



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LOS TEOREMAS I Y II DE PAINLEVÉ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

GABRIELA JOCELYN GUTIÉRREZ GUILLÉN



DIRECTOR DE TESIS:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

- | | |
|------------------------------|---------------------------------------|
| 1. Datos del alumno | 1. Datos del alumno |
| Apellido paterno | Gutiérrez |
| Apellido materno | Guillén |
| Nombres | Gabriela Jocelyn |
| Teléfono | 9671364299 |
| Universidad Nacional | Universidad Nacional |
| Autónoma de México | Autónoma de México |
| Facultad de Ciencias | Facultad de Ciencias |
| Carrera | Matemáticas |
| Número de cuenta | 414002933 |
| 2. Datos del tutor | 2. Datos del tutor |
| Grado | Dra. |
| Nombre | Laura |
| Apellido paterno | Ortiz |
| Apellido materno | Bobadilla |
| 3. Datos del sinodal 1 | 3. Datos del sinodal 1 |
| Grado | Dr. |
| Nombre | Jawad |
| Apellido paterno | Snoussi |
| 4. Datos del sinodal 2 | 4. Datos del sinodal 2 |
| Grado | Dr. |
| Nombres | Vinicio Antonio |
| Apellido paterno | Gómez |
| Apellido materno | Gutiérrez |
| 5. Datos del sinodal 3 | 5. Datos del sinodal 3 |
| Grado | M. en C. |
| Nombres | Jesús Alberto |
| Apellido paterno | Palma |
| Apellido materno | Márquez |
| 6. Datos del sinodal 4 | 6. Datos del sinodal 4 |
| Grado | Mat. |
| Nombre | Gilberto |
| Apellido paterno | Bruno |
| Apellido materno | Pérez |
| 7. Datos del trabajo escrito | 7. Datos del trabajo escrito |
| Título | Sobre los teoremas I y II de Painlevé |
| Número de páginas | 76 |
| Año | 2018 |

Agradecimientos

Esta tesis fue realizada con el apoyo del proyecto CB-2013/219722 financiado por CONACYT y con apoyo del proyecto IN106217 financiado por PAPIIT.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VII
1. Mundo analítico	1
1.1. Funciones analíticas	1
1.2. Superficies de Riemann	14
1.3. Ecuaciones diferenciales analíticas y foliaciones	15
2. Funciones multivaluadas	19
3. Funciones algebroides	29
3.1. Singularidades	29
3.2. Funciones algebroides	40
4. Los teoremas de Painlevé	47
4.1. Nociones geométricas	48
4.2. El teorema I de Painlevé	50
4.3. El teorema II de Painlevé	59
A. Topología	63

Introducción

Las ecuaciones diferenciales no sólo aparecen en las matemáticas, aparecen también en varias ramas de la biología (competencia entre especies, ecuaciones para describir el surgimiento de la vida o la evolución [22]), de la química (sistemas de reacción-difusión [22]), y sobre todo en muchas ramas de la física, tales como dinámica de fluidos, mecánica, relatividad, etc. De aquí que el estudio de las ecuaciones diferenciales sea un área de gran interés científico, que ha tenido un gran desarrollo (desde su surgimiento hasta la fecha) y que sea un campo de estudio en el que convergen varias otras ramas de las matemáticas (tales como topología, análisis, geometría, entre otras). Todo esto da una gran riqueza a este campo de estudio y lo hace particularmente interesante.

Paul Painlevé fue un político y matemático francés que nació el 5 de diciembre de 1863 y murió el 29 de octubre de 1933 en París. Su obra matemática es extensa y la mayor parte está dedicada al estudio de las ecuaciones diferenciales. Su interés en la física era evidente (por publicaciones como [17–19]), tal interés lo llevó a desarrollar teoría que hoy en día es fundamental en el campo de las ecuaciones diferenciales, tal es el caso de la propiedad de Painlevé en la que se afirma que, bajo ciertas condiciones, es posible llevar una ecuación diferencial a una ecuación canónica; además, Painlevé dio una lista con 50 de estas ecuaciones canónicas, que hoy en día son conocidas como las ecuaciones de Painlevé, y cuyo estudio cualitativo es un tema de investigación actual muy común entre los matemáticos que se dedican al campo de las ecuaciones diferenciales. Paul Painlevé también tiene muchos resultados teóricos, en esta misma área, que están publicados en sus múltiples y variados artículos de investigación.

En este trabajo nos centraremos en dos resultados teóricos de dicho matemático, tales son los teoremas I y II de Painlevé; los cuales motivan el título de esta tesis. Ambos teoremas surgen al estudiar una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (1)$$

donde $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ y tanto $P(x, y)$ como $Q(x, y)$ pertenecen al anillo de polinomios $\mathbb{C}[x, y]$. Así, empezamos por recordar que, por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias (que enunciaremos con precisión en el capítulo 1), sabemos que para cada pareja $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ tal que $Q(x_0, y_0) \neq 0$ existe una solución analítica local $y = \varphi(x, (x_0, y_0))$ a la ecuación (1) con condición inicial (x_0, y_0) .

La solución analítica $y = \varphi(x, (x_0, y_0))$ sólo está definida en una vecindad de x_0 , pero podemos continuar analíticamente a esta función y preguntarnos qué propiedades tiene esta nueva función. Una primera observación es que seguirá siendo solución de la ecuación diferencial (1), por ser continuación analítica de una solución y una segunda observación es que no necesariamente será monovaluada. Nuestra nueva función puede tener problemas en algunos puntos para los que no exista una continuación analítica posible; a estos puntos los llamaremos singularidades de la función. Nos concentraremos en el estudio de las singularidades algebroides (que generalizarán a las singularidades de funciones algebraicas y cuya definición damos en el capítulo 3). Bajo este lenguaje (que se desarrolla con toda precisión a lo largo del capítulo 3), lo que se asegura en el enunciado del teorema I de Painlevé es que existe un conjunto finito de puntos sobre los que se proyectan todas las singularidades no algebroides de toda función que se obtiene al continuar analíticamente cualquier solución analítica local de la ecuación (1).

Otro hecho que nos asegura el teorema de existencia y unicidad de soluciones es que para todo $y \in \mathbb{C}$ suficientemente cercano de y_0 existe una solución local $\varphi(x, (x_0, y))$ con condición inicial (x_0, y) . Así, si ahora estamos interesados en un análisis local, podemos considerar $x_1 \in \mathbb{C}$ (que no sea una singularidad para la función $\varphi(x, (x_0, y_0))$) y un camino γ que una x_0 con x_1 (a lo largo del que $\varphi(x, (x_0, y_0))$ admita una prolongación analítica) y preguntarnos cómo varía la prolongación analítica de la función $\varphi(x, (x_0, y))$ a lo largo de caminos suficientemente cercanos a γ en función de y . De manera más precisa, si $\varphi_\gamma(x, (x_0, y))$ denota el germen de función que obtenemos en $\gamma(1) = x_1$ al continuar analíticamente a la función $\varphi(x, (x_0, y))$ a lo largo del camino γ , podemos preguntarnos cómo varía $\varphi_\gamma(x_1, (x_0, y))$ (en función de y) al cambiar γ por curvas suficientemente cercanas a ella. La respuesta a esta pregunta nos la da el teorema II de Painlevé, y nos asegura que para valores de y en un disco suficientemente pequeño centrado en y_0 , la correspondencia que acabamos de describir es una función multivaluada de y .

De las descripciones anteriores podemos ver que varios conceptos requieren ser precisados, por esto el capítulo 2 y el capítulo 3 están dedicados a desarrollar, con todo el cuidado y la rigurosidad necesarios, los conceptos que están presentes en los enunciados de los teoremas I y II de Painlevé. De manera más específica, en el capítulo 2 construimos el objeto geométrico al que llamaremos función multivaluada y en el capítulo 3 damos las definiciones de singularidad, singularidad algebroides y función algebroides, acompañadas de ejemplos para entender el comportamiento geométrico de cada una. Finalmente en el capítulo 4 presentamos los enunciados precisos y una prueba de los teoremas I y II.

Además, en el capítulo 1 se encuentra toda la teoría del mundo analítico (funciones, variedades y ecuaciones diferenciales analíticas) que se necesita para comprender todo lo que en este trabajo se expone y en el apéndice se presenta una lista de todos los resultados de topología que son mencionados y/o utilizados en el mismo.

Capítulo 1

Mundo analítico

Este primer capítulo recopila toda la teoría del mundo analítico que usaremos a lo largo de este trabajo. De manera más específica, en este capítulo daremos las demostraciones, o una referencia de dónde encontrarlas, de los resultados para funciones, variedades, ecuaciones diferenciales y foliaciones analíticas que nos serán útiles.

1.1. Funciones analíticas

A lo largo de esta sección desarrollaremos una parte de la teoría sobre transformaciones analíticas que nos será de gran utilidad para entender todo lo que en este texto se expone. Además, los resultados que aquí enunciaremos serán las herramientas principales en las demostraciones de muchos de los teoremas que probaremos en los siguientes capítulos.

Denotaremos por \mathbb{C} al campo de los números complejos, por $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a la *esfera de Riemann* o *los números complejos extendidos* y por \mathbb{H}^2 al semiplano superior, es decir, a $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.

No abordaremos la parte básica de la teoría para funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} sobre continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad, etcétera; pero ésta puede ser consultada en [1].

Definición 1.1.1. Por un *dominio* de \mathbb{C}^n entenderemos un abierto no vacío $U \subset \mathbb{C}^n$ que además es conexo.

Todas las funciones y transformaciones con las que trabajaremos serán analíticas, por lo que es importante definir este concepto. Empezaremos por definirlo para funciones de \mathbb{C}^n en \mathbb{C} , pues usaremos esto para la definición en el caso general.

Definición 1.1.2. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. La función f es *analítica* en U si para cada $w \in U$ existe una vecindad abierta de $w = (w_1, \dots, w_n)$, $V \subset U$,

tal que f tiene una expresión en serie de potencias de la forma:

$$f(z) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{\infty} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} (z_1 - w_1)^{\alpha_1} (z_2 - w_2)^{\alpha_2} \dots (z_n - w_n)^{\alpha_n} \quad (1.1)$$

que es convergente para todo $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in V$.

Sabemos que las series que están descritas por una expresión como la dada en (1.1) convergen de manera uniforme y absoluta para toda bola centrada en w con radio suficientemente pequeño (y positivo); por esta razón tenemos que cualquier reordenamiento de dicha serie seguirá representando a la función f . Si ahora tomamos valores fijos $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n$ de las coordenadas $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n$, por lo que acabamos de observar, podemos reordenar la serie 1.1 de tal forma que sea una serie de potencias convergente en una variable (z_i), para z_i suficientemente cercano de w_i ; además, la afirmación que acabamos de hacer se cumple para cualquier valor fijo b_j suficientemente cercano de w_j , $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$.

Lo que acabamos de probar en el párrafo anterior es que si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica, entonces f es analítica en cada variable z_j , en el correspondiente dominio; así, derivar a la función f respecto a la variable z_j está bien definido y denotaremos a dicha derivada como $\frac{\partial f}{\partial z_j}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Definición 1.1.3. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Una transformación $f: U \rightarrow \mathbb{C}^m$ puede ser descrita por m funciones $g_j: U \rightarrow \mathbb{C}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, tales que $f(z_1, \dots, z_n) = (g_1(z_1, \dots, z_n), \dots, g_m(z_1, \dots, z_n))$. Así, la transformación f es *analítica* en U si todas las funciones g_1, \dots, g_m son analíticas en U .

Definición 1.1.4. Sean $U \subset \mathbb{C}^n$ y $V \subset \mathbb{C}^m$ abiertos. Decimos que la transformación $f: U \rightarrow V$ es un *biholomorfismo* si f es analítica, biyectiva y su transformación inversa es analítica.

Cuando hacemos un análisis local del comportamiento de una función f alrededor de un punto z_0 , resulta natural pensar en todas las funciones que coinciden con f en un abierto alrededor de dicho punto, por esto es conveniente definir el siguiente concepto.

Definición 1.1.5. Sea $z_0 \in \mathbb{C}^n$. Un *germen de función analítica* en z_0 es la clase de equivalencia de funciones analíticas, definidas en una vecindad de z_0 , dada por la siguiente relación de equivalencia: si f_1 y f_2 son analíticas en las vecindades V_1 y V_2 de z_0 , correspondientemente, entonces f_1 y f_2 son equivalentes si y sólo si existe $V \subset V_1 \cap V_2$ vecindad de z_0 tal que f_1 y f_2 coinciden en V .

A partir de ahora, utilizaremos la siguiente notación; si f es una función analítica en una vecindad del punto z_0 , entonces \mathbf{f} denotará al germen de función en z_0 definido por f .

Nos concentraremos en funciones analíticas de \mathbb{C} en \mathbb{C} , empezando por enunciar algunos resultados preliminares, para proceder con las demostraciones de aquéllos que utilizaremos en los capítulos centrales.

Teorema 1.1.1 (Fundamental del cálculo complejo). *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio donde la función f es continua y sea $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ una curva \mathcal{C}^1 por tramos en U . Consideremos $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que $f = g'$, donde $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica, entonces*

$$\int_{\gamma} f = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Teorema 1.1.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio donde la función f está definida y γ_1, γ_2 dos curvas cerradas de clase \mathcal{C}^1 por tramos que son homótopas¹ como curvas cerradas en U . Supongamos que la función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica, entonces*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Definición 1.1.6. Sea γ una curva cerrada de clase \mathcal{C}^1 por tramos en \mathbb{C} y sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. El índice de γ con respecto a z_0 se define como

$$I(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Por el teorema 1.1.2 dos curvas homótopas en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ tienen en mismo índice; además, geoméricamente el índice de una curva respecto a un punto representa el número de veces que la curva rodea al punto, tomando en cuenta el sentido en el que lo hace. Un resultado que recordamos para reafirmar esta última idea geométrica, es el siguiente.

Teorema 1.1.3. *Sea γ una curva cerrada de clase \mathcal{C}^1 por tramos en \mathbb{C} y sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Entonces $I(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.*

Ahora enunciaremos dos teoremas que nos dan una descripción de la forma que tiene la expresión de una función f como una serie.

Teorema 1.1.4. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una función analítica alrededor del punto z_0 , D un disco de convergencia de la serie centrado en z_0 y $z \in D$, entonces $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, donde $f^{(n)}$ denota la derivada n -ésima de f , y por tanto:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (1.2)$$

Teorema 1.1.5 (de Laurent). *Si f es una función analítica en un anillo de la forma $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, donde $0 \leq r_1 \leq r_2$, entonces, para todo $z \in A$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \quad (1.3)$$

¹En diversos libros podemos encontrar este termino como *homotópicas*, sin embargo, en este trabajo, siguiendo la forma de nuestra lengua (que es romance), nos referiremos a este termino como *homótopas* (*homotopes* en frances).

A (1.2) y (1.3) se les conoce como expresión de f en serie de Taylor y Laurent respectivamente.

En el caso en que $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica, con $r > 0$ se cumplen las hipótesis del teorema 1.1.5, por lo que su expresión en series de Laurent será la descrita en (1.3) y tendremos tres casos excluyentes, que son los siguientes:

1. $b_k = 0$ para todo $k \in \{1, 2, \dots\}$,
2. $b_k \neq 0$ y $b_m = 0$, para todo $m > k$,
3. $b_k \neq 0$ para un número infinito de índices $k \in \{1, 2, \dots\}$;

estas tres posibilidades motivan la siguiente definición.

Definición 1.1.7. Si z_0 es como en el párrafo anterior, entonces z_0 es una *singularidad aislada* de la función f . Además, z_0 es una *singularidad removible* si cumple 1, un *polo de orden k* si cumple 2 y una *singularidad esencial* si cumple 3.

Si una función es analítica en \mathbb{C} excepto por polos, entonces decimos que es una función *meromorfa*. Un ejemplo de este tipo de funciones lo obtenemos al considerar el cociente de una función analítica $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y una función polinomial $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, es decir, $\frac{f(z)}{p(z)}$ donde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es convergente en \mathbb{C} , y $p(z) = (z - \alpha_1)^{\eta_1} (z - \alpha_2)^{\eta_2} \cdots (z - \alpha_k)^{\eta_k}$, con $\eta_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Esta afirmación se sigue del hecho de que $\frac{f(z)}{p(z)}$ es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, y como $p(z)$ es un polinomio podemos encontrar una vecindad agujereada de radio r_i al rededor de cada α_i de tal forma que $p(z) \neq 0$ en dicha vecindad. Así, al tomar el anillo $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - \alpha_i| < r_i\}$ obtenemos que:

$$\frac{f(z)}{p(z)} = \frac{1}{(z - \alpha_i)^{\eta_i}} \left(\frac{f(z)}{(z - \alpha_1)^{\eta_1} \cdots (z - \alpha_{i-1})^{\eta_{i-1}} (z - \alpha_{i+1})^{\eta_{i+1}} \cdots (z - \alpha_k)^{\eta_k}} \right),$$

y como $\frac{f(z)}{(z - \alpha_1)^{\eta_1} \cdots (z - \alpha_{i-1})^{\eta_{i-1}} (z - \alpha_{i+1})^{\eta_{i+1}} \cdots (z - \alpha_k)^{\eta_k}}$ es analítica en la vecindad que elegimos, entonces tiene una expresión en serie de potencias convergente digamos $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \alpha_i)^n$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{p(z)} &= \frac{1}{(z - \alpha_i)^{\eta_i}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \alpha_i)^n \\ &= \frac{b_0}{(z - \alpha_i)^{\eta_i}} + \cdots + \frac{b_{\eta_i-1}}{z - \alpha_i} + b_{\eta_i} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{\eta_i+n} (z - \alpha_i)^n, \end{aligned}$$

que es la expresión en serie de Laurent de $\frac{f(z)}{p(z)}$ al rededor de cada α_i ; de donde podemos ver que α_i es un polo de orden η_i . Como lo anterior se cumple para todo α_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, concluimos que la función $\frac{f(z)}{p(z)}$ es una función meromorfa.

Definición 1.1.8. Sea z_0 una singularidad aislada de la función f . El número complejo b_1 en la expresión (1.3) es el *residuo* de f en z_0 . Y lo denotaremos por $Res(f, z_0)$.

Proposición 1.1.1. Sea f una función analítica en una vecindad agujereada del punto $z_0 \in \mathbb{C}$. El punto z_0 es un polo de orden k de f si y sólo si $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$, donde $g(z)$ es una función analítica en una vecindad de z_0 y tal que $g(z_0) \neq 0$.

Definición 1.1.9. Sea f una función analítica en un dominio $U \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in U$. La función f tiene un *cerro de orden k* en z_0 si $f(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) = 0$ para todo $m < k$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Proposición 1.1.2. Sea f una función analítica en una vecindad del punto $z_0 \in \mathbb{C}$. El punto z_0 es un cerro de orden k de f si y sólo si $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g(z)$ es una función analítica en una vecindad de z_0 y tal que $g(z_0) \neq 0$.

Teorema 1.1.6 (del residuo). Sean z_1, z_2, \dots, z_n puntos contenidos en $U \subset \mathbb{C}$, donde U es un dominio tal que $f: U - \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica. Supongamos que γ es una curva cerrada de clase \mathcal{C}^1 por tramos en $U - \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ que es homótopa a un punto en U , entonces

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) I(\gamma, z_j).$$

La demostración de las proposiciones y los teoremas que hemos enunciado hasta ahora, en esta sección, pueden encontrarse por ejemplo en [1]. Una vez que tenemos enunciados estos resultados preliminares empezamos con las construcciones y teoremas que nos serán de gran utilidad.

Empezaremos con la definición y los resultados relacionados con la *continuación analítica* de funciones. El primer resultado establece que los cerros de una función analítica son aislados; dicho resultado es el siguiente.

Proposición 1.1.3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos en U distintos y tales que $z_n \rightarrow z_0 \in U$. Si $f(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(z)$ es idénticamente cero en una vecindad de z_0 .

La demostración de este resultado la haremos por contradicción.

Demostración. Supongamos que existe $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de números complejos en U distintos, tales que $z_n \rightarrow z_0 \in U$, que además cumplen que, $f(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; supongamos también que en toda vecindad de z_0 f no se anula idénticamente.

Observemos primero que $f(z_0) = 0$, esto se sigue del hecho de que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ al cumplirse que $z_n \rightarrow z_0$, ya que f en particular es continua; y como $f(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(z_0) = 0$.

Sabemos que en una vecindad de z_0 la expresión de $f(z)$ en serie de Taylor es de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

como por hipótesis f no es idénticamente cero en esta vecindad, entonces no todas las derivadas de f se anulan en z_0 , por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que z_0 es

un cero de orden k de f . Así, en una vecindad de z_0 , $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, con φ una función analítica y tal que $\varphi(z_0) \neq 0$.

Como la función φ es continua, sabemos que ser distinto de cero es una condición que se tiene que dar en un abierto y, por tanto, existe una vecindad V de z_0 tal que $\varphi(w) \neq 0$ para todo $w \in V$. Así, $f(w) = (w - z_0)^k \varphi(w) \neq 0$, para todo $w \in V \setminus \{z_0\}$. Además, dado que z_n converge a z_0 , para N suficientemente grande $z_n \in V \setminus \{z_0\}$ para toda $n > N$, y por hipótesis $f(z_n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$; de donde tenemos una contradicción con el hecho de que $f(w) \neq 0$ para todo $w \in V \setminus \{z_0\}$. Por lo que podemos concluir lo que queríamos. \square

El siguiente resultado que demostraremos es el *principio de continuación analítica*. Este teorema será fundamental para lo que desarrollaremos en los capítulos 2 y 3.

Teorema 1.1.7 (Principio de continuación analítica). *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio y sean $f(z)$, $g(z)$ dos funciones que son analíticas en U . Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos en U distintos y tales que $z_n \rightarrow z_0 \in U$. Si $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in U$.*

Demostración. Sea $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $h(z) = f(z) - g(z)$. Así definida tenemos que h es una función analítica en U que además cumple que $h(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces por la proposición anterior (1.1.3), tenemos que existe una vecindad de z_0 en la que h es idénticamente 0.

Además, como alrededor de z_0 la expresión en serie de Taylor de la función h es de la forma:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

entonces se cumple que $h^{(n)}(z_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que h es idénticamente cero en una vecindad de z_0 .

Sea $B = \{u \in U \mid h(z) \equiv 0 \text{ en una vecindad de } u\}$. Notemos primero que $B \neq \emptyset$, pues $z_0 \in B$; además, es abierto por cómo lo definimos. Ahora veamos que también es cerrado: sea $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números distintos tales que $z_k \in B$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $z_k \rightarrow z \in U$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$, $z_k \in B$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $h^{(n)}(z_k) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así en particular, $h(z_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por la proposición anterior (1.1.3) podemos concluir que $z \in B$.

Por último, observemos que como U es conexo y $B \subset U$ es un conjunto abierto, cerrado y no vacío, tendremos que $B = U$, que era lo que queríamos probar. \square

Corolario 1.1.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio y sean $f(z)$, $g(z)$ dos funciones que son analíticas en U . Si existe $V \subset U$ un abierto no vacío tal que $f(z) = g(z)$ para toda $z \in V$ entonces $f \equiv g$ en todo U .*

La demostración de este corolario se sigue inmediatamente del teorema 1.1.7.

Otro hecho que se sigue inmediato del teorema 1.1.7 es que si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones analíticas en los dominios U_1 y U_2 , respectivamente, donde $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

y, además, $f_1(z)$ y $f_2(z)$ coinciden en esta intersección, entonces existe una única función analítica $h: U_1 \cup U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ que extiende a $f_1(z)$ y $f_2(z)$; a esta función se le llama *continuación analítica* de $f_1(z)$, o de $f_2(z)$. Aunque acabamos de definir qué entenderemos por continuación analítica de una función, la noción que más nos va a interesar es la de *continuación analítica a lo largo de una curva*, que es lo que precisaremos ahora.

Definición 1.1.10. Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino. Una secuencia de discos abiertos $D_0, D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{C}$ *recubre* al camino γ si existe una partición del intervalo $[0, 1]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$, tal que D_k contiene a $\gamma([t_k, t_{k+1}])$ para toda $k \in \{0, \dots, n\}$.

De la definición se tiene que la intersección entre dos discos consecutivos es no vacía y, por tanto, un abierto. Además, por como definimos un recubrimiento, se tiene que los discos son una cubierta de γ pero que además está ordenada.

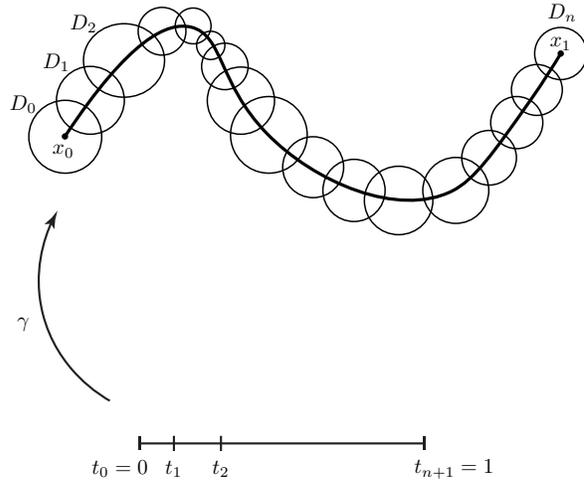


Figura 1.1: La secuencia de discos D_0, D_1, \dots, D_n recubre γ .

Definición 1.1.11. Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino, f admite una *prolongación analítica a lo largo de γ* si existe una secuencia de discos abiertos D_0, D_1, \dots, D_n contenidos en \mathbb{C} que recubren γ y una secuencia de funciones analíticas $f_k: D_k \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f_0 \equiv f$ en una vecindad de $x_0 = \gamma(0)$ y $f_k \equiv f_{k+1}$ en $D_k \cap D_{k+1}$.

para toda $k \in \{0, \dots, n-1\}$. El germen de función definido por f_n en $x_1 = \gamma(1)$ se denotará por \mathbf{f}_γ y se llamará la determinación de f sobre x_1 .

Teorema 1.1.8. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un dominio, γ_0, γ_1 dos caminos en U que van de $z_0 \in U$ a $z_1 \in U$ y f una función que es analítica en una vecindad de z_0 tal que puede ser prolongada analíticamente a lo largo de todo camino contenido en U que empieza en z_0 . Si γ_0 y γ_1 son homótopos en U , entonces $\mathbf{f}_{\gamma_0} = \mathbf{f}_{\gamma_1}$.

Demostración. Como γ_0 y γ_1 son homótopos, entonces existe una homotopía $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ tal que $H|_{\{0\} \times [0, 1]} = \gamma_0$, $H|_{\{1\} \times [0, 1]} = \gamma_1$ y $H|_{\{t\} \times [0, 1]} = \gamma_t$, con γ_t un camino que va de z_0 a z_1 . Sea $R = [0, 1] \times [0, 1]$, queremos demostrar que continuar a la función f a lo largo de $H(\partial R)$ (ver imagen 1.2) nos conduce al germen de función en z_0 con el que empezamos (\mathbf{f}), ya que la curva $H(\partial R)$ es simplemente $\gamma_{z_0} * \gamma_1^{-1} * \gamma_{z_1} * \gamma_0$, donde γ_{z_i} denota el camino constante en z_i , $\gamma_{z_1}(t) = z_1$ para toda $t \in [0, 1]$; $i \in \{0, 1\}$; por lo que, si continuamos f a lo largo de $\gamma_{z_0} * \gamma_1^{-1} * \gamma_{z_1} * \gamma_0$ y llegamos al germen original en z_0 , entonces continuar f a lo largo de $\gamma_1^{-1} * \gamma_0$ también nos lleva al germen original en z_0 . Así, tendríamos que $\mathbf{f}_{\gamma_0} = \mathbf{f}_{\gamma_1}$, pues de lo contrario, la continuación analítica a lo largo del camino inverso γ_1^{-1} no sería única y sí lo es debido al principio de continuación analítica (1.1.7).

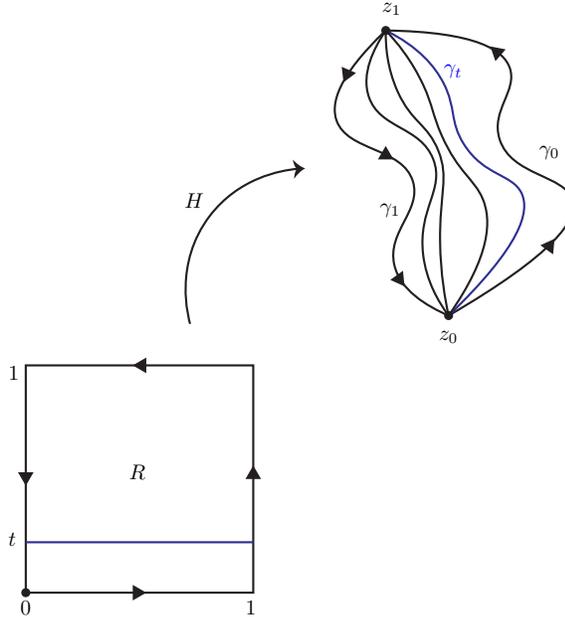


Figura 1.2: Homotopía entre γ_0 y γ_1 .

Supongamos, por contradicción, que al continuar f a lo largo de la curva $H(\partial R)$ no obtenemos el germe original sobre z_0 . Partimos de manera horizontal a R en dos rectángulos: $R_1 = [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$ y $R_2 = [0, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$, y definimos $\lambda_1 := \partial R_1$ y $\lambda_2 := ([0, \frac{1}{2}] \times \{0\})^{-1} * \partial R_2 * [0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$ (ver figura 1.3). Si continuamos f a lo largo de $H(\lambda_1)$ y $H(\lambda_2)$, alguna continuación debe llevarnos a un germe sobre z_0 distinto de \mathbf{f} , pues de lo contrario, continuar a lo largo de $H(\lambda_2 * \lambda_1)$ nos llevaría a \mathbf{f} , pero continuar a f a lo largo de $H(\lambda_2 * \lambda_1)$ es lo mismo que continuarla a lo largo de $H(\partial R)$, ya que $H(\lambda_2 * \lambda_1) = \gamma_{z_0} * \gamma_0^{-1} * \gamma_{z_1} * \gamma_{\frac{1}{2}} * \gamma_{z_0} * \gamma_{z_0} * \gamma_0^{-1} * \gamma_{z_1} * \gamma_0$, por lo que esto no puede pasar.

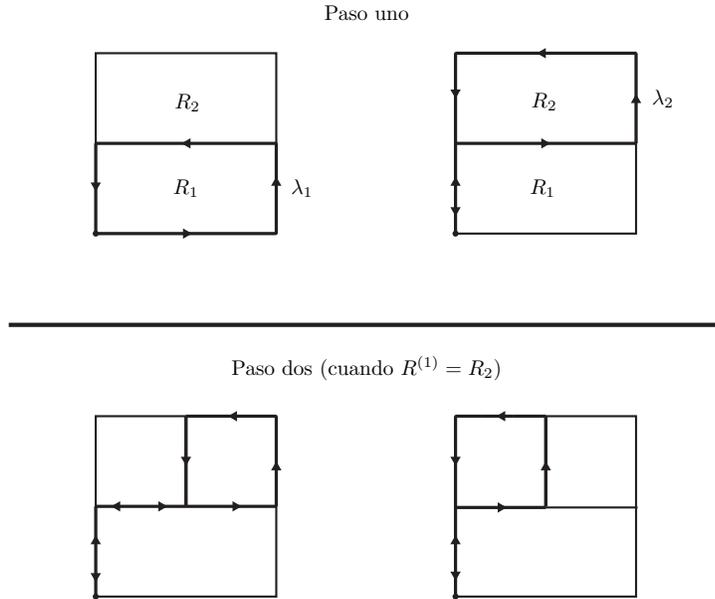


Figura 1.3: Corte horizontal y vertical.

Si $H(\lambda_i)$ es la curva que nos conduce a un germe en z_0 distinto de \mathbf{f} , entonces ahora partimos de manera vertical al rectángulo R_i en dos rectángulos, donde $i = 1$ o $i = 2$, y aplicamos el mismo razonamiento. Si continuamos con este proceso alternando entre cortes verticales y horizontales obtendremos una sucesión de rectángulos $R = R^{(0)} \supset R^{(1)} \supset \dots \supset R^{(n)} \supset \dots$ tales que $Diam(R^{(n)}) \rightarrow 0$, y caminos $H(\lambda^{(n)})$ de z_0 en z_0 , tales que al continuar a f a lo largo de cada uno de ellos obtenemos en z_0 un germe distinto de \mathbf{f} . Además, cada curva $\lambda^{(n)}$ es de la forma $p_n^{-1} * \partial R^{(n)} * p_n$, donde p_n es una poligonal que empieza en $(0, 0) \in R$ y termina en el vértice inferior izquierdo de $R^{(n)}$ y se cumple que p_n es una parte de p_{n+1} . Así, como $Diam(R^{(n)}) \rightarrow 0$, entonces todos los rectángulos se intersecan

en exactamente un punto, sea $z \in R$ este punto. Además, las poligonales p_n , en el límite, forman una curva p_∞ que une $(0, 0)$ con z . Si continuamos analíticamente a f a lo largo de $H(p_\infty)$ obtenemos una extensión de $f(z)$ en una vecindad V de $H(z)$. Si tomamos $H^{-1}(V)$, entonces para n suficientemente grande, $R^{(n)}$ está completamente contenido en $H^{-1}(V)$, por lo que en particular $\partial R^{(n)} \subset H^{-1}(V)$, lo que es una contradicción con el hecho de que al continuar f a lo largo de la imagen bajo H de $\lambda^{(n)} = p_n^{-1} * \partial R^{(n)} * p_n$ llegáramos a un germen en z_0 distinto de \mathbf{f} . Con lo que concluimos nuestro resultado. \square

Como corolario obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.1.9 (de monodromía). *Sean U un dominio en \mathbb{C} que es simplemente conexo, $z_0 \in U$ y $f(z)$ una función que es analítica en una vecindad de z_0 . Supongamos que $f(z)$ puede ser continuada analíticamente a lo largo de todo camino contenido en U que empieza en z_0 . Si $z_1 \in U$ y γ_1, γ_2 son cualesquiera dos caminos en U que van de z_0 a z_1 , entonces $\mathbf{f}_{\gamma_1} = \mathbf{f}_{\gamma_2}$.*

Demostración. Como U es simplemente conexo, entonces cualesquiera dos caminos con el mismo punto inicial y final son homótopos, así si γ_1 y γ_2 son cualesquiera dos caminos que unen z_0 con z_1 , por el teorema anterior (1.1.8), obtenemos que $\mathbf{f}_{\gamma_1} = \mathbf{f}_{\gamma_2}$. \square

Ahora dejaremos el tema de continuación analítica para pasar a los resultados relacionados con el *principio del argumento*, que enunciaremos a continuación.

Teorema 1.1.10 (Principio del argumento). *Sea f analítica en un dominio U , excepto por polos en los puntos p_1, p_2, \dots, p_m y con ceros en c_1, c_2, \dots, c_n , contados con multiplicidades, lo que quiere decir que aparecen en la lista tantas veces como sus multiplicidades. Si γ es una curva cerrada, \mathcal{C}^1 por tramos, homótopa a un punto en U y que no pasa por ningún cero o polo de la función f , entonces:*

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^n I(\gamma, c_j) - \sum_{i=1}^m I(\gamma, p_i) \right).$$

Demostración. Sea $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, así definida g es analítica en $U \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_m, c_1, c_2, \dots, c_n\}$.

Supongamos que c_j es un cero de orden k de f , entonces localmente tendremos que $f(z) = (z - c_j)^k \varphi(z)$, con φ analítica y $\varphi(c_j) \neq 0$, por lo que si derivamos obtendremos que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= k(z - c_j)^{k-1} \varphi(z) + (z - c_j)^k \varphi'(z) \\ &= (z - c_j)^{k-1} (k\varphi(z) + (z - c_j)\varphi'(z)), \end{aligned}$$

como $k\varphi(z) + (z - c_j)\varphi'(z)$ es analítica y tal que $k\varphi(c_j) + (c_j - c_j)\varphi'(c_j) \neq 0$, concluimos que c_j es un cero de orden $k - 1$ de $f'(z)$. Se sigue de este hecho que

c_j es un polo simple de g . Además, su residuo es k , pues

$$g(z) = \frac{k(z - c_j)^{k-1}\varphi(z) + (z - c_j)^k\varphi'(z)}{(z - c_j)^k\varphi(z)} = \frac{k}{z - c_j} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

De manera análoga, si p_i es un polo de orden k de f , entonces localmente $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - p_i)^k}$, con φ analítica y $\varphi(p_i) \neq 0$, por lo que:

$$f'(z) = \frac{\varphi'(z)}{(z - p_i)^k} - k \frac{\varphi(z)}{(z - p_i)^{k+1}} = \frac{\varphi'(z)(z - p_i) - k\varphi(z)}{(z - p_i)^{k+1}},$$

y, por tanto,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{\varphi'(z)(z - p_i) - k\varphi(z)}{(z - p_i)^{k+1}}}{\frac{\varphi(z)}{(z - p_i)^k}} = \frac{\varphi'(z)(z - p_i) - k\varphi(z)}{(z - p_i)\varphi(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{k}{z - p_i};$$

de donde concluimos que p_i es un polo simple de g con residuo $-k$.

Finalmente, si usamos el teorema del residuo para la función g obtenemos que $\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \sum_l \text{Res}(g, z_l) I(\gamma, z_l)$, donde z_l son los puntos (distintos) en donde g tiene polos y como el valor de los residuos en los ceros de f está dado por la multiplicidad y en los polos por menos la multiplicidad, concluimos que:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^n I(\gamma, c_j) - \sum_{i=1}^m I(\gamma, p_i) \right).$$

□

Corolario 1.1.2. Sea f analítica en un dominio U , excepto por polos en los puntos p_1, p_2, \dots, p_m y con ceros en c_1, c_2, \dots, c_n , contados con multiplicidades. Si γ es una curva cerrada, \mathcal{C}^1 por tramos, homótopa a un punto en U y que no pasa por ningún cero o polo de la función f que, además, cumple con que el índice de γ respecto a cualquier cero o polo es 1, entonces:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (Z - P),$$

donde Z es el número de ceros y P es el número de polos de f contados con multiplicidad.

Teorema 1.1.11 (de Rouché). Sean f y g analíticas en un dominio $U \subset \mathbb{C}$, excepto por un número finito de polos y que toman el valor cero sólo un número finito de veces. Si γ es una curva en U cerrada, \mathcal{C}^1 por tramos, homótopa a un punto en U y tal que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \gamma$, entonces, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$, donde $Z_f = \sum_{j=1}^n I(\gamma, c_j)$ y $\{c_j\}_{j=1}^n$ son los ceros de f contados con multiplicidad; y lo correspondiente se tiene en las definiciones de Z_g, P_g y P_f .

Demostración. Si f o g tuvieran ceros o polos en γ entonces no se cumpliría que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \gamma$, así podemos dividir esta última igualdad por $|f(z)|$ y tendremos que $|\frac{g(z)}{f(z)} - 1| < 1$ para todo $z \in \gamma$.

Sea $h(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$, así definida h envía a la curva γ en una curva contenida en el disco centrado en 1 y de radio 1, por lo que $I(h(\gamma), 0) = 0$, pues 0 no está en dicho disco. Así, si $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, entonces

$$0 = 2\pi i I(h(\gamma), 0) = \int_{h(\gamma)} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\frac{d(h(\gamma(t)))}{dt}}{h(\gamma(t))} dt = \int_0^1 \frac{h'(\gamma(t))\gamma'(t)}{h(\gamma(t))} dt = \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)},$$

además,

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{\frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{(f(z))^2}}{\frac{g(z)}{f(z)}} = \frac{g'(z)f(z) - f'(z)g(z)}{f(z)g(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

De donde obtenemos que $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}$ y por el principio del argumento (1.1.10) obtenemos nuestro resultado. \square

Ahora enunciaremos un corolario cuya prueba es consecuencia inmediata del teorema de Rouché.

Corolario 1.1.3. Sean f y g analíticas en un dominio $U \subset \mathbb{C}$. Si γ es una curva cerrada en U , simple, \mathcal{C}^1 por tramos, homótopa a un punto en U y tal que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para toda $z \in \gamma$, entonces f y g tienen el mismo número de ceros en el interior de γ .

Para finalizar con los resultados para funciones analíticas de \mathbb{C} en \mathbb{C} haremos una breve descripción del comportamiento local de dichas funciones, empezando por el siguiente teorema.

Teorema 1.1.12. Sea f una función analítica y no constante en un dominio $U \subset \mathbb{C}$. Si $z_0 \in U$ es un cero de orden $k \geq 1$ de la función $f(z) - w_0$, entonces existe un número a positivo tal que para toda $\delta \in (0, a)$ existe $\epsilon_\delta > 0$ que cumple que: para cada $w \in D(w_0, \epsilon_\delta)$, la ecuación $f(z) - w = 0$ tiene k soluciones en $D(z_0, \delta)$, contadas con multiplicidad.

Demostración. Como f no es constante, entonces los ceros de $f(z) - w_0$ son aislados, así existe $a > 0$ tal que $f(z) - w_0 \neq 0$ para todo $z \in \overline{D(z_0, a)} \setminus \{z_0\}$. Ahora consideremos $0 < \delta < a$ y $\gamma = \{z \mid |z - z_0| = \delta\}$. Como γ es compacto, entonces $f(z) - w_0$ alcanza su mínimo y por tanto existe $\epsilon_\delta > 0$ tal que $|f(z) - w_0| \geq \epsilon_\delta > 0$ para toda $z \in \gamma$.

Si $w \in D(w_0, \epsilon_\delta)$, entonces para toda $z \in \gamma$:

$$|(f(z) - w) - (f(z) - w_0)| = |w - w_0| < \epsilon_\delta \leq |f(z) - w_0|.$$

De donde concluimos, usando el teorema de Rouché, que $f(z) - w$ tiene el mismo número de ceros que $f(z) - w_0$ en el interior de γ , contados con multiplicidad. \square

Una observación, que se tiene como consecuencia del teorema que acabamos de probar, es que si $f(z) - w_0 = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ es la serie de Taylor de $f(z) - w_0$ alrededor de z_0 , entonces el comportamiento de dicha función está dictado por la menor $k \geq 1$ tal que $f^k(z_0) \neq 0$.

Corolario 1.1.4. Bajo las mismas condiciones del teorema anterior (1.1.12), se puede tomar $\lambda \leq a$ de tal forma que para todo $\delta < \lambda$ existe $\epsilon_\delta > 0$ tal que para cada $w \in D(w_0, \epsilon_\delta) \setminus \{w_0\}$ es tomado en k puntos distintos de $D(z_0, \delta)$.

Demostración. Como por hipótesis f no es constante, f' no es idénticamente cero y por tanto sus ceros son aislados, así, podemos tomar $\lambda \leq a$ de tal forma que $f(z) - w_0$ y $f'(z)$ no se anulen en $\{z \mid |z - z_0| \leq \lambda\} \setminus \{z_0\}$. Por lo tanto, repitiendo el mismo argumento del teorema 1.1.12 obtenemos k ceros de $f(z) - w$, pero ahora todos con multiplicidad 1, ya que $f'(z) \neq 0$ en $D(z_0, \lambda) \setminus \{z_0\}$. \square

Teorema 1.1.13. Sea f una función analítica en una vecindad de $z_0 \in \mathbb{C}$. Si z_0 es un cero de orden k de la función $f(z) - f(z_0)$, entonces $f(z) = f(z_0) + (h(z))^k$, cerca de z_0 , donde h es un biholomorfismo.

Demostración. Tenemos que en una vecindad de z_0 podemos expresar a f como $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, donde φ es analítica y tal que $\varphi(z_0) \neq 0$, por lo que podemos suponer que $\varphi(z)$ sólo toma valores en un disco centrado en $\varphi(z_0)$ que no contiene al 0, esto pues podemos restringir φ lo suficiente para que esto pase. Así, en dicho disco podemos encontrar una rama del logaritmo que esté bien definida en él y por tanto tendremos una rama de la función raíz k -ésima.

Si ahora tomamos $h(z) = (z - z_0) \sqrt[k]{\varphi(z)}$, entonces tenemos que $h'(z) = \sqrt[k]{\varphi(z)} + (z - z_0) e^{\frac{\log \varphi(z)}{k}} \frac{\varphi'(z)}{k \varphi(z)}$, de donde obtenemos que $h'(z_0) \neq 0$ y por el teorema de la función inversa tendremos que h es un biholomorfismo local.

Por último notemos que $(h(z))^k = (z - z_0)^k \varphi(z) = f(z) - f(z_0)$ en una vecindad de z_0 , por tanto, h es la función buscada. \square

Concluimos esta sección con el enunciado de dos teoremas para funciones de varias variables complejas, a saber el teorema de la función implícita y el teorema de Puiseux, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [5].

Teorema 1.1.14 (de la función implícita). Sea $D \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ un dominio, (x_1, \dots, x_n, y) las coordenadas en D y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Si $f(0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}|_0 \neq 0$, entonces existe un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ y una única función analítica $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $f(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = 0$.

Consideremos una función analítica $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, con $U \subset \mathbb{C}^2$ un dominio. El conjunto de puntos $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ es una curva compleja descrita por los ceros de la función f . Una *parametrización local* de la curva \mathcal{C} es una función continua $\Phi: A \subset \mathbb{C} \rightarrow B \subset U$, donde A y B son abiertos, que cumple que $f(\Phi(t)) = 0$, para todo $t \in A$; a t se le suele llamar *parámetro*. Si $f(0, 0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} \neq 0$, el teorema de la función implícita, que acabamos de enunciar, nos da una parametrización local (alrededor de $(0, 0)$) de \mathcal{C} con x como parámetro, pues nos asegura la existencia de una función φ tal que $f(x, \varphi(x)) = 0$. Sin

embargo, cuando $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} = 0$ no podemos usar dicho teorema, pero podemos utilizar el siguiente resultado.

Teorema 1.1.15 (de Puiseux). *Sea f una serie en las variables complejas x, y tal que $f(0, 0) = 0$ y $f(0, y)$ tiene orden $k \geq 1$ en y . Entonces, existe un número natural $n \geq 1$ y una serie φ en la variable T tal que $\varphi(0) = 0$ y $f(T^n, \varphi(T)) = 0$. Además, si f es convergente (y por tanto analítica) también lo es φ .*

A φ se le conoce como *serie de Puiseux* y a $(T^n, \varphi(T))$ *parametrización de Puiseux* de la curva \mathcal{C} . Notemos que si tal φ existe, entonces $x = T^n$, de donde obtenemos que $T = x^{\frac{1}{n}}$ y, por tanto, $f(x, \varphi(x^{\frac{1}{n}})) = 0$, así; los puntos $(x, \varphi(x^{\frac{1}{n}}))$ describen localmente a la curva \mathcal{C} y $\varphi(x^{\frac{1}{n}})$ es una serie con exponentes fraccionarios. Además, cualquier otra parametrización de \mathcal{C} puede ser llevada a la de Puiseux bajo una transformación del parámetro, que es lo que enunciamos de manera precisa a continuación.

Teorema 1.1.16. *Sea (ψ_1, ψ_2) una parametrización local de \mathcal{C} con orden de ψ_1 igual a $k < \infty$ alrededor de cero. Entonces, existe una transformación de $(\mathbb{C}, 0)$ en $(\mathbb{C}, 0)$ con parte lineal no nula β tal que $\beta(0) = 0$ y $\psi_1(\beta(T)) = T^k$. Así, una nueva parametrización de \mathcal{C} está dada por $(T^k, \psi_2(\beta(T)))$, que resulta ser justamente la parametrización de Puiseux.*

1.2. Superficies de Riemann

Definición 1.2.1. Una *variedad topológica* compleja de dimensión n es un espacio topológico (X, τ) Hausdorff y segundo numerable que además cumple con que es localmente homeomorfo a \mathbb{C}^n , es decir, para cada punto $x \in X$ existe un abierto $x \in U$ y un homeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$, donde V es un abierto de \mathbb{C}^n .

Observación 1.2.1. Esta definición es equivalente al caso en el que en el enunciado cambiamos el abierto V por \mathbb{C}^n mismo. Además, las tres condiciones en dicha definición son independientes, es decir, ni una de ellas puede deducirse de las otras.

El conjunto de abiertos de la definición 1.2.1 junto con sus homeomorfismos es llamado el *atlas* de la variedad y suele denotarse como $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, con esta notación la pareja (U_i, φ_i) suele llamarse *carta* o *carta coordenada*. Dadas dos cartas (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) , la *función de transición* o el *cambio de cartas* es la transformación $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: B \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ o bien la transformación $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ y decimos que estas cartas son compatibles si ambas transformaciones son analíticas.

Definición 1.2.2. Una *variedad analítica* es una variedad topológica que cumple con que los cambios de cartas o funciones de transición son analíticas; es decir, para todo par de cartas (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) de la variedad se cumple que: $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: B \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es analítica.

Nosotros únicamente nos concentraremos en el estudio de las *superficies de Riemann* que son las variedades analíticas conexas de dimensión 1.

Dada una variedad analítica, asumiremos que su atlas \mathcal{A} es maximal, es decir, si (U, φ) es compatible con las cartas de \mathcal{A} , entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Algunos ejemplos sencillos de variedades analíticas son:

1. \mathbb{C}^n es una variedad analítica de dimensión n con la carta (\mathbb{C}^n, id) .
2. Un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ es una variedad analítica de dimensión n con carta (U, id_U) .
3. En general, dada una variedad analítica M de dimensión n , si $U \subset M$ es un abierto, entonces U es una variedad analítica de dimensión n , con cartas (V, φ) donde $V \subset U$ y (V, φ) es una carta de M . (O bien tomando las intersecciones de los abiertos de las cartas con U y las funciones restringidas a dichas intersecciones).

Definición 1.2.3. Sean M y N variedades analíticas de dimensión m y n correspondientemente y $g: M \rightarrow N$ continua. g es analítica en $p \in M$ si existe (U, φ) carta alrededor de p y (V, ψ) carta alrededor de $g(p)$ tal que $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ es analítica en $\varphi(p)$. Y diremos que g es una transformación analítica cuando g sea analítica en p para todo $p \in M$.

Esta definición tampoco depende de la carta elegida, pues si (U_2, φ_2) es otra carta alrededor de p y (V_2, ψ_2) es otra carta alrededor de $g(p)$, entonces, $\psi_2 \circ g \circ \varphi_2^{-1} = (\psi_2 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_2^{-1})$, de nueva cuenta teniendo cuidado con los dominios de definición, $\varphi \circ \varphi_2^{-1}$ es analítica en $\varphi_2(p)$ por la compatibilidad, $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ es analítica en $\varphi(p)$ por hipótesis y $\psi_2 \circ \psi^{-1}$ es analítica en $\psi(g(p))$ por la compatibilidad.

Para terminar con esta sección, enunciaremos una definición que utilizaremos en los capítulos 3 y 4.

Definición 1.2.4. Sean X y Y superficies de Riemann y $P: X \rightarrow Y$ una transformación analítica y no constante. La transformación P es una *cuabiente ramificada* si existen una cantidad finita de puntos $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tales que:

1. $P: X \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow Y \setminus \{P(x_1), \dots, P(x_n)\}$, es un mapeo cubriente.
2. Localmente, alrededor de x_i , la transformación P se ve como $z \mapsto z^k$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

A los puntos x_1, \dots, x_n se les conoce como puntos de ramificación.

1.3. Ecuaciones diferenciales analíticas y foliaciones

En esta sección introduciremos los conceptos que serán fundamentales para entender los resultados centrales de este trabajo; tales como *campo de vectores*,

ecuación diferencial analítica y foliación. De igual manera enunciaremos los resultados principales en esta área de estudio, a saber, el teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias y el teorema de rectificación, que serán herramientas importantes para entender el comportamiento de las ecuaciones diferenciales analíticas y las foliaciones. Nosotros nos concentraremos en el estudio en \mathbb{C}^2 , pero lo mismo puede ser planteado en \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.3.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un conjunto abierto. Un *campo vectorial analítico* definido en U es una transformación $V: U \rightarrow \mathbb{C}^2$, $V(z) = (V_1(z), V_2(z))$, donde $V_1(z)$ y $V_2(z)$ son funciones analíticas.

Geoméricamente esto puede ser interpretado como una función que a cada punto p en U le asocia un vector tangente basado en p que varía de manera analítica con el punto. Ahora definiremos lo que entenderemos por una ecuación diferencial definida por el campo vectorial.

Definición 1.3.2. Sean $U \subset \mathbb{C}^2$ un conjunto abierto y $V: U \rightarrow \mathbb{C}^2$ un campo vectorial analítico. La *ecuación diferencial analítica definida por V* está dada por el sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = V_1(z), \quad \frac{dy}{dt} = V_2(z), \quad (1.4)$$

donde $z = (x, y) \in \mathbb{C}^2$.

Otra forma de denotar a la ecuación (1.4) es en su forma vectorial, es decir, $\dot{z} = V(z)$, $z \in \mathbb{C}^2$; que suele ser cómoda por ser una notación más compacta.

Dado $W \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, diremos que una transformación de la forma $\varphi: W \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ es una *solución de la ecuación diferencial* (1.4), si $\varphi(W) \subset U$ y φ_1 y φ_2 son analíticas en W , tales que para toda $t \in W$: $\frac{d\varphi_i}{dt}(t) = V_i(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, $i \in \{1, 2\}$.

Sean $z_0 \in U$ y $t_0 \in W$, si la curva $\varphi(t)$ es solución de la ecuación (1.4) y es tal que $\varphi(t_0) = z_0$, entonces decimos que φ es una solución con condición inicial z_0 y la denotamos por $\varphi(t, z_0)$. El siguiente teorema nos asegura la existencia de dichas soluciones y es un resultado fundamental en este campo de estudio.

Teorema 1.3.1 (de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales). *Sea $\dot{z} = V(z)$, con $(t, z) \in W \times U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$, una ecuación diferencial analítica. Dado $(t_0, z_0) \in W \times U$ existen vecindades $W_0 \subset W$ de t_0 y $U_0 \subset U$ de z_0 tales que, para toda $z \in U_0$ existe una solución $\varphi: W_0 \rightarrow U_0$, $\varphi(t, z)$, es decir $\varphi(t_0) = z$, de la ecuación diferencial, que está definida para toda $t \in W_0$. Más aún, la solución con condición inicial z es única, y depende analíticamente de dicha condición inicial, para toda $z \in U_0$.*

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [9]. La imagen de estas soluciones locales suelen ser llamadas *curvas fase* o *curvas integrales* de la ecuación, y a la representación gráfica conjunta de estas curvas solución en U se le conoce como *retrato de las fases*. Así el retrato de las fases de una ecuación

diferencial analítica nos provee de una partición, por curvas analíticas, de U . Al conjunto \mathcal{F} de estas curvas integrales lo llamamos *foliación* asociada a la ecuación diferencial y por una *hoja de la foliación* entenderemos una componente conexa de una curva de \mathcal{F} .

Definición 1.3.3. Sea $V: U \rightarrow \mathbb{C}^2$ un campo vectorial analítico y $z_0 \in U$, z_0 es un *punto singular* del campo V si $V(z_0) = (0, 0)$. Por el contrario, si $V(z_0) \neq (0, 0)$ entonces z_0 es un *punto no singular*.

De la definición podemos observar que si z_0 es un punto singular del campo V entonces la función constante $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow U$, $\varphi(t) = z_0$ es solución de la ecuación diferencial (1.4), pues $\frac{d\varphi}{dt}(t) = (0, 0) = V(\varphi(t))$, para todo $t \in \mathbb{C}$. Además, si el campo vectorial V tiene puntos singulares, entonces decimos que la foliación \mathcal{F} , asociada a la ecuación diferencial (1.4), es una *foliación singular*.

Ahora que ya hemos definido los conceptos más importantes para el estudio de ecuaciones diferenciales definiremos qué entenderemos por que dos ecuaciones diferenciales sean analíticamente equivalentes, pues esto nos brindará una herramienta para analizar el comportamiento local de las soluciones de una ecuación diferencial.

Definición 1.3.4. Sean $V_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ y $V_2: U_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dos campos vectoriales analíticos. Las ecuaciones diferenciales $\dot{z} = V_1(z)$ y $\dot{z} = V_2(z)$ son analíticamente equivalentes si existe $H: U_1 \rightarrow U_2$ biholomorfismo tal que

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]_{(z)} \cdot V_1(z) = V_2(H(z)).$$

Con esta definición ya podemos enunciar el segundo teorema que es fundamental para el estudio local de soluciones lejos de puntos singulares.

Teorema 1.3.2 (de rectificación). *Sea $V_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ un campo vectorial analítico y $V_2: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ el campo vectorial constante $V_2(z) = (1, 0)$. Entonces las ecuaciones diferenciales $\dot{z} = V_1(z)$ y $\dot{z} = V_2(z)$ son analíticamente equivalentes en una vecindad suficientemente pequeña de cualquier punto no singular de V_1 .*

Una prueba de este teorema puede encontrarse en [9]. Con el enunciado de este teorema terminamos los resultados y definiciones que necesitamos para los capítulos siguientes.

Capítulo 2

Funciones multivaluadas

En este capítulo utilizaremos el concepto de prolongación analítica, definido en el capítulo anterior, para construir lo que llamaremos *función multivaluada*. Geométricamente lo que haremos en esta construcción es considerar un dominio contenido en \mathbb{C} , un germen de función sobre un punto fijo en dicho dominio y todas las continuaciones analíticas de dicho germen a lo largo de caminos contenidos en el dominio; después formaremos un nuevo objeto abstracto en donde, por cada punto del dominio, tendremos tantos puntos como determinaciones distintas sobre él y le daremos una estructura geométrica. Esta construcción es importante, pues las funciones multivaluadas serán protagonistas centrales a lo largo de este trabajo.

Para simplificar la notación, asumiremos que Ω es un abierto conexo en \mathbb{C} , $\{x_0, x_1\} \subset \Omega$, \mathbf{f} es un germen de función analítica en x_0 , I es el intervalo $[0, 1]$ y $\gamma: I \rightarrow \Omega$ un camino que va de $x_0 = \gamma(0)$ a $x_1 = \gamma(1)$.

Para empezar, recordemos que si f es una función que admite una prolongación analítica a lo largo del camino γ , entonces al germen de función que obtenemos en el punto $x_1 = \gamma(1)$ lo denotamos por \mathbf{f}_γ y nos referimos a él como la determinación de f sobre x_1 . A partir de ahora, y al menos que se diga lo contrario, el punto $x_0 \in \Omega$ y el germen de función \mathbf{f} sobre x_0 están fijos. De la definición de continuación analítica podemos hacer las siguientes dos observaciones que nos serán útiles.

Observación 2.0.1. La determinación \mathbf{f}_γ depende sólo de la secuencia de discos $\{D_k\}_k$ que existe de la definición de continuación analítica, una prueba de esta afirmación es la siguiente: si dicha secuencia de discos está fija y las funciones $\{f_k\}_k$ (de la misma definición) existen, entonces éstas son únicas debido al principio de continuación analítica (ver teorema 1.1.7), que establece que si dos funciones coinciden en un abierto entonces coinciden en toda la intersección de sus dominios. Así en particular, la función f_n será única y por tanto la determinación \mathbf{f}_γ también. Más aún, por el mismo argumento, si la secuencia de discos está fija, la determinación \mathbf{f}_γ tampoco depende del camino γ , pues para cualquier camino β tal que la secuencia de discos $\{D_k\}_k$ lo recubre y va de x_0 a

x_1 , la determinación obtenida sobre x_1 , \mathbf{f}_β , sera igual a la obtenida al continuar analíticamente f a lo largo de γ .

Observación 2.0.2. Para toda $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña, f admite una prolongación analítica a lo largo de toda ϵ -perturbación de γ , es decir, a lo largo de todo camino $\beta: I \rightarrow \Omega$ que satisface $|\beta(t) - \gamma(t)| < \epsilon$, para todo $t \in I$, y $\beta(0) = x_0$; esto ya que para ϵ suficientemente pequeña, la secuencia de discos $\{D_k\}_k$ que recubre a γ , también recubre a β y las mismas funciones $\{f_k\}_k$ nos servirán para β . Además, si $\beta(1) = x_1$, entonces γ y β nos llevan a la misma determinación de f sobre x_1 , es decir $\mathbf{f}_\gamma = \mathbf{f}_\beta$.

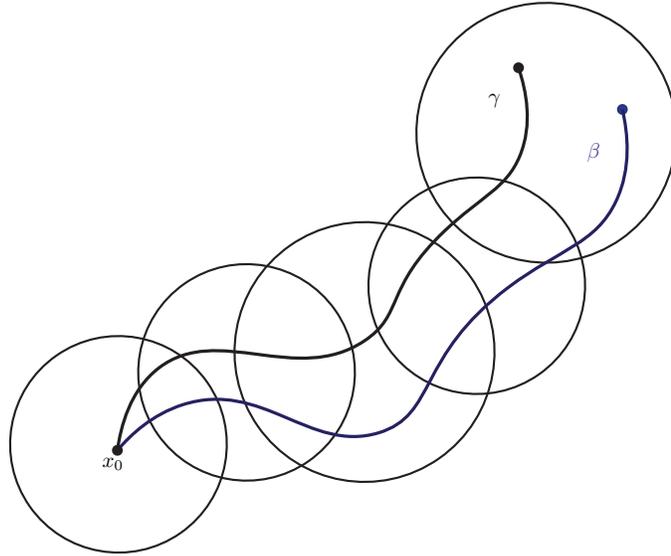


Figura 2.1: Una misma secuencia de discos recubre a α y a β .

Por la observación 2.0.2 podemos considerar que γ es diferenciable, ya que en caso de no serlo podemos remplazarlo por otro camino que sí lo sea y sea una ϵ -perturbación de γ . Así, a partir de ahora γ siempre será un camino diferenciable.

Observemos que si no hubiéramos fijado el germen de función \mathbf{f} sobre x_0 , la observación 2.0.1 sería falsa, pues la determinación sobre x_1 también dependería del germen de función con el que empezamos a continuar analíticamente. Un ejemplo de esto es la función logaritmo, ya que la determinación sobre un punto dependerá de la rama de logaritmo que hayamos elegido para empezar a continuar analíticamente.

Lema 2.0.1 (Poincaré–Volterra). Por encima de cada punto $x \in \Omega$ el conjunto $\{\mathbf{f}_\beta \mid \beta: I \rightarrow \Omega, \beta(0) = x_0 \text{ y } \beta(1) = x\}$ de determinaciones de f es, a lo más, numerable.

En el enunciado anterior, al hablar de \mathbf{f}_β estamos asumiendo que β es un camino a lo largo del que f admite una prolongación analítica.

Demostración. Sea $x \in \Omega$. Para cada camino $\beta: I \rightarrow \Omega$, con $\beta(0) = x_0$ y $\beta(1) = x$, que cumple que f tiene una prolongación analítica a lo largo de él, denotemos por $\{D_{k_\beta}\}$ a la secuencia de discos que lo recubre, que existe por la definición de continuación analítica. Ahora consideremos el conjunto $\{D_{k_\beta} \mid \beta: I \rightarrow \Omega, \beta(0) = x_0 \text{ y } \beta(1) = x\}$; podemos cambiar cada uno de estos discos por discos muy cercanos a ellos de tal manera que éstos nuevos discos tengan radio y centro con coordenadas racionales y la determinación \mathbf{f}_β no cambie; por la observación 2.0.1 sabemos que la determinación f_β sólo depende de la secuencia de discos (incluso no depende de β , mientras $\{D_{k_\beta}\}$ recubra al camino); entonces, como el conjunto de discos con coordenadas y centro racional es numerable, el conjunto $\{\mathbf{f}_\beta \mid \beta: I \rightarrow \Omega, \beta(0) = x_0 \text{ y } \beta(1) = x\}$ también lo es. \square

Otra demostración de este resultado puede ser consultada en [2], esta prueba resulta de nuestro interés debido a que, en dicho libro podemos encontrar una perspectiva distinta.

Ahora enunciaremos y probaremos una proposición, que es el resultado central de este capítulo pues lleva implícita la construcción de lo que llamaremos función multivaluada.

Proposición 2.0.1. Existe una superficie de Riemann, \mathbf{S} , con un punto distinguido $p_0 \in \mathbf{S}$ y una transformación holomorfa $\Phi: \mathbf{S} \rightarrow \Omega \times \mathbb{C}$, $\Phi = (\pi, f)$ que satisface:

1. $\pi(p_0) = x_0$ y $\tilde{f} = f \circ \pi$ en una vecindad de p_0 ,
2. $\pi: \mathbf{S} \rightarrow \Omega$ es un biholomorfismo local en todo punto de \mathbf{S} ,
3. Cualquier otra terna $(\mathbf{S}', p'_0, \Phi')$ que satisface 1 y 2 se factoriza por (\mathbf{S}, p_0, Φ) vía una transformación holomorfa $\varphi: \mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{S}$ tal que $\varphi(p'_0) = p_0$ y $\Phi' = \Phi \circ \varphi$.

Por tanto la terna (\mathbf{S}, p_0, Φ) es única salvo isomorfismos y la imagen $\mathcal{G} := \Phi(\mathbf{S})$ es única.

Demostración. Definimos $\mathbf{S} = \{(\beta(1), \mathbf{f}_\beta) \mid \beta: I \rightarrow \Omega, \beta(0) = x_0\}$ (sobrentendemos que β es un camino a lo largo del que f admite una prolongación analítica). Ahora le daremos una topología a este conjunto.

Consideramos \mathbf{f}_γ y D un disco de convergencia de f_γ alrededor de x_1 . Sea $\gamma_1: I \rightarrow D$ un camino tal que $\gamma_1(0) = x_1$ y definimos $\gamma_2 := \gamma * \gamma_1$. Así, un abierto V en \mathbf{S} alrededor del punto $(\gamma(1), \mathbf{f}_\gamma)$ es el conjunto de los puntos $(\gamma_2(1), \mathbf{f}_{\gamma_2})$ con γ_2 construido como antes (ver figura 2.2).

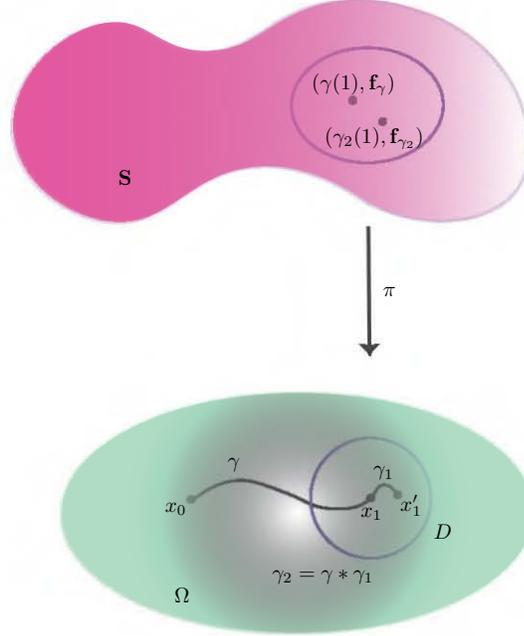


Figura 2.2: Construcción de los abiertos en \mathbf{S} .

Podemos hacer esto para cada punto en \mathbf{S} y su topología será la generada por estos abiertos. Con esta topología \mathbf{S} resulta ser un espacio Hausdorff, esta afirmación puede ser verificada tomando casos y apoyándose en dibujos.

Como ya hemos dotado al conjunto \mathbf{S} con una topología, el siguiente paso es demostrar que es una superficie de Riemann; para hacer esto, necesitamos definir cartas en \mathbf{S} , pues utilizaremos las propiedades de las transformaciones para ver que nuestro espacio topológico es segundo numerable. Así, definimos la transformación $\pi: \mathbf{S} \rightarrow \Omega$ como $\pi((\beta(1), \mathbf{f}_\beta)) = \beta(1)$. Esta transformación es continua, pues los discos de convergencia forman una base de Ω y para cada uno de estos discos su imagen inversa es un abierto en \mathbf{S} por definición.

El abierto V que construimos anteriormente es una vecindad del punto $p_1 = (\gamma(1), \mathbf{f}_\gamma)$ homeomorfa a D por π , ya que para todo punto $p \in D$ existe un camino γ_1 que une a x_1 con p , cuya imagen se queda contenida en D y tal que f puede ser continuada analíticamente por este camino, por ser D un disco de convergencia de f_γ , y por tanto $\pi((\gamma * \gamma_1(1), \mathbf{f}_{\gamma * \gamma_1})) = p$, por lo que π es suprayectiva. Además π es inyectiva: para todo $p \in D$, si $\alpha: I \rightarrow D$ y $\beta: I \rightarrow D$ son dos trayectorias que unen a x_1 y p , entonces $\gamma * \alpha$ y $\gamma * \beta$ conducen a la misma determinación de f , es decir $\mathbf{f}_{\gamma * \alpha} = \mathbf{f}_{\gamma * \beta}$ (por el principio de continuación analítica y el mismo argumento usado en la observación 2.0.1); por tanto si

$(p, \mathbf{f}_{\gamma*\alpha})$ y $(p, \mathbf{f}_{\gamma*\beta})$ son tales que $\pi((p, \mathbf{f}_{\gamma*\alpha})) = \pi((p, \mathbf{f}_{\gamma*\beta}))$ entonces $\mathbf{f}_{\gamma*\alpha} = \mathbf{f}_{\gamma*\beta}$, de donde π es inyectiva. Por último, π es abierta sobre V por definición y por tanto su inversa local es continua.

Como lo anterior lo podemos hacer para todo punto, concluimos que π es un homeomorfismo local en todo punto de \mathbf{S} y, por tanto, para cada punto $p_1 \in \mathbf{S}$ la pareja $(V, \pi|_V)$ es una carta de \mathbf{S} , al rededor de p_1 .

Ahora veamos que este espacio es segundo numerable. Para cada punto $x \in \Omega$ tomamos una determinación fija \mathbf{f}_β donde β es un camino que une a x_0 con x y a lo largo del que f admite una prolongación analítica. Por lo anterior, alrededor del punto (x, \mathbf{f}_β) tenemos una copia del disco de convergencia de f_β ; entonces, como $\Omega \subset \mathbb{C}$ es segundo numerable, basta una cantidad numerable de discos para cubrir Ω ; así, sus copias correspondientes en \mathbf{S} cubren a todos los puntos cuya segunda entrada tiene una determinación fija. Ahora bien, por el lema de Poincaré–Volterra, hay a lo más una cantidad numerable de determinaciones de f sobre cada punto y, por tanto, para \mathbf{S} basta con una cantidad numerable de los abiertos anteriores.

Con todo lo que tenemos hasta ahora, ya hemos probado que \mathbf{S} es una variedad topológica, donde las cartas son los abiertos V que construimos junto con la transformación π restringida a dichos abiertos. Lo que sigue es ver que los cambios de coordenadas son analíticos, y esto se sigue del hecho de que las cartas son la transformación π restringida y, por tanto, los cambios de cartas son la identidad que es analítica. Así, \mathbf{S} es una superficie de Riemann.

Además, por el argumento anterior tenemos que la transformación π y su inversa local son analíticas, por lo que π es un biholomorfismo local en cada punto de \mathbf{S} , puesto que ya sabíamos que π es un homeomorfismo local. Con lo que hemos probado el punto 2 de esta proposición.

Definimos $p_0 = (x_0, \mathbf{f}_{x_0})$ donde \mathbf{f}_{x_0} es el germen de función definido por f sobre x_0 , de este modo tenemos que $\pi(p_0) = x_0$.

Consideremos la transformación $\Phi: \mathbf{S} \rightarrow \Omega \times \mathbb{C}$ definida mediante la regla de correspondencia $\Phi((x, \mathbf{f}_\beta)) := (x, f_\beta(x))$ y definimos también $\tilde{f}: \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\tilde{f}((x, \mathbf{f}_\beta)) = f_\beta(x)$, así tenemos que $\Phi(p) = (\pi, \tilde{f})(p)$ para todo $p \in \mathbf{S}$.

Ahora probaremos que se cumple el punto 1, es decir, que en una vecindad de p_0 se cumple que $\tilde{f} \equiv f \circ \pi$. Sea V_{p_0} la vecindad de p_0 construida como antes y D el disco de convergencia de f al rededor de x_0 . Tomamos $\xi \in V_{p_0}$, así, $\xi = (y, \mathbf{f}_\alpha)$, por construcción de V_{p_0} ; además (por el principio de continuación analítica) $f_\alpha \equiv f$, por tanto $\tilde{f}(\xi) = f_\alpha(y) = f(y) = f \circ \pi(\xi)$ que es lo que queríamos ver.

La transformación Φ es holomorfa, ya que en la primera entrada en coordenadas locales tenemos la identidad, y en la segunda entrada en coordenadas locales tenemos a f , y ambas son analíticas.

\mathbf{S} resulta ser conexo pues es conexo por trayectorias. Esta afirmación se sigue fácilmente del hecho de que la transformación $\tilde{\beta}: I \rightarrow \mathbf{S}$ definida por $\tilde{\beta} = (\beta(t), \mathbf{f}_{\beta|_{[0,t]}})$, cumple con que $\tilde{\beta}(0) = p_0$ y que $\beta \equiv \pi \circ \tilde{\beta}$. Además, la continuidad de $\tilde{\beta}$ se sigue de esta última igualdad y del hecho de que π es un biholomorfismo local en todo punto de \mathbf{S} y, por tanto, en una vecindad de cada punto es invertible; por lo que existe una trayectoria del punto p_0 a cualquier

punto en \mathbf{S} .

Sólo nos queda por probar el punto 3; para esto supongamos que existe $(\mathbf{S}', p'_0, \Phi')$ tal que $\pi'(p'_0) = x_0$ y $\tilde{f}' = f' \circ \pi'$ en una vecindad de p'_0 y que $\pi': \mathbf{S}' \rightarrow \Omega$ es un biholomorfismo local en todo punto de \mathbf{S}' . Lo primero que haremos es probar que existe $\varphi: \mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{S}$ analítica tal que $\pi' = \pi \circ \varphi$.

Definimos φ como sigue (ver figura 2.3): tomamos un punto en \mathbf{S}' , digamos x ; existe un camino en Ω que une a x_0 con $\pi'(x)$ tal que f puede ser continuada analíticamente por este camino, de lo contrario no se cumpliría que $f \circ \pi' = \tilde{f}'$. Como esta igualdad se da en un abierto, entonces se da en la intersección de sus dominios, que será justamente la imagen inversa bajo π' del dominio de f . Por otro lado, $\pi'(x)$ está en el dominio de f , así existe un camino de x_0 a $\pi'(x)$, digamos α , tal que $f_\alpha \circ \pi' \equiv \tilde{f}'$ en una vecindad alrededor de x (justamente por que x está en el dominio de $f \circ \pi'$, la igualdad $f \circ \pi' = \tilde{f}'$ se da en la intersección de sus dominios y el dominio de \tilde{f}' es todo \mathbf{S}'). Ahora consideramos $\varphi: \mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{S}$ dada por $\varphi(x) = (\pi'(x), \mathbf{f}_\alpha)$, donde α es el camino antes descrito; así definida es claro que se cumple $\pi' = \pi \circ \varphi$, además $\varphi(p'_0) = p_0 = (x_0, \mathbf{f}_{x_0})$ pues \mathbf{f}_{x_0} justamente cumple con $f_{x_0} \circ \pi' \equiv \tilde{f}'$ en una vecindad alrededor de p'_0 por hipótesis.

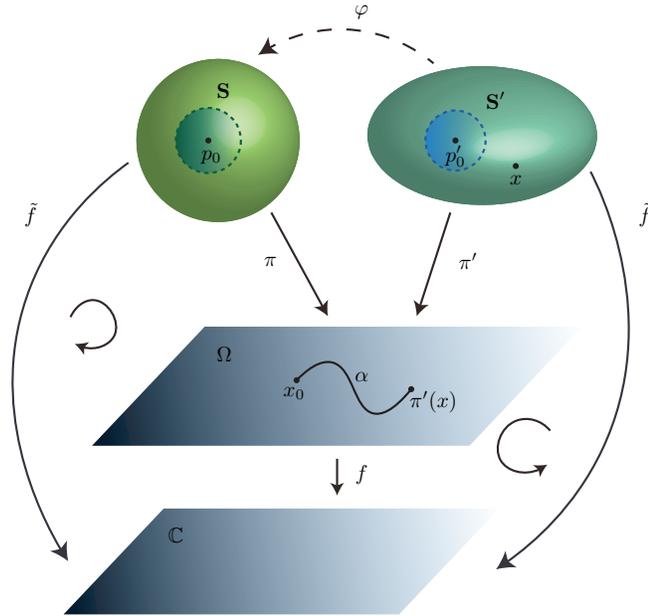


Figura 2.3: Diagrama.

Tenemos que ver que φ está bien definida; por tanto, tomemos $x \in \mathbf{S}'$ y su-

pongamos que $\varphi(x) = (\pi'(x), \mathbf{f}_{\alpha_1})$ y $\varphi(x) = (\pi'(x), \mathbf{f}_{\alpha_2})$. Por construcción se debe cumplir que $f_{\alpha_1} \circ \pi' \equiv \tilde{f}'$ y $f_{\alpha_2} \circ \pi' \equiv \tilde{f}'$ en una vecindad suficientemente pequeña alrededor de x ; más aún, haciendo más pequeña dicha vecindad, podemos obtener que ambas igualdades se den al mismo tiempo y que π' sea un biholomorfismo en dicha vecindad; por tanto tendremos que $f_{\alpha_1} \circ \pi'(y) = \tilde{f}'(y) = f_{\alpha_2} \circ \pi'(y)$ para todo y en la vecindad que construimos. Lo anterior es equivalente a decir que $f_{\alpha_1} \equiv f_{\alpha_2}$ en una vecindad contenida en Ω , pues π' es un biholomorfismo en la vecindad que construimos; de donde concluimos que $\mathbf{f}_{\alpha_1} = \mathbf{f}_{\alpha_2}$ y, por tanto, φ está bien definida.

Ahora veamos que φ es holomorfa. Como π' es holomorfa y un homeomorfismo local en todo punto de \mathbf{S}' , entonces π' restringida a estos abiertos es compatible con el atlas de \mathbf{S}' , por lo que podemos considerar que el atlas está compuesto justamente de la transformación π' restringida a los abiertos correspondientes. Así, φ es la identidad en coordenadas locales, esto debido a la igualdad $\pi' = \pi \circ \varphi$ y, por tanto, es holomorfa.

Por último, tenemos que $\tilde{f}' = f \circ \pi' = f \circ \pi \circ \varphi = \tilde{f} \circ \varphi$ en una vecindad de p'_0 ; por lo que $\tilde{f}' = \tilde{f} \circ \varphi$ en una vecindad de p'_0 , lo que implica (por el principio de continuación analítica) que ambas funciones coinciden en la intersección de sus dominios, que es todo \mathbf{S}' .

Con esto ya podemos concluir que $\Phi' = \Phi \circ \varphi$, que era lo que nos faltaba probar. \square

De esta construcción podemos ver que si f admite una prolongación analítica a lo largo de β , con $\beta(0) = x_0$, entonces existe $\tilde{\beta}: I \rightarrow \mathbf{S}$ continua que satisface $\tilde{\beta}(0) = p_0$ y $\beta = \pi \circ \tilde{\beta}$ (ver figura 2.4). A saber $\tilde{\beta}: I \rightarrow \mathbf{S}$ donde $\tilde{\beta} = (\beta(t), \mathbf{f}_{\beta|_{[0,t]}})$, así definida es claro que $\tilde{\beta}(0) = p_0$ y que $\beta \equiv \pi \circ \tilde{\beta}$, además, la continuidad se sigue de esta última igualdad y del hecho de que π es un biholomorfismo local en todo punto de \mathbf{S} y, por tanto, es invertible en una vecindad de cada punto.

Por el contrario, si β es un camino que une a x_0 con x y es tal que existe un levantamiento $\tilde{\beta}: I \rightarrow \mathbf{S}$ continuo que satisface $\tilde{\beta}(0) = p_0$ y $\beta = \pi \circ \tilde{\beta}$, entonces f admite una prolongación analítica a lo largo de β , ya que si para algún punto en β , f no tuviera una prolongación analítica, sucedería que el punto $(\beta(t), \mathbf{f}_{\beta|_{[0,t]}})$ no existiría en \mathbf{S} , lo que contradiría el hecho de que $\beta = \pi \circ \tilde{\beta}$ o no se cumpliría que $\tilde{\beta}$ es continua, que en ambos casos nos lleva a una contradicción.

Además, por definición se cumplirá que si $g \in \mathbf{f}_{\beta}$ entonces $g \circ \pi = \tilde{f}$ en el punto $\tilde{\beta}(1)$.

Definición 2.0.1. Llamaremos *función multivaluada definida sobre Ω por el germen de f* a la prolongación analítica maximal de f sobre el dominio Ω fijo. De manera más específica, a su superficie de Riemann $\Phi: \mathbf{S} \rightarrow \Omega \times \mathbb{C}$ (salvo isomorfismos) o a la imagen \mathcal{G} .

Denotaremos por f_{Ω} a tal función y si es necesario $\Phi_{f_{\Omega}}: \mathbf{S}_{f_{\Omega}} \rightarrow \Omega \times \mathbb{C}$ o $\mathcal{G}_{f_{\Omega}}$. Es útil recalcar que geoméricamente lo que hicimos en la construcción de f_{Ω} fue construir un objeto (geométrico) en donde diferenciamos dos puntos si el germen de función definido sobre ellos es distinto, pensar en esta idea geométrica

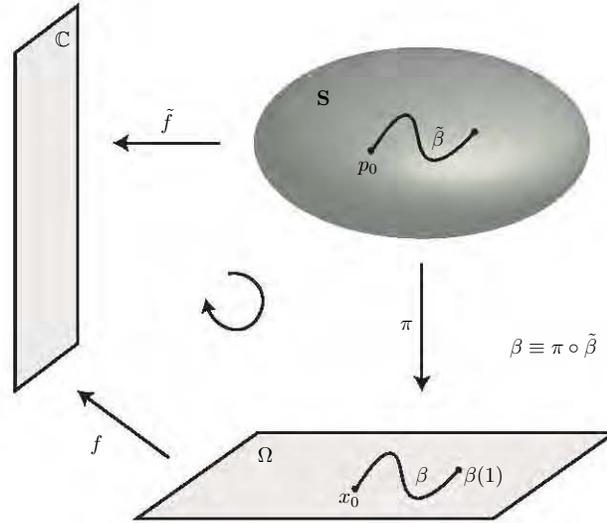


Figura 2.4: Levantamiento, $\tilde{\beta}$, del camino β .

nos ayudará a entender mejor las ideas y construcciones que siguen, por esta razón ilustraremos esta idea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.0.1. Consideramos la función logaritmo en la rama principal $(-\pi, \pi)$ con $x_0 = 1$. Podemos continuar analíticamente a esta función como sigue: en toda la región definida por el complemento del segundo cuadrante tomamos a f como la función logaritmo en la rama principal y la continuamos analíticamente con la función $f_1: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por el logaritmo en la rama $(0, 2\pi)$. Es claro que la función original y esta última coinciden en la intersección de sus dominios; seguimos con el proceso ahora continuando a la función f_1 con una función f_2 , que será la función logaritmo con la misma rama pero ahora definida sobre todo el complemento del cuarto cuadrante. De esta forma hemos continuado analíticamente a nuestra función original f a todo \mathbb{C}^* pero hay multivaluaciones, por ejemplo en el punto $e^{\frac{5i\pi}{4}}$ tenemos que $f(e^{\frac{5i\pi}{4}}) = -\frac{3i\pi}{4}$ pero $f_2(e^{\frac{5i\pi}{4}}) = \frac{5i\pi}{4}$ y, por tanto, $f_2(e^{\frac{5i\pi}{4}}) - f(e^{\frac{5i\pi}{4}}) = 2\pi i$.

Ahora veremos que sobre cada punto tenemos una infinidad de determinaciones tales que dos distintas difieren por un múltiplo entero de $2\pi i$; esto pues si γ_1 y γ_2 son dos caminos que unen a x_0 con un punto distinto de cero y que no

pasan por cero, entonces:

$$f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_2(1)) = [f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_1(0))] - [f(\gamma_2(1)) - f(\gamma_2(0))]$$

esto sucede pues en x_0 empezamos en ambas curvas con el logaritmo en la rama principal; además,

$$[f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_1(0))] - [f(\gamma_2(1)) - f(\gamma_2(0))] = \int_{\gamma_1} f' df - \int_{\gamma_2} f' df$$

ya que γ_1 y γ_2 son dos caminos que no pasan por el cero y por tanto f es analítica a lo largo de estas curvas; por último,

$$\int_{\gamma_1} f' df - \int_{\gamma_2} f' df = \int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} f' df = \int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} \frac{1}{x} dx = 2\pi i I(\gamma_1 * \gamma_2^{-1}, 0) \operatorname{Res}\left(\frac{1}{x}, 0\right).$$

Esta última igualdad se da por el teorema del residuo (ver 1.1.6). Dado que $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{x}, 0\right) = 1$ entonces concluimos que $f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_2(1)) = 2\pi i I(\gamma_1 * \gamma_2^{-1}, 0)$, que es lo que queríamos probar, ya que el índice siempre es un entero.

Empecemos con la construcción geométrica. Sobre la región dada por el complemento del segundo cuadrante hemos definido a la función f , sobre cada punto de esta región solo tenemos definido un germen de función analítica, \mathbf{f} , así en \mathbf{S} tenemos una copia idéntica de esta región. De la misma manera, sobre \mathbb{H}^2 tenemos definida a la función f_1 , entonces, si por un momento olvidamos a la función f , sobre cada punto en \mathbb{H}^2 solo tendremos definido un germen de función y por tanto en \mathbf{S} tendremos una copia idéntica a \mathbb{H}^2 ; sin embargo, ya tenemos definida otra función, que es precisamente f , así, en la región definida por $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ y } \operatorname{Re}(z) > 0\}$ tenemos dos funciones definidas, pero estas dos funciones coinciden, es decir, sobre todo punto en A_1 se tiene que $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1$, y por tanto las copias que teníamos en \mathbf{S} de las regiones definidas por el complemento del segundo cuadrante y por \mathbb{H}^2 , que en principio eran ajenas, resultan estar pegadas por la región correspondiente a A_1 en cada una. Hasta ahora solo tenemos en \mathbf{S} una copia de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Repetimos el paso anterior, ahora para la región definida por el complemento del cuarto cuadrante, si olvidamos lo que hemos hecho, en esta región tenemos definida solo a la función f_2 y, por tanto, en \mathbf{S} tenemos una copia de ésta. Por una parte en la región definida por $A_2 = \mathbb{H}^2$ tenemos definidas dos funciones, pero los valores de éstas coinciden, es decir, sobre todo punto en A_2 se tiene que $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2$. Así, las copias que teníamos en \mathbf{S} de las regiones definidas por \mathbb{H}^2 y por el complemento del cuarto cuadrante, que en principio eran ajenas, resultan estar pegadas por la región correspondiente a A_2 en cada una. Sin embargo, en la región definida por $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0 \text{ y } \operatorname{Re}(z) < 0\}$ también tenemos definidas dos funciones, pero cuyos valores no coinciden para ningún punto en A_3 , de hecho al ser f la función logaritmo en la rama $(-\pi, \pi)$ y f_2 la función logaritmo en la rama $(0, 2\pi)$, para todo punto $z \in A_3$ se tiene que, $f(z) - f_2(z) = 2\pi i^1$. Por tanto, en \mathbf{S} tendremos dos copias ajenas de A_3 , sobre

¹Esto ya se había mencionado pero para un punto en específico al comenzar este ejemplo.

está misma. Podemos continuar con este proceso para ir construyendo \mathbf{S} paso por paso, además, como ya demostramos que sobre cada punto hay una infinidad de determinaciones tales que cada una difiere de la otra por un múltiplo de $2\pi i$, podemos concluir que la superficie \mathbf{S} es una espiral infinita que en el centro tiene un hueco que se proyecta sobre el 0 (ver figura 2.5).

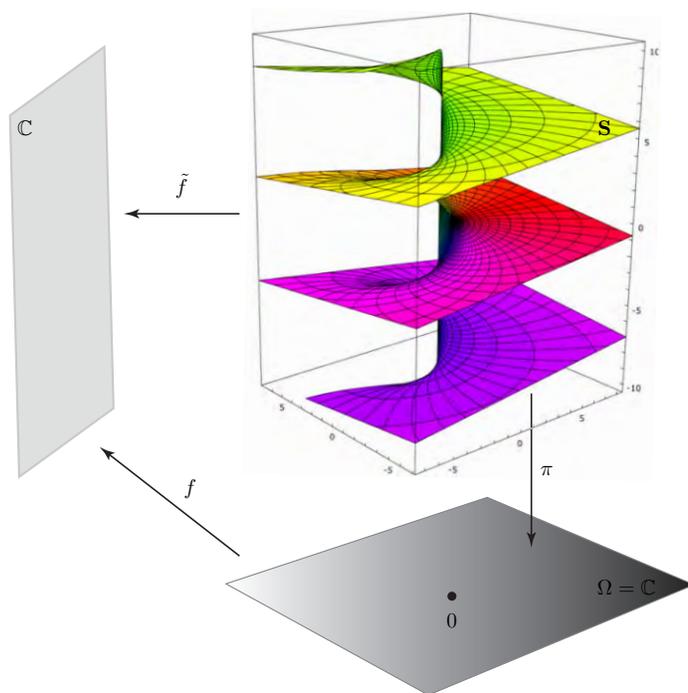


Figura 2.5: Superficie de Riemann \mathbf{S} de la función $f(x) = \log(x)$ [20].

Capítulo 3

Funciones algebroides

Ahora que hemos definido lo que es una función multivaluada nos restringiremos al estudio de sólo una clase de estas funciones. Dicho tipo de funciones son las *funciones algebroides*, cuya definición daremos en este capítulo. Para empezar con este estudio, primero definiremos lo que es una singularidad de una función multivaluada, pues esto nos conducirá a la definición de función algebroide.

3.1. Singularidades

Definición 3.1.1. Decimos que γ conduce a f a una singularidad cuando f admite una prolongación analítica a lo largo de $\gamma|_{[0,1-\epsilon]}$ para toda $\epsilon > 0$ pero no a lo largo de γ . En tal caso diremos que otro camino $\gamma': I \rightarrow \Omega$ que une a x_0 con x_1 conduce a f a la misma singularidad si para toda vecindad D de x_1 las determinaciones $\mathbf{f}_{\gamma|_{[0,\tau]}}$ y $\mathbf{f}_{\gamma'|_{[0,\tau]}}$ definen la misma función multivaluada sobre D para τ suficientemente cercana a 1. Es decir, para τ suficientemente cercana a 1 consideramos las funciones $f_{\gamma|_{[0,\tau]}}$ y $f_{\gamma'|_{[0,\tau]}}$ y construimos su función multivaluada $\underline{f}_{\gamma|_{[0,\tau]D}}$ y $\underline{f}_{\gamma'|_{[0,\tau]D}}$; si estas últimas coinciden, entonces γ y γ' conducen a f a la misma singularidad.

Consideraremos el ejemplo \sqrt{z} , pues las ideas geométricas en este ejemplo nos servirán para los ejemplos posteriores. Si consideramos la ecuación $z = w^2$, sabemos que para todo $z \neq 0$ tenemos dos soluciones posibles, que normalmente denotamos por \sqrt{z} , pero no podemos tratar a estos valores como una función de z , precisamente por que para cada $z \neq 0$ tenemos dos soluciones posibles. Sin embargo, sí podemos tratarlas como una función multivaluada, en donde, sobre cada punto tendremos exactamente dos determinaciones. Esto último pues si $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}$, con $k \in \mathbb{Z}$; de esta última expresión obtenemos que sólo existen dos valores distintos de \sqrt{z} , que son: $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ y $z_2 = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$, y que además cumplen que $z_2 = -z_1$. Ahora bien, si lo que quisiéramos es ver a \sqrt{z} como una función de z , sabemos que una forma de arreglar el “problema” de la multivaluación

es considerar una rama del logaritmo, y así restringir el intervalo en el que es tomado el argumento del número z , teniendo cuidado con el dominio de definición de la función. Utilicemos esta última idea para hacer un análisis del comportamiento cerca de 0. Así, consideremos $U_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$ y la función $f_0: U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_0(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ con $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ¹. Si ahora consideramos $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 1\}$ y la función $f_1: U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_1(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ con $0 < \theta < \pi$, tendremos que f_0 y f_1 coinciden en la intersección de sus dominios. Si repetimos este proceso, considerando por ejemplo $U_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| < 1\}$, $f_2(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ con $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ y $U_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| < 1\}$, $f_3(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ con $\pi < \theta < 2\pi$, tendremos que f_1 y f_2 coinciden en la intersección de sus dominios y lo mismo para f_2 y f_3 (ver figura 3.1). De esta forma podemos ver que siempre podemos continuar analíticamente a la función f_0 cerca de 0, pero nunca podremos hacerlo en 0, pues el logaritmo no está definido en 0.

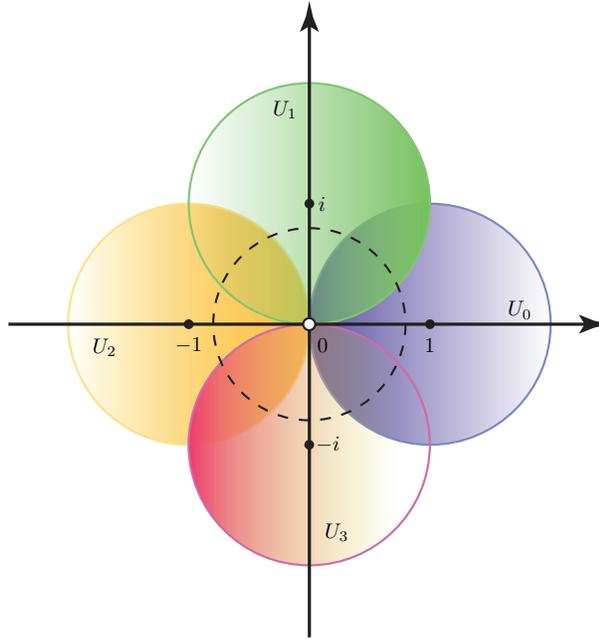


Figura 3.1: Dominios de las funciones f_0 , f_1 , f_2 y f_3 .

Así, por ejemplo si tomamos caminos cercanos a 0 que empiecen en 1 y terminen en 0, siempre podemos continuar a la función f_0 a lo largo de estos

¹También podríamos considerar $-\pi < \theta < \pi$ lo que sería equivalente a tomar la función $f_0 = e^{\frac{1}{2} \log z}$, con $\log(z)$ en la rama $(-\pi, \pi)$.

caminos pero nunca estará definida en 0, por tanto todos estos caminos nos conducirán a una singularidad, además como ya vimos que sin importar cómo continuemos a la función f_0 sobre cada punto sólo podremos tener dos valores distintos, entonces todos los caminos conducirán a f_0 a la misma singularidad.

Si ahora volvemos a la definición 3.1.1, podemos ver que claramente la relación “conducir a f a la misma singularidad” es una relación de equivalencia de caminos que unen a x_0 con x_1 , lo que motiva la siguiente definición.

Definición 3.1.2. Llamaremos *singularidad* de la función multivaluada \underline{f}_Ω (ó de f sobre Ω) definida por γ a la clase de equivalencia dada por la relación anterior y la denotaremos por $[\gamma]_f$.

En algunos libros como [10] llaman al punto $\gamma(1)$ singularidad de f , sin embargo, hay que notar que nosotros estamos definiendo lo que entenderemos por una singularidad de la función multivaluada \underline{f}_Ω . Además, si leemos cuidadosamente textos como el antes mencionado podemos notar que el punto $\gamma(1)$ es definido como una singularidad pero de la función f_γ . Aún así, ambos conceptos están estrechamente relacionados. Geométricamente conviene pensar que si γ conduce a f a una singularidad (o, en el contexto antes mencionado, que $\gamma(1)$ es una singularidad de la función f_γ), entonces las distintas singularidades de \underline{f}_Ω que encontramos a través de caminos que terminan en $\gamma(1)$ están “sobre” el punto $\gamma(1)$ o, de manera más específica, que se proyectan sobre éste mismo.

Así, denotaremos por $\tilde{\Sigma}_{\underline{f}_\Omega}$ y $\Sigma_{\underline{f}_\Omega}$ al conjunto de singularidades de f sobre Ω y a su proyección a Ω , respectivamente. Donde su proyección a Ω es simplemente el punto $x_1 = \gamma(1)$. Cuando sea claro sobre qué dominio estamos trabajando usaremos la notación $\tilde{\Sigma}_f$ y Σ_f .

Definición 3.1.3. Llamaremos *conjunto al infinito* de \mathbf{S} al conjunto de los puntos que no están en \mathbf{S} pero sí están en su cerradura topológica.

De estas definiciones tenemos que γ conduce a f a una singularidad si y sólo si el camino incompleto $\gamma|_{[0,1)}$ se levanta (vía la proyección $\pi: \mathbf{S} \rightarrow \Omega$) en un camino $\tilde{\gamma}: [0, 1) \rightarrow \mathbf{S}$, donde $\tilde{\gamma}(t)$ tiende al conjunto al infinito de \mathbf{S} cuando $t \rightarrow 1$; ya que todo punto de $\tilde{\gamma}$ está en \mathbf{S} pero el límite no está, debido a como construimos \mathbf{S} , y $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), f_{\gamma|_{[0,t]}})$.

Definición 3.1.4. f define una función multivaluada *regular* sobre Ω si f no tiene singularidades sobre Ω , es decir, f admite un prolongamiento analítico a lo largo de todo camino $\gamma: I \rightarrow \Omega$ que empieza en x_0 .

Lo anterior pasa si y sólo si la transformación $\pi: \mathbf{S} \rightarrow \Omega$ es un mapeo cubriente. Esto, pues si f admite un prolongamiento analítico a lo largo de todo camino γ que empieza en x_0 , entonces para todo punto en Ω hay un disco al rededor de él tal que en \mathbf{S} hay un abierto (el de la construcción de \mathbf{S}), homeomorfo a éste disco, por cada determinación \mathbf{f}_γ distinta. Por el contrario, si la transformación π fuera un mapeo cubriente y hubiera una singularidad en Ω , entonces habría un hoyo en el centro de un abierto de los que construimos en \mathbf{S} y, por tanto, para este abierto, π no sería un homeomorfismo con el disco correspondiente, lo que implica que no sería un mapeo cubriente.

En particular, al ser π un mapeo cubriente y Ω conexo, el número de preimágenes es el mismo para todos los puntos; en otras palabras, el número de determinaciones de f sobre un punto x no depende de dicho punto. Más aún, si Ω es simplemente conexo, entonces la extensión de f es *uniforme*, lo que significa que no hay multivaluaciones; esto es consecuencia del teorema de monodromía (1.1.9).

Ejemplo 3.1.1. La función logaritmo desarrollada en el ejemplo 2.0.1 es holomorfa sobre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, por tanto, define una función uniforme sobre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ y, como vimos en dicho ejemplo, sobre \mathbb{C}^* define una función multivaluada regular.

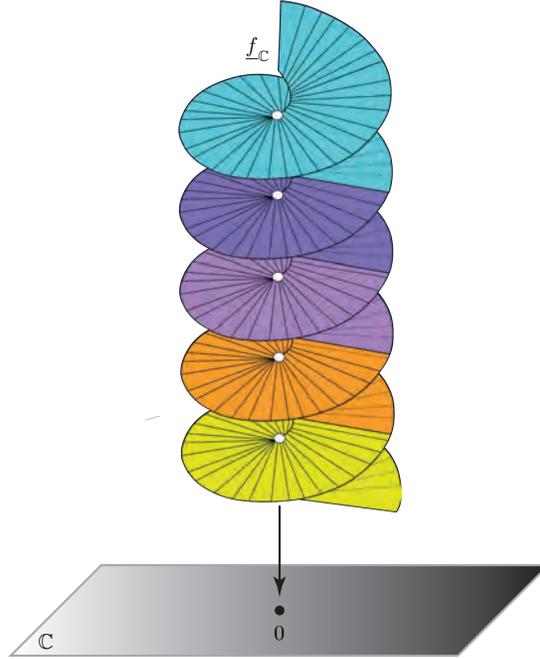


Figura 3.2: Una única singularidad en la superficie de Riemann de la función $f(x) = \log(x)$ [13].

Ahora, veamos que la función multivaluada definida por f sobre \mathbb{C} tiene una única singularidad, que se proyecta sobre 0. Por lo anterior, sabemos que f puede continuarse a lo largo de todo camino γ que no contenga al 0. Además, como la función logaritmo no está definida en 0 para ninguna rama, entonces si β es un camino que empieza en $x \in \mathbb{C}^*$ y termina en 0, f puede continuarse a lo largo de $\beta|_{[0,1)}$ pero no a lo largo de β , por lo que en 0 tendremos una singularidad. Veamos que es única: dado que ya vimos que f es analítica en todo \mathbb{C}^* , por el teorema de monodromía tendremos que si α y β son dos caminos que empiezan en x_0 y terminan en 0, las determinaciones $f_{\alpha|_{[0,\tau]}}$ y $f_{\beta|_{[0,\tau]}}$ definirán la misma función multivaluada sobre cualquier vecindad D del cero, ya que al

hablar de función multivaluada nos referimos a la superficie de Riemann, salvo isomorfismos, o a la imagen (ver figura 3.2).

Ejemplo 3.1.2. La función multivaluada definida por $f(x) = x^\alpha := \exp(\alpha \log(x))$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \alpha \cdot \frac{y}{x}$. Para esta función tendremos situaciones distintas que dependerán de α . Si $\alpha \in \mathbb{N}$ entonces f define una función uniforme sobre todo \mathbb{C} ; en caso contrario tendremos una única singularidad en 0, ya que sólo tendremos problemas con el logaritmo que, por el ejemplo anterior, sabemos que sólo tiene una singularidad. Por otro lado, si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ entonces f tendrá exactamente q determinaciones sobre cada punto en \mathbb{C}^* (que serán las raíces q -ésimas de x^p); en otro caso tendremos una infinidad de determinaciones sobre cada punto, esto ya que la función logaritmo tiene una infinidad de determinaciones en cada punto y en este caso necesitamos de dicha función para definir bien a f . Además, f admite un límite en cero si y sólo si la parte real de α es no nula y se cumple que: $f(x)$ tiende a 0 si $Re(\alpha) > 0$ y tiende a ∞ si $Re(\alpha) < 0$.

Ejemplo 3.1.3. Ahora consideramos la función multivaluada definida sobre \mathbb{C} por $f(x) = \alpha_1 \log(x - \zeta_1) + \alpha_2 \log(x - \zeta_2) + \alpha_3 \log(x - \zeta_3)$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha_1}{x - \zeta_1} + \frac{\alpha_2}{x - \zeta_2} + \frac{\alpha_3}{x - \zeta_3}$ y es regular sobre $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$. Ahora analicemos su comportamiento. Sobre un punto distinto de ζ_k , $k \in \{1, 2, 3\}$, dos determinaciones distintas difieren de una constante que pertenece al grupo aditivo $G = 2\pi i(\alpha_1 \mathbb{Z} + \alpha_2 \mathbb{Z} + \alpha_3 \mathbb{Z})$; esto pasa por el mismo argumento que usamos para la función logaritmo, ya que si γ_1 y γ_2 son dos caminos que unen a x_0 con un punto distinto de ζ_k y que no pasan por ningún ζ_k , entonces:

$$\begin{aligned}
& f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_2(1)) \\
&= [f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_1(0))] - [f(\gamma_2(1)) - f(\gamma_2(0))] \\
&= \int_{\gamma_1} f' df - \int_{\gamma_2} f' df \\
&= \int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} f' df \\
&= \int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} \left(\frac{\alpha_1}{x - \zeta_1} + \frac{\alpha_2}{x - \zeta_2} + \frac{\alpha_3}{x - \zeta_3} \right) dx \\
&= \alpha_1 \int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} \frac{1}{x - \zeta_1} dx + \alpha_2 \int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} \frac{1}{x - \zeta_2} dx + \alpha_3 \int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} \frac{1}{x - \zeta_3} dx \\
&= 2\pi i [\alpha_1 I(\gamma_1 * \gamma_2^{-1}, \zeta_1) + \alpha_2 I(\gamma_1 * \gamma_2^{-1}, \zeta_2) + \alpha_3 I(\gamma_1 * \gamma_2^{-1}, \zeta_3)]
\end{aligned}$$

la última igualdad se da por el teorema del residuo(1.1.6) y dado que todos los residuos son 1, además, todos los índices son enteros, por lo que queda probada nuestra afirmación. Por el mismo argumento también se tiene que sobre ζ_1 dos gérmenes que dan origen a dos singularidades distintas de $f_{\mathbb{C}}$ difieren por una constante que pertenece al subgrupo $H = 2\pi i(\alpha_2 \mathbb{Z} + \alpha_3 \mathbb{Z})$; esto pues al tener fijas dos singularidades sobre el mismo punto tendremos abajo caminos fijos que

van de x_0 a ζ_1 para los que la función f no está definida en su punto final que es ζ_1 ; y pasa lo correspondiente para ζ_2 y ζ_3 .

Ahora fijémonos en la función multivaluada definida por la inversa local de f , $x = g(y)$, que es solución de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dy} = 1/(\frac{\alpha_1}{x-\zeta_1} + \frac{\alpha_2}{x-\zeta_2} + \frac{\alpha_3}{x-\zeta_3})$, (esto por la regla de la cadena). Como estamos trabajando con funciones analíticas, tendremos que g tiene exactamente como singularidades a los valores críticos de f , ya que por ser g la función inversa de f se tiene que $y = (f \circ g)(y)$ de donde obtenemos que $1 = \frac{df}{dx}|_{g(y)} \frac{dg}{dy}$, esto por la regla de la cadena; así, $\frac{dg}{dy} = 1/\frac{df}{dx}|_{g(y)}$, por tanto la derivada de g tiene problemas en los puntos y tales que $g(y) = x$ anula a la derivada de f y estos puntos son justamente los valores críticos de f ; una observación importante es que lo que acabamos de decir se cumple para cualquier $f \neq 0$. Además, en el caso genérico, la derivada de f se anula en dos puntos $x_1 \neq x_2$ que son distintos de ζ_k , esto se sigue de multiplicar la igualdad $f'(x) = 0$ por $(x - \zeta_1)(x - \zeta_2)(x - \zeta_3)$, de donde se obtiene que:

$$\alpha_1(x - \zeta_2)(x - \zeta_3) + \alpha_2(x - \zeta_1)(x - \zeta_3) + \alpha_3(x - \zeta_1)(x - \zeta_2) = 0;$$

en donde el lado izquierdo de la igualdad es genéricamente un polinomio de grado dos que tiene dos raíces distintas que además son distintas de ζ_k . Así la derivada $f'(x)$ se anulará en estos dos puntos y para todas sus determinaciones. Por tanto, como genéricamente el grupo G es denso (ver [7], pág.144), las singularidades de $g_{\mathbb{C}}$ se proyectan sobre un conjunto denso en \mathbb{C} .

Definición 3.1.5. Una singularidad $[\gamma]_f$ es *aislada* si existe un disco D con centro en $x_1 = \gamma(1)$ tal que la función multivaluada f_{γ_D} definida sobre D es regular sobre $D^* := D \setminus \{x_1\}$; esto es, para τ suficientemente cercana a 1, la función $f_{\gamma|_{[0,\tau]}}$ se puede prolongar a lo largo de todo camino contenido en D que no tenga a x_1 .

Lema 3.1.1. La singularidad definida por γ es aislada si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que f admite una prolongación analítica a lo largo de todo camino $\gamma' : I \rightarrow \Omega$ que empieza en x_0 , que es ϵ -cercano de γ y que evita a x_1 ; es decir, para todas las γ' tales que $|\gamma'(t) - \gamma(t)| < \epsilon$ para toda $t \in [0, 1]$ y $x_1 \notin \gamma'((0, 1])$.

Demostración. Primero supongamos que la singularidad definida por γ es aislada y consideremos D el disco con centro en $x_1 := \gamma(1)$ que existe por la definición de ser una singularidad aislada. Sea r su radio y tomamos $0 < \epsilon \ll r$ tal que f pueda continuarse analíticamente a lo largo de todo camino ϵ -cercano a γ , que existe por la observación 2.0.2.

Sea $\gamma' : I \rightarrow \Omega$ un camino que empieza en x_0 y tal que $|\gamma'(t) - \gamma(t)| < \epsilon$ para toda $t \in [0, 1]$ y $x_1 \notin \gamma'((0, 1])$. Como $x_1 \notin \gamma'((0, 1])$ y $|\gamma'(t) - \gamma(t)| < \epsilon \ll r$, entonces existe $t_0 \in [0, 1)$ tal que $\gamma'(t) \in D$ para toda $t \in (t_0, 1]$. Así f puede continuarse analíticamente a lo largo de $\gamma|_{[0,t_0]}$ y por tanto también a lo largo de $\gamma'|_{[0,t_0]}$, ya que γ' es ϵ -cercano a γ . Además, para $t > t_0$, f puede continuarse analíticamente a lo largo de $\gamma'(t)$ ya que $\gamma'(t) \in D^*$ (por como nos tomamos γ') y f define una función regular sobre D^* (ver figura 3.3). Con esto hemos probado una implicación.

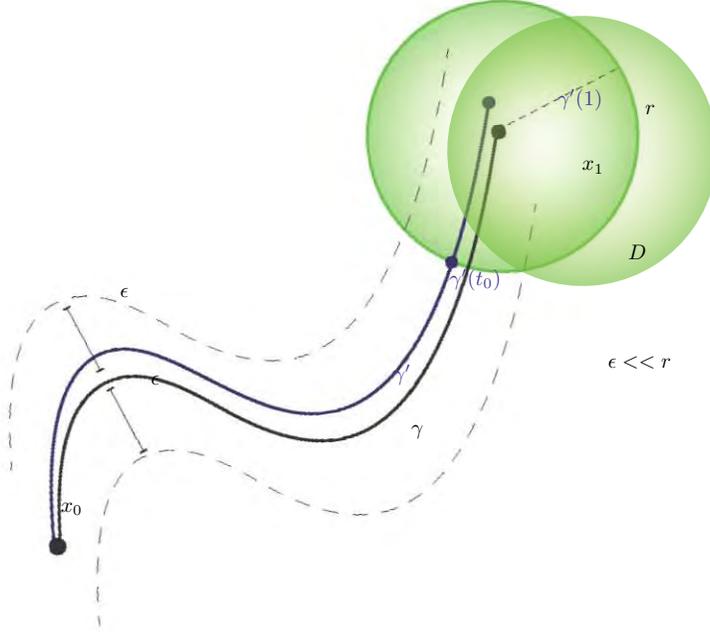


Figura 3.3: Prueba de la suficiencia en el lema 3.1.1.

Inversamente, ahora supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que f admite una prolongación analítica a lo largo de todo camino $\gamma': I \rightarrow \Omega$ que empieza en x_0 , que es ϵ -cercano de γ y que evita a x_1 ; consideremos el disco de radio $\frac{\epsilon}{2}$ y centro en x_1 y denotemos por D a este disco, así para cada dos puntos x, y tales que $\{x, y\} \subset D$ se cumple que $|x - y| < \epsilon$. Veamos que f_{γ_D} define una función regular sobre D^* .

Para τ suficientemente cercana a 1 la función $f_{\gamma|_{[0, \tau]}}$ está definida en un abierto que interseca a D pero que no contiene a x_1 . Para construir $f_{\gamma|_{[0, \tau]}}_{D^*}$ tomamos un punto $\xi \in D$ sobre γ en donde esté definida la función $f_{\gamma|_{[0, \tau]}}$ y caminos que empiecen en ξ y terminen en un punto en D evitando x_1 ; así, el camino, γ' , que resulta de concatenar γ hasta el punto ξ con un camino de la forma descrita empieza en x_0 es ϵ -cercano a γ y es tal que $x_1 \notin \gamma'((0, 1))$, de donde se tiene que podemos continuar a f a lo largo de todos estos caminos, lo que implica que f_{γ_D} define una función regular sobre D^* . □

Definición 3.1.6. La función multivaluada definida por f admite a $y_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ como límite en una singularidad $[\gamma]_f$ si para todo camino γ' que representa la singularidad se cumple que $\lim_{t \rightarrow 1} f(\gamma'(t)) = y_1$.

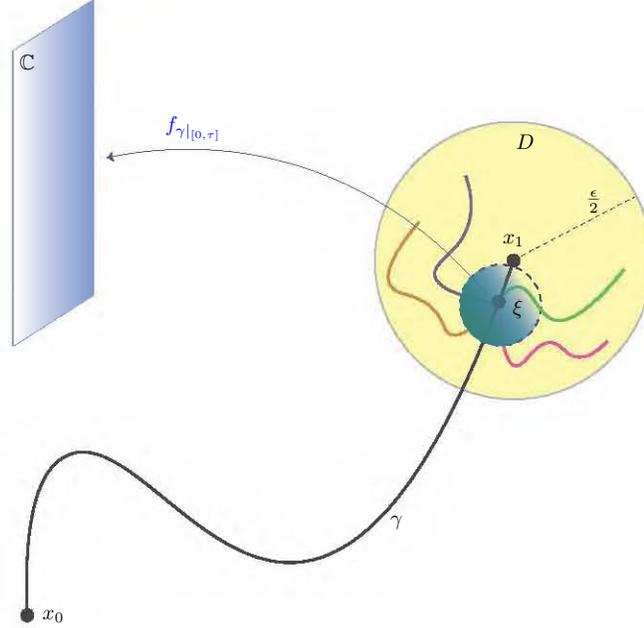


Figura 3.4: Prueba de la necesidad en el lema 3.1.1.

Definición 3.1.7. Una singularidad $[\gamma]_f$ tiene un número finito de determinaciones alrededor de $x_1 = \gamma(1)$ si existe un disco D con centro en x_1 tal que si τ es suficientemente cercana a 1, entonces al construir la función multivaluada de $f_{\gamma|_{[0,\tau]}}$ sobre D^* obtenemos una función, $f_{\gamma|_{[0,\tau]_{D^*}}}$, tal que sobre cada punto de D^* tiene un número finito de determinaciones.

Definición 3.1.8. Una singularidad $[\gamma]_f$ es *algebroides* si es aislada, tiene un número finito de determinaciones alrededor de $x_1 = \gamma(1)$ y admite un límite en x_1 .

Las singularidades algebroides generalizan a las que encontramos en el ejemplo 3.1.2 cuando α es racional, también las singularidades de funciones algebraicas son algebroides, pues son composición y suma de funciones polinomiales y de raíces de tipo $x^{\frac{1}{q}}$ con $q \in \mathbb{N}^*$. Pero, por ejemplo, la singularidad que la función logaritmo tiene sobre 0 no es una singularidad algebroides, pues no tiene un número finito de determinaciones alrededor de ella. La siguiente proposición muestra que una singularidad algebroides localmente se comporta como una raíz del tipo $x^{\frac{1}{q}}$, con $q \in \mathbb{N}^*$.

Proposición 3.1.1. Sea $[\gamma]_f$ una singularidad aislada, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $[\gamma]_f$ posee un número finito de determinaciones alrededor de $x_1 = \gamma(1)$.
2. El germen de función multivaluada f_γ es de la forma $g((x - x_1)^{\frac{1}{q}})$ donde g es una función holomorfa sobre una vecindad agujereada de $0 \in \mathbb{C}$ y $q \in \mathbb{N}^*$.

Demostración. Primero demostremos que 1 implica 2.

Sea D un disco con centro en x_1 , contenido en la intersección del disco que existe por ser $[\gamma]_f$ singularidad aislada y el disco que existe al tener un número finito de determinaciones alrededor de $x_1 = \gamma(1)$. Sea τ suficientemente cercana a 1 de tal manera que $\gamma(\tau) \in D$ y sea $\mathbf{f}_{\gamma|_{[0,\tau]}}$ el germen de función definido en $\gamma(\tau)$. Denotemos por a al punto $\gamma(\tau)$.

Por como elegimos D , la función $f_{\gamma|_{[0,\tau]}}$ puede ser continuada de manera analítica a lo largo de todos los caminos en $D \setminus \{x_1\}$. Sea β un camino de a a él mismo que rodee una vez a x_1 . Si continuamos analíticamente a $f_{\gamma|_{[0,\tau]}}$ recorriendo varias veces el camino β , obtendremos en cada vuelta un germen de función sobre a , sean $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_{\gamma|_{[0,\tau]}}$, $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots$ estos gérmenes.

Como f_γ posee un número finito de determinaciones alrededor de x_1 , entonces existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_0$, pues dado que sólo existen un número finito de gérmenes distintos sobre cada punto en $D \setminus \{x_i\}$, en algún momento los gérmenes tienen que empezar a repetirse, más aún, por el principio de continuación analítica (ver 1.1.7), si $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_j$, entonces $\mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{f}_{j+1}, \mathbf{f}_{i+2} = \mathbf{f}_{j+2}, \dots$, por lo que hay un único ciclo; además, por el mismo argumento también se cumple que si $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_j$, entonces $\mathbf{f}_{i-1} = \mathbf{f}_{j-1}, \mathbf{f}_{i-2} = \mathbf{f}_{j-2}, \dots$, pues de lo contrario la continuación analítica a lo largo del camino inverso no sería única. Con estas afirmaciones ya podemos asegurar que existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_0$, más aún, podemos afirmar que si $q \in \mathbb{N}^*$ es el mínimo natural tal que $\mathbf{f}_q = \mathbf{f}_0$ entonces, la lista de gérmenes se repite de manera cíclica de la siguiente manera: $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{q-1}, \mathbf{f}_q = \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{q-1}, \mathbf{f}_q = \mathbf{f}_0, \dots$, con $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{q-1}$ distintos dos a dos.

Por otro lado, como $D \setminus \{x_1\}$ es homeomorfo a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos y por tanto el grupo fundamental de $D \setminus \{x_1\}$ en a está generado por la clase de homotopía de β , así, todo camino en $D \setminus \{x_1\}$ de a en sí mismo es homótopo a una potencia de β , y como las continuaciones analíticas a lo largo de caminos homótopos son iguales (ver 1.1.8), concluimos que $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{q-1}$ son los únicos gérmenes sobre el punto a . Además, la continuación analítica a lo largo de caminos de a a $z \in D \setminus \{x_1\}$, debe llevar gérmenes distintos en gérmenes distintos (si no fuera así, la continuación analítica a lo largo del camino inverso no sería única, y lo es por el principio de continuación analítica (ver 1.1.7)). Por tanto, en z hay al menos q gérmenes distintos. Si ahora aplicamos este mismo argumento a a , cambiando los papeles de a y z , podremos concluir que sobre z hay exactamente q gérmenes distintos, digamos, $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{q-1}$.

Lo que queremos hacer es representar a $f(x)$ como una función analítica monovaluada $g(\xi)$ de $\xi = (x - x_1)^{\frac{1}{q}}$ en $D \setminus \{x_1\}$ y lo haremos de la siguiente manera: consideremos $\tilde{D} = \{\xi \in \mathbb{C} \mid \xi^q + x_1 \in D \setminus \{x_1\}\}$ y definimos $\theta: \tilde{D} \rightarrow D$

como $\theta(\xi) = \xi^q + x_1$, ahora elegimos $\tilde{a} \in \theta^{-1}(a)$. De esta forma, la función $g_0(\xi) = (f_0 \circ \theta)(\xi) = f_0(\xi^q + x_1)$ es analítica cerca de a , pues θ lo es cerca de \tilde{a} y f_0 lo es cerca de a , por tanto esta función nos define un germen de función \mathbf{g}_0 en el punto \tilde{a} . Continuamos analíticamente este germen a lo largo de caminos en \tilde{D} y denotamos por g a esta función, que por construcción es analítica en todo \tilde{D} . Veamos que es monovaluada. Consideremos un camino cerrado $\tilde{\beta}$ de \tilde{a} en sí mismo contenido en \tilde{D} , que rodee una vez al 0. Cuando $\tilde{\beta}$ rodea una vez al 0, $\theta(\tilde{\beta})$ rodea q veces a x_1 en D , así, en D , $f(x)$ pasa recorriendo todos los gérmenes $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{q-1}, \mathbf{f}_q = \mathbf{f}_0$ y, por tanto, el germen de función \mathbf{g}_0 no cambia por continuación analítica recorriendo $\tilde{\beta}$, y como $[\tilde{\beta}]$ genera $\pi_1(\tilde{D})$, concluimos que g es monovaluada en \tilde{D} , que era lo que nos faltaba probar.

Para terminar, veamos que 2 implica 1.

Ya habíamos visto que la función raíz q -ésima alrededor del cero tiene q determinaciones; así, la función $(x - x_1)^{\frac{1}{q}}$ tiene q determinaciones alrededor de x_1 . Además, como g es una función holomorfa en una vecindad agujereada, V , de 0, se tiene que en esta vecindad no tendremos multivaluación y por tanto en un disco centrado en x_1 contenido en $g^{-1}(V)$, suficientemente pequeño, tendremos que la función $g((x - x_1)^{\frac{1}{q}})$ tiene un número finito de determinaciones sobre cada punto. \square

Si $[\gamma]_f$ es una singularidad aislada y con un número finito de determinaciones alrededor de ella, entonces diremos que la singularidad es *de monodromía finita*. Además, si $[\gamma]_f$ es una singularidad aislada, con esta última proposición obtenemos inmediatamente que también son equivalentes:

1. $[\gamma]_f$ es algebroide,
2. Si g es la función dada por la proposición 3.1.1, entonces g se extiende de manera meromorfa en 0.

Para terminar con esta sección veremos que todas las singularidades sobre \mathbb{C} de la función g del ejemplo 3.1.3 son algebroides, así, en particular tendremos que las singularidades son aisladas a pesar de que su proyección sea densa.

La función g es solución de una ecuación diferencial analítica, así que, a lo más, puede tener singularidades en las singularidades de la ecuación. Esto implica que los puntos singulares son exactamente los valores críticos de f . Por tanto, tendremos una singularidad por cada determinación (distintas) sobre cada punto crítico de f .

Así, para ver que las singularidades son aisladas notemos que cada singularidad corresponde en cierta forma a cada uno de los “vértices” de las “parábolas” en la figura 3.6. Sin embargo, por definición una singularidad no es un punto, es una clase de equivalencia de caminos a lo largo de los que se obtiene un germen de función multivaluada (uno distinto por cada clase de equivalencia), al continuar analíticamente el germen original a lo largo de estos caminos.

Fijémonos en la representación gráfica de g en la figura 3.6. Comenzamos con el germen de una función analítica cuya gráfica corresponde a un trozo de parábola lejos del vértice. Al tomar un camino sobre el eje de las coordenadas (el “eje y ” en

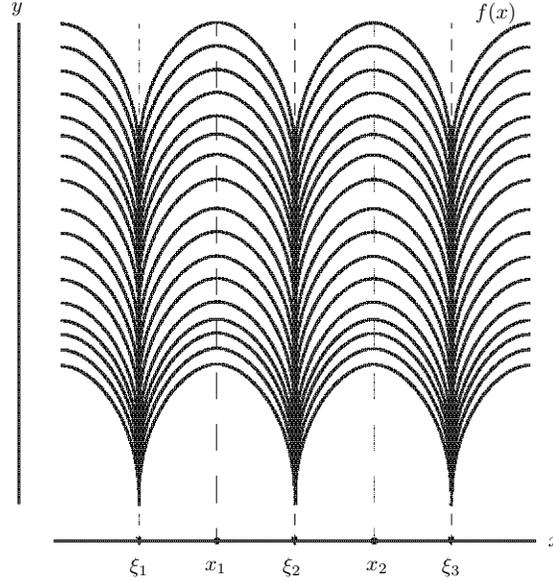


Figura 3.5: Representación gráfica de la función f del ejemplo 3.1.3.

este caso) que conduce a g a una singularidad, en la gráfica se obtiene un camino que conduce a algún vértice. Al tomar la clase de equivalencia realmente lo que estamos haciendo es restringirnos a un estudio local del vértice de dicha parábola. Es decir, si queremos analizar el vértice de la parábola en (x_0, y_0) , al hacer un análisis local sólo nos concentramos en la función multivaluada $g(y)$ definida en un disco $|y - y_0| < \epsilon$. En particular, no veremos a las demás singularidades porque sólo podemos continuar analíticamente a lo largo de caminos contenidos en este disco. De modo que sólo vemos el trozo de una parábola alrededor del vértice elegido. Por tanto, de acuerdo a la definición, lo que tenemos es una singularidad aislada.

Estamos llamando parábolas a las curvas que se ven como tal en la figura 3.6, cada una de estas en realidad es una parte de una hoja de la foliación cerca de cada punto de la forma $(x_i, f_\gamma(x_i))$, con $i \in \{1, 2\}$, sin embargo, localmente se ven como parábolas (se comportan como una función de orden 2); al menos para valores genéricos de las alfas. Pues al ser x_i un punto crítico de f se cumple que $f(x_i) = y_i + c(x - x_i)^2 + \dots$, y genéricamente $c \neq 0$, para $i \in \{1, 2\}$. Esto implica que la singularidad de g en y_i es localmente equivalente a la singularidad de $\sqrt{y - y_i}$. Pero incluso en el caso en el que los puntos críticos de f son de multiplicidad mayor obtenemos una singularidad que se ve como una raíz k -ésima

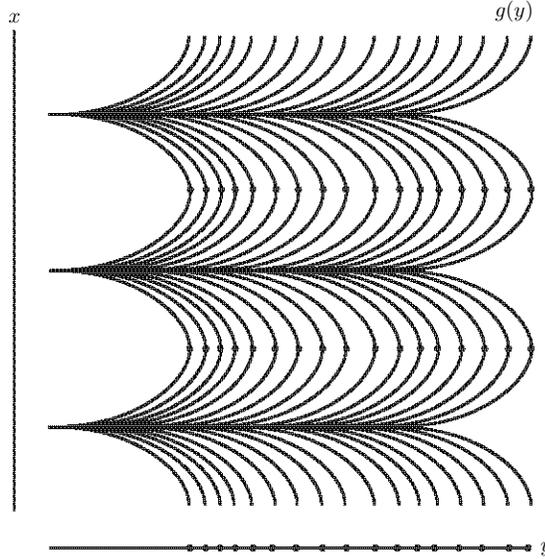


Figura 3.6: Representación gráfica de la función g del ejemplo 3.1.3.

de $y - y_i$, y por lo tanto con un número finito de determinaciones y que admite un límite; $i \in \{1, 2\}$.

3.2. Funciones algebroides

Definición 3.2.1. f es una *función algebroides* sobre Ω si toda singularidad de f sobre Ω es algebroides.

Ejemplo 3.2.1. Si $\pi: \mathbf{S} \rightarrow \Omega$ es una transformación holomorfa, propia y no constante (no necesariamente finita) de una superficie de Riemann \mathbf{S} sobre Ω , que además cumple que para cada punto en \mathbf{S} existe una vecindad en la que π es inyectiva y si $g: \mathbf{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa, entonces la función multivaluada Φ definida sobre Ω por $(\pi, g): \mathbf{S} \rightarrow \Omega \times \mathbb{C}$ es algebroides sobre Ω . Primero observemos que como π es holomorfa, no constante y cumple que para cada punto en \mathbf{S} existe una vecindad en la que es inyectiva, entonces π es un biholomorfismo local en todo punto de \mathbf{S} , por tanto estamos en las condiciones de la proposición 2.0.1 con $\tilde{f} = g$ y la función f definida localmente como $g \circ \pi^{-1}$. Así, la función f es meromorfa (por ser composición de una transformación meromorfa con una holomorfa) y π se comporta como una proyección. Ahora

que tenemos claro esto es fácil ver que las singularidades sobre Ω son aisladas, pues al ser f meromorfa, por definición, sus singularidades son aisladas en el plano y, además, éstas admiten un límite (por ser polos). Por último veamos que tienen un número finito de determinaciones alrededor de ellas. Sea $y_1 \in \mathbf{S}$ una singularidad, consideramos $\pi(y_1) \in \Omega$ y V una vecindad de $\pi(y_1)$ relativamente compacta, veamos que para todo $x \in V \setminus \{\pi(y_1)\}$ se cumple que $\pi^{-1}(x)$ es finito; para esto supongamos que existe $\xi \in V \setminus \{\pi(y_1)\}$ tal que $\pi^{-1}(\xi)$ es infinito, como $\pi^{-1}(\xi) \subset \pi^{-1}(V) \subset \pi^{-1}(\bar{V})$ y $\pi^{-1}(\bar{V})$ es compacto, por ser \bar{V} compacto y π propia, entonces $\pi^{-1}(\xi)$ tiene un punto de acumulación, así π es constante e igual a ξ (ya que π es una función holomorfa), lo que es una contradicción, de donde concluimos que para todo $x \in V \setminus \{\pi(y_1)\}$, $\pi^{-1}(x)$ es finito. De esta prueba podemos ver que las funciones algebroides construidas de esta manera cumplen con la propiedad de que al restringirlas a cualquier abierto relativamente compacto en Ω tienen un número finito de determinaciones en este abierto. La función g del ejemplo 3.1.3 es algebroides sobre \mathbb{C} pero no satisface esta última propiedad, pues si el abierto que tomemos alrededor de cada singularidad no es suficiente pequeño ya no tendremos una cantidad finita de determinaciones.

Antes de continuar es importante señalar algunas diferencias clave. Lo primero que debemos tener en cuenta es que las funciones analíticas y las funciones algebroides no son iguales, pues al hablar de funciones analíticas no permitimos que haya multivaluación y no tenemos singularidades. Otra diferencia, menos obvia, es que las funciones algebraicas y las funciones algebroides tampoco son lo mismo, en este caso tenemos que las funciones algebraicas siempre son algebroides, pero no todas las funciones algebroides son algebraicas. Un ejemplo de esta última afirmación es la función g del ejemplo 3.1.3 que es una función algebroides que no es algebraica; esto porque el conjunto Σ_{g_Ω} para una función algebraica siempre será finito, y como ya vimos, dicho conjunto es infinito para la función g del ejemplo 3.1.3. Aún así, una idea que puede ser útil y es correcta, es pensar que las funciones algebroides se comportan localmente como una función algebraica.

Ahora demostraremos tres lemas que nos ayudarán a probar una proposición que nos será útil en el siguiente capítulo.

Lema 3.2.1. Si toda singularidad de f sobre Ω es aislada, entonces el subconjunto de $\tilde{\Sigma}_f$ de singularidades de f sobre cada punto de Σ_f en Ω es, a lo más, numerable.

Demostración. A cada singularidad $[\gamma]_f$ podemos asociarle una secuencia de discos $D_0, D_1, \dots, D_n \subset \Omega$ que recubra γ y funciones holomorfas $f_k: D_k \rightarrow \mathbb{C}$ con $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tales que $f_0 \equiv f$ en una vecindad de x_0 , $f_k \equiv f_{k+1}$ en $D_{k+1} \cap D_k$ y la función multivaluada f_n definida por f_{n-1} sobre D_n que tiene exactamente una singularidad sobre D_n , donde D_n es justamente el disco que existe por la definición de ser una singularidad aislada. Como en el lema de Poincaré–Volterra podemos remplazar estos discos por otros con coordenadas de su centro y radio racionales de tal manera que las determinaciones sobre cada punto no se alteren (podemos hacer esto por el principio de continuación

analítica) y lo mismo se aplica para la singularidad $[\gamma]_f$ sobre x_1 , así, podemos olvidarnos incluso del camino γ . Por tanto, dado que el conjunto de estos discos (con coordenadas de su centro y radio racionales) es numerable, concluimos que el subconjunto de $\tilde{\Sigma}_f$ de singularidades sobre x_1 también lo es. \square

Observación 3.2.1. Supongamos que encontramos una singularidad de f en $x_{t_1} := \gamma(t_1)$ con $t_1 < 1$ a lo largo de un camino $\gamma: I \rightarrow \Omega$ que empieza en x_0 ; de manera más específica, supongamos que el camino $\gamma|_{[0,t_1]}$ conduce a f a una singularidad; si esta singularidad es aislada entonces podemos *rodearla* en el siguiente sentido: para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña, tal que el disco de radio ϵ y centro en x_{t_1} se quede contenido en el disco D (que existe de la definición de ser singularidad aislada), podemos considerar $\gamma^{-1}(\{x \in \Omega : |x - x_{t_1}| < \epsilon\})$ y tomar la componente conexa que contenga a t_1 , sea (a, b) un intervalo con centro en t_1 y contenido en esta componente conexa, podemos modificar la parte de γ dada por $\gamma((a, b))$ de tal forma que el nuevo camino que obtengamos, digamos γ_1 , evite x_{t_1} , es decir, de tal forma que $\gamma_1((a, b)) \subset \{x \in \Omega : |x - x_{t_1}| < \epsilon\} \setminus \{x_{t_1}\}$. Por construcción, f no puede tener singularidades a lo largo de γ_1 en el conjunto $\{x \in \Omega : |x - x_{t_1}| < \epsilon\}$, pero fuera de él, sí (ver figura 3.7).

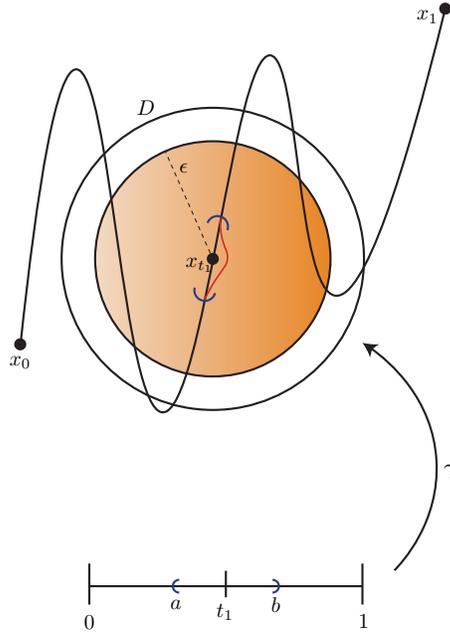


Figura 3.7: Construcción de la observación 3.2.1.

Más aún, para ϵ adecuada, el prolongamiento analítico de f se puede asegurar

incluso hasta el punto $\gamma(b)$, pero la determinación de f en este punto dependerá de la perturbación que hayamos elegido para formar el camino γ_1 .

Lema 3.2.2. Si toda singularidad de f sobre Ω es aislada, entonces para todo camino $\gamma: I \rightarrow \Omega$ que empiece en x_0 se tiene que, después de repetir la construcción de la observación 3.2.1 a lo más un número finito de veces, obtenemos un camino γ_n a lo largo del cual f puede prolongarse analíticamente (o conduce a f a una singularidad, ya que no cambiamos el punto final).

Demostración. Supongamos que para alguna sucesión de elecciones de la manera de rodear cada singularidad que encontramos sobre el camino γ tenemos que llevar a cabo una cantidad infinita de rodeos, de esta manera tendremos una cantidad infinita de perturbaciones de γ , que denotaremos por $\gamma_0 = \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots$, y por tanto una cantidad infinita de singularidades en la imagen de los puntos $0 < t_1 < t_2 < \dots < 1$ que por ser una sucesión creciente y acotada tiene un límite $0 < t_\infty \leq 1$. Podemos ir eligiendo las modificaciones cada vez más pequeñas (por ejemplo, en cada paso elegir el radio del disco en el que modificamos al camino correspondiente menor a $\frac{1}{n}$) de tal manera que la sucesión de funciones $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converja uniformemente a un camino γ_∞ ; este camino cumple que $\gamma_\infty(t_\infty) = \gamma(t_\infty)$. Resulta que f tiene una singularidad en $\gamma(t_\infty)$, ya que, por construcción, f puede ser continuada analíticamente a lo largo de $\gamma_\infty|_{[0, t_\infty - \epsilon]}$ para toda $\epsilon > 0$, pero si pudiéramos continuar analíticamente a f a lo largo de $\gamma_\infty|_{[0, t_\infty]}$, entonces tendría que existir una vecindad de $\gamma(t_\infty)$ y una función analítica que continúe a f en dicha vecindad, pero en toda vecindad de este punto existe una singularidad, ya que $t_n \rightarrow t_\infty$, por lo que esto no es posible. Por tanto en $\gamma(t_\infty)$ tenemos una singularidad que por la construcción que hicimos no es aislada, lo que nos lleva a una contradicción. \square

En otras palabras, lo que acabamos de probar es que siempre tendremos que hacer sólo un número finito de perturbaciones de γ para obtener una curva a lo largo de la que podemos continuar analíticamente a f (o una curva que nos conduce a una singularidad), y esto pasará siempre independientemente de la manera que elijamos para rodear cada singularidad.

Las singularidades sucesivas que encontramos en la imagen de los puntos $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$ con el algoritmo del lema 3.2.2, así como el número n , dependen de la manera que escojamos en cada paso del modo de perturbar γ (ver figura 3.8). Por ejemplo, si la primer singularidad t_1 (esta singularidad no depende de ninguna elección) no es de monodromía finita, entonces existe una infinidad de maneras distintas de rodear a la singularidad y la manera que elijamos para hacerlo influirá en cuál es la segunda singularidad que encontremos.

Lema 3.2.3. Si toda singularidad de f sobre Ω es de monodromía finita entonces para todo camino $\gamma: I \rightarrow \Omega$ que empieza en x_0 existe un subconjunto finito $\Sigma(\gamma) \subset \Sigma_f \cap \gamma((0, 1)) \subset \Omega$ y una $\epsilon > 0$ tal que f se prolonga analíticamente a lo largo de todo camino ϵ -cercaño a γ que evita $\Sigma(\gamma)$; en otras palabras, f se prolonga analíticamente a lo largo de todo camino $\gamma': I \rightarrow \Omega$ tal que $\gamma'(0) = x_0$,

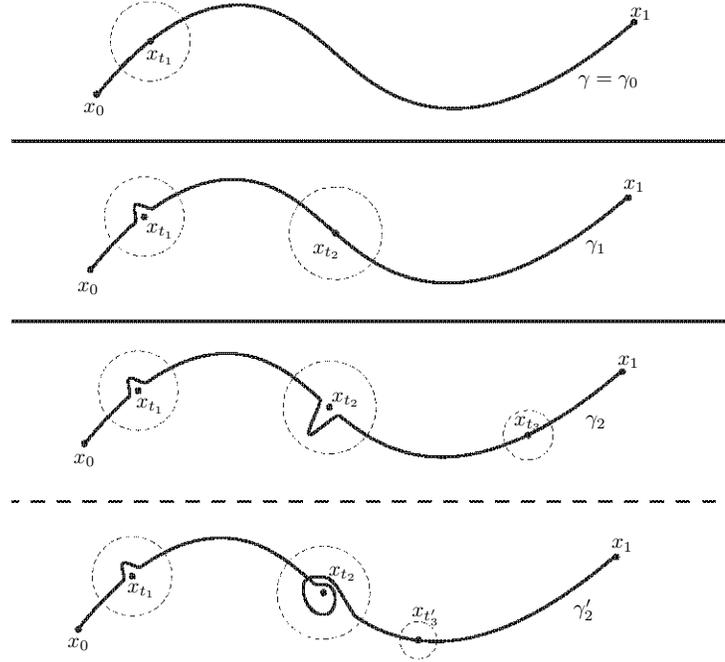


Figura 3.8: Las singularidades encontradas dependen de la forma de perturbar γ .

$|\gamma'(t) - \gamma(t)| < \epsilon$ y $\gamma'((0, 1)) \cap \Sigma(\gamma) = \emptyset$; pudiéndose dar el caso en donde γ' conduzca a f a una singularidad cuando $\gamma'(1) = \gamma(1)$.

Demostración. Supongamos que existe una cantidad infinita de singularidades de f a lo largo de γ . Dado que la primera singularidad $\gamma(t_1)$ es de monodromía finita, entonces existe un número finito de maneras distintas de rodear esta singularidad. Para al menos una de estas maneras de rodear $\gamma(t_1)$, digamos γ_1 , quedarán una infinidad de singularidades de f a lo largo de γ_1 . Dado que todas las singularidades de f son de monodromía finita siempre podemos repetir el paso anterior, y esto nos lleva a rodear una infinidad de singularidades a lo largo de γ lo que es una contradicción con el lema 3.2.2. Así, hemos probado que hay una cantidad finita de puntos sobre γ que son singularidades, por lo que existirá una $\epsilon > 0$ adecuada de tal forma que toda ϵ -perturbación de γ sea tal que f puede ser continuada analíticamente a lo largo de tal camino; el conjunto $\Sigma(\gamma)$ es el formado precisamente por estas singularidades. \square

Con estos tres lemas, la demostración de la proposición que antes mencionamos, y ahora enunciaremos, es inmediata.

Proposición 3.2.1. Si f define una función algebroide sobre Ω , entonces:

1. El subconjunto de $\tilde{\Sigma}_f$ de singularidades de f sobre cada punto en Σ_f es, a lo más, numerable.
2. Para todo camino $\gamma: I \rightarrow \Omega$ que empieza en x_0 existe un subconjunto finito $\Sigma(\gamma) \subset \Sigma_f \cap \gamma((0, 1)) \subset \Omega$ y una $\epsilon > 0$ tal que f se prolonga analíticamente a lo largo de todo camino ϵ -cercano a γ que evita $\Sigma(\gamma)$; en otras palabras, para todo camino $\gamma': I \rightarrow \Omega$ tal que $\gamma'(0) = x_0$, $|\gamma'(t) - \gamma(t)| < \epsilon$ y $\gamma'((0, 1)) \cap \Sigma(\gamma) = \emptyset$; pudiéndose dar el caso en donde γ' conduzca a f a una singularidad cuando $\gamma'(1) = \gamma(1)$.

En particular, al ser todas las singularidades de monodromía finita, y por haber un número finito de singularidades a lo largo de un camino γ , tendremos que el número de posibles valores tomados sobre x_1 es finito, es decir, el conjunto $\{f_{\gamma'}(x_1) : \gamma' \text{ es como arriba y cumple que } \gamma'(1) = x_1\}$ es finito. Realmente este hecho es el que utilizaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Los teoremas de Painlevé

Finalmente, en este último capítulo demostraremos los teoremas I y II de Painlevé; para esto, primero definiremos algunos conceptos que van estrechamente ligados con nociones geométricas en torno al comportamiento de soluciones a una ecuación diferencial. Una vez que tengamos hecho esto, usaremos todas las herramientas que hemos desarrollado en los capítulos anteriores para demostrar cada teorema.

Antes de empezar haremos una descripción de lo que cada teorema establece, para tener claro qué es lo que queremos demostrar. Así, consideremos $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ dos polinomios que pertenecen al anillo $\mathbb{C}[x, y]$, con $Q \not\equiv 0$, y la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (4.1)$$

El teorema I asegura que si a \mathbb{C} le quitamos los puntos x tales que $Q(x, y) = 0$ para toda $y \in \mathbb{C}$ y los puntos x tales que $Q(x, y_0) = P(x, y_0) = 0$ para algún $y_0 \in \mathbb{C}$, entonces al considerar la función multivaluada definida por cualquier solución analítica local de la ecuación (4.1) definida sobre el subconjunto de \mathbb{C} que acabamos de mencionar, está siempre será una función algebroides.

Si $\varphi(x, (x_0, y_0))$ es una solución analítica local de la ecuación (4.1), sabemos que para todo y suficientemente cercano de y_0 existe la solución $\varphi(x, (x_0, y))$ que por el teorema I define una función algebroides sobre el subconjunto de \mathbb{C} mencionado en el párrafo anterior. Si γ es un camino contenido en este subconjunto que empieza en x_0 y que termina en un punto x_1 (que no sea una singularidad de $\varphi(x, (x_0, y_0))$), entonces por la proposición 3.2.1 el conjunto $\{\varphi_{\gamma'}(x_1, (x_0, y)) \mid \gamma' \text{ es como en la prop.3.2.1 y cumple que } \gamma'(1) = x_1\}$ es finito. Bajo estas condiciones, lo que el teorema II dice es que si a cada y (suficientemente cercano de y_0) le asignamos el conjunto finito de valores anterior, esto define localmente una función multivaluada de y dada por un número finito de funciones algebroides.

4.1. Nociones geométricas

A partir de ahora, en todo lo que resta del trabajo, siempre que hablemos de los polinomios $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ estaremos asumiendo que tanto P como Q no son idénticamente cero, es decir, $P(x, y) \not\equiv 0$ y $Q(x, y) \not\equiv 0$.

Para todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ que satisface $Q(x_0, y_0) \neq 0$ se tiene que, por el teorema de existencia y unicidad (ver 1.3.1), existe una vecindad $(x_0, y_0) \in U$ contenida en \mathbb{C}^2 tal que para toda condición inicial $(x_1, y_1) \in U$ existe $\varphi(x, (x_1, y_1))$ solución de la ecuación diferencial (4.1). Así, existe una transformación $H: U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que cumple que $H(x, \varphi(x, (x_1, y_1))) = H(x_1, y_1)$, para toda x tal que $(x, \varphi(x, (x_1, y_1))) \in U$ (ver figura 4.1), que esta bien definida y es regular; esto dado que para un punto fijo existe una única solución con este punto como condición inicial y por la diferenciabilidad respecto a condiciones iniciales. De esta afirmación se sigue que localmente las soluciones son curvas de nivel de la transformación H .

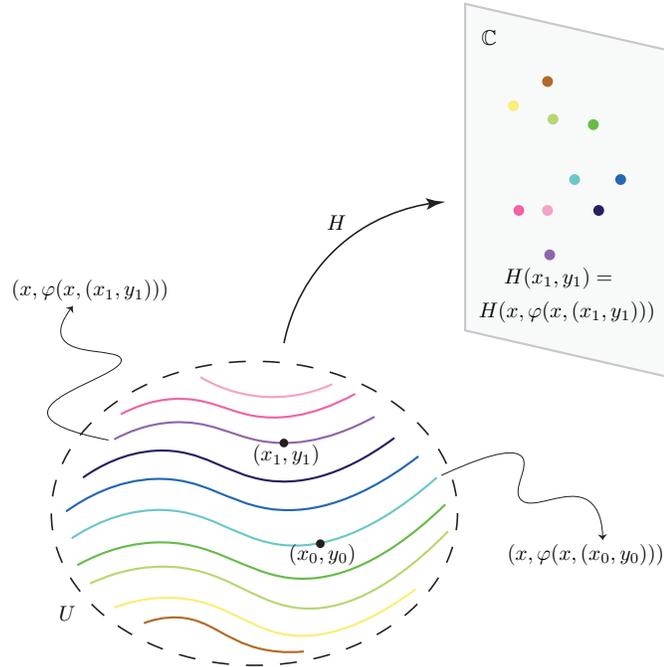


Figura 4.1: Transformación H .

Así, en la vecindad U , las gráficas de las soluciones locales $\varphi(x, (x_1, y_1))$ definen una foliación regular por curvas \mathcal{F} . Además, como podemos hacer esto para cada punto (debido a que los ceros del polinomio Q forman un conjunto cerrado), tendremos que la foliación \mathcal{F} está definida sobre todo

$\mathbb{C}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid Q(x, y) = 0\}$. Más aún, podemos extender la foliación a los puntos (x, y) tales que $Q(x, y) = 0$ pero que $P(x, y) \neq 0$ pues podemos hacer lo mismo que en el párrafo anterior pero ahora cambiando el papel de las variables x y y . Con lo que tenemos que nuestra foliación \mathcal{F} estará bien definida y será regular sobre $\mathbb{C}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid Q(x, y) = P(x, y) = 0\}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los polinomios P y Q , son primos entre sí, pues si tuvieran factores comunes, éstos se cancelarían al considerar su cociente. Por lo que, a partir de ahora, siempre asumiremos que los polinomios P y Q son coprimos. Así, el conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid Q(x, y) = P(x, y) = 0\}$ consta precisamente de los puntos en que $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ y $\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ se indeterminan; además, es un conjunto de puntos aislados y, por tanto, podemos concluir que \mathcal{F} es una foliación singular con singularidades aisladas sobre \mathbb{C}^2 .

Podemos extender la foliación \mathcal{F} de manera natural a una foliación singular con singularidades aisladas sobre $\mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}}$, pues las soluciones de la ecuación 4.1 se salen de compactos, ya sea por que se indefinen o por que se extienden para todo x ; así, podemos pensar que las soluciones siempre llegan a ∞ . Para extender dicha ecuación a ∞ basta con hacer un cambio de variable como se describe a continuación.

Sea $m \in \mathbb{N}$ el grado del polinomio P en la variable y , y $n \in \mathbb{N}$ el grado del polinomio Q en la variable y . Consideramos el cambio de variable $Y = \frac{1}{y}$, de este modo obtenemos:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{y^2} \cdot \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = -Y^2 \frac{P(x, \frac{1}{Y})}{Q(x, \frac{1}{Y})}.$$

Ahora consideraremos la siguiente notación

$$\begin{cases} \tilde{P}(x, Y) = -Y^{n+2}P(x, \frac{1}{Y}) \ \& \ \tilde{Q}(x, Y) = Y^n Q(x, \frac{1}{Y}), & \text{si } n+2 \geq m \\ \tilde{P}(x, Y) = -Y^m P(x, \frac{1}{Y}) \ \& \ \tilde{Q}(x, Y) = Y^{m-2} Q(x, \frac{1}{Y}), & \text{si } n+2 < m \end{cases}$$

de este modo \tilde{P} y \tilde{Q} serán polinomios en las variables x e Y , y en ambos casos tendremos que $\frac{dY}{dx} = \frac{\tilde{P}(x, Y)}{\tilde{Q}(x, Y)}$.

Esta notación será útil para entender el comportamiento de la foliación \mathcal{F} alrededor de la línea al infinito $L_\infty := \mathbb{C} \times (\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C}) = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid y = \infty\}$; pues bastará con analizar la ecuación $\frac{dY}{dx} = \frac{\tilde{P}(x, Y)}{\tilde{Q}(x, Y)}$ en $Y = 0$.

Denotaremos por $\Sigma_{\mathcal{F}}$ al conjunto de singularidades de \mathcal{F} , es decir, el conjunto de puntos en $\mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}}$ para los que \mathcal{F} no se puede extender como una foliación regular; e introducimos la siguiente notación:

$$\Sigma_{\mathcal{F}}|_{\mathbb{C}^2} := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x, y) = Q(x, y) = 0\},$$

$$\Sigma_{\mathcal{F}}|_{L_\infty} := \{(x, \infty) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid \tilde{P}(x, 0) = \tilde{Q}(x, 0) = 0\}.$$

Por *fibración vertical* entenderemos la fibración de $\mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}}$ definida por las curvas de la forma $\{(x_0, y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid y \in \mathbb{C}\}$ con $x_0 \in \mathbb{C}$.

Definición 4.1.1. La curva discriminante de la foliación \mathcal{F} es el conjunto de puntos de tangencia entre la foliación y la fibración vertical. La denotaremos por Δ .

Y tenemos que:

$$\Delta|_{\mathbb{C}^2} := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid Q(x, y) = 0\},$$

$$\Delta|_{L_\infty} := \{(x, \infty) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid \tilde{Q}(x, 0) = 0\}.$$

Para comparar la posición de la foliación \mathcal{F} respecto a la fibración vertical en un punto (x_0, y_0) consideraremos los siguientes cinco casos:

1. Transversalidad: $(x_0, y_0) \notin \Delta$
2. Tangencia simple: \mathcal{F} interseca a Δ transversalmente en (x_0, y_0)
3. Tangencia múltiple: \mathcal{F} interseca a Δ con multiplicidad en (x_0, y_0)
4. Singularidad de la foliación: $(x_0, y_0) \in \Sigma_{\mathcal{F}}$
5. Hoja vertical: $Q(x_0, y) \equiv 0$, es decir, $\{(x_0, y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid y \in \mathbb{C}\}$ es una hoja de \mathcal{F} .

Definición 4.1.2. Definimos el conjunto Σ_E como la proyección sobre \mathbb{C} de los puntos de tipo 4 y 5, de manera más específica:

$$\Sigma_E = \{x \in \mathbb{C} \mid Q(x, y) \equiv 0\} \cup \{x \in \mathbb{C} \mid (x, y_0) \in \Sigma_{\mathcal{F}} \text{ para algún } y_0 \in \hat{\mathbb{C}}\}.$$

En el ejemplo 3.1.2, Σ_E es simplemente $\{0\}$. En el ejemplo 3.1.3 se tiene que para la primera ecuación Σ_E es $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$, pues $Q(\alpha_i, y) \equiv 0$ para i en $\{1, 2, 3\}$, y toda solución $y = f(x)$ es una función multivaluada regular sobre $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$; sin embargo, para la segunda ecuación, en este mismo ejemplo, Σ_E es vacío pero toda solución $x = g(y)$ es una función algebroide con un conjunto denso de singularidades en el plano (en el caso genérico).

4.2. El teorema I de Painlevé

Empezaremos esta sección por enunciar el teorema I de Painlevé y después procederemos a demostrar una serie de lemas y proposiciones que nos llevarán a la prueba de éste teorema.

Teorema 4.2.1 (I de Painlevé). Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, y consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Existe un conjunto finito de puntos, que de hecho es $\Sigma_E \subset \mathbb{C}$ (ver def. 4.1.2), sobre el que se proyectan todas las singularidades no algebroides sobre \mathbb{C} de toda función multivaluada definida por cada solución local $y = \varphi(x, (x_0, y_0))$ de la ecuación diferencial.

Con este teorema tendremos que toda solución es una función algebroide sobre $\Omega := \mathbb{C} \setminus \Sigma_E$. Ahora comenzaremos con los resultados previos que necesitaremos; pero antes demostraremos un caso particular de este teorema, que afirma que si sobre un punto las soluciones $y(x)$ de la ecuación diferencial no tienen singularidades (permitiendo polos) entonces todas las soluciones son meromorfas sobre $\mathbb{C} \setminus \Sigma_E$.

Proposición 4.2.1. Sean $P(x, y), Q(x, y)$ dos polinomios que pertenecen al anillo $\mathbb{C}[x, y]$ y consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (4.2)$$

Si existe un punto $x_0 \in \mathbb{C}$ tal que sobre él las soluciones $y(x)$ de la ecuación (4.2) no tienen singularidades salvo polos, entonces la ecuación (4.2) es una ecuación de Riccati, es decir, es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x)y^2 + b(x)y + c(x)}{Q(x)}$$

donde $a(x), b(x), c(x), Q(x)$ son polinomios que pertenecen al anillo. Más aún, para esta ecuación se tiene que $\Sigma_E = \{x \in \mathbb{C} \mid Q(x) = 0\}$ y toda solución $y(x)$ es meromorfa sobre $\mathbb{C} \setminus \Sigma_E$ (ver figura 4.2).

Demostración. El hecho de que las soluciones sólo tengan polos por singularidades nos dice que no hay multivaluación, ya que al considerar las soluciones en $\hat{\mathbb{C}}$, los polos no representan lugares problemáticos y para que haya multivaluación necesitamos que existan singularidades. Así, al no haber singularidades, las funciones $y(x)$ están bien definidas en todas partes y, por tanto, su derivada $\frac{dy}{dx}$, también; esto implica que $Q(x_0, y(x)) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{C}$ y para toda solución $y(x)$; esto pues son solución a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$. Por tanto, dado que estas soluciones sólo tienen polos por singularidades, obtenemos que la foliación \mathcal{F} , inducida por la ecuación diferencial, es transversal a la línea vertical $\{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{C}\}$.

Entonces tenemos que $Q(x_0, y)$ es un polinomio sólo en la variable y que cumple que $Q(x_0, y) \neq 0$ para toda y , por lo que tiene que ser un polinomio constante distinto de cero, digamos $Q(x_0, y) = q_0(x_0)$; esto implica que $Q(x, y) = q_0(x) + q_1(x)y + \dots + q_n(x)y^n$ donde $q_0(x_0) \neq 0$ y $q_k(x_0) = 0$ para toda $k \in \{1, \dots, n\}$.

Por otro lado, la transversalidad en el punto $y_0 = \infty$ significa justamente que para $\tilde{Q}(x, Y) = Y^k Q(x, \frac{1}{Y})$ con $k = \max\{n, m - 2\}$ se cumple que $\tilde{Q}(x, 0) \neq 0$ y por tanto $k = 0$ es decir $n = 0$ y $m \leq 2$, de donde concluimos que $Q(x, y) = q_0(x)$ y que $P(x, y)$ tiene grado menor o igual a dos en la variable y y, por tanto, es de la forma $P(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$.

En tal caso, toda fibra vertical $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = x_0\}$ que cumpla con que $Q(x_0) \neq 0$ es transversal a la foliación. Por tanto, la primera proyección $(x, y) \mapsto x$ induce sobre cada hoja L un mapeo uno a uno $L \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Sigma_E$ donde

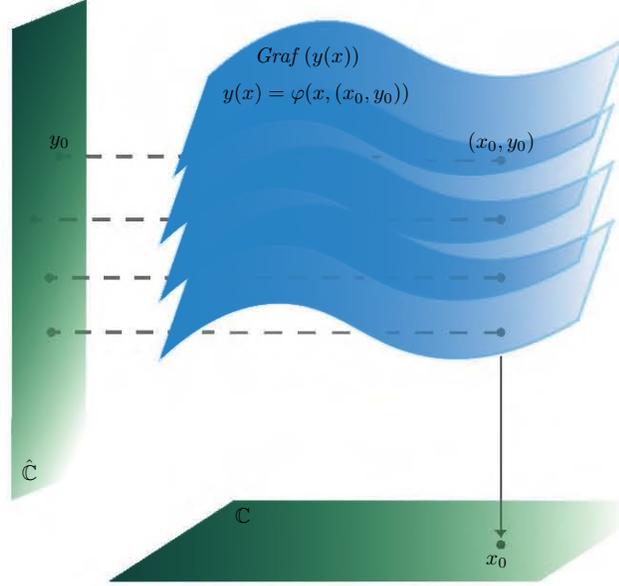


Figura 4.2: Representación gráfica de las soluciones del lema 4.2.1.

$\Sigma_E = \{x \in \mathbb{C} \mid Q(x) = 0\}$, así L es la gráfica de una función que sólo tiene polos en $\mathbb{C} \setminus \Sigma_E$, a saber, estos polos estarán en los puntos de intersección de L con la recta al infinito $\{(x, y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid y = \infty\}$. \square

Con lo que acabamos de probar vemos que una ecuación diferencial que cumple con la condición de que todas sus soluciones son meromorfas es una ecuación de Riccati. Pero no todas las ecuaciones de Riccati tienen soluciones meromorfas, esto lo podemos ver en el ejemplo 3.1.3, pues la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha_1}{x - \zeta_1} + \frac{\alpha_2}{x - \zeta_2} + \frac{\alpha_3}{x - \zeta_3}$$

es una ecuación de Riccati tal que todas sus soluciones son multivaluadas.

La prueba de la proposición anterior ocupa el hecho de que estamos trabajando cerca de puntos de tipo (1), ver pág.50, ahora, con el siguiente lema obtendremos modelos locales para puntos de tipo (2), ver pág.50.

Lema 4.2.1. Sea \mathcal{F} una foliación regular definida en una vecindad del origen $\bar{0} \in \mathbb{C}^2$ por una transformación $H: U \rightarrow \mathbb{C}$ (descrita como antes), con una tangencia vertical en $\bar{0}$. Supongamos que la curva discriminante Δ es transversal a la vertical $\{(x, y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid x = 0\}$ en $\bar{0}$. Entonces existe un cambio de

coordenadas local $\Phi(x, y) = (x, \phi(x, y))$ que preserva la fibrición vertical y envía \mathcal{F} sobre una foliación definida por $H_k(x, y) = x + y^k$, donde $(k - 1) \in \mathbb{N}^*$ es el orden de $\frac{\partial H}{\partial y}$ a lo largo de Δ . En otras palabras, existe un biholomorfismo local f tal que $\tilde{H} = f \circ H_k \circ \Phi$.

Demostración. Dado que la foliación \mathcal{F} está definida en una vecindad del origen por H , entonces tenemos que cerca del origen las hojas de la foliación son curvas de nivel de la función H , y por tanto si $\varphi(x, (x_0, y_0))$ es una hoja de la foliación, entonces $H(\varphi(x, (x_0, y_0))) = c$, donde $c \in \mathbb{C}$ es alguna constante; si derivamos respecto de t obtenemos $\frac{d}{dt}H(\varphi(x, (x_0, y_0))) = 0$, de donde se sigue que $\frac{\partial H}{\partial x}|_\varphi \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}|_\varphi \cdot \frac{dy}{dt} = 0$, por tanto los vectores $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ y $(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y})$ son ortogonales a lo largo de φ , así podemos concluir que $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}}$ y por tanto $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0\}$.

Ahora bien, salvo por un primer cambio de coordenadas local que preserve la fibrición vertical, podemos asumir que la curva compleja Δ es exactamente $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y = 0\}$; entonces como $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0\}$, obtenemos que $\frac{\partial H}{\partial y}$ puede ser escrita como: $\frac{\partial H}{\partial y} = y^{k-1}u(x, y)$, para algún entero $(k - 1) \in \mathbb{N}^*$ y una función holomorfa $u(x, y)$ tal que $u(0, 0) \neq 0$. Si integramos obtenemos que $H(x, y) = f(x) + y^k \tilde{u}(x, y)$, donde $\tilde{u}(x, y)$ es una nueva función holomorfa y $f(x)$ una función que sólo depende de x , que podemos suponer que se anula en 0, y por tanto $H(0, 0) = 0$.

Como H es una transformación transversal a Δ , entonces $f(x) = H(x, 0)$ es un biholomorfismo local, pues localmente las soluciones cortan al eje x transversalmente ya que $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y = 0\}$. Además, f cumple con que $f(0) = 0$, lo que implica que $f^{-1}(0) = 0$ y por tanto f^{-1} tiene parte constante igual a cero en su expresión en serie de potencias; así, podemos escribir a f^{-1} como $f^{-1}(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ de donde tendremos que $f^{-1}(H(x, y))$ al ser igual a $f^{-1}(f(x) + y^k \tilde{u}(x, y))$ puede ser expresada como

$$\begin{aligned} & a_1(f(x) + y^k \tilde{u}(x, y)) + a_2(f(x) + y^k \tilde{u}(x, y))^2 + a_3(f(x) + y^k \tilde{u}(x, y))^3 + \dots \\ & = (a_1f(x) + a_2f(x)^2 + a_3f(x)^3 + \dots) + y(a_1y^{k-1}\tilde{u}(x, y) + \dots), \end{aligned}$$

y por tanto,

$$f^{-1}(H(x, y)) = (a_1f(x) + a_2f(x)^2 + a_3f(x)^3 + \dots) + y(a_1y^{k-1}\tilde{u}(x, y) + \dots) \quad (4.3)$$

si evaluamos esta última igualdad en $(x, 0)$ obtenemos

$$f^{-1}(H(x, 0)) = f^{-1}(f(x)) = a_1f(x) + a_2f(x)^2 + a_3f(x)^3 + \dots,$$

es decir, $x = a_1f(x) + a_2f(x)^2 + a_3f(x)^3 + \dots$. Sustituyendo esto en la igualdad de la ecuación (4.3) y factorizando el término y^k del segundo sumando obtendremos que $f^{-1} \circ H(x, y) = x + y^k \hat{u}(x, y)$.

Además, $\hat{u}(x, y)$ cumple con que $\hat{u}(0, 0) \neq 0$, pues al ser f^{-1} invertible se tiene que cumplir que $a_1 \neq 0$, así, $\hat{u}(0, 0) = a_1\tilde{u}(0, 0) + 2a_2f(0)\tilde{u}(0, 0) +$

$a_2(0)^k \tilde{u}(0,0)^2 + \dots$, y como $f(0) = 0$ nos queda que $\hat{u}(0,0) = a_1 \tilde{u}(0,0) \neq 0$ que es lo que queríamos probar.

Finalmente, dado que $\hat{u}(0,0) \neq 0$, localmente (cerca de $(0,0)$) podemos encontrar una raíz k -ésima de la función $\hat{u}(x,y)$. Denotemos por $v(x,y)$ a dicha raíz; de este modo, si $\tilde{H} := f^{-1} \circ H$, entonces $\tilde{H}(x,y) = x + (y \cdot v(x,y))^k$. Por lo tanto si consideramos la función $\phi(x,y) = y \cdot v(x,y)$ y el cambio de coordenadas $\Phi(x,y) = (x, \phi(x,y))$ obtenemos que $\tilde{H}(x,y) = H_k \circ \Phi(x,y)$, equivalentemente, $H = f \circ H_k \circ \Phi$. \square

Proposición 4.2.2. Sea \mathcal{F} una foliación regular y $T := \{(x,y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid x = x_0\}$ una vertical transversal a Δ (es decir todo punto en T es de tipo (1) o (2), ver pág.50). Entonces, podemos encontrar un disco $D \subset \mathbb{C}$ con centro en x_0 tal que la proyección vertical restringida a una vecindad de T de la forma $D \times \hat{\mathbb{C}}$ induce un mapeo cubriente ramificado de hojas sobre D . Más aún, cada uno de estos cubrientes ramificados tiene a lo más una ramificación. Las multiplicidades de ramificación posibles son las multiplicidades k_1, \dots, k_n de $Q(x,y)$ y $\tilde{Q}(x,Y)$ a lo largo de las componentes irreducibles, no verticales, de Δ . En otras palabras, toda solución $\varphi(x, (x_0, y_0))$ con $x \in D$ es uniforme, o bien, algebroide con una singularidad y k_i determinaciones para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Sea $p \in T$. Si p es un punto de tipo (2), entonces U_p será el abierto que nos da el lema 4.2.1 para puntos de este tipo; si p es de tipo (1) entonces existe un abierto alrededor de él en el que $Q(x,y) \neq 0$, en tal caso U_p será dicho abierto.

Como la vertical $T = \{(x,y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid x = x_0\} = \{x_0\} \times \hat{\mathbb{C}}$ es compacta y $\{U_p\}_{p \in T}$ es una cubierta abierta de ella, entonces podemos encontrar una subcubierta finita de esta cubierta.

Podemos encontrar un disco D suficientemente pequeño y centrado en x_0 , de tal manera que la subcubierta finita, de T , que encontramos, cubra a $D \times \hat{\mathbb{C}}$. De este modo, para todo punto z en $D \times \hat{\mathbb{C}}$ existe U_p en la subcubierta finita de tal forma que $z \in U_p$; si p es un punto de tipo (1), toda solución contenida en esta vecindad es uniforme; si p es de tipo (2), por el lema 4.2.1 tendremos que toda solución en este abierto es algebroide con una singularidad en p y k determinaciones, donde $(k-1)$ es el orden de $\frac{\partial H}{\partial y}$ a lo largo de Δ . Y observamos que las soluciones se prolongan bien de un disco a otro pues \mathcal{F} es una foliación regular. \square

Ejemplo 4.2.1. La foliación (globalmente) definida por $H(x,y) = x + y^k$ corresponde a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{ky^{k-1}}$. Así cada hoja de la foliación está dada por $y = (x_0 + y_0^k - x)^{\frac{1}{k}}$, donde (x_0, y_0) es la condición inicial, y por tanto tiene exactamente una singularidad algebroide en $x = x_0 + y_0^k$; por como está dado este punto, es claro que su posición depende de las condiciones iniciales.

Ejemplo 4.2.2. Para $n > 2$, la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_n(x)y^n + \dots + a_1(x)y + a_0(x)}{Q(x)},$$

donde Q y a_i son polinomios en la variable x , tiene por curva discriminante a $\Delta = L_\infty \cup \{x \in \mathbb{C} \mid Q(x) = 0\}$; esto debido a que

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= \frac{-Y^2(a_n(x)(\frac{1}{Y})^n + \cdots + a_1(x)(\frac{1}{Y}) + a_0(x))}{Q(x)} \\ &= -\frac{a_n(x) + \cdots + a_1(x)Y^{n-1} + a_0(x)Y^n}{Y^{n-2}Q(x)} \end{aligned}$$

de donde, además, podemos ver que L_∞ tiene multiplicidad $k = n - 2$.

Ejemplo 4.2.3. La foliación globalmente definida por $H(x, y) = \frac{x-y^3}{1-y}$ corresponde a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{2y^3-3y^2+x}$; su discriminante tiene una tangencia vertical en el origen $(0, 0)$, pues $\frac{d(2y^3-3y^2+x)}{dy}(0) = 0$. Por otra parte tenemos que $H(0, 0) = 0$ y por tanto la solución con condición inicial $(0, 0)$ será $H(x, y) = 0$; es decir $\varphi(x, (0, 0)) = x^{\frac{1}{3}}$, de donde es claro que tiene una singularidad algebraíde en $x = 0$ con tres determinaciones. Si ahora consideramos otra solución $y = \varphi(x, (x_0, y_0))$ tendremos que ésta es la inversa de $x = g(y) = y^3 - cy + c$, donde $c = H(x_0, y_0)$ y $c \neq 0$, así tendremos que los valores críticos de la última serán singularidades de $\varphi(x, (x_0, y_0))$ (esto por lo hecho en el ejemplo 3.1.3) que además serán algebraídes por ser la inversa de un polinomio en y . Así, tenemos que $\frac{dx}{dy} = 3y^2 - c$ y por tanto $g(y)$ tiene dos puntos críticos en las dos raíces cuadradas de $c/3$, y como $g(y)$ es monovaluada concluimos que $g(y)$ tiene dos valores críticos y por tanto $\varphi(x, (x_0, y_0))$ tiene dos singularidades en estos valores. Cuando c tiende a cero, estas dos singularidades tienden a ser una sola de orden mayor.

Ahora supongamos que una foliación regular \mathcal{F} tiene por curva discriminante $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 - x^2 = 0\}$. Denotemos por $\Delta_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y - x = 0\}$ y $\Delta_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y + x = 0\}$, y definamos un germen de biholomorfismo $h: \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$ de la manera siguiente. Enviamos a $p \in \Delta_1$ sobre un punto $p' \in \Delta_2$ siguiendo la fibriación vertical (es decir $(x, x) \mapsto (x, -x)$), y después enviamos p' al único punto $h(p) \in \Delta_1$ que está en la misma hoja, de \mathcal{F} , que p' . Si $H: U \rightarrow \mathbb{C}$ es una transformación que define localmente a \mathcal{F} , y si definimos $h_1(x, x) = H(x, x)$ y $h_2(x, x) = H(x, -x)$, tendremos que por ser las restricciones de H a Δ_1 y Δ_2 respectivamente, su derivada (o su gradiente) no es 0, al ser \mathcal{F} una foliación regular, así, en particular, h_1 es localmente invertible y podemos describir a h como $h(x, x) = (h_1^{-1} \circ h_2)(x, x)$. Por ejemplo, la foliación definida (globalmente) por $H(x, y) = x + \frac{y^3}{3} - x^2y + \frac{2x^3}{3}$, tiene por curva discriminante a $\Delta = \{(x, y) \mid \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0\} = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 = 0\}$ y nos da como resultado el biholomorfismo $h(x, x) = (x + \frac{4}{3}x^3, x + \frac{4}{3}x^3)$, esto pues $h_1(x, x) = x$ y $h_2(x, x) = x + \frac{4}{3}x^3$.

En el ejemplo 4.2.3 los puntos críticos de las soluciones $x = g(y)$ son las dos determinaciones de la función algebraíde $(\frac{c}{3})^{\frac{1}{2}} = \{y_1(c), y_2(c)\}$. Y los puntos singulares de la inversa $y(x)$ son los valores críticos de la función $g(y)$, es decir, son las dos determinaciones de la función algebraíde $g((\frac{c}{3})^{\frac{1}{2}}) = c - \frac{2}{3\sqrt{3}}c^{3/2} =$

$\{\xi_1(c), \xi_2(c)\}$. En la construcción del párrafo anterior, los puntos singulares son dos funciones uniformes dadas por $\xi_1(c) = h_1^{-1}(x)$ y $\xi_2(c) = h_2^{-1}(x)$ y la transformación h es justamente una permutación entre las singularidades en Δ_1 . En el ejemplo 4.2.3 podemos parametrizar Δ por $z \mapsto (3z^2 - 2z^3, z)$, esto ya que $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \frac{-(1-y)3y^2 + (x-y^3)}{(1-y)^2}$ y por tanto $\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0$ si y sólo si $-(1-y)3y^2 + (x-y^3) = 0$, de donde obtenemos que $x = 3y^2 - 2y^3$. Así, tendremos que $H|_{\Delta}(z) = 3z^2$ y por tanto la transformación h vista como aplicación de Δ en Δ es simplemente $z \mapsto -z$ (pues h es una permutación entre las singularidades y cumple que a $z \mapsto \sqrt{z^2}$), por lo que es algebroides vista desde la variable x (pues $x = 3z^2 - 2z^3$).

Algunas de estas ideas serán usadas en la demostración de la siguiente proposición. Además, esta proposición es muy importante pues de ella deduciremos el teorema I de Painlevé como un corolario.

Proposición 4.2.3. Sea \mathcal{F} una foliación regular definida en una vecindad de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ por una transformación $H: U \rightarrow \mathbb{C}$ con $H(0, 0) = 0$. Supongamos que $\{(x, y) \in U \mid x = 0\} \not\subset \{(x, y) \in U \mid H(x, y) = 0\}$ y sea k el orden de $\frac{\partial H}{\partial y}(0, y)$ alrededor de $y = 0$. Entonces existe un disco D centrado en $0 \in \mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$ tal que, para $|c| \leq \epsilon$, las soluciones $y = f(x)$ de la ecuación implícita $H(x, y) = c$ son algebroides sobre D con un número de determinaciones menor o igual a $k + 1$ y, a lo más, k singularidades. Además, cuando el valor absoluto de c crece, las singularidades tienden a la frontera de D .

Demostración. Como $\{(x, y) \in U \mid x = 0\} \not\subset \{(x, y) \in U \mid H(x, y) = 0\}$ se tiene que $\frac{\partial H}{\partial y}(0, y) \not\equiv 0$ y por tanto $k \in \mathbb{N}$.

Cuando $k = 0$, tendremos que $\frac{\partial H}{\partial y}(0, y)$ es constante y no cero alrededor de $y = 0$, por tanto el teorema de la función implícita nos asegura la existencia de soluciones $\varphi_c(x)$ analíticas para $(x, c) \in D \times D_\epsilon$ donde tanto D como D_ϵ son discos centrados en 0.

Ahora supongamos que $k \geq 1$. Como \mathcal{F} es regular y $\frac{\partial H}{\partial y}(0, 0) = 0$ se sigue que $\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) = \xi \neq 0$. Definimos una nueva función auxiliar $\tilde{H}: U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\tilde{H}(x, y, c) = H(x, y) - c$, definida así tenemos que $\tilde{H}(0, 0, 0) = 0$ y además $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) - 0 = \xi \neq 0$. Así, por el teorema de la función implícita tendremos que existe un abierto $V \subset \mathbb{C}^3$, con $(0, 0, 0) \in V$, y $D_y \times D_c \subset \mathbb{C}^2$, con D_y y D_c discos centrados en 0, tales que para todo $(y, c) \in D_y \times D_c$ existe una única x tal que $(x, y, c) \in V$ y $\tilde{H}(x, y, c) = 0$; más aún, que existe $\varphi: D_y \times D_c \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y tal que $\tilde{H}(\varphi(y, c), y, c) = 0$ para todo $(y, c) \in D_y \times D_c$.

Por tanto, como $\tilde{H}(\varphi(y, c), y, c) = H(\varphi(y, c), y) - c = 0$ entonces, para c fija, $\varphi(y, c)$ parametriza a una hoja de la foliación. Además, como $\varphi(y, c)$ es analítica, podemos escribirla como $\varphi(y, c) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij} y^i c^j$, con $\sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij} y^i c^j$ convergente.

Para $c = 0$, tenemos que $(x, y) = (\varphi(y, 0), y)$ es la curva de \mathcal{F} que pasa por $(x, y) = (0, 0)$, así:

$$\frac{dx}{dy}(0) = \frac{dx}{dy}(0) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial y}(0, y|_{y=0})}{\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0)} = \frac{a_k y^k + a_{k+1} y^{k+1} + \dots |_{y=0}}{\xi},$$

por tanto el 0 es un cero de orden $k+1$ de la función $\varphi(y, 0)$. En consecuencia, en una vecindad de 0, en donde éste sea el único cero de $\varphi(y, 0)$, podemos escribir a la función φ como: $\varphi(y, 0) = y^{k+1}(b + b_1y + b_2y^2 \dots)$, con $b \neq 0$, es decir, y^{k+1} por una unidad holomorfa.

Por otro lado, como $\varphi(y, 0) = \varphi(y, c|_{c=0}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij}y^i c^j|_{c=0}$, entonces $\varphi(y, c) = \varphi(y, 0) + c(\sum_{i,j=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{ij}y^i c^j) = \varphi(y, 0) + cg(y, c)$. Así, para $c \neq 0$ tendremos que $\frac{\partial \varphi(y, c)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(y, 0)}{\partial y} + c \frac{\partial g(y, c)}{\partial y}$.

Sea D' un disco centrado en $y = 0$, de tal forma que $\bar{D}' \subset D_y$ y que $y = 0$ sea el único cero de $\varphi(y, 0)$ en \bar{D}' . Sea $\gamma = \partial D'$, así

$$|\varphi(y, c) - \varphi(y, 0)| = |cg(y, c)| = |c||g(y, c)| < |\varphi(y, 0)|, \quad (4.4)$$

y derivando,

$$\left| \frac{\partial \varphi(y, c)}{\partial y} - \frac{\partial \varphi(y, 0)}{\partial y} \right| = \left| c \frac{\partial g(y, c)}{\partial y} \right| = |c| \left| \frac{\partial g(y, c)}{\partial y} \right| < \left| \frac{\partial \varphi(y, 0)}{\partial y} \right|. \quad (4.5)$$

Ambas desigualdades se dan a lo largo de la curva γ para $|c|$ suficientemente pequeña. Tomemos $\epsilon > 0$ de tal forma que para $|c| < \epsilon$ se cumplan las desigualdades (4.4) y (4.5) a lo largo de la curva γ y que el disco con radio ϵ con centro en cero, D_ϵ , se quede contenido en D_c .

Por la construcción que hemos hecho, se tiene que para toda $c \in D_\epsilon$, la función $\varphi(y, c)$ tiene $k+1$ ceros contados con multiplicidad y $\frac{\partial \varphi(y, c)}{\partial y}$ tiene k ceros contados con multiplicidad, ambas en D' ; estas dos afirmaciones se siguen del teorema de Rouché (ver 1.1.11) ya que las desigualdades (4.4) y (4.5) se cumplen. Además, al cumplirse la desigualdad (4.4) se sigue que γ no pasa por los ceros de $\varphi(y, 0)$ ni por los ceros de $\varphi(y, c)$, y por tanto podemos encontrar un disco centrado en cero, D_1 , tal que $D_1 \subset \text{Int}(\varphi(y, c)(\gamma))$ ¹.

Así, para cada subdisco $D \subset D_1$, tendremos que $\varphi(y, c)^{-1}$ tiene a lo más k puntos singulares que serán los valores críticos de $\varphi(y, c)$ como vimos en el ejemplo 3.1.3, y que en los demás puntos hay solamente una cantidad finita de determinaciones sobre cada uno, ya que, como para cada $c \in D_\epsilon$, $\varphi(y, c)$ es no constante, entonces, sólo una cantidad finita de puntos de D' pueden ir al mismo punto bajo $\varphi(y, c)$. Más aún, como el punto x igual a cero tiene $k+1$ determinaciones sobre él, podemos deducir que sobre todos los puntos hay $k+1$ determinaciones (esto se deduce en la prueba de la proposición 3.1.1). Por lo tanto, sobre cada $D \subset D_1$, $\varphi(y, c)^{-1}$ induce un recubrimiento ramificado de orden $k+1$ con, a lo más, k singularidades. Las soluciones $y(x)$ que buscamos son precisamente estas funciones inversas. Con esto hemos demostrado la primera parte del resultado.

Sea $\Delta = \{(x, y) \in U \mid \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0\}$ la curva discriminante de \mathcal{F} . Consideremos las coordenadas $(c, y) = (H(x, y), y)$, así la transformación H es la primera coordenada y $x = x(c, y)$ es una transformación que tiene como curva

¹En esta expresión, por $\text{Int}(\varphi(y, c)(\gamma))$ entendemos el conjunto de puntos tales que su índice respecto a la curva $\varphi(y, c)(\gamma)$ es distinto de cero, en otras palabras, el conjunto de puntos que están “adentro de” o “encerrados por” la curva.

discriminante a Δ , pues $\frac{\partial x(c,y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial y}(\varphi(y,c),y)}{\frac{\partial H}{\partial x}(\varphi(y,c),y)}$, y por tanto, $\frac{\partial x(c,y)}{\partial y} = 0$ si y sólo si $\frac{\partial H}{\partial y}(\varphi(y,c),y) = 0$. Por tanto, si denotamos por $y_1(c), y_2(c), \dots, y_k(c)$ a los puntos críticos de $x = \varphi(y,c)$, con c fija, entonces, por lo que acabamos de decir, estos puntos tienen que estar en Δ , y por estar en la solución $\varphi(y,c)$ están en la vertical $\{(H(x,y),y) \mid H(x,y) = c\}$, es decir, están en la intersección de esta línea vertical con la curva Δ . Por tanto $c \mapsto (c, y_i(c))$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, parametrizan a la curva Δ en estas nuevas coordenadas. Por el teorema de Puiseux, dado que nuestra curva Δ es analítica, tendremos que estas parametrizaciones son algebroides; así, podemos concluir que los puntos singulares de nuestras soluciones $y(x)$, que están dados por $\zeta_i(c) = \varphi(y,c)(y_i(c))$, son algebroides también (pues son la composición de una función algebroide con una analítica).

Hacemos notar que la curva $\{(x,y) \in U \mid H(x,y) = 0\}$ tiene una tangencia vertical en $(0,0)$ que es aislada sobre la recta $\{(x,y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid x = 0\}$, pues de lo contrario no podríamos encontrar una vecindad de $y = 0$ en donde éste fuera el único cero de $\frac{\partial H}{\partial y}(0,y)$. Por tanto, para $c \neq 0$, localmente la gráfica de $\varphi(y,c)$, $\{(x,y) \in U \mid H(x,y) = c\}$, interseca transversalmente a la recta $\{(x,y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid x = 0\}$; de esto podemos asegurar que todas las funciones inversas correspondientes, $y(x)$, son analíticas en $x = 0$. Así, cada germen algebroide $\zeta_i(c)$ no puede ser idénticamente cero. En efecto, si alguno lo fuera, dado que son los valores críticos de $\varphi(y,c)$, tendríamos que estos valores críticos son todos cero, lo que implicaría que $(0,0)$ no es una tangencia aislada sobre la recta $\{(x,y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid x = 0\}$ y esto sería una contradicción. Finalmente, como los gérmenes $\zeta_i(c)$ no se anulan idénticamente y como están parametrizados por c , tenemos que cuando $|c|$ crece, éstos se alejan de cero; es decir, cuando el valor absoluto de c crece, las singularidades de las soluciones $y_c(x)$ se alejan del cero, que era lo que nos faltaba demostrar. \square

Ahora demostraremos un corolario de este resultado, con el que habremos demostrado el teorema I de Painlevé.

Corolario 4.2.1. Dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ y $\Sigma_E \in \mathbb{C}$ definido como antes², todas las soluciones de la ecuación son algebroides sobre $\mathbb{C} \setminus \Sigma_E$. Más aún existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que toda solución tiene, a lo más, k puntos singulares y, a lo más, $k+1$ determinaciones sobre $\mathbb{C} \setminus \Sigma_E$.

Demostración. Cerca de todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ que satisface que $x_0 \notin \Sigma_E$, la proposición 4.2.3 nos describe las soluciones de la ecuación en una vecindad de la forma $\{(x,y) \mid |x-x_0| < \epsilon_1, |H(x,y)| < \epsilon_2\}$, con ϵ_1 y ϵ_2 mayores que cero. Como la recta vertical $\{(x,y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid x = x_0\}$ es compacta en $\mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}}$, entonces la podemos cubrir por un número finito de estos abiertos. Así, existe un disco D_{x_0} centrado en x_0 tal que toda solución, $y(x)$, de la ecuación diferencial es algebroide sobre D_{x_0} . Además, si denotamos por $f_{x_0}(y) := \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y)$ y denotamos

²Recordemos que el conjunto Σ_E es el formado por los puntos $x \in \mathbb{C}$ tales que $Q(x,y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{C}$ y por los puntos $x \in \mathbb{C}$ tales que $Q(x,y_0) = P(x,y_0) = 0$ para algún $y_0 \in \mathbb{C}$, en otras palabras, esta formado por los puntos sobre los que la foliación \mathcal{F} tiene una hoja vertical o una singularidad.

por $\text{Ord}_y f_{x_0}$ al orden de f_{x_0} al expresarla como serie de potencias al rededor de y , entonces en $\sum_{y \in \hat{\mathbb{C}}} \text{Ord}_y f_{x_0}$, hay solo un número finito de sumandos no cero, que serán justamente los órdenes en los puntos en donde Δ interseca a la vertical $\{(x, y) \in \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}} \mid x = x_0\}$. Por tanto, si llamamos k al entero $\sum_{y \in \hat{\mathbb{C}}} \text{Ord}_y f_{x_0}$ tendremos que todas las soluciones $y(x)$, sobre D_{x_0} , cumplen con que tienen, a lo más, k puntos singulares y, a lo más, $k + 1$ determinaciones; esto se sigue fácilmente de la prueba de la proposición 4.2.3. \square

4.3. El teorema II de Painlevé

Finalizamos este capítulo con esta breve sección, en donde enunciaremos y probaremos el teorema II de Painlevé. Antes de enunciar este teorema recordaremos algunas cosas, para lograr que el enunciado sea lo más sencillo posible.

Primero recordemos que, en la sección 3.2, vimos que para todo camino γ el conjunto $\Sigma(\gamma)$ es el formado por las singularidades intermedias encontradas al continuar analíticamente una función f a lo largo de γ . En esa misma sección encontramos la proposición 3.2.1 que nos asegura que si la función f es algebroide, entonces el conjunto $\Sigma(\gamma)$ es finito y, además, cumple que existe una $\epsilon > 0$ tal que f puede ser continuada analíticamente a lo largo de todo camino γ' que cumpla que

$$\gamma'(0) = \gamma(0), |\gamma'(t) - \gamma(t)| < \epsilon \text{ y } \gamma'((0, 1)) \cap \Sigma(\gamma). \quad (4.6)$$

Al final de esa sección también mencionamos que, como caso particular de esta misma proposición, el siguiente conjunto resulta ser finito

$$\{f_{\gamma'}(x_1) \mid \gamma' \text{ es tal que cumple (4.6) y } \gamma'(1) = x_1\}.$$

Por otra parte, por el teorema de existencia y unicidad 1.3.1, sabemos que dada una solución analítica local $\varphi(x, (x_0, y_0))$, de una ecuación diferencial, se cumple que, para todo y suficientemente cercano a y_0 existe la solución $\varphi(x, (x_0, y))$. Por el teorema I de Painlevé tenemos que, si éstas son soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, entonces son algebroides sobre $\mathbb{C} \setminus \Sigma_E$ y por tanto si consideramos caminos como antes, pero contenidos en $\mathbb{C} \setminus \Sigma_E$, tendremos que el conjunto $\{\varphi_{\gamma'}(x_1, (x_0, y)) : \gamma' \text{ es tal que cumple (4.6) y } \gamma'(1) = \gamma(1)\}$ es finito.

Teorema 4.3.1 (II de Painlevé). Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ y consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Sea $\Omega := \mathbb{C} \setminus \Sigma_E$ y consideremos una solución analítica local $\varphi(x, (x_0, y_0))$. Si $\gamma: I \rightarrow \Omega$ es un camino que empieza en x_0 y termina en x_1 , tal que γ no conduce a $\varphi(x, (x_0, y_0))$ a una singularidad. Entonces, existe una constante $\epsilon > 0$ tal

que la correspondencia Φ_γ , que a un valor inicial y cercano de y_0 le asigna el conjunto finito de valores:

$$\Phi_\gamma(y) := \{\varphi_{\gamma'}(x_1, (x_0, y)) \mid \gamma' : I \rightarrow \Omega \text{ es } \epsilon\text{-cercana de } \gamma \text{ y } \Sigma(\gamma') = \emptyset\},$$

define una función multivaluada de y (sobre un disco D suficientemente pequeño centrado en y_0) dada por un número finito de funciones algebroides sobre D .

En el enunciado, al poner $\varphi_{\gamma'}(x_1, (x_0, y))$ estamos sobreentendiendo que γ' es un camino que empieza en $x_0 = \gamma(0)$ y termina en $x_1 = \gamma(1)$.

Demostración. Sean $\varphi(x, (x_0, y_0))$, $\gamma : I \rightarrow \Omega$ y $\Sigma(\gamma)$ como en el enunciado, y sea \mathcal{F} la foliación asociada a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. Toda prolongación algebroide φ_γ está caracterizada por un levantamiento $\tilde{\gamma} : I \rightarrow L_0 \subset \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}}$, con $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ y $\tilde{\gamma}(0) = (x_0, y_0)$, a la hoja L_0 pasando por (x_0, y_0) . Como todas las soluciones son algebroides sobre Ω entonces todas las singularidades intermedias tendrán que ser algebroides; así, por el lema 3.2.3 tendremos que sólo hay una cantidad finita de prolongaciones de φ distintas. Denotemos por $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_N : I \rightarrow \Omega \times \hat{\mathbb{C}}$ a todos los levantamientos³ posibles que son justamente los que caracterizan a cada prolongación de φ .

Por la proposición 4.2.3 y por la compacidad de la fibra vertical, para todo $t \in I$ podemos encontrar un disco D centrado en $\gamma(t)$ tal que toda hoja L de la foliación $\mathcal{F}|_D$ restringida a un cilindro $D \times \hat{\mathbb{C}}$ es un recubrimiento ramificado sobre D . Si L_i es la hoja local que contiene a $\tilde{\gamma}_i(t)$, entonces, salvo por disminuir D , podemos suponer que cada transformación $\pi : L_i \rightarrow D$ es, o bien un biholomorfismo, o bien un cubriente ramificado que sólo se ramifica en $\tilde{\gamma}_i(t)$. (Si esto último es el caso, entonces hay que notar que $\gamma(t) \in \Sigma(\gamma)$ y si el orden de ramificación es q , entonces q levantamientos $\tilde{\gamma}_i$ coinciden en t y difieren justo después). Por compacidad del camino γ , podemos extraer de estos discos una cubierta finita, digamos $\{D_0, D_1, \dots, D_n\}$. Además, podemos suponer que la secuencia de discos D_0, D_1, \dots, D_n recubre γ , es decir, que existe una partición del intervalo $[0, 1]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$ tal que $D_k \supset \gamma([t_k, t_{k+1}])$.

Queremos describir a la correspondencia Φ como un número finito de funciones algebroides, para hacer ésto consideraremos transformaciones que definan localmente a la foliación en abiertos convenientes.

Para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, denotemos por $L_i|_{D_k}$ a la hoja local de la foliación restringida $\mathcal{F}|_{D_k}$, que contiene a $\tilde{\gamma}_i(t_{k+1})$. Por como construimos la secuencia de discos tendremos que $\gamma(t_j) \notin \Sigma(\gamma)$ para toda $j \in \{0, \dots, n+1\}$, por tanto, $\pi : L_i|_{D_k} \cap L_i|_{D_{k+1}} \rightarrow D_k \cap D_{k+1}$ es un biholomorfismo. Para cada hoja local $L_i|_{D_k}$ consideramos una vecindad tabular de ésta, U_{i_k} , y una transformación local $H_{i_k} : U_{i_k} \rightarrow \mathbb{C}$ que define a la foliación en dicha vecindad.

Como $\tilde{\gamma}_l \equiv \tilde{\gamma}_m$ en D_0 , tendremos que $H_{l_0} \equiv H_{m_0}$ para todo l y m en $\{1, \dots, N\}$. Ahora bien, como la foliación no tiene singularidades, pues la estamos

³Una observación que podemos hacer es que todos estos levantamientos coinciden para t pequeña, pues φ es una función analítica local, y difieren para t mayor y a medida en que se encuentran con los puntos de $\Sigma(\gamma)$.

considerando sobre Σ_E , por el teorema de rectificación después de hacer cambios de coordenadas, podemos suponer que la transformación $H_{i_0}(x, y) = y$ define a la foliación en una vecindad de (x_0, y_0) ; en particular tendremos que $H_{i_0}(x_0, y) = y$, para valores y cercanos de y_0 . Además también podemos suponer que $H_{i_k} \equiv H_{i_{k+1}}$ en una vecindad de $\tilde{\gamma}_i(t_{k+1})$, por como hemos construido la secuencia de discos D_0, D_1, \dots, D_n .

Para $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeña podemos suponer que, para todo y'_0 tal que $|y'_0 - y_0| < \epsilon_1$, el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \in D_k \text{ y } H_{i_k}(x, y) = y'_0\}$ es no vacío, pues, después de los cambios de coordenadas tenemos que $H_{i_0}(x, y'_0) = y'_0$, $H_{i_k} \equiv H_{i_{k-1}}$ en una vecindad de $\tilde{\gamma}(t_k)$ y valores suficiente cercanos a y_0 serán tomados, dado que la foliación \mathcal{F} no tiene singularidades (ver figura 4.3); además, dicho conjunto será una hoja completa de la foliación restringida $\mathcal{F}|_{D_k}$, ya que en particular H_{i_k} manda a hojas completas de $\mathcal{F}|_{D_k}$ a una constante. Así, para simplificar, remplazaremos cada vecindad tabular U_{i_k} por el abierto $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \in D_k \text{ y } |H_{i_k}(x, y) - y_0| < \epsilon_1\}$.

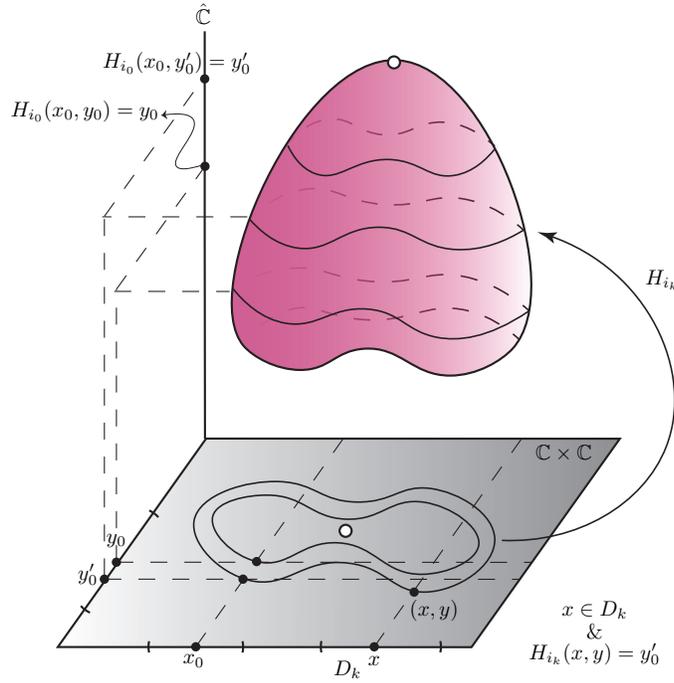


Figura 4.3: El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \in D_k \text{ y } H_{i_k}(x, y) = y'_0\}$ es no vacío.

Sea $\gamma': I \rightarrow \Omega$ una ϵ -perturbación de γ con $\gamma'(0) = x_0$ y $\gamma'(1) = x_1$. Si ϵ es suficientemente pequeña, entonces $\{D_0, D_1, \dots, D_n\}$ sigue siendo un recubrimiento ordenado para el camino γ' . Más aun, podemos suponer que $\gamma'(t_{k+1}) \in D_k \cap D_{k+1}$. Sea $\tilde{\gamma}': I \rightarrow \mathbb{C} \times \hat{\mathbb{C}}$ un levantamiento de γ' a la hoja

correspondiente a un prolongamiento algebroide de una solución $\varphi(x, (x_0, y'_0))$ con $|y'_0 - y_0| < \epsilon_1$. Así, $\tilde{\gamma}'(1) = (x_1, y'_1)$, donde y'_1 es precisamente uno de los valores tomados por Φ_γ en y'_0 . (Observación: todo valor de Φ_γ es tomado de esta manera).

Salvo por disminuir ϵ_1 podemos suponer que para cada $k \in \{0, \dots, n\}$ existe $j \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\tilde{\gamma}'(t_{k+1}) \in U_{k_j}$, así, en particular se tiene que $\tilde{\gamma}'(1) \in \{(x, y) \mid x \in D_n \text{ y } H_{i_n}(x, y) = y'_0\}$ para alguna $i \in \{1, \dots, N\}$, por tanto, y'_1 es el valor tomado en y'_0 por la función algebroide $\Phi_i(y)$ definida, para $|y - y_0| < \epsilon_1$, como $H_{n_i}(x_1, \Phi_i(y)) = H_{0_i}(x_0, y)$, es decir, $H_{n_i}(x_1, \Phi_i(y)) = y$. Precisamente estas son las funciones algebroides que dan origen a Φ . \square

Apéndice A

Topología

A continuación se presenta una lista de definiciones y resultados que fueron utilizados a lo largo de este trabajo. Si bien se espera que el lector esté familiarizado con ellos, se han incluido aquí para una rápida consulta. Además, al final de este apéndice, se incluyen referencias complementarias, en donde el lector interesado podrá profundizar en el tema.

Definición A.0.1. Sea X un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia y $\tau \subset \mathcal{P}(X)$.

1. τ es una *topología* en X cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- a) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$,
- b) si $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ entonces $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$,
- c) si $\{A, B\} \subset \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$.

2. (X, τ) es un *espacio topológico* cuando τ es una topología en X . Y en tal caso, a los elementos de X se les llaman *puntos* y a los de τ se les llaman *abiertos*.

Definición A.0.2. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$.

1. Si $X \setminus A$ es abierto, entonces decimos que A es un *cerrado*.
2. Denotamos por \bar{A} a la *cerradura topológica de A* que es el cerrado definido por $\bigcap \{C \subset X \mid A \subset C \text{ y } C \text{ es cerrado}\}$, que resulta ser el cerrado más pequeño, con respecto a la contención, que contiene a A .

Definición A.0.3. Sea (X, τ) un espacio topológico y $S \subset X$. La topología de S como *subespacio* de X es la siguiente: $V \subset S$ es abierto en S si y sólo si existe un abierto U en X tal que $V = U \cap S$.

De esta definición vemos que si U es un abierto de un espacio topológico X , entonces en su topología como subespacio los abiertos son simplemente los abiertos de X que están contenidos en U .

Definición A.0.4. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función.

1. La función f es *abierto* si para todo abierto A de X se tiene que $f(A)$ es un abierto en Y .
2. La función f es *continua* si para todo abierto B en Y la imagen inversa de B bajo f , $f^{-1}(B)$, es un abierto en X .

Definición A.0.5. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, X y Y son *homeomorfos* si existe una función continua $f: X \rightarrow Y$ tal que f es biyectiva y su inversa es continua. En tal caso, decimos que f es un *homeomorfismo*.

Proposición A.0.1. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Si f es continua, biyectiva y abierta, entonces f es un homeomorfismo.

Definición A.0.6. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$, V es una *vecindad abierta de x* si y sólo si $V \in \tau$ y $x \in V$.

Definición A.0.7. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. La función f es un *homeomorfismo local* si para todo $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que $f(U)$ es un abierto de Y y $f|_U: U \rightarrow f(U)$ es un homeomorfismo.

Proposición A.0.2. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Si f es un homeomorfismo local, entonces f es continua.

Definición A.0.8. Sea (X, τ) un espacio topológico, X es un espacio topológico *Hausdorff* si para todo par de puntos $\{x, y\} \subset X$, con $x \neq y$, existen vecindades V y U de x y y respectivamente, de tal forma que $V \cap U = \emptyset$.

Definición A.0.9. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathfrak{B} \subset \tau$. \mathfrak{B} es una *base* de la topología τ si cumple las siguientes propiedades:

1. Si $B \in \mathfrak{B}$, entonces $B \in \tau$.
2. Para todo $U \in \tau$ existe $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathfrak{B}$ tal que $U = \cup_{i \in I} B_i$.

Definición A.0.10. Sea (X, τ) un espacio topológico. El espacio topológico X es *segundo numerable* si existe una base numerable de τ .

Proposición A.0.3. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos, $f: X \rightarrow Y$ una función y \mathfrak{B} una base de τ_Y . La función f es continua si y sólo si $f^{-1}(B)$ es un abierto para todo $B \in \mathfrak{B}$.

Definición A.0.11. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. X es *disconexo* si existen U y V abiertos distintos del vacío, tales que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$.
2. X es *conexo* si no es desconexo.

Definición A.0.12. Sea (X, τ) un espacio topológico. X es *conexo por trayectorias* si para todo par de puntos $\{a, b\} \subset X$ existe una función $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ continua y tal que $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$.

Proposición A.0.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si X es conexo por trayectorias entonces X es conexo.

Definición A.0.13. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Una *cubierta abierta* de X es una colección de abiertos, $\mathcal{B} \subset \tau$, tal que $\cup \mathcal{B} = X$.
2. X es *compacto* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.
3. $U \subset X$ es *relativamente compacto* si \bar{U} es compacto.

Definición A.0.14. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función.

1. f es una función *propia* si para todo $K \subset Y$ compacto $f^{-1}(K)$ es compacto.
2. f es una función *finita* si para todo $y \in Y$ se tiene que $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito.

Definición A.0.15. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Un *camino* en X es una función continua α tal que $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$. Cuando además se cumple que $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$, decimos que α es una *curva cerrada* o un *lazo en x_0* .
2. Una *homotopía* entre dos caminos $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$, $\beta: [0, 1] \rightarrow X$ tales que $\alpha(0) = x_0 = \beta(0)$ y $\alpha(1) = x_1 = \beta(1)$ es una transformación continua $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$, tal que $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \beta(s)$, $H(0, t) = x_0$ y $H(1, t) = x_1$.
3. Dos caminos $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$, $\beta: [0, 1] \rightarrow X$ son *homótopos* como caminos si $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$ y existe una homotopía entre ellos.

Lema A.0.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. La homotopía entre caminos es una relación de equivalencia en el conjunto formado por los caminos en X . Y si $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ es un camino en X , denotaremos por $[\alpha]$ a su clase de equivalencia bajo esta relación.

Definición A.0.16. Sea (X, τ) un espacio topológico y α, β dos caminos en X .

1. Si $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces definimos la *concatenación* de α y β como el camino $\alpha * \beta: [0, 1] \rightarrow X$, dado por:

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

2. Los caminos α y β son *concatenables* si $\alpha(1) = \beta(0)$ (y por tanto existe $\alpha * \beta$).

Lema A.0.2. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ caminos en X tales que $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ y $[\beta_1] = [\beta_2]$. Si α_1 y β_1 son concatenables, entonces α_2 y β_2 también lo son y $[\alpha_1 * \beta_1] = [\alpha_2 * \beta_2]$. Por tanto, está bien definido $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$, pues no depende del representante de la clase de equivalencia.

Teorema A.0.1. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x_0 \in X$. El conjunto definido como $\pi_1(X, x_0) := \{[\alpha] \mid \alpha \text{ es un lazo en } x_0\}$ es un grupo con la concatenación como producto.

Definición A.0.17. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x_0 \in X$.

1. El grupo $(\pi_1(X, x_0), *)$ es el *grupo fundamental* de X basado en x_0 .
2. X es *simplemente conexo* si X es conexo por trayectorias y su grupo fundamental es trivial.

Proposición A.0.5. Sean X y Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Si $f(x_0) = y_0$ entonces $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ son isomorfos.

Proposición A.0.6. Si $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, entonces $(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1), *) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

En la prueba del resultado anterior se ve que el grupo fundamental de \mathbb{S}^1 está generado por las potencias de $[\alpha]$, donde $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\alpha(t) = e^{2\pi it}$. Además, como $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ es homeomorfo a \mathbb{S}^1 , tendremos que sus grupos fundamentales son isomorfos y, por tanto, el grupo fundamental de $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ puede ser generado por las potencias de un elemento en él.

Definición A.0.18. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $p: X \rightarrow Y$ una función. La función p es un *mapeo cubriente* si para cada $y \in Y$ existe una vecindad $U \in \tau_Y$ de y tal que $p^{-1}(U)$ es unión ajena de abiertos en X homeomorfos a U , por p restringida a cada uno de ellos.

Lema A.0.3. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $p: X \rightarrow Y$ un mapeo cubriente.

1. La función p es suprayectiva.
2. La función p es un homeomorfismo local.

Del punto 2 de este lema y de la proposición A.0.2 de este apéndice podemos concluir que un mapeo cubriente siempre es una función continua.

Todas estas definiciones y resultados pueden ser encontrados en [11] y [15]; además, todo lo relacionado con la primera parte, que incluye hasta la definición A.0.13, también puede ser encontrado en el libro [21].

Bibliografía

- [1] Lars Valerian Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. 2D. ed. McGraw-Hill, 1966.
- [2] Boris Vladimirovitch Chabat and Djilali Embarek. *Introduction à l'analyse complexe (en deux tomes). Tome 1, Fonctions d'une variable*. Mir, 1990.
- [3] Robert M Conte and Micheline Musette. *The Painlevé Handbook*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [4] Manfredo Perdigao Do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhauser, 1992.
- [5] Gerd Fischer. *Plane algebraic curves*, volume 15. American Mathematical Soc., 2001.
- [6] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] X Gómez-Mont and L Ortiz-Bobadilla. Sistemas dinámicos holomorfos en superficies, volumen 3 de aportaciones matemáticas: Notas de investigación. *Sociedad Matemática Mexicana, México*, 2004.
- [8] Robert Clifford Gunning and Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex variables*, volume 368. American Mathematical Soc., 2009.
- [9] Yu S Ilyashenko and Sergei Yakovenko. *Lectures on analytic differential equations*, volume 86. American Mathematical Soc., 2008.
- [10] Gareth A Jones and David Singerman. *Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge university press, 1987.
- [11] John Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 940. Springer Science & Business Media, 2010.
- [12] Frank Loray. Sur les théorèmes I et II de painlevé. *arXiv preprint math/0403034*, 2004.
- [13] Guadalupe Martínez Salgado. *Superficies de Riemann como foliaciones asociadas a ecuaciones diferenciales*. UNAM, Tesis de Licenciatura, 2017.

- [14] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5. American Mathematical Soc., 1995.
- [15] James R Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [16] Antonio Lascuarain Orive. *Curso básico de variable compleja*. UNAM, 2007.
- [17] Paul Painlevé. Sur les singularités des équations de la dynamique et sur le problème des trois corps. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 123:871–873, 1896.
- [18] Paul Painlevé. Mémoires et observations. mémoire sur les intégrales premières du problème des II corps. *Bulletin Astronomique, Série I*, 15:81–113, 1898.
- [19] Paul Painlevé. La mécanique classique et la théorie de la relativité. *Comptes Rendus Academie des Sciences (série non spécifiée)*, 173:677–680, 1921.
- [20] EE Perepelkin, BI Sadovnikov, and NG Inozemtseva. Riemann surface and quantization. *Annals of Physics*, 376:194–217, 2017.
- [21] Carlos Prieto. *Topología básica*. Fondo de Cultura Económica, 2005.
- [22] Ilya Prigogine, Gregoire Nicolis, and Agnes Babloyantz. Thermodynamics of evolution. *Physics today*, 25:23, 1972.
- [23] Boris Vladimirovich Shabat. *Introduction to complex analysis: functions of several variables*, volume 110. American Mathematical Soc., 1992.