subseteq A \cap B$$

y $A \cap B \in \alpha \vee \beta$. □

Observación 1.5. *Sean α, β cubiertas abiertas de X, entonces*

$$\alpha \prec \alpha \vee \beta \quad y \quad \beta \prec \alpha \vee \beta.$$

Definición 1.6. *Sea X compacto y α una cubierta abierta de X. Definimos la entropía de α como*

$$H(\alpha) = \ln(N(\alpha)).$$

Proposición 1.7. *Sean α y β cubiertas abiertas de X tal que $\alpha \prec \beta$, entonces*

$$N(\alpha) \leq N(\beta) \quad y \quad H(\alpha) \leq H(\beta).$$

Demostración. Sea β_1 subcubierta de β tal que $N(\beta) = |\beta_1| = n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Luego β_1 se puede escribir como

$$\beta_1 = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$$

con $B_i \in \beta$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Como $\alpha \prec \beta$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $A_i \in \alpha$ tal que

$$B_i \subseteq A_i.$$

Como $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es subcubierta de α, entonces $N(\alpha) \leq n = N(\beta)$. Por lo tanto

$$N(\alpha) \leq N(\beta).$$

Como ln es una función creciente, se sigue que

$$H(\alpha) \leq H(\beta).$$

$\square$

Proposición 1.8. *Sean α y β cubiertas abiertas de X. Si $\alpha \prec \beta$ entonces*

$$N(\alpha \vee \beta) = N(\beta).$$

Demostración. Sabemos que $\beta \prec \alpha \vee \beta$. Veamos que $\alpha \vee \beta \prec \beta$.

Sea $B \in \beta$, como $\alpha \prec \beta$ existe $A \in \alpha$ tal que $B \subseteq A$, luego $B \subseteq A \cap B$, y $A \cap B \in \alpha \vee \beta$. De la Proposición 1.7 se sigue que $N(\alpha \vee \beta) = N(\beta)$. $\square$

Proposición 1.9. *Sean α y β cubiertas abiertas de X, entonces*

$$N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta) \quad y \quad H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta).$$

Demostración. Sean α' y β' subcubiertas de α y β respectivamente, tales que

$$N(\alpha) = |\alpha'| \quad \text{y} \quad N(\beta) = |\beta'|.$$

Entonces $\alpha' \vee \beta'$ es subcubierta de $\alpha \vee \beta$ y $|\alpha' \vee \beta'| \leq |\alpha'||\beta'|$. Se sigue que

$$N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta),$$

y de aquí $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$. $\square$

Sea $\varphi : X \to X$, una función continua. Si α es una cubierta abierta de X denotaremos a $\varphi^{-1}(\alpha)$ como

$$\varphi^{-1}(\alpha) = \{\varphi^{-1}(A) : A \in \alpha\}.$$

Nótese que $\varphi^{-1}(\alpha)$ es un cubierta abierta de X.

Proposición 1.10. *Sean α y β cubiertas abiertas de X y sea $\varphi : X \to X$ una función continua. Si $\alpha \prec \beta$, entonces*

$$\varphi^{-1}(\alpha) \prec \varphi^{-1}(\beta).$$

Demostración. Se sigue del hecho de que la imagen inversa respeta contenciones. $\square$

Proposición 1.11. *Sean α y β cubiertas abiertas de X, entonces*

$$\varphi^{-1}(\alpha \vee \beta) = \varphi^{-1}(\alpha) \vee \varphi^{-1}(\beta).$$

Demostración. Se sigue del hecho de que la imagen inversa de una intersección de conjuntos es la intersección de las imagenes inversas de los conjuntos. $\square$

Proposición 1.12. *Sean X, Y espacios compactos, α una cubierta abierta de Y y $\varphi : X \to Y$ una función continua. Entonces*

$$N(\varphi^{-1}(\alpha)) \leq N(\alpha).$$

Demostración. Sea β es una subcubierta finita de α tal que

$$|\beta| = N(\alpha).$$

Si $\beta = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, $n = N(\alpha)$, entonces $\{\varphi^{-1}(B_1), \varphi^{-1}(\beta_2), \ldots, \varphi^{-1}(\beta_n)\}$ es una subcubierta de $\varphi^{-1}(\alpha)$ con cardinalidad menor o igual que n.

Por lo tanto $N(\varphi^{-1}(\alpha)) \leq N(\alpha)$. $\square$

Corolario 1.13. *Sea $\varphi : X \to X$ una función continua. Sea α una cubierta abierta de X. Entonces $H(\varphi^{-1}(\alpha)) \leq H(\alpha)$.*

Observación 1.14. *Sean X, Y espacios compactos, α una cubierta abierta de Y y $\varphi : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces*

$$N(\varphi^{-1}(\alpha)) = N(\alpha).$$

Demostración. Sea $\{\varphi^{-1}(A_1), \ldots, \varphi^{-1}(A_n)\}$ una subcubierta de $\varphi^{-1}(\alpha)$ tal que $n = N(\varphi^{-1}(\alpha))$. Como $\varphi : X \to Y$ es suprayectiva, entonces

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_n.$$

Luego $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es subcubierta de α. Por lo tanto

$$N(\alpha) \leq n = N(\varphi^{-1}(\alpha)).$$

Por la Proposición 1.12 se da la igualdad. □

Lema 1.15. *Sea α una cubierta abierta de X y $\varphi : X \to X$, una función continua. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea*

$$H_n = H\left(\alpha \vee \varphi^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \varphi^{-n+1}(\alpha)\right) = H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\alpha)\right).$$

Entonces $H_{n+m} \leq H_n + H_m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
H_{n+m} &= H\left(\alpha \vee \varphi^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \varphi^{-n-m+1}(\alpha)\right)\\
&= H\left(\alpha \vee \varphi^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \varphi^{-m+1}(\alpha) \vee \varphi^{-m}\left(\alpha \vee \varphi^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \varphi^{-n+1}(\alpha)\right)\right)\\
&\leq H\left(\alpha \vee \varphi^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \varphi^{-m+1}(\alpha)\right) + H\left(\alpha \vee \varphi^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \varphi^{-n+1}(\alpha)\right)\\
&= H_m + H_n.
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se da por la Proposición 1.11. La desigualdad es por la Proposición 1.12 y la Proposición 1.9. □

El siguiente lema es una propiedad sobre sucesiones de números reales. Este lema será muy importante para definir la entropía de una función.

Lema 1.16. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales, tales que $0 \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces el $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ existe.*

Demostración. Notemos que de la hipótesis se sigue que para todo $s, t \in \mathbb{N}$,

$$a_{st} = a_{\underbrace{s + s + \cdots + s}_{t-veces}} \leq \underbrace{a_s + a_s + \cdots + a_s}_{t-veces} = ta_s. \tag{2}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ y $n > m$. Luego por el algoritmo de la división,

$$n = mq_n + r_n,$$

con $q_n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r_n < m$. Entonces se cumple que

$$\frac{q_n}{n} = \frac{1}{m} - \frac{r_n}{mn}. \tag{3}$$

De la ecuación (2) se sigue que $a_n \leq q_n a_m + a_{r_n}$ y

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q_n a_m}{n} + \frac{a_{r_n}}{n}.$$

Luego

$$\operatorname{lím\,sup}\{\frac{a_n}{n}\} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{q_n a_m}{n} + \frac{a_{r_n}}{n}.$$

Como $0 \leq r_n < m$, de la ecuación (3) se sigue que

$$\operatorname{lím\,sup}\{\frac{a_n}{n}\} \leq \frac{a_m}{m},$$

ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, r_n toma sólo una cantidad finita de valores.

Como esto fue para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\operatorname{lím\,sup}\{\frac{a_n}{n}\} \leq \operatorname{ínf}\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\}.$$

De la definición de lím inf se sigue que

$$\operatorname{lím\,sup}\{\frac{a_n}{n}\} \leq \operatorname{ínf}\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\} \leq \operatorname{lím\,inf}\{\frac{a_n}{n}\}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \operatorname{ínf}\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\}.$$

□

Corolario 1.17. *Sea $\varphi : X \to X$ una función continua y α una cubierta abierta de X, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\alpha)\right)}{n}$$

existe.

Demostración. Se sigue de los Lemas 1.15 y 1.16 □

Finalmente, gracias a todas las herramientas que hemos construido definiremos la entropía de una función.

Definición 1.18. *Sea $\varphi : X \to X$ una función continua y α una cubierta abierta de X, definimos a $h(\varphi, \alpha)$ como*

$$h(\varphi, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\alpha)\right)}{n}$$

y

$$h(\varphi) = \sup\{h(\varphi, \alpha) : \alpha \text{ es una cubierta abierta de } X\}.$$

A $h(\varphi)$ se le llama la entropía de $\varphi : X \to X$.

1.2. Entropía de la función corrimiento. En esta sección demostraremos que la entropía de la función corrimiento es igual a la entropía de la función original. La prueba que daremos es una versión detallada de la que dio R. Bowen en [6]. Para demostrar este hecho daremos antes algunas herramientas. Empezaremos recordando la definición de la función proyección.

Definición 1.19. *Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios compactos de Hausdorff. Para cada $i \geq 1$, sea $f_i : X_{i+1} \to X_i$ una función continua y suprayectiva. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $\pi_j : \varprojlim(X_i, f_i) \to X_j$ dada por*

$$\pi_j(x_1, x_2, \ldots) = x_j$$

para cada $(x_1, x_2, \ldots) = \overline{x} \in \varprojlim(X_i, f_i)$. La función π_j es llamada la j-ésima proyección del límite inverso.

Siguiendo con la notación de la Definición 1.19, en la Proposición 2.1.9 de [11] se demuestra que la colección

$$\Gamma = \{\pi_j^{-1}(U) : U \text{ es un subconjunto abierto de } X_j\},$$

es una base para la topología de $\varprojlim(X_i, f_i)$.

En esta sección consideraremos límites inversos con una sola función de ligadura, $f : X \to X$, y para cada $m \in \mathbb{N}$ las funciones proyección serán tomadas como

$$\pi_m : \varprojlim(X, f) \to X.$$

Las siguientes propiedades sobre la función proyección serán herramientas técnicas que nos ayudarán a demostrar el teorema principal de esta sección.

Observación 1.20. *Sea X un espacio compacto y $f : X \to X$ una función continua y suprayectiva. Sean $U \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$ y $j \leq n$, entonces*

$$\pi_j^{-1}(U) = \pi_n^{-1}(f^{j-n}(U)).$$

Demostración. Sea $\overline{x} \in \varprojlim(X, f)$. Entonces $\overline{x} \in \pi_j^{-1}(U)$ si y sólo si $x_j \in U$ si y sólo si $f^{n-j}(x_n) \in U$ si y sólo si $x_n \in f^{j-n}(U)$ si y sólo si $\overline{x} \in \pi_n^{-1}(f^{j-n}(U))$. □

Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Sea $f : X \to X$ una función continua y suprayectiva. Sea $\beta = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$, una cubierta abierta de X. Para $n \in \mathbb{N}$, denotaremos a β_n^* como

$$\beta_n^* = \{\pi_n^{-1}(B_1), \ldots, \pi_n^{-1}(B_k)\}.$$

Observemos que β_n^* es una cubierta abierta de $\varprojlim(X, f)$. Además $\beta_n^* = \pi_n^{-1}(\beta)$.

La *función inducida* en el límite inverso, $\hat{f} : \varprojlim(X, f) \to \varprojlim(X, f)$, está dada por

$$\hat{f}(x_1, x_2, \ldots) = (f(x_1), x_1, x_2).$$

También a $\hat{f}$ la llamaremos *función corrimiento.*

Lema 1.21. *Sea X un espacio compacto y de Hausdorfff. Sea $f : X \to X$ una función continua y suprayectiva. Entonces*

$$h(\hat{f}) = \sup\{h(\hat{f}, \beta_n^*) : n \in \mathbb{N} \text{ y } \beta \text{ es cubierta abierta finita de } X\}.$$

Demostración. Es claro que

$$\sup\{h(\hat{f}, \beta_n^*) : n \in \mathbb{N} \text{ y } \beta \text{ es cubierta abierta finita de } X\} \leq h(\hat{f}).$$

Observemos que para la definición de $h(\hat{f})$ basta usar cubiertas abiertas finitas, ya que $\varprojlim(X, f)$ es compacto. Entonces para mostrar la otra desigualdad tomemos α una cubierta abierta finita de $\varprojlim(X, f)$.

Como $\{\pi_n^{-1}(U) : n \in \mathbb{N} \text{ y } U \text{ es abierto de X}\}$ es una base para $\varprojlim(X, f)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{\pi_{n_1}^{-1}(U_1), \pi_{n_2}^{-1}(U_2), \ldots, \pi_{n_k}^{-1}(U_k)\} = \alpha'$$

es una cubierta abierta de $\varprojlim(X, f)$, con $U_1, \ldots, U_k$ abiertos de X, tal que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\pi_{n_i}^{-1}(U_i)$ está contenido en algún elemento de α.

Con lo cual se cumple que $\alpha \prec \alpha'$.

Sea $N = \max\{n_i : i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Entonces por la Observación 1.20, se cumple que para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

$$\pi_N^{-1}(f^{n_i - N}(U_i)) = \pi_{n_i}^{-1}(U_i). \tag{4}$$

Como α' es una cubierta abierta de $\varprojlim(X, f)$ y la función π_N es suprayectiva, entonces

$$\gamma = \{f^{n_i - N}(U_i) : i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

es una cubierta abierta de X. Por la ecuación (4), se cumple que $\alpha' = \gamma_N^*$.

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} h(\hat{f}, \alpha) &\leq h(\hat{f}, \alpha') = h(\hat{f}, \gamma_N^*) \\ &\leq \sup\{h(\hat{f}, \beta_n^*) : n \in \mathbb{N} \text{ y } \beta \text{ es cubierta abierta finita de } X\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$h(\hat{f}) = \sup\{h(\hat{f}, \beta_n^*) : n \in \mathbb{N} \text{ y } \beta \text{ es cubierta abierta finita de } X\}.$$

□

Observación 1.22. *Sean U un conjunto abierto de X, $m \geq 0, n \in \mathbb{N}$ y $\overline{x} \in \varprojlim(X, f)$. Entonces $\overline{x} \in \hat{f}^{-m}(\pi_n^{-1}(U))$ si y sólo si $x_n \in f^{-m}(U)$.*

Demostración. $\overline{x} \in \hat{f}^{-m}(\pi_n^{-1}(U))$ si y sólo si $\hat{f}^m(\overline{x}) \in \pi_n^{-1}(U)$ si y sólo si

$$(f^m(x_1), \ldots, x_1, x_2, \ldots) \in \pi_n^{-1}(U)$$

si y sólo si $f^m(x_n) \in U$ si y sólo si $x_n \in f^{-m}(U)$. □

Lema 1.23. *Sean X un espacio compacto de Hausdorff, $f : X \to X$ una función continua y suprayectiva, β una cubierta abierta finita de X, $m \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Sea $\hat{f}$ la función inducida en $\varprojlim(I, f)$. Entonces*

$$N(\beta \vee f^{-1}(\beta) \vee \cdots \vee f^{-m}(\beta)) = N(\beta_n^* \vee \hat{f}^{-1}(\beta_n^*) \vee \cdots \vee \hat{f}^{-m}(\beta_n^*))$$

Demostración. Sean $\{B_{i_j} \in \beta : i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$ tal que

$$\{B_{i_1} \cap f^{-1}(B_{i_2}) \cap \cdots \cap f^{-m}(B_{i_m})\}_{i=1}^s$$

es una subcubierta de $\beta \vee f^{-1}(\beta) \vee \cdots \vee f^{-m}(\beta)$ que cumple que

$$s = N(\beta \vee f^{-1}(\beta) \vee \cdots \vee f^{-m}(\beta)).$$

Por la Observación 1.22 se sigue que

$$\{\pi_n^{-1}(B_{i_1}) \cap \hat{f}^{-1}(\pi_n^{-1}(B_{i_2})) \cap \cdots \cap \hat{f}^{-m}(\pi_n^{-1}(B_{i_m}))\}_{i=1}^{s}$$

es una subcubierta de $\beta_n^* \vee \hat{f}^{-1}(\beta_n^*) \vee \cdots \vee \hat{f}^{-m}(\beta_n^*)$. Con lo cual tenemos que

$$N(\beta_n^* \vee \hat{f}^{-1}(\beta_n^*) \vee \cdots \vee \hat{f}^{-m}(\beta_n^*)) \leq s = N(\beta \vee f^{-1}(\beta) \vee \cdots \vee f^{-m}(\beta)).$$

Usando otra vez la Observación 1.22 obtenemos la otra desigualdad.

Por lo tanto

$$N(\beta \vee f^{-1}(\beta) \vee \cdots \vee f^{-m}(\beta)) = N(\beta_n^* \vee \hat{f}^{-1}(\beta_n^*) \vee \cdots \vee \hat{f}^{-m}(\beta_n^*)).$$

□

Finalmente demostraremos el Teorema esperado.

Teorema 1.24. *Sea X un espacio compacto de Hausdorff, y $f : X \to X$ una función continua y suprayectiva. Sea $\hat{f} : \varprojlim(I, f) \to \varprojlim(I, f)$ la función inducida en el límite inverso. Entonces $h(f) = h(\hat{f})$.*

Demostración. Usando el Lema 1.23 obtenemos que para cualquier cubierta abierta finita β de X y para toda $n \in \mathbb{N}$, $h(\hat{f}, \beta_n^*) = h(f, \beta)$.

Por el Lema 1.21 tenemos que

$$\begin{aligned} h(\hat{f}) &= \sup\{h(\hat{f}, \beta_n^*) : n \in \mathbb{N} \text{ y } \beta \text{ es cubierta abierta finita de } X\} \\ &= \sup\{h(f, \beta) : \beta \text{ es cubierta abierta finita de } X\} \\ &= h(f). \end{aligned}$$

□

La idea que seguimos en la demostración del Teorema 1.24 es, en esencia, la dada por R. Bowen en 1970, en [6].

1.3. Algunos Lemas. A continuación enunciareamos algunos lemas que nos ayudarán a demostrar los resultados principales de este trabajo. Demostraremos dos lemas, en los otros daremos la referencia de donde se encuentran demostrados.

En esta sección I representa el intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

El Lema 1.25 será muy importante para demostrar el Teorema 2.1.

Lema 1.25 (P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory. [17])**.** *Sean X_1, X_2 espacios compactos y $f_1 : X_1 \to X_2$, $f_2 : X_2 \to X_2$ funciones continuas. Sea $\varphi : X_1 \to X_2$ una función continua y suprayectiva tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[d, "f_2"'] & X_1 \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "f_1"] \\ X_2 & X_1 \arrow[l, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Entonces para cada α cubierta abierta de X_2 se cumple que

$$h(f_2, \alpha) = h(f_1, \varphi^{-1}(\alpha)).$$

Con lo cual se cumple que $h(f_2) \leq h(f_1)$.

Demostración. Como $\varphi : X_1 \to X_2$ es suprayectiva, por la Observación 1.14 se cumple que para toda cubierta abierta β de X_2

$$N(\varphi^{-1}(\beta)) = N(\beta). \tag{5}$$

Por hipótesis se cumple que $f_2 \circ \varphi = \varphi \circ f_1$, entonces se sigue por inducción que para toda $i \in \mathbb{N}$

$$f_2^i \circ \varphi = \varphi \circ f_1^i.$$

Luego para toda $A \subseteq X_2$ e $i \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$f_1^{-i}(\varphi^{-1}(A)) = \varphi^{-1}(f_2^{-i}(A)).$$

De esto se sigue que para toda α cubierta abierta de X_2,

$$f_1^{-i}(\varphi^{-1}(\alpha)) = \varphi^{-1}(f_2^{-i}(\alpha)). \tag{6}$$

Sea α una cubierta abierta de X_2 y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} &N\left(\alpha \vee f_2^{-1}(\alpha) \vee f_2^{-2}(\alpha) \vee \cdots \vee f_2^{-n+1}(\alpha)\right) \\ &= N\left(\varphi^{-1}\left(\alpha \vee f_2^{-1}(\alpha) \vee f_2^{-2}(\alpha) \vee \cdots \vee f_2^{-n+1}(\alpha)\right)\right) \\ &= N\left(\varphi^{-1}(\alpha) \vee \varphi^{-1}(f_2^{-1}(\alpha)) \vee \varphi^{-1}(f_2^{-2}(\alpha)) \vee \cdots \vee \varphi^{-1}(f_2^{-n+1}(\alpha))\right) \\ &= N\left(\varphi^{-1}(\alpha) \vee f_1^{-1}(\varphi^{-1}(\alpha)) \vee f_1^{-2}(\varphi^{-1}(\alpha)) \vee \cdots \vee f_1^{-n+1}(\varphi^{-1}(\alpha))\right). \end{aligned}$$

La primera igualdad se sigue de la ecuación (5), la segunda igualdad es por la Proposición 1.11 y la última igualdad es por la ecuación (6).
Se cumple que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &N\left(\alpha \vee f_2^{-1}(\alpha) \vee f_2^{-2}(\alpha) \vee \cdots \vee f_2^{-n+1}(\alpha)\right) \\ &= N\left(\varphi^{-1}(\alpha) \vee f_1^{-1}(\varphi^{-1}(\alpha)) \vee f_1^{-2}(\varphi^{-1}(\alpha)) \vee \cdots \vee f_1^{-n+1}(\varphi^{-1}(\alpha))\right). \end{aligned}$$

Entonces $\quad h(f_2, \alpha) = h(f_1, \varphi^{-1}(\alpha))$.

Luego para toda α cubierta abierta de X_2,

$$h(f_2, \alpha) \le h(f_1).$$

Por lo tanto, $h(f_2) \le h(f_1)$.

□

El próximo lema que demostraremos es el Lema 1.29. Para demostrarlo necesitamos los Lemas 1.26, 1.27 y 1.28 que a continuación enunciamos.

Lema 1.26 (D.R. Read. Confluent and related mappings [15])**.** *Si $f : X \to Y$, es una función continua y suprayectiva, con Y un continuo encadenable. Si C es un subcontinuo de Y, entonces existe H subcontinuo de X tal que $f(H) = C$.*

Lema 1.27 (A. Aliaga, W. Olano y M. Rubio. No existencia de funciones continuas entre continuos hereditariamente descomponibles e indescomponibles. [2])**.** *Sea X un continuo hereditariamente descomponible y Y un continuo. Si existe una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$, entonces Y es un continuo descomponible.*

Lema 1.28 (M.Barge y J. Martin. Chaos, periodicity, and snakelike continua. [4])**.** *Si $f : I \to I$ es una función continua y $\varprojlim(I, f)$ es un continuo hereditariamente descomponible, entonces el periodo de cada punto periódico de f es una potencia de dos.*

Una versión detallada de la demostración del Lema 1.28 se encuentra en mi tesis de licenciatura, Dinámica y Límites Inversos, [16].

El Lema 1.29 se usará para demostrar el Teorema 2.4.

Lema 1.29. *Sea M un continuo hereditariamente descomponible y encadenable. Sea $F : M \to M$ un homeomorfismo. Si $f : I \to I$ es una función continua y $\varphi : M \to I$ es una función continua y suprayectiva que hace conmutar el siguiente diagrama,*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[l, "F"'] \arrow[d, "\varphi"'] \\ I & I \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

entonces el periodo de cada punto periódico de $f : I \to I$ es una potencia de dos.

Demostración. Observemos que φ induce una función continua en los límites inversos $\varprojlim(M, F) = M_F$, y $\varprojlim(I, f) = I_f$, $\hat{\varphi} : M_F \to I_f$ dada por

$$\hat{\varphi}\left(\overline{x}\right) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n), \ldots) .$$

Como F es un homeomorfismo, M_F es homeomorfo a M. Luego M_F es un continuo hereditariamente descomponible.

Sea C un subcontinuo no degenerado de $\varprojlim(I, f)$. Por el Lema 1.26 hay un subcontinuo H de M_F tal que $\hat{\varphi}(H) = C$. Luego por el Lema 1.27, C es un continuo descomponible. Por lo tanto $\varprojlim(I, f)$ es hereditariamente descomponible y por el Lema 1.28 el periodo de cada punto periódico de f es una potencia de dos. $\square$

2. Entropía de la función inducida

Empezaremos demostrando el Teorema 2.1, que es el teorema principal de este trabajo. Veremos que el Teorema 2.1 es una versión más general que el Teorema 1.24. Después daremos algunas consecuencias que se derivan del Teorema 2.1. Antes de empezar con el teorema principal daremos la siguiente convención.

Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios compactos y $\{f_i : X_{i+1} \to X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas. Para cada $i, j \in \mathbb{N}$ con $i < j$, las funciones $f_{i,j} : X_{j+1} \to X_i$, están definidas por

$$f_{i,j} = f_i \circ f_{i+1} \circ \cdots \circ f_j. \tag{7}$$

A veces denotaremos a $\varprojlim(X_i, f_i)$ como X_∞.

Teorema 2.1. *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de espacios compactos y de Hausdorff. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sean $f_i : X_{i+1} \to X_i$ y $g_i : X_i \to X_i$ funciones continuas, con f_i suprayectiva, que hacen conmutar los siguientes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "g_1"'] & X_2 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "g_2"'] & X_3 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[d, "g_3"'] & \cdots \arrow[l] \\
X_1 & X_2 \arrow[l, "f_1"'] & X_3 \arrow[l, "f_2"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Sea $g_\infty : \varprojlim(X_i, f_i) \to \varprojlim(X_i, f_i)$ la función dada por

$$g_\infty(x_1, x_2, \ldots) = (g_1(x_1), g_2(x_2), \ldots)$$

para toda $(x_1, x_2, \ldots) \in \varprojlim(X_i, f_i)$. Entonces

$$h(g_\infty) = \lim_{i\to\infty} h(g_i).$$

Demostración. Como para cada $i \in \mathbb{N}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[d, "g_i"'] & X_{i+1} \arrow[l, "f_i"'] \arrow[d, "g_{i+1}"'] \\
X_i & X_{i+1} \arrow[l, "f_i"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, entonces por el Lema 1.25 tenemos que

$$h(g_i) \le h(g_{i+1}), \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

También para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[d, "g_i"'] & X_\infty \arrow[l, "\pi_i"'] \arrow[d, "g_\infty"'] \\
X_i & X_\infty \arrow[l, "\pi_i"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces por el Lema 1.25 tenemos que

$$h(g_i) \le h(g_\infty), \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

De las ecuaciones (8) y (9) se sigue que

$$\lim_{i\to\infty} h(g_i) \le h(g_\infty).$$

Ahora veamos la demostración de la otra desigualdad.
Sea α una cubierta abierta finita de X_∞, pues X_∞ es compacto.

Como
$$\{\pi_i^{-1}(U_i) : U_i \text{ es un abierto de } X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$$
es base de X_∞, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta = \{V_1, \dots, V_m\}$ es una cubierta abierta de X_∞ con $V_i = \pi_{n_i}^{-1}(U_{n_i})$ y $U_{n_i} \subseteq X_{n_i}$ para cada $1 \leq i \leq m$, tal que cada V_i está contenido en algún elemento de α. Con esto tenemos que $\alpha \prec \beta$. Se sigue que
$$h(g_\infty, \alpha) \leq h(g_\infty, \beta).$$

Sea $N = \max\{n_i : 1 \leq i \leq m\}$.

Sean
$$W_i = U_{n_i}, \quad \text{si } n_i = N \quad y \quad W_i = (f_{n_i,N-1})^{-1}(U_{n_i}),\ \text{si } n_i < N.$$

Para recordar la notación de $f_{n_i,N-1}$ veamos la ecuación (7). Como β es una cubierta abierta de X_∞ y las funciones de ligadura son suprayectivas se sigue que
$$\gamma = \{W_1, \dots, W_m\}$$
es una cubierta abierta de X_N.
Como para cada $s, t \in \mathbb{N}$ con $s < t$ se cumple que
$$f_{s,t-1} \circ \pi_t = \pi_s,$$
entonces si $n_i < N$ tenemos que
$$\pi_N^{-1}(W_i) = \pi_N^{-1}\left((f_{n_i,N-1})^{-1}(U_{n_i})\right) = \pi_{n_i}^{-1}(U_{n_i}).$$
Luego
$$\pi_N^{-1}(W_i) = \pi_{n_i}^{-1}(U_{n_i}).$$
De esto se sigue que
$$\pi_N^{-1}(\gamma) = \beta.$$
Como el diagrama
$$\begin{tikzcd} X_N \arrow[d, "g_N"'] & X_\infty \arrow[l, "\pi_N"'] \arrow[d, "g_\infty"] \\ X_N & X_\infty \arrow[l, "\pi_N"'] \end{tikzcd}$$
conmuta, por el Lema 1.25 tenemos que
$$h(g_\infty, \beta) = h(g_N, \gamma)$$
Luego
$$h(g_\infty, \alpha) \leq h(g_\infty, \beta) = h(g_N, \gamma) \leq h(g_N) \leq \lim_{i\to\infty} h(g_i) \quad \text{y}$$
$$h(g_\infty, \alpha) \leq \lim_{i\to\infty} h(g_i).$$
Por lo tanto,
$$h(g_\infty) \leq \lim_{i\to\infty} h(g_i).$$
□

En la demostración del Teorema 2.1 seguimos, en esencia, la argumentación dada por X. Ye en [20].

Gracias al Teorema 2.1 obtenemos una demostración muy corta del Teorema 1.24.

Corolario 2.2. *Sea X un espacio compacto Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua y suprayectiva. Entonces la entropía topológica del homeomorfismo corrimiento $\hat{f} : X_\infty \to X_\infty$ es igual a la entropía de $f : X \to X$.*

Demostración. Si para cada $i \in \mathbb{N}$, $g_i = f$, entonces se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "f"] \\ X & X \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

conmuta, además $g_\infty = \hat{f}$. Luego por el Teorema 2.1 tenemos que

$$h(\hat{f}) = h(g_\infty) = \lim_{i\to\infty} h(g_i) = \lim_{i\to\infty} h(f) = h(f).$$

□

El Lema 2.3 lo necesitaremos para demostrar el Teorema 2.4.

Lema 2.3 (M. Misiurewicz. Horseshoes for mappings of interval. [13])**.** *Sea $f : I \to I$ una función continua tal que cada uno de sus puntos periódicos tiene periodo alguna potencia de dos. Entonces*

$$h(f) = 0.$$

El Teorema 2.4 apoya a la conjetura de M. Barge dada en [8]: Sí M es un continuo encadenable hereditariamente descomponible y $f : M \to M$ es un homeomorfismo, entonces $h(f) = 0$.

Teorema 2.4. *Sea $M = \varprojlim(I, f_i)$ un continuo hereditariamente descomponible con funciones de ligadura suprayectiva, $\{f_i : I \to I\}_{i=1}^\infty$. Sea $F : M \to M$ un homeomorfismo inducido. Es decir, existen funciones continuas $\{g_i : I \to I\}_{i=1}^\infty$ tales que para todo $i \in \mathbb{N}$*

$$g_i \circ f_i = f_i \circ g_{i+1}, \quad y \quad F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (g_1(x_1), g_2(x_2), \ldots).$$

Entonces $h(F) = 0$.

Demostración. Como para cada $i \in \mathbb{N}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi_i"'] & M \arrow[l, "F"'] \arrow[d, "\pi_i"] \\ I & I \arrow[l, "g_i"] \end{tikzcd}$$

conmuta y $F : M \to M$ es un homeomorfismo, entonces por el Lema 1.29, para cada $i \in \mathbb{N}$ el periodo de cada punto periódico de g_i es una potencia de dos. Luego por el Lema 2.3, para cada $i \in \mathbb{N}$, $h(g_i) = 0$. Por el Teorema 2.1

$$h(F) = \lim_{i\to\infty} h(g_i) = 0.$$

Por lo tanto $h(F) = 0$. □

La conjetura de M. Barge apareció en 1991 en el artículo [8]. Esta conjetura ya fue demostrada en el 2010 por Chirstopher Mouron. La demostración se encuentra en el artículo [14].

El siguiente resultado es un teorema famoso de M. Barge y J. Martin dado en [4].

Teorema 2.5. *Sea $f : I \to I$ es una función continua. Supongamos que $f : I \to I$ tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de dos, entonces el límite inverso $\varprojlim(I, f)$ contiene un subcontinuo indescomponible.*

Para demostrar el Corolario 2.7, necesitamos el Lema 2.6.

Lema 2.6 (R. Bowen and J. Franks. The periodic points of maps of the disk and the interval. [7])**.** *Si $f : I \to I$ es una función continua que tiene un punto periódico cuyo periodo no es potencia de dos, entonces*

$$h(f) > 0.$$

Con ayuda del Teorema 2.1 obtenemos el Corolario 2.7, que es una generalización del Teorema 2.5.

Corolario 2.7. *Sea M un continuo encadenable tal que $M = \varprojlim(I, f_i)$ con funciones de ligadura suprayectivas $\{f_i : I \to I\}_{i=1}^{\infty}$. Sea $F : M \to M$ un homeomorfismo inducido por las funciones continuas $\{g_i : I \to I\}_{i=1}^{\infty}$.*

Si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $g_i : I \to I$ tiene un punto periódico con periodo no potencia de dos, entonces M contiene un subcontinuo indescomponible.

Demostración. Supongamos que M es un continuo hereditariamente descomponible. Entonces por el Teorema 2.4 $h(F) = 0$. Por el Lema 2.6, y como el diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \xleftarrow{\pi_i} & M \\ {\scriptstyle g_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ I & \xleftarrow{\pi_i} & M \end{array}$$

conmuta, entonces

$$0 < h(g_i) \leq h(F).$$

Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto M contiene un subcontinuo indescomponible. □

Finalizaremos este capítulo con una generalización en otra dirección del Teorema 2.5. Pero antes mencionaremos los Lemas 2.8 y 2.9 que nos ayudarán a demostrar el Teorema 2.10.

Lema 2.8 (X. Ye. The dynamics of homeomorphisms of hereditarily descomposable chainable continua. [19])**.** *Sea M un continuo hereditariamente descomponible y encadenable. Si $f : M \to M$ es un homeomorfismo, entonces el periodo de cada punto periódico de f es una potencia de dos.*

Lema 2.9 (R.Williams. One-dimensional nonwandering set. [18])**.** *Sea M un continuo y $f : M \to M$ una función continua, entonces*

$$Per(f) = Per(\hat{f}).$$

Donde $Per(f)$ denota los periodos de f y $Per(\hat{f})$ denota los periodos de $\hat{f}$, y $\hat{f} : M_f \to M_f$ es la función inducida en el límite inverso M_f.

Teorema 2.10. *Sean M un continuo hereditariamente descomponible y encadenable, $f : M \to M$ una función continua con un punto periódico cuyo periodo no es potencia de dos. Entonces el límite inverso M_f contiene un subcontinuo indescomponible.*

Demostración. Supongamos que M_f es un continuo hereditarimente descomponible. Como $\hat{f} : M_f \to M_f$ es un homeomorfismo y M_f es un continuo encadenable, ya que M es encadenable. Entonces por el Lema 2.8 el periodo de cada punto periódico de $\hat{f}$ es una potencia de dos.

Por el Lema 2.9, $Per(f) = Per(\hat{f})$, luego el periodo de cada punto periódico de f es una potencia de dos, esto es una contradicción.

Por lo tanto M_f contiene un subcontinuo indescomponible. $\square$

3. Algunos Ejemplos

En este capítulo, con ayuda del Teorema 2.1, calcularemos la entropía de algunas funciones inducidas. También daremos un homeomorfismo de un espacio hereditariamente descomponible y encadenable que no es una función inducida, mostrando así que el Teorema 2.1 no resuelve inmediatamente la conjetura de M. Barge, que dice que todo homeomorfismo de un continuo encadenable y hereditariamente descomponible tiene entropía 0.

Para construir nuestros ejemplos necesitamos utilizar algunas funciones que a continuación describimos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, sea $g_n : I \to I$ la función lineal por partes dada por la fórmula

$$g_n(x) = \begin{cases} nx - r, & \text{si } r \text{ es par y } x \in [\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}], \\ \\ -nx + r + 1, & \text{si } r \text{ impar y } x \in [\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}]. \end{cases} \tag{10}$$

Observemos que g_1 es la función identidad, g_2 es la función conocida como la *función tienda*.

Las gráficas de g_2, g_3, se muestran en la Figura 1.

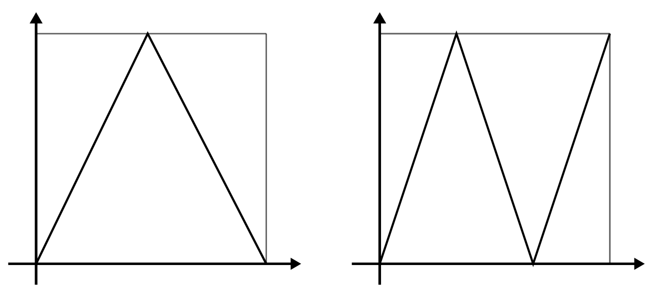

Figura 1.

En [3] se demuestra que para toda $n, m \in \mathbb{N}$,

$$g_m \circ g_n = g_n \circ g_m = g_{nm} \tag{11}$$

En el Ejemplo 5.2 de la tesis de Belén Espinosa [9], se demuestra que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$h(g_n) = \ln(n).$$

Ahora sí daremos algunos ejemplos de límites inversos y unas funciones inducidas. Con ayuda del Teorema 2.1 calcularemos la entropía de esas funciones inducidas.

Ejemplo 3.1. *Sean $M = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$, sea*

$$K_{\{M\}} = \{\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_i = g_{n_i}(x_{i+1}) \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}.$$

Si $M = \{n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, $K_{\{M\}}$ se denota como $K_{\{M\}} = K_n$.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Por la ecuación (11), los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "g_m"'] & I \arrow[l, "g_{n_1}"'] \arrow[d, "g_m"'] & I \arrow[l, "g_{n_2}"'] \arrow[d, "g_m"'] & \cdots \arrow[l] \\ I & I \arrow[l, "g_{n_1}"'] & I \arrow[l, "g_{n_2}"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

A partir de este diagrama obtenemos la función inducida $\hat{g}_m : K_M \to K_M$ dada por

$$\hat{g}_m(x_1, x_2, \ldots) = (g_m(x_1), g_m(x_2), \ldots).$$

Por el Teorema 2.1, la entropía de $\hat{g}_m$ está dada por

$$h(\hat{g}_m) = \lim_{i\to\infty} h(g_m) = h(g_m) = \ln(m).$$

Observemos que si $m > 1$, $h(\hat{g}_m) = \ln(m) > 0$. Si $\hat{g}_m : K_M \to K_M$ es un homeomorfismo, entonces por el Teorema 2.4, debe pasar que $K_{\{M\}}$ debe contener un subcontinuo indescomponible.

Otras propiedades dinámicas de las funciones $\hat{g}_m : K_M \to K_M$, siguiendo la idea dada en el Ejemplo 3.1, los estudia H. Méndez en [12].

En el Ejemplo 3.3 I denotará el subconjunto $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

Construiremos un límite inverso $\varprojlim(I, f)$ con una sola función de ligadura, y con ayuda de las funciones $g_i : I \to I$ dadas en la ecuación (10) construiremos inductivamene unas funciones $l_i : I \to I$, tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "l_0"'] & I \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "l_1"'] & I \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "l_2"'] & \cdots \arrow[l] \\
I & I \arrow[l, "f"'] & I \arrow[l, "f"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Usando el Teorema 2.1 veremos que la entropía de la función inducida por las funciones $\{l_i : I \to I\}_{i=1}^{\infty}$ en $\varprojlim(I, f)$ es infinita.

Para el siguiente ejemplo necesitamos el Lema 3.2 la demostración de este lema se encuentra en la Proposición 5, página 193 de [5].

Lema 3.2. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Sea $A \subseteq [0,1]$ un conjunto cerrado tal que $f(A) = A$. Entonces*

$$h(f|_A) \leq h(f).$$

Empezaremos definiendo la función $f : I \to I$, que nos dará el límite inverso $\varprojlim(I, f)$.

Ejemplo 3.3. *Sea $f : I \to I$ la función continua dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ 1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La gráfica de f se muestra en la figura 2.

Sea $q : [\frac{1}{2}, 1] \to [0,1]$, el homeomorfismo dado por $q(x) = 2x - 1$, para $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.
Sea $g_3 : I \to I$ la función dada en la ecuación (10).
Sean $l_0 : I \to I$, $l_0 = Id$ y

$$l_1(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ q^{-1} \circ g_3 \circ q(x), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La gráfica de l_1, se muestra en la Figura 3.

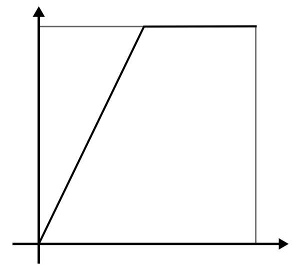

FIGURA 2.

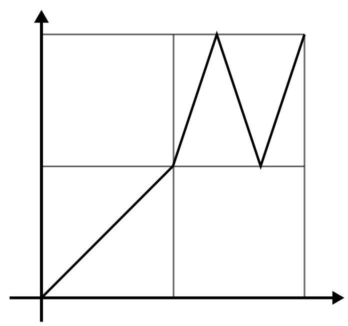

FIGURA 3.

Observación 3.4. *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} I & \xleftarrow{f} & I \\ {\scriptstyle l_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_1} \\ I & \xleftarrow{f} & I \end{array}$$

conmuta. Es decir, para toda $x \in I$, $l_0 \circ f(x) = f \circ l_1(x)$.

Demostración. Sea $x \in I$. Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $f(x) = 2x$.
Por lo tanto $l_0(f(x)) = 2x$. Además $f(l_1(x)) = f(x) = 2x$.
Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $f(x) = 1$. Luego

$$l_0(f(x)) = l_0(1) = 1, \quad \text{y} \quad f(l_1(x)) = f(q^{-1} \circ g_3 \circ q(x)) = 1,$$

pues si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces $q^{-1} \circ g_3 \circ q(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$. Ver Figura 3. □

Sea $g_5 : I \to I$, la función dada en la ecuación (10).

Sea $l_2 : I \to I$ dada por $l_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} l_1(2x), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ q^{-1} \circ g_5 \circ q(x), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

La gráfica de l_2 se muestra en la Figura 4.

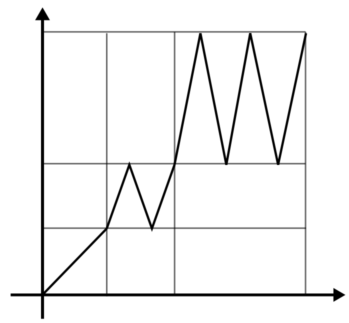

FIGURA 4.

Observación 3.5. *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} I & \xleftarrow{f} & I \\ {\scriptstyle l_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_2} \\ I & \xleftarrow{f} & I \end{array}$$

conmuta.

Demostración. Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $l_1(f(x)) = l_1(2x)$, y

$$f \circ l_2(x) = f\left(\frac{1}{2}(l_1(2x))\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) l_1(2x) = l_1(2x),$$

pues $\frac{1}{2}l_1(2x) \in [0, \frac{1}{2}]$. Ver Figura 4.

Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $l_1(f(x)) = l(1) = 1$, y

$$f \circ l_2(x) = f(q^{-1} \circ g_5 \circ q(x)) = 1,$$

pues $q^{-1} \circ g_5 \circ q(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$. Ver Figura 4. □

El paso inductivo.

Supongamos definida la función $l_i : I \to I$.
Sea $g_{2(i+1)+1} : I \to I$, la función dada en la ecuación (10).
Sea $l_{i+1} : I \to I$ dada por

$$l_{i+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(l_i(2x)), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ q^{-1} \circ g_{2(i+1)+1} \circ q(x), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Observación 3.6. *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} I & \xleftarrow{f} & I \\ {\scriptstyle l_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_{i+1}} \\ I & \xleftarrow{f} & I \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración. Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $l_i(f(x)) = l_i(2x)$.

Por otro lado

$$f(l_{i+1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}(l_i(2x))\right) = 2\left(\frac{1}{2}(l_i(2x))\right) = l_i(2x),$$

pues $\frac{1}{2}(l_i(2x)) \in [0, \frac{1}{2}]$.
Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $l_i(f(x)) = l_i(1) = 1$, y

$$f(l_{i+1}(x)) = f(q^{-1} \circ g_{2(i+1)+1} \circ q(x)) = 1,$$

ya que $q^{-1} \circ g_{2(i+1)+1} \circ q(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$. □

Observemos que para toda $i \in \mathbb{N}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
[\frac{1}{2},1] \arrow[d, "q"'] & [\frac{1}{2},1] \arrow[l, "l_i|_{[\frac{1}{2},1]}"'] \arrow[d, "q"'] \\
[0,1] & [0,1] \arrow[l, "g_{2i+1}"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Como $q : [0,1] \to [0,1]$ es un homeomorfismo, entonces por el Lema 1.25, se sigue que

$$h(l_i|_{[\frac{1}{2},1]}) = \ln(2i+1).$$

Luego por el Lema 3.2 se sigue que

$$h(l_i) \geq \ln(2i+1).$$

Los hechos importantes sobre las funciones $\{l_i : I \to I\}_{i=1}^{\infty}$, se dan en la siguiente observación.

Observación 3.7. *i) Para toda $i \geq 0$, $h(l_i) \geq \ln(2i+1)$.*

ii) Los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "l_0"'] & I \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "l_1"'] & I \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "l_2"'] & \cdots \arrow[l] \\
I & I \arrow[l, "f"'] & I \arrow[l, "f"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

conmutan. Si $g_\infty : \varprojlim(I,f) \to \varprojlim(I,f)$ es la función inducida, entonces

$$h(g_\infty) = \lim_{i\to\infty} h(l_i) = \infty.$$

iii) $\varprojlim(I,f)$ es homeomorfo a $[0,1]$, esto es porque f es monónota. Ver Ejemplo 2.3 de [16].

Con este procedimiento hemos construido una función

$$g_\infty : \varprojlim(I,f) \to \varprojlim(I,f)$$

con entropía infinita.

A partir de ella concluimos que existe una función $L : [0,1] \to [0,1]$ con entropía infinita. □

Recordemos que el resultado de R. Bowen nos ayudó a encontrar la entropía del homeomorfismo corrimiento de una función continua $f : I \to I$. Observemos que la función corrimiento se obtiene como una función inducida de los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "f"'] & I \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "f"'] & I \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[l] \\ I & I \arrow[l, "f"'] & I \arrow[l, "f"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{12}$$

En el Ejemplo 3.1, utilizamos distintas funciones de ligaduras $\{g_{n_i} : I \to I | i \geq 1\}$ para definir el límite inverso $\varprojlim(I, g_{n_i})$ y una sola función $g_m : I \to I$ que hace conmutar los siguientes diagramas,

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "g_m"'] & I \arrow[l, "g_{n_1}"'] \arrow[d, "g_m"'] & I \arrow[l, "g_{n_2}"'] \arrow[d, "g_m"'] & \cdots \arrow[l] \\ I & I \arrow[l, "g_{n_1}"'] & I \arrow[l, "g_{n_2}"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

para definir la función inducida $\hat{g}_m : \varprojlim(I, g_{n_i}) \to \varprojlim(I, g_{n_i})$.

El Ejemplo 3.1 nos dice que el Teorema 2.1 generaliza el resultado de R. Bowen, en el sentido de que podemos poner distintas funciones de ligadura $\{g_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ en el diagrama (12).

En el Ejemplo 3.3, utilizamos una sola función de ligadura $f : I \to I$ para definir el límite inverso $\varprojlim(I, f)$ y una familia de funciones continuas distintas
$\{l_i : I \to I | i \geq 0\}$, que hacen conmutar los siguientes diagramas,

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "l_0"'] & I \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "l_1"'] & I \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "l_2"'] & \cdots \arrow[l] \\ I & I \arrow[l, "f"'] & I \arrow[l, "f"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

para definir la función inducida $g_\infty : \varprojlim(I, f) \to \varprojlim(I, f)$.

El Ejemplo 3.3 nos dice que el Teorema 2.1 generaliza el resultado de R. Bowen, en el sentido de que podemos poner distintas funciones originales $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$, en el diagrama (12).

En el siguiente ejemplo daremos un homeomorfismo de un continuo encadenable y hereditariamente descomponible que no es una función inducida. De esta forma mostraremos que el Teorema 2.1 no demuestra directamente la conjetura de M. Barge dada en [8].

Ejemplo 3.8. *Sea $f : I \to I$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La gráfica de f se muestra en la Figura 5.

Es conocido que $X_\infty = \varprojlim(I, f)$ es homeomorfo a $\overline{\{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}}$. Una demostración detallada de este hecho se encuentra en el Ejemplo 2.4 de mi tesis de

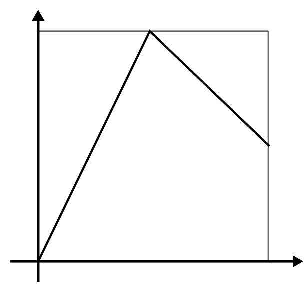

FIGURA 5.

licenciatura, [16]*. El continuo* $\overline{\{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0,1]\}}$ *es conocido como la curva del topólogo. Una representación de este continuo se da en la Figura 6.*

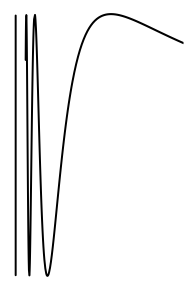

FIGURA 6.

Como X_∞ *es homeomorfo a la curva del topólogo, entonces* X_∞ *es un continuo hereditariamente descomponible y encadenable.*

Sea $\hat{f} : X_\infty \to X_\infty$*, la función corrimiento. Como vimos en el Corolario 2.2, la función corrimiento es un homeomorfismo inducido.*

Si consideramos la función $\hat{f}^{-1} : X_\infty \to X_\infty$*, dada por*

$$\hat{f}^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots),$$

entonces $\hat{f}^{-1} : X_\infty \to X_\infty$ *no es un homeomorfismo inducido.*

Demostración. Supongamos que $\hat{f}^{-1}$ es una función inducida. Observemos que $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \ldots\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots\right)$ están en X_∞ y

$$\hat{f}^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \ldots\right) = \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \ldots\right). \tag{13}$$

$$\hat{f}^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots\right). \tag{14}$$

Si $\hat{f}^{-1}$ fuese una función inducida, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $g_i : I \to I$ tal que $\hat{f}^{-1}(x_1, x_2, \ldots) = (g_1(x_1), g_2(x_2), \ldots)$ para $(x_1, x_2, ...) \in (I, f)$

Por las ecuaciones (13) y (14) tendríamos que $g_1(\frac{1}{2}) = 1$ y $g_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, lo cual contradice que g_1 sea función.

Por lo tanto $\hat{f}^{-1}$ no es un homeomorfismo inducido. $\square$

Observemos que lo que se usó en la demostración del Ejemplo 3.8 fue que la función de ligadura era suprayectiva y no inyectiva.

Usando un argumento análogo a la del Ejemplo 3.8 se demuestra la siguiente proposición.

Proposición 3.9. *Sea X un continuo y $f : X \to X$ un función continua, suprayectiva y no inyectiva. Si consideramos a $\hat{f}^{-1} : \varprojlim(X, f) \to \varprojlim(x, f)$, la inversa de la función corrimento, entonces $\hat{f}^{-1}$ no es un homeomorfismo inducido.*

Referencias

[1] R. L. Adler, A. G. Konheim y M. H. McAndrew. *Topological entropy.* Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965) 309–319.

[2] A. Aliaga, W. Olano, M. Rubio. *No existencia de funciones continuas entre continuos hereditariamente descomponibles e indescomponibles.* PESQUIMAT , Revista de la F.C.M. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos Vol. XVIII No1, pp. 71 -75, Lima - Perú, Diciembre 2015.

[3] M. Barge. *The topological entropy of homeomorphisms of Knaster continua.* Houston J. Math. 13 (4) (1987) 465-485

[4] M. Barge y J. Martin. *Chaos, periodicity, and snakelike continua.* Transactions of the American Mathematical Society 289.1 (1985) 355-365.

[5] L. Block y W. Coopel. *Dynamics in one Dimension.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[6] R. Bowen. *Topological entropy and axiom A.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, (1970) 23-41.

[7] R. Bowen y J. Franks. *The periodic points of maps of the disk and the interval.* Topology 15 (1976) 337-342.

[8] M. Barge y M. Brown. *Problems in dynamics on continua.* Contemporary Mathematics 117, A.M.S., Providence, RI, 1991.

[9] B. Espinosa. *Introdución a la entropía topológica.* Tesis para obtener el título de Matemática. F.Ciencias UNAM, 2006.

[10] M. Gutiérrez. *Continuos tipo arco.* Tesis para obtener el título de Matemática. F.Ciencias UNAM, 2007.

[11] S. Macías, *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[12] H. Méndez. *Some dynamical properties of mappings defined on Knaster continua.* Topology and its Applications. 126 (2002) 419–42.

[13] M. Misiurewicz. *Horseshoes for mappings of the interval.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 27 (1979) 167-169.

[14] C. Mouron. *Positive entropy homeomorphisms of chainable continua and indescomposable subcontinua.* Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 139, No. 8 (2011) 2783-2791.

[15] D.R. Read. *Confluent and related mappings.* Colloq. Math. 29 (1974) 233-239.

[16] L. Rito. *Dinámica y Límites Inversos.* Tesis para obtener el título de Matemático. F.Ciencias, UNAM 2016.

[17] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory.* Springer, New York, 1982.

[18] R. Williams. *One-dimensional nonwandering set.* Topology 6 (1967) 473-487.

[19] X. Ye. *The dynamics of homeomorphisms of hereditarily decomposable chainable continua.* Topology and its Applications. 64 (1995) 85-93.

[20] X. Ye. *Topological entropy of the induced map of the inverse limit space.* Topology and its Applications. 67 (1995) 113-l18.