Universidad Nacional Autónoma de México

y

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

UNAM-UMSNH

Teoría-K de C^*-álgebras

T E S I N A

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Mario Alejandro López Pérez

Director:

Dr. Elmar Wagner

Instituto de Física y Matemáticas

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Morelia, Michoacán - 6 de agosto de 2018.

Índice general

Introducción

La teoría-K ha atraído desde su introducción por parte de Grothendieck a multitud de matemáticos de diferentes áreas, debido a sus muchas aplicaciones y a su capacidad de sintetizar teorías aparentemente muy dispares. En este trabajo nos centraremos en dos de sus variantes: la topológica, que se sirve de la teoría de haces vectoriales sobre espacios topológicos, y la C^*-algebraica, usando la primera a manera de motivación para estudiar más a profundidad la segunda, que será la materia principal que hemos de considerar.

En el primer capítulo, como de su nombre se infiere, estableceremos las definiciones y proposiciones que creemos necesarias para el correcto entendimiento de este trabajo, algunas de las cuales podrían no ser familiares para el lector no especializado. Dado que la teoría-K requiere para su enunciación y desarrollo de una considerable y variada maquinaria conceptual, hemos considerado conveniente agrupar aquí resultados de origen diverso que, de otra manera, obstruirían la adecuada lectura del material que se expone más adelante.

El segundo capítulo versa sobre la teoría-K topológica. Dado un espacio topológico compacto y de Hausdorff podemos, mediante la suma de Whitney (definición 2.8) y módulo la relación de equivalencia dada por ser establemente isomorfos (definición 2.11), dotar al conjunto de haces vectoriales sobre dicho espacio de una estructura de grupo abeliano. Concluiremos el capítulo enunciando el Teorema de Serre-Swan (2.14) que, por la relación que establece entre la teoría de haces vectoriales sobre un espacio compacto y de Hausdorff B y la de módulos proyectivos finitamente generados sobre el anillo de funciones continuas de B en $\mathbb{C}$, da pie a la introducción del capítulo siguiente, puesto que dicho anillo posee de hecho estructura de C^*-álgebra.

Para considerar la teoría-K de C^*-álgebras será necesario discutir antes las propiedades generales de las C^*-álgebras mismas, así como los conceptos previos que permitirán definir los K-grupos. A esto se abocará el tercer capítulo, en el que hablaremos de proyecciones y unitarios en C^*-álgebras de matrices para definir, mediante la relación de equivalencia dada por homotopía, los funtores K_0 y K_1 (definiciones 3.7 y 3.22), que relacionaremos con ayuda de la suspensión (proposición 3.28). Posteriormente se discutirán sus propiedades más importantes, siendo las principales el Teorema de Periodicidad de Bott y la sucesión exacta de seis términos (3.35 y 3.39).

Finalmente, dedicaremos el cuarto capítulo a mostrar una aplicación de los teoremas citados, calculando los K-grupos de las C^*-álgebras de funciones continuas de una superficie compacta cualquiera en $\mathbb{C}$, lo cual nos proporcionará una clasificación completa de dichas superficies hasta isomorfismo (teorema 4.3 y corolario 4.4).

Capítulo 1

Preliminares

Como es usual $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotarán a los conjuntos de números naturales, enteros, reales y complejos, respectivamente, mientras que $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\bar{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$.

A lo largo de este trabajo requeriremos de algunos conceptos básicos de la Teoría de Categorías. No obstante, enunciarlos aquí implicaría un desvío probablemente innecesario del tema que nos ocupa, ya que el punto de vista categórico no es el que hemos de adoptar en esta tesis, bastándonos que el lector posea las herramientas conceptuales expuestas en la introducción de [**8**]. No obstante, es menester reconocer la pertinencia y fecundidad de dicho punto de vista, que permite generalizar la teoría-K de manera notable. Para el lector interesado, recomendamos consultar [**11**].

Dado un par de espacios topológicos A y B, denotaremos por $C(B, A)$ al conjunto de funciones continuas de B en A, y simplemente por $C(B)$ cuando $A = \mathbb{C}$, mientras que $C_b(B)$ es el espacio de las funciones continuas y acotadas de B en $\mathbb{C}$, que resulta ser un espacio de Banach con la suma y producto por escalares definidas punto a punto y la norma del supremo.

1. C^*álgebras, ideales, proyecciones

Definición 1.1. Un *álgebra* es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ dotado de un producto $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ asociativo y bilineal tal que, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b).$$

Cuando nos sea posible sin restar claridad a la exposición, obviaremos la notación del producto y escribiremos ab en lugar de $a \cdot b$.

Si además $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ y satisface que $\|a \cdot b\| \leqslant \|a\| \|b\|$ para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$, diremos que $\mathcal{A}$ es un *álgebra de Banach*.

Las álgebras de Banach son estructuras por demás interesantes y existe una amplia teoría que da cuenta de ello. No obstante, nuestro interés se centrará en un tipo muy especial de álgebras de Banach, por lo que referimos al lector interesado a [**3**, capítulo 7].

Definición 1.2. Diremos que $\mathcal{A}$ es una *-*álgebra* si es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ equipado con una operación $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, llamada *involución*, que cumple las propiedades

1. $a^{**} = a$,

2. $(ab)^* = b^*a^*$, y
3. $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$

para cada $a, b \in \mathcal{A}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Definición 1.3. Una C^*-álgebra es un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ junto con una involución que la convierte en *-álgebra y tal que, para todo $a, b \in \mathcal{A}$,

$$\|a^*a\| = \|a\|^2. \tag{1.1}$$

La propiedad (1.1), que relaciona la involución con la norma en una C^*-álgebra, resulta mucho más poderosa de lo que a primera vista pueda pensarse. En efecto, dicha propiedad permite desarrollar una teoría mucho más rica que la que prescinde de ella. El material que expondremos en el capítulo 3 es una buena muestra de esto.

Definición 1.4. Un subespacio X de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ será llamado una *-subálgebra de $\mathcal{A}$ si es una subálgebra cerrada bajo la involución.

Observación 1.5. Naturalmente, un subespacio de la C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es una C^*-subálgebra (esto es, una C^*-álgebra con las operaciones heredadas) si y sólo si es una *-subálgebra cerrada en la topología de la norma.

Definición 1.6. Dadas dos álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, diremos que $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un *homomorfismo de álgebras* (o más brevemente homomorfismo) si es una función lineal tal que $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para cada $a, b \in \mathcal{A}$. Si dichas álgebras son además *-álgebras y $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ para cada $a \in \mathcal{A}$, diremos que φ es un *-homomorfismo.

El siguiente lema, demostrado en [**7**, 2.1.7], muestra cuan estrecha es la relación entre las estructuras topológica y algebraica de una C^*-álgebra.

Lema 1.7. *Todo *-homomorfismo es continuo.*

Definición 1.8. Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra, un subespacio vectorial I de $\mathcal{A}$ es un *ideal derecho* (respectivamente, un *ideal izquierdo*) si para cualesquiera $a \in \mathcal{A}$ y $b \in I$, se tiene que $ab \in I$ (respectivamente, $ba \in I$). Diremos que un ideal es *bilateral* si es izquierdo y derecho a un tiempo.

Asumiremos en adelante, salvo que se especifique lo contrario, que los ideales son bilaterales y cerrados.

Ejemplo 1.9. Todo ideal I es cerrado bajo la involución de $\mathcal{A}$ ([**7**, teorema 3.1.3]) y es, por tanto, una C^*-subálgebra. Además, el espacio cociente $\mathcal{A}/I$ resulta ser una C^*-álgebra con la norma dada por $\|a + I\| := \text{ínf}_{b \in I} \|a + b\|$ y la involución $(a + I)^* = a^* + I$. La función cociente $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ dada por $\pi(a) = a + I$ es un homomorfismo de C^*-álgebras.

Cuando hablemos de operadores entre espacios de Hilbert, asumiremos siempre que son lineales y acotados.

Definición 1.10. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Diremos que un operador $c : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es *compacto* si la cerradura de la imagen de la bola unitaria en $\mathcal{H}$ bajo c es compacta.

Ejemplo 1.11. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, denotamos por $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ al espacio de operadores de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$. Es fácil ver que el espacio de operadores sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una C^*-álgebra con la operación adjunta como involución y la norma usual $\|T\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|$, donde $\|\cdot\|$ es la norma de $\mathcal{H}$. Además, puede verse sin mayor dificultad que el subespacio de operadores compactos sobre dicho espacio de Hilbert es una ideal cerrado en $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Denotamos a este ideal por $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ y a la C^*-álgebra cociente resultante, conocida como *álgebra de Calkin*, por $C(\mathcal{H})$.

Ejemplo 1.12. Dado un espacio topológico B, si al espacio $C_b(B)$ añadimos el producto puntual de funciones continuas y la involución dada por la conjugación compleja punto a punto, obtenemos una C^*-álgebra.

Ejemplo 1.13. Sea B un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. Diremos que una función continua $f : B \to \mathbb{C}$ se *anula en infinito* si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{b \in B : |f(b)| \geqslant \varepsilon\}$ es compacto. El conjunto de dichas funciones, que denotaremos por $C_0(B)$, es una *-subálgebra cerrada en $C_b(B)$ y es, por tanto, una C^*-álgebra con las operaciones y la norma heredadas. $C_0(B)$ tiene unidad si y sólo si B es compacto, en cuyo caso $C_0(B) = C_b(B) = C(B)$.

Definición 1.14. Un elemento p de una C^*-álgebra será llamado *proyección* si $p^2 = p^* = p$.

Ejemplo 1.15. Las proyecciones en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ son precisamente las proyecciones ortogonales sobre subespacios cerrados de $\mathcal{H}$, es decir, los operadores $p : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que existe un subespacio cerrado M de $\mathcal{H}$ de tal suerte que $p(m + m') = m$ para cada $m \in M$ y $m \in M^{\perp}$.

Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ al anillo de matrices de n por n con entradas en $\mathcal{A}$, que a su vez podemos ver como operadores lineales sobre $\mathcal{A}^n$, lo cual nos permite considerar la norma usual del espacio de operadores acotados de $\mathcal{A}^n$ en $\mathcal{A}^n$. Con la involución dada por $(a_{ij})^* = (a^*_{ji})$ para $i, j \leqslant n$, se tiene que dicho anillo es una C^*-álgebra.

Como toda C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es en particular un anillo, es válido hablar de $\mathcal{A}$-módulos y en particular de $\mathcal{A}$-módulos proyectivos, es decir, módulos que son sumandos directos de un módulo libre. La prueba de la siguiente proposición se desprende de [**2**, 1.7 y 4.6.2].

Proposición 1.16. *Sean B un espacio topológico compacto y de Hausdorff y M un $C(B)$-módulo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *M es un $C(B)$-módulo proyectivo finitamente generado.*

2. *Existen* $n \in \mathbb{N}$ *y una proyección* p *en* $\mathbb{M}_n(C(B))$ *tal que* $M \simeq pC(B)^n$.

Dada una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, denotaremos por $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ a la categoría cuyos objetos son los $\mathcal{A}$-módulos proyectivos finitamente generados y cuyos morfismos son los homomorfismos de módulos usuales.

Dada una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ sin unidad es posible hallar una única (hasta isomorfismo) C^*-álgebra con unidad $\mathcal{A}^\sim$ tal que $\mathcal{A}$ es un ideal cerrado de codimensión lineal 1 en $\mathcal{A}^\sim$ ([**7**, teorema 2.1.6]). De hecho, si $1_{\mathcal{A}}$ es la unidad, se tiene que $\mathcal{A}^\sim$ es la suma directa de sus subespacios $\mathcal{A}$ y $\mathbb{C}1_{\mathcal{A}}$, con la multiplicación dada por la fórmula $(a,\lambda)\cdot(b,\mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu)$ y la involución coordenada a coordenada.

Cuando $\mathcal{A}$ tenga unidad, escribiremos $\mathcal{A}^\sim := \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.17. Si B es un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff no compacto, sabemos del ejemplo 1.13 que $C_0(B)$ es una C^*-álgebra conmutativa sin unidad. Sucede que si $B \cup \{\infty\}$ es la compactación por un punto de B, entonces $C_0(B)^\sim \simeq C(B \cup \{\infty\})$, pues $C(B \cup \{\infty\})$ es una C^*-álgebra con unidad que contiene a $C_0(B)$ como ideal cerrado de codimensión 1. De esta manera, las operaciones de compactificar por un punto un espacio localmente compacto y añadir unidad a una C^*-álgebra desprovista de ella se corresponden mediante el funtor C_0.

Definición 1.18. Definimos la *suma ortogonal* de dos C^*-álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como su producto cartesiano (suma directa) con las operaciones coordenada a coordenada y la norma $\|(a,b)\| :=$ máx$\{\|a\|, \|b\|\}$, y lo denotamos por $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

La suma ortogonal de C^*-álgebras es también una C^*-álgebra. Es importante hacer notar que $\mathcal{A}^\sim$ no es la suma ortogonal de $\mathcal{A}$ y $\mathbb{C}$, aunque sí sea su suma directa de espacios vectoriales.

Definición 1.19. Diremos que dos *-homomorfismos $\varphi, \psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son *homotópicos* si existe una trayectoria de *-homomorfismos $\gamma_t : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ para $t \in [0,1]$ tal que $t \mapsto \gamma_t(a)$ es una trayectoria continua en $\mathcal{B}$ para todo $a \in \mathcal{A}$, con $\gamma_0 = \varphi$ y $\gamma_1 = \psi$.

Diremos que un *-homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una *equivalencia homotópica* si existe un *-homomorfismo $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $\varphi \circ \psi$ y $\varphi \circ \psi$ son homotópicos a la identidad en sus respectivos dominios.

Diremos que una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es *contráctil* si $id_{\mathcal{A}}$ es homotópica al *-homomorfismo constante 0.

Ejemplo 1.20. Si X y Y son espacios compactos y de Hausdorff definimos, para cada función continua $\alpha : X \to Y$, $C(\alpha) : C(Y) \to C(X)$ dado por $f \mapsto f \circ \alpha$; con ello C es un funtor contravariante de la categoría de espacios topológicos compactos y de Hausdorff a la categoría de C^*-álgebras conmutativas con unidad. Si γ_t, $t \in [0,1]$, es una homotopía entre dos funciones continuas $\alpha, \beta : X \to Y$, entonces $\gamma'_t := C(\gamma_t)$ define una homotopía de *-homomorfismos entre $C(\alpha)$

y $C(\beta)$. En particular, si X es un espacio compacto, de Hausdorff y contráctil (esto es, homotópicamente equivalente a un punto), entonces $C(X)$ es una C^*-álgebra homótopicamente equivalente a $\mathbb{C}$.

2. Algunas nociones algebraicas

2.1. Los grupos de Grothendieck. En los capítulos que siguen nos encontraremos al definir los K-grupos que tanto han de interesarnos con que nuestras construcciones primeras tendrán la más modesta estructura de monoide abeliano. Por supuesto, es de desear que los K-grupos sean, pues, grupos y no solamente monoides, ya que para calcular invariantes de espacios topológicos es importante poder resolver ecuaciones y típicamente para ello es necesario tomar inversos. Por ello incluimos la siguiente definición/proposición.

Proposición 1.21. *Si M es un monoide abeliano, entonces existen un grupo $M^{-1}M$ abeliano y un morfismo de monoides $s : M \to M^{-1}M$ con la siguiente propiedad universal: dado cualquier grupo abeliano A y un morfismo de monoides $\alpha : M \to A$, existe un único homomorfismo de grupos $\tilde{\alpha} : M^{-1}M \to A$ que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & M^{-1}M \arrow[dl, "\tilde{\alpha}"] \\ & A. & \end{tikzcd}$$

Dicho grupo, conocido como la completación de Grothendieck de M, *es único hasta isomorfismo.*

La construcción, que puede consultarse en [**6**, capítulo 2, sección 1], es estándar, siendo en mucho análoga a la que se hace de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$. De hecho, $(\mathbb{N} \cup \{0\})^{-1}(\mathbb{N} \cup \{0\}) = \mathbb{Z}$.

2.2. Límites directos. Sucede a menudo que tenemos entre manos una sucesión de objetos algebraicos (en nuestro caso, grupos y *-álgebras) que se encajan unos en los otros preservando su estructura como subobjetos. Cuando todos ellos están de hecho encajados en un objeto mayor con la misma estructura es fácil y útil considerar su unión para obtener un objeto mínimo que los contenga a todos. Cuando no disponemos a priori de dicho objeto, necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.22. Un sistema dirigido de grupos (*-álgebras, C^*-álgebras) consta de un conjunto dirigido $(\mathcal{I}, <)$, grupos (*-álgebras, C^*-álgebras) A_i para cada $i \in \mathcal{I}$ y homomorfismos de grupos (*-homomorfismos) $\Phi_{ij} : A_j \to A_i$ para $i, j \in \mathcal{I}$ con $j < i$, tales que $\Phi_{ij} = \Phi_{ik} \circ \Phi_{kj}$ si $j < k < i$.

La construcción y propiedades que siguen pueden consultarse en [**10**, apéndice L].

Dado un sistema dirigido de grupos (*-álgebras, C^*-álgebras) $(A_i, \Phi_{ij})_{\mathcal{I}}$ existe un único grupo (*-álgebra, C^*-álgebra) salvo isomorfismo, que denotaremos por A_∞ ó $\varinjlim A_i$ (aunque obviamente también depende de los morfismos) y llamaremos *límite directo*, además de morfismos $\Phi_i : A_i \to A_\infty$ para $i \in \mathcal{I}$ tales que el siguiente diagrama conmuta para cada $i, j \in \mathcal{I}$ con $j < i$:

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\Phi_j"] \arrow[d, "\Phi_{ij}"'] & A_\infty \\ A_i \arrow[ur, "\Phi_i"'] & \end{tikzcd}$$

y $A_\infty = \cup_{i \in \mathcal{I}} \Phi_i(A_i)$.

El límite directo satisface la siguiente propiedad universal:

Proposición 1.23. *Con la notación de arriba, si B es un grupo (*-álgebra, C^*-álgebra) y $\Psi_i : A_i \to B$ son homomorfismos de grupos (*-álgebras, C^*-álgebras) tales que $\Psi_i \circ \Phi_{ij} = \Psi_j$ para cada $i, j \in \mathcal{I}$ con $j < i$, entonces existe un único homomorfismo de grupos (*-homomorfismo) $\Theta : A_\infty \to B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[rr, "\Phi_j"] \arrow[dd, "\Phi_{ij}"'] \arrow[ddrr, "\Psi_j"] & & A_\infty \arrow[dd, dashed, "\Theta"] \\ & & \\ A_i \arrow[uurr, "\Phi_i"] \arrow[rr, "\Psi_i"] & & B \end{tikzcd}$$

Esto es, cualquier otra manera de encajar los grupos coherentemente en un objeto de la misma estructura se factoriza a través del límite directo.

Cuando además nuestras estructuras algebraicas (grupos, *-álgebras) tengan asociada una topología que hace continuos a los morfismos Φ_{ij}, conviene pensar al límite directo con la topología más fina que hace a los Φ_i continuos.

Lo anterior no siempre será compatible con el límite directo de C^*-álgebras, ya que en general el límite directo algebraico no contará con una norma que lo haga una C^*-álgebra. Así, pese a escribir ambos límites con el mismo símbolo, cada vez que tomemos un límite directo de C^*-álgebras haremos explícito a cual de los dos límites nos referimos.

Cuando los homomorfismos sean inyectivos nos tomaremos la libertad de escribir $A_\infty = \cup_{i \in \mathcal{I}} A_i$.

2.3. Grupos topológicos. Llamamos *grupo topológico* a todo grupo G equipado con una topología en la que la aplicación $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ es continua de G^2 en G. Los ejemplos son muchos y muy famosos; bástenos aquí con mencionar los más usuales: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con la suma, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ con el producto.

Diremos que dos elementos g, g' de un grupo topológico G son *homotópicos*, y escribiremos $g \sim_h g'$, si existe una trayectoria continua $\alpha : [0,1] \to G$ tal que $\alpha(0) = g$ y $\alpha(1) = g'$. Ello define una relación de equivalencia en G cuyas clases de equivalencia son, como el lector sabrá, las componentes arcoconexas de G. Esta relación de equivalencia coincide exactamente con la que da el cociente de grupos G/G_0, donde G_0 es la componente arcoconexa del elemento neutro, que resulta ser un subgrupo normal de G. En otras palabras, $G/G_0 = G/\sim_h$, donde el primero representa el cociente de grupos y el segundo el cociente topológico. Así, G/G_0 es un grupo topológico, pues su topología y estructura de grupo están ambas dadas por G a través de la misma función cociente $g \mapsto gG_0$.

Capítulo 2

Haces vectoriales

1. Haces vectoriales

La Teoría de Haces Vectoriales es, como se aprecia de los ejemplos que a continuación expondremos, muy rica en estructura, además de un campo fértil para la comunicación entre distintas áreas de las matemáticas, como Topología General, Análisis Complejo, Teoría de Grupos y Topología Algebraica; es por esto que la consideramos una motivación idónea para introducir el estudio de la Teoría-K de C^*-álgebras, que es también zona limítrofe de dichas áreas. La manera en que haremos esto será mediante una breve discusión acerca de una manera de clasificar haces vectoriales sobre un espacio dado.

En lo que sigue, $\mathbb{K}$ denotará a cualquiera de los campos $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, aunque nuestro interés terminará por centrarse exclusivasmente en el último.

Definición 2.1. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, un *haz vectorial de dimensión n* es una función continua $p : E \to B$ tal que $p^{-1}(b)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, de manera que existen una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de B y homeomorfismos $h_U : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^n$ para cada $U \in \mathcal{U}$, que además son isomorfismos lineales entre $p^{-1}(b)$ y $\{b\} \times \mathbb{K}^n$ para cada $b \in B$. Dichos homeomorfismos son llamados *trivializaciones locales* del haz. Nos referiremos a E y B como *espacio total* y *espacio base* del haz, respectivamente, mientras que los espacios $p^{-1}(b)$ son conocidos como *fibras*, donde $b \in B$. Cuando no se preste a confusión y lo creamos conveniente, nos referiremos al haz simplemente como E.

Definición 2.2. Un morfismo entre los haces $p_1 : E_1 \to B$ y $p_2 : E_2 \to B$ es una función continua $f : E_1 \to E_2$ tal que, para cada $b \in B$, $f(p_1^{-1}(b)) \subseteq p_2^{-1}(b)$ y $f\restriction(p_1^{-1}(b))$ es una transformación lineal entre las correspondientes fibras sobre b. Cuando f sea un isomorfismo lineal entre fibras (y por tanto un homeomorfismo entre E_1 y E_2) diremos que es un *isomorfimo de haces*.

Ejemplo 2.3. Para cualquier espacio topológico B, tenemos que la proyección de $B \times \mathbb{K}^n$ en el primer factor es un haz vectorial de dimensión n, conocido como el haz trivial sobre B, con la cubierta $\{B\}$ y la identidad en el espacio total como trivialziación local. Denotaremos a este haz por $\mathcal{E}_n^B$ o, más brevemente y cuando el espacio base esté claro, por $\mathcal{E}_n$.

Ejemplo 2.4. Dada una variedad diferenciable M de dimensión n, la proyección canónica $\pi : TM \to M$ del haz tangente en la variedad, dada por $\pi(x, v) = x$, es un haz vectorial de dimensión n. Si la variedad está encajada en $\mathbb{R}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces la proyección canónica del espacio normal $NM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \in T_x M^{\perp}\}$ a M es un haz vectorial de dimensión $m - n$. Así, clasificar haces vectoriales resulta de la mayor importancia en la Topología Diferencial, por ejemplo para averiguar si una variedad dada es o no paralelizable, orientable, etc.

Ejemplo 2.5. Sea E el espacio cociente que se obtiene de $I \times \mathbb{R}$ al identificar los pares de puntos de la forma $(0, t)$ y $(1, -t)$. La proyección de $I \times \mathbb{R}$ en I induce así una función continua $p : E \to I/\{0, 1\} \simeq S^1$ que resulta un haz $\mathbb{R}$-vectorial de dimensión 1 sobre S^1. Geométricamente, obtenemos E de identificar los dos extremos de una banda de ancho infinito luego de darle media vuelta a uno de ellos, por lo cual no es raro que llamemos a este haz *el haz de Möbius*.

Definición 2.6. Una *sección* para un haz $p : E \to B$ es una función continua $s : B \to E$ tal que $s(b) \in p^{-1}(b)$ para todo $b \in B$ o, equivalentemente, $p \circ s = \mathrm{id}_B$.

Todo haz $p : E \to B$ tiene una sección continua trivial, a saber, la sección s_0 que a cada $b \in B$ asigna el vector cero en el espacio $p^{-1}(b)$, y que suele identificarse con el subespacio de E que tiene por imagen.

Las secciones pueden proveernos de información útil para distinguir entre haces vectoriales. A guisa de ejemplo, si s_0 es la sección cero en el haz de Möbius E, se tiene que $E \setminus s_0$ es un espacio conexo, al contrario de lo que pasa con el haz trivial. Dado que los isomorfismos de haces preservan secciones continuas, lo anterior muestra que el haz de Möbius no es trivial. Al final de la siguiente sección los espacios de secciones nos serán de gran utilidad para conectar la clasificación de haces vectoriales con la teoría de C^*-álgebras, a través de la teoría-K.

Ejemplo 2.7. Del Teorema de la Bola Peluda ([**1**, teorema 9.6]) sabemos que el haz $T\mathbb{S}^2$ no es trivial, ya que, a diferencia de los haces triviales, no posee secciones continuas que no se anulen en ningún punto del espacio base.

Dados dos haces $p_i : E_i \to B_i$, $i \in \{1, 2\}$, podemos definir un haz producto obvio, a saber, $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$, en el que la fibra sobre cada par de puntos es exactamente el producto (suma directa) de las fibras de cada punto en su haz originario.

También, dado un haz $p : E \to B$ y un subespacio $A \subseteq B$, se obtiene un haz sobre A de la misma dimensión, concretamente, $p \restriction_{p^{-1}(A)}: p^{-1}(A) \to A$.

2. Teoría K de haces vectoriales

En aras de nuestro objetivo, a saber, clasificar haces por medio de invariantes, es deseable definir una operación entre clases de isomorfismo de haces sobre la misma base, pues esto nos permitiría obtener haces nuevos de otros previamente conocidos sin cambiar la base y, bajo ciertas circunstancias, resolver ecuaciones para determinar si dos haces son o no equivalentes, en un sentido que más abajo hemos de precisar. Hay una manera bastante natural de hacer esto: dados haces $p_i : E_i \to B$, con $i \in \{1, 2\}$, sobre la misma base, consideremos la restricción del haz $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B \times B$ al subespacio diagonal $\{(b, b)|b \in B\} \simeq B$ del espacio base. Obtenemos con ello el haz p con espacio total $E_1 \oplus E_2 := \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 : p_1(v_1) = p_2(v_2)\}$ y dado por $(v_1, v_2) \mapsto p_1(v_1) = p_2(v_2)$. De los párrafos anteriores es claro que la dimensión del haz que se obtiene por este proceso es la suma de las dimensiones de los haces de que partimos.

Definición 2.8. El haz $p : E_1 \oplus E_2 \to B$ descrito arriba es conocido como *la suma de Whitney* de los haces E_1 y E_2.

La suma de Whitney es, como puede verificarse fácilmente, conmutativa hasta isomorfismo, además de contar con un elemento neutro obvio, el haz trivial $\mathcal{E}_0$. Por otro lado, como dos haces de diferentes dimensiones no pueden ser isomorfos, es fácil convencerse de que la suma de Whitney no tiene inversos en clases de isomorfismos de haces sobre un espacio dado, pues la suma de Whitney de dos haces tendrá siempre una dimensión mayor o igual a la de los sumandos. Peor aún, ni siquiera tenemos cancelación:

Ejemplo 2.9. En efecto, para $\mathbb{S}^2$, vimos en el ejemplo 2.7 que $T\mathbb{S}^2$ no es isomorfo a $\mathcal{E}_2$, pese a que $T\mathbb{S}^2 \oplus N\mathbb{S}^2 \simeq \mathcal{E}_3 \simeq \mathcal{E}_2 \oplus N\mathbb{S}^2$, ya que $N\mathbb{S}^2 \simeq \mathcal{E}_1$.

De hecho, se tiene un resultado mucho más general que será muy importante en lo que sigue. La prueba se encuentra en [**5**, proposición 1.4]

Proposición 2.10. *Si B es un espacio compacto y de Hausdorff, entonces para todo haz E sobre B existen otro haz E' sobre B y $n \in \mathbb{N}$ tales que $E \oplus E' \simeq \mathcal{E}_n$.*

Esto nos induce a definir la siguiente relación:

Definición 2.11. Diremos que dos haces E_1 y E_2 sobre un espacio B son *establemente isomorfos* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E_1 \oplus \mathcal{E}_n \simeq E_2 \oplus \mathcal{E}_n$. En este caso, escribiremos $E_1 \sim E_2$.

Es un ejercicio rutinario probar que ello define una relación de equivalencia entre haces vectoriales sobre un espacio compacto de Hausdorff dado. Así, podemos considerar el conjunto de clases de equivalencia de haces vectoriales sobre dicho espacio. Dicho conjunto, equipado con la suma de Whitney, tiene estructura de monoide conmutativo. Además dicho monoide tiene la propiedad de cancelación, ya que si E, E_1 y E_2 son haces sobre B tales que $E_1 \oplus E \sim E_2 \oplus E$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E_1 \oplus E \oplus \mathcal{E}_n \simeq E_2 \oplus E \oplus \mathcal{E}_n$. Por la proposición anterior, existen un haz E' sobre B y $m \in \mathbb{N}$ tal que $E \oplus E' \simeq \mathcal{E}_m$, de donde obtenemos, al sumar E' en la segunda ecuación y agrupar, $E_1 \oplus \mathcal{E}_{n+m} \simeq E_2 \oplus \mathcal{E}_{n+m}$, es decir $E_1 \sim E_2$. Así, nos es permitido definir lo siguiente.

En adelante consideraremos sólo haces vectoriales sobre $\mathbb{C}$.

Definición 2.12. Dado un espacio compacto y de Hausdorff B, definimos $K^0(B)$ como la completación de Grothendieck del monoide arriba considerado (véase 2.1, capítulo primero), y denotamos su operación simplemente como $+$.

Hay otra construcción de importancia íntimamente relacionada con la anterior, a la cual procedemos. Dados dos haces vectoriales E_1 y E_2 sobre un espacio compacto y de Hausdorff B, escribimos $E_1 \approx E_2$ si existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $E_1 \oplus \mathcal{E}_n \simeq E_2 \oplus \mathcal{E}_m$. El conjunto de clases de equivalencia que se obtiene, junto con la suma de Whitney, resulta ser ya un grupo abeliano, lo cual es un corolario de la proposición 2.10.

Definición 2.13. Para un espacio compacto y de Hausdorff B, definimos $\widetilde{K}^0(B)$ como el grupo de clases de equivalencia de haces sobre B bajo $\approx$. Llamamos a este grupo el *K-grupo reducido* de B, para distinguirlo del que denotamos sin tilde.

Los dos grupos que hemos definido son de utilidad, y naturalmente difieren en sus propiedades. Por ejemplo, en $\widetilde{K}^0(B)$ cualquier haz trivial tiene clase de equivalencia 0, mientras que en $K^0(B)$ ningún haz de dimensión positiva puede tener clase de equivalencia nula. De hecho, no es difícil convencerse de que $\widetilde{K}^0(B)$ se obtiene de $K^0(B)$ identificando las clases de isomorfismo estable de todos los haces triviales.

Lo anterior nos permite pasar de la clasificación de haces vectoriales sobre una base dada a la clasificación de espacios topológicos por el tipo de haces vectoriales que admiten. Por ejemplo, es claro que si X e Y son espacios compactos y de Hausdorff tales que $K^0(X)$ y $K^0(Y)$ no son isomorfos, se concluirá que X e Y no son homeomorfos. Haremos uso de este tipo de distinción al final de este trabajo, cuando hayamos visto la relación entre la teoría-K topológica y la de C^*-álgebras (véanse el teorema 3.4 y el corolario 4.4).

Para enunciar el Teorema de Serre-Swan, con el que daremos fin al presente capítulo, precisamos de un breve comentario y un poco de notación. Como las secciones de un haz E sobre B son funciones continuas de B en E, el conjunto $\Gamma(B, E)$ de secciones continuas del haz tiene una estructura natural de $C(B)$-módulo, con la suma de secciones y multiplicación de secciones por funciones continuas de B en $\mathbb{C}$ definidas punto a punto, mediante la estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial que poseen las fibras.

Si B es un espacio topológico, llamaremos $\mathcal{E}(B)$ a la categoría que tiene por objetos a los haces vectoriales sobre B, siendo los morfismos entre ellos los de la definición 2.2.

El siguiente teorema, cuya prueba pueda consultarse en [**6**, Teorema 6.18], tiende un prodigioso puente entre el estudio de haces vectoriales y la teoría de C^*-álgebras. Para enunciarlo usamos la notación establecida en el párrafo que sigue a la proposición 1.16.

TEOREMA 2.14 (Serre-Swan). *Dado un espacio compacto y de Hausdorff B, el funtor Γ entre $\mathcal{E}(B)$ y $\mathcal{P}(C(B))$ es una equivalencia de categorías.*

Así pues, clasificar haces vectoriales sobre un espacio compacto de Hausdorff es equivalente a clasificar módulos proyectivos finitamente generados sobre una C^*-álgebra conmutativa con unidad (véase el ejemplo 1.13). En el siguiente capítulo haremos esta conexión más precisa y mostraremos como se extiende a la teoría-K.

Capítulo 3

C^*-álgebras

1. K_0 de una C^*-álgebra

Con el fin de cumplir lo anunciado al final del capítulo anterior y ya que, en vista de la proposición 1.16, los módulos proyectivos finitamente generados y las proyecciones en las álgebras de matrices finitas de una C^*-álgebra dada están en correspondencia, nuestro interés se dirigirá en lo sucesivo a clasificar proyecciones en espacios de matrices de tamaño arbitrario sobre dicha C^*-álgebra. Con ello en mente, costruiremos un grupo de clases de equivalencia de proyecciones que conserve a través de $C(B)$ la información que el grupo $K^0(B)$ contiene sobre B. Esto nos permitirá, similarmente a lo que antes hicimos, pasar de la clasificación de proyecciones a la de C^*-álgebras por el tipo de proyecciones que sus espacios de matrices admiten. Para ello haremos uso de las definiciones dadas en la subsección 2.2, capítulo 1.

Para una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encajar $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ en $\mathbb{M}_{n+1}(\mathcal{A})$ agregando a las matrices de $n \times n$ una fila y una columna, por debajo y a la derecha respectivamente, de ceros. Estos encajes son homeomorfismos e isomorfimos sobre su imagen y además son compatibles unos con otros, es decir que conforman un sistema dirigido de *-álgebras. Así, podemos definir un límite directo para obtener una *-álgebra cuyas operaciones son compatibles con la estructura de los $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$. Naturalmente, denotaremos a este límite por $\mathbb{M}_\infty(\mathcal{A})$ y podemos visualizar sus elementos como matrices de tamaño infinito cuyas entradas son eventualmente 0 hacia abajo y a la derecha. Tal como se dijo en los preliminares, consideramos en $\mathbb{M}_\infty(\mathcal{A})$ la topología más fina que hace continuas a las inclusiones de los $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$.

Definición 3.1. Un elemento u en una *-álgebra con unidad $\mathcal{A}$ será llamado *unitario* si

$$uu^* = u^*u = 1_{\mathcal{A}}.$$

Con lo anterior, podemos definir la siguiente relación de equivalecia: dada una *-álgebra $\mathcal{A}$ y dos proyecciones $p, p' \in \mathcal{A}$, escribiremos $p \sim p'$ si y sólo si existe $u \in \mathcal{A}$ unitario tal que $upu^* = p'$. En tal caso diremos que p y p' son *unitariamente equivalentes*.

Tenemos además la relación de equivalencia entre proyecciones dada por homotopía, similar a la que mencionamos en la sección 2.3 del capítulo 1, aunque en este caso las proyecciones no formen un grupo. Pediremos, sin embargo, a las homotopías α entre dos proyecciones que $\alpha(t)$ sea también una proyección en $\mathcal{A}$ para todo $t \in [0,1]$. En las álgebras de matrices $\mathbb{M}_\infty(\mathcal{A})$ estas dos relaciones coinciden (véase [**10**, capítulo 5]).

Además, dados $p, q \in \mathbb{M}_\infty(\mathcal{A})$, estos son matrices de tamaño finito, por lo que podemos obetener otra matriz de tamaño finito mediante su suma directa $\operatorname{diag}(p,q) := \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix}\right)$. Más aún, tenemos que

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^* & 0 \\ 0 & q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}^*,$$

es decir que $\operatorname{diag}(p,q) \in \mathbb{M}_\infty(\mathcal{A})$ es también una proyección. Con todo lo anterior podemos proceder a definir K_0, al menos para C^*-álgebras con unidad.

Definición 3.2. Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra, llamaremos $V(\mathcal{A})$ al conjunto de $\sim$-clases de equivalencia de proyecciones en $\mathbb{M}_\infty(\mathcal{A}^\sim)$.

Podemos asignar una estructura de monoide a $V(\mathcal{A})$ con la suma dada por $[p]+[q] := [\operatorname{diag}(p,q)]$.

Definición 3.3. Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra con unidad. Denotamos por $K_0(\mathcal{A})$ a la completación de Groethendieck del monoide $V(\mathcal{A})$.

Así, los elementos de $K_0(\mathcal{A})$ son diferencias formales $[p] - [q]$, con p y q proyecciones en $\mathbb{M}_\infty(\mathcal{A})$ y donde las clases están dadas por equivalencia unitaria.

Teorema 3.4. *Si B es un espacio compacto de Hausdorff, entonces $K^0(B) \simeq K_0(C(B))$, donde el isomorfismo es inducido por el funtor Γ.*

En otras palabras, las maneras de clasificar espacios topológicos y C^*-álgebras a través de haces vectoriales y proyecciones de las que hemos hablado son perfectamente compatibles.

Por otro lado, sabemos del ejemplo 1.13 que $C(B)$ es siempre una C^*-álgebra conmutativa con unidad. No obstante, la construcción de $K_0(\mathcal{A})$ que acabamos de dar no cambia si la C^*-álgebra en cuestión es no conmutativa. Por tanto, en virtud de los teoremas anteriores no es de extrañar que se hable en ocasiones de dichos grupos como una teoría-K para haces vectoriales sobre espacios topológicos no conmutativos.

La prueba de la siguiente proposición se sigue de [**10**, proposición 6.1.3].

Proposición 3.5. *K_0 es un funtor covariante de la categoría de C^*-álgebras con unidad a la de grupos abelianos, que al *-homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ asocia el homomorfismo (bien definido) $\varphi_* : K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B})$ dado por $\varphi_*([(p_{ij})]) = [(\varphi(p_{ij}))]$.*

Ejemplo 3.6. Como dos proyecciones en espacios de matrices finitas con coeficientes en $\mathbb{C}$ son unitariamente equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango, obtenemos que la función $r : V(\mathbb{C}) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que a cada clase de equivalencia de proyecciones asocia su rango está bien definida y es biyectiva. Además, el rango de la suma directa de dos matrices es la suma de los rangos de los sumandos, así que r es un isomorfismo de monoides. Así, $V(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{N} \cup \{0\}$, de donde $K_0(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$ es generado por la clase de la matriz $1 \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{M}_1(\mathbb{C})$.

Para extender la definición del funtor K_0 a la categoría de C^*-álgebras (no necesariamente con unidad) consideremos el *-homomorfismo $\pi : \mathcal{A}^\sim \to \mathbb{C}$ dado por la proyección sobre el segundo sumando directo. En vista del ejemplo anterior nos es lícito escibir $\pi_* : K_0(\mathcal{A}^\sim) \to \mathbb{Z}$.

Definición 3.7. Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra sin unidad, definimos

$$K_0(\mathcal{A}) := \ker \pi_*.$$

De este modo, tenemos que $K_0(\mathcal{A})$ es un subgrupo de $K_0(\mathcal{A}^\sim)$. Más aún, según [**10**, proposición 6.2.2]:

Proposición 3.8. *Para cada C^*-álgebra sin unidad $\mathcal{A}$, la sucesión exacta escindida*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^\sim \underset{i}{\overset{\pi}{\longleftrightarrow}} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

induce la siguiente sucesión exacta de grupos que se escinde:

$$0 \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}^\sim) \underset{i_*}{\overset{\pi_*}{\longleftrightarrow}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

de donde se obtiene que $K_0(\mathcal{A}^\sim) \simeq K_0(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{Z}$.

Aunque por fin hemos llegado a la primera de las definiciones principales de este trabajo, a partir de ella el cálculo de grupos de la forma $K_0(\mathcal{A})$ es considerablemente difícil, amén de sumamente engorroso. Por ello, pasamos ahora a considerar algunas de las propiedades del funtor K_0 que nos permitirán agilizar las cuentas, además de por su gran importancia teórica. Más adelante haremos otro tanto para el funtor K_1.

Nótese que si $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un *-homomorfismo y $\varphi^\sim : \mathcal{A}^\sim \to \mathcal{B}^\sim$ es su única extensión que respeta la unidad, entonces $\varphi^\sim_*(K_0(\mathcal{A})) \subseteq K_0(\mathcal{B})$, por lo cual su restricción es un homomorfismo entre $K_0(\mathcal{A})$ y $K_0(\mathcal{B})$ y lo denotaremos por φ_*. En [**10**, proposición 6.2.4] se halla la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 3.9. *K_0 es un funtor covariante de la categoría de C^*-álgebras a la de grupos abelianos, que al *-homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ asocia el homomorfismo (bien definido) $\varphi_* : K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B})$ dado por*

$$\varphi_*([(p_{ij})] - [(q_{ij})]) = [(\varphi^\sim(p_{ij}))] - [\varphi^\sim(q_{ij}))].$$

La prueba del teorema anterior puede consultarse en [**10**, 6.2.4], mientras que las de los siguientes dos teoremas se encuentran en [**10**, teorema 6.3.2] y [**10**, teorema 6.4.3] respectivamente.

TEOREMA 3.10 (Semiexactitud de K_0). *Sea J un ideal en la C^*-álgebra $\mathcal{A}$. Entonces, la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{A} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathcal{A}/J \longrightarrow 0$$

induce la sucesión exacta corta de grupos

$$K_0(J) \xrightarrow{\ i_*\ } K_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\ \pi_*\ } K_0(\mathcal{A}/J).$$

TEOREMA 3.11. *Si $\varphi_0, \varphi_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son *-homomorfismos homotópicos, entonces $\varphi_{0*} = \varphi_{1*}$.*

COROLARIO 3.12. *Toda equivalencia homotópica $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre C^*álgebras induce un isomorfismo $\alpha_* : K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B})$*

Notemos que si $\{0\}$ es la C^*-álgebra trivial, entonces $\{0\}^\sim \simeq \mathbb{C}$ y el *-homomorfismo π es la identidad en $\mathbb{C}$, que induce el homomorfismo identidad en $K_0(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$. Luego, $K_0(\{0\}) = \ker(\mathrm{id}_*)$ es el grupo trivial $\{0\}$.

COROLARIO 3.13. *Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra homotópicamente equivalente a $\mathbb{C}$, entonces $K_0(\mathcal{A}) \simeq \mathbb{Z}$.*

K_0 es un funtor continuo, en el siguiente sentido:

PROPOSICIÓN 3.14. *Si $(\mathcal{A}_i, \Phi_{ij})_{\mathcal{I}}$ es un sistema dirigido de C^*-álgebras y $\varinjlim A_i$ es su límite directo (en el sentido de C^*-álgebras), entonces $(K_0(A_i), \Phi_{ij*})_{\mathcal{I}}$ es un sistema dirigido de grupos y*

$$K_0(\varinjlim A_i) \simeq \varinjlim K_0(A_i).$$

PROPOSICIÓN 3.15. *Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son C^*-álgebras, entonces*

$$K_0(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2) \simeq K_0(\mathcal{A}_1) \oplus K_0(\mathcal{A}_1),$$

por el isomorfismo $\pi_1 \oplus \pi_2$, donde π_i son las proyecciones canónicas $(a_1, a_2) \mapsto a_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Para las pruebas de los anteriores dos teoremas, remitimos al lector a [**10**, proposición 6.2.9] y [**10**, proposición 6.2.1].

Los siguientes conceptos serán necesarios para las secciones venideras; la suspensión nos será particularmente útil.

DEFINICIÓN 3.16. Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra. Definimos el *cono de $\mathcal{A}$* y la *suspensión de $\mathcal{A}$* como $C\mathcal{A} := \{f \in C([0,1], \mathcal{A}) : f(0) = 0\}$ y $S\mathcal{A} := \{f \in C\mathcal{A} : f(1) = 0\}$, respectivamente.

Con la norma del supremo y las operaciones punto a punto, estos dos espacios devienen C^*-álgebras.

Ejemplo 3.17. Por supuesto, $S\mathbb{C} \simeq C_0((0,1))$.

Proposición 3.18. *Para toda C^*-álgebra, su cono $C\mathcal{A}$ es contráctil. Su suspensión lo será si $\mathcal{A}$ lo es.*

La demostración, en [**10**, proposición 6.4.7].

Lema 3.19. *Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra, entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow S\mathcal{A} \longrightarrow C\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

dada por la inclusión de $S\mathcal{A}$ en $C\mathcal{A}$ y la evaluación en 1 de $C\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ es exacta.

Lema 3.20. *Si J es un ideal en la C^*-álgebra $\mathcal{A}$, entonces SJ es un ideal en $S\mathcal{A}$ y $S(\mathcal{A}/J) \simeq S\mathcal{A}/SJ$.*

En vista de la proposición 3.10 y el corolario 3.12 e inspirado en la Topología Algebraica y particularmente en la teoría homológica clásica (véase [**8**] por ejemplo), no sería extraño que el lector barrunte que lo que sigue es definir K-grupos de orden superior y sus respectivos homomorfismos de conexión. Es decir, buscamos definir funtores homotópicamente invariantes K_n, para $n \in \mathbb{Z}$, de la categoría de C^*-álgebras en la de grupos abelianos de tal suerte que para cada C^*-álgebra y cada ideal I en $\mathcal{A}$ la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/I \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1}(I) \longrightarrow K_{n+1}(\mathcal{A}) \longrightarrow K_{n+1}(\mathcal{A}/I) \longrightarrow K_n(I) \longrightarrow K_n(\mathcal{A}) \longrightarrow K_n(\mathcal{A}/I) \longrightarrow \cdots$$

Suponiendo que dichos funtores y homomorfismos son dados, se tendrá en particular, del lema 3.19, para cada C^*-álgebra $\mathcal{A}$ la sucesión exacta

$$K_1(S\mathcal{A}) \longrightarrow K_1(C\mathcal{A}) \longrightarrow K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(S\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(C\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}).$$

Por otro lado, de la proposición 3.18 tendremos que $K_1(C\mathcal{A}) \simeq K_0(C\mathcal{A}) \simeq 0$, es decir que $K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(S\mathcal{A})$ es un isomorfismo. Iterando el argumento obtendremos que una manera razonable de definir tales funtores es $K_n(\mathcal{A}) := K_0(S^n\mathcal{A})$. Esta definición es correcta y, aunque la que daremos a continuación aparenta ser muy distinta, pronto veremos que ambas son equivalentes (proposición 3.28).

Más adelante encontraremos que, para fortuna nuestra, la sucesión exacta larga correspondiente es periódica, ya que, como establece el Teorema de Periodicidad de Bott, los funtores K_0 y K_0S^2

son naturalmente isomorfos (véanse más abajo la sección 2 del presente capítulo y los teoremas 3.35 y 3.39).

2. K_1 de una C^*-álgebra

Definición 3.21. Para cada C^*-álgebra $\mathcal{A}$ con unidad y $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{U}_n(\mathcal{A})$ al conjunto de elementos unitarios en $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$.

Por supuesto, $\mathcal{U}_n(\mathcal{A})$ es un grupo topológico con la multiplicación de matrices. Además, podemos encajar, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n(\mathcal{A})$ en $\mathcal{U}_{n+1}(\mathcal{A})$ mediante $u \mapsto \operatorname{diag}(u, 1)$, que es un homomorfismo continuo. De ello obtenemos un sistema dirigidos de grupos topológicos, cuyo límite directo denotaremos por $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$.

Si $u \in \mathcal{U}_n(\mathcal{A})$, denotaremos por $\operatorname{diag}(u, 1_\infty)$ a su imagen en $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$.

Ahora bien, de la sección 2.3, capítulo 1 sabemos que $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})_0$, la componente arcoconexa de la unidad 1_∞ en $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A})$, es un subgrupo normal de éste.

Definición 3.22. Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra. Definimos

$$K_1(\mathcal{A}) := \mathcal{U}_\infty(\mathcal{A}^\sim)/\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A}^\sim)_0.$$

De la discusión en la sección recién citada sabemos que los elementos de $K_1(\mathcal{A})$ son clases de homotopía en el espacio de matrices unitarias de la forma $\operatorname{diag}(u, 1_\infty)$, donde u es una matriz finita unitaria con coeficientes en $\mathcal{A}^\sim$. A estas clases las denotaremos por $[u]$ simplemente, identificando además u y $\operatorname{diag}(u, 1_\infty)$ en $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A}^\sim)$.

El siguiente lema se demuestra en [**10**, proposición 4.2.9].

Lema 3.23. *Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra, $n \in \mathbb{N}$ y $u, v \in \mathcal{U}_n(\mathcal{A}^\sim)$ entonces las matrices $\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1_n \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1_n \end{smallmatrix}\right)$ son homotópicas entre sí en $\mathcal{U}_{2n}(\mathcal{A}^\sim)$.*

Así, la multiplicación que $K_1(\mathcal{A})$ tiene como cociente de un límite directo de grupos equivale a la suma directa de matrices y es, además, conmutativa. En otras palabras:

Proposición 3.24. *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra. Entonces, $K_1(\mathcal{A})$ es un grupo abeliano con el producto (bien definido)*

$$[u][v] := [uv] = [\operatorname{diag}(u, v)],$$

con $u, v \in \mathcal{U}_n(\mathcal{A}^\sim)$.

Todo homomorfismo entre C^*-álgebras $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induce, de manera única, un homomorfismo entre $\mathcal{A}^\sim$ y $\mathcal{B}^\sim$, que a su vez induce un único homomorfismo $\varphi^\sim$ entre $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{A}^\sim)$ y $\mathcal{U}_\infty(\mathcal{B}^\sim)$ actuando entrada a entrada. Tras componerlo con la función cociente asociada podemos asociar a φ un único homomorfismo de grupos $\varphi_* : K_1(\mathcal{A}) \to K_1(\mathcal{B})$ dado por $[u] \mapsto [\varphi^\sim(u)]$.

TEOREMA 3.25. *Con la asociación de morfismos recién descrita, K_1 es un funtor covariante de la categoría de las C^*-álgebras en la de grupos abelianos que satisface las propiedades de los teoremas 3.10, 3.14 y 3.15, es decir que es semiexacto, continuo y aditivo.*

La demostración del teorema anterior se halla en [**10**, 7.1.11, 7.1.7 y 7.1.12], mientras que la de la proposición siguiente puede consultarse en [**10**, proposición 7.1.6].

PROPOSICIÓN 3.26. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *Dos *-homomorfismos homotópicos entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ inducen el mismo homomorfismo entre $K_1(\mathcal{A})$ y $K_1(\mathcal{B})$.*
2. *Toda equivalencia homotópica entre C^*-álgebras induce un isomorfismo entre sus grupos K_1.*
3. *El grupo K_1 de una C^*-álgebra retráctil es trivial.*

EJEMPLO 3.27. Como $\mathbb{C} \simeq \{0\}^\sim$ y $\{0\}$ es contráctil, tenemos que $K_1(\mathbb{C}) = K_1(\{0\})$ es trivial.

3. El Teorema de Periodicidad de Bott

El Teorema de Periodicidad de Bott (teorema 3.35) y la sucesión exacta de seis términos (teorema 3.39) constituyen, con mucho, las herramientas más útiles y elegantes para calcular K-grupos, y muestran que la teoría-K de C^*-álgebras se termina con la definición de K_0 y K_1.

La proposición que sigue, primer gran paso hacia el Teorema de Periodicidad de Bott, se demuestra en [**10**, teorema 7.2.5].

PROPOSICIÓN 3.28. *Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra, entonces existe un isomorfismo $\theta_{\mathcal{A}} : K_1(\mathcal{A}) \to K_0(S\mathcal{A})$. Más aún, los funtores K_1 y $K_0 S$ son naturalmente isomorfos.*

LEMA 3.29. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C^*-álgebras y $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un *-homomorfismo sobreyectivo. Entonces, existe un *-homomorfismo sobreyectivo $\alpha^\sim : \mathcal{A}^\sim \to \mathcal{B}^\sim$ tal que todo unitario en la componente arcoconexa de la unidad en $\mathcal{B}^\sim$ tiene una preimagen unitaria en la componente conexa de de la unidad en $\mathcal{A}^\sim$.*

El lema anterior (demostrado en [**10**, Corolario 4.3.3]) junto con el lema 3.23 jugarán un papel fundamental en la definición de uno de los homomorfismos que determinan la sucesión exacta de seis términos que buscamos. Antes de pasar a aquélla requerimos la siguiente notación: escribiremos p_n por la proyección $\operatorname{diag}(1_n, 0_k)$ en $\mathbb{M}_{n+k}(\mathcal{A}^\sim)$, donde $n, k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra.

DEFINICIÓN 3.30. Sea J un ideal en la C^*-álgebra $\mathcal{A}$. Definimos $\delta : K_1(\mathcal{A}/J) \to K_0(J)$ de la siguiente forma: Si $[u] \in K_1(\mathcal{A}/J)$ con $u \in \mathcal{U}_n(\mathcal{A}^\sim/J)$, sea v una preimagen unitaria de $\operatorname{diag}(u, u^*)$

en $\mathcal{U}_{2n}(\mathcal{A}^\sim)$ con el morfismo inducido por el *-homomorfismo cociente $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/J$. Bajo dichas condiciones,

$$\delta([u]) := [vp_nv^*] - [p_n].$$

Como $\operatorname{diag}(u, u^*)$ es un elemento unitario en la componente arcoconexa de la unidad en $\mathcal{U}_{2n}(\mathcal{A}^\sim)$ (ver el corolario 3.23), el lema anterior garantiza la existencia de un tal v.

Comprobar que vp_nv^* es una proyección es un cálculo rutinario. Veamos que si, en un abuso de notación, denotamos por $\pi_J : \mathcal{U}_{2n}(\mathcal{A}^\sim) \to \mathcal{U}_n(\mathcal{A}^\sim/J)$ al homomorfismo inducido por π_J, entonces

$$\pi_J(vp_nv^*) = \operatorname{diag}(u, u^*)p_n \operatorname{diag}(u^*, u) = \operatorname{diag}(u, u^*) \operatorname{diag}(1_n, 0_n) \operatorname{diag}(u^*, u'^*)$$

$$= \operatorname{diag}(u, u^*) \operatorname{diag}(u^*, 0_n) = \operatorname{diag}(uu^*, 0_n) = \operatorname{diag}(1_n, 0_n) = p_n \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{C}),$$

es decir que vp_nv^* tiene entradas en $J^\sim$, por lo que es un elemento de $K_0(J^\sim)$. En caso de que J no posea unidad, nótese que si $\pi_\mathbb{C}$ es el *-homomorfismo entre espacios de matrices inducido por el *-homomorfismo cociente de $J^\sim$ en $\mathbb{C}$ entonces, dado que v es unitario y por ende $\pi_\mathbb{C}(vp_nv^*)$ y $\pi_\mathbb{C}(p_n)$ tienen el mismo rango, se tiene que $[vp_nv^*] - [p_n] \in \ker \pi_{\mathbb{C}*} = K_0(J)$, donde $\pi_{\mathbb{C}*}$ es el homomorfismo inducido entre $K_0(J^\sim)$ y $K_0(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$.

Proposición 3.31. *δ está bien definido y es un homomorfismo de grupos.*

Lo anterior se halla demostrado en [**10**, proposición 8.1.3]. La siguiente proposición, en [**10**, capítulo 9].

Proposición 3.32. *Para toda C^*-álgebra $\mathcal{A}$ existe un isomorfismo $\beta_A : K_0(\mathcal{A}) \to K_1(S\mathcal{A})$, que llamamos el* mapeo de Bott*, dado por $[p] - [q] \mapsto [f_pf_q^*]$, donde $f_p(z) := zp + 1_n - p$ para cada $z \in \mathbb{S}^1$, con p una proyección de tamaño n. Más aún, esto define una transformación natural entre los funtores K_0 y K_1S.*

Ejemplo 3.33. Como D es isomorfo a $(0, 1) \times (0, 1)$, se tiene que $C_0(D) \simeq C_0((0, 1) \times (0, 1))$. Por otro lado, $C_0((0, 1) \times (0, 1)) \simeq SC_0(0, 1)$ mediante el *-isomorfismo $f \mapsto \hat{f}$ para cada $f \in C_0((0, 1) \times (0, 1))$, donde $\hat{f}(s)$ está dado por $t \mapsto f(s, t)$ para cada $t, s \in (0, 1)$.

Así, gracias a las proposiciones 3.32 y 3.28, y recordando los ejemplos 3.17 y 3.6, podemos calcular $K_0(C_0(D)) \simeq K_0(SC_0((0, 1))) \simeq K_1(C_0((0, 1))) \simeq K_1(S\mathbb{C}) \simeq K_0(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$. Similarmente del ejemplo 3.27, $K_1(C_0(D)) \simeq K_1(\mathbb{C}) \simeq \{0\}$.

Ejemplo 3.34. Como aplicación del mapeo de Bott daremos una descripción completa de $K_1(C(\mathbb{S}^1))$. Del teorema anterior y el ejemplo 3.6 sabemos que la clase de homotopía del unitario f_1 dado por $f_1(z) = z1 + 1 - 1 = z = \operatorname{id}_{\mathbb{S}^1}(z)$, esto es, $\operatorname{id}_\mathbb{S}^1$, genera a $K_1(C(\mathbb{S}^1)) \simeq K_1(S\mathbb{C}) \simeq K_0(\mathbb{C})$, es decir que

$$K_1(C(\mathbb{S}^1)) = \{[\operatorname{id}_{\mathbb{S}^1}^n] : n \in \mathbb{Z}\},$$

donde, por como definimos la multiplicación en $C(\mathbb{S}^1)$, se tiene que $\mathrm{id}^n_{\mathbb{S}^1}(z) = z^n$ para cada $z \in \mathbb{S}^1$. Compárese lo anterior con el cálculo clásico del grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$.

De las proposiciones 3.28 y 3.32 obtenemos el teorema que da nombre a este capítulo.

Teorema 3.35 (Periodicidad de Bott). *Para cada C^*álgebra $\mathcal{A}$, $K_i(S^2\mathcal{A}) \simeq K_i(\mathcal{A})$, para $i \in \{0,1\}$. De hecho, estos funtores son naturalmente isomorfos.*

Este teorema, como se había dicho antes, nos excusa de definir K-grupos de orden mayor a 1 que encajen en una sucesión exacta larga; ello se hace patente en el siguiente teorema, para llegar al cual necesitamos definir un homomorfismo más. Antes de eso enunciaremos un lema cuya prueba se encuentra en [**10**, proposición 6.2.7]. A su vez, el lema requiere de un breve comentario:

Dados una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ y $a \in \mathcal{A}$, se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} \|a^n/n!\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \|a\|^n/n!$, y la última sucesión es creciente y acotada por $e^{\|a\|}$, es decir que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a^n/n!$ es absolutamente convergente y por ende convergente en $\mathcal{A}$, pues $\mathcal{A}$ es completo. Denotamos al límite de dicha serie en $\mathcal{A}$ por e^a.

Lema 3.36. *Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra entonces para cada $\kappa \in K_0(\mathcal{A})$ existen $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $n \leqslant k$ y $p \in \mathbb{M}_k(\mathcal{A}^\sim)$ tales que $\kappa = [p] - [p_n]$.*

Definición 3.37. Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra y J un ideal en $\mathcal{A}$. Entonces, definimos el *homomorfismo exponencial* $\exp : K_0(\mathcal{A}/J) \to K_1(J)$ por

$$\exp([p] - [p_n]) := [e^{-2\pi i x}],$$

donde $x \in \mathbb{M}_\infty(\mathcal{A})$ es una preimagen de p bajo π_J tal que $x = x^*$.

Para la prueba de la siguiente proposición puede consultarse [**10**, ejercicio 9.E].

Proposición 3.38. *El homomorfismo exponencial es de hecho un homomorfismo de grupos (bien definido).*

Por fin, arribamos a nuestro teorema estelar. Su demostración puede leerse en [**10**, teorema 9.3.2]:

Teorema 3.39. *Sea J un ideal en la C^*-álgebra $\mathcal{A}$. Entonces, la siguiente sucesión periódica es exacta:*

$$\begin{tikzcd}
K_0(J) \arrow[r, "i_*"] & K_0(\mathcal{A}) \arrow[r, "\pi_*"] & K_0(\mathcal{A}/J) \arrow[d, "\exp"] \\
K_1(\mathcal{A}/J) \arrow[u, "\delta"] & K_1(\mathcal{A}) \arrow[l, "\pi_*"] & K_1(J) \arrow[l, "i_*"]
\end{tikzcd}$$

Como primer aplicación de la periodicidad de Bott, daremos una fórmula explícita para el generador de $K_0(C_0(D)) \simeq \mathbb{Z}$ (ver ejemplo 3.33).

Ejemplo 3.40. Consideremos el *-homomorfismo sobreyectivo

$$\varphi : C(\bar{D}) \to C(\mathbb{S}^1), f \mapsto f\restriction\mathbb{S}^1$$

cuyo kernel son todas las funciones continuas de $\bar{D}$ en $\mathbb{C}$ que se anulan en la frontera. Podemos identificar de manera obvia a este ideal con $C_0(D)$, obteniendo así la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
K_0(C_0(D)) \arrow[r] & K_0(C(\overline{D})) \arrow[r] & K_0(C(\mathbb{S}^1)) \arrow[d] \\
K_1(C(\mathbb{S}^1)) \arrow[u] & K_1(C(\overline{D})) \arrow[l] & K_1(C_0(D)). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Del ejemplo 3.33 tenemos que $K_1(C_0(D))$ es el grupo trivial, de donde concluimos que el homomorfismo $K_0(C(\overline{D})) \to K_0(C(\mathbb{S}^1))$ es sobre. Además, del corolario 3.13 y el ejemplo 1.20 sabemos que $K_0(C(\overline{D})) \simeq \mathbb{Z}$; por otro lado y una vez más en vista del ejemplo 3.33, se obtiene que $K_1(C(\mathbb{S}^1)) \simeq K_1(C((0,1))^\sim) = K_1(C((0,1))) \simeq \mathbb{Z}$, y como todo homomorfismo sobreyectivo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ es un isomorfismo se concluye que $K_0(C(\overline{D})) \to K_0(C(\mathbb{S}^1))$ es inyectivo y por ende $K_0(C_0(D)) \to K_0(C(\overline{D}))$ es el homomorfismo 0. Como además de la proposición 3.26 y los ejemplos 1.20 y 3.27 se tiene que $K_1(C(\overline{D}))$ es el grupo trivial, concluimos que

$$K_1(C(\mathbb{S}^1)) \xrightarrow{\delta} K_0(C_0(D)) \quad \text{es un isomorfismo.}$$

Para hacer, en lo sucesivo, la notación más amigable conviene denotar a la función identidad en $\mathbb{S}^1$ como u de modo que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{S}^1$ se tiene que $u^n(\lambda) = \lambda^n$, por definición de la C^*-álgebra $C(\mathbb{S}^1)$. Similarmente denotaremos por z a la función identidad en $C(\overline{D})$. Así, en vista del ejemplo 3.34, para conocer $K_0(C_0(D))$ no queda sino calcular $\delta([u^n_{\mathbb{S}^1}])$ para $n \in \mathbb{Z}$.

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, un cálculo rutinario muestra que la matriz con entradas en $C(\overline{D})$ dada por

$$\begin{pmatrix} z^n & -\sqrt{1-|z|^{2n}} \\ \sqrt{1-|z|^{2n}} & \overline{z}^n \end{pmatrix}$$

es unitaria. Además, es claro que su imagen bajo φ es la matriz $\left(\begin{smallmatrix} u^n & 0 \\ 0 & \overline{u}^n \end{smallmatrix}\right)$. Como

$$\begin{pmatrix} z^n & -\sqrt{1-|z|^{2n}} \\ \sqrt{1-|z|^{2n}} & \overline{z}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z}^n & \sqrt{1-|z|^{2n}} \\ -\sqrt{1-|z|^{2n}} & z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z|^{2n} & z^n\sqrt{1-|z|^{2n}} \\ \overline{z}^n\sqrt{1-|z|^{2n}} & 1-|z|^{2n} \end{pmatrix},$$

de la definición de δ obtenemos que

$$\delta([u^n_{\mathbb{S}^1}]) = \left[\begin{pmatrix} |z|^{2n} & z^n\sqrt{1-|z|^{2n}} \\ \overline{z}^n\sqrt{1-|z|^{2n}} & 1-|z|^{2n} \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right],$$

y, análogamente,

$$\delta([u_{\mathbb{S}^1}^{-n}]) = \left[\begin{pmatrix} |z|^{2n} & \overline{z}^n \sqrt{1-|z|^{2n}} \\ z^n \sqrt{1-|z|^{2n}} & 1-|z|^{2n} \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Así, de la discusión anterior es claro que

$$K_0(C_0(D)) = \left\{\left[\begin{pmatrix} |z|^{2n} & z^n \sqrt{1-|z|^{2n}} \\ \overline{z}^n \sqrt{1-|z|^{2n}} & 1-|z|^{2n} \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$
$$\bigcup \left\{\left[\begin{pmatrix} |z|^{2n} & \overline{z}^n \sqrt{1-|z|^{2n}} \\ z^n \sqrt{1-|z|^{2n}} & 1-|z|^{2n} \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] : n \in \mathbb{N}\right\},$$

con generador

$$\delta([u]) = \left[\begin{pmatrix} |z|^{2} & z \sqrt{1-|z|^{2}} \\ \overline{z} \sqrt{1-|z|^{2}} & 1-|z|^{2} \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Capítulo 4

Teoría-K de superficies compactas

En esta sección emplearemos la maquinaria teórica desarrollada hasta aquí para calcular la teoría-K de superficies compactas. Para la definición de la suma conexa y una discusión más detallada sobre clasificación de superficies referimos al lector a [**1**, capítulos 7 y 8].

Comenzamos con las definiciones de rigor.

Definición 4.1. Una *superficie* es una 2-variedad topológica, esto es, un espacio topológico de Hausdorff tal que todo punto tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^2$.

En particular, nuestra definición excluye la existencia de fronteras, es decir, de puntos con vecindades homeomorfas a un semiplano.

Como ejemplos de superficies tenemos a la esfera $\mathbb{S}^2$, el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ y la botella de Klein, siendo orientables las primeras dos, a diferencia de las restantes.

Ahora bien, es sabido que dada una orientación en la frontera del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ puede obtenerse el toro como cociente identificando sus lados opuestos tomados en sentidos opuestos. Como el cuadrado es homeomorfo al disco $\bar{D}$, puede verse al toro como un cociente de éste, pegando los arcos de la frontera como se indica en la figura 1, que simbolizamos por $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

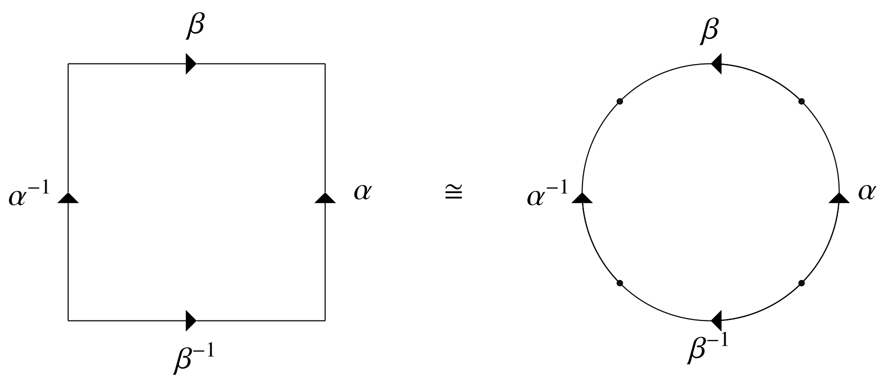

Figura 1. El toro como un cociente de $\bar{D}$.

Por supuesto pueden obtenerse otras superficies con este proceso, subdividiendo el círculo en más arcos que posteriormente han de identificarse dada cierta orientación. Por ejemplo, los símbolos $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\cdots\alpha_n\beta_n\alpha_n^{-1}\beta_n^{-1}$ y $\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\cdots\alpha_n\alpha_n$ representan al disco con la frontera dividida y orientada según la figura 2 y que, tras la identificación, resultan homeomorfos a la suma conexa de n toros y a la suma conexa de n planos proyectivos, respectivamente. Después de todo, no son sino sucesiones de arcos similares a los del toro en un caso y a los del plano proyectivo en el otro.

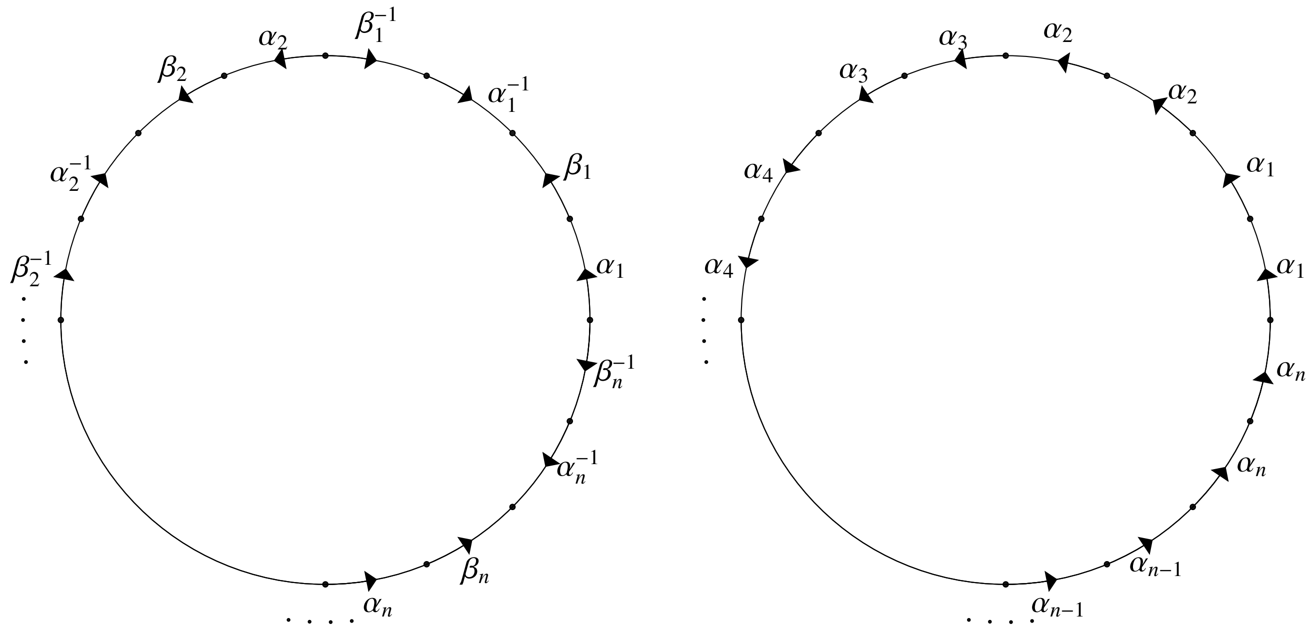

FIGURA 2. Suma conexa de n toros (izquierda) ó n planos proyectivos (derecha), representadas como espacios cociente de $\bar{D}$.

De hecho, se tiene el siguiente resultado, siendo un teorema de clasificación topológica de primer importancia.

TEOREMA 4.2. *Toda superficie conexa y compacta es homeomorfa a una y sólo una de las siguientes opciones:*

1. *La esfera* $\mathbb{S}^2$*,*
2. *La suma conexa finita de n toros, ó*
3. *La suma conexa de n planos proyectivos reales,*

para algún $n \in \mathbb{N}$*. Los primeros dos casos corresponden a las superficies orientables y el segundo a las no orientables.*

Además, en los últimos dos casos dicha suma puede obtenerse de un cociente del disco $\bar{D}$ *dado por la composición de arcos* $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\cdots\alpha_n\beta_n\alpha_n^{-1}\beta_n^{-1}$ *en el segundo caso y por el símbolo* $\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\cdots\alpha_n\alpha_n$ *en el tercero, representados en la figura 2 respectivamente. A n se le conoce como el* género *de la superficie, y se define como* 0 *el género de la esfera.*

Finalmente, dos superficies de género distinto no son homeomorfas.

Referimos al lector interesado en la prueba y discusión de este resultado en su versión poligonal a [**4**, capítulo 17, secciones *a* y *b*]. A una representación tal la llamaremos una *representación normal* de la superficie en cuestión.

De este modo y en vista del teorema 3.4, para calcular la teoría-K de haces vectoriales sobre una superficie compacta y conexa X basta estudiar la teoría-K de la C^*-álgebra $C(X)$, que por el teorema anterior es isomorfa a la C^*-subálgebra de $C(\bar{D})$ consistente de las funciones que identifican los puntos del círculo según las indicaciones de una representación normal de X. Primeramente asumiremos que X es orientable y más adelante indicaremos cual es la diferencia con el otro caso en la discusión que sigue. Es decir que, salvo un *-isomorfismo,

$$C(X) = \{f \in C(\bar{D}) : f \circ \alpha_j = f \circ \alpha_j^{-1}, f \circ \beta_j = f \circ \beta_j^{-1}, j \in \{1, ..., n\}\},$$

donde $\alpha_j, \alpha_j^{-1}, \beta_j, \beta_j^{-1} : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ son parametrizaciones continuas e inyectivas de los arcos en la representación normal de X dada por la figura 2. Para efectos prácticos podemos asumir que para cada $t \in [0,1]$ y $j \in \{1, ..., n\}$

$$\alpha_j(t) = e^{i\pi(t+4j-4)/2n}, \quad \alpha_j^{-1}(t) = e^{i\pi(4j-1-t)/2n}, \quad \beta_j(t) = e^{i\pi(t+4j-3)/2n} \quad \text{y} \quad \beta_j^{-1}(t) = e^{i\pi(4j-t)/2n}.$$

Buscando una sucesión exacta, retomemos el *-homomorfismo φ del ejemplo 3.40. Es claro que $C_0(D) \subseteq C(X)$, de modo que de $\varphi \restriction C(X)$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C_0(D) \longrightarrow C(X) \longrightarrow \varphi(C(X)) \longrightarrow 0,$$

que a su vez nos da la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} K_0(C_0(D)) \arrow[r] & K_0(C(X)) \arrow[r] & K_0(\varphi(C(X))) \arrow[d] \\ K_1(\varphi(C(X))) \arrow[u] & K_1(C(X)) \arrow[l] & K_1(C_0(D)). \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Afirmamos que

$$\varphi(C(X)) = \{g \in C(\mathbb{S}^1) : g \circ \alpha_j = g \circ \alpha_j^{-1}, g \circ \beta_j = g \circ \beta_j^{-1}, j \in \{1, ..., n\}\}. \tag{0.1}$$

La contención de izquierda a derecha es obvia. Para la restante sólo hay que observar que, dada $g \in C(\mathbb{S}^1)$ tal que $g \circ \alpha_j = g \circ \alpha_j^{-1}$ y $g \circ \beta_j = g \circ \beta_j^{-1}$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$, la función $\hat{g}$ dada por $\hat{g}(rz) := rg(z)$ para $r \in [0,1]$ y $z \in \mathbb{S}^1$ es una preimagen de g bajo φ que además extiende a g y por tanto respeta la manera de identificar que dicta la representación normal de X. Esto concluye nuestra afirmación.

Afirmamos ahora que $\varphi(C(X)) \simeq C(\bigvee_{j=1}^{2n} \mathbb{S}^1)$, donde $\vee$ representa, como es usual, la unión de espacios topológicos punteados identificando sus puntos bases (en este caso consideramos al 1 como punto base de $\mathbb{S}^1$), es decir,

$$\bigvee_{j=1}^{2n} \mathbb{S}^1 = \oplus_{j=1}^{2n} \mathbb{S}^1 \times \{j\}/\sim,$$

donde $(1, j) \sim (1, k)$ para cada $j, k \in \{1, ..., 2n\}$.

Ello es fácil de ver intuitivamente: siguiendo las reglas de identificación de la representación normal de X no es difícil percatarse de que todos los puntos que dividen a $\mathbb{S}^1$ son a la postre identificados a uno sólo en X, digamos p. Por tanto, haciendo dicha identificación en la frontera de nuestra representación normal obtenemos $4n$ copias de $\mathbb{S}^1$ pegadas en un único punto y parametrizadas por nuestras $\alpha_j, \beta_j, \alpha_j^{-1}$, β_j^{-1}. Por otro lado, el valor de cada función continua en las $4n$ copias de $\mathbb{S}^1$ está únicamente determinado por su valor en $2n$ de esas copias, ya que en los $\mathbb{S}^1$ parametrizados por α_j^{-1} estará dada por la fórmula $f \circ \alpha_j^{-1} = f \circ \alpha_j$, y similarmente para los β_j.

De manera más concisa, $\Phi : C(\bigvee_{i=1}^{2n} \mathbb{S}^1) \to \varphi(C(X))$ con

$$\Phi f(\alpha_j(t)) = \Phi f(\alpha_j^{-1}(t)) = f((e^{2i\pi t}, j)),$$
$$\Phi f(\beta_j(t)) = \Phi f(\beta_j^{-1}(t)) = f((e^{2i\pi t}, j+n))$$

para cada $t \in [0, 1]$ y $j \in \{1, ..., n\}$ es un *-isomorfismo, que induce por ende isomorfismos entre $K_i(C(\bigvee_{j=1}^{2n} \mathbb{S}^1))$ y $K_i((\varphi(C(X)))$, $i \in \{0, 1\}$.

Por otra parte, $\bigvee_{j=1}^{2n} \mathbb{S}^1$ es isomorfo a la compactación por un punto de la suma topológica $\oplus_{j=1}^{2n}(0, 1)$, es decir, la unión disjunta de espacios topológicos en que cada uno de ellos es abierto. Si a esto aunamos el ejemplo 1.17, podemos se concluye que $C(\bigvee_{j=1}^{2n} \mathbb{S}^1) \simeq C_0(\oplus_{j=1}^{2n}(0, 1))^{\sim}$. Como además se tiene que $C_0(\oplus_{j=1}^{2n}(0, 1)) \simeq \oplus_{j=1}^{2n} C_0((0, 1))$, tenemos, por las proposiciones 3.8, 3.15 y 3.28, más los ejemplos 3.17 y 3.27 que

$$K_0(\varphi(C(X))) \simeq K_0((C(\bigvee_{j=1}^{2n} \mathbb{S}^1)) \simeq K_0(C_0(\oplus_{j=1}^{2n}(0, 1))^{\sim}) \simeq K_0(C_0(\oplus_{j=1}^{2n}(0, 1))) \oplus \mathbb{Z}$$

$$\simeq \oplus_{j=1}^{2n} K_0(C_0((0, 1))) \oplus \mathbb{Z} \simeq \oplus_{j=1}^{2n} K_0(S\mathbb{C}) \oplus \mathbb{Z} \simeq \oplus_{j=1}^{2n} K_1(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}.$$

También, de las proposiciones 3.25 y 3.32, junto con los ejemplos 3.6 y 3.17 obtenemos

$$K_1(\varphi(C(X))) \simeq K_1(C(\bigvee_{j=1}^{2n} \mathbb{S}^1)) \simeq K_1(C_0(\oplus_{j=1}^{2n}(0, 1))^{\sim}) = K_1(\oplus_{j=1}^{2n} C_0((0, 1)))$$

$$(\star) \qquad \simeq \oplus_{j=1}^{2n} K_1(C_0((0, 1))) \simeq \oplus_{j=1}^{2n} K_1(S\mathbb{C}) \simeq \oplus_{j=1}^{2n} K_0(\mathbb{C}) \simeq \oplus_{j=1}^{2n} \mathbb{Z}.$$

Lo anterior y el ejemplo 3.33 transforman nuestra sucesión exacta de seis términos en la sucesión

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & K_0(C(X)) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \oplus_{j=1}^{2n}\mathbb{Z} & \longleftarrow & K_1(C(X)) & \longleftarrow & 0. \end{array}$$

A continuación calcularemos el homomorfismo δ asociado a esta sucesión, subrayando que es φ quien hace las veces de π_J en este caso. Comencemos notando que los generadores de $K_0(\oplus_{j=1}^{2n}\mathbb{C}) \simeq \oplus_{j=1}^{2n}K_0(\mathbb{C}) \simeq \oplus_{i=1}^{2n}\mathbb{Z}$ son las proyecciones triviales en $\oplus_{j=1}^{2n}\mathbb{C}$, es decir las $2n$-adas e_j de (clases de homotopía de) matrices de 1×1, con un 1 en la coordenada j y ceros en el resto, para $j \leqslant 2n$. Es la cadena de isomorfismos inmediatamente anterior estas $2n$-adas son enviadas por el mapeo de Bott a los generadores de $\oplus_{j=1}^{2n}K_1(S\mathbb{C}) \simeq K_1(C(\bigvee_{j=1}^{2n}\mathbb{S}^1))$, dados entonces por las (clases de homotopía de) $2n$-adas F_j de matrices de 1×1 con coordenada j-ésima f_j y el elemento neutro de $K_1(S\mathbb{C})$ en el resto, donde f_j está dado por $z \mapsto z1 + 1 - 1$, es decir, $f_j = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ para cada $j \leqslant 2n$. O sea que F_j es $(z, j) \mapsto z$ en $\mathbb{S}^1 \times \{j\}$ y constante 1 en el resto de las copias de $\mathbb{S}^1$.

Así, para calcular δ basta conocer sus valores en $\Phi_*[F_j] = [\Phi F_j]$, cuyo comportamiento analizaremos más adelante. Para hacer más clara la exposición que sigue estableceremos un poco de notación, además de seguir la convenida en ejemplo 3.40. Abreviaremos ΦF_j como Φ_j, además de denotar por r al módulo complejo sobre el disco, es decir, $r(\lambda) = |\lambda|$ para cada $\lambda \in \overline{D}$. También, dados $f \in C(\mathbb{S}^1)$ y $n \in \mathbb{N}$, $r^n f$ denotará a su extensión continua al disco dada por $\rho\lambda \mapsto \rho^n f(\lambda)$ para cada $\rho \in [0, 1]$ y $\lambda \in \mathbb{S}^1$. En particular se tiene que $\varphi(r^n f) = f$ para cada $f \in C(\mathbb{S}^1)$.

Para $j \in \{1, ..., 2n\}$ definimos

$$v := \begin{pmatrix} r\Phi_j & -\sqrt{1-r^2} \\ \sqrt{1-r^2} & r\overline{\Phi_j} \end{pmatrix},$$

de modo tal que

$$\begin{aligned} v^*v &= \begin{pmatrix} r\overline{\Phi_j} & \sqrt{1-r^2} \\ -\sqrt{1-r^2} & r\Phi_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\Phi_j & -\sqrt{1-r^2} \\ \sqrt{1-r^2} & r\overline{\Phi_j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2\overline{\Phi_j}\Phi_j + 1 - r^2 & 0 \\ 0 & r^2\overline{\Phi_j}\Phi_j + 1 - r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pues Φ_j es una función unitaria, es decir, en todo punto tiene norma 1. Análogamente se obtiene que $vv^* = 1_2$, es decir que v es unitaria. Como además es claramente una preimagen de $\mathrm{diag}(\Phi_j, \overline{\Phi_j})$ bajo el homomorfismo inducido por φ en las matrices y

$$vp_1v^* = \begin{pmatrix} r^2 & r\Phi_j\sqrt{1-r^2} \\ r\overline{\Phi_j}\sqrt{1-r^2} & 1-r^2 \end{pmatrix},$$

se tiene de la definición 3.30 que

$$\delta([\Phi_j]) = \left[\begin{pmatrix} r^2 & r\Phi_j\sqrt{1-r^2} \\ r\overline{\Phi_j}\sqrt{1-r^2} & 1-r^2 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]. \tag{0.2}$$

Asumamos, sin perder generalidad, que $j \leqslant n$. Como vimos antes, F_j es una función unitaria de $\bigvee_{j=1}^{2n}\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{C}$ que en $\mathbb{S}^1 \times \{j\}$ es la identidad y en el resto la constante 1. Entonces, por definición de Φ_j, $\Phi_j(\alpha_j(t)) = \Phi_j(\alpha_j^{-1}(t)) = F_j((e^{2i\pi t}, j)) = e^{2i\pi t}$, para cada $t \in [0,1]$, mientras que en el resto de $\mathbb{S}^1$ Φ_j es constante 1. Es decir que al recorrer el arco α_j en la frontera de la representación normal de X, da una vuelta en dirección levógira a $\mathbb{S}$ y una en dirección dextrógira al recorrer el arco α_j^{-1}, mientras que en el resto de arcos permanece estacionaria. Podemos concluir, según un bonito resultado de la Topología Algebraica ([**8**, teorema 3.16]), que F_j es, como función continua de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$, homotópica a la función constante 1, que denotaremos simplemente por 1. Si γ_t es una homotopía de funciones continuas de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ con $\gamma_0 = F_j$ y $\gamma_1 = 1$, definimos para cada $t \in [0,1]$

$$\gamma^t := \begin{pmatrix} r^2 & r\gamma_t\sqrt{1-r^2} \\ r\overline{\gamma_t}\sqrt{1-r^2} & 1-r^2 \end{pmatrix}$$

Como $\gamma_t : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es unitaria para cada $t \in [0,1]$, un cálculo análogo al de $\gamma^0 = vp_2v^*$ sirve para ver que γ^t es una proyección para cada $t \in [0,1]$. Es decir que γ^t es una homotopía entre $\gamma^0 = vp_2v^*$ y

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} |z|^2 & |z|\sqrt{1-|z|^2} \\ |z|\sqrt{1-|z|^2} & 1-|z|^2 \end{pmatrix}.$$

Como los mismos argumentos de arriba muestran que

$$\delta([1]) = \left[\begin{pmatrix} |z|^2 & |z|\sqrt{1-|z|^2} \\ |z|\sqrt{1-|z|^2} & 1-|z|^2 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right],$$

concluimos que $\delta([\Phi_i]) = \delta([1])$. Pero [1] es el elemto neutro de $K_1(\varphi(C(X)))$ y δ es un homomorfismo, de donde obtenemos que δ es 0 en los generadores de su dominio y por tanto es el homomorfismo 0. Ahora podemos reescribir nuestra sucesión periódica $(*)$ con dos sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(C(X)) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_1(C(X)) \longrightarrow \oplus_{i=1}^{2n}\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

La primera de ellas se escinde (considérese el homomorfismo dado por enviar al generador de $\mathbb{Z}$ en la unidad de $K_0(C(X))$). Por lo tanto, se concluye que

$$K_0(C(X)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \text{y}$$
$$K_1(C(X)) \simeq \oplus_{i=1}^{2n}\mathbb{Z},$$

donde X es una superficie orientable de género n.

Pasamos ahora al caso en que X es una superficie compacta no orientable de género n, para lo cual definimos, para cada $j \in \{1, ..., n\}$ y $t \in [0, 1]$,

$$\alpha_{j1}(t) = e^{i\pi(t+2j-2)/n} \quad \text{y} \quad \alpha_{j2}(t) = e^{i\pi(t+2j-1)/n}$$

donde α_{j1} es por supuesto el primer arco indexado por α_j en la representación normal de X y α_{j2} el segundo, en dirección levógira.

Así, con argumentos del todo análogos a los que usamos en el caso anterior se puede concluir que

$$\varphi(C(X)) = \{f \in C(\mathbb{S}^1) : f \circ \alpha_{j1} = f \circ \alpha_{j2}, j \in \{1, ..., n\}\} \simeq C(\textstyle\bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1)$$

mediante el *-isomorfismo $\Psi : C(\bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1) \to \varphi(C(X))$ tal que

$$\Psi f(\alpha_{j1}(t)) = \Psi f(\alpha_{j2}(t)) = f((e^{2i\pi t}, j))$$

y por tanto $K_1(\varphi(C(X))) \simeq \oplus_{j=1}^n \mathbb{Z}$, repitiendo los cálculos de $(\star)$.

Repasando los argumentos que usamos antes podemos notar que, con estas salvedades, toda la discusión del caso orientable hasta antes del cálculo de δ funciona análogamente para superficies no orientables.

Nuevamente calcularemos δ en los generadores $\Psi_*[F_j] = [\Psi F_j]$ de $K_1(C(\bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1))$, donde F_j significa lo mismo que antes, la función identidad en $\mathbb{S}^1 \times \{j\}$ y constante 1 en el resto de $\bigvee_{k=1}^n \mathbb{S}^1$. Escribiendo $\Psi_j := \Psi F_j$, consideraremos esta vez la extensión $r^2\Psi_j$ de Ψ_j a todo $\overline{D}$, por razones que se verán más adelante. Así, cálculos similares a los del caso anterior nos permiten concluir que

$$\delta([\Psi_j]) = \left[\begin{pmatrix} r^4 & r^2\Psi_j\sqrt{1-r^4} \\ r^2\overline{\Psi_j}\sqrt{1-r^4} & 1-r^4 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

La diferencia fundamental con el caso orientable estriba en el índice de los generadores de $K_1(\bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1)$ cuando a través de Ψ los vemos como funciones continuas de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$:

De la definición de Ψ tenemos que $\Psi_j(\alpha_{j1}(t)) = \Psi_j(\alpha_{j2}(t)) = F_j(e^{2i\pi t}, j) = e^{2i\pi t}$ para cada $t \in [0, 1]$, mientras que en el resto de $\mathbb{S}^1$ Ψ_j es constante 1. Es decir que Ψ_j, al recorrer el arco α_{j1} en la frontera de la representación normal de X, da una vuelta en dirección levógira a $\mathbb{S}$ y otra *en la misma dirección* al recorrer el arco α_{j2}, mientras que en el resto de arcos permanece estacionaria. Esta vez obtenemos de la topología algebraica básica ([**8**, teorema 3.16]) que Ψ_j es, como función continua de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$, homotópica a u^2, es decir a $\lambda \mapsto \lambda^2$.

Si ahora γ_t es una homotopía de funciones continuas de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ tal que $\gamma_0 = \Psi_j$ y $\gamma_1 = u^2$, obtenemos que

$$\gamma^t = \begin{pmatrix} r^4 & r^2\gamma_t\sqrt{1-r^4} \\ r^2\overline{\gamma_t}\sqrt{1-r^4} & 1-r^4 \end{pmatrix}$$

es una homotopía entre

$$\begin{pmatrix} r^4 & r^2\Psi_j\sqrt{1-r^4} \\ r^2\overline{\Psi_j}\sqrt{1-r^4} & 1-r^4 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} r^4 & r^2u^2\sqrt{1-r^4} \\ r^2\overline{u}^2\sqrt{1-r^4} & 1-r^4 \end{pmatrix}.$$

Si ahora escribimos la última matriz como

$$\begin{pmatrix} |z|^4 & z^2\sqrt{1-|z|^4} \\ \overline{z}^2\sqrt{1-|z|^4} & 1-|z|^4 \end{pmatrix}$$

concluimos que

$$\delta(\Psi_*[F_j]) = \left[\begin{pmatrix} |z|^4 & z^2\sqrt{1-|z|^4} \\ \overline{z}^2\sqrt{1-|z|^4} & 1-|z|^4 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

para cada $j \in \{1, ..., n\}$, es decir que $\delta(K_1(C(\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1)))$ es el subgrupo de $K_0(C_0(D))$ generado por dicha diferencia. Así, tras un vistazo al ejemplo 3.40 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} K_1(C(\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1)) & \xrightarrow{\delta} & K_0(C_0(D)) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z} & \xrightarrow{d} & \mathbb{Z}, \end{array}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos y d está dado por

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mapsto 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

En particular, $\mathrm{im}(d) = 2\mathbb{Z}$, de modo que de nuestra sucesión de seis términos obtenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow K_0(C(X)) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow K_1(C(X)) \longrightarrow \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

que se escinden, pues siempre existe un homomorfismo $\mathbb{Z} \to K_0(C(X))$ (ó $2\mathbb{Z} \to \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}$) que manda al generador del grupo cíclico infinito en una preimagen suya bajo $K_0(C(X)) \to \mathbb{Z}$ (ó $\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$). De la segunda sucesión obtenemos que $\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \simeq K_1(C(X)) \oplus \mathbb{Z}$. Por resultados estándar de la Teoría de Grupos (ver [**9**, teoremas 10.20 y 11.44]) sabemos que ello, junto con la primer sucesión, implica

$$K_0(C(X)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{y}$$
$$K_1(C(X)) \simeq \oplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}.$$

En virtud del teorema 4.2, para conocer la teoría-K de toda superficie compacta y conexa sólo nos resta calcular la de $\mathbb{S}^2$. Ello es sencillo, pues $\mathbb{S}^2$ es homeomorfo a la compactación por un punto de D, por lo cual $C(\mathbb{S}^2) \simeq C_0(D)^{\sim}$ como se vio en el ejemplo 1.17, de modo que de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C_0(D) \longrightarrow C(\mathbb{S}^2) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

y de los ejemplos 3.6 y 3.40 obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r] & K_0(C(\mathbb{S}^2)) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
0 \arrow[u] & K_1(C(\mathbb{S}^2)) \arrow[l] & 0. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Como ya se argumentó antes, la sucesión exacta del primer renglón se escinde, de modo que obtenemos que

$$K_0(C(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad K_1(C(\mathbb{S}^2)) \simeq 0.$$

Por lo anterior, si convenimos que $\oplus_{i=1}^{0}\mathbb{Z}$ es el grupo trivial, podemos resumir los resultados de este capítulo en el siguiente

Teorema 4.3. *Sea X una superficie compacta y conexa. Las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

1. *Si X es orientable y de género $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ entonces*
$$K_0(C(X)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad K_1(C(X)) \simeq \oplus_{i=1}^{2n}\mathbb{Z}.$$
2. *Si X es no orientable y de género $n \in \mathbb{N}$ entonces*
$$K_0(C(X)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{y} \quad K_1(C(X)) \simeq \oplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}.$$

Así, dada una superficie, de su grupo K_0 podemos averiguar si es o no orientable, mientras que de su grupo K_1 conoceremos su género. Esto, combinado con el teorema 4.2, se traduce en:

Corolario 4.4. *Si X e Y son superficies compactas y conexas tales que $K_i(C(X)) \simeq K_i(C(Y))$ para $i \in \{0, 1\}$ entonces son homeomorfas.*

Así, los K-grupos son invariantes que determinan por completo una superficie compacta hasta isomorfismo. De ahí que el teorema anterior pueda verse como una clasificación completa de las superficies compactas desde el punto de vista de la teoría-K, alternativa a la tradicional dada por el grupo fundamental (véase [**1**, sección 7.5]).

Bibliografía

[1] M. A. Armstrong, *Basic Topology*, McGraw-Hill Book Company, Berkshire, England, 1979.

[2] B. Blackadar, *K-theory for Operator Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, USA, 1998.

[3] J. B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[4] W. Fulton, *Algebraic Topology. A first course*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] A. Hatcher, *Vector bundles and K-theory*, www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf.

[6] M. Karoubi, *K-Theory. An introduction*, Springer-Verlag, Berlín, 1978.

[7] G. J. Murphy, C^**-algebras and Operator Theory*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1990

[8] J. J. Rotman, *An introduction to Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[9] J. J. Rotman, *An introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[10] N. E. Wegge-Olsen, *K-Theory and* C^**-algebras*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[11] Ch. A. Weibel, *The K-Book. An Introduction to Algebraic K-theory*, American Mathematical Society, USA, 2013.