



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA DE LA TIERRA
INSTITUTO DE GEOFÍSICA

**INVERSIÓN CONJUNTA DE DATOS ELÉCTRICOS Y
MAGNETOTELÚRICOS EN LA DETERMINACIÓN DE
ESTRUCTURAS EN EL SUBSUELO**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIA DE LA TIERRA

P R E S E N T A:
JEFFERSON SÁNCHEZ DUCUARA

Directora de Tesis:
Dra. ELSA LETICIA FLORES MÁRQUEZ
Instituto de Geofísica, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. AGOSTO, 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

"Declaro conocer el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, plasmado en la Legislación Universitaria. Con base en las definiciones de integridad y honestidad ahí especificadas, aseguro mediante mi firma al calce que el presente trabajo es original y enteramente de mi autoría. Todas las citas de, o referencias a, la obra de otros autores aparecen debida y adecuadamente señaladas, así como acreditadas mediante los recursos editoriales convencionales".

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Jefferson Sánchez Ducuara', written in a cursive style with several overlapping strokes.

Jefferson Sánchez Ducuara

Datos del alumno:

Jefferson Sánchez Ducuara.

51749228-4

Posgrado en Ciencias de la Tierra.

Instituto de Geofísica, UNAM.

Datos del tutor:

Dra. Elsa Leticia Flores Márquez.

Instituto de Geofísica, UNAM.

Datos del sinodal 1:

Dr. Andrés Tejero Andrade.

Facultad de Ingeniería, UNAM.

Datos del sinodal 2:

Dra. Claudia Arango Galván.

Instituto de Geofísica, UNAM.

Datos del sinodal 3:

Dr. Allen Husker.

Instituto de Geofísica, UNAM.

Datos del sinodal 4:

Dr. Ambrosio Aquino López.

Instituto Mexicano del Petróleo, IMP.

Datos del escrito

Inversión conjunta de datos eléctricos y magnetotélúricos en la determinación de estructuras en el subsuelo, 184 pp, 2018.

Dedicatoria

*A mis padres, a quienes sin dudarlo les debo todo.
... y por supuesto a la niña más linda del mundo.*

*Y en eso reside la voluntad, que no muere. ¿Quién conoce los misterios de la
voluntad, y su fuerza?*

Glanville

Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a la Dra. Elsa Leticia Flores Márquez, a quien debo, no sólo la orientación, paciencia y confianza durante este proceso de formación académica, sino la oportunidad de crecer como ser humano.

A los miembros de mi comité evaluador Dr. Andrés Tejero Andrade, Dr. Allen Husker y Dr. Ambrosio Aquino López quienes con sus comentarios y sugerencias contribuyeron al enriquecimiento de este trabajo.

A la Dra. Claudia Arango Galván mis más sinceros agradecimientos, quien fungiendo además como parte de mi comité tutorar, contribuyó enormemente en el esclarecimiento y desarrollo del trabajo.

Al Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por otorgarme una beca, con la cual me fue posible llevar a buen término mi formación académica.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM 103917 "ESTUDIO INTEGRAL PARA LA CARACTERIZACIÓN DE CONTAMINACIÓN EN ACUÍFEROS". Agradezco a la DGAPA-UNAM el apoyo recibido.

Finalmente, al Posgrado en Ciencias de la Tierra y a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme permitido conocer y hacer parte de una cultura tan interesante como lo es la cultura mexicana.

A todos ustedes ¡Gracias!

Índice general

Índice de figuras	VI
Índice de tablas	IX
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Descripción del contenido de la tesis	4
2. Contexto Teórico	6
2.1. Introducción	6
2.2. Ecuaciones de Maxwell	7
2.2.1. Teorema de Helmholtz	7
2.2.2. Ecuaciones de Maxwell	8
2.2.3. Ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia .	11
3. Fundamentos del método magnetotelúrico	14
3.1. Características	14
3.1.1. Inducción electromagnética	15
3.1.2. Invariancia del tiempo como una consecuencia de la asunción de ondas planas	17

ÍNDICE GENERAL

3.2. Función de transferencia	18
3.3. Medios unidimensionales	20
3.3.1. Hipótesis	23
3.3.2. Medio estratificado	27
3.4. Tensor de Impedancia	30
3.5. Medios bidimensionales	36
4. Prospección Geoeléctrica	39
4.1. Prospección Geoeléctrica	39
4.1.1. Consideraciones del Método	40
4.1.2. Consideraciones del Modelo	41
4.2. Solución de la ecuación para el potencial eléctrico	42
4.2.1. Potencial en la superficie debido a una fuente puntual de corriente	45
4.2.2. Condiciones de frontera	50
4.2.3. Sistema de ecuaciones	55
4.2.4. Relación de recurrencia	58
4.2.5. Sistema de dos capas	61
4.2.6. Resistividad aparente	63
4.3. Arreglo Schlumberger	66
4.4. Solución del problema directo	67
4.4.1. Modelo de dos capas	67
4.4.2. Comparación de resultados	72
4.4.3. Modelo de tres capas	74
5. Inversión de datos geofísicos	78
5.1. Introducción	78
5.2. Estimación de modelos lineales	80
5.2.1. Parámetros del modelo y error en el sistema	81
5.3. Métodos basados en longitud	84
5.3.1. Medidas de Longitud	84
5.3.2. Mínimos Cuadrados	86
5.4. Linealización de problemas no lineales	87
5.5. Descomposición en valores singulares	90

ÍNDICE GENERAL

6. Descripción del programa y validación con datos sintéticos y reales	94
6.1. Validación con datos sintéticos	96
6.1.1. Modelo A	96
6.2. Aplicación a datos reales	104
6.2.1. Localización del área de estudio	105
6.2.2. Adquisición de datos	105
6.2.3. Modelo inicial	108
Conclusiones	124
Bibliografía	126
A. Integración Numérica	130
A.1. Método QWE	130
B. Códigos	133
B.1. Modelo directo método magnetotelúrico 1D	133
B.2. Modelo directo método eléctrico 1D	139
B.2.1. Pesos cuadratura de Gauss	139
B.2.2. Pesos función de Bessel	141
B.2.3. Cálculo del Kernel	146
B.2.4. Método de cuadratura con extrapolación	150
B.2.5. Arreglo tipo Schlumberger	156
B.3. Modelo inverso	161
B.3.1. Jacobiano	169

Índice de figuras

3.1. Principio de inducción electromagnética en la Tierra.	21
3.2. Representación de las condiciones de contorno en la superficie de discontinuidad.	23
3.3. Representación interfaz N capas.	27
3.4. Modelo de polarización elíptica de una onda electromagnética cuyas componente de campo son $[2 + i, 1 - i]$ (Kaufman, 1992).	32
4.1. Representación de un SEV. El punto de observación se encuentra en el punto medio entre los electrodos de potencia M y N . Tomado de http://www.geoseismic.cl	40
4.2. Funciones de Bessel de orden cero (J_0) y orden uno (J_1).	45
4.3. Potencial en la superficie generado por una fuente puntual de corriente	46
4.4. Relaciones de recurrencia de Flathe y de Pekeris	60
4.5. Representación de un SEV. El punto de observación se encuentra en el punto medio entre V_1 y V_2	64
4.6. Magnitudes (suprayaciendo a la superficie) y parámetros (infrayaciendo a la superficie) en un modelo de tres capas.	68
4.7. Resistividad Aparente para un modelo de dos capas.	73
4.8. Resistividad Aparente para un modelo de tres capas.	76
5.1. Representación del problema directo.	79

ÍNDICE DE FIGURAS

5.2. Representación del problema inverso.	80
5.3. Problema inverso visto como una combinación de la estimación del problema más una evaluación del problema.	81
6.1. Diagrama de flujo del método de inversión seguido en este trabajo.	95
6.2. Parámetros y representación gráfica del modelo A.	97
6.3. Curva de resistividad aparente (método eléctrico) para el modelo A en función de la apertura de los electrodos $\frac{AB}{2}$	98
6.4. Ajuste y modelo de resistividad del modelo A mediante los parámetros calculados a través de la inversión (Tabla (6.3)).	99
6.5. A la izquierda superior: curva de resistividad aparente (método magnetotelúrico) para el modelo A en función del periodo. A la izquierda inferior: curva de la fase para el modelo A en función del periodo. Derecha: modelo de resistividad del modelo A mediante los parámetros calculados a través de la inversión.	100
6.6. Ajuste y modelo de resistividad del modelo A mediante los parámetros calculados a través de la inversión (Tabla (6.5)).	102
6.7. Ajuste y modelo de resistividad del modelo A mediante los parámetros calculados a través de la inversión conjunta (Tablas (6.2) y (6.4)).	103
6.8. Equipo para adquisición de datos eléctricos SYSCAL R2. Tomado de (Ramos, 2011).	106
6.9. Equipo para adquisición de datos magnetotelúricos ADU-07e de Metronix. Tomado de https://www.geo-metronix.de	106
6.10. Ubicación de sondeos eléctricos y magnetotelúricos.	107
6.11. Modelos estimados por inversión de datos eléctricos. Ajuste y modelo de resistividad.	110
6.12. Modelos estimados por inversión de datos magnetotelúricos. Ajuste y modelo de resistividad.	111
6.13. Modelo estimado por inversión conjunta. Ajustes y modelo de resistividad.	113

ÍNDICE DE FIGURAS

6.14. Modelos estimados por inversión de datos eléctricos. Ajuste y modelo de resistividad.	114
6.15. Modelos estimados por inversión de datos magnetotelúricos. Ajuste y modelo de resistividad.	116
6.16. Modelos estimados por inversión conjunta. Ajuste y modelo de resistividad.	117
6.17. Modelos estimados por inversión de datos eléctricos. Ajuste y modelo de resistividad.	119
6.18. Modelos estimados por inversión de datos magnetotelúricos. Ajuste y modelo de resistividad.	120
6.19. Modelo estimado por inversión conjunta. Ajustes y modelo de resistividad.	122
A.1. Ilustración del algoritmo ϵ . Las líneas negras y rojas sin punteado representan la diferencia en la ecuación (A.1.5), mientras que las líneas negras y rojas punteadas indican el cuarto término en la relación de recurrencia de la ecuación (A.1.6). Las circunferencias azules indican el n -ésimo orden en la transformación Shanks para ordenes pares e impares de n	132

Índice de tablas

4.1. Parámetros del modelo de dos capas.	68
4.2. Datos ($AB/2$) utilizados y resultados (ρ_a) obtenidos para el modelo de dos capas desarrollado en Matlab.	72
4.3. Comparación del ajuste de los datos de resistividad aparente entre el programa IPI2win con el programa realizado en Matlab para un modelo de dos capas.	74
4.4. Parámetros para un modelo de tres capas.	75
4.5. Datos ($AB/2$) utilizados y resultados (ρ_a) obtenidos para el modelo de tres capas desarrollado en Matlab.	75
4.6. Comparación del ajuste de los datos de resistividad aparente entre el programa IPI2win con el programa realizado en Matlab para un modelo de tres capas.	76
6.1. Parámetros iniciales de cada uno de los modelos de inversión.	97
6.2. Datos de separación de los electrodos de corriente $\frac{AB}{2}$ y resultados de resistividad aparente (ρ_a) para el modelo A	98
6.3. Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos eléctricos para el modelo A. En este experimento los datos no contienen ruido.	99
6.4. Datos de frecuencia, resultados de resistividad aparente (ρ_a) y fase para el modelo A.	101
6.5. Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos magnetoteléuricos para el modelo A. En este experimento los datos no contienen ruido.	102

ÍNDICE DE TABLAS

6.6. Parámetros calculados del modelo A a través del proceso de inversión conjunta.	103
6.7. Datos utilizados en la validación del algoritmo	108
6.8. Parámetros iniciales para los datos mostrados en la tabla (6.7) respectivamente.	108
6.9. Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos eléctricos para el modelo 1.	110
6.10. Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos magnetotelúricos para el modelo 1.	111
6.11. Ajuste y modelo de resistividad del modelo 1 mediante los parámetros calculados a través de la inversión conjunta.	113
6.12. Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos eléctricos para el modelo 2.	115
6.13. Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos magnetotelúricos para el modelo 2.	116
6.14. Ajuste y modelo de resistividad del modelo 2 mediante los parámetros calculados a través de la inversión conjunta.	118
6.15. Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos eléctricos para el modelo 3.	119
6.16. Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos magnetotelúricos para el modelo 3.	121
6.17. Ajuste y modelo de resistividad del modelo 1 mediante los parámetros calculados a través de la inversión conjunta.	122

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Los métodos eléctricos son considerados como una de las primeras técnicas de exploración en ser ampliamente usada en la búsqueda tanto de hidrocarburos como de sus derivados al igual que en la exploración de depósitos minerales a principios del siglo XX (Zhdanov, 2009). El desarrollo de una práctica que permitiera hacer uso de los campos eléctricos como una herramienta en la exploración del subsuelo le es atribuida a los hermanos Schlumberger: Conrad y Marcel (Conrad Schlumberger mostró los conceptos fundamentales de la geoelectrica a través del uso de corriente directa (DC)). Sin embargo, mucho ha cambiado desde entonces y los métodos de prospección eléctrica se han transformado considerablemente, no sólo en la metodología o en los equipos de registro sino a nivel conceptual (Chave et al., 2012). Muchos de los esfuerzos posteriores realizados tras los trabajos de Schlumberger fueron dirigidos hacia la formulación de los problemas en términos de los campos electromagnéticos sobre la base de una representación de flujo y voltaje permitiéndose de esta forma el uso de fuentes naturales en la exploración (a diferencia de las fuentes controladas de las que hacía uso Schlumberger en sus investigaciones).

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Si bien es cierto las primeras representaciones siempre se construyen a partir de modelos idealizados isotrópicos en una dimensión, en general se acepta que la geología a menudo es más compleja en yacimientos de cualquier índole y se requieren modeladores anisotrópicos en 2 o 3 dimensiones. Sin embargo, los modelos 1D siguen siendo muy importantes. Además de que su cálculo es muy rápido, nos permiten estudiar efectos únicos y aislados en el campo electromagnético, que es una base fundamental para comprender el comportamiento del campo electromagnético y una necesidad para comprender los fenómenos en dimensiones superiores. Los modelos 1D también se utilizan a menudo en rutinas de inversión de dimensiones superiores para generar un modelo inicial o calcular los campos primarios para modelado 2D / 3D y rutinas de inversión con mayor grado de complejidad (Werthmüller, 2017).

Las soluciones para los campos electromagnéticos en un modelo de capas se han resuelto y publicado ampliamente utilizando diferentes enfoques. La importancia y el uso generalizado de los modelos 1D se muestran en el flujo continuo de publicaciones en esta área, incluso en años recientes. Por citar algunos ejemplos, (Chave, 2009) presenta una solución en términos de modos transversales eléctricos (TE) y tangencial-magnéticos (TM) independientes y únicos para el caso isotrópico eléctrico utilizando la aproximación difusiva (sin corrientes de desplazamiento, válida para frecuencias bajas como en CSEM). (Key, 2009) demuestra por qué los modelos 1D aún importan al probar, por ejemplo, el beneficio de las frecuencias adicionales en una rutina de inversión; sigue y amplía el enfoque del potencial vectorial magnético mediante (Wait, 1982) para el modelado directo, utilizando el enfoque isotrópico difusivo de baja frecuencia. (Hunziker et al., 2015) obtienen el campo electromagnético en una tierra estratificada con isotropía transversal vertical (VTI) resolviendo dos ecuaciones escalares equivalentes con un coeficiente de reflexión global escalar. Las tres citas sobre soluciones 1D cuentan con una extensa lista de referencia sobre la historial del modelado directo 1D, sin embargo, el último presentando una reseña interesante referente a la historia de las derivaciones

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

electromagnético 1D que abarcan casi 200 años.

Una parte crucial y muy interesante del modelado electromagnético es que el paso de la derivación teórica a la implementación numérica implica la solución de una integral infinita numéricamente costosa que contiene funciones de Bessel oscilantes y en decadencia lenta (la transformada de Hankel también se conoce como la transformada de Fourier-Bessel)(Chave, 2009). La forma de dar solución a este problema en este trabajo se hace haciendo uso del algoritmo ϵ .

Por otra parte, La teoría de inversión de datos geofísicos es un conjunto de técnicas matemáticas que permiten extraer información de las propiedades físicas de las rocas a partir de datos obtenidos mediante observación hechas en superficie dando lugar a la construcción de modelos estructurales que den cuenta de las anomalías en las propiedades física presentes en los datos (Vozoff, 1975), sin embargo, la mayoría de los problemas abordados en geofísica resultan ser problemas mal planteados, es decir, a cambios pequeños en las condiciones iniciales (datos) se pueden presentar grandes cambios en el modelos solución. Este problema deriva fundamentalmente de la minimización en los parámetros que condicionan el sistema, es por ello que resulta de gran utilidad encontrar métodos que permitan garantizar una estabilidad en la solución (Menke, 2012). Adicional a esto, es común integrar diversas mediciones geofísicas para que la información total, por un lado, contribuya en la eliminación de indeterminaciones en la información recolectada de forma separada y si fuese posible complemente la información individual de cada base de datos, esto, sin importar si la propiedad física que se está evaluando sea la misma o no (Meju, 1994).

Teniendo en cuenta esto, el propósito principal de esta tesis es el desarrollo de un algoritmo que permitan la inversión conjunta unidimensional de sondeos eléctricos de corriente directa y registros magnetotelúricos, con el fin de incorporar dos tipos de información en la exploración de estructuras someras y facilitar su interpretación. Para este propósito se implementará en

lenguaje MatLab® un esquema de inversión conjunta en estructuras 1D. Con el fin de alcanzar este objetivo general, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollar algoritmos computacionales que resuelvan el problema directo de los métodos eléctricos y magnetotelúricos.
- Desarrollar un algoritmo que resuelva el problema inverso por separado para cada conjunto de datos en el lenguaje predeterminado.
- Desarrollar un método de inversión conjunta.
- Comprobación de los métodos desarrollados con datos sintéticos sin ruido.
- Aplicación de los métodos a datos reales que han sido utilizados previamente.

1.2. Descripción del contenido de la tesis

El contenido de cada capítulo de esta tesis se describe de forma sucinta a continuación:

Capítulo 1: Contiene los antecedentes referentes a teoría electromagnética así como el objetivo de la tesis.

Capítulo 2: Describe los conceptos básicos en teoría electromagnética y el uso del teorema de Helmholtz para abordar las ecuaciones de Maxwell a partir del concepto de campo.

Capítulo 3: Se aborda el método magnetotelúrico a fin de poder construir un modelo directo en un espacio 1D con el fin de resolver las ecuaciones de Maxwell en presencia de un medio conductor con las condiciones de frontera adecuadas.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Capítulo 4: Se aborda el método eléctrico a fin de poder construir un modelo directo en un espacio 1D con el fin de resolver las ecuaciones de Maxwell en presencia de un medio conductor con las condiciones de frontera adecuadas para un arreglo tipo Schlumberger.

Capítulo 5: Contiene los conceptos básicos en teoría de inversión haciendo uso del método de mínimos cuadrados.

Capítulo 6: Presenta tres aplicaciones con datos provenientes del municipio de Cerritos - San Luis Potosí; los resultados se comparan con las mediciones de estudios previos de geofísica.

Capítulo 7: Conclusiones.

Capítulo 2

Contexto Teórico

2.1. Introducción

Los métodos electromagnéticos que se utilizan en la prospección geofísica son una herramienta poderosa a la hora de estudiar de forma integrada propiedades físicas, tanto eléctricas como magnéticas, susceptibles de medición en el subsuelo. La teoría fundamental del comportamiento de los campos electromagnéticos se encuentra firmemente establecida desde mediados del siglo XIX. Gracias a esta teoría, se sabe, por ejemplo, que el flujo de corriente a través de un medio conductor se encuentra acompañado de un campo magnético o de forma similar se tiene que ante variaciones con respecto al tiempo de un campo magnético se genera un campo eléctrico. En ambos casos, los campos tanto magnéticos como eléctricos asociados se encuentran bien determinados.

El sistema fundamental de ecuaciones de campo electromagnético, las ecuaciones de Maxwell, representan un sistema de ecuaciones diferenciales con respecto a los vectores de campo eléctrico y magnético. Sin embargo, su deducción se realiza utilizando el formalismo vectorial, el cual construye primero cada componente del campo, bien sea eléctrico o magnético, a través de una descripción particular del fenómeno, es decir, una descripción del

campo eléctrico se hace haciendo una analogía de la fuerza eléctrica teniendo en cuenta la ley de Coulomb siguiendo el modelo de la carga de prueba. A su vez, el campo magnético es trabajado desde la idea de fuerza magnética al introducir el concepto de corriente (cargas en movimiento). Este enfoque resulta ser el más adecuado desde el punto de vista fenomenológico ya que cuenta con una explicación de cada contenido por separado. Sin embargo, haciendo uso de la teoría algebraica de formas diferenciales, las ecuaciones de Maxwell, toman la forma de un sistema compacto y simétrico de forma diferencial, de esta manera, se tiene no sólo una forma elegante sino poderosa de estudiar los campos electromagnéticos de forma general (Zhdanov, 2009). De forma adicional, la representación de las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial permite destacar la importancia de ciertas propiedades del campo electromagnético como lo son el flujo magnético, flujo eléctrico o el trabajo. Desde el punto de vista del estudio en geofísica esta representación parece ser más adecuada, teniendo en cuenta, que los experimentos que se realizan implican mediciones tanto del flujo eléctrico y magnético al igual que del trabajo (voltaje por la carga) de campos eléctricos y magnéticos.

2.2. Ecuaciones de Maxwell

2.2.1. Teorema de Helmholtz

Uno de los fundamentos matemáticos más importantes a la hora de abordar los fenómenos que requieren el estudio de campo es el teorema de Helmholtz ya que cuenta con una descripción completa de un campo vectorial en términos de la divergencia y el rotacional propios del campo (Kaufman, 1992).

Teniendo en cuenta que las leyes que rigen las relaciones eléctricas y magnéticas se encuentran definidas en función de sus campos vectoriales, los teoremas en cuestión cobran una gran importancia.

1. Teorema 1. Un campo vectorial está definido si y sólo si se cuenta con la divergencia y el rotacional.
2. Teorema 2. Sea $\vec{V}(r)$ un campo vectorial cuya divergencia y rotacional son conocidas:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{V}(r) &= \rho(r) \\ \nabla \times \vec{V}(r) &= \vec{J}(r)\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Y además cumple:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{J}(r) &= 0\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Entonces, el campo $\vec{V}(r)$ se puede escribir como la suma de dos términos, a saber: un término conservativo y un término solenoidal.

$$\vec{V}(r) = -\nabla \cdot \phi + \nabla \times \vec{A}\tag{2.2.3}$$

Donde ϕ hace referencia al potencial escalar de $\vec{V}(r)$ y \vec{A} hace referencia al potencial vectorial de $\vec{V}(r)$.

2.2.2. Ecuaciones de Maxwell

Maxwell, después de investigar la fenomenología descrita en los trabajos de Faraday formuló de forma matemática la teoría electromagnética. Maxwell no hizo uso de la relatividad, la cual aparecería tiempo más adelante y la constitución eléctrica de la materia era un misterio al igual que lo era la

CAPÍTULO 2. CONTEXTO TEÓRICO

relación entre la luz y el electromagnetismo (Purcell, 1969), sin embargo, el término, $\frac{\partial V}{\partial t}$ aparece de forma natural en su formulación. A este término le dio el nombre de “*corriente de desplazamiento*” el cual de manera intuitiva describía un movimiento de las cargas.

Las ecuaciones formuladas por Maxwell generan un sistema de ecuaciones vectoriales las cuales describen los campos electromagnéticos en términos de diferenciales parciales. Estas ecuaciones relacionan las cuatro componentes del campo electromagnético (\vec{H} , \vec{E} , \vec{B} y \vec{D}). Cada una de ellas constituye un campo en sí mismo, sin embargo, se pueden simplificar haciendo uso de las relaciones constitutivas. Aquí \vec{H} y \vec{B} son los vectores de campo magnético y de inducción magnética; por otra parte, \vec{E} y \vec{D} hacen referencia a los vectores de campo eléctrico y de desplazamiento eléctrico.

En el caso más general se tiene un sistema de ecuaciones acopladas que impide una solución trivial, es por esta razón, que la solución debe ser pensada en términos de dar solución teniendo en cuenta casos particulares.

Las ecuaciones de Maxwell son entonces:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{c} \quad (2.2.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \vec{q} \quad (2.2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \quad (2.2.8)$$

CAPÍTULO 2. CONTEXTO TEÓRICO

De forma adicional tenemos que \vec{J} es la densidad de corriente de conducción y \vec{c} es la densidad de corriente total.

La ecuación (2.2.8) es lo que se conoce como una ecuación de continuidad y en ella se describe el principio de conservación de la carga eléctrica, de su análisis, se tiene que la divergencia de la densidad de corriente \vec{J} es el resultado de la variación de la carga con respecto al tiempo. Por consiguiente, cuando la densidad de carga cambia se genera un movimiento que da lugar a una corriente eléctrica.

El teorema de Helmholtz permite abordar las ecuaciones de Maxwell a partir del concepto de campo. En un principio, el teorema especifica que todo campo se encuentra descrito unívocamente a partir del conocimiento de la divergencia y el rotacional del mismo, de ahí que, las ecuaciones (2.2.5) y (2.2.7) corresponden al rotacional y la divergencia del campo eléctrico, así como las ecuaciones (2.2.4) y (2.2.6) corresponden al rotacional y la divergencia en el caso del campo magnético. Como lo indica el teorema 1, si se cuenta con esta información para alguna región del espacio entonces se tendrá la certeza de que los campos se encuentran definidos en aquella región del espacio.

Este hecho encuentra una mejor explicación a través de las relaciones constitutivas entre los campos. Dado que \vec{E} es el campo eléctrico, este campo se relaciona con el campo de desplazamiento de Maxwell \vec{D} por medio de la constante dieléctrica ϵ ; la cual en realidad es más un tensor el cual sólo se comporta como un escalar cuando el medio en el cual se encuentran los campos resulta ser homogéneo e isotrópico. De igual forma el campo magnético \vec{H} se relaciona con el campo de inducción \vec{B} a través de la permeabilidad magnética μ , la cual también es un tensor para el caso más general.

De esta manera se cuenta con las siguientes ecuaciones:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \tag{2.2.9}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (2.2.10)$$

Ahora bien, si se toma en cuenta el teorema 2 de Helmholtz, en el cual se tenía un campo vectorial $\vec{V}(r)$ cuya divergencia y rotacional son conocidas y cumplían las condiciones de límite, se tiene que dicho campo podría escribirse como:

$$\vec{V}(r) = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

En el caso electromagnético se hace necesario asociar al campo $\vec{V}(r)$ a un potencial más general, que contenga un potencial escalar (ϕ) y vectorial (\vec{A}) así se tendría

$$\vec{E} = -\nabla \cdot \phi \quad (2.2.11)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.2.12)$$

De tal forma la divergencia y el rotacional del campo $\vec{V}(r)$ corresponden a q (la densidad de carga eléctrica) y a \vec{J} (la densidad de corriente) convirtiéndose así en las fuentes de los campos (Kaufman, 1992).

2.2.3. Ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia

Las ecuaciones (2.2.4) a (2.2.7) son las ecuaciones de Maxwell de forma convencional, las cuales son las ecuaciones electromagnéticas en el dominio del tiempo, esto es, cambios con respecto al tiempo en el campo magnético desencadenan cambios en el campo eléctrico y viceversa.

CAPÍTULO 2. CONTEXTO TEÓRICO

Por lo general, cuando se abordan los campos desde el estudio de las ondas electromagnéticas, resulta ser más conveniente expresar las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia. Esto se puede hacer haciendo uso de la transformada de Fourier para cada una de las componentes (Roy, 2008).

La forma de hacer este procedimiento se puede seguir de la siguiente manera (Kirsch, 2014).

Sea la función $F(r, t)$ la componente del campo electromagnético, F es una función en el dominio del tiempo ya que depende de componentes espaciales y temporales.

Si se toma la transformada de Fourier de dicha componente se obtiene:

$$f(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.2.13)$$

Donde $f(\vec{r}, \omega)$ es una función que depende del espacio y de la frecuencia.

Se puede expresar la función F como la transformada inversa de f .

$$F(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.2.14)$$

Al derivar con respecto al tiempo

$$\frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega f(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.2.15)$$

$$\frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} = i\omega F(\vec{r}, t) \quad (2.2.16)$$

Realizando la transformada de Fourier a la ecuación (2.2.16)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega F(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.2.17)$$

$$TF \left[\frac{\partial F(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = i\omega f(\vec{r}, \omega) \quad (2.2.18)$$

De esta manera es posible pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Utilizando el procedimiento anteriormente descrito a las componentes de los campos en las ecuaciones (2.2.4) a (2.2.7) las ecuaciones de Maxwell tomarían la forma:

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) = \vec{J}(\vec{r}, \omega) + i\omega \vec{D}(\vec{r}, \omega) \quad (2.2.19)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -i\omega \vec{B}(\vec{r}, \omega) \quad (2.2.20)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad (2.2.21)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, \omega) = q(\vec{r}, \omega) \quad (2.2.22)$$

De esta forma se cuenta con las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia.

En este capítulo se describió los conceptos básicos en teoría electromagnética y el uso del teorema de Helmholtz para abordar las ecuaciones de Maxwell a partir del concepto de campo.

Capítulo 3

Fundamentos del método magnetotelúrico

3.1. Características

El método magnetotelúrico es una técnica de exploración geofísica pasiva la cual hace uso de principios de inducción electromagnética con el fin de realizar mediciones de la resistividad en el subsuelo (Vozoff, 1991). Las variaciones electromagnéticas que dan lugar al fenómeno tienen origen tanto geomagnético como meteorológico lo cual ubica al método en un rango de trabajo que va desde los $10^{-5} Hz$ hasta los $10^3 Hz$. Campos electromagnéticos con frecuencias superiores a $1 Hz$ (periodos más cortos de un segundo) tienen sus orígenes en actividad meteorológica mientras que frecuencias menores a $1 Hz$ (periodos más largos a un segundo) son el producto de la interacción entre el viento solar con la magnetosfera y la ionosfera (Tikhonov, 1950).

Extendiendo el periodo de sondeo magnetotelúrico es posible conocer la respuesta electromagnética a cualquier profundidad (Simpson and Bahr, 2005), este concepto, describe el decaimiento exponencial de cualquier cam-

po electromagnético, así como su difusión en un medio y se conoce como “*electromagnetic skin depth*”, la cual viene formulada de la siguiente manera:

$$p(T) = \left(\frac{T}{\pi \mu \bar{\sigma}} \right)^{1/2} \quad (3.1.1)$$

Donde $p(T)$ hace referencia a “*electromagnetic skin depth*” a un periodo (T) , $\bar{\sigma}$ es la conductividad promedio del medio penetrado y μ es la permeabilidad magnética. A una profundidad $p(T)$, los campos electromagnéticos son atenuados en un factor de e^{-1} de su amplitud en la superficie. Este decaimiento exponencial de los campos electromagnéticos con respecto a la profundidad los hace insensibles a estructuras de conductividad que se encuentren por debajo de la distancia establecida por $p(T)$. Sin embargo, en estudios magnetotelúricos $p(T)$ es regularmente equiparado con la profundidad de penetración de los campos electromagnéticos. Teniendo en cuenta lo anterior la ecuación (3.1.1) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$p(T) = 500 \sqrt{T \rho_a} [m] \quad (3.1.2)$$

Donde ρ_a es la resistividad aparente del espacio uniforme.

El método magnetotelúrico asume que la fuente del campo es una onda plana, la cual se genera en la ionosfera, de tal forma, que se puede considerar uniforme al momento de hacer su arribo a la superficie. Una fracción de la onda que incide en la superficie penetra en el subsuelo de forma perpendicular a la superficie, induciendo corrientes “*telúricas*” las cuales a su vez generan campos magnéticos secundarios (Wait, 1954).

3.1.1. Inducción electromagnética

Con el propósito de estudiar la inducción electromagnética en la Tierra y la aplicación del método magnetotelúrico, se requieren de algunas consideraciones y simplificaciones (Simpson and Bahr, 2005):

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

1. El método cumple con las ecuaciones de Maxwell.
2. La Tierra no genera energía electromagnética, sólo la disipa o absorbe.
3. Todos los campos deben ser tratados como conservativos y analíticos fuera de la fuente¹.
4. Las fuentes de los campos electromagnéticos naturales se asumen suficientemente alejadas de la superficie de la Tierra para ser tratados como ondas planas uniformes que inciden en la superficie de manera casi vertical.
5. En un modelo de capas planas, horizontales y paralelas no hay acumulación de cargas. En un modelo multi-dimensional las cargas se acumulan a lo largo de las discontinuidades generando un corrimiento estático (“*Static Shift*”).
6. La carga se conserva y la Tierra se comporta como un conductor que cumple la ecuación:

$$j = \sigma \vec{E}$$

Dónde: j es la densidad de corriente (Am^{-2}), σ es la conductividad del medio (Sm^{-1}) y \vec{E} es el campo eléctrico (Vm^{-1}).

7. El desplazamiento eléctrico es casi estático para los periodos de registro de MT. Las corrientes de desplazamiento eléctrico originadas por efectos de polarización se pueden considerar insignificantes comparadas con las corrientes de conducción, permitiendo considerar la inducción electromagnética de la Tierra como un proceso de difusión.

¹Si bien en el interior de la tierra la ecuación de difusión es la que rige la solución de la ecuación de campo, es importante destacar que en la capa superior a la superficie (aire) al despreciar las corrientes de desplazamiento eléctrico y considerando la conductividad igual a cero si es posible tratar los campos como campos conservativos.

8. Cualquier variación de la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética de las rocas se asumen mínimas comparadas con las variaciones en la conductividad total de las mismas.

3.1.2. Invariancia del tiempo como una consecuencia de la asunción de ondas planas

En la ionosfera, grandes frentes de corriente dan lugar a ondas planas que inciden de forma normal a la superficie de la tierra. Una onda plana es aquella que incide de forma normal a un plano en el cual el campo es constante. En el caso de las ondas electromagnéticas, el campo eléctrico (\vec{E}) y magnético (\vec{B}) pueden ser expresados de forma matemática como:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t - kz} \quad (3.1.3)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega t - kz} \quad (3.1.4)$$

Donde \vec{E} y \vec{B} representan sus amplitudes en el origen. Estas ondas también cuentan con una frecuencia angular ω y un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Su longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (donde k es el número de onda).

El asumir que estas ondas electromagnéticas provenientes de la ionosfera se comportan como onda plana es fundamental en el método magnetotelúrico ya que esto implica una invariancia en el tiempo de la fuente excitada. Como consecuencia de la invariancia en el tiempo, el tensor de impedancia es independiente del sitio de registro, esto claro está, que la conductividad eléctrica de la estructura no cambia y que la señal de los radios sea adecuada.

(Wait, 1954) indica que la asunción de la onda plana normal incidente tiene limitaciones cuando la extensión lateral del campo-fuente no es significativamente grande con respecto a la penetración de profundidad del campo

electromagnético ya que, al no cumplirse esa condición, se hace necesario realizar una corrección de segundo orden a la formulación realizada por (Cagniard, 1954). Sin embargo, generalmente resulta válido el planteamiento realizado por Cagniard para periodos menores a 10^4 .

Para periodos menores a un día, la curvatura de la tierra no tiene efectos significativos sobre la hipótesis de una onda plana. Por lo tanto, para el propósito de los sondeos magnetotelúricos, es suficiente considerar un modelo de tierra plana con campos electromagnéticos descritos en coordenadas cartesianas.

3.2. Función de transferencia

Tanto para el campo eléctrico como para el magnético tenemos que su comportamiento es del tipo difusivo, esto es:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.2.1)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.2.2)$$

La ecuación (3.2.1) es una ecuación diferencial de segundo orden con una solución de la forma (Simpson and Bahr, 2005):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 e^{i\omega t - qz} + \vec{E}_2 e^{i\omega t + qz} \quad (3.2.3)$$

Dado que la tierra no genera energía electromagnética, sólo la disipa o la absorbe, las grandes amplitudes de campo eléctrico no pueden ser soportadas por la tierra. Esto implica que $\vec{E}_2 = 0$ dado que \vec{E} debe disminuir cuando $z \rightarrow r_E$ donde r_E es el radio de la tierra.

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

Tomando la segunda derivada (con respecto a la profundidad) de la ecuación (3.2.3), se tiene:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = q^2 \vec{E}_1 e^{i\omega t - qz} \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = q^2 \vec{E} \quad (3.2.5)$$

Para un modelo compuesto por una capa de conductividad cero (aire) sobre una superficie plana homogénea con conductividad σ

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2.6)$$

Igualando las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5) para obtener una expresión adecuada para q , se obtiene:

$$q = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} + i \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} \quad (3.2.7)$$

La inversa de la parte real de q

$$p = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \quad (3.2.8)$$

es la penetración de profundidad electromagnética o “*skin depth*” de un campo eléctrico con frecuencia angular ω en un espacio con conductividad σ .

El inverso de q

$$C = \frac{p}{2} + i \frac{p}{2} \quad (3.2.9)$$

hace referencia a la función de transferencia electromagnética la cual establece una relación lineal entre las propiedades física del campo que se está midiendo, de tal forma:

$$C = \frac{1}{q} = \frac{E_x}{i\omega B_y} = -\frac{E_y}{i\omega B_x} \quad (3.2.10)$$

Si C es conocida la resistividad de la capa homogénea puede ser calculada:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{|q|^2} \mu_0 \omega = |C|^2 \mu_0 \omega \quad (3.2.11)$$

3.3. Medios unidimensionales

El método magnetotelúrico está basado en el fenómeno de la inducción electromagnética y permite estudiar las propiedades eléctricas del subsuelo a partir de la correlación entre el campos eléctrico y magnético registrado de forma simultánea en la superficie de la tierra (Wait, 1954). El origen de estos campos está ligado a las fluctuaciones del campo magnético terrestre que presentan un rango de periodos comprendido entre $10^{-4}s$ y 10^7s . Las variaciones están causadas por los sistemas de corrientes ionosféricas creadas por la interacción del viento solar con la magnetosfera (Vozoff, 1975).

Esta interacción da lugar a la generación de ondas hidromagnéticas que, al llegar al límite inferior de la ionosfera se transforman en campos electromagnéticos. El conjunto de estos campos, cuya polarización varía con el tiempo, es aquello que se denomina campos primarios y se propaga a través de la atmosfera hasta llegar a la superficie terrestre (Vozoff, 1975). Debido a que la tierra se comporta como un medio conductor el campo primario induce distribuciones de carga y de corriente dando así lugar a la presencia de campos secundarios. La superposición de estos campos, primario y secundario, es aquel que se registra en la superficie de la tierra (Figura 3.1).

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de los campos electromagnéticos son las ecuaciones de Maxwell.

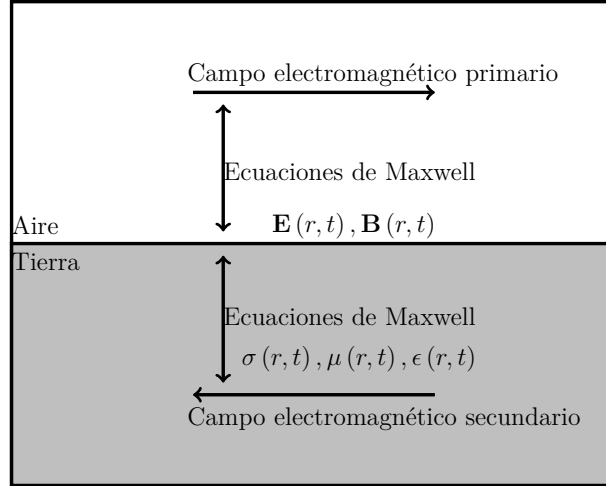


Figura 3.1: Principio de inducción electromagnética en la Tierra.

Cada una de estas expresiones representa una generalización de ciertas observaciones experimentales, la ecuación (2.2.5) es la expresión diferencial de la ley de inducción electromagnética de Faraday; la ecuación (2.2.4) es una extensión de la ley de Ampere, la ecuación (2.2.7) es la ley de Gauss la cual puede ser deducida a partir de la ley de Coulomb, la última ecuación (2.2.6) expresa matemáticamente el hecho de que no es posible la presencia de monopolos magnéticos.

Las condiciones de contorno en la superficie de discontinuidad entre dos medios son:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (3.3.1)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (3.3.2)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \kappa \quad (3.3.3)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \eta \quad (3.3.4)$$

Donde \vec{n} es el vector normal a la superficie de contacto entre los medios 1 y 2. Las ecuaciones (3.3.1) y (3.3.2) establecen la continuidad del campo eléctrico tangencial y la continuidad del campo de inducción magnético normal; las ecuaciones (3.3.3) y (3.3.4) implica que la diferencia entre las componentes tangenciales del campo magnético es igual a la densidad de corriente superficial κ y que la diferencia en las componentes normales del desplazamiento eléctrico es igual a la densidad de carga superficial η .

En las ecuaciones de Maxwell aparecen cinco funciones vectoriales \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} , \vec{J} y \vec{D} las cuales pueden ser reducidas a dos a partir de las relaciones constitutivas del medio.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.3.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3.3.6)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.3.7)$$

Donde σ es la conductividad en (S/m) , μ es la permeabilidad en Vs/Am y ϵ es la permitividad o constante dieléctrica en As/Vm del medio. En función de la permeabilidad y permitividad del vacío tenemos que $\mu = \mu_r \mu_o$ con $\mu_o = 4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$ y $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_o$ con $\epsilon_o = 8,8510 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$. Para la mayoría de los materiales que componen la tierra la permitividad y la constante dieléctrica del medio no difieren considerablemente de la del vacío.

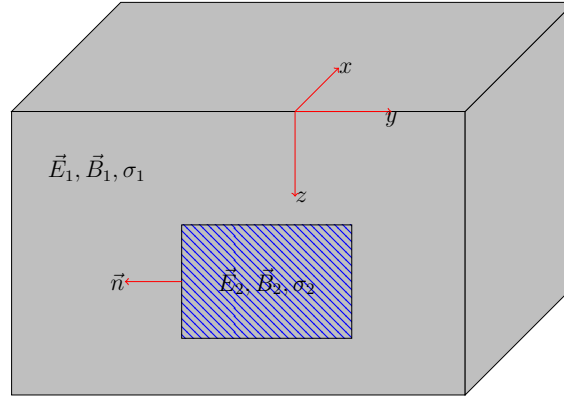


Figura 3.2: Representación de las condiciones de contorno en la superficie de discontinuidad.

3.3.1. Hipótesis

La determinación del problema directo al hacer uso del método magnetotelúrico es el de resolver las ecuaciones de Maxwell en presencia de un medio conductor con las condiciones de frontera adecuadas. Para dar solución a este tipo de problemas es necesario hacer las siguientes consideraciones Parker (1983):

1. Teniendo en cuenta la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, el campo electromagnético natural puede ser expuesto como la suma de campos armónicos cuya dependencia con respecto al tiempo puede ser expresada mediante la expresión $e^{-i\omega t}$.

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t})$$

2. Para el rango de frecuencias normalmente utilizados en el método magnetotelúrico ($10^{-4}Hz - 10^3Hz$) y los valores habituales de resistividad de las rocas, puede establecerse la aproximación cuasiestática.

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

3. El origen remoto de los campos naturales permite tratar el campo electromagnético incidente como una onda plana.
4. Debido a que la conductividad del aire es prácticamente nula en comparación con la de la Tierra, la onda incidente se propaga verticalmente hacia el interior.

Al tener en cuenta estas restricciones y haciendo uso de la dependencia temporal del tipo $e^{-i\omega t}$ las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia pueden ser reescritas de la siguiente manera.

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\vec{B} \quad (3.3.8)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma \left(1 - i\frac{\epsilon\omega}{\sigma}\right) \vec{E} \quad (3.3.9)$$

Si se aplica el operador rotacional a las ecuaciones (3.3.8) y (3.3.9)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\sigma \left(1 - i\frac{\epsilon\omega}{\sigma}\right) \vec{E} \quad (3.3.10)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = i\omega\mu\sigma \left(1 - i\frac{\epsilon\omega}{\sigma}\right) \vec{B} \quad (3.3.11)$$

Las ecuaciones (3.3.10) y (3.3.11) toman la forma:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = k^2\vec{E} \quad (3.3.12)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = k^2\vec{B} \quad (3.3.13)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

donde

$$k^2 = i\mu\sigma\omega + \mu\epsilon\omega^2 \quad (3.3.14)$$

Tomando el rotacional de la ecuación (3.3.8) y (3.3.9) se obtiene una ecuación en términos de la difusión y de la propagación de los campos eléctricos y magnéticos. Estas ecuaciones permiten extraer información concerniente a la estructura de conductividad del subsuelo.

Para este propósito se debe hacer uso de la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = (\nabla \cdot \nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (3.3.15)$$

Donde \vec{F} es cualquier vector. Teniendo en cuenta la ecuación (3.3.15) se puede desarrollar el primer término de las ecuaciones (3.3.12) y (3.3.13). De forma similar teniendo en cuenta la ecuación (2.2.6) y considerando una región homogénea y sin cargas libres se cumple que:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.3.16)$$

Con lo cual se puede reescribir las ecuaciones (3.3.12) y (3.3.13) de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad (3.3.17)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = -k^2 \vec{B} \quad (3.3.18)$$

De esta forma se obtienen dos ecuaciones para el campo eléctrico y dos ecuaciones para el campo magnético las cuales provienen de la parte real y

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

la parte imaginaria del número de onda k dando así lugar a los términos de difusión y de propagación de los campos.

Para el rango de frecuencias utilizado en el método magnetotelúrico y teniendo en cuenta los valores de conductividad de la corteza terrestre se tiene que:

$$|\mu\epsilon\omega^2| \ll |\mu\sigma\omega|$$

De lo cual se tiene que las corrientes de desplazamiento son mucho menores que las corrientes de conducción lo cual lleva a una aproximación cuasiestática. Así el número de onda toma la forma:

$$k = \sqrt{i\mu\sigma\omega}$$

De esta forma, el problema en el método magnetotelúrico se estudia como un fenómeno de difusión.

Dado que el número de onda k es complejo su representación toma la forma:

$$k = \alpha + i\beta$$

Donde α y β son números reales e iguales en la aproximación cuasiestática:

$$\alpha = \beta = \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.19)$$

La solución de la ecuación (3.3.17) y (3.3.18) que se propagan en la dirección z es:

$$\vec{E} = E_0 e^{(i\alpha - \beta)z} \quad (3.3.20)$$

$$\vec{B} = B_0 e^{(i\alpha - \beta)z} \quad (3.3.21)$$

3.3.2. Medio estratificado

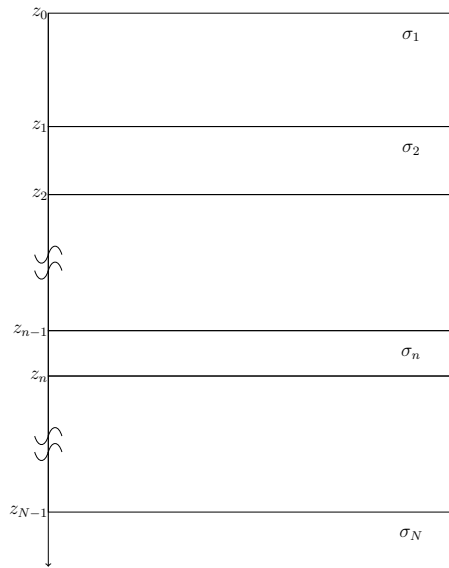


Figura 3.3: Representación interfaz N capas.

Para un modelo de N capas, dentro de cada capa n se tiene una ecuación de difusión (de la forma dada en la ecuaciones (3.3.17) y (3.3.18)) que contiene una conductividad σ_n y una solución de la forma (3.3.20) y (3.3.21) dada por:

$$E_{xn}(k_n, \omega) = a_n(k_n, \omega)e^{-k_n z} + b_n(k_n, \omega)e^{k_n z} \quad (3.3.22)$$

Con k_n siendo definida de forma similar a k en la ecuación (3.3.14), pero incorporando la conductividad σ_n de la n -ésima capa.

De forma similar a la ecuación (3.3.22), el campo magnético dentro de la n -ésima capa está dada por:

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

$$B_{yn}(k_n, \omega) = \frac{k_n}{i\omega} a_n(k_n, \omega) e^{-k_n z} - b_n(k_n, \omega) e^{k_n z} \quad (3.3.23)$$

Un sondeo magnetotelúrico hipotéticamente penetrando la n -ésima capa podría registrar E_{xn} y B_{yn} , permitiendo así escribir la función de transferencia de la siguiente forma:

$$C_n(z) = \frac{E_{xn}(z)}{i\omega B_{yn}} \quad \text{con} \quad k_n = \sqrt{i\mu\sigma_n\omega} \quad (3.3.24)$$

Sustituyendo la ecuación (3.3.22) y (3.3.23) en la ecuación (3.3.24) se encuentra una expresión para la función de transferencia $C_n(z_{n-1})$ y $C_n(z_n)$ en el tope y en la base de cada una de las capas respectivamente.

Hacia el tope de la n -ésima capa se tiene:

$$C_n(z_{n-1}) = \frac{a_n e^{-k_n z_{n-1}} + b_n e^{k_n z_{n-1}}}{k_n (a_n e^{-k_n z_{n-1}} - b_n e^{k_n z_{n-1}})} \quad (3.3.25)$$

Hacia la base de la n -ésima capa se tiene:

$$C_n(z_n) = \frac{a_n e^{-k_n z_n} + b_n e^{k_n z_n}}{k_n (a_n e^{-k_n z_n} - b_n e^{k_n z_n})} \quad (3.3.26)$$

La ecuación (3.3.26) puede ser reorganizada con el fin de dar un término para la relación. Sustituyendo este término en la ecuación (3.3.25) se tiene:

$$C_n(z_{n-1}) = \frac{1}{k_n} \frac{k_n C_n(z_n) + \tanh[k_n(z_n - z_{n-1})]}{1 + k_n C_n(z_n) + \tanh[k_n(z_n - z_{n-1})]} \quad (3.3.27)$$

Las componentes del campo son continuas en la zona de transición desde la n -ésima capa hasta la $n - 1$ -ésima capa de tal forma que la función de transferencia también es continua en este intervalo de forma que:

$$\begin{aligned}
 C_n(z_n) &= \lim_{z \rightarrow z_n - 0} C_n(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_n + 0} C_{n+1}(z) \\
 &= C_{n+1}(z_n)
 \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Haciendo uso de las condiciones de continuidad de la ecuación (3.3.27) y sustituyendo la expresión $l_n = z_n - z_{n-1}$ en la ecuación (3.3.26) se obtiene:

$$C_n(z_{n-1}) = \frac{1}{k_n} \frac{k_n C_{n+1}(z_n) + \tanh(k_n l_n)}{1 + k_n C_{n+1}(z_n) + \tanh(k_n l_n)} \tag{3.3.29}$$

La ecuación (3.3.28) es conocida como la *relación de recurrencia* de Wait. Se puede utilizar la relación de recurrencia de (Wait, 1954) para calcular la función de transferencia hacia el tope de la n -ésima capa si la función de transferencia al tope de la $n + 1$ -ésima es conocida. Teniendo en cuenta lo anterior el solucionar la ecuación (3.3.28) se hace necesario un proceso iterativo desde el tope la capa más profunda (N), la cual es definida como un espacio homogéneo de la forma:

$$C_n = \frac{1}{k_n} \tag{3.3.30}$$

Una vez calculada la función de transferencia de la N -ésima capa, se utiliza la ecuación (3.3.28) $N - 1$ veces hasta que se obtenga la función de transferencia en la superficie.

Teniendo en cuenta lo anterior se puede definir la *resistividad aparente* como la resistividad promedio de una interfaz uniforme de la siguiente forma:

$$\rho_a(\omega) = |C(\omega)|^2 \mu_0 \omega \tag{3.3.31}$$

Resistividad aparente es uno de los parámetros más usados en el método magnetotelúrico. Utilizando datos sintéticos es posible modelar un sistema de capas plano paralelas y calcular ρ_a aplicando la ecuación (3.3.28) en un modelo similar al mostrado en la figura (3.3).

Dado que C es un número complejo, es posible calcular una *impedancia en fase*. Este parámetro al igual que la resistividad aparente es uno de los más importantes parámetros de estimación en el método magnetotelúrico. La impedancia en fase, ϕ_{1-D} en un modelo de una dimensión, puede ser calculado de la siguiente forma:

$$\phi_{1-D} = \tan^{-1} \left(\frac{E_x}{B_y} \right) \quad (3.3.32)$$

La resistividad aparente y la impedancia en fase son usualmente graficadas como una función del periodo, $T = 2\pi/\omega$

3.4. Tensor de Impedancia

La relación de recurrencia de (Wait, 1954) que se explica en la sección anterior no permite evaluar variaciones laterales de conductividad ya que los valores medidos dependen de la dirección de medida y de la polarización del campo incidente. Para evaluar el cambio de la conductividad en estas circunstancias se hace necesario la introducción del concepto de tensor de impedancia el cual relaciona linealmente las componentes de los campos eléctricos y magnéticos horizontales para cada una de las frecuencias evaluadas.

La respuesta del campo electromagnético secundario en un medio que presenta variaciones laterales en su resistividad, depende fundamentalmente de la polarización con la cual el campo primario le induce. Si se considera que la fuente que genera el campo electromagnético primario varía de forma continua, entonces, en superficie estas variaciones dan lugar a variaciones con

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

respecto al tiempo de los campos eléctricos y magnéticos incidentes. Por esta razón, en campos no estratificados, si se realiza una medición del campo eléctrico o magnético sobre cualquier punto en las direcciones x o y , la impedancia escalar $Z_{xy} = E_x/Hy$ correspondiente tendrá una dependencia con respecto a la dirección del campo primario incidente a la estructura, el cual además varía con el tiempo. De esta manera se tiene que, la impedancia electromagnética será función de:

1. La frecuencia.
2. Las propiedades eléctricas del medio.
3. La orientación de los ejes de medida.
4. La polarización del campo primario.

La dependencia de la impedancia con la polarización del campo primario invalida la impedancia escalar como función de respuesta en medios no unidimensionales (Sripanya, 2013). Con el fin de solucionar esto se hace necesario la introducción del concepto de tensor de impedancia.

Para abordar esta idea se hace necesario hacer diferentes consideraciones. Supongamos que se cuenta con un campo incidente (E_0, H_0) , el cual cuenta con polarización elíptica, esto es, la punta del vector de campo eléctrico describe una elipse en cualquier plano fijo o es normal a la dirección de propagación (Figura (3.4)). Una onda polarizada elípticamente puede ser resuelta en dos ondas polarizadas linealmente en cuadratura de fase, con sus planos de polarización en ángulos rectos entre sí. Dado que el campo eléctrico puede girar en sentido horario o en sentido contrario, ya que se propaga, las ondas polarizadas elípticamente exhiben quiralidad (propiedad de un objeto de no ser superponible con su imagen especular) (Sripanya, 2013).

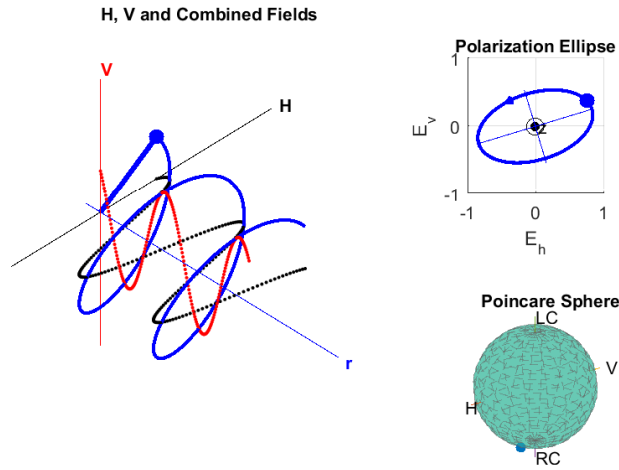


Figura 3.4: Modelo de polarización elíptica de una onda electromagnética cuyas componente de campo son $[2 + i, 1 - i]$ (Kaufman, 1992).

Este campo elíptico puede ser descompuesto en dos direcciones que sean perpendiculares, las cuales por simplicidad en este caso serán: la dirección x y la dirección y .

$$\begin{aligned} E_0 &= E_{0x} + E_{0y} \\ H_0 &= H_{0x} + H_{0y} \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Donde E_{0x}, H_{0y} y E_{0y}, H_{0x} se encuentran polarizadas de forma lineal. Se hace necesario calcular el campo magnetotelúrico creado por cada una de las polarizaciones lineales para luego sumarlas, esto último, haciendo uso del principio de superposición de los campos. El campo E_{0x}, H_{0y} en un medio isotrópico, generará corrientes y cargas secundarias, las cuales, producirán un campo secundario E_1, H_1 . De forma general se cuenta con que este campo secundario contará con componentes en las direcciones x y y al igual que en la dirección z .

$$E_{1x} = a_{1x}H_{0y} \quad E_{1y} = a_{1y}H_{0y} \quad E_{1z} = a_{1z}H_{0y} \quad (3.4.2)$$

$$H_{1x} = b_{1x}H_{0y} \quad H_{1y} = b_{1y}H_{0y} \quad H_{1z} = b_{1z}H_{0y} \quad (3.4.3)$$

De la otra polarización lineal del campo primario también se obtiene una expresión similar:

$$E_{2x} = a_{2x}H_{0x} \quad E_{2y} = a_{2y}H_{0x} \quad E_{2z} = a_{2z}H_{0x} \quad (3.4.4)$$

$$H_{2x} = b_{2x}H_{0x} \quad H_{2y} = b_{2y}H_{0x} \quad H_{2z} = b_{2z}H_{0x} \quad (3.4.5)$$

donde los coeficientes $a_{1:x,y,z}$, $b_{1:x,y,z}$, $a_{2:x,y,z}$ y $b_{2:x,y,z}$ son números complejos que dependen de las propiedades del medio, de la frecuencia y de la orientación de los ejes x y y .

El campo electromagnético total originado por el campo primario puede expresarse como:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ H &= H_1 + H_2 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

De las ecuaciones (3.4.3) a (3.4.4) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 E_x &= a_{1x}H_{0y} + a_{2x}H_{0x} \\
 E_y &= a_{1y}H_{0y} + a_{2y}H_{0x} \\
 E_z &= a_{1z}H_{0y} + a_{2z}H_{0x} \\
 H_x &= b_{1x}H_{0y} + b_{2x}H_{0x} \\
 H_y &= b_{1y}H_{0y} + b_{2y}H_{0x} \\
 H_z &= b_{1z}H_{0y} + b_{2z}H_{0x}
 \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Sobre la superficie de la Tierra ($z = 0$) el campo $E_z = 0$, por lo que los coeficientes $a_{1z} = a_{2z} = 0$.

Teniendo en cuenta que el campo primario es desconocido, se tiene que hallar una relación entre las componentes del campo total haciendo uso de las ecuaciones mostradas en (3.4.7). Las componentes H_x y H_y son independientes entre sí por lo que se cumple:

$$b_{1x}b_{2y} - b_{2x}b_{1y} \neq 0 \tag{3.4.8}$$

Si se expresa H_{0x} y H_{0y} en función de H_x y H_y se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 H_{0x} &= \frac{b_{1x}H_y - b_{1y}H_x}{b_{1x}b_{2y} - b_{2x}b_{1y}} \\
 H_{0y} &= \frac{b_{2y}H_x - b_{2x}H_y}{b_{1x}b_{2y} - b_{2x}b_{1y}}
 \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.4.9) en las componentes del campo eléctrico en la dirección x y y , se obtiene una relación lineal entre las componentes horizontales del campo magnetotelúrico en la superficie terrestre.

$$\begin{aligned} E_x &= Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y \\ E_y &= Z_{yx}H_x + Z_{yy}H_y \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Los términos Z_{xx} , Z_{xy} , Z_{yx} y Z_{yy} son funciones en el dominio de la frecuencia, de las propiedades eléctricas del medio y de la orientación de los ejes de medida, no se ven afectados por cambios en la polarización del campo electromagnético. Estos términos son las componentes del tensor de impedancia en un medio 2 - D .

La resistividad aparente ρ_a y la fase ϕ se encuentran determinadas por las siguientes expresiones:

$$\rho_{a,xy} = \frac{1}{\omega\mu} |Z_{xy}|^2 \quad (3.4.11)$$

$$\phi_{xy} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im } Z_{xy}}{\text{Re } Z_{xy}} \right) \quad (3.4.12)$$

De manera similar se definen las resistividades aparentes $\rho_{a,yx}$, $\rho_{a,yy}$, $\rho_{a,xx}$ y las fases ϕ_{yx} , ϕ_{yy} y ϕ_{xx} a partir de las componentes del tensor de impedancias.

Es posible establecer una relación lineal entre las componentes horizontales y verticales del campo magnético a través de las relaciones establecidas por (Parkinson, 1962) y (Wiese, 1962) las cuales permiten determinar las variaciones laterales en un medio de la conductividad.

Teniendo en cuenta que el campo magnético puede ser descompuesto en un campo normal y otro anómalo, se tiene que:

$$\begin{aligned} H_x &= H_{xn} + H_{xa} \\ H_y &= H_{yn} + H_{ya} \\ H_z &= H_{zn} + H_{za} \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

Las componentes del campo magnético (H_{xn} , H_{yn} y H_{zn}) son definidas como el campo correspondiente a un medio unidimensional y las componentes del campo (H_{xa} , H_{ya} y H_{za}) se asocian a las componentes del campo anómalo, esto es, el creado por las variaciones laterales de la conductividad. Estos dos campos se relacionan a través de la matriz de inducción \overline{W} .

$$\begin{aligned}H_{xa} &= W_{xx}H_{xn} + W_{xy}H_{yn} + W_{xz}H_{zn} \\H_{ya} &= W_{yx}H_{xn} + W_{yy}H_{yn} + W_{yz}H_{zn} \\H_{za} &= W_{zx}H_{xn} + W_{zy}H_{yn} + W_{zz}H_{zn}\end{aligned}\tag{3.4.14}$$

Si el medio que se está evaluando es un medio estratificado, la componente vertical es nula y el campo horizontal que se genera por las variaciones laterales de conductividad resulta ser menor al del medio estratificado, es por esta razón que la ecuación (3.4.14) toma la forma:

$$H_{za} = W_{zx}H_{xn} + W_{zy}H_{yn}\tag{3.4.15}$$

Y puede ser simplificada a la siguiente forma (Simpson and Bahr, 2005):

$$H_z = z_x H_x + z_y H_y\tag{3.4.16}$$

Donde H_x , H_y y H_z son las componentes magnéticas registradas por el instrumento.

3.5. Medios bidimensionales

Si se quiere evaluar la respuesta en medios bidimensionales, en la que no hay variación de la resistividad en el medio en una dirección horizontal, ($\sigma =$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

$\sigma(x, z)$), la respuesta del medio estaría condicionada por las ecuaciones de Maxwell, solo que esta vez deben ser agrupadas en dos sistemas de ecuaciones desacopladas Kaufman (1981). Las dos ecuaciones ponen de manifiesto la polarización con respecto al campo \vec{E} y al campo \vec{B} .

La polarización con respecto al campo eléctrico \vec{E}

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial x} &= \mu\sigma \vec{E}_y \\ \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial x} &= -i\omega \vec{B}_z \\ \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial z} &= i\omega \vec{B}_x\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

La polarización con respecto al campo magnético \vec{B}

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} &= -i\omega \vec{B}_y \\ \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial x} &= \mu\sigma \vec{E}_z \\ \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial z} &= -\mu\sigma \vec{E}_x\end{aligned}\tag{3.5.2}$$

En medios bidimensionales con $\sigma(x, z)$ las direcciones principales de la estructura serían los ejes x y y . Para cada una de las polarizaciones se tiene la presencia de los campos electromagnéticos entre sí, con lo cual, para la polarización de \vec{E} se cuenta con las componentes (E_y, B_x, B_z) y para la polarización de \vec{B} se cuenta con la presencia de las componentes (E_x, B_z, B_y) . Si se tiene en cuenta que los dos conjuntos de ecuaciones cuentan con componentes independientes entre sí, es posible dar solución al sistema de ecuaciones de forma independiente. Teniendo en cuenta esto, la polarización \vec{E} tomaría la forma:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial z^2} = i\omega\mu\sigma \vec{E}_y \quad (3.5.3)$$

De forma similar para la polarización con respecto a \vec{B} se tiene:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}_y}{\partial z^2} = i\omega\mu\sigma \vec{B}_y \quad (3.5.4)$$

Para cada una de las polarizaciones hay una sola componente horizontal de los campos eléctrico y magnético. De este modo la polarización característica del sistema estaría determinada por:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{\vec{B}} \\ Z_{\vec{E}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{H}_x \\ \vec{H}_y \end{pmatrix} \quad (3.5.5)$$

En este capítulo se abordó el método magnetotelúrico a fin de poder construir un modelo directo en un espacio 1D con el fin de resolver las ecuaciones de Maxwell en presencia de un medio conductor con las condiciones de frontera adecuadas.

Capítulo 4

Prospección Geoeléctrica

4.1. Prospección Geoeléctrica

Las ecuaciones de Maxwell son el fundamento teórico en la prospección geofísica que hace uso de los métodos electromagnéticos. Con ellas es posible modelar la respuesta de los campos a ciertas perturbaciones con lo cual se logra establecer relaciones entre la fuente el medio.

En particular, las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia son ampliamente utilizadas en exploración geofísica, porque permiten una interpretación de los campos como función armónica con respecto al tiempo, la cual se propaga en un medio con estratificación plano paralela. Esta propagación brinda información con respecto a las propiedades electromagnéticas del material bajo la subsuperficie.

En ésta sección se realizará un estudio de los principios físicos que sustentan los sondeos eléctricos verticales (SEV).

4.1.1. Consideraciones del Método

El método SEV (Sondeos Eléctricos Verticales) consiste en inyectar corriente al subsuelo a través de dos pares de electrodos. El primer par de electrodos es conectado a una fuente de corriente directa que envía una corriente a través del subsuelo desde un electrodo a otro. El segundo par se coloca a lado y lado del punto de observación con el propósito de medir la diferencia de potencial, como se indica en la figura (4.1).

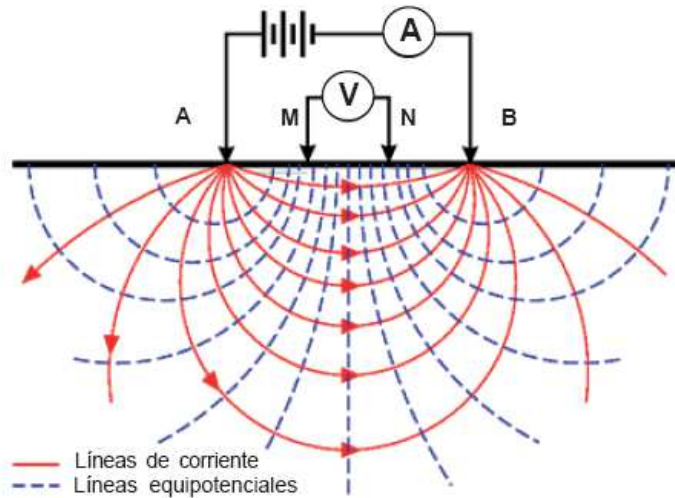


Figura 4.1: Representación de un SEV. El punto de observación se encuentra en el punto medio entre los electrodos de potencia M y N . Tomado de <http://www.geoseismic.cl>

La geometría de los electrodos encargados de enviar la corriente como de los electrodos encargados de medir la diferencia de potencial varía teniendo en cuenta las necesidades del estudio, sin embargo, tanto el voltaje y la corriente son magnitudes conocidas de antemano.

El hecho de emplear corriente directa (DC) implica que los campos son constantes en el tiempo y en consecuencia no dependen de una frecuencia de

oscilación (Szalai, 2008), Lo que favorece a la solución ya que se cuenta con un desacople en el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \quad (4.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (4.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (4.1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \quad (4.1.4)$$

Las ecuaciones 4.1.1 a 4.1.4 son las ecuaciones de Maxwell para campos independientes del tiempo.

4.1.2. Consideraciones del Modelo

Las variables medidas en los métodos de prospección geoelectrica pretenden inferir la distribución de resistividad eléctrica bajo la superficie. Para ello se asume un modelo en el cual el subsuelo cuenta con una estratificación plano-paralela. Cada capa posee un espesor y una resistividad determinada. Los valores de la resistividad pueden variar producto de la presencia de minerales o fluidos contenidos en cada estrato los cuales tienen un sentido geológico dependiendo de la zona de estudio.

No obstante, teniendo en cuenta la gran cantidad de factores involucrados en la caracterización eléctrica (porosidad, temperatura, saturación de fluidos, geometría, conectividad entre poros, etc.) y su complejidad, no siempre es posible asociar un valor de resistividad a algún tipo específico de roca.

Por lo tanto, se hace necesario adoptar algunas suposiciones que permitan realizar un estudio del subsuelo desde la teoría electromagnética. Estas suposiciones contribuyen a establecer un modelo básico que puede ir incrementando su complejidad toda vez que el modelo desarrollado de cuenta del fenómeno que sea objeto de estudio.

Las consideraciones que se tuvieron en cuenta siguiendo el trabajo realizado por (Flathe, 1955) fueron:

- El subsuelo consiste en un número finito de capas separadas entre sí por planos horizontales.
- La capa más profunda se extiende en profundidad hacia el infinito.
- Cada una de las capas es eléctricamente homogénea e isótropa.
- El campo eléctrico al interior es generado por una fuente de corriente puntual ubicada en la superficie.
- La corriente emitida por esta fuente es corriente directa.

4.2. Solución de la ecuación para el potencial eléctrico

En esta sección se trata la solución del potencial eléctrico siguiendo el método tradicional en coordenadas cilíndricas. Existen hoy por hoy diversas formas de dar solución a esta ecuación. Si el lector desea conocer formas alternativas de la solución del potencial eléctrico le sugiero consultar la tesis de doctorado del Dr. Andres Tejero Andrade (Tejero, 2002).

Teniendo en cuenta las consideraciones descritas en la sección anterior (4.1) y siguiendo a (Zhdanov, 2009) y (Kaufman, 1992), se tiene que el material bajo el subsuelo no retiene ni acumulada carga con lo cual se cumple:

$$\begin{aligned}\nabla \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} = 0 & \text{siendo} & \quad \vec{E} = -\nabla V \\ \Rightarrow \nabla \vec{E} &= \nabla (-\nabla V)\end{aligned}$$

El potencial eléctrico cumple con la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{4.2.1}$$

Debido a la existencia de simetría a la perpendicular con respecto a la superficie es útil utilizar un sistema de coordenadas cilíndrico con lo cual se tiene que el potencial no depende de la componente angular (θ), de esta forma se tiene que el potencial expresado en términos de este sistema coordenado toma la siguiente forma:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \tag{4.2.2}$$

Esta ecuación (4.2.2) tiene solución analítica y se resuelve mediante el método de separación de variables, el cual adopta la solución:

$$V(r, z) = U(r) W(z)$$

Si se reemplaza esta solución en la ecuación (4.2.2) y dividiendo por UW se obtiene:

$$\frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{Ur} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0 \tag{4.2.3}$$

Un análisis de la ecuación (4.2.3) nos muestra que los dos primeros términos dependen de la componente radial r mientras que el tercero solo depende de la componente que hace referencia en este caso a la profundidad, es decir,

z . Cada uno de estos términos puede ser tomado de forma independiente y ser igualado a una constante. Realizando lo anteriormente descrito para el caso $W(z)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{dz^2} &= \lambda^2 \\ \Rightarrow W &= C e^{-\lambda z} \quad \text{y} \\ W &= C e^{\lambda z} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

En el caso de la componente radial $U(r)$ la ecuación adquiere la forma:

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{Ur} \frac{dU}{dr} = -\lambda^2 \quad (4.2.5)$$

La ecuación (4.2.5) toma la forma de una ecuación de Bessel, la cual tiene solución a partir de las funciones de Bessel de orden 0.

Si λ es la constante de la ecuación diferencial de la ecuación (4.2.5) y J_0 es la función de Bessel de orden cero, cuyo comportamiento es el indicado en la figura (4.2), entonces, la solución toma la forma:

$$U = C \cdot J_0(\lambda r) \quad (4.2.6)$$

Combinando las soluciones para $W(z)$, ecuación (4.2.4), y para $U(r)$, ecuación (4.2.5) se obtiene:

$$V_1 = C e^{-\lambda z} \cdot J_0(\lambda r) \quad V_2 = C e^{\lambda z} \cdot J_0(\lambda r) \quad (4.2.7)$$

Una solución general de la ecuación (4.2.7) estaría determinada por todos los posibles valores de la constante λ desde 0 hasta infinito y permitiendo que el valor de las constantes C_1 y C_2 cambien en función de λ . Teniendo en

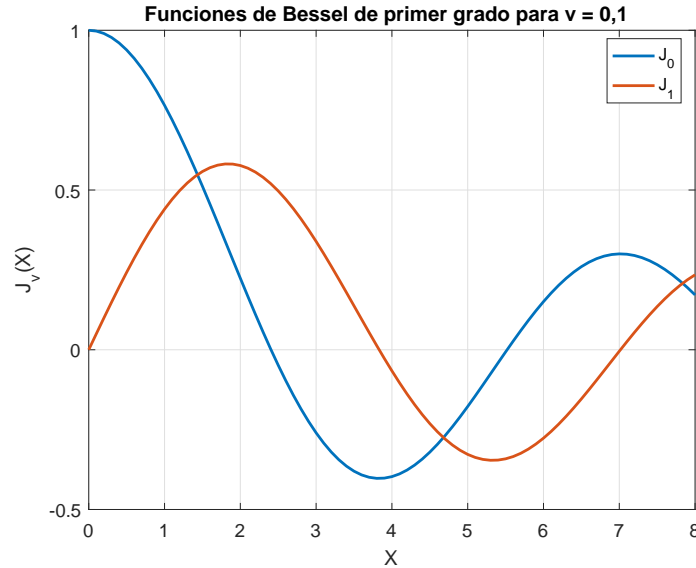


Figura 4.2: Funciones de Bessel de orden cero (J_0) y orden uno (J_1).

cuenta estas consideraciones, la solución de la ecuación de Laplace, ecuación (4.2.2), toma la forma:

$$V(r, z) = \int_0^\infty [\phi(\lambda) e^{-\lambda z} + \psi(\lambda) e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (4.2.8)$$

4.2.1. Potencial en la superficie debido a una fuente puntual de corriente

Si el subsuelo es considerado como un medio homogéneo e isotrópico en el cual no hay variaciones en las propiedades eléctricas del medio, se hace posible calcular una solución del potencial eléctrico en superficie de una manera sencilla. Para ello se hace necesario hacer la siguiente suposición: existe una fuente puntual que genera un flujo de corriente sobre la superficie, como se indica en la figura (4.3).

Por definición la corriente es:

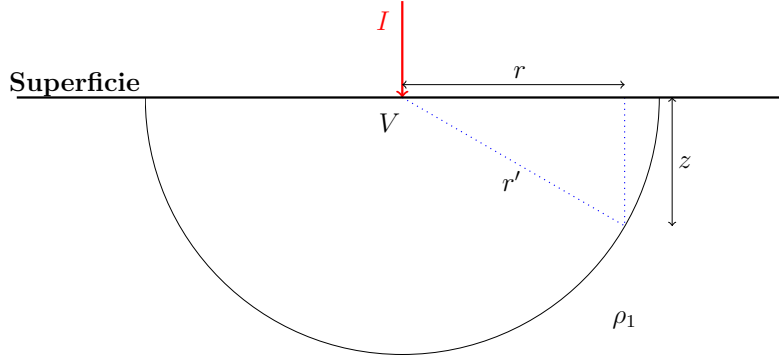


Figura 4.3: Potencial en la superficie generado por una fuente puntual de corriente

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (4.2.9)$$

Para el modelo que se está evaluando se asume que el aire es un medio altamente resistivo con lo cual la corriente circulará únicamente en el subsuelo, con ello se tiene que la densidad de corriente se dispersa en un área que corresponde a media esfera, esto es, $A = 2\pi r^2$, con lo cual su diferencial estaría determinado por la expresión $dA = 4\pi r dr$. Si se reemplaza el diferencial en la ecuación (4.2.9) se tiene:

$$\begin{aligned} I &= 4\pi \int_0^{r'} \vec{J} r' dr \\ &= 2\pi \vec{J} r'^2 \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Los límites de la integral se establecen como $r = 0$, el lugar en el cual se inyecta la corriente, y r' es la ubicación de un punto arbitrario en el subsuelo.

CAPÍTULO 4. PROSPECCIÓN GEOELÉCTRICA

Si se despeja la densidad de corriente (\vec{J}) de la ecuación (4.2.10) y haciendo uso de la ley de Ohm se tiene:

$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi r'^2} = \sigma \vec{E} \quad (4.2.11)$$

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico \vec{E} y la densidad de corriente \vec{J} se encuentran en la misma dirección y que a su vez el campo eléctrico \vec{E} es normal a las líneas equipotenciales, se establece que el campo eléctrico \vec{E} va en la misma dirección del vector \vec{r} . En el modelo que se está evaluando se hace importante esta aclaración ya que \vec{E} y $d\vec{l}$ se encuentran en la misma dirección. Esto es, si se quiere calcular el voltaje a partir de la expresión:

$$V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4.2.12)$$

La expresión para el voltaje teniendo en cuenta la ecuación (4.2.11) tomaría la forma:

$$\begin{aligned} V &= - \int_{r_a}^{r_b} \frac{I}{2\pi r'^2 \sigma} \hat{e} \cdot d\vec{r} \\ &= - \frac{I\rho}{2\pi} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r'^2} dr' \\ &= \frac{I\rho}{2\pi} \left[\frac{1}{r'} \right]_{r_a}^{r_b} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Escogiendo de forma adecuada los límites de integración en la ecuación (4.2.13) tendríamos:

$$V = \frac{I\rho}{2\pi r} \quad (4.2.14)$$

La ecuación (4.2.14) corresponde a la expresión del potencial medido en un punto sobre la superficie en el cual la fuente se considera como una fuente

puntual de corriente. Si bien es cierto es un caso importante no resulta ser el caso general.

Una expresión más general estaría determinada por la geometría indicada en la figura (4.3). Si $r' = \sqrt{r^2 + z^2}$, la ecuación (4.2.14) toma la forma:

$$\begin{aligned} V &= \frac{I\rho}{2\pi r'} \\ &= \frac{I\rho}{2\pi\sqrt{r^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

El objetivo ahora es el de incorporar la expresión hallada en (4.2.15) a la solución de la ecuación de Laplace para el potencial que fue calculada en (4.2.8) (Roy, 2008). Para conseguirlo se hace necesario utilizar la integral de Lipschitz la cual es conocida de la teoría de las ecuaciones de Bessel.

La integral de Lipschitz viene determinada por la expresión:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) \cdot d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (4.2.16)$$

Haciendo uso de la integral de Lipschitz se reescribe la ecuación (4.2.15) tomando la forma:

$$V = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (4.2.17)$$

Donde ρ_1 es la resistividad de la primera capa. El modelo que se utiliza es el de un cuerpo bajo el subsuelo homogéneo en todas las direcciones, con lo cual tendríamos que $\rho_1 \equiv \rho$ la cual es la resistividad de todo el cuerpo bajo la superficie.

La ecuación (4.2.17) representa el potencial en la superficie debido a una fuente puntual de corriente. Por otro lado la expresión hallada en (4.2.8) es

la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. En primera instancia la expresión dada (4.2.17) es sólo un caso particular de la solución dada en (4.2.8), por lo tanto debe estar contenida. Una manera sencilla de establecer una unión entre las expresiones es el sumarlas, pues la suma de dos soluciones lo es también de la ecuación diferencial. Si se hace esto y al sumar las expresiones (4.2.8) y (4.2.17) se obtendría:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) \cdot d\lambda + \int_0^\infty [\phi(\lambda) e^{-\lambda z} + \psi(\lambda) e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \\
 V &= \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda z} + \frac{2\pi}{I\rho_1} \phi(\lambda) e^{-\lambda z} + \frac{2\pi}{I\rho_1} \psi(\lambda) e^{\lambda z} \right] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{4.2.18}$$

Simplificando la expresión hallada en (4.2.18) haciendo $\Theta(\lambda) = \frac{2\pi}{I\rho_1} \phi(\lambda)$ y $X(\lambda) = \frac{2\pi}{I\rho_1} \psi(\lambda)$ se obtiene:

$$V = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda z} + \Theta(\lambda) e^{-\lambda z} + X(\lambda) e^{\lambda z} \right] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \tag{4.2.19}$$

El llegar a esta ecuación (4.2.19) supuso un estrato en el cual las propiedades eléctricas se distribuyen de forma homogénea, con lo cual, la resistividad ρ_1 hace referencia a la resistividad de todo el material del subsuelo. Dado que el objetivo es el de evaluar la distribución de la resistividad para un conjunto de capas que se distribuyen de forma plano-paralela bajo la superficie, la solución encontrada en (4.2.19) podrá ser utilizada toda vez que sea utilizada en cada una de las capas que hagan parte del sistema que se esté evaluando, es decir, las funciones que son $\Theta(\lambda)$ y $X(\lambda)$ funciones arbitrarias de λ (y por tanto que dependen de las condiciones de frontera específicas) son funciones distintas según la capa que se considere.

Por lo tanto hay una solución diferente para cada capa y vendría deter-

minada por (Roy, 2008):

$$V_i = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty [e^{-\lambda z} + \Theta_i(\lambda) e^{-\lambda z} + X_i(\lambda) e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (4.2.20)$$

Donde ρ_1 es la resistividad de la primera capa, la cual se encuentra más cerca a la superficie.

4.2.2. Condiciones de frontera

Siguiendo a (Zhdanov, 2009), del modelo que se quiera evaluar dependen las funciones $\Theta(\lambda)$ y $X(\lambda)$ las cuales pueden cambiar de una capa en capa. Sin embargo, independiente del modelo que se este evaluando se tiende a cumplir $\Theta_i(\lambda) \neq \Theta_{i+1}(\lambda)$ al igual que $X_i(\lambda) \neq X_{i+1}(\lambda)$. No obstante esto, existen unas condiciones adicionales que también deben cumplirse cuando se quiere calcular el potencial generado por una fuente puntual de corriente para un medio estratificado homogéneo. Esas condiciones son las siguientes:

1. El potencial eléctrico V es continuo para cada frontera existente del modelo.
2. La componente perpendicular del vector densidad de corriente \vec{J}_\perp , es continua en la frontera.
3. En la superficie, los vectores J_\perp y E_\perp deben ser cero para todo el espacio a excepción de una porción infinitesimal cercana a la fuente.
4. El potencial cerca de la fuente tiende a infinito como una función de la forma:

$$\begin{aligned} V &= \frac{I\rho}{2\pi r'} \\ &= \frac{I\rho}{2\pi\sqrt{r^2 + z^2}} \end{aligned}$$

5. Cuando $z \rightarrow \infty$ el potencial tiende a 0.

A continuación, se evalúa a detalle las condiciones establecidas.

Condición 1

Dado que el potencial debe ser continuo se debe cumplir $V_i = V_{i+1}$, con lo cual utilizando la expresión (4.2.20) se tiene:

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda z} + \Theta_i(\lambda) e^{-\lambda z} + X_i(\lambda) e^{\lambda z} \right] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda = \\ & \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda z} + \Theta_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda z} + X_{i+1}(\lambda) e^{\lambda z} \right] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda = \\ & V_{i+1} \end{aligned}$$

Para que en la expresión anterior se cumpla la igualdad los integrandos deben ser iguales, con lo cual la primera condición de frontera genera el criterio:

$$\Theta_i(\lambda) e^{-\lambda h_i} + X_i(\lambda) e^{\lambda h_i} = \Theta_{i+1}(\lambda) e^{-\lambda h_i} + X_{i+1}(\lambda) e^{\lambda h_i} \quad (4.2.21)$$

Donde $z = h_i$ es la profundidad a la que se encuentra la frontera entre las capas i e $i + 1$.

Condición 2

La componente perpendicular del vector densidad de corriente \vec{J}_\perp , es continua en la frontera, es decir, $\vec{J}_{\perp i} = \vec{J}_{\perp i+1}$.

Al tomar la densidad de corriente de la ley de Ohm se tiene.

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \frac{1}{\rho} \vec{E} \\ &= -\frac{1}{\rho} \nabla V \end{aligned}$$

Con lo cual, la dirección perpendicular sería:

$$J_{\perp} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial z}$$

Reemplazando el potencial calculado en la ecuación (4.2.20) en la expresión encontrado en la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} J_{i\perp} &= -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial V_i}{\partial z} \quad \text{donde} \quad z = h_i \\ &= \frac{1}{\rho_i} \int_0^{\infty} [(1 + \Theta_i(\lambda)) e^{-\lambda h_i} + X_i(\lambda) e^{\lambda h_i}] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Sin embargo, la primera condición pide que $J_{\perp i} = J_{\perp i+1}$ y para que esto se cumpla, los integrados deben ser iguales, con lo cual se tiene:

$$\frac{1}{\rho_i} [(1 + \Theta_i(\lambda)) e^{-\lambda h_i} - X_i(\lambda) e^{\lambda h_i}] = \frac{1}{\rho_{i+1}} [(1 + \Theta_{i+1}(\lambda)) e^{-\lambda h_i} - X_{i+1}(\lambda) e^{\lambda h_i}] \quad (4.2.23)$$

Condición 3

La segunda condición de frontera sostiene la continuidad de J_{\perp} entre las capas, pero habría que prestar un poco más de atención a la frontera tierra-aire .

Para los métodos de exploración eléctrica se establece que el aire tiene propiedades nulas de conducción, lo cual lo convierte en una especie de aislante perfecto. Esto significa que en el aire la densidad de corriente debe ser nula ($J = 0$); sin embargo la condición de frontera dos implica que en la primera capa de la tierra la componente perpendicular (J_{\perp}) también debería ser cero, pero no puede serlo en la fuente. Se hace necesario entonces una vecindad infinitesimal, que contenga a la fuente, en donde se cumpla $J_{\perp} \neq 0$.

Derivando la ecuación (4.2.20) para la primera capa se tiene:

$$\begin{aligned}
 J_{1\perp} &= - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} \Big|_{z=0} \\
 &= \frac{1}{\rho_1} \int_0^\infty [(-1 - \Theta_1(\lambda)) + X_1(\lambda)] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.2.24}$$

La ecuación (4.2.24) indica que J_{\perp} es cero para todo punto sobre la superficie a excepción de la fuente. Con lo cual en esta ecuación se cuenta con la adición de dos campos, es decir:

$$J_{1\perp} = \frac{1}{\rho_1} [\text{Campo Primario} + \text{Campo Secundario}]$$

Cada una de las expresiones corresponde:

$$\text{Campo Primario} \equiv \int_0^\infty J_0(\lambda r) \cdot d\lambda$$

$$\text{Campo Perturbado} \equiv \int_0^\infty [-\Theta_1(\lambda) + X_1(\lambda)] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \tag{4.2.25}$$

El campo primario hace referencia al calculado en (4.2.17) al hacer $z = 0$. Por otra parte el campo perturbado tiene en cuenta la disposición geométrica del subsuelo, con lo cual es el encargado de realizar la descripción en las fronteras entre cada una de las capas, por ejemplo en un modelo de dos capas, aquel campo realiza una descripción de la interface entre las capas 1 y 2 (es decir, para $z = h_1 > 0$). Por último, es importante destacar que la componente perpendicular toma el valor de cero en todo punto, incluyendo aquellos sitios en los cuales se encuentra la fuente.

$$[\text{Campo Perturbado}]_{\perp} = 0, \quad \forall r$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la ecuación (4.2.25) para el campo perturbado, es posible apreciar que para que la condición anterior se pueda cumplir para cualquier r , se hace necesario que la adición de las funciones Θ y X sea igual a cero. Con lo cual:

$$\Theta_1(\lambda) = X_1(\lambda) \quad (4.2.26)$$

Esta última expresión define el potencial en la superficie, ya que si se aplica sobre (4.2.20) y haciendo $z = 0$ se tiene:

$$V = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} [1 + 2\Theta_1(\lambda)] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (4.2.27)$$

Como el potencial en la superficie es una magnitud que se puede medir directamente a partir de los sondeos, la ecuación (4.2.27) es de gran importancia en la teoría electromagnética.

Condición 4

Esta condición encuentra su justificación al utilizar la solución hallada en (4.2.17) la cual hace referencia al potencial eléctrico en superficie. Otra manera de abordarla es a través del uso del campo primario en la condición tres ya que al ser integrada se halla la identidad que se está buscando.

Condición 5

Cuando la profundidad tienda a infinito, el potencial debe tender a cero. Para cumplir esta condición es necesario que en la capa más profunda (en la n -ésima capa) la función X sea nula o de lo contrario el factor $e^{\lambda z}$ hará que el potencial diverga a infinito.

$$X_n(\lambda) = 0 \quad (4.2.28)$$

4.2.3. Sistema de ecuaciones

Las ecuaciones descritas en (4.2.21), (4.2.23), (4.2.26) y (4.2.28) representan un sistema de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas, las cuales son las funciones arbitrarias de λ , a saber, $\Theta(\lambda)$ y $X(\lambda)$ (Onodera, 1960).

Si se reemplazan las ecuaciones (4.2.26) y (4.2.28) en (4.2.21) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\alpha \equiv \begin{cases} \Theta_1 e^{-\lambda h_1} + \Theta_1 e^{\lambda h_1} = \Theta_2 e^{-\lambda h_1} + X_2 e^{\lambda h_1} \\ \Theta_2 e^{-\lambda h_2} + X_2 e^{\lambda h_2} = \Theta_3 e^{-\lambda h_2} + X_3 e^{\lambda h_2} \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots = \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \Theta_{n-1} e^{-\lambda h_{n-1}} + X_{n-1} e^{\lambda h_{n-1}} = \Theta_n e^{-\lambda h_{n-1}} + X_n e^{\lambda h_{n-1}} \end{cases} \quad (4.2.29)$$

Si se tiene en cuenta las sustituciones:

$$u_i = e^{-\lambda h_i} \qquad v_i = e^{\lambda h_i} \qquad p_i = \frac{p_i}{p_i + 1} \quad (4.2.30)$$

El sistema descrito por (4.2.29) toma la forma:

$$\alpha' \equiv \begin{cases} (u_1 + v_1)\Theta_1 - u_1\Theta_2 - v_1X_2 & = 0 \\ u_2\Theta_2 + v_2X_2 - u_2\Theta_2 - v_2X_2 & = 0 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots & = \vdots \\ u_{n-1}\Theta_{n-1} + v_{n-1}X_{n-1} - u_{n-1}\Theta_n - v_{n-1}X_n & = 0 \end{cases} \quad (4.2.31)$$

De forma similar se puede calcular un sistema de ecuaciones llamado β . Esta vez se utilizan las ecuaciones (4.2.26) y (4.2.28) las cuales son reemplazadas en la expresión obtenida en (4.2.23). Una vez más se utilizan las

CAPÍTULO 4. PROSPECCIÓN GEOELÉCTRICA

expresiones descritas en (4.2.30). Siguiendo el procedimiento descrito anteriormente se tiene:

$$\beta \equiv \begin{cases} (1 + \Theta_1) u_1 - \Theta_1 v_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} [(1 + \Theta_2) u_1 - X_2 v_1] \\ (1 + \Theta_2) u_2 - X_2 v_2 = \frac{\rho_2}{\rho_3} [(1 + \Theta_3) u_2 - X_3 v_2] \\ \vdots \\ (1 + \Theta_{n-1}) u_{n-1} - X_{n-1} v_{n-1} = \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} [(1 + \Theta_n) u_{n-1} - X_n v_{n-1}] \end{cases} \quad (4.2.32)$$

Si los parámetros $(u_i, v_i, p_i,)$ son agrupados para cada una de las variables (Θ_i, X_i) , es posible establecer un sistema adicional de ecuaciones el cual llamaremos β' y el cual estaría determinado por la siguiente expresión:

$$\beta' \equiv \begin{cases} (v_1 - u_1) \Theta_1 + p_1 u_1 \Theta_2 - p_1 v_1 X_2 = (1 - p_1) u_1 \\ - u_2 \Theta_2 + v_2 X_2 + p_2 u_2 \Theta_3 - p_2 v_2 X_3 = (1 - p_2) u_2 \\ \vdots \\ - u_{n-1} \Theta_{n-1} + v_{n-1} X_{n-1} + p_{n-1} u_{n-1} \Theta_n - p_{n-1} v_{n-1} X_n = (1 - p_{n-1}) u_{n-1} \end{cases} \quad (4.2.33)$$

Al realizar la unión de los sistemas de ecuaciones expuestos en (4.2.31) y (4.2.33) es posible construir un nuevo sistema $\gamma \equiv \alpha' \cup \beta'$ (Onodera, 1960), el cual consiste en un sistema de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas. γ puede ser resuelta para $\Theta_1 (\lambda)$ haciendo uso de la regla de Cramer, la cual indica que $\Theta_1 (\lambda)$ será el cociente entre dos determinantes.

Si D es parte del determinante ubicado en el denominador al utilizar la regla de Cramer, el cual se encuentra formado por los coeficientes de Θ y de X del sistema γ quitando la primera columna, en la cual se reemplaza por los coeficientes de la parte derecha del sistema de ecuaciones de γ . Esta fracción del determinante estaría determinado por la expresión:

$$P = \begin{vmatrix} -u_1 - u_1 - v_1 \\ u_1 & p_1 u_1 - p_1 v_1 \\ & u_2 & v_2 - u_2 - v_2 \\ -u_2 & v_2 & p_2 u_2 - p_2 v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & u_{n-1} + v_{n-1} - u_{n-1} - v_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -u_{n-1} + v_{n-1} + p_{n-1} u_{n-1} - p_{n-1} v_{n-1} \end{vmatrix} \quad (4.2.36)$$

Con lo cual, la solución para $\Theta_1(\lambda)$ con la condición (4.2.26) toma la forma:

$$\Theta_1(\lambda) = \frac{P}{D} \quad (4.2.37)$$

Esta solución define el potencial de la primera capa al igual que lo hace en superficie si se hace $z = 0$ haciendo uso de la siguiente expresión (Meju, 1994):

$$V = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty [1 + 2\Theta_1(\lambda)] J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (4.2.38)$$

En principio el problema directo para el potencial encuentra solución, si se conoce el modelo de capas y los parámetros del sistema (altura de las capas h_i , resistividad ρ_i), con lo cual se puede determinar la función Θ_1 y en consecuencia se determina el potencial en la superficie según la ecuación (4.2.38).

4.2.4. Relación de recurrencia

La ecuación hallada a través de (4.2.38) indica que una vez calculada Θ_1 mediante la regla de Cramer, es posible calcular el potencial en superficie. Sin

embargo, esta expresión se encuentra condicionada por el modelo mediante el cual se calcula Θ_1 , es decir, los parámetros del sistema como lo son el número de capas, la profundidad y la resistividad. Se hace necesario calcular los determinantes D y P en cada modelo con el fin de ser utilizados en la ecuación (4.2.37). Al realizar este procedimiento de forma sistemática se hace posible calcular unas relaciones de recurrencia que posibilitan calcular los valores de los determinantes de un modelo en específico con respecto de los valores calculados de un modelo anterior.

Con el fin de realizar este objetivo, se hace necesario realizar algunas definiciones (Wait, 1954).

Sea $K(\lambda)$ una función conocida como el Kernel de Slichter, determinada por la expresión:

$$K(\lambda) = 1 + 2\Theta_1(\lambda) \quad (4.2.39)$$

Es posible definir una nueva función, la cual se encuentra en función de los determinantes ya establecidos obteniéndose la siguiente expresión:

$$N = D + 2P \quad (4.2.40)$$

Con lo cual

$$K = \frac{N}{D} \quad (4.2.41)$$

Y el potencial en la superficie toma la forma:

$$V = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty K(\lambda) J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (4.2.42)$$

Habiendo aplicado las definiciones correspondientes al Kernel de Slichter es posible abordar las relaciones de recurrencia. En general, existen dos tipos

de relaciones que se pueden establecer teniendo en cuenta el modelo que se quiere evaluar en este trabajo. En principio se tiene la relación de Pekeris la cual indica que a la estructura primaria se le adiciona una capa sobre la superficie y adicionando las demás capas por debajo de esta nueva capa en dirección $-z$. Por otro lado, se cuenta con la relación de Flathe en la cual se adiciona una capa por debajo de la superficie y las nuevas capas se adicionan por encima de esta en dirección z hasta llegar a superficie.

La figura (4.4) es un esquema que muestra la diferencia entre estas relaciones.

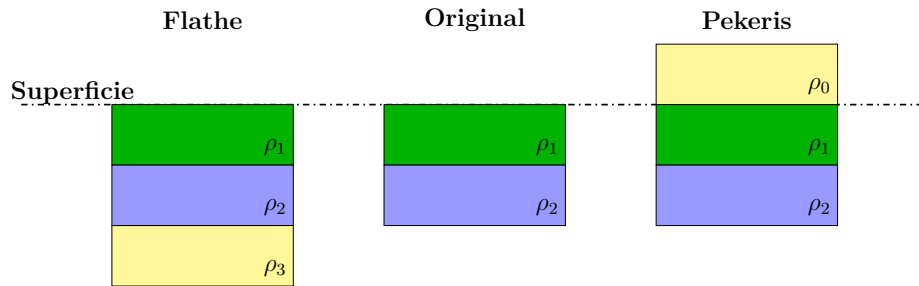


Figura 4.4: Relaciones de recurrencia de Flathe y de Pekeris

Dada la estructura matemática menos compleja resulta más sencillo hacer uso de la relación de recurrencia de Flathe; con lo cual, teniendo en cuenta la expresión (4.2.41) para un modelo de n capas y siendo D_n la parte del determinante que se ubica en el denominador y N_n el determinante correspondiente al numerador y haciendo uso de las definiciones dadas en (4.2.30) las relaciones de recurrencia toman la forma (Flathe, 1955):

$$\begin{cases} D_{n+1}(u) = D_n(u) - k_n u_n^2 D_n \frac{1}{u} \\ N_{n+1}(u) = N_n(u) - k_n u_n^2 N_n \frac{1}{u} \end{cases} \quad (4.2.43)$$

Donde

$$\begin{aligned}
 k_n &= \frac{1 - \rho_n}{1 + \rho_n} \\
 &= \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\rho_{n+1} + \rho_n}
 \end{aligned}
 \tag{4.2.44}$$

4.2.5. Sistema de dos capas

Como ejemplo y como forma de sintetizar el trabajo realizado en las secciones anteriores, se encuentra la solución para Θ_1 en un sistema de dos capas.

Si se toma en cuenta las consideraciones hechas al modelo, este sistema toma la forma de aquel en el que se cuenta con un subsuelo estratificado de forma homogénea el cual consta de dos interfaces. La primera de ellas es la interfaz *aire-superficie* en la cual aplican las condiciones de frontera antes mencionadas. La capa que se encuentra por debajo de la superficie se encuentra caracterizada por los parámetros h_1 , el cual responde al espesor de la capa medido desde la superficie hasta la base y que corresponde de igual forma a la frontera superior de la siguiente capa y ρ_1 que es la resistividad de esta primera capa.

Como segunda interfaz se cuenta con la frontera entre las capas uno y dos, la capa número dos se encuentra caracterizada únicamente por el parámetro de resistividad ρ_2 (resistividad de la segunda capa) ya que se asume un grosor infinito para esta capa, es aquí, donde la condición de frontera cinco cobra especial importancia.

En el caso de un sistema de dos capas el denominador teniendo en cuenta la regla de Cramer, ecuación (4.2.34) se encuentra determinado por:

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \begin{vmatrix} u_1 + v_1 - u_1 & \\ v_1 - u_1 & p_1 u_1 \end{vmatrix} \\
 &= 1 + p_1 - u_1^2 + p_1 u_1^2 \\
 &= 1 - \frac{1 - p_1}{1 + p_1} u_1^2
 \end{aligned}$$

Al utilizar la expresión calculada en (4.2.44) cuando $n = 1$ se tiene:

$$D_2 = 1 - k_1 u_1^2 \quad (4.2.45)$$

Al realizar el cálculo con el fin de encontrar P_2 , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \begin{vmatrix} -u_1 - u_1 & \\ u_1 & p_1 u_1 \end{vmatrix} \\
 &= (1 - p_1) u_1^2
 \end{aligned}$$

Al utilizar la expresión $N_2 = D_2 + 2P_2$, se tiene:

$$N_2 = 1 + k_1 u_1^2 \quad (4.2.46)$$

Al utilizar el Kernel de Slichter ecuación, (4.2.41), se tiene:

$$K = \frac{1 + k_1 u_1^2}{1 - k_1 u_1^2} \quad (4.2.47)$$

Si se despeja Θ_1 de la ecuación (4.2.39), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \Theta_1 &= \frac{1 + k_1 u_1^2}{1 - k_1 u_1^2} \\
 &= \frac{1}{2} [K - 1] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 + k_1 u_1^2}{1 - k_1 u_1^2} - 1 \right] \\
 &= \frac{k_1 u_1^2}{1 - k_1 u_1^2}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que por definición se tiene que $u_1 \equiv e^{-\lambda h_1}$, la expresión anterior toma la forma:

$$\Theta_1 = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1}} \quad (4.2.48)$$

La expresión encontrada en la ecuación (4.2.48) para la función Θ_1 corresponde para un modelo de dos capas. Es de destacar el hecho que teniendo en cuenta la condición de frontera tres, la primera capa cumple la ecuación (4.2.26), es decir $\Theta_1 = X_1$. Habiendo calculado la función $\Theta_1(\lambda)$ correspondiente a la primera capa es posible calcular la integral del potencial en superficie mediante (4.2.27).

4.2.6. Resistividad aparente

Teniendo en cuenta que muchas veces no es posible contar con una representación adecuada de las dimensiones del objeto de estudio, en geofísica se hace necesario hacer uso de las propiedades intensivas de la materia, las cuales permiten realizar la validación de nuestros modelos a través de mediciones realizadas en superficie ya que este tipo de propiedades no se encuentra estrechamente vinculada con la cantidad de materia del cuerpo que se está evaluando. Es por esta razón que en los métodos en los que se busca encontrar una respuesta producto de la interacción de campos eléctricos o magnéticos

CAPÍTULO 4. PROSPECCIÓN GEOELÉCTRICA

no se persigue calcular la *resistencia* sino la *resistividad* de los cuerpos. No obstante, al realizar mediciones en superficie el dato de resistividad que se obtiene es único, lo cual imposibilita de antemano asignar la contribución que una parte u otra del subsuelo está realizando al dato registrado.

Este hecho se ve contrarrestado mediante el uso del concepto de *resistividad aparente*. Este valor es la respuesta que brinda el subsuelo al responder “como un todo”, es decir, como un solo sistema ante el flujo de corriente a través de él. La resistividad aparente es el valor que obtiene a partir de mediciones realizadas en un sondeo eléctrico vertical (SEV) y corresponde con la resistividad real solamente cuando se asume el subsuelo como un medio perfectamente homogéneo e isotrópico.

Para el caso de un medio homogéneo e isotrópico un análisis de la resistividad aparente está determinado por un análisis del potencial a través de la ecuación (ref:ecu:4.2.14).

$$V = \frac{I\rho}{2\pi r}$$

Teniendo en cuenta la figura (4.5) es posible observar que los potenciales V_1 y V_2 puede ser calculado haciendo uso de la expresión que se indica en (4.2.14). La diferencia de potencial entre estos dos puntos toma la forma:

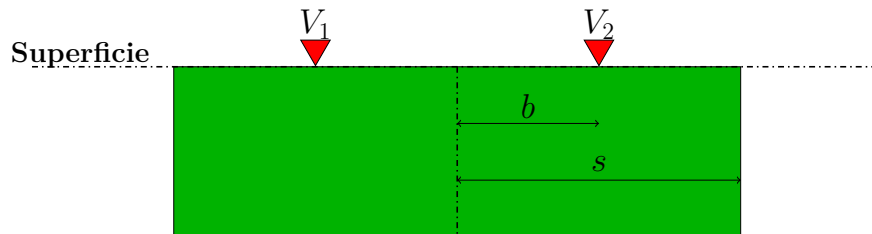


Figura 4.5: Representación de un SEV. El punto de observación se encuentra en el punto medio entre V_1 y V_2

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{I\rho}{2\pi} \left[\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b} \right] \quad (4.2.49)$$

CAPÍTULO 4. PROSPECCIÓN GEOELÉCTRICA

Aquí s es la distancia entre el punto de observación y el electrodo de corriente por otro lado b representa la distancia entre el electrodo de corriente y el electrodo potencial.

Despejando la resistividad en la expresión (4.2.49) se tiene:

$$\rho_a = \frac{\Delta V 2\pi s}{I} \cdot 2 \frac{s^2 - b^2}{4bs} \quad (4.2.50)$$

La figura (4.5) supone una disposición específica de los electrodos de potencial y corriente, no obstante esta configuración no es única y depende del propósito de exploración. Al cambiar esta configuración el factor en la ecuación (4.2.50):

$$\frac{s^2 - b^2}{4bs}$$

Llamado *factor geométrico* podría ser diferente.

Si se toma la ecuación (4.2.42), la cual indica el potencial para una tierra estratificada y usando la expresión que determina la diferencia de potencial $V_2 - V_1$:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_2 - V_1 \\ &= V(s - b) - V(s + b) \end{aligned}$$

Tomando la diferencia bajo la expresión del potencial expuesta en (4.2.42) y reemplazando en la ecuación (4.2.50), se tiene:

$$\rho_a = 2\rho_1 s \cdot \frac{s^2 - b^2}{4bs} \int_0^\infty K(\lambda) [J_0(\lambda s - \lambda b) - J_0(\lambda s + \lambda b)] \cdot d\lambda \quad (4.2.51)$$

4.3. Arreglo Schlumberger

El factor geométrico depende de la distribución de los electrodos respecto al punto en donde se realiza la medición (punto de observación). El tipo de arreglo en el cual se está interesado en este trabajo es el arreglo tipo Schlumberger. Una representación esquemática de este tipo de arreglo es el que se indica en figura (4.5), en el cual hay dos electrodos de potencial los cuales se ubican cerca del punto de observación y cuya distancia b permanece constante durante las medidas. Los electrodos de corriente se disponen a una distancia mayor s , distancia que eventualmente se hace mas grande con el fin de lograr una mayor penetración con lo cual se obtenga una mayor información del subsuelo en la zona de estudio.

El hecho de hacer que los electrodos de corriente se alejen del punto de observación mientras que la distancia b de los electrodos de potencial se mantenga constante, permite hacer una aproximación sobre el factor geométrico. Esta aproximación asume que la distancia b se hace muy pequeña, con lo cual se tiene $s \gg b$ por lo tanto el factor geométrico toma la forma:

$$\frac{s^2 - b^2}{4bs} \rightarrow \frac{s}{4s}$$

Si se aplica esta aproximación sobre (4.2.50) se tiene:

$$\begin{aligned} \rho_{aSch} &\approx \frac{2\pi s}{I} \cdot \frac{s}{4b} \Delta V \\ &= \frac{2\pi s^2}{2I} \cdot \frac{\Delta V}{2b} \\ &= -\frac{2\pi s^2}{I} \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=s} \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

La última expresión proviene de la sustitución

$$\frac{\Delta V}{2b} \rightarrow -2 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=s}$$

La expresión del potencial a derivar corresponde a la expresión calculada en 4.2.38, la cual al expandirla toma la forma:

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[\int_0^\infty J_0(\lambda r) \cdot d\lambda + 2 \int_0^\infty \Theta_1 \cdot J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \right] \quad (4.3.2)$$

Teniendo en cuenta (4.3.1) el potencial toma la forma:

$$V = \frac{\rho_1 I}{2\pi r} + \frac{\rho_1 I}{\pi} \int_0^\infty \Theta_1 \cdot J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (4.3.3)$$

Al reemplazar esta última expresión en la ecuación de la resistividad aparente (4.3.1) y usando la propiedad de las funciones de Bessel:

$$\frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} = -J_1(\lambda r)$$

Se obtiene la expresión de resistividad aparente asociada a un arreglo de tipo Schlumberger.

$$\rho_{aSch}(s) = \rho_1 + 2\rho_1 s^2 \int_0^\infty \Theta_1 J_1(\lambda r) \lambda \cdot d\lambda \quad (4.3.4)$$

4.4. Solución del problema directo

4.4.1. Modelo de dos capas

Para dar una solución del problema directo, se realiza un desarrollo computacional de las ecuaciones (4.3.4), la cual se estableció a través del uso de las ecuaciones de Maxwell cuando estas son aplicadas al estudio del subsuelo.

Para realizar un análisis de la ecuación que se quiere solucionar, se hace necesario establecer los parámetros del sistema los cuales son el número de

CAPÍTULO 4. PROSPECCIÓN GEOELÉCTRICA

capas involucradas (n), la resistividad de cada una de ellas (ρ_i) y la profundidad a la que se encuentran dichas capas (h_i). Las medidas que se esperan obtener son la resistividad aparente y el voltaje las cuales son expresiones conocidas mediante las ecuaciones (4.2.38) y (4.3.4). La figura (4.6) ejemplifica el significado físico que se busca dar en este trabajo tanto de los parámetros como de las magnitudes a tener en cuenta en este trabajo.

Para solucionar el problema directo se requiere conocer todos los parámetros. Inicialmente se dará solución al modelo de dos capas, cuyos parámetros se muestran en la tabla (4.1).

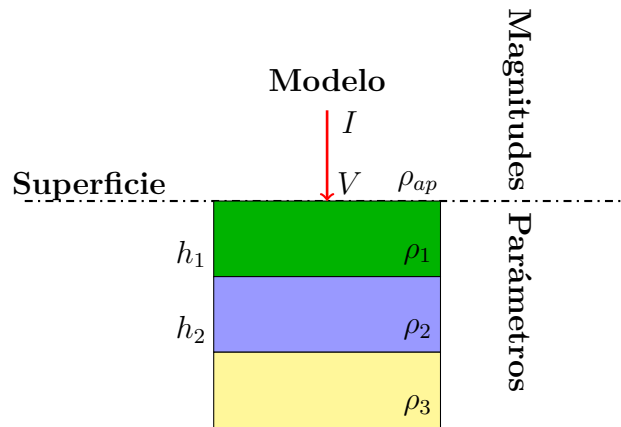


Figura 4.6: Magnitudes (suprayaciendo a la superficie) y parámetros (infrayaciendo a la superficie) en un modelo de tres capas.

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	130	h_1	17.2
ρ_2	1006		

Tabla 4.1: Parámetros del modelo de dos capas.

Se encontró una expresión para la función Θ_1 , ecuación (4.2.48), como se muestra a continuación:

$$\Theta_1 = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1}}$$

Donde:

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{1 - \rho_n}{1 + \rho_n} \\ &= \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\rho_{n+1} + \rho_n} \end{aligned}$$

Los parámetros definen la expresión de la función $\Theta_1(\lambda)$, la cual a su vez determina la integral del potencial y de la resistividad aparente (ecuaciones (4.2.38) y 4.3.4 respectivamente). Ésta última por ejemplo, logra ser solucionada al resolver:

$$\rho_{aSch}(s) = \rho_1 + 2\rho_1 s^2 \int_0^\infty \Theta_1 J_1(\lambda r) \cdot d\lambda$$

Sin embargo, ésta es una integral al infinito que contiene una función de Bessel de primer orden y no tiene solución exacta. Una forma de resolverla es expandir la función de Bessel como:

$$J_1(\lambda r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+2)} \left(\frac{\lambda s}{2}\right)^{2j+1} = \frac{\lambda s}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda s}{2}\right)^3 + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda s}{2}\right)^5 - \dots \quad (4.4.1)$$

Donde Γ corresponde a la función gamma.

Tomando la ecuación (4.4.1), la integral sobre la resistividad toma la forma:

$$\rho_{aSch}(s) = \rho_1 + 2\rho_1 s^2 \int_0^\infty \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1}} \left[\frac{\lambda s}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda s}{2}\right)^3 + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda s}{2}\right)^5 - \dots \right] \lambda d\lambda \quad (4.4.2)$$

CAPÍTULO 4. PROSPECCIÓN GEOELÉCTRICA

Se puede tratar de resolver la integral indefinida para el primer término de la expansión:

$$\int_0^\infty \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1}} \left[\frac{\lambda s}{2} \right] \lambda d\lambda = \frac{1}{24h_1^2 k_1} \left\{ 2h_1^2 \lambda^2 \left[3 \ln \left(1 - \frac{e^{2\lambda h_1}}{k_1} - 2\lambda h_1 \right) + 6\lambda h_1 L_{i2} \left(\frac{e^{2\lambda h_1}}{k_1} \right) - 3L_{i3} \left(\frac{e^{2\lambda h_1}}{k_1} \right) \right] \right\}$$

Sin embargo aparecen unas funciones especiales llamadas funciones poli-logaritmo L_{i2} y L_{i3} (también conocidas como *funciones de Jonquiére*). Éstas son funciones complejas definidas sobre un disco unitario en el plano complejo que tampoco tienen una solución exacta. Aun más, las funciones están definidas como:

$$L_{i\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\nu} \quad \text{Para } |z| < 1$$

Pero esta condición no se cumple para el caso actual donde:

$$z \equiv \frac{e^{2\lambda h_1}}{k_1}$$

y λ toma todos los posibles valores en el intervalo $[0, \infty)$. No obstante es posible extender la definición para todo el plano complejo realizando un proceso de continuación analítica.

Lo anterior muestra la conveniencia de encontrar una solución numérica de la integral (4.3.4) y así resolver el problema directo para la resistividad aparente. En busca de este objetivo se implementó un código en el lenguaje de Matlab, en donde se resuelve la integral impropia usando el método de cuadratura Gauss-Laguerre.

Este método es útil para resolver integrales al infinito y cuyos integrandos son funciones que oscilan o tienen un decaimiento asintótico con respecto al eje de las abscisas. Tal es el caso de la integral (4.3.4) en donde la función de

Bessel J_1 oscila (ver figura 4.1) y la función $\Theta_1(\lambda)$ posee exponenciales que permiten que la integral converga en el infinito, sin embargo, este término decae abruptamente y por tanto hay que tomar ciertas consideraciones.

La integral de la resistividad aparente produce una función que depende de la distancia de los electrodos de corriente ($\rho_a = \rho_a(s)$); dicha distancia se nota con la letra “ s ” o también se conoce comúnmente como la distancia $AB/2$, donde A y B son los electrodos de corriente. Por lo tanto, existe un valor de resistividad por cada distancia $AB/2$.

Para solucionar el problema directo se utilizaron valores que fuesen coherentes con una medición real de un trabajo de campo. Dichos valores abarcan tanto los parámetros del modelo teórico (tabla 4.1), al igual que las distancias $AB/2$ de los electrodos (columna de la izquierda tabla (4.2)), que son propias de la toma de mediciones reales en campo. La tabla (4.2) muestra los valores $AB/2$ escogidos y los resultados de la resistividad obtenidos mediante la implementación del programa; a su vez la figura (4.7) despliega la gráfica de la resistividad aparente en función de la distancia $AB/2$ en escala logarítmica.

La figura (4.7) indica el cambio que se genera al incrementar la distancia $AB/2$ en el valor de la resistividad aparente. No hay que olvidar, que la profundidad de penetración en los sondeos eléctricos verticales (SEV) se encuentra relacionado de una forma directa con la distancia de separación de los electrodos de corriente, con lo cual, si se busca mayor penetración en el subsuelo se hace necesario un incremento en la distancia de separación entre estos electrodos.

El utilizar métodos geoelectricos en el estudio de la Tierra, generan fundamentalmente corrientes de tipo iónico, con lo cual se tiene que son los fluidos (atrapados en el material rocoso) y no la roca quienes permiten establecer una caracterización eléctrica del subsuelo. Con lo cual, aquellas regiones saturadas por fluidos con alto contenido iónico, serán más susceptibles de excitación eléctrica que aquellas que no los tengan. Este podría ser el caso ejemplificado por los parámetros señalados en la tabla (4.1).

AB/2 (m)	ρ_a ($\Omega \cdot m$)
5	130.6751
6	131.1533
7.3	132.0390
9	133.7095
11	136.4951
13	140.2125
16	147.5128
19	156.6980
23	171.3110
28	192.1565
35	223.5642
42	255.2277
50	290.1091
60	330.8697

Tabla 4.2: Datos (AB/2) utilizados y resultados (ρ_a) obtenidos para el modelo de dos capas desarrollado en Matlab.

El que a mayor profundidad el terreno se torne más resistivo puede tener explicación en la heterogeneidad del modelo que se está evaluando.

4.4.2. Comparación de resultados

Con el ánimo de contrastar los datos obtenidos a través del programa que se desarrolló para solucionar la ecuación (4.3.4) se utiliza el programa IPI2win.

Este programa recibe valores de resistividad aparente en función de la distancia de separación de los electrodos de potencia $AB/2$ y con ellos elabora una curva teórica de resistividad calculando los parámetros del modelo (número de capas n , valor de resistividad por capa ρ_i y la profundidad a la cual se encuentra cada una de ellas h_i) a través de mecanismos de inversión que genere el menor error entre los datos ingresados y los datos teóricos. No

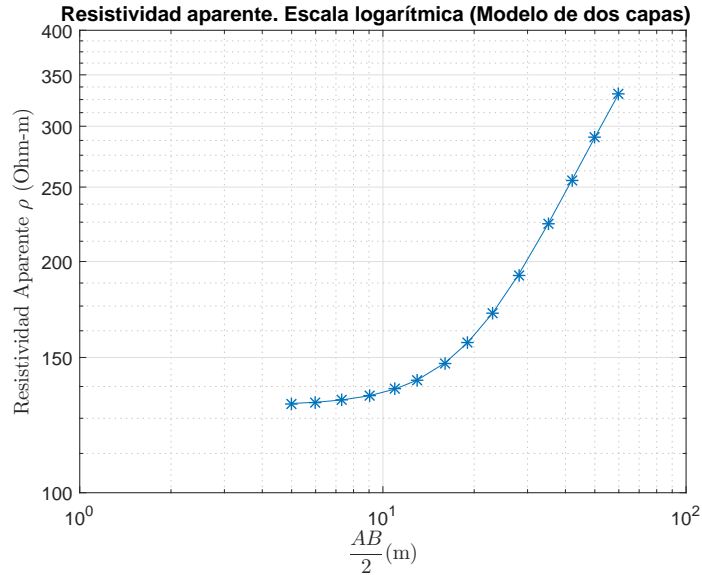


Figura 4.7: Resistividad Aparente para un modelo de dos capas.

obstante lo anterior, el programa permite una manipulación de los parámetros del modelo con el fin de obtener valores de resistividad en función de la distancia de los electrodos de potencia, es decir, resolver un problema directo. Fue así como se procedió para comparar los datos generados por el programa desarrollado en MatLab.

De esta forma se logra construir la tabla (4.3):

Al tomarse la diferencia porcentual sobre el total de los datos se obtiene un valor cercano al 0,02%. Este resultado indica que si se toma como referencia teórica los datos arrojados por el software IPI2win los datos obtenidos por medio del programa desarrollado en MatLab resultan una buena aproximación del modelo directo para el sistema que se está evaluando, es decir, que la evaluación numérica que se obtiene de la resistividad aparente resulta ser lo bastante consistente dados los parámetros del modelo.

CAPÍTULO 4. PROSPECCIÓN GEOELÉCTRICA

AB/2 (m)	IPI2win ρ_a ($\Omega \cdot m$)	MatLab ρ_a ($\Omega \cdot m$)	Error de ajuste (%)
5	130.7	130.6763	0.0181
6	131.2	131.1547	0.0345
7.3	132.0	132.0406	0.0308
9	133.7	133.7113	0.0085
11	136.5	136.4968	0.0023
13	140.2	140.2141	0.0101
16	147.5	147.5141	0.0096
19	156.7	156.6990	0.0006
23	171.3	171.3118	0.0069
28	192.1	192.1570	0.0297
35	223.5	223.5644	0.0288
42	255.3	255.2278	0.0283
50	290.1	290.1088	0.0030
60	330.5	330.8618	0.1095

Tabla 4.3: Comparación del ajuste de los datos de resistividad aparente entre el programa IPI2win con el programa realizado en Matlab para un modelo de dos capas.

4.4.3. Modelo de tres capas

Siguiendo el mismo procedimiento que se llevó a cabo para calcular la función $\Theta_1(\lambda)$ para el modelo de dos capas, se tiene que el determinante D_3 que hace las veces de denominador se encuentra determinado por la expresión:

$$D_3 = \begin{vmatrix} u_1 + v_1 & -u_1 & -v_1 \\ v_1 - u_1 & p_1 u_1 & -p_1 v_1 \\ 0 & u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Con lo cual se obtiene que $\Theta_1(\lambda)$ es:

$$\Theta_1(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2}}{1 + k_1 k_2 e^{-2\lambda(h_2 - h_1)} - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2 e^{-2\lambda h_2}}$$

Utilizando el algoritmo desarrollado en Matlab se obtienen los siguientes

CAPÍTULO 4. PROSPECCIÓN GEOELÉCTRICA

resultados de la resistividad aparente para un modelo de tres capas como se muestra en la tabla (4.4.3)

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	100	h_1	20
ρ_2	10	h_2	50
ρ_3	100		

Tabla 4.4: Parámetros para un modelo de tres capas.

AB/2 (m)	ρ_a ($\Omega \cdot m$)
5	99.7193
6	99.5203
7.3	99.1508
9	98.4512
11	97.2786
13	95.7053
16	92.5987
19	88.6784
23	82.4688
28	73.8043
35	61.5686
42	50.7334
50	41.0335
60	32.9738

Tabla 4.5: Datos (AB/2) utilizados y resultados (ρ_a) obtenidos para el modelo de tres capas desarrollado en Matlab.

Los datos obtenidos pueden ser sintetizados en la figura (4.8). Si se realiza el ejercicio de contrastar los datos obtenidos mediante el algoritmo construido en MatLab juntos con los del software IPI2win se obtienen los resultados indicados en la tabla (4.6).

Al tomarse la diferencia porcentual sobre el total de los datos se obtiene un valor cercano al 1.61 %.

CAPÍTULO 4. PROSPECCIÓN GEOELÉCTRICA

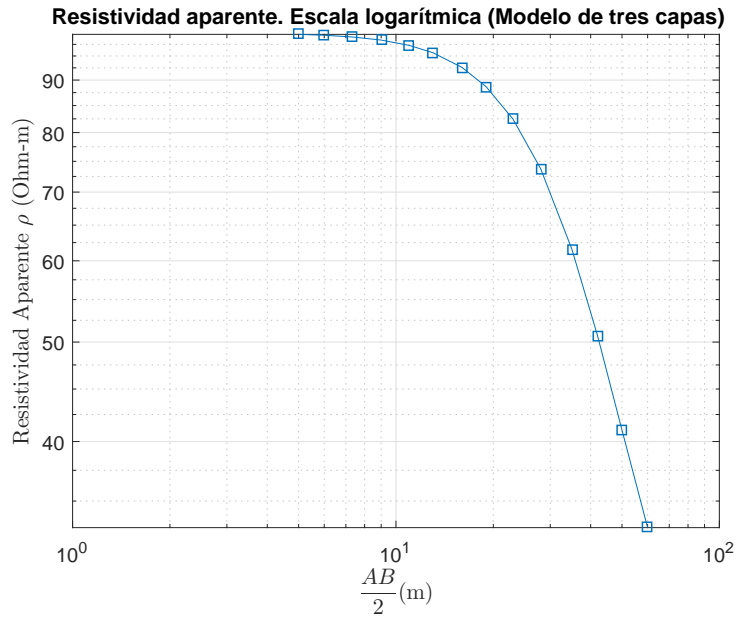


Figura 4.8: Resistividad Aparente para un modelo de tres capas.

$AB/2$ (m)	IPI2win ρ_a ($\Omega \cdot m$)	MatLab ρ_a ($\Omega \cdot m$)	Error de ajuste (%)
5	99.72	99.7193	0.00
6	99.50	99.5203	0.02
7.3	99.14	99.1508	0.01
9	98.43	98.4512	0.02
11	97.24	97.2786	0.04
13	95.64	95.7053	0.07
16	92.50	92.5987	0.11
19	88.49	88.6784	0.21
23	82.14	82.4688	0.40
28	73.29	73.8043	0.70
35	60.62	61.5686	1.56
42	49.02	50.7334	3.50
50	38.75	41.0335	5.89
60	29.98	32.9738	9.99

Tabla 4.6: Comparación del ajuste de los datos de resistividad aparente entre el programa IPI2win con el programa realizado en Matlab para un modelo de tres capas.

CAPÍTULO 4. PROSPECCIÓN GEOELÉCTRICA

En este capítulo se abordó el método eléctrico a fin de poder construir un modelo directo en un espacio 1D para un arreglo tipo Schlumberger

Capítulo 5

Inversión de datos geofísicos

5.1. Introducción

Un aspecto importante en la física es hacer inferencias del comportamiento de un sistema a partir de un ajuste en los parámetros hasta llegar a una visualización aceptable entre los datos de campo y las curvas de ajuste que permiten caracterizar un modelo. En general, las leyes de la física proveen el andamiaje conceptual suficiente que permite hacer una evaluación de dicho conjunto de datos con respecto a un modelo. A este tipo de evaluación de un sistema se le llama “problema directo” figura (5.1).

En el problema inverso, el propósito es la reconstrucción de un modelo desde un conjunto de datos con lo cual, por ejemplo, la “estructura del subsuelo” es directamente recobrada de los datos tomados en campo, figura (5.2). Sin embargo, los sistemas físicos que se buscan evaluar son por lo general mucho más complejos de lo que los modelos planteados y esto se debe fundamentalmente al hecho de que a partir de una cantidad limitada de información es casi imposible reconstruir un sistema en el cual se cuenta con una cantidad infinita de parámetros que condicionan su comportamiento; esto conlleva problemas ya que no se cuenta con una solución única, esto último en el sentido

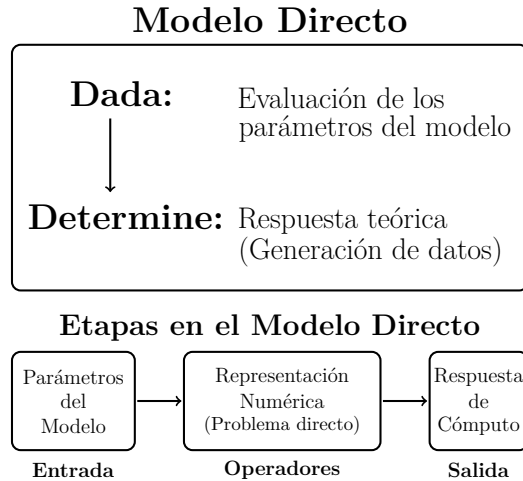


Figura 5.1: Representación del problema directo.

de que existen otros parámetros que podrían ajustar los datos de una manera igualmente aceptable.

Un esquema que ejemplifique de forma más real el proceso de inversión de datos podría ser el que se indica en la figura (5.3). En él se sugiere que los procesos de inversión consisten fundamentalmente en dos etapas. En una primera etapa (estimación del modelo) se realiza una reconstrucción y estimación del modelo m a partir de los datos d , una vez se haya realizado este proceso, se hace necesario establecer qué relación tienen el modelo estimado \vec{m} con el modelo real m . En esta “evaluación del problema” se determina que propiedades del modelo real son recuperadas por el modelo estimado y cual es el error inherente a la estimación realizada. Esto conlleva a la idea de que resulta ser un sinsentido realizar interpretaciones físicas de los sistemas sin un conocimiento en los errores y las limitaciones de resolución en el modelo planteado en principio (Trampert, 1998).

En general, existen dos razones por las cuales los modelos estimados difieren del modelo real. La primera razón es la unicidad en la solución del problema inverso lo cual causa que existan un sinnúmero de modelos que realizan

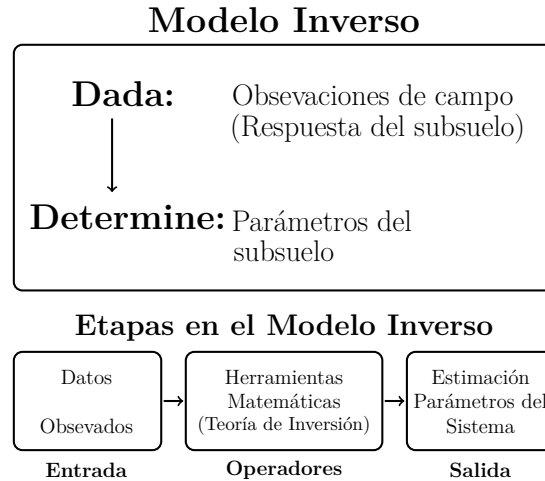


Figura 5.2: Representación del problema inverso.

un ajuste de los datos. La segunda razón se encuentra relacionada con los errores presentes en los datos, con lo cual el modelo estimado se encuentra afectado de igual forma. Por lo tanto, la evaluación de los modelos contiene dos partes, a saber, la evaluación de la singularidad y la propagación del error (Meju, 1994).

La estimación de los modelos y la evaluación de los modelos son fundamentalmente diferentes para modelos discretos con un número finito de grados de libertad al igual que la evaluación de los modelos sólo se encuentra bien definida para problemas de inversión lineal. En la vida real muchos de los problemas de inversión no son problemas lineales, sin embargo, pueden ser linealizados realizando una aproximación adecuada.

5.2. Estimación de modelos lineales

Como ya se mencionó en la sección anterior, el problema inverso mapea un número finito de datos en un modelo. En geofísica, en la mayoría de las aplicaciones los modelos son funciones continuas en el espacio coordenado con

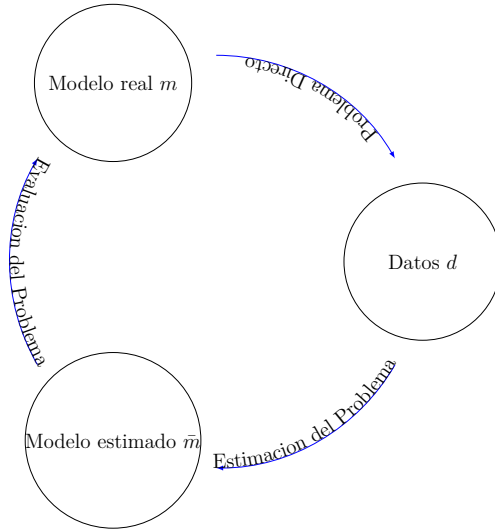


Figura 5.3: Problema inverso visto como una combinación de la estimación del problema más una evaluación del problema.

lo cual los sistemas cuentan con múltiples grados de libertad. En este trabajo se restringen los modelos a ser evaluados por tal razón se asume que los modelos pueden ser caracterizados por un número finito de parámetros.

5.2.1. Parámetros del modelo y error en el sistema

En un modelo de dimensiones finitas, los parámetros del modelo pueden ser organizados en un vector \mathbf{m} , de forma similar los datos pueden ser organizados en un vector \mathbf{d} . La matriz \mathbf{A} relaciona tanto a los datos como al modelo a través de la expresión $\mathbf{A}\mathbf{m}$ y de forma general se le conoce como el “operador teórico”. Adicionalmente, este operador contiene toda la información tanto física como matemática del modelo evaluado en el sistema objeto de estudio. En la práctica, los datos están contaminados con algún tipo de error \mathbf{e} , lo cual debe ser tomado en cuenta, de tal suerte que pueda ser relacionado con los datos y el modelo. Esta relación se establece a través de la función:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{e} \quad (5.2.1)$$

Es importante destacar que, aunque pueda parecer un poco arbitrario la determinación de los parámetros del modelo, esto es: un sistema puede ser explicado de múltiples formas, la determinación de uno u otro implica que ellos en sí mismos contienen las restricciones sobre el tipo de modelo que puede ser construido a partir de su uso.

A partir de los datos registrados en campo se puede realizar una estimación de los parámetros del modelo. Teniendo en cuenta que esta estimación puede ser diferente del modelo real, la estimación del modelo usualmente es denotada por $\tilde{\mathbf{m}}$. Existen muchas formas de diseñar un operador inverso que realice el mapeo de los datos sobre el modelo estimado (Menke, 2012), sin embargo, sin importar el estimador que se escoja para realizar esta operación, este puede ser descrito de forma similar por la expresión:

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{A}^{-g}\mathbf{d} \quad (5.2.2)$$

El operador \mathbf{A}^{-g} es llamado el “inverso generalizado” de la matriz \mathbf{A} . Por lo general el número de datos es diferente de el número de parámetros del modelo, por esta razón, \mathbf{A} no es una matriz cuadrada, con lo cual su inversa estrictamente hablando no existe. La relación entre los modelos estimados $\tilde{\mathbf{m}}$ y el modelo real \mathbf{m} se encuentra al reemplazar (5.2.1) en (5.2.2).

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{A}^{-g}\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{A}\mathbf{e} \quad (5.2.3)$$

La matriz $\mathbf{A}^{-g}\mathbf{A}$ es llamada la matriz de “resolución de Kernel”, su operador esta dado por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^{-g}\mathbf{A} \quad (5.2.4)$$

La expresión (5.2.3) según (Menke, 2012), puede ser reescrita de la siguiente forma :

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m} + (\mathbf{A}^{-g} \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{m} + \mathbf{A}^{-g} \mathbf{e} \quad (5.2.5)$$

Lo cual permite una interpretación más clara de lo que cada expresión es para el sistema que se está evaluando.

En el caso ideal, el vector correspondiente a los parámetros del modelo estimado $\tilde{\mathbf{m}}$ es igual al vector de los parámetros del modelo real \mathbf{m} , lo cual implica que los parámetros seleccionados son independientes los unos de los otros. Los dos términos restantes en la ecuación (5.2.5) hacen referencia a la resolución del problema y a la propagación de error. El término $((\mathbf{A}^{-g} \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{m})$ describe el hecho que las componentes del vector de los parámetros del modelo son combinaciones lineales de las diferentes componentes del vector de parámetros de modelo real. Los datos sólo recuperan una porción de la información necesaria sobre los parámetros del modelo con lo cual no se está en la capacidad de hacer un mapeo detallado sobre el sistema. En el caso ideal este término desaparece, de tal forma que haciendo uso de la ecuación (5.2.4) se tiene que $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ y se cuenta con una perfecta resolución del sistema.

Finalmente, el último término en la ecuación (5.2.5) describe cómo el error \mathbf{I} es mapeado dentro del modelo estimado. Este error no es conocido a través de un proceso determinístico, sino que es calculado por medio de los datos. De manera idealizada, se busca que la resolución del modelo estimado sea la mejor y que el error sea lo más cercano a cero posible es por ello que en la práctica el objetivo en la inversión de datos geofísicos es la de encontrar un equilibrio entre la propagación del error y las limitaciones de resolución del modelo.

5.3. Métodos basados en longitud

Como se mencionó en la sección anterior el vector correspondiente al error en los datos (o el desajuste) y el vector correspondiente a los parámetros del modelo son los más importantes a la hora de realizar un modelo de inversión. Los métodos basados en el primer conjunto de datos dan lugar a soluciones mediante el método de mínimos cuadrados mientras que los métodos basados en el uso de los parámetros de modelo son conocidos como métodos de solución a través de longitud mínima.

Con el fin de obtener un mejor ajuste en los datos obtenidos a través del método de inversión, tanto el método de mínimos cuadrados como el método de longitud mínima permiten el uso de información adicional concerniente al “ruido” en los datos observados o mediante el uso de información *a priori* en los parámetros del modelo. El uso de este tipo de información adicional es conocido como el método de mínimos cuadrados ponderados y longitud mínima ponderada respectivamente.

5.3.1. Medidas de Longitud

La norma de un vector es una medida de su tamaño o longitud. Existen múltiples definiciones de la norma, sin embargo, la norma cartesiana (L_2) es quizá con la cual existe una mayor familiaridad, ejemplos de ella tenemos:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \sum_{i=1}^N |e_i| \\
 L_2 &= \left[\sum_{i=1}^N |e_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\vdots \\
 L_M &= \left[\sum_{i=1}^N |e_i|^M \right]^{\frac{1}{M}}
 \end{aligned}
 \tag{5.3.1}$$

Para finalmente contar con la norma infinita, la cual viene determinada por la expresión:

$$L_\infty = \max_i |e_i| \tag{5.3.2}$$

Cabe destacar, que los métodos de inversión basados en el cálculo de diferentes normas a menudo cuentan con diferentes respuestas. La razón es que dependiendo de la norma que se esté calculando, ésta da una mayor o menor importancia (*peso*) a aquellos puntos que difieran mucho de los otros (“*outliers*”). Por ejemplo, la norma infinita (5.3.2) otorga una mayor importancia o “peso” a aquellos valores que se encuentren en un grado superior de desajuste mientras que el cálculo de norma de orden inferior otorga una distribución más homogénea de los errores de diferente tamaño o longitud.

La norma L_2 cuenta con la versatilidad de ser asociada a la longitud cartesiana de un vector. Ahora, si se tiene en cuenta que el desajuste total E en los datos se encuentra definido mediante la expresión:

$$E = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \tag{5.3.3}$$

Donde \mathbf{e} es la diferencia entre los datos observados y los datos calculados:

$$\begin{aligned} \text{vector de error en los datos} &= \mathbf{e} \\ &= \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}^{cal} \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Si se realiza un analisis dimensional \mathbf{e} se tiene que cuenta con unidades de longitud cuadradas y puede ser hallada de igual forma haciendo uso de la norma cuadrada L_2 . Con lo cual se cuenta con la la expresión:

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^N e_i^2 \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

5.3.2. Mínimos Cuadrados

A través del método de mínimos cuadrados se busca dar solución al problema de incompatibilidad producto del error en los datos observados para el caso que se cuente con un problema sobre-determinado, es decir, que existan más datos que parámetros a evaluar ($n > m$). En los casos simples, se proyecta minimizar la función:

$$\left\| \mathbf{d}^{obs} - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{m}} \right\|^2 \quad (5.3.6)$$

El cual genera un estimador mínimo cuadrático de la forma:

$$\tilde{\mathbf{m}} = \left[\mathbf{G}^T \mathbf{G} \right]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}^{obs} \quad (5.3.7)$$

El estimador de mínimos cuadrados amortiguados usa el criterio:

$$\Delta\tilde{\mathbf{m}} = [\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \epsilon^2\mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{d} \quad (5.3.8)$$

Donde $\Delta\tilde{\mathbf{m}}$ es el vector de parámetros calculados corregido, $\Delta\mathbf{d}$ es el vector de diferencia de los datos, \mathbf{G} es la matriz Jacobiana, \mathbf{I} es la matriz identidad y ϵ es llamado factor de amortiguamiento (Levenberg, 1944)(Marquardt, 1963).

5.4. Linealización de problemas no lineales

En la mayoría de los problemas interesantes en geofísica los datos se encuentran relacionados a los parámetros del modelo de una forma no lineal, es decir, de una forma en la que la solución no se encuentra de forma explícita usando la expresión $d = Gm$. La forma general de estos problemas no-lineales toma la forma:

$$d_i = f_i(m_1, m_2, \dots, m_M) = f_i(\mathbf{m}) \quad i = 1, \dots, n \quad (5.4.1)$$

Donde f es la función que permite calcular la respuesta teórica para un determinado conjunto de parámetros m con una geometría previamente establecida. Los pasos requeridos para linealizar un problema de la forma 5.4.1 son los siguientes:

- Expandir $f_i(\mathbf{m})$ alrededor de algún punto \mathbf{m}_0 usando una expansión en series de Taylor

$$\begin{aligned}
 d_i &= f_i(\mathbf{m}) \\
 &\approx f_i(\mathbf{m}_0) + \sum_{j=1}^M \left[\left. \frac{\partial f_i(\mathbf{m})}{\partial m_j} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \cdot \Delta m_j \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \left[\left. \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{m})}{\partial m_j^2} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \cdot \Delta m_j^2 \right] + 0(\Delta m_j^3)
 \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Donde $\Delta \mathbf{m}$ es la diferencia entre \mathbf{m} y \mathbf{m}_0

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0 \tag{5.4.3}$$

Si se asume que el término Δm_j^n con $n \geq 2$, es lo suficientemente pequeño con respecto al término Δm_j , entonces la ecuación (5.4.2) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 d_i &= f_i(\mathbf{m}) \\
 &\approx f_i(\mathbf{m}_0) + \sum_{j=1}^M \left[\left. \frac{\partial f_i(\mathbf{m})}{\partial m_j} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \cdot \Delta m_j \right]
 \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

- Los datos calculados \mathbf{d}_i^{cal} en $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ estan dados por:

$$d_i^{cal} = f_i(\mathbf{m}_0) \tag{5.4.5}$$

Por lo tanto:

$$d_i^{obs} - d_i^{cal} \approx \sum_{j=1}^M \left[\left. \frac{\partial f_i(\mathbf{m})}{\partial m_j} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \cdot \Delta m_j \right] \tag{5.4.6}$$

- Se puede definir el desajuste Δc_i como:

$$\begin{aligned}\Delta c_i &= d_i^{obs} - d_i^{cal} \\ &= \text{Datos Observados} - \text{Datos Calculados}\end{aligned}\tag{5.4.7}$$

Es importante destacar que Δc_i no es necesariamente ruido. Se puede interpretar de una forma más adecuada como el desajuste entre los datos observados y los datos calculados para algún determinado conjunto de parámetros en el modelo \mathbf{m}_0

- Las derivada parciales de el i -ésimo dato con respecto al j -ésimo parámetro del modelo esta dada por la expresión:

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{m})}{\partial m_j}\tag{5.4.8}$$

Estas derivadas parciales son funciones de los parámetros del modelo y podrían ser no-lineales u ocasionalmente podrían no existir, sin embargo, los valores de estas derivadas parciales, evaluadas en algún punto en el espacio de \mathbf{m}_0 , se encuentra dado por:

$$\left. \frac{\partial f_i(\mathbf{m})}{\partial m_j} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0}\tag{5.4.9}$$

Lo cual indica que son números y no funciones en el caso de existir. Teniendo en cuenta lo anterior es posible definir G_{ij} como:

$$G_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{m})}{\partial m_j} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0}\tag{5.4.10}$$

- Finalmente, combinando las ecuaciones (5.4.6) y (5.4.10) se tiene:

$$\Delta c_i = \sum_{j=1}^M G_{ij} \Delta m_j \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \quad i = 1, \dots, N\tag{5.4.11}$$

O en notación matricial, el problema linealizado toma la forma:

$$\Delta \mathbf{c} = \mathbf{G} \Delta \mathbf{m} \quad (5.4.12)$$

Donde

$$\Delta m_j = \text{Cambios a partir } (\mathbf{m}_0)_j \quad (5.4.13)$$

Así, linealizando la ecuación (5.4.1) se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales, donde Δc_i es una función lineal de cambios en los parámetros del modelo a partir de un modelo de inicio.

Es muy importante destacar que la ecuación (5.4.12) en general únicamente obtiene buenos resultados en una vecindad de \mathbf{m}_0 y para pequeños cambios en $\Delta \mathbf{m}$. La región en donde la linealización es válida depende de la función $f_i(\mathbf{m})$

La complejidad en la ecuación (5.4.11) radica en el cálculo de G_{ij} , ya que los términos pueden estar asociados a operadores integrales; mientras que Δc_i y Δm_j podrían hacer referencia a más de una función y no ser continuas en algunos tramos del dominio. Si este fuese el caso, bastaría definir de forma cuidadosa las derivadas parciales y tomar en cuenta las posiciones de las discontinuidades como un parámetro adicional del modelo. G_{ij} es conocida como la matriz de sensibilidad del sistema, sin embargo, comúnmente es referida también como el jacobiano y se utiliza el símbolo \mathbf{J} para diferenciarla.

5.5. Descomposición en valores singulares

La solución a través del método de mínimos cuadrados del problema inverso de la forma $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$, como ya se vio en la sección (5.4) se encuentra determinado por la expresión:

$$\mathbf{m}^{cal} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad (5.5.1)$$

La cantidad $\left[(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \right]$ opera sobre sobre \mathbf{d} con el fin de recuperar \mathbf{m}^{cal} . La técnica SVD (*singular value decomposition*) por sus siglas en inglés, es comúnmente usada en geofísica para solucionar las ecuaciones normales producto del uso del método de mínimos cuadrados en la estimación de \mathbf{m}^{cal} .

Al expresar la fórmula (5.5.1) en términos de la descomposición de valores singulares de \mathbf{G} se tiene que $\mathbf{G}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$, con lo cual:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^T \mathbf{G} &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \\ &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Lo anterior teniendo en cuenta que $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$. La inversa de esta matriz es simplemente:

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{V}^T \quad (5.5.3)$$

El inverso generalizado está dado por:

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^T \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Lo anterior teniendo en cuenta que $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$. La solución del método de mínimos cuadrados esta dado entonces por la expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{cal} &= (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d} \\ &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{d} \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

O simplemente:

$$\mathbf{m}^{cal} = \left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{\Lambda}} \right) \times (\mathbf{U}^T \mathbf{d}) \quad (5.5.6)$$

Si el método de factorización SVD es utilizado en la solución a través del uso de mínimos cuadrados amortiguados la ecuación (5.3.8) toma la forma (Meju, 1994):

$$\Delta \tilde{\mathbf{m}} = [\mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{V}^T + \epsilon^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{d} \quad (5.5.7)$$

Agregando el factor de amortiguamiento a los elementos de la diagonal se tiene:

$$\begin{aligned} [\mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{V}^T + \epsilon^2 \mathbf{I}] &= [\mathbf{V} \text{diag}(\lambda_j^2) \mathbf{V}^T + \epsilon^2 \mathbf{I}] \\ &= \mathbf{V} \text{diag}(\lambda_j^2 + \epsilon^2) \mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

El inverso de la ecuación (5.5.8) viene dado por la expresión:

$$= [\mathbf{V} \text{diag}(\lambda_j^2 + \epsilon^2) \mathbf{V}^T]^{-1} = \mathbf{V} \text{diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_j^2 + \epsilon^2} \right\} \mathbf{V}^T \quad (5.5.9)$$

Sustituyendo la ecuación (5.5.9) en (5.5.7) se tiene:

$$\Delta \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{V} \text{diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_j^2 + \epsilon^2} \right\} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{d} \quad (5.5.10)$$

Y el vector de corrección de parámetros puede ser expresado como:

$$\Delta \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{V} \text{diag} \left\{ \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \epsilon^2} \right\} \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{d} \quad (5.5.11)$$

La ecuación (5.5.11) proporciona una solución del método de mínimos cuadrados amortiguados usando la factorización de valores singulares. Para la inversión automática, la práctica común es establecer primero el factor de amortiguamiento en un gran valor positivo, aprovechando las buenas propiedades de convergencia inicial del método, posteriormente, el factor de amortiguamiento se multiplica por un factor menor que la unidad después de cada iteración de modo que el método de mínimos cuadrados predomina cerca de la solución (Meju, 1994). Una forma de determinar el factor de amortiguamiento ha sido desarrollada por (Arnason, 1988) y se encuentra dada por lo siguiente expresión:

$$\epsilon = \lambda_L \Delta x^{\frac{1}{L}} \quad (5.5.12)$$

Donde, L es el número de prueba para el factor de amortiguamiento para cualquier iteración, λ es el valor propio del parámetro y el término de Δx viene dado por:

$$\Delta x_r = \frac{(x_{r-1} - x_r)}{x_{r-1}} \quad (5.5.13)$$

Donde, x_{r-1} es el valor del desajuste obtenido en la iteración previa y x_r es el valor del desajuste de la iteración actual. En este trabajo, (5.5.12) y (5.5.13) se usaron para establecer el factor de amortiguación en cada iteración.

En este capítulo se abordaron los conceptos básicos en teoría de inversión haciendo uso del método de mínimos cuadrados.

Capítulo 6

Descripción del programa y validación con datos sintéticos y reales

El programa de inversión presentado en este trabajo se compone de tres partes fundamentales. Uno es el programa principal acompañado de dos programas accesorios.

1. El programa principal realiza una lectura de los datos observados del archivo de datos correspondiente a la resistividad aparente junto con la separación $AB / 2$ para el caso del método eléctrico y la resistividad aparente y el periodo en el caso del método magnetotelúrico. Se hace necesario ingresar parámetros iniciales del modelo (los cuales son seleccionados por el usuario, a saber, número de capas, resistividad y espesor de las capas) e invierte los datos de resistividad aparente utilizando el método de mínimos cuadrados junto con SVD. El programa también usa los comandos básicos de trazado para la ilustración de los resultados de inversión.

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

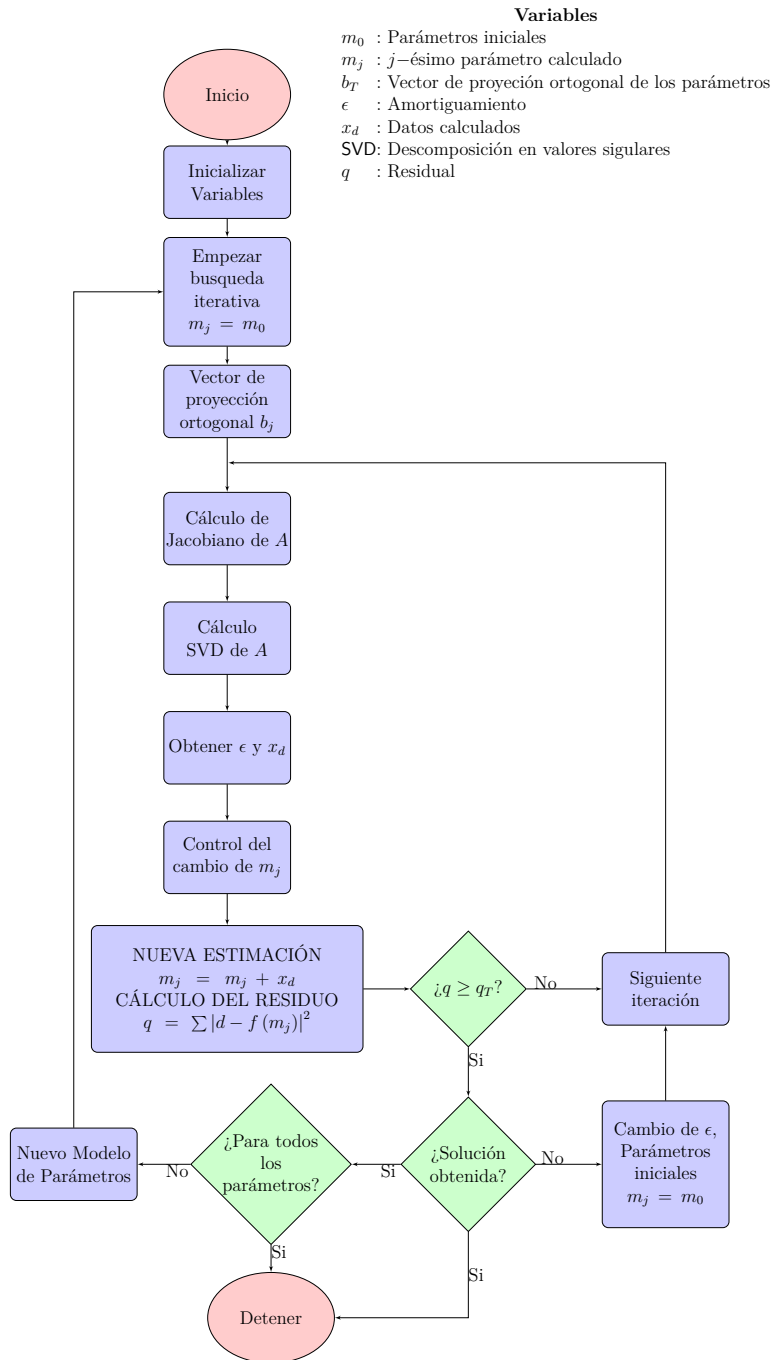


Figura 6.1: Diagrama de flujo del método de inversión seguido en este trabajo.

2. La función *Jacobian* calcula numéricamente las derivadas parciales de los parámetros utilizando un valor de intervalo de diferencia seleccionado por el usuario y forma la matriz jacobiana.
3. La función *ObtenerEM1dSQWE* o la función *InversionMT* calculan los datos de resistividad aparente a partir de los valores dados (resistividad, profundidad y $AB/2$) para la configuración de los electrodos en el arreglo tipo Schlumberger y (resistividad, espesor y frecuencia) para el método magnetotelúrico.

6.1. Validación con datos sintéticos

En la validación de la metodología y estabilidad del algoritmo numérico señalado en la figura (6.1), se realizaron pruebas con un modelo sintético. Los resultados que se obtienen al realizar la inversión de forma independiente a través de los dos métodos son comparados entre sí.

6.1.1. Modelo A

El modelo “verdadero” se encuentra constituido por cinco capas incluyendo el basamento (semi-espacio), la resistividad varía de capa en capa y los espesores de cada capa son diferentes. Los valores de las propiedades petrofísicas corresponden a valores típicos de sedimentos. La respuesta generada por ambos modelos consiste de 20 datos para el caso eléctrico y 40 para el caso magnetotelúrico sin adición de ruido numérico. La figura (6.2) en la parte izquierda muestra una tabla en la que se ven los parámetros (profundidad y resistividad) del modelo A, mientras a la derecha se cuenta con una representación gráfica del modelo en si mismo.

En el caso de los tres modelos de inversión presentados en esta sección, a saber: modelo de inversión eléctrico, modelo de inversión magnetotelúri-

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

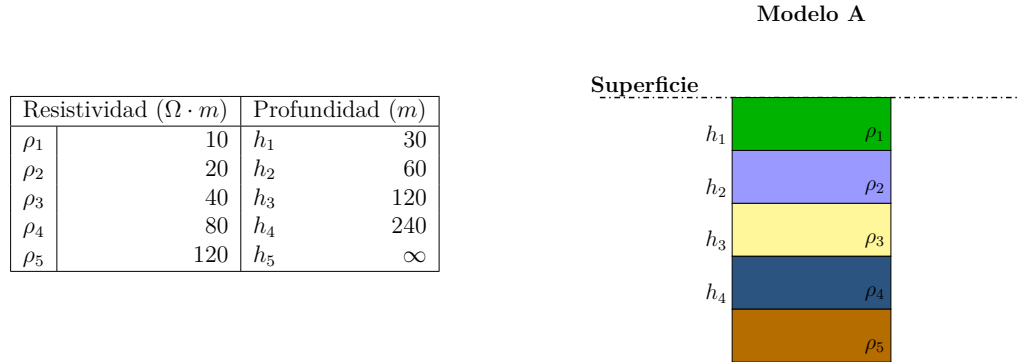


Figura 6.2: Parámetros y representación gráfica del modelo A.

co y modelo de inversión conjunta, fueron utilizados los mismos parámetros iniciales. Estos parámetros iniciales se muestran en la siguiente tabla (6.1).

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	50	h_1	25
ρ_2	60	h_2	50
ρ_3	70	h_3	100
ρ_4	80	h_4	150
ρ_5	90	h_5	∞

Tabla 6.1: Parámetros iniciales de cada uno de los modelos de inversión.

MÉTODO ELÉCTRICO

La figura (6.3) muestra una gráfica en la cual se tiene la respuesta del modelo eléctrico a los parámetros iniciales señalados en la tabla (6.1), para una apertura en los electrodos de corriente como se indica en la tabla (6.2). La respuesta del modelo en términos de la resistividad aparente al igual que la distancia $\left(\frac{AB}{2}\right)$ se gráfica en escala logarítmica.

Si se realiza una inversión teniendo en cuenta los datos mostrados en la figura (6.3) con los parámetros iniciales que se tienen en la tabla (6.1), se obtiene como respuesta una configuración de los parámetros del modelo como se muestra en la tabla (6.3). La línea punteada en la figura (6.4) hace referencia a los parámetros iniciales del modelo de inversión mientras que la línea continua señala la solución que se obtiene una vez se ejecuta el programa.

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

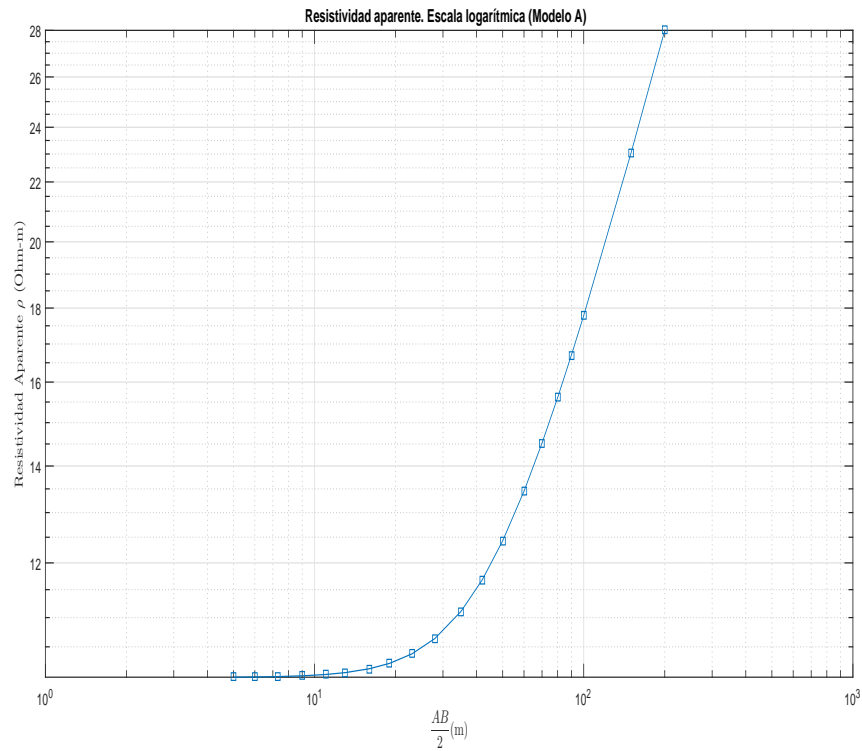


Figura 6.3: Curva de resistividad aparente (método eléctrico) para el modelo A en función de la apertura de los electrodos $\frac{AB}{2}$

$AB/2$ (m)	ρ_a ($\Omega \cdot m$)	$AB/2$ (m)	ρ_a ($\Omega \cdot m$)
5.0	10.0046	35.0	11.1088
6.0	10.0079	42.0	11.6822
7.3	10.0142	50.0	12.4298
9.0	10.0265	60.0	13.4502
11.0	10.0477	70.0	14.5200
13.0	10.0775	80.0	15.6092
16.0	10.1404	90.0	16.7015
19.0	10.2272	100.0	17.7884
23.0	10.3823	150.0	23.0501
28.0	10.6397	200.0	28.0000

Tabla 6.2: Datos de separación de los electrodos de corriente $\frac{AB}{2}$ y resultados de resistividad aparente (ρ_a) para el modelo A

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

Los valores que ajusta el método a los datos observados no son los iniciales del modelo sintético, esto se debe a la no unicidad (existe un espacio infinito de soluciones al problema) en la solución que conlleva el uso del método de mínimos cuadrados. Sin embargo, estos datos se encuentran muy cercanos a los esperados, con lo cual, se puede decir que resulta ser un ajuste razonable al modelo.

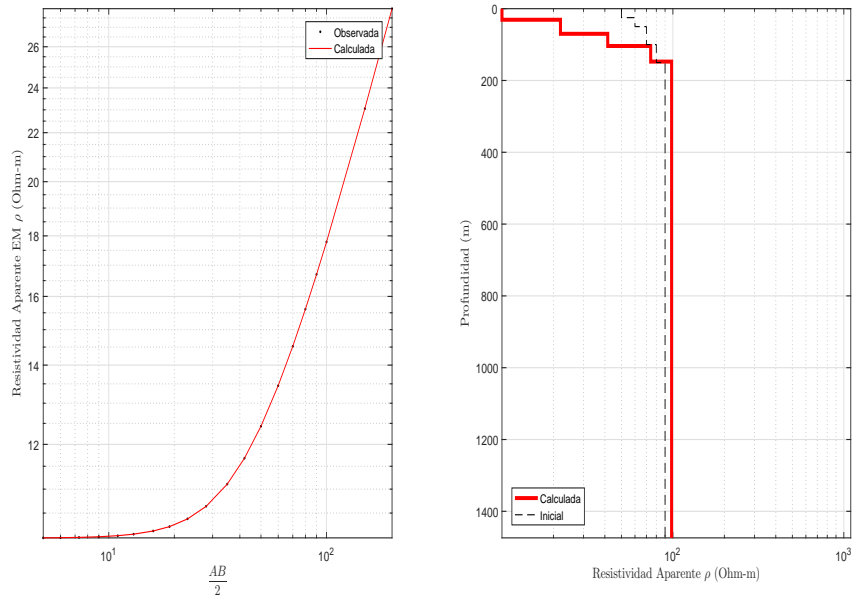


Figura 6.4: Ajuste y modelo de resistividad del modelo A mediante los parámetros calculados a través de la inversión (Tabla (6.3)).

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	10.00	h_1	30.89
ρ_2	21.99	h_2	70.01
ρ_3	41.57	h_3	103.96
ρ_4	74.14	h_4	147.40
ρ_5	98.29	h_5	

Tabla 6.3: Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos eléctricos para el modelo A. En este experimento los datos no contienen ruido.

MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

La tabla (6.4) muestra información con 40 datos; en ella se cuenta con un espectro de frecuencias que va desde los 0,003 Hz hasta los 3000 Hz en la primera y tercera columna con sus respectivas respuestas de resistividad aparente (ρ_a); columnas dos y cuatro y fase (Φ) columnas tres y seis. La imagen (6.5) contiene una gráfica de los valores de resistividad aparente vs. periodo (izquierda superior) y de fase vs periodo (izquierda inferior) en escala logarítmica junto con un diagrama escalonado de los parámetros del modelo directo (derecha).

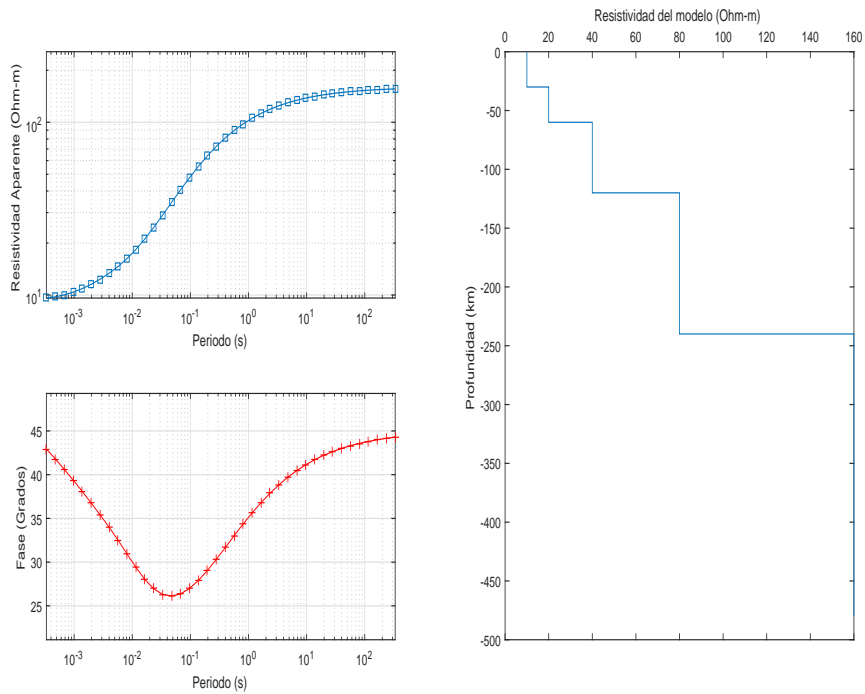


Figura 6.5: A la izquierda superior: curva de resistividad aparente (método magnetotelúrico) para el modelo A en función del periodo. A la izquierda inferior: curva de la fase para el modelo A en función del periodo. Derecha: modelo de resistividad del modelo A mediante los parámetros calculados a través de la inversión.

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

f (Hz)	ρ_a ($\Omega \cdot m$)	Fase (Φ)	f (Hz)	ρ_a ($\Omega \cdot m$)	Fase (Φ)
0.003	156.0	44.28	3.581	72.4	30.31
0.004	155.2	44.15	5.103	63.8	29.04
0.006	154.3	43.99	7.273	55.5	27.90
0.008	153.2	43.80	10.365	47.7	26.98
0.012	151.9	43.57	14.771	40.6	26.36
0.017	150.4	43.31	21.051	34.3	26.12
0.025	148.7	43.00	30.000	29.0	26.31
0.035	146.6	42.63	42.753	24.6	26.96
0.051	144.1	42.20	60.927	21.0	28.03
0.072	141.3	41.70	86.827	18.3	29.42
0.103	137.9	41.13	123.738	16.2	30.97
0.147	134.1	40.46	176.340	14.6	32.53
0.210	129.6	39.70	251.303	13.3	34.01
0.300	124.6	38.84	358.132	12.3	35.41
0.427	118.9	37.87	510.376	11.5	36.77
0.609	112.5	36.79	727.338	10.8	38.10
0.868	105.4	35.61	1036.532	10.3	39.38
1.237	97.7	34.35	1477.164	10.0	40.61
1.763	89.6	33.02	2105.111	9.7	41.80
2.513	81.1	31.66	3000.000	9.6	42.92

Tabla 6.4: Datos de frecuencia, resultados de resistividad aparente (ρ_a) y fase para el modelo A.

Si se realiza una inversión teniendo en cuenta los datos mostrados en la tabla (6.4) con los parámetros iniciales que se tienen en la tabla (6.1), se obtiene como respuesta una configuración de los parámetros del modelo como se muestra en la figura (6.6). La línea punteada hace referencia a los parámetros iniciales del modelo de inversión mientras que la línea continua señala la solución que se obtiene una vez se ejecuta el programa. Los valores que ajusta el método a los datos observados no son los iniciales del modelo sintético, esto se debe a la no unicidad (existe un espacio infinito de soluciones al problema) en la solución que conlleva el uso del método de mínimos cuadrados. Sin embargo, estos datos se encuentran muy cercanos a los esperados, con lo cual, se puede decir que resulta ser un ajuste razonable al modelo.

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

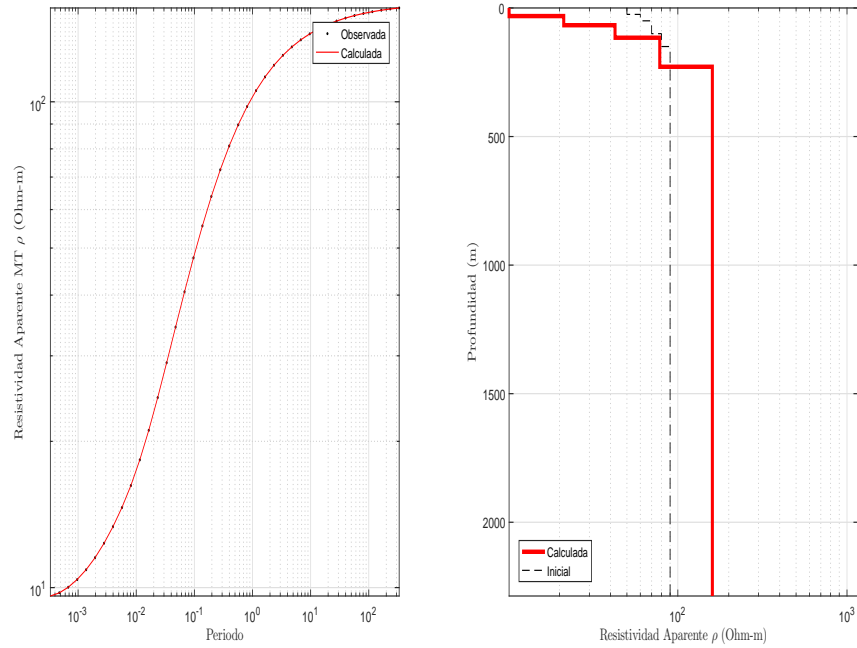


Figura 6.6: Ajuste y modelo de resistividad del modelo A mediante los parámetros calculados a través de la inversión (Tabla (6.5)).

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	10.06	h_1	31.55
ρ_2	21.16	h_2	67.11
ρ_3	42.53	h_3	115.74
ρ_4	78.19	h_4	228.68
ρ_5	159.99	h_5	

Tabla 6.5: Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos magnetotelúricos para el modelo A. En este experimento los datos no contienen ruido.

INVERSION CONJUNTA

Al realizar la inversión teniendo en cuenta los datos mostrados en las tablas (6.2) y (6.4) con los parámetros iniciales que se tienen en la tabla (6.1), se obtiene como respuesta una configuración de los parámetros del

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

modelo como se muestra en la figura (6.7).

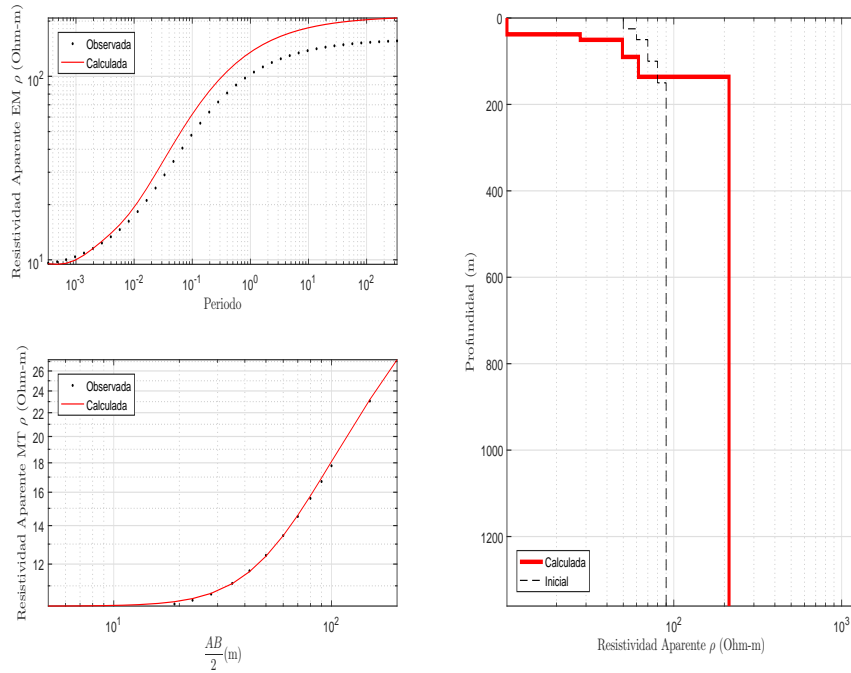


Figura 6.7: Ajuste y modelo de resistividad del modelo A mediante los parámetros calculados a través de la inversión conjunta (Tablas (6.2) y (6.4)).

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	9.78	h_1	32.21
ρ_2	30.33	h_2	50.69
ρ_3	40.72	h_3	96.17
ρ_4	68.30	h_4	144.21
ρ_5	161.32	h_5	

Tabla 6.6: Parámetros calculados del modelo A a través del proceso de inversión conjunta.

La gráfica a la izquierda en la parte superior de la figura (6.7) corresponde a la resistividad aparente en función del periodo, que se obtiene para el caso del método magnetotelúrico. Esta gráfica se realiza teniendo en cuenta

los parámetros encontrados al realizar el proceso de inversión conjunta. Los parámetros son los que se muestran en la tabla (6.6).

La gráfica a la izquierda en la parte inferior corresponde a la resistividad aparente en función de la apertura de los electrodos de corriente, que se obtiene para el caso del método eléctrico. Esta gráfica se realiza teniendo en cuenta los parámetros encontrados al realizar el proceso de inversión conjunta. Los parámetros son los que se muestran en la tabla (6.6)

La línea punteada en la gráfica de la derecha de la figura (6.7) corresponde a los parámetros iniciales del modelo de inversión conjunta, mientras que la línea continua señala la solución que se obtiene una vez se ejecuta el programa. Los valores que ajusta el método a los datos observados no son los iniciales del modelo sintético, esto se debe a la no unicidad (existe un espacio infinito de soluciones al problema) en la solución que conlleva el uso del método de mínimos cuadrados. Sin embargo, estos datos se encuentran muy cercanos a los esperados, con lo cual, se puede decir que resulta ser un ajuste razonable al modelo.

6.2. Aplicación a datos reales

En esta sección se describe la aplicación de los métodos de inversión desarrollados en este trabajo, a datos adquiridos e interpretados previamente en dos trabajos diferentes.

Por una parte, se cuenta con el estudio realizado por el Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) a cargo de (Ramos, 2011), el cual consistió en el diseño y adquisición de 26 Sondeos Eléctricos Verticales (SEV) en el corregimiento rural perteneciente al municipio de Cerritos – San Luis Potosí y cuyo objetivo fundamental consistía en evaluar la disponibilidad de agua en un acuífero fracturado para su posterior explotación con fines agrícolas.

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

De otra parte, se cuenta con la tesis de maestría llevada a cabo en el Instituto de Geofísica titulada: “Caracterización del acuífero de Cerritos - Villa Juárez, San Luis Potosí con el método magnetotelúrico” realizada por (Aquino, 2018) la cual cuenta con la adquisición de 14 sondeos magnetotelúricos en la misma zona de estudio del trabajo realizado por (Ramos, 2011).

Finalmente, los resultados son contrastados con los obtenidos en estos estudios.

6.2.1. Localización del área de estudio

El área de estudio se localiza cerca de la ciudad de San Luis Potosí. Está formada por tres subcuencas principales (Ramos, 2011):

1. Cuenca de Cerritos - Santo Domingo. Esta cuenca se encuentra formada por un amplio valle, que se distribuye de NW a SE, es bordeada al Oeste por la Sierra del Tablón y al Noreste por las sierras del Tapanco y San Antonio.
2. Joya de Luna. Corresponde a una pequeña cuenca endorreica (Cerrada) con orientación NW a SE. En periodos de lluvias torrenciales la cuenca se ve inundada y es drenada a través de una fractura en el extremo NW de la cuenca.
3. El Granjenal. Se caracteriza por ser una cuenca muy abierta limitada por las sierras del Tapanco y San Antonio.

6.2.2. Adquisición de datos

- Método Eléctrico.

Los sondeos eléctricos verticales fueron tomados teniendo en cuenta el

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

arreglo tipo Schlumberger, en el cual se hace uso de cuatro electrodos colineales. Los electrodos interiores (MN), se mantienen fijos, mientras que los electrodos de corriente (AB) aumentan progresivamente hasta que se alcanza la separación máxima programada. La separación de electrodos de corriente ($AB/2$) es de hasta 1000 m, y se utilizó un equipo resistivímetro, marca SYCAL R-2, figura (6.8) (Ramos, 2011).

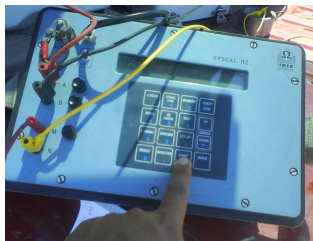


Figura 6.8: Equipo para adquisición de datos eléctricos SYSCAL R2. Tomado de (Ramos, 2011).

- Método Magnetotelúrico.

El equipo utilizado en este estudio fue el ADU-07e de Metronix. La distribución de los sondeos buscó la mayor cobertura posible del área de estudio, con lo cual, se realizaron sondeos con una separación promedio de 5 km. Fueron ubicados 14 sitios en donde se realizaron sondeos MT, con los cuales se generaron cuatro perfiles con dirección NE-SW (Aquino, 2018).



Figura 6.9: Equipo para adquisición de datos magnetotelúricos ADU-07e de Metronix. Tomado de <https://www.geo-metronix.de>

UBICACIÓN DE SONDEOS

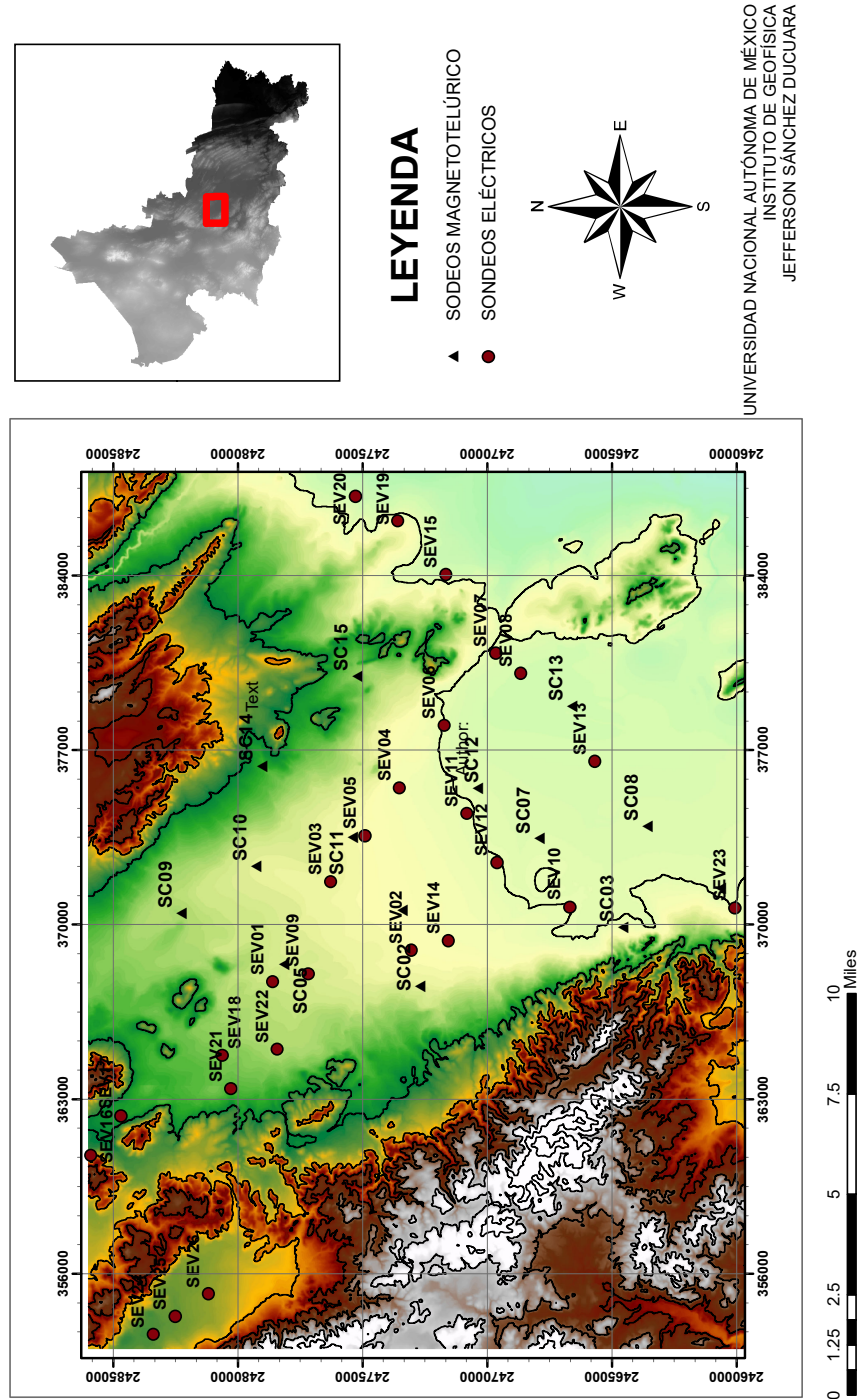


Figura 6.10: Ubicación de sondeos eléctricos y magnetotelúricos.

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

Los sondeos tanto eléctricos como magnetotelúricos que hicieron parte de los trabajos en (Ramos, 2011) y (Aquino, 2018) fueron ubicados y se muestran en el mapa (6.10).

6.2.3. Modelo inicial

Del conjunto de datos disponibles para la validación del proceso de inversión desarrollado en este trabajo, se toman tres conjuntos de datos:

Método Eléctrico		Método Magnetotelúrico	
SEV	5	SC	11
SEV	9	SC	5
SEV	11	SC	12

Tabla 6.7: Datos utilizados en la validación del algoritmo

El criterio de selección de este conjunto de datos se encuentra sobre la base de las consideraciones iniciales con que cuenta el modelo aquí presentado.

El modelo inicial para cada uno de los tres casos es diferente y los parámetros iniciales en cada uno de ellos es mostrado en la tabla (6.8). La determinación de los valores se hace teniendo como referencia los valores reportados tanto por (Ramos, 2011) como por (Aquino, 2018).

Modelo	Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
	ρ_1	ρ_2	h_1	h_2
1	10	200	100	∞
2	5	500	100	∞
3	10	200	100	∞

Tabla 6.8: Parámetros iniciales para los datos mostrados en la tabla (6.7) respectivamente.

La convergencia fue calculada como una función del error de la resistividad aparente entre los datos observados y los datos calculados al final del proceso iterativo.

$$rms = \frac{\left[\sum_{i=1}^{ND} (d^{obs} - d^{cal})^2 \right]^{1/2}}{(ND)^{1/2}} \quad (6.2.1)$$

En la ecuación (6.2.1) *obs* hace referencia a los datos observados, *cal* son los datos calculados de la resistividad aparente y ND es el número de datos que se tienen de la resistividad aparente.

6.2.3.1. Modelo 1. SEV 5 - SC 11

Siguiendo el procedimiento realizado en la subsección (6.1.1), se presentan tres inversiones, la primera y la segunda utilizan solo los datos eléctricos y magnetoteléuricos respectivamente para posteriormente realizar una inversión conjunta. Los parámetros iniciales del sistema se muestran en la tabla (6.8). Por lo general una de las dos bases de datos resulta ser más sensible a la presencia de las interfaces.

MÉTODO ELÉCTRICO

En esta inversión de los datos eléctricos, se percibe que los datos son susceptibles a un modelo de dos capas. La interfaz es localizada a una profundidad de 116.41 *m*, al material que se encuentra sobre esta interfaz se le asigna un valor de resistividad de 40.96 $\Omega \cdot m$ y al material por debajo de esta primera interfaz se le asigna un valor de resistividad 68.00 $\Omega \cdot m$. La figura (6.11) muestra las interfaces junto con los valores de resistividad estimados.

Para este modelo se cuenta con una estimación del *rms* de 0.14 teniendo en cuenta la ecuación (6.2.1) .

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

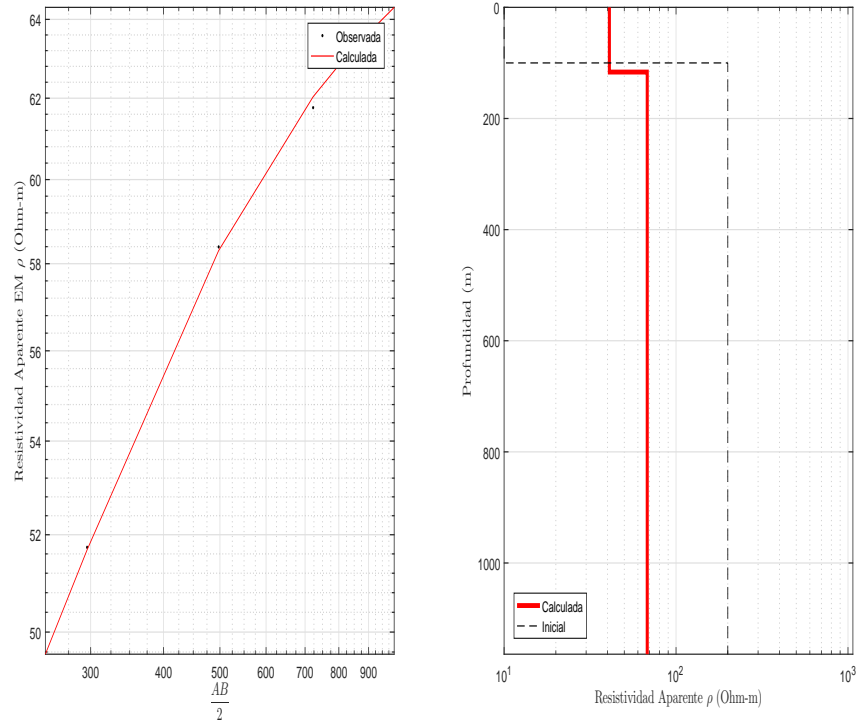


Figura 6.11: Modelos estimados por inversión de datos eléctricos. Ajuste y modelo de resistividad.

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	40.96	h_1	116.41
ρ_2	68.00	h_2	∞

Tabla 6.9: Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos eléctricos para el modelo 1.

MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

Al igual que en el caso eléctrico, la inversión de datos magnetotelúricos es susceptible a un modelo de dos capas, sin embargo, se tienen diferencias en la profundidad de las interfaces y los valores de resistividad asignados a las

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

capas que constituyen el modelo.

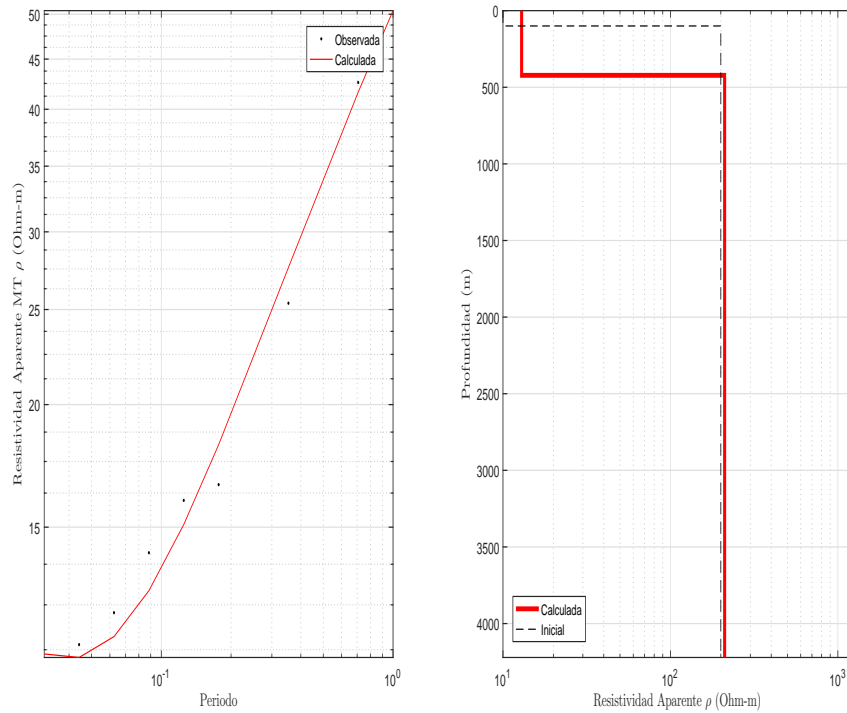


Figura 6.12: Modelos estimados por inversión de datos magnetotelúricos. Ajuste y modelo de resistividad.

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	12.92	h_1	422.12
ρ_2	210.75	h_2	∞

Tabla 6.10: Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos magnetotelúricos para el modelo 1.

Por ejemplo, La interfaz es localizada a una profundidad de 422 m y al material que se encuentra sobre esta interfaz le asigna un valor de resistividad de 12.92 $\Omega \cdot m$ mientras que al material por debajo de esta primera interfaz

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

le asigna un valor de resistividad $210.75 \Omega \cdot m$. La figura (6.12) muestra las interfaces junto con los valores de resistividad estimados.

Para este modelo se cuenta con una estimación de 1.42 del *rms* teniendo en cuenta la ecuación (6.2.1).

INVERSIÓN CONJUNTA

Al igual que en caso eléctrico y magnetoteléurico la inversión conjunta puede ser ajustada a través del uso de un modelo de dos capas. Si bien es cierto existe una mayor relación con los parámetros calculados mediante la inversión de los datos magnetoteléuricos, la inversión en general guarda cierta similitud con los otros dos modelos, por ejemplo: los valores de resistividad y de profundidad se encuentra en el mismo orden de magnitud y los parámetros calculados muestran valores coherentes a un modelo real.

Específicamente, la inversión conjunta arroja los siguientes datos. La interfaz es localizada a una profundidad de $92.22 m$ teniendo el material que se encuentra sobre esta interfaz un valor de resistividad de $7.09 \Omega \cdot m$ mientras que al material por debajo de esta interfaz le asigna un valor de resistividad $79.06 \Omega \cdot m$. La figura (6.13) muestra las interfaces junto con los valores de resistividad estimados.

La tabla (6.11) cuenta con la información referente al ajuste y el modelo de resistividad para el modelo 1 mediante los parámetros calculados a través de la inversión conjunta.

Para este modelo se cuenta con una estimación del *rms* de 29.10 para el caso eléctrico y de 9.88 para el caso magnetoteléurico teniendo en cuenta la ecuación (6.2.1).

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

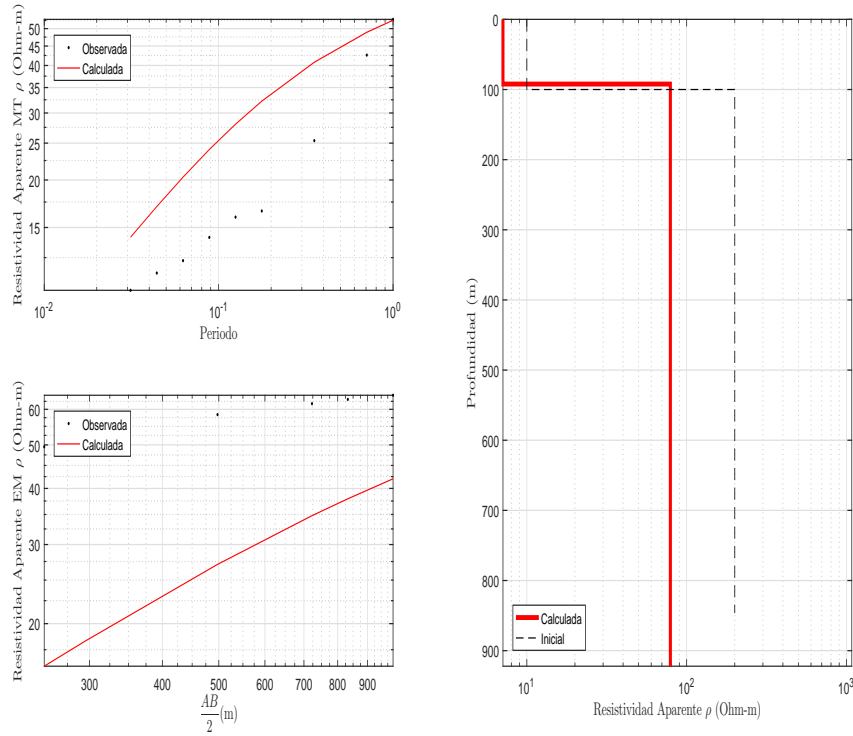


Figura 6.13: Modelo estimado por inversión conjunta. Ajustes y modelo de resistividad.

	Resistividad ($\Omega \cdot m$)	Profundidad (m)
ρ_1	7.09	h_1 92.22
ρ_2	79.06	h_2 ∞

Tabla 6.11: Ajuste y modelo de resistividad del modelo 1 mediante los parámetros calculados a través de la inversión conjunta.

6.2.3.2. Modelo 2. SEV 9 - SC 5

Siguiendo el procedimiento realizado en la subsección (6.1.1), se presentan tres inversiones, la primera y la segunda utilizan solo los datos eléctricos y

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

magnetotélúricos respectivamente para posteriormente realizar una inversión conjunta. Los parámetros iniciales del sistema se muestran en la tabla (6.8). Por lo general una de las dos bases de datos resulta ser más sensible a la presencia de las interfaces.

MÉTODO ELÉCTRICO

En esta inversión de los datos eléctricos, se percibe que los datos son susceptibles a un modelo de dos capas.

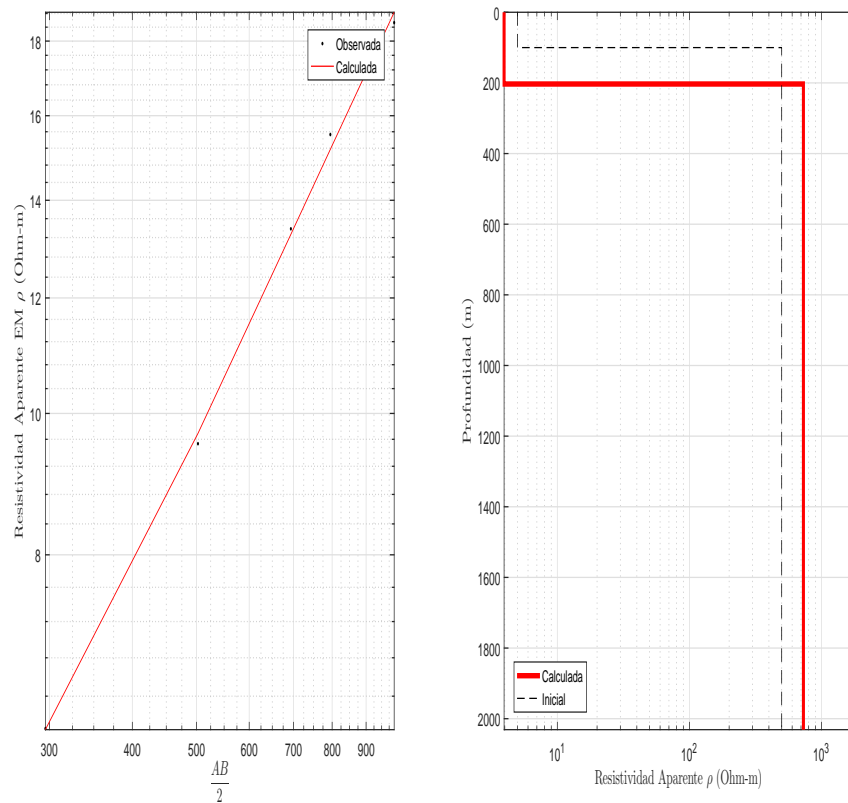


Figura 6.14: Modelos estimados por inversión de datos eléctricos. Ajuste y modelo de resistividad.

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

La interfaz se localizada a una profundidad de 203.11 m , el material que se encuentra sobre esta interfaz se le asigna un valor de resistividad de 3.95 $\Omega \cdot m$ y al material por debajo de esta primera interfaz se le asigna un valor de resistividad 703.07 $\Omega \cdot m$ como se señala en la tabla (6.12). La figura (6.14) muestra el modelo y el ajuste al conjunto de datos de los valores de resistividad estimados.

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	3.95	h_1	203.11
ρ_2	730.07	h_2	∞

Tabla 6.12: Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos eléctricos para el modelo 2.

Para este modelo se cuenta con una estimación del rms de 0.23 teniendo en cuenta la ecuación (6.2.1).

MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

Al igual que en el caso eléctrico, la inversión de datos magnetotelúricos es susceptibles a un modelo de dos capas, sin embargo, se tienen diferencias en la profundidad de las interfaces y los valores de resistividad asignados a las capas que constituyen el modelo. Por ejemplo, La interfaz la localiza a una profundidad de 33.34 m teniendo un material sobre esta interfaz con un valor de resistividad de 1.27 $\Omega \cdot m$ mientras que al material por debajo de esta primera interfaz le asigna un valor de resistividad $> 1000 \Omega \cdot m$. La tabla (6.13) muestra las interfaces junto con los valores de resistividad estimados. La figura (6.15) muestra el modelo y el ajuste al conjunto de datos de los valores de resistividad estimados.

Para este modelo se cuenta con una estimación del rms de 3.67 teniendo en cuenta la ecuación (6.2.1).

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

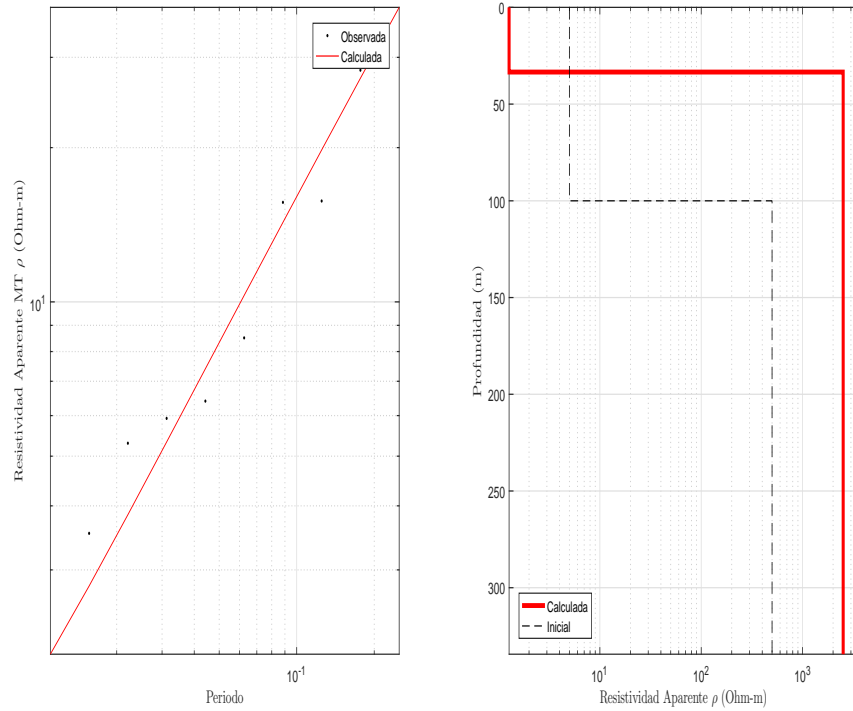


Figura 6.15: Modelos estimados por inversión de datos magnetotelúricos. Ajuste y modelo de resistividad.

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	1.27	h_1	33.44
ρ_4	> 1000	h_2	∞

Tabla 6.13: Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos magnetotelúricos para el modelo 2.

INVERSIÓN CONJUNTA

Al igual que en caso eléctrico y magnetotelúrico la inversión conjunta puede ser ajustada a través del uso de un modelo de dos capas. Si bien es cierto existe un mayor ajuste con los parámetros calculados mediante la inversión de

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

los datos magnetotelúricos, la inversión en general guarda cierta similitud con los otros dos modelos, por ejemplo: los valores de resistividad y de profundidad se encuentra en el mismo orden de magnitud y los parámetros calculados muestran valores coherentes a un modelo real, teniendo en cuenta los modelos de referencia.

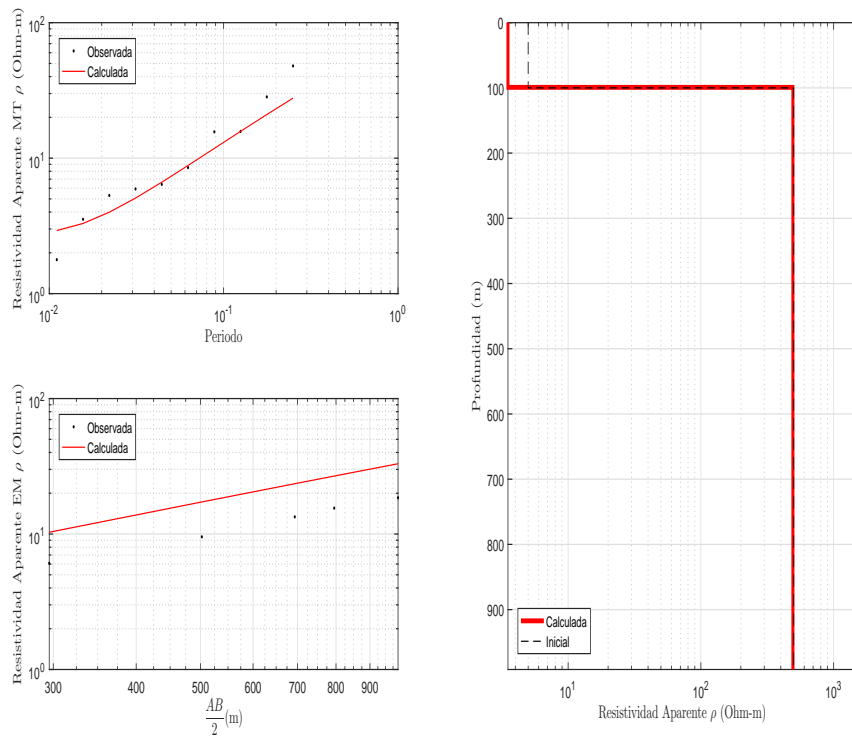


Figura 6.16: Modelos estimados por inversión conjunta. Ajuste y modelo de resistividad.

Específicamente, la inversión conjunta arroja los siguientes datos. La interfaz es localizada a una profundidad de 99.18 m teniendo el material que se encuentra sobre esta interfaz un valor de resistividad de 3.52 $\Omega \cdot m$ mientras que al material por debajo de esta primera interfaz le asigna un valor de resistividad 493.31 $\Omega \cdot m$. La tabla (6.14) muestra las interfaces junto con

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

los valores de resistividad estimados. La figura (6.16) muestra el modelo y el ajuste al conjunto de datos de los valores de resistividad estimados.

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	3.52	h_1	99.18
ρ_2	493.31	h_2	∞

Tabla 6.14: Ajuste y modelo de resistividad del modelo 2 mediante los parámetros calculados a través de la inversión conjunta.

Para este modelo se cuenta con una estimación del *rms* de 10.17 para el caso eléctrico y de 6.94 para el caso magnetoteléurico teniendo en cuenta la ecuación (6.2.1).

6.2.3.3. Modelo 3. SEV 11 - SC 12

Siguiendo el procedimiento realizado en la subsección (6.1.1), se presentan tres inversiones, la primera y la segunda utilizan solo los datos eléctricos y magnetoteléuricos respectivamente para posteriormente realizar una inversión conjunta. Los parámetros iniciales del sistema se muestran en la tabla (6.8). Por lo general una de las dos bases de datos resulta ser más sensible a la presencia de las interfaces.

MÉTODO ELÉCTRICO

En esta inversión de los datos eléctricos, se percibe que los datos son susceptibles a un modelo de dos capas. La interfaz la localiza a una profundidad de 115.01 m , al material que se encuentra sobre esta interfaz se le asigna un valor de resistividad de 5.56 $\Omega \cdot m$ y al material por debajo de esta primera interfaz se le asigna un valor de resistividad 65.63 $\Omega \cdot m$. La tabla (6.15) muestra las interfaces junto con los valores de resistividad estimados. La figura (6.17) muestra el modelo y el ajuste al conjunto de datos de los valores de resistividad estimados.

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

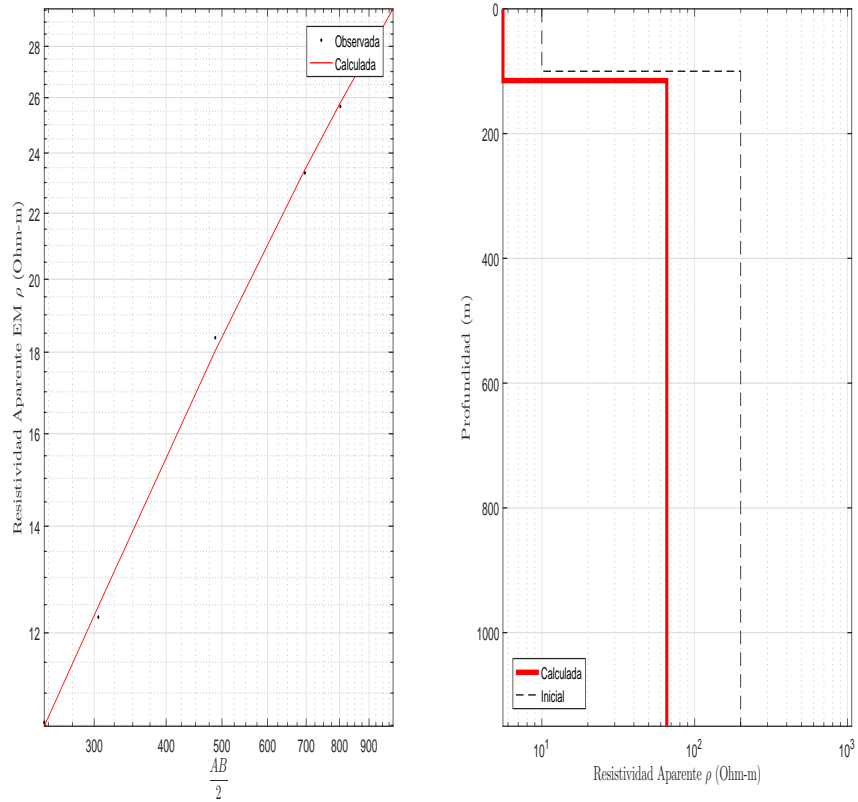


Figura 6.17: Modelos estimados por inversión de datos eléctricos. Ajuste y modelo de resistividad.

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	5.56	h_1	115.01
ρ_2	65.63	h_2	∞

Tabla 6.15: Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos eléctricos para el modelo 3.

Para este modelo se cuenta con una estimación del *rms* de 0.18 teniendo en cuenta la ecuación (6.2.1) .

MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

Al igual que en el caso eléctrico, la inversión de datos magnetotelúricos es susceptible a un modelo de dos capas, sin embargo, se tienen diferencias en la profundidad de las interfaces y los valores de resistividad asignados a las capas que constituyen el modelo.

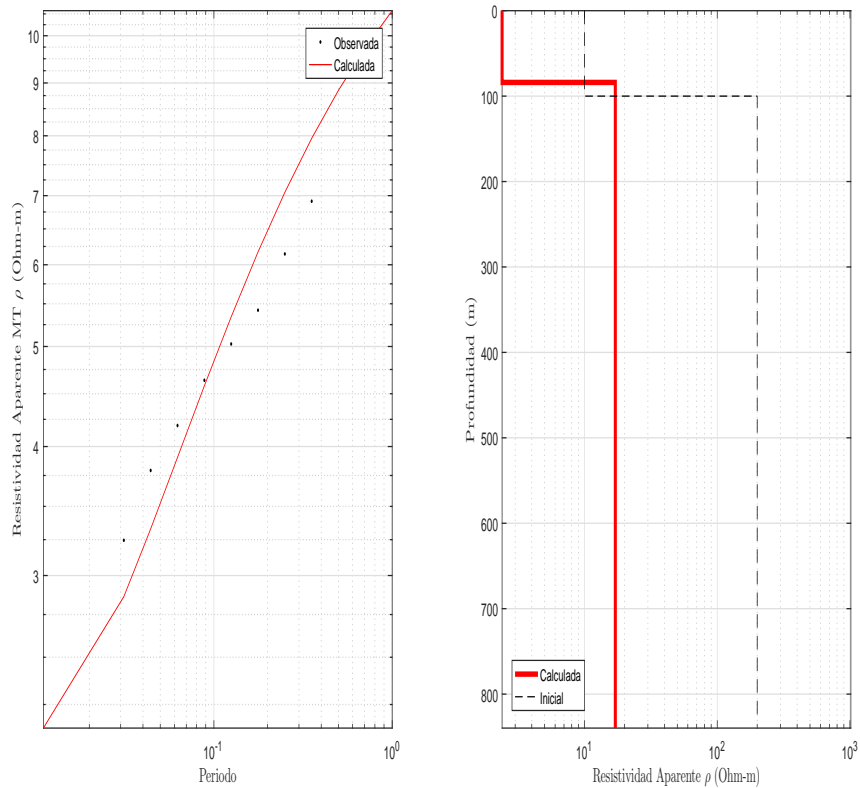


Figura 6.18: Modelos estimados por inversión de datos magnetotelúricos. Ajuste y modelo de resistividad.

La interfaz la localiza a una profundidad cercana a 83.98 m y al material que se encuentra sobre esta interfaz le asigna un valor de resistividad de 2.39 $\Omega \cdot m$ mientras que al material por debajo de esta primera interfaz le asigna un

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

valor de resistividad $17.05 \Omega \cdot m$. La tabla (6.16) muestra las interfaces junto con los valores de resistividad estimados. La figura (6.18) muestra el modelo y el ajuste al conjunto de datos de los valores de resistividad estimados.

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	2.39	h_1	83.98
ρ_2	17.05	h_2	∞

Tabla 6.16: Parámetros de inversión estimados por implementación del método a datos magnetoteléuricos para el modelo 3.

Para este modelo se cuenta con una estimación del *rms* de 0.85 teniendo en cuenta la ecuación (6.2.1).

INVERSIÓN CONJUNTA

Al igual que en caso eléctrico y magnetoteléurico la inversión conjunta puede ser ajustada a través del uso de un modelo de tres capas. Si bien es cierto existe una mayor relación con los parámetros calculados mediante la inversión de los datos magnetoteléuricos, la inversión en general guarda cierta similitud con los otros dos modelos, por ejemplo: los valores de resistividad y de profundidad se encuentra en el mismo orden de magnitud y los parámetros calculados muestran valores coherentes a un modelo real.

Específicamente, la inversión conjunta arroja los siguientes datos. La interfaz es localizada a una profundidad de $98.30 m$ teniendo el material que se encuentra sobre esta interfaz un valor de resistividad de $2.15 \Omega \cdot m$ mientras que al material por debajo de esta interfaz le asigna un valor de resistividad $83.00 \Omega \cdot m$. La tabla (6.17) muestra las interfaces junto con los valores de resistividad estimados. La figura (6.19) muestra las interfaces junto con los valores de resistividad estimados.

Para este modelo se cuenta con una estimación del *rms* de 9.25 para el caso eléctrico y de 3.95 para el caso magnetoteléurico teniendo en cuenta la ecuación (6.2.1).

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

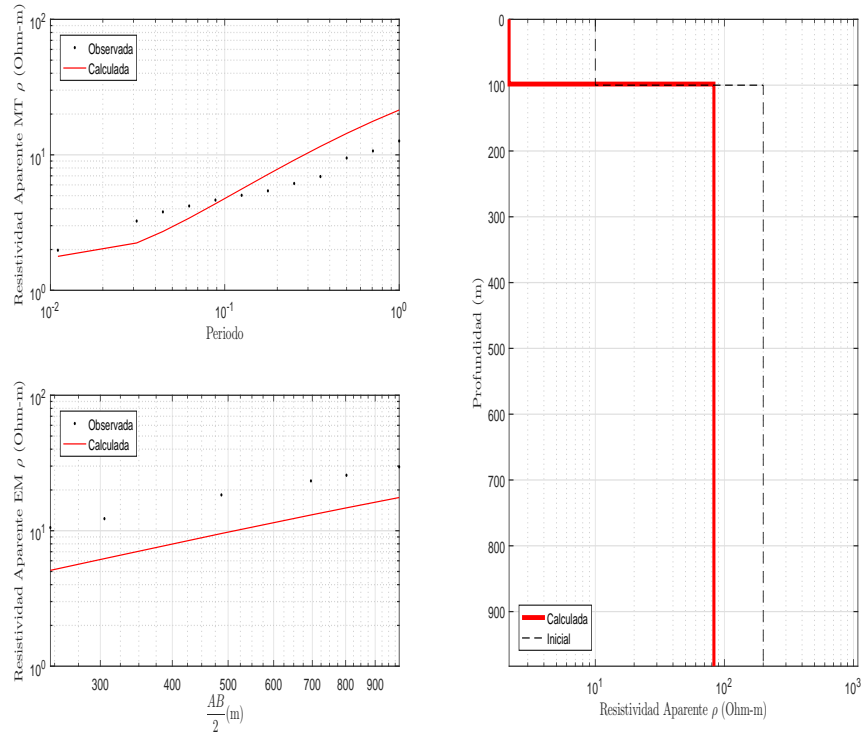


Figura 6.19: Modelo estimado por inversión conjunta. Ajustes y modelo de resistividad.

Resistividad ($\Omega \cdot m$)		Profundidad (m)	
ρ_1	2.15	h_1	98.30
ρ_2	83.00	h_2	∞

Tabla 6.17: Ajuste y modelo de resistividad del modelo 1 mediante los parámetros calculados a través de la inversión conjunta.

Discusión

El esquema de inversión presentado en este trabajo resulta ser computacionalmente simple, rápido y fácil de ejecutar. El programa usa el método de mínimos cuadrados amortiguados junto con el método de descomposición en valores singulares (SVD) de forma iterativa actualiza los parámetros del

CAPÍTULO 6. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA Y VALIDACIÓN CON DATOS SINTÉTICOS Y REALES

modelo.

El programa fue probado sobre diferentes modelos sintéticos en los cuales se buscaba evaluar la respuesta del programa para diferentes geometrías de la propiedad bajo la superficie. A pesar de que la búsqueda inicial de los parámetros era diferente de la original, los resultados producto de la inversión, siempre producían resultados satisfactorios teniendo en cuenta los errores que fueron calculados para cada modelo. Adicionalmente, el resultado obtenido producto de la inversión de los datos reales se encuentra en concordancia con los resultados de estudios previos, es decir, bajo el esquema de inversión propuesto en este trabajo se determina la existencia de una región somera de baja resistividad a una profundidad no mayor de 100 m , sobre una región de alta resistividad.

Conclusiones

1. Se cumplió con el objetivo general de la tesis al lograr desarrollar un algoritmo de inversión conjunta que permite realizar inversiones de sondeos tanto magnetotelúricos como eléctricos de corriente continua. Se calculan resistividades a profundidades someras en modelos de una dimensión.
2. La linealización de los problemas directos (eléctricos y magnetotelúrico) se realiza utilizando el desarrollo de Taylor, con lo cual se obtiene una solución de los problemas inversos correspondientes. El ambiente computacional que se utilizó fue MatLab®. Pruebas numéricas validan la exactitud y estabilidad de los algoritmos.
3. Con el fin de minimizar el problema numérico, se aplica un criterio de simplificación en la inversión conjunta. La simplificación supone que ambos conjuntos de datos tienen la misma ponderación en la inversión.
4. Los modelos directos que hacen parte de este trabajo se encuentran ampliamente estudiados en la literatura y forman parte de los problemas no lineales.
5. Los modelos de inversión estimados de forma independiente indican una menor variabilidad, mejor resolución y sensibilidad de los datos tomados a partir del método eléctrico. Los datos magnetotelúricos producen una buena estimación a mayor profundidad.

6. Los modelos resultantes de la inversión conjunta de los datos reales indican similitud estructural a una profundidad cercana a los 100 m .
7. Los modelos que resultan de las inversiones indican dos unidades resistivas con contrastes muy fuertes delimitadas por la zona de interfaz. La parte superior a esta interfaz corresponde a valores de baja resistividad (menores a $10 \Omega \cdot m$), mientras que la capa inferior adquiere valores más altos los cuales se encuentran entre los 70 y 500 $\Omega \cdot m$.
8. Los esquemas de inversión independiente y conjunta entregan modelos equivalentes. Los valores de RMS indican que el ajuste es menor en la inversión independiente que en la conjunta, sin embargo, resulta ser similar entre ambos tipos de modelos. Las interfaces identificadas por el esquema de inversión independiente corresponden a cambios fuertes (teniendo en cuenta la propiedad que se está evaluando) en los modelos estimados por la inversión conjunta.

Trabajos futuros

El uso del programa es adecuado para problemas de pequeña escala donde las condiciones de campo no permitan reunir suficientes datos para esquemas de modelado multidimensional. Es importante destacar que teniendo en cuenta el método de inversión utilizado en este trabajo, el presente algoritmo puede proveer resultados confiables en aquellas regiones donde la variación de los espesores entre las capas adyacentes sea suave. En el caso del método eléctrico, la configuración electródica está desarrollada para un arreglo tipo Schlumberger, sin embargo, dado que se trata de un algoritmo de uso libre, este código puede ser fácilmente modificado para otra configuración electródica cambiando el modelo directo.

Bibliografía

- Aquino, J. (2018). *Caracterización del acuífero de cerritos-villa Juárez, San Luis Potosí con el método magnetotelúrico*. Instituto de Geofísica UNAM, IG, 88 pp.
- Arnason, K. (1988). One dimensional inversion of schlumberger resistivity soundings: Computer program, description and user's guide: The united nations university. *Geothermal Training*, Report 8:59.
- Cagniard, L. (1954). *Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting*. *Geophysics*, 18, 605-635.
- Chave, A. D. (2009). On the electromagnetic fields produced by marine frequency domain controlled sources. *Geophysical Journal International*, 179(3):1429–1457.
- Chave, A. D., Constable, S. C., and Edwards, R. N. (2012). 12. *Electrical Exploration Methods for the Seafloor*, pages 931–966. N. M. Nabghian, ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics*: SEG.
- Flathe, H. (1955). A practical method of calculating geoelectrical model graphs for horizontally stratified media*. *Geophysical Prospecting*, 3(3):268–294.
- Hunziker, J., Thorbecke, J., and Slob, E. (2015). The electromagnetic res-

- ponse in a layered vertical transverse isotropic medium: A new look at an old problem. *GEOPHYSICS*, 80(1):F1–F18.
- Kaufman, A. A. (1992). *Geophysical field theory and method, Part A, Gravitational, electric and magnetic fields*. Academic Press, New York, 581 pp.
- Kaufman, A. A. Keller, G. V. (1981). *The Magnetotelluric Sounding Method*. Elsevier. Amsterdam, 596.
- Key, K. (2009). 1d inversion of multicomponent, multifrequency marine csem data: Methodology and synthetic studies for resolving thin resistive layers. *Geophysics*, 74(2):F9–F20.
- Kirsch, A. (2014). *The Mathematical Theory of Maxwell's Equations*. Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, Germany, 297 pp.
- Levenberg, K. (1944). A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *The Quarterly of Applied Mathematics*, 2:164–168.
- Marquardt, D. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441.
- Meju, M. (1994). *Geophysical Data Analysis*. Society of Exploration Geophysicists.
- Menke, W. (2012). *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory (Third Edition)*. Academic Press Cambridge, 293 pp.
- Onodera, S. (1960). The kernel function in the multiple-layer resistivity problem. *Journal of Geophysical Research*, 65(11):3787–3794.
- Parker, R. L. (1983). The magnetotelluric inverse problem. *Geophysical Surveys*, 6(5):5–25.

BIBLIOGRAFÍA

- Parkinson, W. D. (1962). *The Influence of Continents and Oceans on Geomagnetic Variations*. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 6(4), 441-449.
- Purcell, E. M. (1969). *Electricity and Magnetism*. McGraw-Hill Book Company, New York, 468 pp.
- Ramos, J. (2011). *Estudio Hidrogeológico en las inmediaciones del Municipio de Cerritos*. Instituto Potosino de Investigación de Ciencia y Tecnología, IPICYT, 74 pp.
- Roy, K. K. (2008). *Potential Theory in Applied Geophysics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 671 pp.
- Simpson, F. and Bahr, K. (2005). *Practical magnetotellurics*. Cambridge University Press, Cambridge, 254 pp.
- Sripanya, W. (2013). Regularized inverse problem of magnetometric resistivity response over a layered earth. *Studies Theor. Phys*, 7(4):183–190.
- Szalai, S., S. L. (2008). *On the classification of surface geoelectric arrays, Geophysical Prospecting*. Geophysical Prospecting, 56(2), 159–175.
- Tejero, A. (2002). *Modelación de la respuesta magnetotélúrica empleando aproximación de Born con conductividad de referencia variable*. Instituto de Geofísica UNAM, IG, 170 pp.
- Tikhonov, A. (1950). *On determining electrical characteristics of the deep layers of the earth's crust*. Sov. Math. Dokl, pp. 295 - 297.
- Trampert, J. (1998). Global seismic tomography: the inverse problem and beyond. *Inverse Problems*, 14(3):371.
- Vozoff, K. (1975). Joint inversion of geophysical data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 42(3):977–991.

BIBLIOGRAFÍA

- Vozoff, K. (1991). *The magnetotelluric method, in Electromagnetic methods in applied geophysics*. Editado por M. N. Nabighian, 02 ed., Soc. Expl. Geophys.
- Wait, J. R. (1954). *On the relation between telluric currents and the earth's magnetic field*. *Geophysics*, 19(2), 281-289.
- Wait, J. R. (1982). *Geo-Electromagnetism*. Academic Press.
- Werthmüller, D. (2017). An open-source full 3d electromagnetic modeler for 1d vti media in python: empymod. *GEOPHYSICS*, 82(6):WB9–WB19.
- Wiese, H. (1962). *Geomagnetische Tiefentellurik Tell I: Die elektrische Leitfähigkeit der Erdkruste und des oberen Erdmantels*. *Pure and Applied Geophysics*, 51(1), 59-78.
- Zhdanov, M. S. (2009). *Geophysical electromagnetic theory and methods*. Elsevier, Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo, 848 pp.

Apéndice A

Integración Numérica

A.1. Método QWE

Los métodos ISE (Integration Summation and Extrapolation) por sus siglas en inglés, permiten la solución de integrales de la forma:

$$F(r) = \int_0^{\infty} f(k) g(kr) dk \quad (\text{A.1.1})$$

(Donde $g(kr)$ es una función de Bessel oscilatoria o una función sinusoidal. El término $f(k)$ es la función kernel, la cual depende de las propiedades del subsuelo y puede ser una función oscilatoria también.)

En una suma infinita de integrales parciales de acuerdo a:

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_0^{\infty} f(k) g(kr) dk \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} F_i \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

Donde

$$F_i = \int_{k_{i-1}}^{k_i} f(k) g(kr) dk \quad (\text{A.1.3})$$

Los intervalos de control $k_{i-1} < k_i$, son usualmente los ceros o los extremos de la función oscilatoria g o alguna cantidad numérica conveniente con un espaciamiento similar. Dada la suma directa en ecuación (A.1.2) la convergencia es usualmente lenta, es por esta razón que se hace necesario hacer uso de técnicas de extrapolación con el fin de acelerar la convergencia.

En el desarrollo de este trabajo se hace uso de la transformación Shanks implementado a través del algoritmo ϵ . Se utilizo este método dada la eficiencia que ha demostrado en trabajos similares (Key, 2009).

El algoritmo ϵ es un método recursivo definido por tres relaciones:

$$\epsilon_0^{(n)} = S_n, \quad n \geq 0, \quad (\text{A.1.4})$$

$$\epsilon_1^{(n-1)} = \frac{1}{\epsilon_0^{(n)} - \epsilon_0^{(n-1)}}, \quad n \geq 1, \quad (\text{A.1.5})$$

$$\epsilon_j^{(n-j)} = \epsilon_{j-2}^{(n-j+1)} + \frac{1}{\epsilon_{j-1}^{(n-j+1)} - \epsilon_{j-1}^{(n-j)}}, \quad n \geq 2, \quad 2 \leq j \leq n, \quad (\text{A.1.6})$$

Donde S_n es la suma parcial directa:

$$S_n = \sum_{i=0}^n F_i \quad (\text{A.1.7})$$

Este algoritmo es representado en la figura (A.1). Los elementos en la primera columna corresponden la suma directa de las integrales parciales,

mientras que los elementos a la derecha son el resultado de la transformación secuencial.

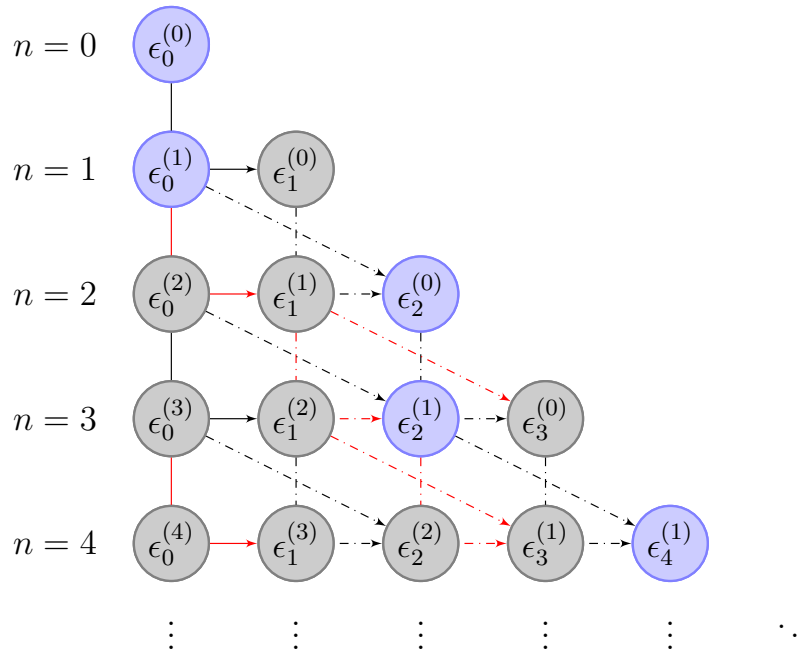


Figura A.1: Ilustración del algoritmo ϵ . Las líneas negras y rojas sin punteado representan la diferencia en la ecuación (A.1.5), mientras que las líneas negras y rojas punteadas indican el cuarto término en la relación de recurrencia de la ecuación (A.1.6). Las circunferencias azules indican el n -ésimo orden en la transformación Shanks para ordenes pares e impares de n

Apéndice B

Códigos

B.1. Modelo directo método magnetotelúrico 1D

```
1 %-----%
2 %   MODELO DIRECTO METODO MAGNETOTELURICO EN UNA DIMENSION
3 %   REALIZADO POR JEFFERSON SANCHEZ DUCUARA
4 %   INVERSION CONJUNTA DE DATOS ELECTRICOS Y MAGNETOTELURICOS EN LA
5 %   DETERMINACION DE ESTRUCTURAS EN EL SUBSUELO
6 %   INSTITUTO DE GEOFISICA
7 %   UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
8 %   2018
9 %-----%
10
11 %Este programa calcula la respuesta en terminos de la resistividad
12 %aparente para un modelo de capas plano paralelas sin buzamiento con
13 %respecto a la superficie.
14 %
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
15 %Uso:
16 %Requiere un archivo .txt en el cual se especifique el numero, el espesor
17 %y la resistividad de las capas que conforman el modelo.
18 %
19 %Salida:
20 %R = Resistividad Aparente.
21 %F = Fase.
22 %
23 %Escrito por:
24 %
25 %Jefferson Sanchez Ducuara
26 %Universidad Nacional Autonoma de Mexico
27 %
28 %Historia:
29 %
30 %Mayo 2018 - implementado
31 %
32 %Funciones externas y archivos requeridos:
33 %
34 % - Ninguno.
35 % _ .txt.
36
37 close all
38 clear
39 clc
40
41 %Parametros del sistema
42 data=load('model-2.txt');
43 DatoResistividad = data(:,2);
44 DatoEspesor = data(:,1);
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
45
46 Frecuencia = 3*logspace(-3,3,40);
47 Frecuenci = Frecuencia';
48 Periodo = 1./Frecuencia';
49
50 %Acoplamiento de las capas con la resistividad
51 resis=zeros(length(DatoResistividad)+1,1);
52 resis(1,1)=DatoResistividad(1,1);
53
54 dh=zeros(length(DatoEspesor)+1,1);
55 dh(1,1)=DatoEspesor(1,1);
56 dh(end,1)=2*DatoEspesor(end,1);
57
58 for g=1:length(DatoEspesor)
59     dh(g,1)=DatoEspesor(g,1);
60     resis(g+1,1)=DatoResistividad(g,1);
61 end
62
63 %Permeabilidad Magnetica (H/m)
64 mu = 4*pi*1E-7;
65
66 %Frecuencia Angular (Radianes);
67 w = 2*pi*Frecuencia';
68
69 %Numero of capas
70 n=length(DatoEspesor);
71
72 %Construccion de la matriz de impedancia
73 %Estratificacion del sistema de la siguiente forma
74         %Capa           j
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
75         %Capa 1         1
76         %Capa 2         2
77         %Capa 3         3
78         %      .         .
79         %      .         .
80         %      .         .
81         %Basamento     j
82
83 Impedancia = zeros(n,length(Frecuencia));
84
85 %Calculo de la impedancia en la capa mas profunda
86 %(Basamento) para cada frecuencia
87
88 Zn = sqrt(sqrt(-1)*w*mu*DatoResistividad(n));
89
90 %Ubicacion de la impedancia de la capa mas profunda
91 %en la matriz de impedancia
92
93 for i=1:length(Frecuencia)
94 Impedancia(n,i) = Zn(i);
95 end
96
97 %Iteracion a traves de las capas comenzando por
98 %la capa j=n-1
99
100 for z = 1:length(Frecuencia)
101 for j = n-1:-1:1
102     Resistividad = DatoResistividad(j);
103     Espesor = DatoEspesor(j+1);
104
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
105 %Calculo de la impedancia intrinseca
106 %de la capa actual
107
108 dj = sqrt(sqrt(-1)* (w(z,1) * mu * (1/Resistividad)));
109 wj = dj * Resistividad;
110
111 ej = exp(-2*Espesor*dj);           %Calculo del factor exponencial de
112                                     %la la impedancia intrinseca
113
114 %Calculo del coeficiente de reflexion usando la impedancia de
115 %la capa actual y la impedancia de la capa inferior
116
117 ImpedanciaSuperior = Impedancia(j+1,z);
118
119 rj = (wj - ImpedanciaSuperior)/(wj + ImpedanciaSuperior);
120 re = rj*ej;
121 Zj = wj * ((1 - re)/(1 + re));
122 Impedancia(j,z) = Zj;
123 end
124
125 end
126
127
128 Z = Impedancia(1,:);
129
130 Z1=ones(length(Z),1);
131
132 for i = 1 : length(Z1)
133 Z1(i,1)=Z(1,i);
134 end
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
135
136
137  absZ1 = abs(Z1);
138  ResistividadAparente = zeros(length(absZ1),1);
139  Fase = zeros(length(absZ1),1);
140  for a = 1 : length(absZ1)
141  ResistividadAparente(a) = (absZ1(a,1) * absZ1(a,1))/(mu * w(a,1));
142  Fase(a) = atan2(imag(Z1(a)),real(Z1(a)));
143  end
144  R=ResistividadAparente;
145
146  F=(Fase*180)/pi;
147
148  subplot(2,2,1);loglog(Periodo,R,'-s')
149  xlabel('Periodo (s)')
150  ylabel('Resistividad Aparente (Ohm-m)')
151  axis([min(Periodo) max(Periodo) min(R)-10^2 max(R)+10^2])
152  grid on
153  subplot(2,2,3);semilogx(Periodo,F,'-r+')
154  xlabel('Periodo (s)')
155  ylabel('Fase (Grados)')
156  axis([min(Periodo) max(Periodo) min(F)-5 max(F)+5])
157  grid on
158  subplot(2,2,[2,4]);stairs(resis,-dh)
159  ax.YLim = [min(dh), 0];
160  set(gca,'xaxisLocation','top')
161  xlabel('Resistividad del modelo (Ohm-m)')
162  ylabel('Profundidad (km)')
```


B.2. Modelo directo método eléctrico 1D

B.2.1. Pesos cuadratura de Gauss

```
1  %-----%
2  %           MODELO DIRECTO METODO ELECTRICO EN UNA DIMENSION
3  %           ARREGLO TIPO SCHLUMBERGER
4  %           REALIZADO POR JEFFERSON SANCHEZ DUCUARA
5  % INVERSION CONJUNTA DE DATOS ELECTRICOS Y MAGNETOTELURICOS EN LA
6  %           DETERMINACION DE ESTRUCTURAS EN EL SUBSUELO
7  %           INSTITUTO DE GEOFISICA
8  %           UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
9  %           2018
10 %-----%
11 %-----%
12 function [x w] = ObtenerPesosCuadraturaGauss(N)
13 %
14 % Regresa los pesos en la cuadratura de Gauss de orden N sobre el
15 % intervalo [-1,1]
16 %
17 % Algoritmo tomado de:
18 % Trefethen, L. N., 2000, Spectral methods in MATLAB: Society for
19 % Industrial and Applied Mathematics (SIAM), volume 10 of Software,
20 % Environments, and Tools.
21 %
22 %-----%
23     beta = 0.5./sqrt(1-(2*(1:N-1)).^(-2));
24     T     = diag(beta,1) + diag(beta,-1);
25     [V,D] = eig(T);
26     [x,i] = sort(diag(D));
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
27     w      = 2*V(1,i)'.^2;  
28  
29 end
```

B.2.2. Pesos función de Bessel

```
1 %-----%
2 %      MODELO DIRECTO METODO ELECTRICO EN UNA DIMENSION
3 %      ARREGLO TIPO SCHLUMBERGER
4 %      REALIZADO POR JEFFERSON SANCHEZ DUCUARA
5 %      INVERSION CONJUNTA DE DATOS ELECTRICOS Y MAGNETOTELURICOS EN LA
6 %      DETERMINACION DE ESTRUCTURAS EN EL SUBSUELO
7 %      INSTITUTO DE GEOFISICA
8 %      UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
9 %      2018
10 %-----%
11
12 function [xInt Bx BJ0 BJ1] = ObtenerPesosBessel(nIntervalsMax,nQuad,...
13         sZeroType)
14 %
15 % Regresa los pesos de la funcion de Bessel y los intervalos de la
16 % cuadratura usados en el metodo QWE (Quadrature-with-Extrapolation), por
17 % sus siglas en ingles.
18 %
19 % Uso:
20 %
21 % [xInt Bx BJ0 BJ1] = ObtenerPesosBessel(nIntervalsMax,nQuad,sZeroType)
22 %
23 % Entradas:
24 %
25 % nIntervalsMax - Maximo numero de intervalos en la cuadratura.
26 % nQuad         - Orden de la cuadratura
27 % sZeroType     - puntos en los cuales las funciones 'J0','J1' se hacen
28 %               cero.
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
29 % Salida:
30 %
31 % xInt    - puntos en los cuales se divide la integral global
32 % Bx      - vector global de todos los puntos de la cuadratura entre los
33 %          intervalos.
34 % BJ0     - los correspondientes pesos J0, w*J0(Bx)
35 % BJ1     - los correspondientes pesos J1, w*J1(Bx)
36 %
37 % Escrito por:
38 %
39 % Jefferson Sanchez Ducuara
40 % Universidad Nacional Autonoma de Mexico
41 %
42 % Historia:
43 %
44 % Mayo 2018 - implementado
45 %
46 % Funciones externas y archivos requeridos:
47 %
48 % - ObtenerPesosCuadraturaGauss
49 %
50 % Subfunciones contenidas en este archivo:
51 % - ObtenerCerosBessel
52 %-----
53
54     Int_0 = 1d-20; % Limite inferior de la integral, un valor pequeno
55                 %pero no 0
56
57 %
58 % Obtener los pesos de la cuadratura de Gauss:
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
59 %
60 [x w] = ObtenerPesosCuadraturaGauss(nQuad);
61
62 %
63 % Obtener los ceros:
64 %
65 switch (lower(sZeroType))
66     case('j0')
67         xz = ObtenerCerosBessel(0,nIntervalsMax)';
68
69     case('j1')
70         xz = ObtenerCerosBessel(1,nIntervalsMax)';
71
72     case('npi')
73         xz = (1:nIntervalsMax)*pi;
74 end
75
76 xInt = [Int_0 xz ];
77
78 %
79 % Ensamble de la matriz de salida
80 %
81
82 dx = diff(xInt)/2; % espaciamento
83 Bx = dx(ones(length(x),1),:).*(x(:,ones(length(xInt)-1,1))+1);
84 Bx = Bx + xInt(ones(length(x),1),1:end-1);
85 Bx = reshape(Bx,numel(Bx),1);
86 BJ0 = besselj(0,Bx).*repmat(w,length(xInt)-1,1);
87 BJ1 = besselj(1,Bx).*repmat(w,length(xInt)-1,1);
88
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
89 end
90
91 %-----
92 % Subfunciones:
93 %-----
94
95 %-----
96 function x = ObtenerCerosBessel(nu,N)
97 %
98 % Calcula los N ceros de la funcion de Bessel de primer grado
99 % de orden nu usando el metodo Newton-Raphson.
100 %
101 % Usa los eros asintoticos como formula de busqueda y calcula todos
102 % los valor en paralelo.
103 %
104 % Escrito por:
105 %
106 % Jefferson Sanchez Ducuara
107 % Universidad Nacional Autonoma de Mexico
108 %
109 %-----
110
111 % Busqueda inicial usando ceros asintoticos:
112 x = (1:N)'*pi+nu*pi/2-pi/4;
113
114 % Iteraciones Newton-Raphson
115 for i = 1:10 % 10 es mas que suficiente, usualmente se
116             % detiene en 5
117
118 % Evaluacion:
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
119     x0 = besselj(nu,x);
120     x1 = besselj(nu+1,x);
121     g = nu ./ x;
122
123     % Longitud del paso:
124     h = -x0 ./ (g.*x0-x1);
125
126     % Siguiente paso:
127     x = x + h;
128
129     % Evaluar la convergencia:
130     if all(abs(h) < 8*eps(x))
131         break
132     end
133 end
134
135 end
```

B.2.3. Cálculo del Kernel

```
1 %-----%
2 %      MODELO DIRECTO METODO ELECTRICO EN UNA DIMENSION
3 %      ARREGLO TIPO SCHLUMBERGER
4 %      REALIZADO POR JEFFERSON SANCHEZ DUCUARA
5 % INVERSION CONJUNTA DE DATOS ELECTRICOS Y MAGNETOTELURICOS EN LA
6 %      DETERMINACION DE ESTRUCTURAS EN EL SUBSUELO
7 %      INSTITUTO DE GEOFISICA
8 %      UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
9 %      2018
10 %-----%
11 function EyKernels = ObtenerEM1DKernel(lambda,h,pho,By)
12 %
13 % Regresa el valor del kernel para J1 para problema EM en 1
14 % dimension en un medio arbitrario de N capas, de la ecuacion:
15 %
16 %  $E(s) = pho_1 + 2 * pho * s^2 \int \{ Theta_1 * J_1(lambda) * r \} dLambda$ 
17 %
18 % donde E(s) es la resistividad aparente para una determinada apertura
19 % de los electrodos.
20 %
21 % Esta funcion regresa solo el termino correspondiente al kernel, NO
22 % se realizan multiplicaciones con la funcion de Bessel correspondiente.
23 % Esto hace mas eficiente el uso del metodo de integracion por
24 % cuadratura.
25 %
26 % Uso:
27 %
28 % EyKernels = ObtenerEM1DKernel(lambda,h,pho,Bx)
```


APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
29 %
30 % Entradas:
31 %
32 % lambda - numero de onda para la evaluacion del kernel.
33 % h      - vector de profundidad (m).
34 % rho    - vector de resistividades del medio.
35 %        in the model layer top-depths given in z.
36 % Bx     - multiplicador
37 %
38 % Salidas:
39 %
40 % EyKernels - termino evaluado para numero de onda lambda.
41 %
42 % Escrito por:
43 %
44 % Jefferson Sanchez Ducuara
45 % Universidad Nacional Autonoma de Mexico
46 %
47 % Historia:
48 %
49 % Mayo 2018 - implementado
50 %
51 % Nota:
52 % La relacion de recurencia esta tomada de
53 % A practical method of calculating geoelectrical model graphs for
54 % horizontally stratied media. H. Frathe., 1955
55 %-----
56
57 k=zeros(1,(length(h)));
58 P=zeros(1,(length(h)));
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
59 H=zeros(1,(length(h)));
60 Q=zeros(1,(length(h)));
61 P_neg=zeros(1,(length(h)));
62 H_neg=zeros(1,(length(h)));
63 Kernel=zeros(1,(length(h)));
64
65 for i = 1 : length(k)
66     k(i)=(pho(i+1)-pho(i))/(pho(i+1)+pho(i));
67 end
68
69 u=exp((-2)*lambda);
70 u_neg=exp(2*lambda);
71
72 P(1,1)=k(1)*u^(h(1));
73 P_neg(1,1)=k(1)*u_neg^(h(1));
74 H(1,1)=1;
75 H_neg(1,1)=1;
76
77 Q(1,1)=H(1,1)-P(1,1);
78
79 Kernel(1,1)=(P(1,1)/Q(1,1))*By;
80
81 for i = 2 : length(k)
82
83     P(1,i)=P(1,i-1)+(H_neg(1,i-1)*k(i)*u^(h(i)));
84     H(1,i)=H(1,i-1)+(P_neg(1,i-1)*k(i)*u^(h(i)));
85     Q(1,i)=H(1,i)-P(1,i);
86
87     P_neg(1,i)=P_neg(1,i-1)+(H(1,i-1)*k(i)*u_neg^(h(i)));
88     H_neg(1,i)=H_neg(1,i-1)+(P(1,i-1)*k(i)*u_neg^(h(i)));
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
89  
90     Kernel(1,i)= (P(1,i)/Q(1,i))*By;  
91  
92     end  
93 EyKernels=Kernel(end);  
94 end
```

B.2.4. Método de cuadratura con extrapolación

```
1  %-----%
2  %      MODELO DIRECTO METODO ELECTRICO EN UNA DIMENSION
3  %      ARREGLO TIPO SCHLUMBERGER
4  %      REALIZADO POR JEFFERSON SANCHEZ DUCUARA
5  %  INVERSION CONJUNTA DE DATOS ELECTRICOS Y MAGNETOTELURICOS EN LA
6  %      DETERMINACION DE ESTRUCTURAS EN EL SUBSUELO
7  %      INSTITUTO DE GEOFISICA
8  %      UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
9  %      2018
10 %-----%
11
12 function T = qwe(rtol,atol,nIntervalsMax,func,varargin)
13 %
14 % QWE - Quadrature with extrapolation
15 %
16 % Calcula una integral infinita usando las sumas parciales de los
17 % terminos de la cuadratura acelerando la convergencia mediante
18 % extrapolacion de secuencia mediante la tranformacion Shanks
19 % implementada con el algoritmo epsilon de Wynn.
20 %
21 % Uso:
22 %
23 % T = qwe(rtol,atol,nIntervalsMax,func,varargin)
24 %
25 % Entrada:
26 %
27 % rtol,atol      - Tolerancia relativa y absoluta para la extrapolacion.
28 %                La extrapolacion para la integral se detiene cuando:
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
29 | %           absolute_error < rtol*abs(T) + atol
30 | % nIntervalsMax - Numero maximo de intervalos de la integral
31 | % func,varargin - Manejo de la funcion que regresa la suma de la
32 | %           cuadratura para el intervalo. varargin es pasada a
33 | %           traves de la funcion para asistir en la evaluacion
34 | %           del kernel.
35 | %
36 | % Salida:
37 | %
38 | % T - estructura de campo.
39 | %
40 | % Escrito por:
41 | %
42 | % Jefferson Sanchez Ducuara
43 | % Universidad Nacional Autonoma de Mexico
44 | %
45 | % Historia:
46 | %
47 | % Mayo 2018 - implementado
48 | %
49 | % Funciones externas y archivos requeridos:
50 | %
51 | % - Ninguna
52 | %
53 | %-----
54 | %Parametros de ajuste
55 | %
56 | nDelay = 1;
57 |
58 | prev = 0;
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
59
60 for i = 1:nDelay
61
62     prev      = prev + func(i,varargin{:}); % Llama la funcion para
63                                           % que regrese la suma de
64                                           % la cuadratura
65 end
66
67
68 % Se inicia la estructura T para los resultados extrapolados
69
70     nKernels = length(prev);
71
72     nTerms   = nIntervalsMax-nDelay-1; % Maximo numero de terminos
73                                           % en la extrapolacion
74
75     rmin     = realmin;
76
77     for i = 1:nKernels % Prelocalizacion de arreglos
78         T(i).S        = zeros(nTerms,1); % Algoritmo Epsilon
79         T(i).extrap   = zeros(nTerms,1); % Resultados extrapolados
80         T(i).relErr   = zeros(nTerms,1); % Error relativo para cada orden
81         T(i).absErr   = zeros(nTerms,1); % Error absoluto para cada orden
82         converged     = false(nKernels,1);
83     end
84
85 % Inicio del ciclo de la extrapolacion:
86
87     for i = nDelay+1:nTerms
88
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
89 % Paso 1: Cuadratura de Guass para el intervalo:
90
91 f = func(i,varargin{:});
92
93
94 % Paso 2: Transformacion de Shanks para cada funcion de kernel:
95
96 for j = 1:nKernels
97
98     if converged(j)
99         continue;
100    end
101
102
103    % Insercion de componentes dentro de la estructura T:
104
105    n          = i-nDelay;
106    T(j).n     = n;          % orden de la expansion
107    T(j).S(n+1) = T(j).S(n)+f(j); % arreglo de trabajo para la
108                                % transformacion
109
110    % Obtiene la transformacion de Shanks usando el
111    % algoritmo Epsilon.
112
113    aux2 = 0;
114    for k = n+1:-1:2
115        aux1 = aux2;
116        aux2 = T(j).S(k-1);
117        ddff = T(j).S(k) - aux2;
118        if abs(ddff) < rmin
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
119         T(j).S(k-1) = realmax;
120     else
121         T(j).S(k-1) = aux1 + 1/ddff;
122     end
123 end
124
125
126 % Resultado de la extrapolacion mas el termino previo
127 % de la integracion:
128
129 T(j).extrap(n) = T(j).S(mod(n,2)+1)+prev(j);
130
131
132 % Paso 3: Analisis de la convergencia:
133
134 if n > 1
135     T(j).absErr(n) = abs( T(j).extrap(n) -...
136                         T(j).extrap(n-1));
137     T(j).relErr(n) = T(j).absErr(n) / abs(T(j).extrap(n));
138     converged(j)   = T(j).relErr(n) < rtol + ...
139                     atol/abs(T(j).extrap(n));
140 end
141
142 end % Fin ciclo sobre el kernel
143
144 if all(converged)
145     break;
146 end
147
148 end % Fin ciclo de la extrapolacion
```


APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
149
150 % Limpiar el arreglo sobre la estructura T:
151 for j = 1:nKernels
152     n = T(j).n;
153     T(j).extrap = T(j).extrap(1:n);
154     T(j).relErr = T(j).relErr(1:n);
155     T(j).absErr = T(j).absErr(1:n);
156 end
157 end
```

B.2.5. Arreglo tipo Schlumberger

```
1 %-----%
2 %      MODELO DIRECTO METODO ELECTRICO EN UNA DIMENSION
3 %      ARREGLO TIPO SCHLUMBERGER
4 %      REALIZADO POR JEFFERSON SANCHEZ DUCUARA
5 % INVERSION CONJUNTA DE DATOS ELECTRICOS Y MAGNETOTELURICOS EN LA
6 %      DETERMINACION DE ESTRUCTURAS EN EL SUBSUELO
7 %      INSTITUTO DE GEOFISICA
8 %      UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
9 %      2018
10 %-----%
11
12 function [E stats] = Obtener_EM1D_S_QWE(s,h,pho,relTol,absTol,nQuad)
13 %
14 % Funcion que conecta la rutina el kernel para un arreglo tipo
15 % Schlumberger a traves de la cuadratura con extrapolacion.
16 %
17 %
18 % ***La integracion de las funciones de Bessel son evaluadas usando el
19 %      metodo de cuadratura con extrapolacion (QWE).***
20 %
21 % Regresa la respuesta de la resistividad aparente para un arreglo tipo
22 % Schlumberger en un arreglo arbitrario de N-capas.
23 %
24 % Uso:
25 %
26 % [E stats] = Obtener_EM1D_S_QWE(s,h,pho,relTol,absTol,nQuad)
27 %
28 % Entradas:
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
29 %
30 % s      = vector de separacion entre los electodos.
31 % h      = vector de profundidad de las capas.
32 % rho    = resitividad de las capas.
33 % relTol = Tolerancia relativa que detiene el metodo de cuadratura con
34 %         extrapolacion.
35 % absTol = Tolerancia absoluta que detiene el metodo de cuadratura con
36 %         extrapolacion.
37 % nQuad  - Numero de puntos a ser usados en la cuadratura Gaussiana de
38 %         cada integral usada en el metodo QWE.
39 %
40 % Salidas:
41 %
42 % E      - resistividad aparente para un arreglo tipo Schlumberger en
43 %         un arreglo arbitrario de N-capas.
44 % stats  - un arreglo tipo estructura con resultados de tiempo de
45 %         ejecuciona, numero de evaluaciones del kernel y resultados de
46 %         las iteraciones del metodo de cuadratura con extrapolacion
47 %         (QWE).
48 %
49 % Escrito por:
50 %
51 % Jefferson Sanchez Ducuara
52 % Universidad Nacional Autonoma de Mexico
53 %
54 % Historia:
55 %
56 % Mayo 2018 - implementado
57 %
58 % Funciones externas y archivos requeridos:
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
59 %
60 % - ObtenerPesosBessel
61 % - ObtenerCSEM1DKernels.m
62 % - qwe.m
63 %
64 % Subfunciones contenidas en este archivo:
65 %
66 % - ObtenerEyKernel
67 %-----%
68
69 nIntervalsMax = 100;
70
71 [xIntervals Bx BJO BJ1] = ObtenerPesosBessel(nIntervalsMax,nQuad,'j1');
72
73 E      = zeros(length(s),1);
74 stats = struct('fct',cell(length(s),1));
75
76 for iRx = 1:length(s)
77     fct = 0;
78     Eval_s = s(iRx);
79     intervals = xIntervals/Eval_s;
80     lambda = Bx/Eval_s;
81
82     tstart = tic; % comienzo del tiempo
83
84     T = qwe(relTol,absTol,nIntervalsMax,@ObtenerEyKernel);
85
86     % Resistividad aparente pho(1)+2*pho(1)*s*(Kernel * J1 * Bx):
87
88     E(iRx) =pho(1)+(2*pho(1)*(Eval_s)*T(1).extrap(T(1).n));
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
89
90     stats(iRx).timer = toc(tstart);
91     stats(iRx).T     = T;
92     stats(iRx).fct   = fct;
93 end
94 %-----
95 % Funcion anidada:
96 %
97 % Esta funcion se encuentra anidada y por lo tanto contenida en otra
98 % funcion, con lo cual, las variables en la funcion primaria tienen
99 % alcance dentro de la funcion anidada. De esta forma, se comparte
100 % BJO, BJ1 y los parametros del modelo con la rutina de evaluacion
101 % del Kernel, sin existir la necesidad de enrutarlos a traves de la
102 % funcion qwe.
103 % Esto ayuda con la velocidad, ya que Matlabs usa algo llamado
104 % pass-by-value para todos los argumentos de las funciones, y por
105 % lo tanto siempre estaria perdiendo el tiempo copiando estas matrices
106 % si las pasamos como argumentos.
107 %
108 %-----
109
110 function EyKernels = ObtenerEyKernel(i)
111
112 % Regresa el kernel evaluado en el indice lambda para el intervalo i:
113
114     Bindex = (i-1)*nQuad +(1:nQuad);
115     EyK    = zeros(length(Bindex),1);
116
117     for j = 1:length(Bindex)
118         EyK(j) = ObtenerEM1DKernel(lambda(Bindex(j)),h,pho,Bx(Bindex(j)));
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
119     end
120
121 % Producto de la funcion de Bessel evaluada sobre lambda/s juntos con
122 % los pesos de la cuadratura los cuales fueron escalados para cada de
123 % integracion:
124
125     bma = (intervals(i+1)-intervals(i))/2;
126     EyKernels = bma*(EyK(:).'*BJ1(Bindex));
127
128     fct = fct + nQuad;
129
130 end
131 return
132 end
```

B.3. Modelo inverso

```
1 %%-----%
2 %           MODELO DE INVERSION EN UNA DIMENSION
3 %           REALIZADO POR JEFFERSON SANCHEZ DUCUARA
4 % INVERSION CONJUNTA DE DATOS ELECTRICOS Y MAGNETOTELURICOS EN LA
5 %           DETERMINACION DE ESTRUCTURAS EN EL SUBSUELO
6 %           INSTITUTO DE GEOFISICA
7 %           UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
8 %           2018
9 %%-----%
10 %
11 % Funcion que conecta los modelos directos y la rutina de inversion.
12 %
13 % ***La integracion de las funciones de Bessel son evaluadas usando el
14 % metodo de cuadratura con extrapolacion (QWE).***
15 %
16 % Regresa la respuesta de los parametros que tienen el mejor ajuste
17 % de los datos iniciales, para un arreglo arbitrario de N-capas.
18 %
19 % Uso:
20 %
21 % Entradas:
22 % DatosEM = arreglo de datos electricos: distancia AB/2 y resistividad.
23 % DatosMT = arreglo de datos magnetoteluricos: frecuencia, resistividad y
24 % fase.
25 % relTol  = tolerancia relativa que detiene el metodo de cuadratura con
26 % extrapolacion.
27 % absTol  = tolerancia absoluta que detiene el metodo de cuadratura con
28 % extrapolacion.
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
29 % nQuad    = numero de puntos a ser usados en la cuadratura Gaussiana de
30 %          cada integral usada en el metodo QWE.
31 % Pa_r     = Parametros iniciales para la resistividad.
32 % Pa_h     = Parametros iniciales para la profundidad.
33 %
34 % Salidas:
35 %
36 % Re_a2    = Respuesta de la resistividad aparente para un arreglo
37 %          arbitrario de N-capas, producto del mejor ajuste m calculado.
38 %
39 % Escrito por:
40 %
41 % Jefferson Sanchez Ducuara
42 % Universidad Nacional Autonoma de Mexico
43 %
44 % Historia:
45 %
46 % Mayo 2018 - implementado
47 %
48 % Funciones externas y archivos requeridos:
49 %
50 % - Obtener_EM1d_S_QWE caso electrico.
51 % - InversionMT          caso magnetotelurico.
52 % - Jacobian
53 %
54 % Subfunciones contenidas en este archivo:
55 %
56 %-----%
57 %
58 close all;
```


APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
59 clear;
60 clc;
61 format long;
62 load Datos.txt                                %Cargar datos
63 Frecuencia=Datos(:,1);
64
65
66
67 Periodo = 1./Frecuencia';
68 Re_a=Datos(:,2);
69
70 fase=Datos(:,3);
71
72 Pa_r = [10 200];                             %Parametros iniciales para la resistividad
73 Pa_h = [100];                                %Parametros iniciales para el espesor de las capas
74 m = [Pa_r Pa_h];
75 R_initial = Pa_r;
76 h_initial = Pa_h;
77 lr = length(Pa_r);
78 lh = length(Pa_h);
79 Tol = 10e-10;                                %Tolerancia
80 Iteracion = 1;
81 Max_Iteracion = 500;
82 dfit = 1;
83
84
85 while Iteracion < Max_Iteracion
86     Pa_r = m(1:lr);
87     Pa_h = m(1+lr:lr+lh);
88     for i = 1:length(Frecuencia)
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
89     Fr = Datos(i);
90     [R, F]=InversionMT(Pa_r,Pa_h,Fr);
91     g = R;
92     Re_a1(i,:) = g;
93     end
94 Error_1 = (log(Re_a)-log(Re_a1));
95 Diferencia = Error_1;
96 Ajuste_1 = Error_1'*Error_1;
97 if Ajuste_1<Tol
98     loglog(Periodo,Re_a,'k.',Periodo,Re_a1,'k');
99     axis([1 1000 1 1000])
100    xlabel('Periodo');
101    ylabel('Resistividad Aparente (Ohm-m)');
102 break
103 end
104 [A] = jacobian(Datos,Frecuencia,Pa_r,Pa_h,lr,lh,Re_a,Re_a1);
105 [U, S, V] = svd(A,0);
106 ss = length(S);
107 say = 1;
108 k = 0;
109 while say<ss
110     diagS = diag(S);
111     beta = S(say)*(dfit^(1/say));
112     if beta<10e-5
113         beta = 0.001*say;
114     end
115     for j = 1:ss
116         SS(j,j) = S(j,j)/(S(j,j)^2+beta);
117     end
118     dmg = V*SS*U'*Diferencia;
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
119 mg = exp(log(m)+dmg');
120 Pa_r = mg(1:lr);
121 Pa_h = mg(1+lr:lr+lh);
122 for j = 1:length(Frecuencia)
123     Fr = Datos(j);
124     [R, F]=InversionMT(Pa_r,Pa_h,Fr);
125     g = R;
126     Re_a2(j,:) = g;
127 end
128 error=Re_a-Re_a2;
129 ssq=sum(error.*error);
130 Error_2 = (log(Re_a)-log(Re_a2));
131 Ajuste_2 = Error_2'*Error_2;
132 if Ajuste_2>Ajuste_1
133     'Parametros del sistema'
134     say = say+1;
135     k = k+1;
136     if k == ss-1
137         Iteracion = Max_Iteracion;
138         say = ss+1;
139 end
140 else
141 say = ss+1;
142 m = mg;
143 dfit = (Ajuste_1-Ajuste_2)/Ajuste_1;
144 Iteracion = Iteracion+1;
145 a = Iteracion;
146 if dfit<Tol
147 Iteracion = Max_Iteracion;
148 say = say+1;
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
149 end
150
151 end
152 end
153
154 subplot(1,2,1),
155 loglog(Periodo,Re_a,'k.',Periodo,Re_a2,'r');
156 grid on;
157 axis([min(Periodo) max(Periodo) min(Re_a2) max(Re_a2)])
158 xlabel('Periodo','Interpreter','Latex');
159 ylabel('Resistividad Aparente MT  $\rho$  (Ohm-m)','Interpreter','Latex')
    ;
160 legend('Observada','Calculada','Location','northwest');
161 pause(0.001)
162 end
163 %Error
164 %R1 calcula la matriz de resolucio del modelo
165 R1=inv(A'*A+beta)*A'*A
166 %calcula la matriz de covarianza de el modelo
167 vect=ones(1,(lr+lh))*ssq/(length(fase)-(lr+lh));
168 varD=diag(vect,0);
169 %covM=inv(G'*G+damp)*varD;
170 covM=inv(A'*A)*varD;
171 sdev=sqrt(diag(covM))
172
173 observed = Re_a;
174 calculated = Re_a2;
175 h = legend('Observada','Calculada');
176 format bank;
177 m_r=zeros(1,length(Pa_r));
```

```

178 m_h=zeros(1,length(Pa_h));
179 for i = 1 :length(Pa_r)
180     m_r(i)=m(i);
181 end
182
183 for i = length(Pa_r)+1:length(m)
184     m_h(i-length(Pa_r))=m(i);
185 end
186
187 m_r
188 m_h
189
190 rr = [0,m_r];
191 tt = [0,m_h,max(m_h)*10];
192 subplot(1,2,2),
193 stairs(rr,tt,'r-','LineWidth',3);
194 rrr = [0,R_initial];
195 ttt = [0,h_initial,max(Pa_h)*10];
196 hold on;
197 subplot(1,2,2),
198 stairs(rrr,ttt,'k--');
199 grid on
200 set(gca,'Ydir','reverse');
201 set(gca,'Xscale','log');
202 ylim([min(tt) max(tt)]);
203 xlim([0 (max(rr)+1000)]);
204 xlabel('Resistividad Aparente  $\rho$  (Ohm-m)','Interpreter','Latex');
205 ylabel('Profundidad (m)','Interpreter','Latex');
206 legend('Calculada','Inicial','Location','southwest');
207

```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
208 rms = norm(Re_a2-Re_a) /sqrt(length(Re_a));
```

B.3.1. Jacobiano

```
1 %%-----%
2 %           JACOBIANO
3 %           REALIZADO POR JEFFERSON SANCHEZ DUCUARA
4 % INVERSION CONJUNTA DE DATOS ELECTRICOS Y MAGNETOTELURICOS EN LA
5 % DETERMINACION DE ESTRUCTURAS EN EL SUBSUELO
6 %           INSTITUTO DE GEOFISICA
7 %           UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
8 %           2018
9 %%-----%
10 %
11 % Funcion que calcula el Jacobiano en los modelos de la rutina de
12 % inversion.
13 %
14 % ***La integracion de las funciones de Bessel son evaluadas usando el
15 % metodo de cuadratura con extrapolacion (QWE).***
16 %
17 % Regresa la respuesta de los parametros que tienen el mejor ajuste
18 % de los datos iniciales, para un arreglo arbitrario de N-capas.
19 %
20 % Uso: [A] = jacobian(Datos,Frecuencia,Pa_r,Pa_h,lr,lt,Re_a,Re_a1)
21 % Entradas:
22 % Datos (EM o MT) = arreglo de datos electricos: distancia AB/2 y
23 %                 resistividad o arreglo de datos magnetoteluricos:
24 %                 frecuencia, resistividad y fase.
25 % Frecuencia o AB/2 = frecuencia o separacion AB/2
26 % Pa_r = parametros iniciales para la resistividad.
27 % Pa_h = parametros iniciales para la profundidad.
28 % lr = longitud del vector Pa_r.
```

APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
29 % lt      = longitud del vector Pa_h.
30 % Re_a    = valores de resistividad observados.
31 % Re_a1   = valores de resistividad calculados.
32 %
33 % Salidas:
34 %
35 % A      = Matriz de respuesta
36 %
37 % Escrito por:
38 %
39 % Jefferson Sanchez Ducuara
40 % Universidad Nacional Autonoma de Mexico
41 %
42 % Historia:
43 %
44 % Mayo 2018 - implementado
45 %
46 % Funciones externas y archivos requeridos:
47 %
48 % - Obtener_EM1d_S_QWE caso electrico.
49 % - InversionMT      caso magnetotelurico.
50 %
51 % Subfunciones contenidas en este archivo:
52 %
53 %-----%
54
55 function [A] = jacobian(Datos ,Frecuencia ,Pa_r ,Pa_h ,lr ,lt ,Re_a ,Re_a1)
56 par = 0.1;
57 r2 = Pa_r;
58 for i = 1:lr
```


APÉNDICE B. CÓDIGOS

```
59 r2(i) = (Pa_r(i)*par)+Pa_r(i);
60 r2b(i)= Pa_r(i)-(2*(Pa_r(i)*par));
61 for j = 1:length(Frecuencia)
62 Fr = Datos(j);
63 [R, F]=InversionMT(r2,Pa_h,Fr);
64 [g] = R;
65 Re_a2(j,:) = g;
66 end
67 A1(:,i) = ((Re_a2-Re_a1)/(Pa_r(i)*par))*Pa_r(i)./Re_a;
68 r2 = Pa_r;
69 end
70 t2 = Pa_h;
71 for k = 1:lt
72 t2(k) = (Pa_h(k)*par)+Pa_h(k);
73 for i = 1:length(Frecuencia)
74 Fr = Datos(i);
75 [R, F]=InversionMT(Pa_r,t2,Fr);
76 [g] = R;
77 Re_a3(i,:) = g;
78 end
79 A2(:,k) = ((Re_a3-Re_a1)/(Pa_h(k)*par))*Pa_h(k)./Re_a;
80 t2 = Pa_h;
81 end
82 A = [A1 A2];
83 return
```