UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARACTERIZACIÓN DE GROTHENDIECK DE LA CATEGORÍA DE ACCIONES CONTINUAS DE UN GRUPO PROFINITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JUAN ANDRÉS OROZCO GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2018

1. Datos del alumno
Orozco
Gutiérrez
Juan Andrés
5540566742
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
311176896

2. Datos del tutor
Dr.
Francisco
Marmolejo
Rivas

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Isabel
Hubard
Escalera

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Omar
Antolín
Camarena

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Hugo
Juárez
Anguiano

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Luis
Turcio
Cuevas

7. Datos del trabajo escrito.
Caracterización de Grothendieck de la categoría de acciones continuas de un grupo profinito
106 p.
2018

Agradecimientos

A mi asesor, Francisco Marmolejo Rivas por brindarme su tiempo y el conocimiento para poder realizar la presente tesis.

A mis sinodales por su incondicional apoyo para enriquecer la calidad de la presente tesis.

A mi familia y amigos sin los cuales no podría compartir todo lo que me apasiona.

A mis profesores de la facultad por mostrarme lo maravillosas que son las matemáticas.

Caracterización de Grothendieck de la categoría de acciones continuas de un grupo profinito.

Juan Andrés Orozco Gutiérrez

2018

Índice general

1. Introducción. **1**

2. Preliminares **3**
2.1. Teoría de categorías. 3
2.1.1. Categorías, Funtores y Transformaciones naturales. 3
2.1.2. Lema de Yoneda. 8
2.1.3. Bifuntores. 9
2.1.4. Adjunciones. 11
2.1.5. Límites y Colímites. 14
2.1.6. Ejemplos de límites y colímites. 16
2.1.7. Funtores finales. 18
2.1.8. Categorías filtrantes y pro-objetos. 20
2.1.9. Categorías Extensivas. 24
2.2. Acciones de grupos. 30
2.3. Grupo fundamental de un espacio topológico. 33

3. Teoría de Galois en campos. **35**
3.1. Extensiones de campos. 35
3.1.1. Extensiones trascendentes y algebraicas de campos. 35
3.1.2. Campos algebraicamente cerrados. 39
3.1.3. Levantamiento de morfismos de extensiones de campos. 41
3.1.4. Extensiones separables. 43
3.1.5. Extensiones exactas. 44
3.1.6. Extensiones normales. 45
3.2. Extensiones de Galois y clasificación de sus subextensiones. 46
3.2.1. Extensiones de Galois. 46
3.2.2. Clasificación de subextensiones de una extensión de Galois finita. . . 47
3.2.3. Clasificación de subextensiones de una extensión de Galois infinita. . 50

4. Teoría de Galois en espacios cubrientes **53**
4.1. Teoría de espacios cubrientes. 53
4.1.1. Espacios cubrientes. 53
4.1.2. Acciones de Grupos, espacios cociente y cubiertas. 55
4.1.3. La Acción de $Aut_{\boldsymbol{Cub}(X)}(Y, p)$ en (Y, p). 55
4.1.4. Cubrientes de Galois y clasificación de sus subcubrientes. 56

4.2. Cubriente Universal. 58
4.2.1. Acción de monodromía. 58
4.2.2. El funtor de fibras $\boldsymbol{Fib}_x$ y el cubriente universal. 59

5. Acciones transitivas de un grupo discreto. 65
5.1. El funtor adjunto $A \times_G -$. 65
5.2. Axiomas para el caso representable conexo. 72

6. Acciones transitivas continuas de un grupo profinito. 75
6.1. Axiomas para el caso conexo. 76
6.2. Acciones de un grupo profinito. 81

7. Todas las acciones continuas de un grupo profinito. 89
7.1. Axiomas de Grothendieck. 89
7.1.1. La categoría k-$\boldsymbol{AlgS}$. 97

Capítulo 1

Introducción.

La presente tesis se basa en el artículo *On the Galois theory of Grothendieck*, el cual presenta una generalización categórica desarrollada por Grothendieck de la famosa teoría de Galois en campos y la demostración de un teorema análogo al teorema fundamental de la teoría de Galois pero en términos mucho más generales. El objetivo de esta tesis es demostrar el teorema ya mencionado. A lo largo de este trabajo se muestra un panorama muy general de esta teoría, la cual se desarrolla desde conceptos muy simples para que cualquier alumno de licenciatura en Matemáticas le pueda dar un buen seguimiento. Empezamos el segundo capítulo dando las definiciones y resultados básicos de la teoría de categorías, acciones de grupos y el grupo fundamental de un espacio topológico. Posteriormente en los capítulos 3 y 4 se procede a construir dos de los ejemplos más conocidos de la teoría de Galois, los cuales son la teoría de Galois en campos y el otro, un poco menos conocido, es el de la teoría de Galois en espacios cubrientes. Finalmente ya familiarizados con el comportamiento común de estas teorías se desarrolla la teoría de Galois de Grothendieck, de la cual las dos anteriores son casos particulares. Para desarrollar esta teoría se comienza en el capítulo 5 analizando el caso en que tengamos una categoría $\boldsymbol{C}$ junto con un objeto $A \in \boldsymbol{C}$ y el funtor representable $[A,-]_G : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{tCon}^G$ donde $G = Aut(A)^{op}$ de manera que satisfagan ciertos axiomas (caso representable), bajo estos axiomas, aseguramos la existencia de un funtor adjunto $A \times_G - : \boldsymbol{tCon}^G \to \boldsymbol{C}$. En el capítulo 6 se crece en nivel partiendo de una categoría $\boldsymbol{C}$ junto con un funtor $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$ no necesariamente representable, pero sí una versión más general que denominamos pro-representable e incluimos la noción de grupo profinito. En esta categoría encontramos una clase de objetos muy especiales que denominamos objetos Galois, los cuales nos permitirán ver a nuestra categoría $\boldsymbol{C}$ como cierto colímite filtrante de categorías que cumplen el caso representable y gracias a esto probamos que F es una equivalencia de categorías entre $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{ctCon}^G$ donde $G = Aut(P)^{op}$ y P es el pro-objeto asociado a F. Por último se desarrolla el caso en que nuestra categoría satisfaga los tan esperados axiomas de Grothendieck, de donde se probará que la subcategoría plena de los objetos conexos satisface el caso conexo, dando las condiciones para la existencia de un funtor adjunto, esta vez de la categoría $\boldsymbol{cCon}^G$ (acciones continuas de G) en $\boldsymbol{C}$. Esta adjunción establece una equivalencia de categorías y la otra parte del teorema nos dice que si nos restringimos a los objetos conexos de $\boldsymbol{C}$, entonces tendremos una equivalencia de categorías entre esta subcategoría plena y $\boldsymbol{ctCon}^G$ que denota todas las acciones continuas y transitivas de G en $\boldsymbol{Con}$.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Teoría de categorías.

2.1.1. Categorías, Funtores y Transformaciones naturales.

Iniciaremos dando las definiciones básicas de los principales objetos de estudio en la teoría de categorías, que son los de categoría, funtor y transformación natural. Los resultados fueron, en su mayoría, sacados de [3] y [5]. Por otro lado, el tema de categorías filtrantes fue sacado de [2] y el tema de categorías extensivas de [9].

Definición 2.1.1. Una categoría $\boldsymbol{C}$, consiste de:

1) Una clase denotada $Ob(\boldsymbol{C})$, cuyos elementos se llaman objetos.

2) Para cualesquiera par de objetos $A, B \in Ob(\boldsymbol{C})$, un conjunto denotado $Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ cuyos elementos se llaman flechas o morfismos, en este caso, dada $f \in Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ diremos que el dominio de f es A, el cual denotamos $dom(f)$ y el codominio de f es B, el cual denotamos $cod(f)$. A la clase $Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ la podemos denotar simplemente $\boldsymbol{C}(A, B)$ o si es claro sobre que categoría se está trabajando, la denotaremos simplemente $[A, B]$.

3) Para cada tres objetos $A, B, C \in Ob(\boldsymbol{C})$, tenemos una función

$$\circ : Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B) \times Hom_{\boldsymbol{C}}(B, C) \to Hom_{\boldsymbol{C}}(A, C)$$

llamada composición (para cada par de flechas $f \in Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ y $g \in Hom_{\boldsymbol{C}}(B, C)$ usaremos la notación $g \circ f = \circ(f, g)$), que además cumple los siguientes axiomas.

a) Dados $A, B, C, D \in Ob(\boldsymbol{C})$, $f \in Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\boldsymbol{C}}(B, C)$ y $h \in Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D)$, se cumple que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

b) $\forall A \in Ob(\boldsymbol{C})$ existe una flecha distinguida, $id_A \in Hom_{\boldsymbol{C}}(A, A)$, tal que si $B \in Ob(\boldsymbol{C})$, $f \in Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ y $g \in Hom_{\boldsymbol{C}}(B, A)$, se sigue que $f \circ id_A = f$ y $id_A \circ g = g$.

Si $Ob(\boldsymbol{C})$ es un conjunto, diremos que $\boldsymbol{C}$ es una categoría pequeña.

Ejemplo 2.1.2. 1) $\boldsymbol{Con}$ es la categoría cuyos objetos son conjuntos y las flechas son funciones entre conjuntos.

2) $\boldsymbol{Top}$ es la categoría cuyos objetos son espacios topológicos y las flechas son funciones continuas.

3) $\boldsymbol{Grp}$ es la categoría cuyos objetos son grupos y las flechas son morfismos de grupos.

4) R-$\boldsymbol{Mod}$ es la categoría cuyos objetos son R-modulos y las flechas son morfismos de R-modulos.

5) $\boldsymbol{Par}$ será la categoría con dos objetos junto con dos flechas paralelas además de las identidades.

$$P \rightrightarrows Q$$

6) $\boldsymbol{Pt}$ es la categoría con un solo objeto y la única flecha es la identidad.

7) Sea X una clase. Podemos construir la categoría cuyos objetos son los elementos de X y cuyas únicas flechas son las identidades. A una categoría de este estilo le llamaremos categoría discreta.

Definición 2.1.3. Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría. Definimos la categoría opuesta de $\boldsymbol{C}$, que denotaremos por $\boldsymbol{C}^{op}$, cuyos objetos serán los mismos objetos de $\boldsymbol{C}$, tales que para cada par de objetos $A, B \in Ob(\boldsymbol{C}^{op})$, $Hom_{\boldsymbol{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\boldsymbol{C}}(B, A)$ y cuya composición $f \circ^{op} g$ será la flecha $g \circ f$ en $\boldsymbol{C}$.

Definición 2.1.4. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría, $A, B \in \boldsymbol{C}$ y $f \in Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$. Diremos que:

1) f es un monomorfismo (mono) si $\forall C \in \boldsymbol{C}$ y $\forall g, h \in Hom_{\boldsymbol{C}}(C, A)$ se cumple que $(f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$.

2) f es un epimorfismo (epi) si f es un monomorfismo en $\boldsymbol{C}^{op}$.

3) f es una sección si existe $g \in Hom_{\boldsymbol{C}}(B, A)$ tal que $g \circ f = id_A$ (i.e. f es invertible a la izquierda).

4) f es una retracción si existe $g \in Hom_{\boldsymbol{C}}(B, A)$ tal que $f \circ g = id_B$ (i.e. f es invertible a la derecha).

5) f es un isomorfismo (iso) si existe $g \in Hom_{\boldsymbol{C}}(B, A)$ tal que $f \circ g = id_B$ y $g \circ f = id_A$.

Diremos que dos objetos son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos.

Definición 2.1.5. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría y $A \in \boldsymbol{C}$. Diremos que:

1) A es un objeto inicial si $\forall B \in \boldsymbol{C}$ existe una única flecha $f \in Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$.

2) A es objeto final si es inicial en $\boldsymbol{C}^{op}$.

3) A es objeto cero si es inicial y final.

Observación 2.1.6. Dada una categoría $\boldsymbol{C}$:

1) Dos objetos iniciales son isomorfos.

2) Dos objetos finales son isomorfos.

3) Dos objetos cero son isomorfos.

Si en nuestra categoría $\boldsymbol{C}$ existe un objeto cero, éste será único salvo isomorfismos, podemos entonces darle una notación sin que haya ambigüedad. Denotaremos al objeto cero como 0.

Definición 2.1.7. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría con objeto 0 y $A \in \boldsymbol{C}$. A la única flecha que existe de A en 0 la llamaremos flecha cero y se denotará $0 : A \to 0$, de igual forma la única flecha que existe de 0 en A se llamará flecha cero y se denotará $0 : 0 \to A$. Dados dos objetos $A, B \in \boldsymbol{C}$, definimos la flecha cero de A en B como $0 : A \to B = (0 : 0 \to B) \circ (0 : A \to 0)$.

Definición 2.1.8. Sean $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ dos categorías. Diremos que $\boldsymbol{B}$ es subcategoría de $\boldsymbol{C}$, lo cual denotaremos $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}$, si $Ob(\boldsymbol{B}) \subset Ob(\boldsymbol{C})$ y para cada par de objetos $A, B \in Ob(\boldsymbol{B})$ se cumple que $Hom_{\boldsymbol{B}}(A, B) \subset Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$, además de que se respeta la misma composición de $\boldsymbol{C}$ en $\boldsymbol{B}$ y para cada $A \in \boldsymbol{B}$, $id_A \in Hom_{\boldsymbol{B}}(A, A)$.

Definición 2.1.9. Sea $\{\boldsymbol{A_i}\}_{i\in I}$ una colección de categorías. Definimos la categoría producto de esta colección, que denotaremos $\prod_{i\in I} \boldsymbol{A_i}$, de forma que sus objetos son los elementos de $\prod_{i\in I} Ob(\boldsymbol{A})$ y, para dos objetos $(A_i), (B_i) \in \prod_{i\in I} \boldsymbol{A_i}$

$$Hom_{\prod_{i\in I} \boldsymbol{A_i}}((A_i), (B_i)) = \prod_{i\in I} Hom_{\boldsymbol{A_i}}(A_i, B_i)$$

y su composición será entrada a entrada.

En el caso de dos categorías $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, su producto se denotará $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

Definición 2.1.10. Sean $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ dos categorías. Un funtor covariante $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ consiste de una funcional $F : Ob(\boldsymbol{C}) \to Ob(\boldsymbol{D})$ y, para cada par de objetos $A, B \in Ob(\boldsymbol{C})$, una función $F : Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B) \to Hom_{\boldsymbol{D}}(F(A), F(B))$, tales que $F(id_A) = id_{F(A)}$ y si $C \in Ob(\boldsymbol{C})$, $f \in Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\boldsymbol{C}}(B, C)$, entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Diremos que un funtor $F : \boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{D}$ es un funtor contravariante de $\boldsymbol{C}$ en $\boldsymbol{D}$.

También podemos componer funtores de manera natural y en la composición de funtores también se usará la notación $F \circ G$.

Notemos que para cada categoría $\boldsymbol{C}$, existe un funtor distinguido que es la identidad en $\boldsymbol{C}$, denotado $id_{\boldsymbol{C}} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, tal que tanto en objetos como en flechas las respectivas funcionales o funciones son las identidades.

Ejemplo 2.1.11. Otro ejemplo de funtor que será muy frecuente en los posteriores temas es el funtor $Hom_{\boldsymbol{C}}(A, -) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$, tal que para cada $B \in \boldsymbol{C}$, $Hom_{\boldsymbol{C}}(A, -)(B) = Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B)$ y para cada flecha $f : B \to C \in \boldsymbol{C}$, $Hom_{\boldsymbol{C}}(A, f) : Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B) \to Hom_{\boldsymbol{C}}(A, C)$ está dado por $Hom_{\boldsymbol{C}}(A, f)(g) = f \circ g$.

Para simplificar la notación, a $Hom_{\boldsymbol{C}}(A, f)$ lo denotaremos por f_* y, cuando no haya duda sobre la categoría en la que se esté trabajando, al funtor $Hom_{\boldsymbol{C}}(A, -)$ lo denotaremos por $[A, -]$.

Por otra parte, también tenemos el funtor $Hom_{\boldsymbol{C}}(-, A) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$, el cual se define de forma similar y que es un funtor contravariante, a $Hom_{\boldsymbol{C}}(f, A)$ lo denotaremos f^*. Notemos que si pensamos a este funtor como $Hom_{\boldsymbol{C}}(-, A) : \boldsymbol{C^{op}} \to \boldsymbol{Con}$, se vuelve un funtor covariante, el cual denotaremos h_A, de manera que $h_A(B) = \boldsymbol{C}(B, A)$.

Con todo lo visto, es natural considerar la categoría cuyos objetos son categorías pequeñas y cuyas flechas son funtores (esto para tener control sobre el tamaño de los conjuntos $Hom(A, B)$). A esta categoría la denotamos $\boldsymbol{Cat}$.

Definición 2.1.12. Sean $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ dos categorías y $F : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ un funtor. Diremos que:

1) F es fiel si para cualesquiera dos objetos $A, B \in \boldsymbol{B}$ se tiene que $F : Hom_{\boldsymbol{B}}(A, B) \to Hom_{\boldsymbol{C}}(F(A), F(B))$ es inyectiva.

2) F es pleno si para cualesquiera dos objetos $A, B \in \boldsymbol{B}$ se tiene que $F : Hom_{\boldsymbol{B}}(A, B) \to Hom_{\boldsymbol{C}}(F(A), F(B))$ es suprayectiva.

3) Diremos que F es un encaje si es inyectivo en objetos, fiel y pleno.

Definición 2.1.13. Sean $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ dos categorías y $F, G : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ dos funtores covariantes. Una transformación natural de F en G, $\eta : F \to G$, consiste de una familia de flechas $\{\eta_A\}_{A \in Ob(\boldsymbol{C})}$, donde cada $(\eta_A : F(A) \to G(A)) \in Hom_{\boldsymbol{D}}(F(A), G(A))$ y si $(f : A \to B) \in \boldsymbol{C}$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Diremos que η es un isomorfismo natural si cada η_A es un isomorfismo.

También, en caso de tener dos transformaciones naturales $\tau : F \to G$ y $\eta : G \to H$, podemos considerar la nueva transformación natural composición, $\eta \circ \tau : F \to H$, tal que $(\eta \circ \tau)_A = (\eta_A \circ \tau_A)$.

Notemos que para cada funtor $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$, existe una transformación natural distinguida que es la identidad $id_F : F \to F$, donde $(id_F)_A = id_{F(A)}$ $\forall A \in Ob(\boldsymbol{C})$.

Otro punto a notar es que en el caso de isomorfismos naturales, es lo mismo pedir que $\eta : F \to G$ sea isomorfismo natural a que exista una transformación natural $\tau : G \to F$, tal que $\eta \circ \tau = id_G$ y $\tau \circ \eta = id_F$.

Definición 2.1.14. Sean $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ dos categorías y $F, G : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ dos funtores covariantes. Diremos que F y G son isomorfos, lo cual denotaremos por $F \cong G$, si existe un isomorfismo natural entre ellos.

Así, si tenemos dos categorías $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ con $\boldsymbol{C}$ pequeña, podemos considerar la categoría cuyos objetos son funtores de $\boldsymbol{C}$ en $\boldsymbol{D}$ y cuyas flechas son las transformaciones naturales. A esta categoría se le denotará $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{C}}$.

Ahora veremos algunas relaciones importantes entre categorías, como lo son la relación de “ser equivalente a” o “ser isomorfa a”.

Definición 2.1.15. Sean $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ dos categorías. Diremos que $\boldsymbol{B}$ es isomorfa a $\boldsymbol{C}$, lo cual denotaremos por $\boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{C}$, si existen funtores $F : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ y $G : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$, tales que $F \circ G = id_{\boldsymbol{C}}$ y $G \circ F = id_{\boldsymbol{B}}$, en este caso, F es un isomorfismo entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$.

Definición 2.1.16. Sean $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ dos categorías. Diremos que $\boldsymbol{B}$ es equivalente a $\boldsymbol{C}$, lo cual denotaremos por $\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{C}$, si existen funtores $F : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ y $G : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$, tales que $F \circ G \cong id_{\boldsymbol{C}}$ y $G \circ F \cong id_{\boldsymbol{B}}$. En este caso diremos que F es una equivalencia de categorías entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$.

Ejemplo 2.1.17. Consideremos la subcategoría plena de $\boldsymbol{Con}$, $\boldsymbol{Con_n}$, que consiste de todos los conjuntos de tamaño n, tomemos a A un conjunto de tamaño n distinguido y llamemos $\boldsymbol{A}$ a la subcategoría plena de $\boldsymbol{Con}$ cuyo único objeto es A. Es fácil ver que la inclusión de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{Con_n}$ resulta ser una equivalencia de categorías (usando axioma de elección en clases), sin embargo no es un isomorfismo de categorías.

Con la siguiente proposición vemos cuales son los requerimientos necesarios y suficientes para que un funtor F sea una equivalencia de categorías.

Proposición 2.1.18. *Sean $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ dos categorías y $F : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ un funtor. F es una equivalencia de categorías si y solo si F es un funtor fiel, pleno y esencialmente suprayectivo en objetos (i.e, $\forall C \in \boldsymbol{C}$ existe $B \in \boldsymbol{B}$ tal que $F(B) \cong C$.).*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $G : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$ tal que $F \circ G \cong id_{\boldsymbol{C}}$ por medio de una transformación τ y $G \circ F \cong id_{\boldsymbol{B}}$ por medio de una transformación η. Sean $A, B \in \boldsymbol{B}$ y $f, g \in Hom_{\boldsymbol{B}}(A, B)$ tales que $F(f) = F(g)$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "GF(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ GF(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & B \end{tikzcd}$$

entonces $f = \eta_B \circ GF(f) \circ \eta_A^{-1} = \eta_B \circ GF(g) \circ \eta_A^{-1} = g$, por lo tanto F es fiel y análogamente G también es fiel.

Por otro lado, tenemos que dado $h \in Hom_{\boldsymbol{C}}(F(A), F(B))$, si ponemos $f = \eta_B \circ G(h) \circ \eta_A^{-1}$, se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "G(h)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ GF(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "G(F(f))"'] & A \arrow[d, "f"] \\ GF(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Por la fidelidad de G se tiene que $h = F(f)$, por lo tanto F es pleno. Por otra parte es claro que es esencialmente suprayectivo en objetos, pues dado $C \in \boldsymbol{C}$, $FG(C) \cong C$ por medio de τ_C.

$\Leftarrow$] Supongamos que F es fiel, pleno y esencialmente suprayectivo en objetos. Construimos un funtor $G : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{B}$ (usando el axioma de elección en clases) de la siguiente forma: como F es esencialmente suprayectivo en objetos, para cada $C \in \boldsymbol{C}$ elegimos $G(C) \in \boldsymbol{B}$ junto con un isomorfismo $\tau_C : F(G(C)) \to C$ y, dado $h \in Hom_{\boldsymbol{C}}(C, C')$, $G(h)$ es el único morfismo de $G(C)$ en $G(C')$ tal que bajo F da $(\tau_{C'})^{-1} \circ h \circ \tau_C$. Veamos que G es un funtor, si tenemos flechas $h : C_1 \to C_2, g : C_2 \to C_3 \in \boldsymbol{C}$, se dan las siguiente igualdades:

$$F(G(g)) \circ F(G(h)) = (\tau_{C_3})^{-1} \circ g \circ \tau_{C_2} \circ (\tau_{C_2})^{-1} \circ h \circ \tau_{C_1} = (\tau_{C_3})^{-1} \circ (g \circ h) \circ \tau_{C_1}$$

por lo tanto $G(g) \circ G(h) = G(g \circ h)$ y claramente G respeta identidades. Veamos que $GF \cong id_{\boldsymbol{B}}$ y $FG \cong id_{\boldsymbol{C}}$. Por construcción, para cada par de objetos $C, C' \in \boldsymbol{C}$ tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} FG(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "FG(h)"'] & C \arrow[d, "h"] \\ FG(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & C' \end{tikzcd}$$

Entonces $\tau = (\tau_C)_{C \in \boldsymbol{C}}$ resulta ser una transformación natural y hace a FG isomorfo a $id_{\boldsymbol{C}}$. Por otro lado, dado $A \in \boldsymbol{B}$, definimos η_A como la única flecha de $GF(A)$ en A que bajo F va a dar a $\tau_{F(A)}$. Con esta información y usando la fidelidad de F es claro que para $f : A \to B \in \boldsymbol{B}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "GF(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ GF(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Por la fidelidad plena de F, cada η_A es isomorfismo y por lo tanto la transformación natural $\eta = (\eta_A)_{A \in \boldsymbol{B}}$ hace a GF isomorfo a $id_{\boldsymbol{B}}$. Por lo tanto F es una equivalencia de categorías.

$\square$

2.1.2. Lema de Yoneda.

En esta sección se da una manera de ver a una categoría $\boldsymbol{C}$ como cierta subcategoría en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, lo cual resulta muy útil en ocasiones al estudiar la categoría de pregavillas $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$.

Definición 2.1.19. Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría, el funtor $h_{(-)} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, definido en objetos como $h_{(-)}(C) = h_C$ (este funtor se vio en el ejemplo 2.1.11) y en flechas $g : C \to C'$, como $h_{(-)}(g) = h_g : h_C \to h_{C'}$ cuyas componentes son la composición con g a la izquierda, se llama funtor de Yoneda y también suele denotarse por Y.

Lema 2.1.20. *El funtor de Yoneda es un encaje.*

Demostración. Es fácil ver que Y es inyectivo en objetos, pues para cada objeto C, $h_C(C)$ es el único valor de h_C que tiene a id_C, por otro lado, que sea fiel y pleno se sigue de la siguiente proposición. $\square$

Proposición 2.1.21. *(Lema de Yoneda) Para cada objeto $F \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ y cada objeto $C \in \boldsymbol{C}$, hay una biyección $f_{C,F} : \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(h_C, F) \to F(C)$. Más aún, esta biyección es natural en C y F en el siguiente sentido: dadas $(g : C' \to C) \in \boldsymbol{C}$ y $(\mu : F \to F') \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(h_C, F) \arrow[r, "f_{C,F}"] \arrow[d, "\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(h_g,\mu)"'] & F(C) \arrow[d, "\mu_{C'}F(g)=F'(g)\mu_C"] \\
\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(h_{C'}, F') \arrow[r, "f_{C',F'}"'] & F'(C')
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $C \in \boldsymbol{C}$. Para cada $C' \in \boldsymbol{C}$ y $f \in h_C(C') = \boldsymbol{C}(C', C)$ se tiene que $f = id_C(f) = h_C(f)(id_C)$. Si $\kappa : h_C \to F$ es una transformación natural, entonces $\kappa_{C'}(f) = \kappa_{C'}(h_C(f)(id_C))$ debe ser igual a $F(f)(\kappa_C(id_C))$, de esta manera, κ está completamente determinada por $\kappa_C(id_C) \in F(C)$ y recíprocamente, cada elemento a de $F(C)$ determina una transformación natural $a : h_C \to F$, donde $a_{C'}(f) = F(f)(a)$.

Dadas $(g : C' \to C) \in \boldsymbol{C}$ y $(\mu : F \to F') \in \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, la función $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}(h_g, \mu)$ envía la transformación natural $\kappa : h_C \to F$ a la transformación natural $\lambda : h_{C'} \to F'$, donde $\lambda_{C''} : h_{C'}(C'') \to F'(C'')$ esta definida como $\lambda_{C''}(h : C'' \to C') = \mu_{C''}(\kappa_{C''}(gh))$, veamos la naturalidad requerida:

$$f_{C',F'}(\lambda) = \lambda_{C'}(id_{C'}) = \mu_{C'}(\kappa_{C'}(g)) = \mu_{C'}(F(g)(\kappa_C(id_C)) = \mu_{C'}F(g)(f_{C,F}(\kappa))$$

□

2.1.3. Bifuntores.

Dedicamos este capítulo a dar una caracterización de un tipo muy particular de funtores, los cuales nos serán de gran utilidad para el tema de adjunciones.

Definición 2.1.22. Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ categorías y $F : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ un funtor, llamaremos a F bifuntor.

Observación 2.1.23. Dado $F : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ un bifuntor, todo objeto $A \in \boldsymbol{A}$ define un funtor $F(A, -) : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$, mediante $F(A, -)(B) = F(A, B)$ en objetos y $F(A, -)(g) = (id_A, g)$ en flechas, análogamente todo objeto $B \in \boldsymbol{B}$ define un funtor $F(-, B) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$.

Lema 2.1.24. *Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ categorías, $F_o : Ob(\boldsymbol{A}) \times Ob(\boldsymbol{B}) \to Ob(\boldsymbol{C})$ una funcional y para cada par de objetos $(A, B), (A', B') \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, una función*

$$F_{(A,B)(A',B')} : Hom_{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}((A, B), (A', B')) \to Hom_{\boldsymbol{C}}(F_o(A, B), F_o(A', B'))$$

entonces F_o y $F_{(A,B)(A',B')}$ determinan un funtor $F : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ si y solo si:

1) F es funtorial en cada variable, ie. en $F(A, -)$ y $F(-, B)$.

2) Para cada par de flechas $(f : A \to A') \in \boldsymbol{A}$ y $(g : B \to B') \in \boldsymbol{B}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F(A,B) \arrow[r, "F(A,g)"] \arrow[d, "F(f,B)"'] \arrow[dr, "F(f,g)"] & F(A,B') \arrow[d, "F(f,B')"] \\
F(A',B) \arrow[r, "F(A',g)"'] & F(A',B')
\end{tikzcd}$$

Demostración. $\Rightarrow$] Se sigue de forma inmediata.

$\Leftarrow$] Dado $(A,B) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, $F(id_{(A,B)}) = F(id_A, id_B) = F(id_A, B) = id_{F(A,B)}$ pues $F(-,B)$ es un funtor. Consideremos

$$(A,B) \xrightarrow{(f,g)} (A',B') \xrightarrow{(f',g')} (A'',B'') \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

Del segundo inciso obtenemos los siguientes dos diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
F(A,B) \arrow[d, "F(f,B)"'] \arrow[dr, "F(f,g)"] & & \\
F(A',B) \arrow[r, "F(A',g)"] \arrow[d, "F(f',B)"'] & F(A',B') \arrow[d, "F(f',B')"'] \arrow[dr, "F(f',g')"] & \\
F(A'',B) \arrow[r, "F(A'',g)"] & F(A'',B') \arrow[r, "F(A'',g')"] & F(A'',B'')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(A,B) \arrow[r, "F(A,g'\circ g)"] \arrow[d, "F(f'\circ f,B)"'] \arrow[dr, "F(f'\circ f,g'\circ g)"] & F(A,B'') \arrow[d, "F(f'\circ f,B'')"] \\
F(A'',B) \arrow[r, "F(A'',g'\circ g)"'] & F(A'',B'')
\end{tikzcd}$$

Del primer diagrama obtenemos:

$$F(A'', g' \circ g) \circ F(f' \circ f, B) = F(A'', g') \circ F(A'', g) \circ F(f', B) \circ F(f, B) =$$

$$F(f', g') \circ F(f, g)$$

luego por el segundo diagrama obtenemos:

$$F(A'', g' \circ g) \circ F(f' \circ f, B) = F(f' \circ f, g' \circ g)$$

por lo tanto F es funtor. $\square$

2.1.4. Adjunciones.

Definición 2.1.25. Sean $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ categorías y F, G funtores como en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \boldsymbol{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

Diremos que F es adjunto izquierdo de G o que G es adjunto derecho de F, si existe un isomorfismo natural τ como en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C}^{op} \times \boldsymbol{D} \arrow[r, bend left, "Hom_{\boldsymbol{C}}(-{,}G(-))"] \arrow[r, bend right, "Hom_{\boldsymbol{D}}(F(-){,}-)"'] \arrow[r, phantom, "\cong\Downarrow\tau"] & \boldsymbol{Con} \end{tikzcd}$$

En este caso, diremos que (F, G) es un par adjunto.

Por el lema 2.1.24 las asignaciones $Hom_{\boldsymbol{C}}(-, G(-))$ y $Hom_{\boldsymbol{D}}(F(-), -)$ definidas de forma natural son funtores. Para probar la existencia de tal isomorfismo natural basta probar la existencia de biyecciones $\tau_{A,B} : Hom_{\boldsymbol{C}}(A, G(B)) \to Hom_{\boldsymbol{D}}(F(A), B)$ para cada par de objetos $A, B \in \boldsymbol{C}$, de manera que sean naturales en cada variable, pues si tenemos flechas $f : A \to A' \in \boldsymbol{C}$ y $g : B \to B' \in \boldsymbol{D}$ tendremos los cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\boldsymbol{C}}(A, G(B)) \arrow[r, "\tau_{A,B}"] \arrow[d, "G(g)_*"'] & Hom_{\boldsymbol{D}}(F(A), B) \arrow[d, "g_*"] \\ Hom_{\boldsymbol{C}}(A, G(B')) \arrow[r, "\tau_{A,B'}"] \arrow[d, "f^*"'] & Hom_{\boldsymbol{D}}(F(A), B') \arrow[d, "F(f)^*"] \\ Hom_{\boldsymbol{C}}(A', G(B')) \arrow[r, "\tau_{A',B'}"] & Hom_{\boldsymbol{D}}(F(A'), B') \end{tikzcd}$$

obteniendo finalmente el cuadrado conmutativo deseado para la naturalidad de τ.

El siguiente teorema es una importante caracterización de adjunciones.

Teorema 2.1.26. *Bajo la misma notación de la definición anterior, son equivalentes:*

1) (F, G) *es un par adjunto.*

2) Existen transformaciones naturales $\epsilon : FG \to id_{\boldsymbol{D}}$ *y* $\eta : id_{\boldsymbol{C}} \to GF$*, tales que los siguientes diagramas (llamados identidades triangulares) conmutan:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "id_F"'] & FGF \arrow[d, "\epsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "id_G"'] & GFG \arrow[d, "G\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\tau : Hom_{\boldsymbol{C}}(-, G(-)) \to Hom_{\boldsymbol{D}}(F(-), -)$ un isomorfismo natural y sea $D \in \boldsymbol{D}$.

Entonces $\tau_{G(D),D} : Hom_{\boldsymbol{C}}(G(D), G(D)) \to Hom_{\boldsymbol{D}}(F(G(D)), D)$; definimos ϵ_D como $\tau_{G(D),D}(id_{G(D)})$. Veamos que ϵ define una transformación natural, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "g"'] & FG(D) \arrow[r, "\epsilon_D"] \arrow[d, "FG(g)"'] & D \arrow[d, "g"] \\
D' & FG(D') \arrow[r, "\epsilon_{D'}"'] & D'
\end{tikzcd}$$

La naturalidad del isomorfismo $\tau_{G(D),-} : Hom_{\boldsymbol{C}}(G(D), G(-)) \to Hom_{\boldsymbol{D}}(F(G(D)), -)$ nos da la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "g"'] & Hom_{\boldsymbol{C}}(G(D), G(D)) \arrow[r, "\tau_{G(D),D}"] \arrow[d, "G(g)_*"'] & Hom_{\boldsymbol{D}}(F(G(D)), D) \arrow[d, "g_*"] \\
D' & Hom_{\boldsymbol{C}}(G(D), G(D')) \arrow[r, "\tau_{G(D),D'}"'] & Hom_{\boldsymbol{D}}(F(G(D)), D')
\end{tikzcd}$$

Evaluando en $id_{G(D)}$ la conmutatividad del diagrama nos da

$$\tau_{G(D),D'}(G(g)) = g\tau_{G(D),D}(id_{G(D)})$$

La naturalidad del isomorfismo $\tau_{G(-),D'} : Hom_{\boldsymbol{C}}(G(-), G(D')) \to Hom_{\boldsymbol{D}}(F(G(-)), D')$ nos da la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G(D) \arrow[d, "G(g)"'] & Hom_{\boldsymbol{C}}(G(D'), G(D')) \arrow[r, "\tau_{G(D'),D'}"] \arrow[d, "G(g)^*"'] & Hom_{\boldsymbol{D}}(F(G(D')), D') \arrow[d, "FG(g)^*"] \\
G(D') & Hom_{\boldsymbol{C}}(G(D), G(D')) \arrow[r, "\tau_{G(D),D'}"'] & Hom_{\boldsymbol{D}}(F(G(D)), D')
\end{tikzcd}$$

Evaluando en $id_{G(D')}$, la conmutatividad del diagrama nos da

$$\tau_{G(D),D'}(G(g)) = \tau_{G(D'),D'}(id_{G(D')})FG(g)$$

Combinando ambas igualdades obtenemos

$$\tau_{G(D'),D'}(id_{G(D')})FG(g) = g\tau_{G(D),D}(id_{G(D)})$$

i.e. la conmutatividad del primer diagrama.
Sea $C \in \boldsymbol{C}$ y consideremos $\tau^{-1}_{C,F(C)} : Hom_{\boldsymbol{D}}(F(C), F(C)) \to Hom_{\boldsymbol{C}}(C, GF(C))$; definimos η_C como $\tau^{-1}_{C,F(C)}(id_{F(C)})$. La demostración de que η es natural es análoga a la demostración de que ϵ lo es.

Verifiquemos la primer identidad triangular, pues la segunda es de forma análoga.

Sea $C \in \boldsymbol{C}$, queremos verificar que $\epsilon_{F(C)} \circ F\eta_C = id_{F(C)}$, i.e.

$$\tau_{GF(C),FC}(id_{GF(C)}) \circ F(\tau^{-1}_{C,F(C)}(id_{F(C)}) = id_{F(C)}$$

Pero esa igualdad sale directo de la conmutatividad del siguiente diagrama evaluando en $id_{GF(C)}$:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "\tau^{-1}_{C,F(C)}(id_{F(C)})"'] & Hom_{\boldsymbol{C}}(GF(C), GF(C)) \arrow[r, "\tau_{GF(C),F(C)}"] \arrow[d, "\tau^{-1}_{C,F(C)}(id_{F(C)})^*"'] & Hom_{\boldsymbol{D}}(FGF(C)), F(C)) \arrow[d, "F(\tau^{-1}_{C,F(C)}(id_{F(C)}))^*"'] \\
GF(C) & Hom_{\boldsymbol{C}}(C, GF(C)) \arrow[r, "\tau_{C,F(C)}"'] & Hom_{\boldsymbol{D}}(F(C), F(C))
\end{tikzcd}$$

2) $\Rightarrow$ 1) Definamos una transformación natural $\tau : Hom_{\boldsymbol{C}}(-, G(-)) \to Hom_{\boldsymbol{D}}(F(-), -)$. Dada $q : A \to G(B)$, definimos $\tau_{A,B}(q)$ como $\epsilon_B \circ F(q)$. Verifiquemos que es una transformación natural, i.e. que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[d, "f"'] & B_1 \arrow[d, "g"'] & Hom_{\boldsymbol{C}}(A_1, G(B_1)) \arrow[r, "\tau_{A_1,B_1}"] \arrow[d, "f^* \circ G(g)_*"'] & Hom_{\boldsymbol{D}}(F(A_1), B_1) \arrow[d, "F(f)^* \circ g_*"] \\
A_1 & B_2 & Hom_{\boldsymbol{C}}(A_2, G(B_2)) \arrow[r, "\tau_{A_2,B_2}"'] & Hom_{\boldsymbol{D}}(F(A_2), B_2)
\end{tikzcd}$$

Sea $h : A_1 \to G(B_1)$. Entonces recorriendo el diagrama en sentido antihorario se tiene:

$$\tau_{A_2,B_2} \circ f^* \circ G(g)_*(h) = \tau_{A_2,B_2}(G(g) \circ h \circ f) = \epsilon_{B_2} \circ F(G(g) \circ h \circ f) =$$

$$\epsilon_{B_2} \circ FG(g) \circ F(h) \circ F(f)$$

Recorriendo el diagrama en sentido horario se tiene:

$$F(f)^* \circ g_* \circ \tau_{A_1,B_1}(h) = F(f)^* \circ g_*(\epsilon_{B_1} \circ F(h)) = g \circ \epsilon_{B_1} \circ F(h) \circ F(f)$$

La naturalidad de ϵ nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[d, "g"'] & FG(B_1) \arrow[r, "\epsilon_{B_1}"] \arrow[d, "FG(g)"'] & B_1 \arrow[d, "g"] \\
B_2 & FG(B_2) \arrow[r, "\epsilon_{B_2}"'] & B_2
\end{tikzcd}$$

De donde se deduce la conmutatividad del diagrama requerido.

Ahora definamos una transformación natural:

$$\nu : Hom_{\boldsymbol{D}}(F(-), -) \to Hom_{\boldsymbol{C}}(-, G(-))$$

Dada $p : F(A) \to B$, definimos $\nu_{A,B}(p)$ como $G(p) \circ \eta_A$. La naturalidad de ν sale de la naturalidad de η análogamente a la naturalidad de τ. Verifiquemos que $\nu\tau = id_{Hom_{\boldsymbol{C}}(-,G(-))}$. Sea

$q : A \to G(B)$:

$$\begin{aligned}
\nu_{A,B}\tau_{A,B}(q) &= \nu_{A,B}(\epsilon_B \circ F(q)) \\
&= G(\epsilon_B \circ F(q)) \circ \eta_A \\
&= G(\epsilon_B) \circ GF(q) \circ \eta_A \\
&= G(\epsilon_B) \circ \eta_{G(B)} \circ q && \text{Esto es por la naturalidad de } \eta. \\
&= id_{G(B)} \circ q && \text{Segunda identidad triangular.} \\
&= q
\end{aligned}$$

Análogamente se verifica que $\tau\nu = id_{Hom_{\boldsymbol{D}}(F(-),-)}$. Por lo tanto τ es el isomorfismo natural buscado.

$\square$

Observación 2.1.27. Vale la pena destacar de la prueba la manera en que se construyen ϵ y η a partir de una adjunción (F, G, τ):

$$\epsilon_D = \tau_{G(D),D}(id_D) \quad \text{y} \quad \eta_C = \tau^{-1}_{C,F(C)}(id_{F(C)})$$

Observación 2.1.28. También vale la pena destacar como se construye τ y τ^{-1} a partir de ϵ y η. Dadas $(q : A \to G(B)) \in \boldsymbol{C}$ y $(p : F(A') \to B') \in \boldsymbol{D}$:

$$\tau_{A,B}(q) = \epsilon_B \circ F(q) \quad \text{y} \quad \tau^{-1}_{A',B'}(p) = G(p) \circ \eta_{A'}$$

Definición 2.1.29. Sea (F, G, τ) una adjunción. Las transformaciones naturales η y ϵ se llaman unidad y counidad de la adjunción (F, G, τ) respectivamente.

2.1.5. Límites y Colímites.

Definición 2.1.30. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría e $\boldsymbol{I}$ una categoría pequeña. Un diagrama de tipo $\boldsymbol{I}$ en $\boldsymbol{C}$ es un funtor $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}$. Usaremos la notación $D_I = D(I)$. Diremos que el diagrama es conmutativo si para cualesquiera dos flechas con mismo dominio y mismo codominio, α y β, se tiene que $D(\alpha) = D(\beta)$. Diremos que el diagrama es discreto si la categoría $\boldsymbol{I}$ es discreta.

Definición 2.1.31. Sea $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}$ un diagrama. Un cono para el diagrama D es un par $(C, (\lambda_I)_{I \in \boldsymbol{I}})$, donde $C \in \boldsymbol{C}$ y $\lambda_I : C \to D_I$ $\forall I \in \boldsymbol{I}$, tal que el siguiente diagrama conmuta para toda flecha $\alpha : I \to J$ de $\boldsymbol{I}$:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\lambda_I"'] \arrow[dr, "\lambda_J"] & \\
D_I \arrow[rr, "D(\alpha)"'] & & D_J
\end{tikzcd}$$

Usualmente nos referiremos a un cono así por (C, λ_I). El objeto C es llamado el vértice del cono.

Definición 2.1.32. Sean (C, λ_I) y (C', μ_I) dos conos para el diagrama D. Un morfismo de conos $f : (C', \mu_I) \to (C, \lambda_I)$ es una flecha $f : C' \to C$ que hace conmutar el siguiente diagrama para toda $I \in \boldsymbol{I}$:

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mu_I"'] & & C \arrow[dl, "\lambda_I"] \\
& D_I &
\end{tikzcd}$$

Así, dado un diagrama D, los conos sobre D junto con los morfismos de conos conforman una categoría llamada la categoría de conos.

Definición 2.1.33. Un límite para un diagrama D es un objeto final en la categoría de conos sobre D.

Notemos que por la Observación 2.1.6, dos límites para un diagrama D son isomorfos y, por lo tanto no hay ambigüedad al hablar de "el límite". Podemos escribir entonces el límite de D, si es que existe, como $(\varprojlim D, \lambda_I)$.

Definición 2.1.34. Sea $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}$ un diagrama. Un cocono para el diagrama D es un par $(C, (\lambda_I)_{I \in \boldsymbol{I}})$, donde $C \in \boldsymbol{C}$ y $\lambda_I : D_I \to C$ $\forall I \in \boldsymbol{I}$, tal que el siguiente diagrama conmuta para toda flecha $\alpha : I \to J$ de $\boldsymbol{I}$:

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
D_I \arrow[ur, "\lambda_I"] \arrow[rr, "D(\alpha)"'] & & D_J \arrow[ul, "\lambda_J"']
\end{tikzcd}$$

Usualmente nos referiremos a un cocono así por (C, λ_I). El objeto C es llamado el vértice del cocono.

Definición 2.1.35. Sean (C, λ_I) y (C', μ_I) dos coconos para el diagrama D. Un morfismo de coconos $f : (C', \mu_I) \to (C, \lambda_I)$ es una flecha $f : C' \to C$ que hace conmutar el siguiente diagrama para toda $I \in \boldsymbol{I}$:

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[rr, "f"] & & C \\
& D_I \arrow[ul, "\mu_I"] \arrow[ur, "\lambda_I"'] &
\end{tikzcd}$$

Así, dado un diagrama D, los coconos sobre D junto con los morfismos de coconos conforman una categoría llamada la categoría de coconos.

Definición 2.1.36. Un colímite para un diagrama D es un objeto inicial en la categoría de coconos sobre D.

Notemos que por la Observación 2.1.6, dos colímites para un diagrama D son isomorfos y por lo tanto no hay ambigüedad al hablar de "el colímite". Podemos escribir entonces el colímite de D, si es que existe, como $(\varinjlim D, \lambda_I)$.

2.1.6. Ejemplos de límites y colímites.

En esta sección veremos como las definiciones de límite y colímite nos permiten ver de una forma más elegante cierta clase de objetos muy utilizados. También daremos una caracterización de cualquier límite usando límites muy concretos.

Definición 2.1.37. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría y $\{A_I\}_{I\in \boldsymbol{I}}$ una colección de objetos en $\boldsymbol{C}$. Diremos que un objeto P junto con una familia de flechas $\{p_I : P \to A_I\}$ es un producto de esta colección de objetos si es un límite para el diagrama discreto formado por esta colección. A P se le suele denotar $\prod_{I\in \boldsymbol{I}} A_I$ y a las flechas p_I se les suele llamar proyecciones.

Así mismo, diremos que un objeto C junto con una familia de flechas $\{i_I : A_I \to C\}$ es un coproducto o suma de esta colección de objetos si es un colímite para el diagrama discreto formado por esta colección. A C se le suele denotar $\coprod_{I\in \boldsymbol{I}} A_I$ o $\sum_{I\in \boldsymbol{I}} A_I$ y a las flechas i_I se les suele llamar coproyecciones o inclusiones.

Definición 2.1.38. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría y $(f : A \to C), (g : B \to C) \in \boldsymbol{C}$ dos flechas. Un producto fibrado para estas flechas es un límite para el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

y se suele denotar $A \times_C B$.

Definición 2.1.39. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría y $(f : A \to B), (g : A \to C) \in \boldsymbol{C}$ dos flechas. Una suma cofibrada o suma amalgamada para estas flechas es un colímite para el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

y se suele denotar $A +_C B$.

Definición 2.1.40. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría y $(f : A \to B), (g : A \to B) \in \boldsymbol{C}$ dos flechas. Un igualador para f y g es un límite para el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Así mismo, un coigualador para f y g es un colímite para el mismo diagrama.

Definición 2.1.41. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría con objeto cero y $(f : A \to B) \in \boldsymbol{C}$. Diremos que una flecha $(i : K \to A) \in \boldsymbol{C}$ es un núcleo para f si es un igualador para el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \end{tikzcd}$$

Así mismo, diremos que $(p : B \to C) \in \boldsymbol{C}$ es un conúcleo para f si es un coigualador para el mismo diagrama.

Ahora veremos que en una categoría basta que existan ciertos límites para que tenga todos los límites.

Teorema 2.1.42. *Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría. $\boldsymbol{C}$ tiene todos los límites si y solo si $\boldsymbol{C}$ tiene todos los productos e igualadores.*

Demostración. La ida es trivial, así que probaremos el regreso. Consideremos un diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}$, como tenemos todos los productos e igualadores, tenemos el siguiente diagrama para cada flecha v en $\boldsymbol{I}$:

$$\begin{tikzcd}
D(cod(v)) & D(I) & \\
\prod_{u:J\to K} D(K) = \prod_{u} D(cod(u)) \arrow[u, "\pi_v"] \arrow[d, "\pi_v"'] & \prod_I D(I) \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[ul, "p_{cod(v)}"'] \arrow[u, "p_I"] \arrow[d, "p_{dom(v)}"] & d \arrow[l, "e"'] \arrow[ul, "\mu_I"'] \\
D(cod(v)) & D(dom(v)) \arrow[l, "D(v)"] &
\end{tikzcd}$$

donde f es la única flecha que hace conmutar el triángulo superior izquierdo para toda v, g es la única flecha que hace conmutar el cuadro de abajo para toda v, e es un igualador de f y g, y $\mu_I = p_I \circ e$. De este diagrama podemos deducir lo siguiente:

$$\mu_{cod(v)} = p_{cod(v)} \circ e = \pi_v \circ f \circ e = \pi_v \circ g \circ e = D(v) \circ p_{dom(v)} \circ e = D(v) \circ \mu_{dom(v)}$$

como v es arbitraria (d, μ_I) resulta ser un cono para D. Si nos tomamos (d', μ'_I) otro cono de D, existe un único morfismo $e' : d' \to \prod_{I \in \boldsymbol{I}} D(I)$ que factoriza a cada μ'_I por p_I. De nuestro diagrama obtenemos:

$$\pi_v \circ f \circ e' = p_{cod(v)} \circ e' = \mu'_{cod(v)} = D(v) \circ \mu'_{dom(v)} = D(v) \circ p_{dom(v)} \circ e' = \pi_v \circ g \circ e'$$

por la propiedad del producto se sigue que $f \circ e' = g \circ e'$ y por lo tanto (d, μ_I) es límite para D. □

Proposición 2.1.43. *Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría con productos fibrados y objeto final 1, entonces $\boldsymbol{C}$ tiene límites finitos.*

Demostración. Véase [5], página 20. □

Por último, consideramos una caracterización para límites en la categoría $\boldsymbol{Con}$ y una propiedad para el funtor $Hom(-,-) : \boldsymbol{C}^{op} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$.

Proposición 2.1.44. *Sea $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Con}$ un diagrama con $\boldsymbol{I}$ pequeña, entonces:*

$$\lim_{\overleftarrow{I}} D(I) = \left\{ (a_I)_I \in \prod_{I \in \boldsymbol{I}} D(I) \middle| \forall (u : I \to J) \in \boldsymbol{I}, F(u)(a_I) = a_J \right\}$$

junto con las proyecciones naturales.

Proposición 2.1.45. *El funtor $Hom(-,-)$ preserva límites en cada variable, i.e.:*

1) Para $A \in \boldsymbol{C}$ y para un diagrama D en $\boldsymbol{C}$:

$$Hom(A, \lim_{\leftarrow} D) \cong \lim_{\leftarrow} Hom(A, D(I))$$

2) Para $A \in \boldsymbol{C}$ y para un diagrama D en $\boldsymbol{C}$:

$$Hom(\lim_{\rightarrow} D, A) \cong \lim_{\leftarrow} Hom(D(I), A)$$

Demostración. Solo se probará el inciso 1), y el inciso 2) será análogo al 1) notando que los límites en $\boldsymbol{C}^{op}$ son los colímites en $\boldsymbol{C}$. Basta notar que por la propiedad universal del límite, se tiene una biyección entre $Hom(A, \lim_{\leftarrow} D)$ y los conos sobre el diagrama D con vértice A. Por la proposición anterior, esto no es más que $\lim_{\leftarrow} Hom(A, D(I))$. □

2.1.7. Funtores finales.

Definición 2.1.46. Decimos que una categoría no vacía $\boldsymbol{I}$ es conexa si dados objetos I y J, ellos pueden ser conectados por una sucesión finita de flechas sin restricción sobre la orientación de las flechas.

$$I \longrightarrow X_1 \leftarrow X_2 \rightarrow \cdots \leftarrow X_n \rightarrow J$$

Definición 2.1.47. Sean $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ categorías y $F : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{J}$, $G : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{J}$ funtores. Definimos la categoría coma de F y G, la cual denotamos $(F \downarrow G)$, como la categoría cuyos objetos son flechas $f : F(I) \to G(K) \in \boldsymbol{J}$ con $I \in \boldsymbol{I}$ y $K \in \boldsymbol{K}$ y, para cada par de objetos $f : F(I) \to G(K)$, $g : F(I') \to G(K') \in (F \downarrow G)$, los morfismos de $f : F(I) \to G(K)$ en $g : F(I') \to G(K')$ son parejas (h, k) tales que $h : I \to I' \in \boldsymbol{I}$, $k : K \to K' \in \boldsymbol{K}$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(I) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(K) \arrow[d, "G(k)"] \\ F(I') \arrow[r, "g"'] & G(K') \end{tikzcd}$$

Definición 2.1.48. Sea $\boldsymbol{I}$ una categoría e $I \in \boldsymbol{I}$. Definimos la categoría $\boldsymbol{I}/I$ como la categoría coma $(id_{\boldsymbol{I}} \downarrow \Delta_I)$, donde $\Delta_I : \boldsymbol{Pt} \to \boldsymbol{I}$ es el funtor que manda al único objeto de $\boldsymbol{Pt}$ (véase el ejemplo 5.1.7.) en I, en términos coloquiales, $\boldsymbol{I}/I$ es la categoría de flechas hacia I.
También definimos la categoría $I/\boldsymbol{I}$ como la categoría coma $(\Delta_I \downarrow id_{\boldsymbol{I}})$.

Si tenemos un funtor $L : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ e $I \in \boldsymbol{I}$ y no hay confusión, denotaremos por $I/\boldsymbol{J}$ a la categoría coma $(\Delta_I \downarrow L)$ y denotaremos por $\boldsymbol{J}/I$ a la categoría coma $(L \downarrow \Delta_I)$.

Definición 2.1.49. i) Un funtor $L : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ es final si para cada $I \in \boldsymbol{I}$ la categoría $I/\boldsymbol{J}$ es conexa.

ii) Un funtor $L : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ es cofinal si el funtor $L^{op} : \boldsymbol{J}^{op} \to \boldsymbol{I}^{op}$ es final, es decir, para cada $I \in \boldsymbol{I}$ la categoría $\boldsymbol{J}/I$ es conexa.

También diremos que $\boldsymbol{J}$ es (co)final a $\boldsymbol{I}$ por el funtor L o simplemente que $\boldsymbol{J}$ es (co)final a $\boldsymbol{I}$.

Teorema 2.1.50. *Si $L : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ es final y $F : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}$ es un funtor, entonces $\lim\limits_{\to J} FL$ existe si y solo si $\lim\limits_{\to I} F$ existe. Además, en caso de existir tales colímites, el morfismo inducido $h : \lim\limits_{\to J} FL \to \lim\limits_{\to I} F$ resulta ser un isomorfismo.*

Demostración. $\Rightarrow$] Consideremos el cocono $(X = \lim\limits_{\to \boldsymbol{J}} FL, \mu_J : FL(J) \to X)$ dado por la hipótesis. Para cada $I \in \boldsymbol{I}$, definimos la flecha $\tau_I : F(I) \to X$, eligiendo una flecha $u : I \to L(J)$ para alguna J y tomando $\tau_I = \mu_J \circ F(u)$. Como la categoría $I/\boldsymbol{J}$ es no vacía, tal J y tal u existen y como es conexa, τ_I no depende de la elección de u. Esto se puede visualizar en el siguiente diagrama conmutativo para el caso en el que la conexión es casi inmediata:

$$\begin{tikzcd}
 & FL(J) \arrow[d, "FL(v)"] \arrow[dr, "\mu_J"] & \\
F(I) \arrow[ur, "F(u)"] \arrow[r, "F(y)"] \arrow[dr, "F(u')"'] & FL(Y) \arrow[r, "\mu_Y"] & X \\
 & FL(J') \arrow[u, "FL(v')"'] \arrow[ur, "\mu_{J'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Más aún, por la misma conexidad de $I/\boldsymbol{J}$, (X, τ_I) ya es un cocono para F. Por otro lado, si tenemos (Y, λ_I) otro cocono para F, $(Y, \lambda_{L(J)})$ es un cocono para FL. Por la propiedad universal de X existe una única flecha $f : X \to Y$ tal que $f\mu = \lambda L$, entonces para $I \in \boldsymbol{I}$ y su respectiva J,

$$f \circ \tau_I = f \circ \mu_J \circ F(u) = \lambda_{L(J)} \circ F(u) = \lambda_I$$

Por lo tanto $\lim\limits_{\to \boldsymbol{I}} F$ existe y h es un isomorfismo.

$\Leftarrow$] Para nuestro cocono $(X = \lim\limits_{\to \boldsymbol{I}} F, \tau_I : F(I) \to X)$ notamos que si restringimos a la subcategoría $L(\boldsymbol{J})$, $(X, \tau_{L(J)} : FL(J) \to X)$ es un cocono para FL. Si $(Y, \lambda_J : FL(J) \to Y)$ es otro cocono para FL, entonces de forma análoga a la ida lo extendemos de forma única a un cono para F, $(Y, \lambda_I : F(I) \to Y)$. Por la propiedad universal de X existe un único morfismo $f : X \to Y$ que factoriza los coconos respectivos, entonces f también factoriza los coconos restringidos a $F(\boldsymbol{J})$. Es fácil ver que f debe ser única también restringida a $L(\boldsymbol{J})$. $\square$

Notemos que tenemos un resultado análogo cambiando final por cofinal y colímites por límites.

2.1.8. Categorías filtrantes y pro-objetos.

Definición 2.1.51. Decimos que una categoría no vacía $\boldsymbol{I}$ es seudofiltrante si satisface las siguientes condiciones:

S1) Todo diagrama del tipo:

$$\begin{tikzcd} & J \\ I \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & J' \end{tikzcd}$$

se puede completar a un diagrama no necesariamente conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dr] & \\ I \arrow[ur] \arrow[dr] & & K \\ & J' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

S2) Dados $I, J \in \boldsymbol{I}$ y flechas $u : I \to J, v : I \to J$, existen $K \in \boldsymbol{C}$ y $w : J \to K$, tales que $wu = wv$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & J \arrow[r, "w"] & K \end{tikzcd}$$

Definición 2.1.52. Decimos que una categoría no vacía $\boldsymbol{I}$ es filtrante si satisface las siguientes condiciones:

F1) Dados $I, J \in \boldsymbol{I}$, existen $K \in \boldsymbol{I}$ y flechas $I \to K, J \to K$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[dr] & \\ & K \\ J \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

i.e. de manera informal, dados objetos I y J, hay uno después de I y J.

F2) Dados $I, J \in \boldsymbol{I}$ y flechas $u : I \to J, v : I \to J$, existen $K \in \boldsymbol{C}$ y $w : J \to K$ tales que $wu = wv$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & J \arrow[r, "w"] & K \end{tikzcd}$$

i.e. de manera informal, dados dos objetos I y J y dos flechas de I a J, son iguales más lejos.

Decimos que $\boldsymbol{I}$ es cofiltrante si $\boldsymbol{I}^{op}$ es filtrante.

Proposición 2.1.53. *$\boldsymbol{I}$ es filtrante si y solo si $\boldsymbol{I}$ es seudofiltrante y conexa.*

Demostración. $\Rightarrow$] Si $\boldsymbol{I}$ es filtrante, entonces ya cumple S2) y es no vacía, además es inmediato que F1) implica S1).

$\Leftarrow$] Solo restaría ver que se cumple F1). Sean A, B objetos de $\boldsymbol{C}$, como $\boldsymbol{I}$ es conexa hay una sucesión finita de flechas:

$$A \rightarrow C_1 \leftarrow C_2 \rightarrow \cdots \leftarrow C_n \rightarrow B$$

Podemos ir reduciendo el diagrama usando S1) repetidas veces

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr] & & & & \\
& C_1 \arrow[dr] & & & \\
C_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & D_1 \arrow[dr] & & \\
& C_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & E_1 \arrow[dr] & \\
\cdots \arrow[ur] & & D_2 \arrow[ur] & & F_1
\end{tikzcd}$$

Obteniendo finalmente el diagrama buscado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr] & \\
& C \\
B \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Observación 2.1.54. Si $\boldsymbol{C}$ tiene coproductos finitos y coigualadores, entonces es filtrante.

Lema 2.1.55. *Sean $\boldsymbol{I}$ una categoría pequeña e $I_0 \in \boldsymbol{I}$, entonces $\varinjlim Hom_{\boldsymbol{I}}(I_0, -) \cong \{pt\}$.*

Demostración. Para $I \in \boldsymbol{I}$ y para $u : I_0 \to I$ basta fijarse en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \varinjlim Hom_{\boldsymbol{I}}(I_0, -) & \\
Hom_{\boldsymbol{I}}(I_0, I_0) \arrow[ur] \arrow[rr, "u_*"'] & & Hom_{\boldsymbol{I}}(I_0, I) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

De aquí deducimos que la imagen de u en el colímite es la imagen de id_{I_0} en el colímite. $\square$

Teorema 2.1.56. *Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría filtrante y $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$ un funtor. F tiene colímite y se puede construir de la siguiente manera, $\varinjlim F = \bigsqcup_{A \in \boldsymbol{C}} F(A)/\sim$, donde $(x, A) \sim (y, B)$ si y solo si existen flechas:*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] A \arrow[dr, "u"] & \\ & C \\ B \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

tales que $F(u)(x) = F(v)(y)$

Demostración. Es fácil ver que si $\sim$ es de equivalencia, entonces $\bigsqcup_{A \in \boldsymbol{C}} F(A)/\sim$ es un colímite para F y sin importar si $\boldsymbol{C}$ es filtrante, $\sim$ siempre va a satisfacer reflexividad y simetría, para la transitividad usamos que $\boldsymbol{C}$ es filtrante. $\square$

Lema 2.1.57. *Una categoría* $\boldsymbol{I}$ *es filtrante si y solo si para cualquier categoría finita* $\boldsymbol{J}$ *y cualquier funtor* $\varphi : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$*, existe* $I \in \boldsymbol{I}$ *tal que:*

$$\varprojlim_{J} Hom_{\boldsymbol{I}}(\varphi(J), I) \neq \varnothing$$

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $\boldsymbol{I}$ es filtrante y tomemos dicho funtor. Por un lado al ser $\boldsymbol{I}$ filtrante todo diagrama finito en $\boldsymbol{I}$ tiene un cocono, esto se deduce de los siguientes dos hechos:
1) $\boldsymbol{I}$ es no vació y cumple F1) si y solo si para toda colección finita de objetos en $\boldsymbol{I}$, hay uno después de todos.
2) $\boldsymbol{I}$ satisface F2) si y solo si toda colección finita de flechas entre dos objetos son iguales más lejos.
Así podemos encontrar un cocono para φ, digamos $(I, u_J : \varphi(J) \to I)$, como para toda $s : J \to K \in \boldsymbol{J}$ $\quad u_K \circ \varphi(s) = u_J$, entonces $Hom(\varphi(s), I)(u_K) = u_J$, por la definición de límite, el elemento $(u_J)_{J \in \boldsymbol{J}} \in \varprojlim Hom_{\boldsymbol{I}}(\varphi(J), I)$. Por lo tanto $\varprojlim Hom_{\boldsymbol{I}}(\varphi(J), I) \neq \varnothing$.

$\Leftarrow$] Para ver que $\boldsymbol{I}$ es no vacío, nos tomamos el diagrama vacío.

Para ver la propiedad F1), nos tomamos la categoría $\boldsymbol{Pt} \sqcup \boldsymbol{Pt}$ de dos objetos sin más flechas que las identidades y definimos el funtor $\varphi : \boldsymbol{Pt} \sqcup \boldsymbol{Pt} \to I$, donde φ mapea a los puntos en A y B, automáticamente obtenemos un cono para este diagrama.

Para ver la propiedad F2), nos tomamos la categoría $\boldsymbol{Par}$ y procedemos de forma similar. $\square$

Teorema 2.1.58. *Sea* $\boldsymbol{I}$ *una categoría pequeña. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $\boldsymbol{I}$ *es filtrante.*

b) Para cualquier categoría finita $\boldsymbol{J}$ *y cualquier funtor* $\alpha : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Con}$

$$\varinjlim_{I} \varprojlim_{J} \alpha(I, J) \cong \varprojlim_{J} \varinjlim_{I} \alpha(I, J)$$

por medio del morfismo canónico.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\boldsymbol{I}} \varprojlim_{\boldsymbol{J}} F(I,J) \arrow[dd, "\varphi"'] & \varprojlim_{\boldsymbol{J}} F(I_0,J) \arrow[l, "u_{I_0}"'] \arrow[d, "q_{J_0}"] \arrow[ddl, "\psi_{I_0}"'] \\
& F(I_0,J_0) \arrow[d, "v_{I_0}"] \\
\varprojlim_{\boldsymbol{J}} \varinjlim_{\boldsymbol{I}} F(I,J) \arrow[r, "p_{J_0}"] & \varinjlim_{\boldsymbol{I}} F(I,J_0)
\end{tikzcd}
$$

donde u_{I_0}, v_{I_0} son los encajes naturales obtenidos por $\varinjlim$; q_{J_0}, p_{J_0} son las proyecciones naturales obtenidas por $\varprojlim$ y ψ_{I_0}, φ son morfismos inducidos. Si uno revisa con detenimiento persiguiendo elementos en el diagrama, se puede concluir fácilmente que $\varphi([(x_{I_0,J})_J]) = ([x_{I_0,J}])_J$. Veamos que φ es una biyección.

φ es inyectiva: Supongamos que $([x_{I_0,J}])_J = ([x_{I_1,J}])_J$, entonces $[x_{I_0,J}] = [x_{I_1,J}], \forall J$, i.e, existen flechas $\alpha : I_0 \to I_2$, $\beta : I_1 \to I_2$ tales que $F(\alpha, id_J)(x_{I_0,J}) = F(\beta, id_J)(x_{I_1,J}), \forall J$, por lo tanto $\varinjlim_{\boldsymbol{J}} F(\alpha, J)(x_{I_0,J}) = \varinjlim_{\boldsymbol{J}} F(\beta, J)(x_{I_1,J})$, i.e, $[(x_{I_0,J})_J] = [(x_{I_1,J})_J]$.

φ es suprayectiva: Sea $([x_{I_J,J}])_j \in \varprojlim_{\boldsymbol{J}} \varinjlim_{\boldsymbol{I}} F(I,J)$, sabemos entonces que para cualquier flecha $(\alpha : J_1 \to J_2) \in \boldsymbol{J}$ $[F(id_{I_{J_1}}, \alpha)(x_{I_{J_1},J_1})] = [x_{I_{J_2},J_2}]$, lo cual se traduce a que para cada $\alpha : J_1 \to J_2$ existen flechas $u_\alpha : I_{J_1} \to I_\alpha, v_\alpha : I_{J_2} \to I_\alpha \in \boldsymbol{I}$ tales que

$$F(u_\alpha, id_{J_2})F(id_{I_{J_1}}, \alpha)(x_{I_{J_1},J_1}) = F(u_\alpha, \alpha)(x_{I_{J_1},J_1}) = F(v_\alpha, id_{J_2})x_{I_{J_2},J_2}$$

lo importante es que igualamos la componente I en ambos elementos para la flecha α, procedemos a hacer esto para cada flecha α y en cada paso igualamos más adelante en $\boldsymbol{I}$ con nuestra I del paso anterior, como $\boldsymbol{J}$ es finita esto se puede hacer sin problemas. Llamemos I_0 a nuestro ultimo objeto de $\boldsymbol{I}$ y $u_J : I_J \to I_0$ a la flecha encontrada en la construcción para cada J, entonces el elemento $((F(u_J, id_J)(x_{I_J,J}))_J \in \varinjlim_{\boldsymbol{J}} F(I_0, J)$ y por construcción cumple que $\varphi([((F(u_J, id_J)(x_{I_J,J}))_J]) = ([x_{I_J,J}])_J)$.

b) $\Rightarrow$ a) Sean $\boldsymbol{J}$ una categoría finita y $\varphi : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ un funtor. Por el lema 2.1.57 basta probar que existe $I \in \boldsymbol{I}$ tal que $\varprojlim_J Hom_{\boldsymbol{I}}(\varphi(J), I) \neq \varnothing$. Por b) sabemos que se da el siguiente isomorfismo:

$$\varinjlim_I \varprojlim_J Hom_{\boldsymbol{I}}(\varphi(J), I) \cong \varprojlim_J \varinjlim_I Hom_{\boldsymbol{I}}(\varphi(J), I)$$

Usando el lema 2.1.55 del lado derecho, obtenemos que este lado es isomorfo a $\{pt\}$, por lo tanto existe $I \in \boldsymbol{I}$, tal que $\varprojlim_J Hom_{\boldsymbol{I}}(\varphi(J), I) \neq \varnothing$. $\square$

Finalmente vemos un resultado para funtores finales, del cual sigue un resultado análogo para funtores cofinales.

Proposición 2.1.59. *Sea $L : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ un funtor con $\boldsymbol{I}$ filtrante. Si para cada $I \in \boldsymbol{I}$, existe $J \in \boldsymbol{J}$, tal que $Hom_{\boldsymbol{I}}(I, L(J)) \neq \varnothing$, entonces L es final.*

Demostración. Sea $I \in \boldsymbol{I}$. Como existe $J \in \boldsymbol{J}$ tal que $Hom_{\boldsymbol{I}}(I, L(J)) \neq \emptyset$, entonces la categoría $I/\boldsymbol{J}$ es no vacía. Por otro lado, si tenemos $J, J' \in \boldsymbol{J}$ y flechas $u : I \to L(J)$, $v : I \to L(J')$, existen $K \in \boldsymbol{I}$ y flechas $u_1 : L(J) \to K$, $u_2 : L(J') \to K$, luego existen $K' \in \boldsymbol{I}$ y una flecha $s : K \to K'$, tales que $s \circ u_1 \circ u = s \circ v_1 \circ v$, de nuevo existen $J'' \in \boldsymbol{J}$ y una flecha $t : K'' \to L(J'')$, esto ya nos dice que $I/\boldsymbol{J}$ es conexa. Por lo tanto L es final. □

Dada una categoría $\boldsymbol{C}$, ésta la podemos ver como subcategoría plena de $\boldsymbol{C}^{\wedge} = \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ ("pregavillas sobre $\boldsymbol{C}$") por el lema de Yoneda. Por lo tanto no habrá confusión en escribir A para referirnos al funtor $[-, A]$.

Definición 2.1.60. i) Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría pequeña. Un ind-objeto en $\boldsymbol{C}$ es un objeto $A \in \boldsymbol{C}^{\wedge}$ que es isomorfo a $\varinjlim \alpha$ para un funtor $\alpha : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}$ con $\boldsymbol{I}$ filtrante y pequeña.

ii) Denotamos por $Ind(\boldsymbol{C})$ a la subcategoría plena de $\boldsymbol{C}^{\wedge}$ que consiste de todos sus ind-objetos y le llamamos la indización de $\boldsymbol{C}$. Denotamos por $\iota_{\boldsymbol{C}} : \boldsymbol{C} \to Ind(\boldsymbol{C})$ al funtor inducido por h_{-}

iii) Similarmente, un pro-objeto es un objeto $B \in \boldsymbol{C}^{\vee} = (\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}})^{\boldsymbol{op}}$ que es isomorfo a $\varprojlim \beta$ para un funtor $\beta : \boldsymbol{I}^{op} \to \boldsymbol{C}$ con $\boldsymbol{I}$ filtrante y pequeña.

iv) Denotamos por $Pro(\boldsymbol{C})$ a la subcategoría plena de $\boldsymbol{C}^{\vee}$ que consiste de todos los pro-objetos.

Notemos que como vemos a $\boldsymbol{C}$ incluido en $(\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}})^{op}$, la motivación para considerar ind-objetos es la de agregar de manera libre colímites filtrantes a $\boldsymbol{C}$. Así mismo, la motivación para considerar pro-objetos es la de agregar de manera libre límites cofiltrantes a $\boldsymbol{C}$.

2.1.9. Categorías Extensivas.

Esta sección fue extraída principalmente de [9].

Convención: la palabra [finito] entre corchetes significará que la afirmación se seguirá de dos maneras: una suponiendo finito y la otra no suponiendo finito. Cuando la palabra finito aparezca sin corchetes tendrá el significado usual.

Definición 2.1.61. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría con coproductos y $\{X_i\}_i$ una familia de objetos en $\boldsymbol{C}$. Definimos el funtor $+ : \prod \boldsymbol{C}/X_i \to \boldsymbol{C}/\coprod_i X_i$, de manera que si $(f_i : A_i \to X_i) \in \prod_i \boldsymbol{C}/X_i$ entonces $+((f_i : A_i \to X_i)_i) = \sum_i f_i$ es la flecha inducida de manera natural como se observa en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "a_i"] \arrow[d, "f_i"'] & \coprod_i A_i \arrow[d, "\sum_i f_i"] \\
X_i \arrow[r, "x_i"'] & \coprod_i X_i
\end{tikzcd}$$

donde a_i y x_i son las correspondientes coproyecciones y si $(h_i)_i : (f_i)_i \to (g_i)_i \in \prod \boldsymbol{C}/X_i$, entonces $+((h_i)_i) = \sum_i h_i$ (se verifica fácilmente que en efecto $+$ es funtor).

Definición 2.1.62. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría con coproductos y $\{X_i\}_i$ una familia de objetos en $\boldsymbol{C}$. Diremos que $\{X_i\}_i$ satisface la propiedad extensiva si el funtor canónico:

$$+ : \prod \boldsymbol{C}/X_i \to \boldsymbol{C}/\coprod_i X_i \tag{2.1}$$

es una equivalencia.

Definición 2.1.63. Diremos que una categoría $\boldsymbol{C}$ con sumas finitas es finitamente extensiva si $\forall X_1, X_2 \in \boldsymbol{C}$, $\{X_1, X_2\}$ satisface la propiedad extensiva.

Proposición 2.1.64. *Una categoría con sumas finitas es finitamente extensiva si y solo si tiene productos fibrados a lo largo de coproyecciones de coproductos finitos y cada diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A \arrow[d, "f"'] & A_2 \arrow[l, "a_2"'] \arrow[d, "f_2"'] \\
X_1 \arrow[r, "x_1"'] & X_1 + X_2 & X_2 \arrow[l, "x_2"]
\end{tikzcd}$$

está comprendido de un par de diagramas de producto fibrado en $\boldsymbol{C}$ si y solo si las flechas superiores forman un diagrama coproducto en $\boldsymbol{C}$.

Demostración. Comenzaremos con la siguiente observación: en el diagrama anterior el renglón superior es un coproducto en $\boldsymbol{C}$ si y solo si el diagrama $x_1 \circ f_1 \to f \leftarrow x_2 \circ f_2$ es un coproducto en $\boldsymbol{C}/(X_1+X_2)$. Supongamos que el renglón superior es coproducto en $\boldsymbol{C}$ y consideremos una flecha $h : B \to X_1+X_2$ y flechas $g_1 : x_1 \circ f_1 \to h$, $g_2 : x_2 \circ f_2 \to h \in \boldsymbol{C}/(X_1+X_2)$. Por la propiedad de coproducto $\exists! s : A \to B$ tal que $s \circ a_1 = g_1$ y $s \circ a_2 = g_2$. Tenemos que $(h \circ s) \circ a_1 = h \circ g_1 = x_1 \circ f_1 = f \circ a_1$ y análogamente tenemos que $(h \circ s) \circ a_2 = f \circ a_2$, pero como A es coproducto de A_1 y A_2 se sigue que $h \circ s = f$. Por lo tanto el diagrama $x_1 \circ f_1 \to f \leftarrow x_2 \circ f_2$ es un coproducto en $\boldsymbol{C}/(X_1 + X_2)$. Por otro lado, como nuestra categoría tiene todos los coproductos, por el caso anterior si $x_1 \circ f_1 \to f \leftarrow x_2 \circ f_2$ es coproducto y α_i son las coproyecciones de A_i en $A_1 + A_2$, existe un isomorfismo $h : A_1 + A_2 \to A$ tal que $a_i \circ h = \alpha_i$, i.e. el renglón superior es coproducto.

Durante la prueba abreviaremos "es un par de cuadrados producto fibrado" a "es un producto fibrado" y "es un coproducto en $\boldsymbol{C}/(X_1 + X_2)$" a "es un coproducto".
$\Rightarrow$] Supongamos la propiedad extensiva para $\{X_1, X_2\}$ y supongamos que el diagrama de arriba es un coproducto al cual llamaremos D (podemos asegurar la existencia de este diagrama para $f : A \to X_1 + X_2$ por ser $+$ esencialmente suprayectiva en objetos). Dado un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "g_1"'] & A \arrow[d, "f"'] & B_2 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[d, "g_2"'] \\
X_1 \arrow[r, "x_1"'] & X_1 + X_2 & X_2 \arrow[l, "x_2"]
\end{tikzcd}$$

podemos formar el coproducto $g_1+g_2 : B_1+B_2 \to X_1+X_2$ en $\boldsymbol{C}/(X_1+X_2)$ con coproyecciones b_1 y b_2. Entonces β_1 y β_2 inducen una única flecha $(\beta_1, \beta_2) : g_1 + g_2 \to f$. Como $f = f_1 + f_2$ por hipótesis, tenemos por la fidelidad plena del funtor $+ : \boldsymbol{C}/X_1 \times \boldsymbol{C}/X_2 \to \boldsymbol{C}/(X_1 + X_2)$ que existe un único par de flechas $\alpha_i : g_i \to f_i$, tales que $(\beta_1, \beta_2) \circ b_i = a_i \circ \alpha_i = \beta_i$, i.e., para cada i el siguiente diagrama conmuta (pues $\alpha_i \in \boldsymbol{C}/X_i$):

$$\begin{tikzcd}
B_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[drr, bend left, "\beta_i"] \arrow[ddr, bend right, "g_i"'] & & \\
& A_i \arrow[r, "a_i"] \arrow[d, "f_i"] & A \arrow[d, "f"] \\
& X_i \arrow[r, "x_i"'] & X_1 + X_2
\end{tikzcd}$$

y α_i es único con esta propiedad. Por lo tanto D es un producto fibrado.

Ahora veamos que si el diagrama es producto fibrado, entonces es un coproducto. Supongamos que D es un producto fibrado. La suprayectividad esencial en objetos del funtor $+ : \boldsymbol{C}/X_1 \times \boldsymbol{C}/X_2 \to \boldsymbol{C}/(X_1 + X_2)$ nos dice que podemos encontrar un diagrama coproducto:

$$\begin{tikzcd}
A_1' \arrow[r, "a_1'"] \arrow[d, "f_1'"'] & A \arrow[d, "f"'] & A_2' \arrow[l, "a_2'"'] \arrow[d, "f_2'"'] \\
X_1 \arrow[r, "x_1"'] & X_1 + X_2 & X_2 \arrow[l, "x_2"]
\end{tikzcd}$$

Este a su vez está formado por dos cuadrados conmutativos. Como D es un producto fibrado, existe un único par de flechas $\theta_i : A_i' \to A_i$ tales que $f_i \circ \theta_i = f_i'$ (por lo tanto son flechas $\theta_i : f_i' \to f_i \in \boldsymbol{C}/X_i$) y $a_i \circ \theta_i = a_i'$. Ahora consideremos el coproducto:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_1 + A_2 \arrow[d, "f_1+f_2"'] & A_2 \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[d, "f_2"'] \\
X_1 \arrow[r, "x_1"'] & X_1 + X_2 & X_2 \arrow[l, "x_2"]
\end{tikzcd}$$

Las flechas $a_i : x_i \circ f_i \to f$ inducen una flecha $(a_1, a_2) : f_1 + f_2 \to f$. Como $f = f_1' + f_2'$, por la fidelidad plena de $+ : \boldsymbol{C}/X_1 \times \boldsymbol{C}/X_2 \to \boldsymbol{C}/(X_1 + X_2)$ podemos escribir a (a_1, a_2) de forma única como $\phi_1 + \phi_2$ donde $\phi_i : f_i \to f_i'$ y satisface $a_i' \circ \phi_i = (a_1, a_2) \circ \alpha_i = a_i$, si logramos ver que θ_i y ϕ_i son inversas habremos probado que D es un coproducto. Tenemos las siguientes igualdades:

$$a_i \circ \theta_i \circ \phi_i = a_i' \circ \phi_i = a_i,$$

$$f_i \circ \theta_i \circ \phi_i = f_i' \circ \phi_i = f_i$$

Al ser D un producto fibrado tenemos que $\theta_i \circ \phi_i = id_{A_i}$. Por otro lado, por definición de suma de morfismos, tenemos que:

$$(\phi_1\theta_1 + \phi_2\theta_2) \circ a_i' = a_i' \circ \phi_i \circ \theta_i = (a_1, a_2) \circ \alpha_i \circ \theta_i = a_i \circ \theta_i = (id_{A_1'} + id_{A_2'}) \circ a_i$$

y por lo tanto $\phi_1\theta_1 + \phi_2\theta_2 = id_{A'_1} + id_{A'_2}$, que por fidelidad de $+ : \boldsymbol{C}_{X_1} \times \boldsymbol{C}_{X_2} \to \boldsymbol{C}_{X_1+X_2}$ implica que $\phi_i \circ \theta_i = id_{A'_i}$.

$\Leftarrow$] Supongamos que D es producto fibrado si y solo si es un coproducto y que estos productos fibrados existen. Probaremos la propiedad extensiva para la colección $\{X_1, X_2\}$. El funtor $+ : \boldsymbol{C}/B_1 \times \boldsymbol{C}/B_2 \to \boldsymbol{C}/(B_1 + B_2)$ induce una función:

$$+ : Hom(A_1, B_1) \times Hom(A_2, B_2) \to Hom(A_1 + A_2, B_1 + B_2)$$

La función $+$ puede ser invertida haciendo producto fibrado a una flecha en el codominio sobre las coproyecciones. Esto nos garantiza la fidelidad plena de $+ : \boldsymbol{C}/X_1 \times \boldsymbol{C}/X_2 \to \boldsymbol{C}/(X_1+X_2)$. Para ver la suprayectividad esencial, dada una flecha $A_1 + A_2 \to X_1 + X_2$, hacemos producto fibrado a lo largo de las coproyecciones, el resultado de esto nos dará un coproducto en la parte superior. Esto completa la prueba. $\square$

Así que en esencia una categoría extensiva es una categoría donde los coproductos se llevan bien con los productos fibrados.

También tenemos la versión general de categoría extensiva.

Definición 2.1.65. Diremos que una categoría $\boldsymbol{C}$ con sumas es extensiva si cualquier familia de objetos $\{X_i\}_i$ satisface la propiedad extensiva.

Análogamente a la proposición anterior se da el siguiente resultado.

Proposición 2.1.66. *Una categoría $\boldsymbol{C}$ con sumas es extensiva si y solo si tiene productos fibrados a lo largo de coproyecciones de coproductos y cada diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "a_i"] \arrow[d, "f_1"'] & A \arrow[d, "f"] \\ X_i \arrow[r, "x_1"'] & \coprod_i X_i \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado en $\boldsymbol{C}$ si y solo si $A = \coprod_i A_i$.

Ejemplo 2.1.67. Algunos ejemplos de categorías extensivas son la categoría $\boldsymbol{Con}$ y la categoría $\boldsymbol{Top}$ donde que los coproductos son uniones ajenas.

Definición 2.1.68. Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría con coproductos finitos y productos fibrados a lo largo de coproyecciones. Decimos que los coproductos son ajenos si el producto fibrado de las coproyecciones de una suma binaria es el objeto inicial (El cual denotaremos 0).

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d, "x_1"] \\ X_2 \arrow[r, "x_2"'] & X_1 + X_2 \end{tikzcd}$$

y las coproyecciones son monos.

Proposición 2.1.69. *En una categoría [finitamente] extensiva los coproductos son ajenos.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[d, "a_2"'] & A_2 \arrow[l, "id_{A_2}"'] \arrow[d, "id_{A_2}"] \\
A_1 \arrow[r, "a_1"'] & A_1 + A_2 & A_2 \arrow[l, "a_2"]
\end{tikzcd}$$

Como las flechas superiores forman un coproducto, por la proposición 2.1.64 se sigue que es un diagrama producto fibrado. Por el cuadrado derecho se sigue que a_2 es mono. □

Definición 2.1.70. Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría con objeto inicial 0. Decimos que 0 es inicial estricto si cualquier flecha hacia él es invertible.

Proposición 2.1.71. *Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría [finitamente] extensiva. El objeto inicial es estricto.*

Demostración. Sea 0 un objeto inicial. Consideremos una flecha $f : A \to 0 \in \boldsymbol{C}$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"'] & A \arrow[l, "id_A"'] \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r] & 0 & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Como el diagrama es un producto fibrado, por la proposición 2.1.64 se sigue que $A = A + A$. Sea $g : A \to A$ la flecha inducida por la propiedad universal usando a las flechas id_A y $(0 \to A) \circ (f : A \to 0)$, de aquí concluimos que $(0 \to A) \circ (f : A \to 0) = id_A$ y por lo tanto f es invertible. □

Definición 2.1.72. Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría con coproductos [finitos]. Decimos que $\boldsymbol{C}$ tiene coproductos estables bajo producto fibrado si para cualquier coproducto $\coprod_i X_i$ y cualquier flecha $f : A \to \coprod_i X_i$, existen los productos fibrados de f a lo largo de las coproyecciones y $A = \coprod_i A \times_{(\coprod_j X_j)} X_i$.

Lema 2.1.73. *En una categoría [finitamente] extensiva los coproductos [finitos] son estables bajo producto fibrado.*

Lema 2.1.74. *En una categoría con coproductos estables bajo producto fibrado, el objeto inicial es estricto.*

Proposición 2.1.75. *Una categoría con coproductos [finitos] y productos fibrados a lo largo de coproyecciones es [finitamente] extensiva si y solo si los coproductos [finitos] son estables bajo producto fibrado y ajenos.*

Demostración. Ya vimos que en una categoría extensiva los coproductos son estables bajo producto fibrado y ajenos. Supongamos que los coproductos son estables bajo producto fibrado y ajenos. Queremos probar que un diagrama conmutativo de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_1 + A_2 \arrow[d, "f_1+f_2"'] & A_2 \arrow[l, "a_2"'] \arrow[d, "f_2"'] \\
X_1 \arrow[r, "x_1"'] & X_1 + X_2 & X_2 \arrow[l, "x_2"]
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Consideremos un cuadro conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & A_1 + A_2 \arrow[d, "f_1+f_2"] \\
X_1 \arrow[r, "x_1"'] & X_1 + X_2
\end{tikzcd}$$

Primero construimos los productos fibrados

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "h_1"'] & B \arrow[d, "h"'] & B_2 \arrow[l, "b_2"'] \arrow[d, "h_2"'] \\
A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_1 + A_2 \arrow[d, "f_1+f_2"'] & A_2 \arrow[l, "a_2"'] \arrow[d, "f_2"'] \\
X_1 \arrow[r, "x_1"'] & X_1 + X_2 & X_2 \arrow[l, "x_2"]
\end{tikzcd}$$

Tenemos las siguientes igualdades

$$x_1 \circ g \circ b_2 = (f_1 + f_2) \circ h \circ b_2 = x_2 \circ f_2 \circ h_2$$

Como los coproductos son ajenos existe una flecha $B_2 \to 0$, sumandole a esto que por el lema 2.1.74 los iniciales son estrictos tenemos que B_2 es inicial, como los coproductos son estables bajo producto fibrado, b_1 es invertible y finalmente $h_1 \circ b_1^{-1}$ es el único morfismo requerido para que A_1 sea producto fibrado. Análogamente se sigue con A_2. La prueba para el caso no finito es análoga. □

Definición 2.1.76. Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría [finitamente] extensiva y $X \in \boldsymbol{C}$. Diremos que X es conexo si el funtor $Hom(X, -)$ preserva coproductos.

Teorema 2.1.77. *Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría [finitamente] extensiva y $X \in \boldsymbol{C}$. X es conexo si y solo si para cada descomposición $X = U + V$, $U = 0$ o $V = 0$ y solo uno de los dos.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es conexo y $X = U + V$, entonces la identidad $id : X \to U + V$ se factoriza a través de una de las coproyecciones $\iota_U : U \to U + V$, $\iota_V : V \to U + V$. Supongamos sin pérdida de generalidad (SPG) que se factoriza a través de U por medio de $g : X \to U$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g \circ \iota_V"] \arrow[d, "id_V"'] & U \arrow[d, "\iota_U"] \\ V \arrow[r, "\iota_V"'] & U + V \end{tikzcd}$$

Como los coproductos son ajenos y los iniciales estrictos entonces $V = 0$.

$\Leftarrow$] Consideremos una flecha $f : X \to Y + Z$ y sean U y V los productos fibrados de f a lo largo de ι_Y y ι_Z respectivamente. Por extensividad tenemos que $X = U + V$. Por lo tanto $U = 0$ ó $V = 0$, supongamos SPG que es $V = 0$, entonces $X = U$ y por lo tanto f se factoriza a través de Y de forma única pues ι_Y es mono. $\square$

Teorema 2.1.78. *Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría extensiva. Un objeto X en $\boldsymbol{C}$ es conexo si y solo si el funtor $Hom(X, -)$ preserva coproductos binarios.*

Demostración. La ida es clara, así que probaremos el regreso. Primero veamos que el funtor $Hom(X, -)$ preserva objeto inicial. Sabemos que $X = X + 0$ y por hipótesis el morfismo inducido

$$Hom(X, X) + Hom(X, 0) \to Hom(X, X)$$

es una biyección donde la restricción a $Hom(X, X)$ es también una biyección, esto nos dice que $Hom(X, 0) = \varnothing$. Ahora consideremos una familia de objetos $\{Y_\alpha\}_\alpha$. Queremos ver que cada flecha $f : X \to \coprod_\alpha Y_\alpha$ se factoriza a través de una única inclusión $\iota_\beta : Y_\beta \to \coprod_\alpha Y_\alpha$. Como $\boldsymbol{C}$ es extensiva tenemos diagramas de producto fibrado

$$\begin{tikzcd} P_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "g_\alpha"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y_\alpha \arrow[r, "\iota_\alpha"'] & \coprod_\alpha Y_\alpha \end{tikzcd}$$

y además $X = \coprod_\alpha P_\alpha$.

Para cada β tenemos que la flecha $id : X \to P_\beta + \coprod_{\alpha \neq \beta} P_\alpha$ se factoriza a través de uno de los sumandos pues $Hom(X, -)$ preserva coproductos binarios. Por el teorema 2.1.9 $X = P_\beta$ o $X = \coprod_{\alpha \neq \beta} P_\alpha$ y el otro es 0. Notemos que no puede ocurrir que todos los P_α sean 0, pues entonces X sería 0 contradiciendo que $Hom(X, 0) = \varnothing$. Por lo tanto, existe una única β tal que $X = P_\beta$. $\square$

2.2. Acciones de grupos.

En este apartado solo veremos los conceptos más básicos relacionados a las acciones de grupos y se espera que el lector maneje conceptos básicos de grupos además de conceptos básicos de topología. Se puede revisar la teoría de grupos o acciones de grupos en conjuntos en [12] y lo referente a topología general en [4].

Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría.
Dado un objeto $A \in \boldsymbol{C}$, definimos el conjunto $End(A) = Hom_{\boldsymbol{C}}(A, A)$ y definimos $Aut(A)$ como el subconjunto de $End(A)$ que consiste de los isomorfismos. $Aut(A)$ es un grupo con la operación composición.

Definición 2.2.1. Sean G un grupo y A un objeto de $\boldsymbol{C}$.
1) Una acción izquierda de G en A es un morfismo de grupos $\tau : G \to Aut(A)$.
2) Una acción derecha de G en A es un morfismo de grupos $\psi : G \to (Aut(A))^{op}$.

En caso de que tengamos una acción izquierda de G en A, para cada $g \in G$ tenemos un morfismo inducido $g_* : A \to A$, que es precisamente $\tau(g)$. En caso de que A sea un conjunto, dados elementos $x \in A$ y $g \in G$, usaremos la notación gx para referirnos al elemento $g_*(x)$. De igual forma si se trabaja con una acción derecha, tenemos un morfismo inducido $g^* : A \to A$, que es precisamente $\psi(g)$ y en caso de que A sea un conjunto, dados $x \in A$ y $g \in G$, usaremos la notación xg para referirnos a el elemento $\psi(g)(x)$.

Observación 2.2.2. De la definición anterior. Para $g, h \in G$, podemos concluir lo siguiente:
Para el caso izquierdo:
1) $(gh)_* = g_* \circ h_*$
2) $(id_G)_* = id_A$

Para el caso derecho:
1) $(gh)^* = h^* \circ g^*$
2) $(id_G)^* = id_A$

Definición 2.2.3. Sean G un grupo y A un objeto de una categoría $\boldsymbol{C}$, si G actúa a la izquierda (derecha) en A, diremos que A es un G-objeto izquierdo (derecho) (Si no se especifica se considerará izquierdo).

Definición 2.2.4. Sean A y B dos G-objetos izquierdos (derechos), diremos que una flecha $\varphi : A \to B$ es un morfismo de G-objetos izquierdos (derechos), si para cualquier $g \in G$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g_*(g^*)"'] & B \arrow[d, "g_*(g^*)"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

Los G-objetos de $\boldsymbol{C}$ junto con los morfismos de G-objetos forman una categoría que se denotará $\boldsymbol{C}^G$. En caso de que la categoría sea $\boldsymbol{Con}$, a sus G-objetos les llamaremos G-conjuntos. Daremos definiciones y resultados sobre G-conjuntos izquierdos y se esperará que el lector reconozca las respectivas definiciones y resultados para G-conjuntos derechos.

Definición 2.2.5. Dado E un G-conjunto, diremos que E es transitivo si para cualesquiera $x, y \in E$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

Los G-conjuntos transitivos junto con los morfismos de G-conjuntos forman una categoría que se denota $\boldsymbol{tCon}^G$.

Dado $H \leqslant G$ podemos construir el cociente G/H y dotarlo de una estructura de G-conjunto como sigue: dados $gH \in G/H$ y $g' \in G$ definimos $g'(gH)$ como $g'gH$. Esta acción está bien definida pues tenemos la siguiente secuencia de implicaciones: $g_1H = g_2H \iff g_2^{-1}g_1 \in H \Rightarrow g_2^{-1}(g')^{-1}g'g_1 = (g'g_2)^{-1}g'g_1 \in H \Rightarrow g'(g_1H) = g'(g_2H)$. Notemos también que este G-conjunto es transitivo pues si tenemos $gH, g'H \in G/H$, entonces $(g'g^{-1})gH = g'H$.

Definición 2.2.6. Sean X un G-conjunto y $x \in X$.
1) La órbita de x es el conjunto $O_x = \{gx | g \in G\}$.
2) El estabilizador de x es el conjunto $G_x = \{g \in G | gx = x\}$.

Un resultado famoso que relaciona estos conceptos, es el siguiente:

Teorema 2.2.7. *Sean G un grupo y X un G-conjunto. Dado $x \in X$, se tiene que:*

$$O_x \cong G/G_x \tag{2.2}$$

como G-conjuntos

Demostración. Sea $\varphi : O_x \to G/G_x$ dada por $\varphi(gx) = gG_x$. Veamos que φ está bien definida. Para $g, h \in G$ tenemos la siguiente secuencia de equivalencias: $gx = hx \iff g^{-1}hx = x \iff g^{-1}h \in G_x \iff gG_x = hG_x$. Por lo tanto φ está bien definida y es inyectiva. Por otro lado tenemos el morfimos $\phi : G/G_x \to O_x$ dado por $\phi(gG_x) = gx$, este está bien definido pues φ es inyectiva y claramente es su inversa. Por lo tanto $O_x \cong G/G_x$. □

En particular G actúa en G por conjugación. Dados $g \in G$ y $x \in G$ definimos la acción $gx = g * x * g^{-1}$ donde * es la operación de G.

$O_x = \{g * x * g^{-1} | g \in G\} = x^G$ "la clase de conjugación de x".

$G_x = \{g \in G | gx = x\} = \{g \in G | g * x * g^{-1} = x\} = \{g \in G | g * x = x * g\} = C_G(x)$ "el centralizador de x en G".

Corolario 2.2.8. *Si G es un grupo, entonces $\#(x^G) = [G : C_G(x)]$.*

Definición 2.2.9. Sea G un grupo. Decimos que G es un grupo topológico si G está dotado de una topología τ y además se cumple que:
1) $* : G \times G \to G$ es continua, donde * es la operación del grupo.
2) la función inversión $-^{-1} : G \to G$ es continua.

Un ejemplo de grupo topológico es el conjunto de los números reales con la topología usual con la suma.

Definición 2.2.10. Sean G un grupo topológico, X un espacio topológico y $\phi : G \times X \to X$ una acción de G en X. Decimos que la acción de G en X es continua si ϕ es continua.

2.3. Grupo fundamental de un espacio topológico.

A lo largo de esta sección se esperará que el lector tenga conocimientos básicos de topología general, los cuales se pueden consultar en [4], de igual manera para más detalles, este tema se puede consultar ahí mismo.

Denotamos por I al intervalo $[0, 1]$.

Definición 2.3.1. Sean X y Y espacios topológicos y $f, f' : X \to Y$ funciones continuas. Diremos que f es homotópica a f' si existe una función continua $H : X \times I \to Y$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = f'(x)$, $\forall x \in X$. En tal caso decimos que H es una homotopía entre f y f'.

Si f es homotópica a f', escribiremos $f \simeq f'$ y, en caso de que f' sea constante, diremos que f es homotópicamente nula.

Definición 2.3.2. Sea X un espacio topológico. Un camino en X es una función continua $\gamma : I = [0, 1] \to X$, $\gamma(0)$ es llamado el punto inicial y $\gamma(1)$ el punto final.

Un camino se dice que es un camino cerrado si el punto inicial coincide con el punto final.

Definición 2.3.3. Dados dos caminos γ_1 y γ_2 de X, diremos que son homotópicos si coinciden en sus extremos y existe una función continua $H : I \times I \to X$, tal que $H(t, 0) = \gamma_1(t)$, $H(t, 1) = \gamma_2(t)$ $\forall t \in I$. Además pedimos que H coincida en los extremos, i.e, $H(0, t) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y $H(1, t) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, $\forall t$.

Proposición 2.3.4. *Sea X un espacio topológico. La relación "ser homotópico a" es una relación de equivalencia en el conjunto de caminos de X, el cual denotamos $C(X)$.*

Demostración. La demostración se puede ver en [4] página 324. □

Denotaremos por $[\gamma]$ a la clase de γ bajo la relación "ser homotópica a".

Dados dos caminos γ_1 y γ_2 de X tales que γ_1 termina en donde γ_2 empieza, obtenemos un tercer camino, $\gamma_2 * \gamma_1$ definida por:

$$\gamma_2 * \gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & si \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1) & si \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Esta composición induce la composición de clases de equivalencia de forma natural.

Dados γ y α caminos que se puedan componer, definimos $[\gamma] * [\alpha] = [\gamma * \alpha]$. Es fácil ver que esta operación está bien definida.

Definición 2.3.5. Decimos que un espacio topológico X es conexo por trayectorias si $\forall x, y \in X$ hay un camino que inicia en x y termina en y.

La operación ya mencionada induce una estructura categórica en X, donde los objetos son los elementos de X y si $x, y \in X$, $Hom(x, y)$ son las clases de homotopía de los caminos que inician en x y terminan en y.

$Hom(x, x)$ es el conjunto de las clases de caminos cerrados que inician y terminan en x y la identidad id_x es la clase del camino constante x.

A esta categoría la denotamos por $\Pi_1(X)$.

Para que $[\varphi] : x \to y$ sea un isomorfismo debe existir $[\psi] : y \to x$, de manera que $[\varphi * \psi] = [id_y]$ y $[\psi * \varphi] = [id_x]$. ψ siempre existe y puede ser dado por $\psi(t) = \varphi(1-t)$, i.e., ψ es φ recorrida en sentido contrario.

Para mayores detalles sobre la prueba de este resultado ver [4], página 327.

Por lo tanto, en $\Pi_1(X)$ todo morfismo es un isomorfismo, i.e $\Pi_1(X)$ es lo que en categorías se conoce como grupoide y lo llamaremos el grupoide fundamental de X.

Para cada $x \in X$, tenemos el grupo de automorfismos $Aut_{\Pi_1(X)}(x)$, al cual denotaremos por $\pi_1(X, x)$ y le llamaremos el grupo fundamental de X en x.

Si X es conexo por trayectorias, entonces como cualesquiera dos puntos en $\Pi_1(X)$ son isomorfos, sus respectivos grupos fundamentales son isomorfos.

Capítulo 3

Teoría de Galois en campos.

A lo largo de este capítulo se esperará que el lector tenga conocimientos de teoría de anillos los cuales pueden revisarse en [10]. Por otro lado esta sección puede ser revisada en [11], de donde fue extraído el contenido.

3.1. Extensiones de campos.

3.1.1. Extensiones trascendentes y algebraicas de campos.

Definición 3.1.1. Sea k un campo. Diremos que L es una extensión de campos de k si L es un campo que contiene a k en donde la estructura de campo de k coincide con la de L restringida a k y se denotará:

$$L|k$$

Notemos que si $L|M$ y $M|k$, entonces $L|k$. En este caso diremos que $M|k$ es subextensión de $L|k$.

Definición 3.1.2. Sean $L|k$ una extensión de campos y $S \subseteq L$. Denotamos por $k(S)$ al menor subcampo de L que contiene a S y a k (éste siempre existe y de hecho es igual a la intersección de todos los subcampos de L que contienen a k y a S).

Un caso particular es cuando $S = \{\alpha\}$. En este caso a $k(\{\alpha\})$ lo denotamos simplemente $k(\alpha)$ y decimos que es una extensión simple de k.

Una caracterización de $k(\alpha)$ es la siguiente

$$k(\alpha) = \left\{ \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \middle| f, g \in k[x] \quad g(\alpha) \neq 0 \right\}$$

la prueba de esto se puede ver en [11] pagina 5.

Definición 3.1.3. Sean $L|k$ una extensión de campos y $\alpha \in L$. Diremos que α es algebraico sobre k si existe $f(x) \in k[x]\backslash\{0\}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Definición 3.1.4. Diremos que $L|k$ es una extensión algebraica si $\forall \alpha \in L$ se tiene que α es algebraico sobre k. De lo contrario diremos que es una extensión trascendente.

Dados un campo k y un elemento $\alpha \in k$ tenemos el siguiente morfismo natural de anillos $Ev_\alpha : k[x] \to k$, cuya regla de correspondencia se define como $Ev_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$.

Denotaremos por $k(x)$ al campo de fracciones de $k[x]$. Éste es una extensión de campos de k pensando a k incluido de la manera natural.

Notemos que si $L|k$ es una extensión de campos, entonces L es un k-espacio vectorial y denotaremos por $[L : k]$ a la dimensión de L sobre k. Diremos que $L|k$ es una extensión finita si $[L : k]$ es finito.

Observación 3.1.5. $[k(x) : k] = \infty$ pues el conjunto $\{1, x, \cdots, x^n, \cdots\}$ es linealmente independiente (l.i.) sobre k.

Lema 3.1.6. *Sea $f(x) \in k[x]$ irreducible de grado n. Entonces existe L extensión de k de grado n con una raíz de $f(x)$.*

Demostración. Como $f(x)$ es irreducible, entonces el ideal generado por $f(x)$, $(f(x))$, es maximal, en consecuencia $\frac{k[x]}{(f(x))} = L$ es campo. Veamos que L extiende a k. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
k[x] \arrow[r, "\pi"] & \frac{k[x]}{(f(x))} \\
k \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\pi|_k"'] &
\end{tikzcd}$$

donde π denota a la proyección canónica. Como π_k es morfismo de anillos, entonces es un morfismo de campos y por lo tanto inyectivo (se sigue de que los morfismos de anillos preservan el 1), notemos que $\pi(x)$ es raíz de $f(t)$ en L. El conjunto $\{1 + (f(x)), \cdots, x^{n-1} + (f(x))\}$ es base de L sobre k pues claramente genera a L por el algoritmo de la división y, si tenemos una combinación lineal $a_0 + a_1 x + \cdots a_{n-1}x^{n-1} + (f(x)) = (f(x))$ entonces $f(x)|a_0 + a_1 x + \cdots a_{n-1}x^{n-1}$, al ser $a_0 + \cdots a_{n-1}x^{n-1}$ un polinomio de grado menor a $gr(f)$ no le queda más que ser 0, i.e. $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Por lo tanto $[L : k] = n$

□

Proposición 3.1.7. *Sea $k(\alpha)|k$ una extensión simple. Tenemos:*

1) Si α es algebraico sobre k, entonces $k(\alpha)|k$ es finita y $\frac{k[x]}{Nuc(Ev_\alpha)} \cong k(\alpha)$

2) Si α es trascendente sobre k, entonces $k(\alpha)$ es infinita y $k(\alpha) \cong k(x)$.

Demostración. Sea $L|k$ una extensión de campos. Para un elemento $\alpha \in L$ tenemos el morfismo de anillos $Ev_\alpha : k[x] \to L$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& Nuc(Ev_\alpha) \arrow[d, hook] & \\
k \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & k[x] \arrow[r, "p"] \arrow[d, "Ev_\alpha"] & \frac{k[x]}{Nuc(Ev_\alpha)} \arrow[dl, "\widehat{Ev_\alpha}"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

Por el primer teorema de isomorfismo, $\frac{k[x]}{Nuc(Ev_\alpha)} \cong k[\alpha]$. Como k es campo, $k[x]$ es un dominio de ideales principales (DIP) y entonces $Nuc(Ev_\alpha) = 0$ o $Nuc(Ev_\alpha) = (g(x))$ para algún $g(x) \in K[x]\backslash\{0\}$. En este último caso, si $g(x) = h(x)t(x)$, entonces $0 = g(\alpha) = h(\alpha)t(\alpha)$, como k es dominio entero entonces $h(\alpha) = 0$ o $t(\alpha) = 0$, i.e., $g|h$ o $g|t$, por lo tanto $g(x)$ es irreducible, si además pedimos a g mónico entonces g es único. En el primer caso se tiene que α es trascendente sobre k y $k[x] \cong k[\alpha]$, por lo tanto $k(x) \cong k(\alpha)$ (nuestro isomorfismo $Ev_\alpha : k[x] \to k[\alpha]$ se extiende de forma natural a un isomorfismo $Ev_\alpha : k(x) \to k(\alpha)$ utilizando la caracterización de $k(\alpha)$ en 3.1.2), en el segundo caso se tiene que α es algebraico sobre k y $\frac{k[x]}{(g(x))} \cong k[\alpha]$. Como $g(x)$ es irreducible se tiene que $(g(x))$ es un ideal maximal de $k[x]$ y por lo tanto $\frac{k[x]}{(g(x))}$ es campo, por el lema 3.1.6 es una extensión finita de k. □

En el caso de que α sea algebraico, diremos que el polinomio mónico $g(x)$ (como aparece en la prueba anterior) es el polinomio mínimo de α sobre k y se denotará $g(x) = min(\alpha, k)$.

Diremos que dos elementos algebraicos de L sobre k son conjugados sobre k si tienen el mismo polinomio mínimo sobre k.

Proposición 3.1.8. *Sean $M|k$, $L|M$ extensiones de campos. $L|k$ es finita si y solo si $L|M$ y $M|k$ son finitas. En este caso $[L : k] = [L : M][M : k]$*

Demostración. $\Rightarrow]$ Supongamos que $L|k$ es finita.

Es fácil notar que M es subespacio vectorial de L, por lo que $M|k$ es finita. Por otro lado si consideramos $\{a_1, \ldots, a_n\}$ base de L sobre k, ese mismo conjunto genera a L sobre M, por lo tanto $L|M$ es finita.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $L|M$ y $M|k$ son finitas, así tenemos $\{a_1, \ldots, a_n\}$ base de M como k-espacio vectorial y $\{b_1 \ldots, b_m\}$ base de L como M-espacio vectorial.

Afirmación: $\{a_i b_j\}_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$ es base para L sobre k. En efecto, sea $\gamma \in L$, usando que $\{b_1 \ldots, b_m\}$ es base tenemos:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m} r_i b_i$$

con $r_i \in M$ y cada

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} a_j$$

con $s_{ij} \in k$. Así

$$\gamma = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} s_{ij} a_j b_i$$

Esto prueba que $\{a_i b_j\}_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ genera a L. Tomemos una combinación lineal

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} s_{ij}(a_j b_i) = 0$$

con coeficientes en k, como $\{b_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ es base de L sobre M

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} a_j = 0 \quad \forall i$$

como $\{a_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ es base de M sobre k, tenemos que $s_{ij} = 0 \quad \forall i, j$ lo que prueba que de hecho es base. Así tenemos que $L|k$ es finita y que $[L : k] = [L : M][M : k]$.

□

Teorema 3.1.9. *$L|k$ es finita si y solo si $L|k$ es algebraica y existen $a_1, \dots, a_n \in L$, tales que $L = k(a_1, \dots, a_n)$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $L|k$ es finita. Sea $\{b_1, \dots, b_n\}$ una base de L sobre k, claramente $k(b_1, \dots, b_n) = L$.

Si $\gamma \in L$, $\{1, \gamma, \dots, \gamma^n\}$ es linealmente dependiente (l.d.) sobre k, por lo tanto hay una combinación lineal no trivial con coeficientes en k que se anula, $a_0 + a_1\gamma + \cdots + a_n\gamma^n = 0$, por lo tanto γ es raíz del polinomio $p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n \in k[x] \backslash \{0\}$. Por lo tanto L es algebraico sobre k.

$\Leftarrow$] Supongamos que L es algebraico sobre k y que $L = k(a_1, \cdots, a_n)$. Usando la proposición 3.1.8 tenemos que

$$[L : k] = [k(a_1, \dots, a_n) : k] = [k(a_1, \dots, a_n) : k(a_1, \dots, a_{n-1})] \cdots [k(a_1) : k]$$

que es finito pues cada factor es finito por la proposición 3.1.7.

□

Proposición 3.1.10. *Sean $M|k$, $L|M$ extensiones de campos. $L|k$ es algebraica si y solo si $L|M$ y $M|k$ son algebraicas.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $L|k$ es algebraica, entonces es claro que $M|k$ es algebraica. Sea $\alpha \in L$, como $L|k$ es algebraica, existe $f(x) \in k[x] \backslash \{0\}$, tal que $f(\alpha) = 0$. En particular $f(x) \in M[x] \backslash \{0\}$. Por lo tanto $L|M$ es algebraica.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que tanto $L|M$ como $M|k$ son algebraicas. Sea $\alpha \in L$, como $L|M$ es algebraica existe un polinomio $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in M[x] \backslash \{0\}$ tal que $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0$.

Consideremos la torre de extensiones:

$$k(a_0, \ldots, a_n, \alpha) \supseteq k(a_0, \ldots, a_n) \supseteq \cdots \supseteq k(a_0) \supseteq k$$

Como cada a_i es algebraico sobre k (pues $M|k$ es algebraica) y como α es algebraico sobre $k(a_0, \ldots, a_n)$, entonces cada extensión de la torre es de dimensión finita. Usando 1), $k(a_0, \ldots, a_n, \alpha)|k$ es una extensión de dimensión finita, usando el Teorema 3.1.9, α es algebraico sobre k. $\square$

Dados k un campo y $f(x) \in k[x]$ de grado n, estamos interesados en encontrar todas las raíces de $f(x)$ en k, las cuales podrían no existir, de manera que intentaremos buscar raíces de tal polinomio en campos L que extiendan a k.

Definición 3.1.11. Sean k un campo y $f(x) \in k[x]$. Diremos que L es un campo de descomposición de $f(x)$ si L es una extensión de campos de k y $f(x)$ se descompone sobre L (i.e. $f(x) = a(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ con $a \in k$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$), además pedimos que L sea minimal con esta propiedad dentro de sus subextensiones de k (Veremos que de hecho la propiedad de ser campo de descomposición es única salvo isomorfismos).

Teorema 3.1.12. ***(Kronecker)*** *Sea $f(x) \in k[x]$ no constante. Existe una extensión de campos $L|k$ de dimensión finita en la cual $f(x)$ se descompone.*

Demostración. Por inducción sobre $n = gr(f(x))$:
Para $n = 1$. El polinomio $f(x)$ se descompone sobre k.
Sea $n > 1$ y supongamos el resultado para toda $m < n$.
Probemos para n. Como f es no constante podemos factorizarlo como $f(x) = p(x)g(x)$ con $p(x), g(x) \in k[x]$ y $p(x)$ irreducible en $k[x]$. Sea E una extensión de k de dimensión finita con una raíz de $p(x)$, digamos z, así $f(x) = (x - z)h(x)$ para algún $h(x) \in E[x]$ y $gr(h(x)) < gr(f(x))$, entonces por hipótesis de inducción existe una extensión de campos $L|E$ de dimensión finita y $h(x)$ se descompone en $L[x]$, por la proposición 3.1.8 $L|k$ es finita y $f(x)$ se descompone en $L[x]$. $\square$

Proposición 3.1.13. *Sean k campo y $f(x) \in k[x]$ irreducible y mónico. Si z y z' son dos elementos de ciertos campos, tales que los polinomios mínimos de z y z' son ambos $f(x)$, entonces $k(z) \cong k(z')$.*

Demostración. Basta usar la proposición 3.1.7 y observar que se dan las siguientes igualdades $Nuc(Ev_{z'}) = (f(x)) = Nuc(Ev_z)$. $\square$

Veremos la demostración de que el campo de descomposición es único salvo isomorfismos hasta la parte de levantamiento de morfismos de extensiones de campos.

3.1.2. Campos algebraicamente cerrados.

Definición 3.1.14. Un campo L es algebraicamente cerrado si para todo $f(x) \in L[x]$ no constante, L tiene una raíz de $f(x)$ (notemos que esto es equivalente a pedir que tenga todas sus raíces).

Definición 3.1.15. Sea $L|k$ una extensión de campos. Decimos que L es una cerradura algebraica de k si $L|k$ es algebraica y L es algebraicamente cerrado.

Lema 3.1.16. *Sea k un campo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) $L|k$ es una cerradura algebraica de k.
2) $L|k$ es una extensión algebraica y todo polinomio en $k[x]$ se descompone en $L[x]$.
3) $L|k$ es una extensión algebraica y si $L'|L$ es una extensión algebraica, entonces $L = L'$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] Es obvio.

2) $\Rightarrow$ 3)] Supongamos que $L'|L$ es una extensión algebraica, por la proposición 3.1.8 $L'|k$ es algebraica. Sea $\alpha \in L'$, por hipótesis $min(\alpha, k)$ se descompone en $L[x]$, digamos que $min(\alpha, k) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$, entonces α es algún $\alpha_i \in L$.

3) $\Rightarrow$ 1)] Sea $f(x) \in L[x]$ un polinomio no constante, por el teorema de Kronecker se tiene un campo de descomposición para $f(x)$, $L'|L$, que resulta ser una extensión algebraica. Por lo tanto $L = L'$ y $L|k$ es una cerradura algebraica de k. □

Ahora probaremos el teorema principal de este apartado, para esto utilizaremos el siguiente lema:

Lema 3.1.17. *Si k es un campo y $L|k$ es algebraica, entonces $|L| \leqslant max\{|k|, \aleph_0\}$.*

Demostración. Sea $L|k$ una extensión algebraica. Consideremos al conjunto de todos los polinomios mónicos irreducibles en $k[x]$, digamos A. Para cada polinomio $f \in A$ hagamos una lista de sus raíces en L, $a_1, a_2, \cdots a_n$; consideremos la función $\phi : A \times \mathbb{N} \to L$, donde $\phi(f, i)$ es la i-ésima raíz de f en L si es que ésta existe y un elemento arbitrario de L si no existe; ϕ es suprayectiva y por lo tanto $|L| \leqslant |A \times \mathbb{N}| = |A|\aleph_0 = max\{|A|, \aleph_0\} = |A|$. Por otro lado $A = \bigcup_n A_n$, donde A_n es el conjunto de los polinomios mónicos irreducibles en $k[x]$ de grado n, $|A_n| = |k^n|$ y por lo tanto $|A| = max\{|k|, \aleph_0\}$. □

Teorema 3.1.18. *Sea k un campo. Entonces existe una cerradura algebraica $\widehat{k}|k$.*

Demostración. Consideremos un conjunto S, con $k \subset S$ y $|S| > max\{|k|, \aleph_0\}$. Sea A el conjunto de todas las posibles extensiones algebraicas de k contenidas en S (i.e. subconjuntos de S que contengan a k y se les pueda definir una operación que los haga extensiones algebraicas sobre k). El conjunto A es un COPO con la relación $L \leqslant K$ si $K|L$ con sus respectivas operaciones consideradas. Ademas, A no es vacío porque $k \in A$ (la extensión trivial $k|k$ es algebraica). Sea C una cadena en A, no es difícil ver que $\bigcup C$ es una cota para C en A. Por el lema de Zorn existe un elemento maximal, digamos $\widehat{k}|k$. Veamos que $\widehat{k}$ es una cerradura algebraica de k. Ya tenemos que es una extensión algebraica. Sea $L|\widehat{k}$ una extensión algebraica, entonces $L|k$ es algebraica y por el lema anterior tenemos que $|L| \leqslant max\{|k|, \aleph_0\}$. Como $|S| > max\{|k|, \aleph_0\}$, existe una función $f : L \to S$ inyectiva tal que $f|_{\widehat{k}} = id_{\widehat{k}}$, si copiamos la estructura de campo de L en $f(L)$ obtenemos una extensión algebraica de k con $\widehat{k} \subset f(L)$, por maximalidad de $\widehat{k}$ tenemos que $f(L) = \widehat{k}$, por lo tanto $L = \widehat{k}$, por lo tanto $\widehat{k}$ es una cerradura algebraica de k.

□

Proposición 3.1.19. *Sea $L|k$ una extensión de campos. El subconjunto de L que contiene todos los elementos algebraicos de L sobre k es campo y se le denomina la cerradura algebraica de k en L.*

Demostración. Basta probar que suma, producto e inversos multiplicativos de algebraicos es algebraico. Sean $a, b \in L$ elementos algebraicos sobre k, entonces $k(a,b)|k$ es algebraica, como $a+b, ab, a^{-1} \in k(a,b)$, entonces $a+b$, ab y a^{-1} son algebraicos sobre k. □

3.1.3. Levantamiento de morfismos de extensiones de campos.

Definición 3.1.20. Sean k un campo y $L|k$, $N|k$ extensiones de k. Un morfismo de extensiones $\sigma : L|k \to N|k$ es un morfismo de campos $\sigma : L \to N$ que fija a k puntualmente. Como todo morfismo de campos es inyectivo, todo morfismo de extensiones de k debe ser inyectivo.

Definimos la categoría de extensiones de k, $E(k)$, como la categoría cuyos objetos son las extensiones de k y las flechas son los morfismos de extensiones de k.

Estos morfismos permutan las raíces de los polinomios en $k[x]$, pues si $a_0 + \cdots + a_n x^n \in k[x]$ y α es raíz, entonces $a_0 + \cdots + a_n \alpha^n = 0 \Rightarrow a_0 + \cdots + a_n \sigma(\alpha)^n = 0$, pues σ fija a k puntualmente.

Proposición 3.1.21. *Todo endomorfismo de una extensión algebraica de k es un automorfismo.*

Demostración. Sean $L|k$ una extensión algebraica de k y $\sigma : L|k \to L|k$ un endomorfismo. Ya tenemos que σ es inyectiva. Sean $u \in L$ y consideremos a S_u el conjunto de todas las raíces de $min(u,k)$ en L. Juntando el hecho de que S_u es finito y $\sigma|_{S_u} : S_u \to S_u$ es inyectiva, entonces existe $v \in L$ otra raíz de $min(u,k)$ tal que $\sigma(v) = u$. Por lo tanto, σ es un automorfismo. □

Sean $L_1|M_1|k$, $L_2|M_2|k$ dos secuencias de extensiones de k.

Dado un isomorfismo de extensiones $\phi : M_1|k \to M_2|k$, buscamos condiciones para extender ϕ a un morfismo $\widehat{\phi} : L_1|k \to L_2|k$.

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[rr, "\widehat{\phi}"] & & L_2 \\
M_1 \arrow[u, hook] \arrow[rr, "\phi"] & & M_2 \arrow[u, hook] \\
& k \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Si tenemos un morfismo ϕ como en el diagrama anterior y $f(x) = a_0 + \cdots a_n x^n \in M_1[x]$, definimos el polinomio $\phi(f) \in M_2[x]$ como $\phi(f)(x) = \phi(a_0) + \cdots + \phi(a_n)x^n$.

Lema 3.1.22. *(Levantamiento de morfismos).*

Supongamos que $L_1|M_1$ y $L_2|M_2$ son extensiones de campos y $\phi : M_1|k \to M_2|k$ es un morfismo de extensiones. Sea $u \in L_1$ un elemento algebraico sobre M_1. Entonces ϕ puede extenderse a un morfismo:

$$\begin{tikzcd}
M_1(u) \arrow[rr, "\widehat{\phi}"] & & L_2 \\
M_1 \arrow[u, hook] \arrow[rr, "\phi"] & & M_2 \arrow[u, hook] \\
& k \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

si y solo si el polinomio $\phi(min(u, M_1))(x) \in M_2[x]$ tiene al menos una raíz en L_2. Más aún, el número de tales extensiones es igual al número de raíces de $\phi(min(u, M_1))(x)$ en L_2.

Demostración. Notemos que si $\widehat{\phi}$ extiende a ϕ debe de mandar raíces de $min(u, M_1)$ a raíces de $\phi(min(u, M_1))(x)$. De forma inversa si $\phi(min(u, M_1))(x)$ ya tiene una raíz α en L_2, entonces podemos definir un morfismo $\widehat{\phi} : M_1(u) \to L_2$, de forma que $\widehat{\phi}(u) = \alpha$ y envíe a cada elemento de M_1 a su respectiva imagen bajo ϕ (se puede ver que es morfismo notando que $\phi(M_1)$ es una copia de M_1 en M_2 y que $\widehat{\phi}$ es en esencia el isomorfismo construido en la prueba de la proposición 3.1.13 restringiendo el codominio a la imagen). Se sigue de forma inmediata que el número de dichos morfismos es el número de raíces de $\phi(min(u, M_1))(x)$ en L_2. □

Teorema 3.1.23. *Sean $L_1|M_1|k$ y $L_2|M_2|k$ extensiones y $\phi : M_1 \to M_2$ un morfismo de extensiones de k. Si $L_1|M_1$ es una extensión algebraica y $L_2|M_2$ es una cerradura algebraica, entonces existe un morfismo de extensiones $\widehat{\phi} : L_1 \to L_2$ de manera que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[rr, "\widehat{\phi}"] & & L_2 \\
M_1 \arrow[u, hook] \arrow[rr, "\phi"] & & M_2 \arrow[u, hook] \\
& k \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Más aún, si L_1 y L_2 son cerraduras algebraicas de M_1 y M_2 respectivamente y $M_2|\phi(M_1)$ es algebraica, entonces $\widehat{\phi}$ es un isomorfismo.

Demostración. Consideremos al conjunto $A = \{(L, \phi_L)|\ L_1|L|M_1$ y $\phi_L : L \to L_2$ extiende a $\phi\}$, A no es vacío pues $(M_1, \phi) \in A$. Definimos $(L, \phi_L) \leqslant (L', \phi_{L'})$ si y solo si $L'|L$ y $\phi_{L'}$ extiende a ϕ_L. Con este orden $(A, \leqslant)$ es un COPO. Sea $C = ((C_i, \phi_{C_i}))_i$ una cadena en A, claramente $L_1|\bigcup_i C_i|M_1$ y $\bigcup_i \phi_{C_i}$ es un morfismo de campos que extiende a ϕ_i, $\forall i$. Por lo tanto, $(\bigcup_i C_i, \bigcup_i \phi_i)$ es una cota superior de C. Por el lema de Zorn, A tiene elemento maximal, digamos (L, ϕ_L). Supongamos que $L_1 \neq L$, entonces existe $\alpha \in L_1 \backslash L$. Sea $\beta \in L_2$ una raíz

de $\phi_L(min(\alpha, L))$ (esto pues L_2 es algebraicamente cerrado), por el lema 3.1.22 encontramos una extensión $\phi_{L(\alpha)}$ de ϕ_L contradiciendo la maximalidad de L. Por lo tanto $L_1 = L$.
Si L_1 es algebraicamente cerrado y $M_2|\phi(M_1)$ es algebraica, entonces $im(\widehat{\phi}) \subset L_2$ es algebraicamente cerrado sobre $\phi(M_1)$ y como $M_2|\phi(M_1)$ es algebraica, $im(\widehat{\phi})$ es algebraicamente cerrado sobre M_2, por lo tanto $im(\widehat{\phi}) = L_2$ y por lo tanto $\widehat{\phi}$ es iso. □

Como no hay ambigüedad al hablar de cerradura algebraica, dado un campo k, denotaremos por $\widehat{k}$ a su cerradura algebraica. Si $L|k$ es una extensión algebraica de k, sabemos por el teorema anterior que existe un morfismo $L \to \widehat{k}$. Así, una extensión algebraica $L|k$, se ve como una extensión intermedia $\widehat{k}|L|k$.

Corolario 3.1.24. *Cualquier automorfismo de una extensión algebraica de k se levanta a un automorfismo de $\widehat{k}$.*

Corolario 3.1.25. *Todo polinomio $f(x) \in k[x]$ admite un único campo de descomposición de dimensión finita salvo isomorfismos.*

Demostración. Consideremos a la cerradura algebraica de k, $\widehat{k}$, y sea $f(x) \in k[x]$. f tiene todas sus raíces en $\widehat{k}$, digamos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, entonces es claro que el campo de descomposición de f es $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, además es único salvo isomorfismos pues la elección de $\widehat{k}$ es única salvo isomorfismos. □

3.1.4. Extensiones separables.

Definición 3.1.26. Sean $f(x) \in k[x]$ y $u \in \widehat{k}$ una raíz de $f(x)$. Definimos la multiplicidad de u en $f(x)$ como el mayor natural m, tal que $(x-u)^m$ divide a $f(x)$ en $\widehat{k}[x]$. Cuando la multiplicidad de u es 1 decimos que u es una raíz simple.

Definición 3.1.27. Decimos que un polinomio irreducible $f(x)$ es separable si toda raíz de f en $\widehat{k}$ es simple. Decimos que un polinomio $g(x)$ es separable si sus factores irreducibles son separables.

Definición 3.1.28. Dados una extensión $L|k$ y $u \in L$, decimos que u es separable sobre k si su polinomio mínimo sobre k es separable.

Una extensión $L|k$ se dice que es separable si es algebraica y $\forall u \in L$, u es separable sobre k.

Se dice que k es perfecto si toda extensión algebraica es separable.

Definición 3.1.29. Sea A un anillo. Definimos la característica de A como $min\{n \in \mathbb{N} | n1_A = 0\}$ donde $n1_A$ es sumar 1_A (neutro multiplicativo de A) n veces en caso de existir tal mínimo y como 0 en caso de no existir.

La característica de un anillo siempre es un número primo o 0.

Ejemplo 3.1.30. Sea k un campo de característica p primo y $a \in k$ tal que $a^p \notin k$, entonces $k(a)|k$ no es separable pues a es raíz del polinomio en $k[x]$ $x^p - a^p = (x-a)^p$.

Los siguientes ejemplos se pueden consultar en [11], paginas 44 y 45.

Ejemplo 3.1.31. Todo campo de característica 0 es perfecto.

Ejemplo 3.1.32. Todo campo finito es perfecto.

Proposición 3.1.33. *Para una secuencia de extensiones $L|M|k$, si $L|k$ es separable, entonces $L|M$ es separable.*

Demostración. Sea $u \in L$, como $L|k$ es separable su polinomio mínimo sobre k es separable. Como el polinomio mínimo sobre M divide al polinomio mínimo sobre k, entonces el polinomio mínimo sobre M es separable. □

Proposición 3.1.34. *Sea $L|k$ una extensión finita de grado n. Entonces $L|k$ tiene a lo más n diferentes morfismos a $\widehat{k}$ que extienden a la inclusión de k en $\widehat{k}$ y se da la igualdad si y solo si $L|k$ es separable.*

Demostración. Por inducción sobre el número de algebraicos tales que $L = k(u_1, \ldots, u_n)$.

Para $n = 1$ tenemos que $L = k(u)$. El lema 3.1.22 y el hecho de que u es separable si y solo si hay m morfismos que extienden la inclusión a $\widehat{k}$, donde m es el grado del polinomio mínimo de u, producen el resultado deseado.

Para $n > 1$, $L = k(u_1, \ldots, u_n) = k(u_1, \ldots, u_{n-1})(u_n)$. Por hipótesis de inducción hay a lo más $[k(u_1, \ldots, u_{n-1})(u_n) : k(u_1, \ldots, u_{n-1})]$ morfismos de $k(u_1, \ldots, u_{n-1})(u_n)$ a $\widehat{k}$ que extienden la inclusión de $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$ en $\widehat{k}$, también por hipótesis de inducción hay a lo más $[k(u_1, \ldots, u_{n-1}) : k]$ morfismos de $k(u_1, \ldots, u_{n-1})$ en $\widehat{k}$ que extienden a la inclusión de k en $\widehat{k}$. Como todo morfismo es un encaje, entonces hay a lo más

$$[k(u_1, \ldots, u_{n-1})(u_n) : k(u_1, \ldots, u_{n-1})][k(u_1, \ldots, u_{n-1}) : k] = [k(u_1, \ldots, u_n) : k]$$

morfismos de $k(u_1, \ldots, u_n)$ en $\widehat{k}$ que extienden a la inclusión de k en $\widehat{k}$ y se da la igualdad si y solo si la extensión es separable. □

De la prueba podemos concluir que cualquier extensión de la forma $k(a_1, \ldots, a_n)$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son separables sobre k, es una extensión separable de k.

Definición 3.1.35. El subconjunto de $\widehat{k}$ que consiste de todos los elementos separables sobre k se denota k_S y se llama la cerradura separable de k.

Notemos que por la proposición anterior, k_S es campo y k es perfecto si y solo si $k_S = \widehat{k}$.

3.1.5. Extensiones exactas.

Ahora vamos a relacionar a los grupos $Aut_{E(M)}(L|M)$, $Aut_{E(k)}(M|k)$ y $Aut_{E(k)}(L|k)$ para una secuencia de extensiones algebraicas $L|M|k$.

Observación 3.1.36. $Aut_{E(M)}(L|M) \leqslant Aut_{E(k)}(L|k)$.

Observación 3.1.37. Si para toda $\sigma \in Aut_{E(k)}(L|k)$ se cumple que $\sigma(M) \subset M$, entonces $\sigma|_M \in Aut_{E(k)}(M|k)$, además podemos definir un morfismo natural de grupos $Aut_{E(k)}(L|k) \to Aut_{E(k)}(M|k)$ que es restringir a M. Podemos ver también que el núcleo de dicho morfismo es exactamente $Aut_{E(M)}(L|M)$. De esta forma tenemos la sucesión exacta izquierda.

$$1 \to Aut_{E(M)}(L|M) \to Aut_{E(k)}(L|k) \to Aut_{E(k)}(M|k)$$

Observación 3.1.38. De la sucesión anterior, la suprayectividad es equivalente a que se pueda extender cualquier automorfismo $\phi : M|k \to M|k$, a un automorfismo $\widehat{\phi} : L|k \to L|k$.

Definición 3.1.39. Diremos que la secuencia de extensiones $L|M|k$ es exacta si el morfismo restringir $Aut_{E(k)}(L|k) \to Aut_{E(k)}(M|k)$ está bien definido y es suprayectivo.

3.1.6. Extensiones normales.

Definición 3.1.40. Sea $L|k$ una extensión algebraica. Diremos que $L|k$ es una extensión normal si para cada polinomio irreducible $f(x) \in k[x]$ que tenga una raíz en L, $f(x)$ se descompone sobre L.

Observación 3.1.41. 1) Esta definición es equivalente a pedir que L contenga al campo de descomposición del polinomio mínimo de cada $l \in L$.

2) Cualquier extensión algebraicamente cerrada $L|k$ es normal.

Proposición 3.1.42. *Sea $L|k$ una extensión algebraica (considerada como subextensión de $\widehat{k}|k$). $L|k$ es normal si y solo si cada automorfismo σ de $\widehat{k}|k$ se restringe a un automorfismo de $L|k$, i.e. $\sigma(L) = L$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ $\forall l \in L$, $\sigma(l)$ es raíz del polinomio mínimo de l sobre k. Como L es normal, entonces $\sigma(l) \in L$, i.e., σ es un endomorfismo de L, por el corolario 3.1.24 σ es un automorfismo. Por lo tanto $\sigma(L) = L$.

$\Leftarrow]$ Sean $l \in L$ y $g(x) \in L[x]$ su polinomio mínimo sobre L. Sea u una raíz de $g(x)$, en este caso consideramos el morfismo de campos $k(l) \to k(u)$ que fija a k y manda l en u. Este isomorfismo de campos se extiende a un isomorfismo σ de $\widehat{k}$. Así $\sigma(l) = u \in L$. $\square$

Notemos que de este resultado obtenemos que también dada una extensión intermedia $L|M|k$, si $L|k$ es normal entonces $L|M$ es normal.

Corolario 3.1.43. *$L|k$ es normal si y solo si $\widehat{k}|L|k$ es exacta.*

Demostración. Si $L|k$ es normal, entonces tenemos el morfismo restricción $Aut_{E(k)}(\widehat{k}|k) \to Aut_{E(k)}(L|k)$, además todo automorfismo de $L|k$ se levanta a un automorfismo de $\widehat{k}|k$ por lo que dicho morfismo es suprayectivo. $\square$

Corolario 3.1.44. *Si $L|M|k$ es una secuencia de extensiones con $L|k$ y $M|k$ normales, entonces $L|M|k$ es exacta.*

Demostración. Sea $\sigma \in Aut_{E(k)}(L|k)$, σ se levanta a un automorfismo $\widehat{\sigma} : \widehat{k} \to \widehat{k}$. Luego $\sigma|_M = \widehat{\sigma}|_M$ y como $M|k$ es normal, entonces se sigue que el morfismo restricción $Aut_{E(k)}(L|k) \to Aut_{E(k)}(M|k)$ está bien definido. Más aún, todo automorfismo $\alpha \in Aut_{E(k)}(M|k)$ se levanta a un isomorfismo $\widehat{\alpha}$ de $\widehat{k}$ y como $L|k$ es normal, $\widehat{\alpha}|_L$ está bien definida, además $\widehat{\alpha}|_L|_M = \alpha$. Por lo tanto tal morfismo es suprayectivo. $\square$

3.2. Extensiones de Galois y clasificación de sus subextensiones.

3.2.1. Extensiones de Galois.

Sea G un grupo.

Recordemos que una acción izquierda de G en $L|k$ está dada por un morfismo de grupos $G \to Aut_{E(k)}(L|k)$. Podemos considerar el conjunto $\{x \in L|gx = x \quad \forall g \in G\}$, donde gx es la imagen de g evaluada en x. A este conjunto lo denotaremos por L^G.

Proposición 3.2.1. *Con la notación anterior, L^G es un subcampo de L que contiene a k.*

Definición 3.2.2. Sea $L|k$ algebraica. Denotaremos a $Aut_{E(k)}(L|k)$ por $Gal(L|k)$. Decimos que $L|k$ es Galois si $L^{Gal(L|k)} = k$, donde $Gal(L|k)$ actúa de manera natural.

Sea $L|k$ una extensión algebraica con grupo de automorfismos G. Para cada elemento $l \in L$, podemos considerar al subconjunto de G de todos los automorfismos que fijan a l, este subconjunto es un subgrupo de G llamado el estabilizador de l y se denota G_l.
Para cada l escribimos el polinomio $f_l(x) = \prod_{[\sigma] \in G/G_l}(x - \sigma(l))$ (G/G_l) visto con clases laterales izquierdas).
Ese polinomio está bien definido pues si $[\sigma] = [\sigma']$, entonces $\sigma = \sigma' \circ f$ para algún automorfismo f que fija a l, por lo que $\sigma(l) = \sigma'(l)$ y como cualquier automorfismo de $L|k$ permuta a las raíces del polinomio mínimo de l, tal producto es finito. Por otro lado es fácil ver que los coeficientes de f_l son invariantes bajo cualquier automorfismo de $L|k$. Por lo tanto, si la extensión fuera de Galois, $f_l \in k[x]$ y f_l divide al polinomio mínimo de l pues todas las raíces de f_l son raíces de $min(l, k)$ y además son distintas, como $min(l, k)$ es irreducible en $k[x]$, f_l sería el polinomio mínimo de l que además es separable, por lo que tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3. *$L|k$ es Galois si y solo si $L|k$ es normal y separable.*

Demostración. $\Rightarrow]$ es lo que acabamos de ver.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $L|k$ es normal y separable. Sea $l \in L\backslash k$, como $L|k$ es separable, su polinomio mínimo al ser de grado mayor a 1 debe tener alguna otra raíz u que además está en L por ser normal. Así tenemos el isomorfismo de campos $k(l) \to k(u)$ que manda l en u y fija a k, por el Teorema 3.1.23, tal morfismo se extiende a un automorfismo de $\widehat{k}$ y por ser normal se restringe bien a L por lo que l no pertenece a $L^{Gal(L|k)}$. Por lo tanto, $L|k$ es de Galois. □

Corolario 3.2.4. *Sea $L|M|k$ una secuencia de extensiones tal que $L|k$ es de Galois. Entonces $L|M$ es de Galois.*

Teorema 3.2.5. *$k_S|k$ es de Galois.*

Demostración. Por definición $k_S|k$ es separable, por lo que si $\alpha \in k_S/k$, su polinomio mínimo no puede ser de grado 1, así que debe haber otra raíz de ese polinomio α'. Consideremos el isomorfismo $\phi : k(\alpha) \to k(\alpha')$ que manda a α en α' y fija a k. Por el teorema 3.1.23, ϕ se extiende a un automorfismo $\widehat{\phi}$ de $\widehat{k}$ y $\widehat{\phi}(k_S) = k_S$ pues como $\widehat{\phi}$ permuta raíces de polinomios mínimos, manda separables en separables. Por lo tanto $\widehat{\phi}|_{k_S}$ es un automorfismo de k_S que no fija a α. Por lo tanto, $k_S|k$ es de Galois. □

Con esto podemos concluir que cualquier extensión de Galois es subextensión de $k_S|k$.

Definición 3.2.6. El grupo de Galois absoluto de k es el grupo $Gal(k_S|k)$ y se denota $Gal(k)$.

3.2.2. Clasificación de subextensiones de una extensión de Galois finita.

Empecemos notando algunos aspectos sobre extensiones finitas.

Por el lema 3.1.22, sabemos que

$$|Hom_{E(k)}(L|k, \widehat{k}|k)| \leqslant [L : k]$$

con igualdad si y solo si la extensión es separable. Por la proposición 3.1.42, cada morfismo $L|k \to \widehat{k}|k$ es un automorfismo de $L|k$ restringiendo a la imagen por lo que tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2.7. *Si una extensión $L|k$ finita es Galois ($\Rightarrow$ separable y normal), entonces su grupo de Galois es finito, con*

$$|Gal(L|k)| = [L : k]$$

Tenemos también los siguientes resultados importantes sobre acciones de un grupo finito en extensiones de campos.

Teorema 3.2.8. *Todo conjunto $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ de automorfismos distintos de L es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ es un conjunto de automorfismo distintos de L linealmente dependiente de tamaño mínimo. Entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in L$, con algún a_i no cero, tales que $a_1\sigma_1 + \cdots + a_n\sigma_n = 0$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $a_1 = 1$. Notemos que como $n > 1$, $\sigma_1 \neq \sigma_n$, por lo tanto existe $y \in L$ tal que $\sigma_1(y) \neq \sigma_n(y)$. Sea $x \in L$, $a_1\sigma_1(x) + \cdots + a_n\sigma_n(x) = 0$, multiplicando esta ecuación por $\sigma_n(y)$ obtenemos $a_1\sigma_1(x)\sigma_n(y) + \cdots + a_n\sigma_n(x)\sigma_n(y) = 0$. Por otro lado, $a_1\sigma_1(x)\sigma_1(y) + \cdots + a_n\sigma_n(x)\sigma_n(y) = 0$, restando ambas ecuaciones obtenemos:

$$a_1[\sigma_n(y) - \sigma_1(y)]\sigma_1(x) + \cdots + a_n[\sigma_n(y) - \sigma_{n-1}(y)]\sigma_{n-1}(x) = 0, \forall x \in L$$

como $a_1(\sigma_n(y) - \sigma_1(y)) \neq 0$ $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ es un subconjunto más pequeño linealmente dependiente, contradiciendo la minimalidad de $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$. Por lo tanto $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ es linealmente independiente. □

Lema 3.2.9. *Sea G un subgrupo finito de $Aut(L)$. Entonces $[L : L^G] \geqslant |G|$.*

Demostración. Supongamos que $[L : L^G] = r < n = |G|$. Veamos a G como $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$.

Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ una base para L sobre L^G y consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sigma_1(\alpha_1)x_1 + \cdots + \sigma_n(\alpha_1)x_n = 0$$
$$\cdots$$
$$\sigma_1(\alpha_r)x_1 + \cdots + \sigma_n(\alpha_r)x_n = 0$$

Como hay más columnas que renglones el sistema tiene una solución no trivial $(e_1, \ldots, e_n)$, i.e. $(e_1\sigma_1 + \cdots + e_n\sigma_n)(\alpha_i) = 0 \quad \forall i$, por lo tanto $(e_1\sigma_1 + \cdots + e_n\sigma_n)(x) = 0 \quad \forall x \in L$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $[L : L^G] \geqslant |G|$. □

Proposición 3.2.10. *(Lema de Artin) Sea G un subgrupo finito de $Aut(L)$. Entonces la extensión $L|L^G$ es finita con $[L : L^G] \leqslant |G|$.*

Demostración. Supongamos que $|G| = n$.

Sean $c_1, \ldots, c_{n+1} \in L$. Para cada $\sigma \in G$, consideremos la ecuación

$$\sigma(c_1)x_1 + \cdots + \sigma(c_{n+1})x_{n+1} = 0$$

por lo que tenemos un sistema homogéneo de n ecuaciones con $n + 1$ incógnitas, así que tiene una solución no trivial. Tomemos entonces una solución no trivial $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ con el mayor número de ceros. Reordenando y multiplicando por una constante apropiada podemos suponer que $e_1 = 1$. Tomemos $\tau \in G$ y apliquémosla a cada ecuación.

$$\tau(\sigma(c_1))\tau(e_1) + \cdots + \tau(\sigma(c_{n+1}))\tau(e_{n+1}) = 0$$

Como G es grupo, τ solo permuta a sus elementos, por lo que obtenemos el mismo sistema de ecuaciones con una nueva solución $(\tau(e_1), \ldots, \tau(e_{n+1}))$ y como $e_1 = 1$, entonces $\tau(e_1) = e_1$, como el conjunto solución es subespacio de L^{n+1}, $(\tau(e_1) - e_1, \ldots, \tau(e_{n+1}) - e_{n+1})$ es una solución del sistema con más ceros (esto pues si $e_j = 0$ para alguna j, entonces $\tau(e_j) - e_j = 0$), por lo que $\tau(e_i) = e_i \; \forall i$. Como τ fue arbitraria se sigue que $e_i \in L^G \; \forall i$ y por lo tanto, tomando $\sigma = id$ tenemos que $e_1c_1 + \cdots + e_{n+1}c_{n+1} = 0$. Por lo tanto $[L : L^G] \leqslant |G|$. □

Corolario 3.2.11. *Sea $L|k$ extensión finita. Entonces $|Gal(L|k)| \leqslant [L : k]$.*

Demostración. Tenemos la secuencia de extensiones $L|L^{Gal(L|k)}|k$. Así tenemos que $[L : k] = [L : L^{Gal(L|k)}][L^{Gal(L|k)} : k] = |Gal(L|k)|[L^{Gal(L|k)} : k]$. Por lo tanto $|Gal(L|k)| \leqslant [L : k]$. Más aún, se da la igualdad si y solo si $k = L^{Gal(L|k)}$. □

Corolario 3.2.12. *Sean L campo y G, H subgrupos finitos de $Aut(L)$.*
1) $Gal(L|L^G) = G$.
2) $G = H \Leftrightarrow L^G = L^H$.

Demostración. 1) Supongamos que $G = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$. Claramente $G \leqslant Gal(L|L^G)$. Por el lema de Artin tenemos $n = |G| \leqslant |Gal(L|L^G)| \leqslant [L : L^G] = n$. Por lo tanto, $Gal(L|L^G) = G$.

2)$\Leftarrow$] Supongamos que $L^G = L^H$. Por 1), $H = Gal(L|L^H) = Gal(L|L^G) = G$. □

Tenemos el siguiente teorema de caracterización de extensiones de Galois finitas.

Teorema 3.2.13. *Sea $L|k$ una extensión de campos finita. Son equivalentes:*
1) L es campo de descomposición de un polinomio separable sobre k.
2) $k = L^G$, para algún subconjunto $G \subseteq Aut(L|k)$.
3) $L|k$ es extensión de Galois.
4) $[L : k] = Gal(L|k)$.

Demostración. Ya tenemos 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4)
1)$\Rightarrow$ 3)
Supongamos que $L|k$ es el campo de descomposición de $f(x) \in k[x]$ separable, entonces ya tenemos que la extensión es separable, supongamos que $L = k(s_1, \ldots, s_n)$, donde $s_1, \ldots, s_n$ son todas las raíces de $f(x)$. Sea $\sigma : \widehat{k} \to \widehat{k}$ un automorfismo, como σ solo permuta los s_i y preserva a k entonces σ se restringe bien a L. Por lo tanto $L|k$ es de Galois.
3) $\Rightarrow$ 1)
Supongamos que $L|k$ es de Galois, entonces es normal y separable. Supongamos que $L = K(s_1 \ldots, s_n)$ con $s_1, \ldots, s_n$ separables (pues $L|k$ es finita y separable). Supongamos que $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ son sus polinomios mínimos respectivamente. Notemos que $f_i = f_j$ si y solo si s_i es conjugado de s_j, así podemos suponer que $f_1, \ldots, f_n$ son todos distintos quitando conjugados, además no tienen raíces en común. Así L es el campo de descomposición de $f(x) = \prod_i f_i$ que es separable. □

Teorema 3.2.14. *Sea $L|k$ una extensión de Galois finita. Entonces existe una biyección entre extensiones intermedias de $L|k$ y subgrupos de $Gal(L|k)$.*

Demostración. Sea $Lat(L|k)$ el conjunto de extensiones intermedias de $L|k$ y $Sub(G)$ el conjunto de todos los subgrupos de $G = Gal(L|k)$.
Tenemos las asignaciones:

$$\begin{tikzcd}
M|k \arrow[r, mapsto, bend left] & Gal(L|M) \\
Lat(L|k) \arrow[r, bend left] & Sub(G) \arrow[l, bend left] \\
L^H & H \arrow[l, mapsto, bend left]
\end{tikzcd}$$

Que por los corolarios 3.2.4 y 3.2.12 se sigue que son biyecciones y además tenemos que son inversas.

□

Notemos que si $M|k$ es una extensión intermedia que además es de Galois, entonces como es normal, la secuencia $L|M|k$ es exacta. De aquí se sigue que

$$Gal(M|k) \cong \frac{Gal(L|k)}{Gal(L|M)}$$

Además $Gal(L|M) \trianglelefteq Gal(L|k)$.

Si $H \trianglelefteq G$:

Sea $\sigma \in Gal(L|k)$. Dados $l \in L^H$ y $\tau \in H$, como $H \trianglelefteq G$, entonces $\sigma^{-1}(\tau(\sigma(l))) = l \Rightarrow \tau(\sigma(l)) = \sigma(l)$ y como τ fue arbitraria entonces $\sigma(l) \in L^H$. Por lo tanto $\sigma|_{L^H} \in Gal(L^H|k)$ y por lo tanto $L^H|k$ es una extensión de Galois.

Proposición 3.2.15. *La correspondencia anterior establece una biyección entre extensiones intermedias de Galois y subgrupos normales de $Gal(L|k)$.*

De hecho, como ya se justificará en el capitulo 5, si denotamos por $\mathcal{O}_G$ a la subcategoría plena de $\boldsymbol{Con}^G$ que consta de los G-conjuntos de la forma G/H donde $H \leqslant G$, entonces tenemos un isomorfismo de categorías entre $E(k)^{op}_{L|k}$ (la categoría opuesta a la de extensiones intermedias de $L|k$) y $\mathcal{O}_{Gal(L|k)}$.

3.2.3. Clasificación de subextensiones de una extensión de Galois infinita.

Proposición 3.2.16. *Sea $L|k$ una extensión de Galois. Entonces:*

$$L = \bigcup_{L|M|k} M$$

tal que $M|k$ es Galois finita.

Demostración. $\subset$] Dado $\alpha \in L$, como L es normal y separable, su polinomio mínimo $f(x)$ es separable y por el teorema 3213 su campo de descomposición sobre k, digamos M, es una extensión de Galois finita tal que $\alpha \in M$ y $L|M|k$. □

De esta forma, podemos notar que cualquier automorfismo de $L|k$ está completamente determinado por su restricción a sus subextensiones de Galois finitas.

Proposición 3.2.17. *Sea $L|k$ una extensión de Galois y $M|k$ una subextensión finita, entonces existe una subextensión $L|P|M|k$, tal que $P|k$ es de Galois finita.*

Demostración. Supongamos que $M = K(a_1, \ldots, a_n)$ y sea f_i el polinomio mínimo de a_i, podemos suponer que todos los a_i no son conjugados, de otra forma descartamos algunos, entonces el polinomio $f = \prod_i f_i$ es un polinomio separable, además por el teorema 3.2.13 la extensión P que es el campo de descomposición de f, es una extensión de Galois finita tal que $L|P|M|k$. □

Notemos los siguientes puntos para una extensión de Galois $L|k$:

1) Dada una extensión de Galois finita intermedia $M|k$, la secuencia $L|M|k$ es exacta y por tanto tenemos el morfismo restricción:

$$\psi_M : Gal(L|k) \to Gal(M|k)$$

Éste está bien definido y $Gal(M|k)$ es un cociente finito de $Gal(L|k)$.

2) Dada una torre de extensiones intermedias $L|M_1|M_2|k$, con $M_1|k$, $M_2|k$ de Galois finitas, nosotros sabemos que la secuencia $M_1|M_2|k$ es también exacta y por lo tanto tenemos el mapa restricción:

$$\phi_{M_2}^{M_1} : Gal(M_1|k) \to Gal(M_2|k)$$

Además si $M_3|k$ es una tercer subextensión de Galois finita con $L|M_1|M_2|M_3|k$, es fácil ver que

$$\phi_{M_3}^{M_1} = \phi_{M_3}^{M_2} \circ \phi_{M_2}^{M_1}$$

y también que

$$\psi_{M_2} = \phi_{M_2}^{M_1} \circ \psi_{M_1}$$

Si $P = (Gal(M_i|k), \phi_{M_j}^{M_i})_{i,j \in I}$ es nuestro sistema dirigido, es fácil notar que $(Gal(L|k), \psi_{M_i})_{i \in I}$ es el limite de P, i.e.

$$Gal(L|k) = \varprojlim P$$

Por lo tanto $Gal(L|k)$ es un subgrupo de $\prod_i Gal(M_i|k)$, el cual dotamos de la topología producto con cada $Gal(M_i|k)$ discreto. A $Gal(L|k)$ lo dotamos de la topología inducida por el producto, éste como veremos mas adelante es un grupo profinito. Finalmente enunciamos el teorema fundamental para el caso no necesariamente finito cuya prueba se puede ver en [13], capítulo 3.

Teorema 3.2.18. *Sea L una subextensión de una extensión de Galois $K|k$. Entonces tenemos que $Gal(K|L)$ es un subgrupo cerrado de $Gal(K|k)$. Más aún, las asignaciones*

$$L \longmapsto Gal(L|k) \qquad H \longmapsto K^H$$

establecen una biyección entre subextensiones $K|L|k$ y subgrupos cerrados de $Gal(K|k)$. La subextensión $L|k$ es de Galois si y solo si $Gal(K|L)$ es normal en $Gal(K|k)$, en este caso tenemos un isomorfismo

$$Gal(L|k) \cong \frac{Gal(K|k)}{Gal(K|L)}$$

Capítulo 4

Teoría de Galois en espacios cubrientes

Habiendo desarrollado la teoría de Galois en campos, en este capítulo desarrollaremos lo que se conoce como la teoría de Galois de espacios cubrientes en la cual veremos muchas similitudes categóricas con la teoría de Galois en campos. La teoría en este capítulo fue sacada de [6], por otro lado los conceptos básicos de topología se pueden revisar en [4].

4.1. Teoría de espacios cubrientes.

4.1.1. Espacios cubrientes.

Definición 4.1.1. Sea X un espacio topológico. Un espacio sobre X es un objeto $p : Y \to X$ en la categoría coma $\boldsymbol{Top}/X$ de espacios topológicos sobre X.

En ocasiones lo escribimos (Y, p).

Decimos que (Y, p) es conexo si Y es conexo.

Definición 4.1.2. Un espacio cubriente de X, o cubierta de X, es un espacio sobre X, $p : Y \to X$, tal que para cada punto $x \in X$, existe una vecindad V_x de x tal que $p^{-1}(V_x)$ es la unión de una colección de abiertos disjuntos $\{U_i\}$ y la restricción $p|_{U_i}$ es un homeomorfismo en V_x para cada i.

Notemos que si X es un espacio conexo, una cubierta $p : Y \to X$ es suprayectiva o bien es la flecha vacía.

Definición 4.1.3. Sea $p : Y \to X$ un espacio sobre X. La fibra de un punto $x \in X$ es $p^{-1}(x)$. Usaremos la expresión “punto sobre x” para referirnos a un punto en la fibra de x.

Observaciones:

1) Notemos que si (Y, p) es una cubierta de X, entonces para cada $x \in X$, su fibra es un subconjunto discreto de Y.

2) La función $\#(x) = \#(p^{-1}(x))$ es localmente constante para cada $x \in X$ y, si X es conexo entonces $\#$ es constante. En tal caso, la imagen de $\#$ será el grado de la cubierta.

Así, si X es conexo se tiene que toda fibra es homeomorfa a un espacio topológico discreto I.

Se dice que la cubierta es finita si cada fibra es finita.

Ejemplo 4.1.4. Sean X un espacio topológico e I un espacio discreto distinto del vacío. Tenemos la proyección en X, $p : X \times I \to X$, la cual resulta ser una cubierta. A esta cubierta la llamamos cubierta trivial.

Denotamos por $\boldsymbol{Cub}(X)$ a la subcategoría plena de $\boldsymbol{Top}/X$ cuyos objetos son las cubiertas de X.

A partir de este momento siempre supondremos que X es localmente conexo.

Proposición 4.1.5. *Si $f : (Z, q) \to (Y, p)$ es un morfismo en $\boldsymbol{Cub}(X)$ con Y conexo, entonces $(f : Z \to Y) \in \boldsymbol{Cub}(Y)$.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y V una vecindad abierta de $p(y)$ con la propiedad de cubierta para p y q. Como X es localmente conexo, podemos suponer V conexo, así $q^{-1}(V) = \bigcup U_i$, con los U_i abiertos disjuntos no vacíos, cada uno homeomorfo a V, lo mismo para $p^{-1}(V) = \bigcup V_j$. Como $p \circ f = q$, entonces $f(\bigcup U_i) \subset \bigcup V_j$ y como cada U_i es conexo, entonces la imagen de cada U_i es algún V_j. Esto verifica la condición de cubriente para los puntos en $f(\bigcup U_i)$, restaría ver que f es suprayectiva.
De la parte anterior se deduce que $f(Z)$ es abierto, veamos que $Y - f(Z)$ es abierto. Dado $y \in Y - f(Z)$, usando el argumento de la parte anterior, $y \in V_j$ para algún j y como cada $f(U_i)$ esta obligado a ser algún V_k, entonces $V_j \subset Y - f(Z)$. Como Y es conexo, al ser $f(Z)$ aberrado (i.e. abierto y cerrado) y no ser trivial, entonces $f(Z) = Y$. Por lo tanto (Z, f) es cubriente de Y. $\square$

Lema 4.1.6. *Sean (Y, p) una cubierta de X, Z un espacio topológico conexo y $f, g : Z \to Y$ funciones continuas con $p \circ f = p \circ g$. Si f y g coinciden en algún punto, entonces son iguales.*

Demostración. Probaremos que el subconjunto de Z donde f y g coinciden, digamos A, es aberrado, de esta manera al ser Z conexo y A distinto del vacío se llegaría a que $A = Z$.

Sea $z \in Z$ tal que $f(z) = g(z) = y$. Por la propiedad de cubierta existe una vecindad abierta de $p(y)$, V en X, tal que $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$, con cada U_i abierto en Y de manera que $p|_{U_i}$ es un homeomorfismo en V. Sea U_j el abierto que contiene a y, por continuidad de f y g existe una vecindad W de z, tal que $f(W) \subset U_j$, $g(W) \in U_j$. Como $p(f(z')) = p(g(z'))$ $\forall z' \in W$ y $p|_{U_i}$ es un homeomorfismo, tenemos que $f(z') = g(z')$. Por lo tanto A es abierto.

Sea $z \in Z$ tal que $f(z) \neq g(z)$, como $p(f(z)) = p(g(z)) = y$, entonces $f(z)$ y $g(z)$ están en la misma fibra y por la propiedad de cubierta, análogo al caso anterior, podemos encontrar W_1, W_2 vecindades abiertas de $f(z), g(z)$ respectivamente, disjuntas, dadas por la propiedad de cubierta. Por la continuidad de f y g, existe una vecindad W de z, tal que $f(z') \neq g(z')$ $\forall z' \in W$. Por lo tanto A es cerrado. $\square$

En particular si $\phi : (Y, p) \to (Y, p)$ es un automorfismo de cubiertas conexas de X y ϕ tiene un punto fijo, entonces $\phi = id_Y$.

4.1.2. Acciones de Grupos, espacios cociente y cubiertas.

Consideremos una acción de un grupo G sobre un espacio topológico Y. Recordemos que tal acción corresponde a un morfismo de grupos $G \to Aut_{\boldsymbol{Top}}(Y)$ y por lo tanto identificamos a cada $g \in G$ con un homeomorfismo de Y en Y.

Definición 4.1.7. El espacio cociente, Y/G, es el conjunto de orbitas bajo la acción de G equipada con la siguiente topología. Tenemos la proyección natural, $\pi : Y \to Y/G$. Así, equipamos a dicho cociente con la topología más fina que hace a π continua.

Así, cualquier función continua $f : Y \to Z$ tal que $f \circ g = f \quad \forall g \in G$ se factoriza de manera única a través de Y/G.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ Y/G \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\hat{f}$ es continua. A continuación introduciremos un tipo particular de acciones.

Definición 4.1.8. Sea G un grupo actuando en un espacio topológico Y. Decimos que la acción de G es propiamente discontinua si cada $y \in Y$ admite una vecindad abierta U tal que $g(U) \bigcap g'(U) = \varnothing$ si $g \neq g'$.

Como veremos en la siguiente proposición, las acciones propiamente discontinuas producen cubiertas.

Proposición 4.1.9. *Si la acción de G sobre Y es propiamente discontinua, entonces la proyección $\pi : Y \to Y/G$ es una cubierta.*

Demostración. Para cada $y \in Y$, tomemos una vecindad abierta U con la propiedad inducida por la uniformidad de la acción de G. La colección de subconjuntos $\{g(U)\}_{g \in G}$ son todos disjuntos. $\pi : Y \to Y/G$ identifica todos estos subconjuntos con el abierto $\pi(U)$ y por como está construido Y/G, π se restringe a un homeomorfismo en cada $g(U)$ a $\pi(U)$. Por lo tanto (Y, π) es una cubierta de Y/G. $\square$

4.1.3. La Acción de $Aut_{\boldsymbol{Cub}(X)}(Y, p)$ en (Y, p).

$Aut_{\boldsymbol{Cub}(X)}(Y, p)$ actúa de manera natural en Y.
Cada automorfismo $\phi : Y \to Y$ envía a un punto y a su imagen $\phi(y)$ y ϕ preserva la estructura de las fibras de (Y, p). Por lo tanto, dado $x \in X$, ϕ se restringe a la fibra $\phi|_{p^{-1}(x)}$, como ϕ es invertible, estas restricciones son biyecciones y por lo tanto son permutaciones en las fibras.

Proposición 4.1.10. *Para una cubierta conexa $p : Y \to X$, la acción del grupo de automorfismos $Aut_{\boldsymbol{Cub}(Y)}(Y, p)$ en (Y, p) es propiamente discontinua.*

Demostración. Sea $y \in Y$, por la propiedad de cubierta existe una vecindad abierta y conexa V de $p(y)$ en X, tal que $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$, con cada U_i homeomorfo a V a través de $p|_{U_i}$. Sea $\phi \in Aut_{\boldsymbol{Cub}(X)}(Y, p)$, como ϕ preserva fibras, $\phi_{\bigsqcup_{i \in I} U_i} : \bigsqcup_{i \in I} U_i \to \bigsqcup_{i \in I} U_i$ es un homeomorfismo. Notando la idea de la prueba en la proposición 4.1.5, cada U_i se mapea en algún U_j y por el lema 4.1.6, si $\phi \neq id_Y$, entonces $i \neq j$. Por lo tanto, si $\phi, \phi' \in Aut_{\boldsymbol{Cub}(Y)}(Y, p)$ son distintos, entonces $(\phi')^{-1}\phi \neq id_Y$, por lo tanto, si U_i es el abierto correspondiente a y, $\phi(U_i) = \phi'(U_j)$ con $i \neq j$, por lo tanto $\phi(U_i) \neq \phi'(U_i)$. $\square$

Por la proposición anterior, si (Y, p) es un cubriente conexo la proyección $\pi : Y \to Y/Aut(Y, p)$ es un cubriente y es sencillo ver que su grupo de automorfismos es $Aut(Y, p)$. En general tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.1.11. *Si $G \leqslant Aut_{\boldsymbol{Cub}(X)}(Y, p)$ actúa de forma propiamente discontinua en Y, con Y conexo, entonces el grupo de automorfismos de $\pi : Y \to Y/G$ es precisamente G.*

Demostración. Sea $\phi \in Aut(Y, \pi)$, entonces $\pi \circ \phi = \pi \Rightarrow O_{\phi(x)} = O_x = O_{\psi_x(x)}$ $\forall x \in X$ y para algún $\psi_x \in G$, tal que $\phi(x) = \psi_x(x)$. Por el lema 4.1.6, $\phi = \psi_x \in G$. $\square$

4.1.4. Cubrientes de Galois y clasificación de sus subcubrientes.

Recordemos de la definición de espacio cociente que se da la siguiente factorización.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ Y/Aut(Y,p) \arrow[ur, dashed, "\widehat{p}"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 4.1.12. Un cubriente $p : Y \to X$ se dice que es Galois (o normal) si Y es conexo y el correspondiente $\widehat{p}$ es un homeomorfismo.

Proposición 4.1.13. *Un cubriente conexo $p : Y \to X$ es Galois si y solo si $Aut(Y, p)$ actúa transitivamente en cada fibra (i.e para cada $x \in X$ y para cualesquiera y, y' en su fibra existe un automorfismo que mapea y en y').*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que (Y, p) es Galois, entonces $\widehat{p}$ es un homeomorfismo, esto nos dice que como es uno a uno, para cada $x \in X$, su fibra corresponde a una órbita en Y, por lo tanto $Aut(Y, p)$ actúa transitivamente en fibras.
$\Leftarrow$] Si $Aut(Y, p)$ actúa transitivamente en fibras, entonces es claro que el correspondiente $\widehat{p}$ es uno a uno y siempre se da que es suprayectiva pues p es suprayectiva. Por otro lado, para ver que su inversa es continua tomemos un abierto U en $Y/Aut(Y, p)$, i.e. $\pi^{-1}(U) = W$ es abierto en Y, luego para cada $x \in p(W) = \widehat{p}(U)$ existe una vecindad abierta U' con la propiedad inducida por ser p cubierta, por lo tanto $p^{-1}(U') = \bigsqcup U_i$ con cada U_i homeomorfo a U', por lo tanto $p(p^{-1}(U') \bigcap W) = U''$ es abierto en X y no es difícil ver que $U'' \subset \widehat{p}(U)$, como x fue arbitraria $\widehat{p}(U)$ es abierto. $\square$

Observación 4.1.14. Para ver si una cubierta conexa $p : Y \to X$ es Galois basta ver que $Aut(Y, p)$ actúe transitivamente en una fibra pues, si esto ocurre, como ya se vio que para cubiertas conexas las fibras tienen cardinalidad constante, al ser $Y/Aut(Y, p)$ una cubierta conexa de X con una fibra de un punto, entonces toda fibra tiene un punto.

Teorema 4.1.15. *Sea $p : Y \to X$ una cubierta Galois. Para cada $H \leqslant G$, con $G = Aut(Y, p)$, la proyección p induce un cubriente natural $\widehat{p_H} : Y/H \to X$.*

Inversamente, si $q : Z \to X$ es una cubierta conexa que se ajusta al diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Z \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd}$$

con f continua, entonces $f : Y \to Z$ es una cubierta Galois y $Z \cong Y/H$, para $H = Aut(Y, f)$.

Las asignaciones $H \mapsto Y/H$, $(f : Y \to Z) \mapsto Aut(Y, f)$ inducen una biyección entre subgrupos de G y cubiertas intermedias Z.

Demostración. Como $H \subset Aut(Y, p)$, p se factoriza de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p_H"'] & X \\ Y/H \arrow[ur, dashed, "\widehat{p_H}"'] & \end{tikzcd}$$

La función $\widehat{p_H}$ es continua por la propiedad universal del cociente. Para abiertos $V \subset X$ suficientemente pequeños, $p^{-1}(V) \cong V \times F$ para cierto conjunto discreto F equipado con una acción de H, el conjunto abierto $\widehat{p_H}^{-1}(V) \subset Y/H$ será entonces isomorfo al producto de V por el conjunto discreto de H-órbitas de F. Por lo tanto $\widehat{p_H} : Y/H \to X$ es una cubierta.

Para el otro lado, por la proposición 4.1.5 $f : Y \to Z$ es una cubierta y por lo tanto $H = Aut(Y, f) \leqslant G$, por la proposición 4.1.13 para ver que es Galois, basta ver que H actúa transitivamente en las fibras.

Sean $z \in Z$ y $y_1, y_2 \in f^{-1}(z)$, así y_1, y_2 están en $p^{-1}(q(z))$, como (Y, p) es Galois, existe $\phi \in G$ tal que $\phi(y_1) = y_2$. Basta probar que $\phi \in H$, que es equivalente a probar que $Y = \{y \in Y | f(y) = f(\phi(y))\}$, pero esto se sigue directamente del lema 4.1.6 usando que $q \circ (f \circ \phi) = q \circ f$. Usando la proposición 4.1.11 y el hecho de que (Y, f) es Galois para cubiertas intermedias, se sigue inmediatamente que tales asignaciones son inversas. □

Proposición 4.1.16. *Las asignaciones anteriores determinan una biyección entre cubrientes intermedios de Galois y subgrupos normales de G.*

Demostración. Si $H \trianglelefteq G$, entonces G/H actúa de manera natural en Y/H y además preserva la proyección $\widehat{p_H}$, así obtenemos un morfismo de grupos

$$G/H \to Aut\,(Y/H, \widehat{p_H})$$

que resulta ser inyectivo, pues si $\phi H(O_y) = \phi' H(O_y)$, para toda y donde O_y es la órbita de y bajo H, entonces $\phi(y) = \phi' \circ h(y)$ para algún $h \in H$, por el lema 4.1.6 tenemos que $\phi'^{-1}\phi = h \in H$, por lo tanto $\phi H = \phi' H$. Como $(Y/H)/(G/H) \cong Y/G \cong X$, por la proposición 4.1.11 $G/H \cong Aut(Y/H, \widehat{p_H})$ y por lo tanto, $(Y/H, \widehat{p_H})$ es Galois.

Para el otro lado, supongamos que (Z, q) es un cubriente intermedio que además es Galois. Primero probaremos que dado un automorfismo de (Y, p), digamos ϕ, éste induce un automorfismo de (Z, q), digamos ψ, de manera que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"'] & Z \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "id_X"] & X
\end{tikzcd}$$

Para esto, tomemos $y \in Y$ y sea $x = q \circ f(y) \in X$, por la conmutatividad del diagrama, $f(y)$ y $f(\phi(y))$ están en la misma fibra $q^{-1}(x)$. Como (Z, q) es Galois, $Aut(Z, q)$ actúa transitivamente en las fibras y por lo tanto, existe $\psi \in Aut(Z, q)$, tal que $\psi(f(y)) = f(\phi(y))$, que por el lema 4.1.6 es única y, por el mismo lema, se sigue que $\psi \circ f = f \circ \phi$. Tenemos entonces un morfismo de grupos $G \to Aut(Z, q)$, cuyo núcleo es precisamente $Aut(Y, f)$ y por lo tanto es normal en G.

□

4.2. Cubriente Universal.

4.2.1. Acción de monodromía.

Nuestro siguiente objetivo es probar algo similar a la construcción de la extensión de Galois absoluta pero en espacios topológicos. En este caso, el grupo de Galois absoluto será el grupo fundamental de nuestro espacio X.

Lema 4.2.1. *Sean $p : Y \to X$ una cubierta, $y \in Y$ y $x = p(y)$.*

1) Dado un camino $f : [0, 1] \to X$ con $f(0) = x$, existe un único camino $\widehat{f} : [0, 1] \to Y$ con $\widehat{f}(0) = y$ y $p \circ \widehat{f} = f$.

2) Supongamos que tenemos un segundo camino $g : [0, 1] \to X$ homotópico a f, entonces el único $\widehat{g} : [0, 1] \to Y$ tal que $\widehat{g}(0) = y$ y $p \circ \widehat{g} = g$ tiene el mismo punto final de $\widehat{f}$, i.e. $\widehat{f}(1) = \widehat{g}(1)$.

Demostración. 1) Primero notemos que la unicidad se sigue del lema 4.1.6 y la existencia es inmediata en caso de que la cubierta sea trivial, así que queremos reducir el caso general a éste.

Para cada $z \in f([0,1])$ elegimos una vecindad abierta V_z con la propiedad inducida por la cubierta (Y,p). Así, la familia $\{f^{-1}(V_z)|z \in f([0,1])\}$ es una cubierta abierta de $[0,1]$, el cual es compacto y por lo tanto tiene una subcubierta finita.

Elegimos una subdivisión $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$, de tal forma que cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ esté contenido en un abierto de la subcubierta finita, como la cubierta es trivial en cada $f([t_i, t_{i+1}])$, entonces podemos construir $\widehat{f}$ de forma recursiva, dado un levantamiento $\widehat{f}_i$ del camino f restringido a $[0, t_i]$ (el caso $i = 0$ es trivial), construimos un levantamiento de la restricción de f a $[t_i, t_{i+1}]$ empezando en $\widehat{f}_i(t_i)$, luego pegando este camino con $\widehat{f}_i$ obtenemos $\widehat{f}_{i+1}$.

2) Primero, mostramos que dada una homotopía entre f y g, $H : [0,1] \times [0,1] \to X$, existe un levantamiento $\widehat{H} : [0,1] \times [0,1] \to Y$ con $p \circ \widehat{H} = H$, $\widehat{H}(t,0) = \widehat{f}(t)$ y $\widehat{H}(t,1) = \widehat{g}(t)$.

La construcción es similar a la de $\widehat{f}$, primero encontramos una subdivisión de $[0,1] \times [0,1]$ en rectángulos S_{ij}, de manera que sobre cada $H(S_{ij})$ la cubierta (Y,p) es trivial y entonces procedemos a pegar los levantamientos sobre cada subrectángulo, moviéndonos en zig-zag iniciando en el punto $(0,0)$ donde $\widehat{H}(0,0) = y$, hasta el punto $(1,1)$. Por unicidad en 1), para encontrar el levantamiento al siguiente subrectángulo, basta encontrar uno que coincida en una esquina del lado donde se juntan para que coincidan en el lado completo donde se juntan, también por unicidad de levantamiento de caminos, tenemos que la asignación $t \to \widehat{H}(t,0)$ es $\widehat{f}$ (pues ambos son levantamientos de f que inician en y), el camino $s \to \widehat{H}(0,s)$ es el camino constante y y el camino $t \to \widehat{H}(t,1)$ es $\widehat{g}$.

Finalmente, $s \to \widehat{H}(1,s)$ es un camino que junta a $\widehat{f}(1)$ con $\widehat{g}(1)$ que levanta al camino constante $f(1)$, de nuevo por unicidad debe coincidir con el camino constante $\widehat{f}(1)$. Por lo tanto $\widehat{f}(1) = \widehat{g}(1)$. $\square$

Ahora mostraremos la construcción de la acción izquierda de $\pi_1(X,x)$ en $p^{-1}(x)$.

Construcción 4.2.2. Dadas $y \in p^{-1}(x)$ y $\alpha \in \pi_1(X,x)$ con representante $f : [0,1] \to X$, $f(0) = f(1) = x$, definimos $\alpha y = \widehat{f}(1)$. Por el lema 4.2.1 esta elección no depende del representante y αy vuelve a caer en $p^{-1}(x)$ por construcción, además es fácil observar que $(\alpha * \beta)y = \alpha(\beta y)$, $\forall \alpha, \beta \in \pi_1(X,x)$. Esta acción se llama acción de monodromía sobre la fibra $p^{-1}(x)$.

4.2.2. El funtor de fibras $\boldsymbol{Fib}_x$ y el cubriente universal.

Definición 4.2.3. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Definimos el funtor de fibras $\boldsymbol{Fib}_x : \boldsymbol{Cub}(X) \to \boldsymbol{Con}^{\pi_1(X,x)}$ de la siguiente forma: dadas (Y,p) y (Z,q) cubiertas de X y $f : Y \to Z$ un morfismo de cubiertas:

$$\boldsymbol{Fib}_x(Y,p) = p^{-1}(x)$$

con la acción de monodromía.

Por el lema 4.2.1, dado $y \in p^{-1}(x)$, el único levantamiento de un camino con punto inicial y lo manda bajo f al único levantamiento de ese mismo camino con punto inicial $f(y)$. En otras palabras, $f(\alpha y) = \alpha f(y)\ \forall \alpha \in \pi_1(X, x)$ y como los morfismos de cubiertas respetan fibras tiene sentido definir:

$$\boldsymbol{Fib}_x(f) = f|_{p^{-1}(x)}$$

El objetivo de esta sección será probar el siguiente teorema.

Teorema 4.2.4. *Sean X un espacio topológico conexo y localmente simplemente conexo y $x \in X$ un punto base. El funtor $\boldsymbol{Fib}_x$ induce una equivalencia de categorías entre $\boldsymbol{Cub}(X)$ y $\boldsymbol{Con}^{\pi_1(X,x)}$. Los cubrientes conexos se identifican con $\pi_1(X, x)$-conjuntos transitivos y los cubrientes de Galois con cocientes de $\pi_1(X, x)$ por subgrupos normales.*

Para probar esto tendremos que probar los siguientes dos teoremas.

Teorema 4.2.5. *Sean X un espacio conexo y localmente simplemente conexo y $x \in X$. El funtor $\boldsymbol{Fib}_x$ es representable por una cubierta $\pi : \widehat{X_x} \to X$.*

El cubriente $\widehat{X_x}$ está determinado por la elección de x y viene equipado con un punto canónico de $\pi^{-1}(x)$ llamado elemento universal. Por definición, morfismos de cubiertas de $(\widehat{X_x}, \pi)$ en una cubierta fija (Y, p) corresponden biyectivamente de manera funtorial a puntos en la fibra $p^{-1}(x) \subset Y$, en particular, para la cubierta $(\widehat{X_x}, \pi)$ tenemos un isomorfismo canónico $\boldsymbol{Fib}_x(\widehat{X_x}) \cong Hom_{\boldsymbol{Cub}(X)}(\widehat{X_x}, \widehat{X_x})$; vía este isomorfismo, la identidad de $\widehat{X_x}$ se corresponde de forma canónica con un elemento $[x] \in \pi^{-1}(x)$; éste es el elemento universal. Ahora bien, para una cubierta arbitraria (Y, p) y un elemento $y \in p^{-1}(x)$, el morfismo $\pi_y : \widehat{X_x} \to Y$ corresponde a la imagen de y, vía $\boldsymbol{Fib}_x(Y) \cong Hom_{\boldsymbol{Cub}(X)}(\widehat{X_x}, Y)$. En el siguiente diagrama conmutativo se mapea $[x]$ en y.

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\boldsymbol{Cub}(X)}(\widehat{X_x}, \widehat{X_x}) & \xrightarrow{\cong} & \boldsymbol{Fib}_x(\widehat{X_x}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{y*}} & & \Big\downarrow \\
Hom_{\boldsymbol{Cub}(X)}(\widehat{X_x}, Y) & \xrightarrow{\cong} & \boldsymbol{Fib}_x(Y)
\end{array}$$

donde las flechas verticales están inducidas por π_y. Ahora notemos que dado $\phi : \widehat{X_x} \to \widehat{X_x}$ un isomorfismo de cubiertas, este induce una biyección de $Hom_{\boldsymbol{Cub}(X)}(\widehat{X_x}, Y)$ en sí mismo componiendo ϕ a la derecha, de esta forma, obtenemos una acción derecha de $Aut(\widehat{X_x})$ en $Hom_{\boldsymbol{Cub}(X)}(\widehat{X_x}, Y) \cong \boldsymbol{Fib}_x(Y)$. Ahora queremos comparar esta acción con la acción de monodromía.

Teorema 4.2.6. *El cubriente $\widehat{X_x}$ es un cubriente de Galois de X con grupo de automorfismos isomorfo a $\pi_1(X, x)$. Más aún, para una cubierta $p : Y \to X$, la acción izquierda de $Aut(\widehat{X_x}, \pi)^{op}$ en $\boldsymbol{Fib}_x(Y)$ dada por la construcción anterior es precisamente la acción de monodromía de $\pi_1(X, x)$.*

Construcción 4.2.7. Construcción de $\widehat{X_x}$:

Los puntos de $\widehat{X_x}$ serán las clases de homotopía de caminos que inicien en x. Para definir la proyección π, dado $[f] \in \widehat{X_x}$ con $f : [0,1] \to X$ un representante para $[f]$, definimos $\pi([f]) = f(1) = y$. Esta asignación está bien definida pues caminos homotópicos tienen mismos puntos finales.

Ahora definimos una topología para $\widehat{X_x}$ a partir de una base de abiertos para cada $[f] \in \widehat{X_x}$. Dada una base de abiertos simplemente conexos de $f(1)$ y, U uno de estos abiertos, si $f : [0,1] \to X$ es un representante de $[f]$, definimos $\widehat{U}_f$ como el conjunto de clases de homotopía obtenidas componiendo la clase de homotopía de f con la clase de homotopía de algún $g : [0,1] \to X$ tal que $g(0) = f(1)$ y $g([0,1]) \subset U$, notemos que como U es simplemente conexo, la elección de g solo depende de su punto final salvo homotopía. En otras palabras, $\widehat{U}_f$ está dado por las prolongaciones de las clases de homotopía de f a los demás puntos en U. Estos $\widehat{U}_f$ forman una base de abiertos para $[f]$.

Para dos abiertos $\widehat{U}_f$ y $\widehat{V}_f$ existe $\widehat{W}_f \subset \widehat{U}_f \bigcap \widehat{V}_f$ dado por alguna vecindad simplemente conexa $W \subset U \bigcap V$.

Ahora, para ver que π es continua basta notar que la imagen inversa bajo π de una vecindad simplemente conexa U de y es la unión disjunta de los abiertos $\widehat{U}_f$ sobre representantes f de caminos de x en y. Así, hemos obtenido una cubierta de X.

Para finalizar, notemos que hay un elemento universal $[x]$ de la fibra $\pi^{-1}(x)$ que corresponde a la clase de homotopía del camino constante x.

Demostración del teorema 4.2.5:

Demostración. Queremos probar que la cubierta $(\widehat{X_x}, \pi)$ representa al funtor $\boldsymbol{Fib}_x$. Sean (Y, p) una cubierta de X y $y \in p^{-1}(x)$. Definimos $\pi_y : \widehat{X_x} \to Y$ de la siguiente forma:

Dado $[f] \in \widehat{X_x}$, definimos $\pi_y([f]) = \widehat{f}(1)$, donde $\widehat{f} : [0,1] \to Y$ es el único levantamiento de f con $\widehat{f}(0) = y$ cuya existencia nos la proporciona el lema 4.2.1. Veamos que π_y es continua. Sea $y' \in Y$ y tomemos W una vecindad abierta simplemente conexa de y' que se restrinja a un homeomorfismo en $p(W)$, podemos observar que $\pi_y^{-1}(W) = \bigcup_f \widehat{p(W)}_f$, donde f varía sobre los caminos que inician en x y terminan en $p(y')$ tales que al levantarse a Y iniciando en y, terminen en y'. Además π_y es un morfismo de cubiertas, pues $p(\pi_y([f])) = p(\widehat{f}(1)) = f(1) = \pi([f])$. Esta asignación es biyectiva y su inversa esta dada por: dado un morfismo de cubiertas $\phi : \widehat{X_x} \to Y$, le asignamos $\phi([x])$. Veamos que en efecto son inversas. Sean $y \in p^{-1}(X)$ y $[f] \in \widehat{X_x}$. $\pi_y([x]) = y$ pues el punto final del levantamiento del camino constante x es y. Por otro lado $\pi_{\phi([x])}([f]) = \phi([f])$ (es fácil ver esto observando el último comentario en la demostración del lema 4.2.8).

Solo resta ver que esta asignación biyectiva, es funtorial. Sea $\varphi : Y \to Y'$ un morfismo de cubiertas que mapea a y en $y' \in Y'$. El morfismo inducido $\varphi_* : Hom(\widehat{X_x}, Y) \to Hom(\widehat{X_x}, Y')$ manda a π_y en $\pi_{y'}$. $\varphi \circ \pi_y([f]) = \varphi(\widehat{f}(1)) = \pi_{y'}([f])$, pues $\varphi \circ \widehat{f}$ es el levantamiento de f a un camino que inicia en y', donde $\widehat{f}$ es el levantamiento de f a el camino que inicia en y. $\square$

Para probar el teorema 4.2.6 es necesario probar primero varios resultados.

Lema 4.2.8. *El espacio $\widehat{X_x}$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Veamos que hay una trayectoria que conecta a $[x]$ con cualquier $[f] \in \widehat{X_x}$. Consideremos la función multiplicar $m : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, donde $m(s,t) = st$. La función m es continua. Sea $[f] \in \widehat{X_x}$, entonces $f \circ m$ y su restricción a cada subconjunto de la forma $s \times [0,1]$ es continua. Dicha restricción define un camino f_s de x a $f(s)$. Además, f_0 es el camino constante x y $f_1 = f$. Veamos que la función $\phi : [0,1] \to \widehat{X_x}$ dada por $\phi(s) = [f_s]$ es continua. Dados $[g] \in \widehat{X_x}$ y una vecindad abierta de la forma $\widehat{U}_g$, tenemos que $\phi^{-1}(\widehat{U}_g) = f^{-1}(U)$ ó $\varnothing$, pues si $s \in \phi^{-1}(\widehat{U}_g)$, f_s es homotópica a una prolongación de g en U, i.e, $f(s) \in U$ y g es una prolongación de f_s en U, pero claramente si g es una prolongación de alguna f_s en U, entonces es una prolongación de f_t en U para toda $t \in f^{-1}(U)$. Aparte, usando el lema 4.2.1, dado un camino $f : [0,1] \to X$ que inicie en x y termine en x', su levantamiento a $\widehat{X_x}$ que inicia en $\widehat{x}$, termina en $[f]$ (la clase de homotopía de f). $\square$

Lema 4.2.9. *Una cubierta de un espacio simplemente conexo y localmente conexo por trayectorias es trivial.*

Demostración. Para esto, basta mostrar que dada una cubierta conexa $p : Y \to X$ de un espacio X como en el lema, se sigue que p es inyectiva. Primero notemos que como X es locamente conexo por trayectorias y p es un homeomorfismo local, entonces Y tiene una cubierta de abiertos localmente conexos. Como Y es conexo, esto obliga a que Y sea localmente conexo. Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $p(y_1) = p(y_2)$, tomemos $f : [0,1] \to Y$ un camino que inicie en y_1 y termine en y_2, así $p \circ f$ es un camino cerrado en X, dado que X es simplemente conexo, tal camino es homotópico al camino constante $p(y_1)$ y por unicidad de levantamientos, tenemos que $y_1 = y_2$. $\square$

Corolario 4.2.10. *Sea X un espacio localmente simplemente conexo. Dadas dos cubiertas $p : Y \to X$ y $q : Z \to Y$, su composición $p \circ q$ es de nuevo una cubierta de X.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como X es localmente simplemente conexo, tiene una vecindad abierta simplemente conexa U y como es localmente conexo por trayectorias, entonces hay una vecindad abierta $V \subset U$ localmente conexa, i.e, U es una vecindad simplemente conexa y localmente conexa por trayectorias, por lo tanto la restricción de p a $p^{-1}(U)$ debe ser trivial por el lema anterior. Repitiendo este argumento con q, para cada componente conexa de $p^{-1}(U)$ (las cuales son simplemente conexas y localmente conexas por trayectorias por sí mismas), obtenemos que la restricción de $p \circ q$ a $p \circ q^{-1}(U)$ es una cubierta trivial de U. $\square$

Proposición 4.2.11. *La cubierta $\pi : \widehat{X_x} \to X$ es Galois para X conexo y localmente simplemente conexo.*

Demostración. Por la observación 4.1.14, basta ver que el grupo $Aut(\widehat{X_x}, \pi)$ actúa transitivamente en la fibra $\pi^{-1}(x)$. Sea $[f] \in \pi^{-1}(x)$, por el teorema 4.2.5 hay una función continua $\pi_{[f]} : \widehat{X_x} \to \widehat{X_x}$ que manda a $[x]$ en $[f]$. Veamos que $\pi_{[f]}$ es un automorfismo. Como $\widehat{X_x}$ es conexo y $\pi \circ \pi_{[f]} = \pi$ es cubriente de X, por la proposición 4.1.5, $(\widehat{X_x}, \pi_{[f]})$ es un cubriente de $\widehat{X_x}$, en particular $\pi_{[f]}$ es suprayectiva. Tomemos un elemento $[g] \in \pi_{[f]}^{-1}([x])$, $\pi \circ \pi_{[f]} \circ \pi_{[g]} = \pi \circ \pi_{[g]} = \pi$. $\pi_{[f]} \circ \pi_{[g]}$ es continua y además cumple que $\pi_{[f]} \circ \pi_{[g]}([x]) = [x]$, por el lema 4.1.6 tenemos que $\pi_{[f]} \circ \pi_{[g]} = id_{\widehat{X_x}}$, por lo tanto $\pi_{[f]}$ es inyectiva y por tanto es un automorfismo.

$\square$

Proposición 4.2.12. *Hay un isomorfismo $Aut(\widehat{X_x}, \pi)^{op} \cong \pi_1(X, x)$.*

Demostración. Primero notemos que $\widehat{X_x}$ está equipado con una acción derecha de $\pi_1(X,x)$ como sigue:

Dados $[f] \in \widehat{X_x}$ y $\alpha \in \pi_1(X,x)$ con representante f_α, definimos $[f]\alpha$ como $[f \circ f_\alpha]$. Es fácil ver que $\phi_\alpha : \widehat{X_x} \to \widehat{X_x}$ dada por la asignación ya mencionada es un automorfismo de $(\widehat{X_x}, \pi)$ y $\phi_{\alpha\alpha'}([f]) = \phi_{\alpha'} \circ \phi_\alpha([f])$, lo que nos determina un morfismo de grupos $\pi_1(X,x) \to Aut(\widehat{X_x}, \pi)^{op}$. Este morfismo resulta ser inyectivo pues, si α y α' no son iguales, entonces f_α no es homotópico con $f_{\alpha'}$ y por lo tanto sus composiciones con el camino trivial x no son homotópicas, i.e. $\phi_\alpha([x]) \neq \phi_{\alpha'}([x])$. Para ver la suprayectividad tomemos $\phi \in Aut(\widehat{X_x}, \pi)$ y $[f] \in \widehat{X_x}$, el punto $\phi([f])$ está representado por un camino $g : [0,1] \to X$, con $f(1) = g(1)$. Ahora, $f^{-1} \circ g$ es un camino cerrado de x que satisface que $f \circ (f^{-1} \circ g)$ es homotópico a g, denotemos por α a su clase en $\pi_1(X,x)$. El automorfismo $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi([f])) = \phi([f])$. Usando el lema 4.1.6, como $\widehat{X_x}$ es conexo $\phi = \phi_\alpha$.

□

Demostración del teorema 4.2.6.

Demostración. Lo único que hace falta probar es la parte de la acción de monodromía. Por el teorema 4.2.5, sabemos que dados (Y,p) una cubierta y $y \in \boldsymbol{Fib}_x(Y)$, se corresponde con un morfismo de cubrientes $\pi_y : \widehat{X_x} \to Y$, que como ya vimos en la prueba, asigna a clases representadas por cierta f a puntos de la forma $\widehat{f}(1)$, donde $\widehat{f}$ es el levantamiento de f a Y que inicia en y, en particular y es la imagen bajo esta misma asignación de $[x]$, por la prueba del lema anterior, dado $\alpha \in \pi_1(X,x)$ representado por f_α, actúa en $[x]$ mandándolo a la clase de f_α, como la acción de α en $p^{-1}(y)$ manda a y en $\widehat{f_\alpha}(1)$, esta es la acción de monodromía. □

Demostración del teorema 4.2.4:

Demostración. Primero veamos que el funtor $\boldsymbol{Fib}_x$ es fiel y pleno. Para esto primero observemos lo siguiente. Dadas dos cubiertas de X, (Y,p) y (Z,q) y dos morfismos de cubiertas $\phi, \varphi : Y \to Z$ tales que $\varphi|_{p^{-1}(x)} = \phi|_{p^{-1}(x)}$, $Y = \bigsqcup_i Y_i$, donde las Y_i son sus componentes conexas, de igual forma $Z = \bigsqcup_j Z_j$. Además, como X es conexo y localmente simplemente conexo, cada $(Y_i, p|_{Y_i})$ resulta ser un cubriente de X pues si no lo fuera, entonces $(p(Y_i), X - p(Y_i))$ conformaría una separación no trivial en abiertos de X. Cada Y_i se mapea en algún Z_j por conexidad a través de φ y por lo tanto $\varphi|_{Y_i}$ es un morfismo de cubrientes conexos. Además, como $\varphi|_{p^{-1}(x)} = \phi|_{p^{-1}(x)}$ se tendrá que $\varphi|_{Y_i}$ y $\phi|_{Y_i}$ tienen el mismo codominio. Por lo tanto, para probar que que el funtor es fiel y pleno basta probarlo restringiéndonos a cubrientes conexos.
Supongamos que (Y,p) y (Z,q) son cubrientes conexos de X y sea $\phi : \boldsymbol{Fib}_x(Y) \to \boldsymbol{Fib}_x(Z)$ un morfismo de $\pi_1(X,x)$-conjuntos. Para cada $y \in \boldsymbol{Fib}_x(Y)$ consideremos el cubriente $\pi_y : \widehat{X_x} \to Y$, por el teorema 4.1.15, π_y hace a Y isomorfo al cociente de $\widehat{X_x}$ por el estabilizador de y, $U_y = Aut(\widehat{X_x}, \pi_y)$; sea $\psi_y : Y \to \frac{Y}{U_y}$ dicho isomorfismo. El estabilizador de y, U_y, se inyecta en el estabilizador de $\phi(y)$, $U_{\phi(y)}$, pues si $\varphi \in U_y$, entonces $\varphi y = y$ y como ϕ es morfismo de $\pi_1(X,x)$-conjuntos, entonces $\varphi\phi(y) = \phi(y)$. El morfismo $\pi_{\phi(y)} : \widehat{X_x} \to Z$ induce un único morfismo $U_y \to Z$ pasando por el cociente, componiéndolo con ψ_y, obtenemos el morfismo $Y \to Z$ requerido.

Para ver que el funtor es esencialmente suprayectivo, tomemos S un $\pi_1(X,x)$-conjunto y supongamos que es transitivo, entonces podemos tomar el cociente de $\widehat{X_x}$ por el estabilizador de cualquier punto de S, por la proposición 5.1.12 y observando que si H es dicho estabilizador, entonces $\boldsymbol{Fib}_x(\frac{\widehat{X_x}}{H}) = \frac{\pi_1(X,x)}{H} \cong S$, si S no es transitivo, entonces hacemos la misma construcción sobre cada órbita y tomamos la unión disjunta de estos cubrientes.
De aquí, por el teorema 4.1.15 podemos notar que $\pi_1(X,x)$-conjuntos transitivos se corresponden con cubrientes conexos de X y de la proposición 4.1.16, tenemos que cubrientes de Galois se corresponden con cocientes de $\pi_1(X,x)$ por subgrupos normales. $\square$

Capítulo 5

Acciones transitivas de un grupo discreto.

5.1. El funtor adjunto $A \times_G -$.

Habiendo desarrollado algunos de los ejemplos más famosos de la teoría de Galois, a partir de este capítulo trataremos de abstraer las cosas que tienen en común en términos más categóricos. El contenido de este capítulo así como de los posteriores capítulos fue sacado de [1].

Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría.

Definición 5.1.1. Sea $f : X \to Y$ una flecha en $\boldsymbol{C}$. Decimos que una flecha $g : X \to Z$ en $\boldsymbol{C}$ es compatible con f si para cualesquiera flechas $x : C \to X$, $y : C \to X$ tales que $f \circ x = f \circ y$, se sigue que $g \circ x = g \circ y$.

Definición 5.1.2. Una flecha $f : X \to Y$ en $\boldsymbol{C}$ es un epimorfismo estricto si dada cualquier flecha $g : X \to Z$ compatible con f, existe una única flecha $h : Y \to Z$ tal que $g = h \circ f$. (La definición de monomorfismo estricto es la definición dual).

Observación 5.1.3. Todo epimorfismo estricto es un epimorfismo.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ epi estricto. Sean $a : Y \to W$ y $b : Y \to W$ dos flechas tales que $a \circ f = b \circ f$, consideremos la flecha $a \circ f : X \to W$. Notemos que $a \circ f$ es compatible con f y como f es epi estricto, $\exists! h : Y \to W$ tal que $a \circ f = h \circ f$, por lo tanto $a = b$. Por lo tanto f es epi. $\square$

Observación 5.1.4. Todo epimorfismo estricto que sea monomorfismo es isomorfismo.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ un epimorfismo estricto que además sea mono. Como f es mono, id_X es compatible con f. Como f es epimorfismo estricto existe una única g que hace conmutar el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "id_X"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

por otro lado $f \circ g \circ f = id_Y \circ f$, por la anterior observación f es epimorfismo y por lo tanto $f \circ g = id_Y$. Por lo tanto $g = f^{-1}$, i.e. f es iso. $\square$

Consideraremos A un objeto en $\boldsymbol{C}$ y sea $G = Aut(A)^{op}$.

Definición 5.1.5. Dado $H \leqslant G$, el cociente categórico consiste de un objeto $\frac{A}{H}$ y una flecha $q : A \to \frac{A}{H}$ que satisface la siguiente propiedad universal:

i) $\forall h \in H$, $q \circ h = q$
ii) Dada $x : A \to X \in \boldsymbol{C}$, tal que $\forall h \in H$, $x \circ h = x$, $\exists! \varphi : \frac{A}{H} \to X \in \boldsymbol{C}$ tal que $\varphi \circ q = x$.

Es decir el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "x"'] & \frac{A}{H} \arrow[d, "\exists!\varphi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Observación 5.1.6. $q : A \to \frac{A}{H}$ es un epimorfismo estricto.

Demostración. Sea $x : A \to X$ compatible con q, en particular $\forall h \in H$, $q \circ h = q \Rightarrow x \circ h = x$ y por la propiedad universal de q $\exists! g : \frac{A}{H} \to X$ tal que $g \circ q = x$. Por lo tanto q es epimorfismo estricto. $\square$

Ejemplo 5.1.7. En la categoría $\boldsymbol{Con}$ existen todos los cocientes.

Demostración. Sean $X \in \boldsymbol{Con}$ y $H \leqslant Aut_{\boldsymbol{Con}}(X)^{op}$. Proponemos a $\frac{X}{H}$ como el conjunto $X/\sim$ donde $x \sim x'$ si y solo si existe $h \in H$ tal que $h(x) = x'$ (claramente $\sim$ es de equivalencia) y, la función $q : X \to \frac{X}{H}$ es la proyección canónica $q(x) = [x]$.
$\forall h \in H$, $\forall x \in X$ $q \circ h(x) = q(h(x)) = [h(x)] = [x] = q(x)$, por lo tanto $q \circ h = q$.
Sea $(\psi : X \to Y) \in \boldsymbol{Con}$ tal que $\psi \circ h = \psi \quad \forall h \in H$. Proponemos la función $\varphi : \frac{X}{H} \to Y$ definida mediante $\varphi([x]) = \psi(x)$. Veamos que φ está bien definida. Supongamos que $[x] = [x']$, entonces existe $h \in H$ tal que $h(x) = x'$, entonces $\varphi([x']) = \psi(x') = \psi(h(x)) = \psi(x) = \varphi([x])$. Además $\psi = \varphi \circ q$ y es claro que φ es única con esta propiedad. $\square$

Notemos de la demostración que los cocientes en $\boldsymbol{Con}$ se ven como conjuntos de órbitas sobre H

Ejemplo 5.1.8. Sea K un grupo. En la categoría $\boldsymbol{Con}^K$ existen todos los cocientes.

Demostración. Dados $X \in \boldsymbol{Con}^K$ y $H \leqslant Aut_{Con^K}(X)^{op}$, definimos $\frac{X}{H}$ de la misma forma que en el ejemplo anterior solo que lo dotamos de la siguiente acción de K: dado $k \in K$ definimos $k[x] = [kx]$ (claramente es acción). En este caso la proyección $q : X \to \frac{X}{H}$ se vuelve un K-morfismo. La prueba de que en efecto $q : X \to \frac{X}{H}$ es un cociente es la misma que en el ejemplo anterior notando que si $\psi : X \to Y$ es un K-morfismo, entonces el morfismo inducido $\varphi : \frac{X}{H} \to Y$ es un K-morfismo. $\square$

Dado $H \leqslant G$, tenemos el morfismo canónico $\psi : H \to G$ dado por la inclusión.

Observación 5.1.9. Sea $H \leqslant G$. H actúa a la izquierda en los conjuntos $[A, X]$ de morfismos en $\boldsymbol{C}$ de A en X de la siguiente forma. Para cada $x \in [A, X]$:

$$\begin{array}{ccc} H \times [A, X] & \longrightarrow & [A, X] \\ (h, x) & \longrightarrow & hx = x \circ h \end{array}$$

En este caso tenemos un funtor:

$$\boldsymbol{C} \xrightarrow{[A,-]_G} \boldsymbol{Con}^G$$

donde $[A, X]_G$ es el conjunto $[A, X]$ equipado con la acción de G. Veamos que en efecto $[A, -]_G$ es un funtor.

Demostración. Dado que ya sabemos que la asignación $[A, \_]$ es funtorial, solo restaría ver que las flechas van a morfismos de G-conjuntos.
Sean $f : X \to X' \in \boldsymbol{C}$, $g \in G$ y $x \in [A, X]$

$$f_*(gx) = f_*(x \circ g) = f \circ (x \circ g) = (f \circ x) \circ g = gf_*(x)$$

□

Observación 5.1.10. El grupo G tiene una acción canónica en sí mismo dada por multiplicar a la izquierda. Así, podemos considerar $G \in \boldsymbol{tCon}^G$ donde $\boldsymbol{tCon}^G$ es la subcategoría plena de $\boldsymbol{Con}^G$ que consiste de los G-conjuntos transitivos. G equipado con esta acción es el G-conjunto libre con un generador $e \in G$ (e el elemento neutro). Esto significa que dado $E \in \boldsymbol{Con}^G$, hay una biyección:

$$\frac{x \in E}{\varphi_x : G \to E \quad \varphi_x(g) = gx}$$

Consideremos un objeto $X \in \boldsymbol{C}$ y el G-conjunto $[A, X]_G$. La biyección anterior toma la forma:

$$\frac{x : A \to X}{\varphi_x : G \to [A, X]_G}$$

A partir de este momento nos interesará que esta acción $G \times [A, X] \to [A, X]$ sea transitiva para todo $X \in \boldsymbol{C}$. Así nuestro funtor toma la forma

$$\boldsymbol{C} \xrightarrow{[A,-]_G} \boldsymbol{tCon}^G$$

La última biyección en este último caso nos da la pista de que A puede ser el valor en G de algún adjunto izquierdo del funtor $[A, \_]_G$. De hecho, como veremos a lo largo de esta sección, este adjunto existe bajo ciertas condiciones y se denotará:

$$\boldsymbol{C} \xleftarrow[A \times_G -]{} \boldsymbol{tCon}^G$$

Entonces $A \times_G G = A$.

Observación 5.1.11. Notemos que dado $H \leqslant G$, también podemos ver a H como subgrupo de $Aut(A)$. Para que no haya confusión con las operaciones en ambos grupos, dados $h, h' \in H$, hh' denotará la operación de H visto como subgrupo de G y $h' \circ h$ denotará la operación de H visto como subgrupo de $Aut(A)$, además tenemos que $hh' = h' \circ h$.

En la siguiente proposición identificamos a un elemento $h \in H$ con el morfismo $h_* : G \to G \in Aut_{\boldsymbol{Con}^G}(G)^{op}$ dado por $h_*(g) = gh$.

Proposición 5.1.12. *Sean $E \in \boldsymbol{tCon}^G$ con G un grupo arbitrario y $x \in E$. Entonces $\varphi_x : G \to E$ vuelve a E un cociente categórico $E \simeq \frac{G}{H}$, donde $H = Fij(x)$.*

Demostración. i) Sean $g \in G$ y $h \in H$, entonces $\varphi_x \circ h_*(g) = \varphi_x(gh) = ghx = gx = \varphi_x(g)$. Por lo tanto, $\varphi_x \circ h_* = \varphi_x$.

ii) Supongamos que $y : G \to Y$ cumple que $y \circ h_* = y$, $\forall h \in H$. Definamos $\varphi : E \to Y$ como $\varphi(gx) = y(g)$, veamos que está bien definida. Supongamos que $gx = g'x$, entonces $g^{-1}g' \in H$. Así, $g^{-1}y(g') = y(g^{-1}g') = y \circ (g^{-1}g')^*(e) = y(e)$, por lo tanto $y(g) = y(g')$. Por otro lado es clara la unicidad de φ. $\square$

Cabe resaltar que en $\boldsymbol{tCon}^G$ los cocientes categóricos $\frac{G}{H}$ se ven como clases laterales izquierdas de G sobre subgrupos H (i.e la noción natural de cociente en grupos).

Retomemos la convención $G = Aut(A)^{op}$

Observación 5.1.13. Del ejemplo 5.1.8, los cocientes de $[A, A]$ sobre subgrupos $H \leqslant G$ existen en $\boldsymbol{Con}^G$ donde identificamos a $h \in H$ con el morfismo $h_* : [A, A] \to [A, A] \in Aut_{\boldsymbol{Con}^G}([A, A])^{op}$ definido mediante $h_*(f) = h \circ f$. En este caso el cociente se ve como $\frac{[A,A]}{H} = \{fH | f \in [A, A]\}$ donde $fH = gH$ si y solo si existe $h \in H$ tal que $f = h \circ g$ y, $q : [A, A] \to \frac{[A,A]}{H}$ es la proyección canónica.

Usemos el axioma de elección para clases en $Ob(\boldsymbol{tCon}^G)$. Para cada E elegimos $x_E \in E$ con la condición de que cada vez que exista el cociente $\frac{A}{H}$ para $H \leqslant G$, elegimos la proyección canónica q_H del conjunto $[A, \frac{A}{H}]$, i.e. $x_{[A,\frac{A}{H}]} = q_H$, entonces, si nombramos H_E a $Fij(x_E)$, tendremos que $x_{[A,\frac{A}{H_E}]} = q_{H_E}$. Para facilitar la notación escribiremos q_E en vez de q_{H_E}.

Teorema 5.1.14. *Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría y $A \in \boldsymbol{C}$ un objeto distinguido tal que $\forall H \leqslant G$ ($G = Aut(A)^{op}$) el cociente $\frac{A}{H}$ existe y los conjuntos $[A, X]$ son G-conjuntos transitivos con la acción canónica de G. Entonces el funtor*

$$\boldsymbol{C} \xrightarrow{[A,-]_G} \boldsymbol{tCon}^G$$

tiene un adjunto izquierdo

$$\boldsymbol{C} \xleftarrow[A\times_G -]{} \boldsymbol{tCon}^G$$

Demostración. Definimos el funtor $A \times_G -$ como sigue: para cada objeto $E \in \boldsymbol{tCon}^{\boldsymbol{G}}$ $A \times_G E = \frac{A}{H_E}$ y, para cada flecha $\varphi : E \to E' \in \boldsymbol{tCon}^G$ tal que $\varphi(x_E) = gx_{E'}$, $A \times_G \varphi$ es la única flecha que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q_E"] \arrow[d, "g"'] & \frac{A}{H_E} \arrow[d, dashed, "\exists! A\times_G \varphi"] \\ A \arrow[r, "q_{E'}"'] & \frac{A}{H_{E'}} \end{tikzcd}$$

Veamos que esta definición de $A \times_G \varphi$ tiene sentido. Primero veamos que no depende de la elección de g. Supongamos que $\varphi(x_E) = gx_{E'} = g'x_{E'}$, entonces $(g')^{-1}gx_{E'} = x_{E'}$, por lo tanto $(g')^{-1}g \in H_{E'}$, por lo tanto $q_{E'} = q_{E'} \circ ((g')^{-1}g) = q_{E'} \circ g \circ (g')^{-1}$, por lo tanto $q_{E'} \circ g' = q_{E'} \circ g$. Ahora veamos la existencia de $A \times_G \varphi$. Sea $h \in H_E$, entonces

$$g^{-1}hgx_{E'} = g^{-1}h\varphi(x_E) = g^{-1}\varphi(hx_E) = g^{-1}\varphi(x_E) = g^{-1}gx_{E'} = x_{E'}$$

por lo tanto $g^{-1}hg \in H_{E'}$ y tenemos que

$$q_{E'} \circ g \circ h \circ g^{-1} = q_{E'} \circ g^{-1}hg = q_{E'}$$

por lo tanto $(q_{E'} \circ g) \circ h = q_{E'} \circ g$. Esto nos asegura la existencia de $A \times_G \varphi$

Ahora veamos que las definiciones anteriores hacen a $A \times_G -$ un funtor.
Sean E_1,E_2,$E_3 \in \boldsymbol{tCon}^G$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} x_{E_1} & \longrightarrow & gx_{E_2} & & \\ E_1 & \xrightarrow[\varphi_1]{} & E_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & E_3 \\ & & x_{E_2} & \longrightarrow & hx_{E_3} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q_{E_1}"] \arrow[d, "g"'] & \frac{A}{H_{E_1}} \arrow[d, "A\times_G\varphi_1"] \\ A \arrow[r, "q_{E_2}"'] \arrow[d, "h"'] & \frac{A}{H_{E_2}} \arrow[d, "A\times_G\varphi_2"] \\ A \arrow[r, "q_{E_3}"'] & \frac{A}{H_{E_3}} \end{tikzcd}$$

Como $h \circ g = (gh)$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1(x_{E_1}) = (gh)x_{E_3}$. Por unicidad de $A \times_G (\varphi_2 \circ \varphi_1)$, se sigue que $A \times_G (\varphi_2 \circ \varphi_1) = A \times_G \varphi_2 \circ A \times_G \varphi_1$. Las demás propiedades de funtor se siguen trivialmente.

Notemos que si tenemos dos G-conjuntos transitivos E y E' y elementos distinguidos x_E y $x_{E'}$, es fácil ver que la función $\varphi : E \to E'$ dada por $\varphi(gx_E) = gx_{E'}$ está bien definida si y solo si $H_E \subset H_{E'}$ y en el caso en que esté bien definida también es fácil ver que es un G-morfismo.

Consideremos las siguientes transformaciones naturales:

$$\begin{array}{ccc} id_{\boldsymbol{tCon}^G} & \xrightarrow{\eta} & [A, A \times_G -] \\ E & \xrightarrow{\eta_E} & [A, \frac{A}{H_E}] \\ x_E & \longrightarrow & q_E \end{array}$$

$$A \times_G [A,-] \xrightarrow{\varepsilon} id_{\boldsymbol{C}}$$
$$\frac{A}{H_{[A,X]}} \xrightarrow{\varepsilon_X} X$$

Donde ε_X es la única flecha que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "q_{[A,X]}"] \arrow[dr, "x_{[A,X]}"'] & & \frac{A}{H_{[A,X]}} \arrow[dl, dashed, "\exists! \varepsilon_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

la cual existe pues $x_{[A,X]} \circ h = x_{[A,X]}$ para todo $h \in H_{[A,X]}$ por definición.
Que las flechas η_E sean G-morfismos se sigue de que $H_E \subset H_{[A,\frac{A}{H_E}]}$
Veamos que en efecto η y ε son transformaciones naturales.

Sea $\varphi : E \to E' \in \boldsymbol{tCon}^G$, donde $\varphi(x_E) = gx_{E'}$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\eta_E"] \arrow[d, "\varphi"'] & {[A, \frac{A}{H_E}]} \arrow[d, "(A \times_G \varphi)_*"] \\ E' \arrow[r, "\eta_{E'}"'] & {[A, \frac{A}{H_{E'}}]} \end{tikzcd}$$

$$\eta_{E'}\varphi(x_E) = \eta_{E'}(gx_{E'}) = gq_{E'} = q_{E'} \circ g$$

$$(A \times_G \varphi)_* \eta_E(x_E) = A \times_G \varphi \circ q_E = q_{E'} \circ g$$

Como todas las flechas son G-morfismos y dichas composiciones coinciden en un generador, entonces el diagrama conmuta y por lo tanto, η es transformación natural.
Sea $(f : X \to X') \in \boldsymbol{C}$ y consideremos los siguientes diagramas conmutativos donde $g \in G$ es dado por la definición de $A \times_G f_*$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q_{[A,X]}"] \arrow[d, "g"'] & \frac{A}{H_{[A,X]}} \arrow[d, "A \times_G f_*"] \\ A \arrow[r, "q_{[A,X']}"'] \arrow[dr, "x_{[A,X']}"'] & \frac{A}{H_{[A,X']}} \arrow[d, "\varepsilon_{X'}"] \\ & X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "q_{[A,X]}"] \arrow[dr, "x_{[A,X]}"'] & \frac{A}{H_{[A,X]}} \arrow[d, "\varepsilon_X"] \\ & X \arrow[d, "f"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

Notemos que como $x_{[A,X']} \circ g = gx_{[A,X']} = f_*(x_{[A,X]}) = f \circ x_{[A,X]}$, entonces por propiedad universal de $q_{[A,X]}$, $\varepsilon_{X'} \circ A \times_G f_* = f \circ \varepsilon_x$.
i.e. el siguiente cuadro conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\frac{A}{H_{[A,X]}} \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "A\times_G f_*"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\frac{A}{H_{[A,X']}} \arrow[r, "\varepsilon_{X'}"'] & X'
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, ε es transformación natural.

Veamos que en efecto $A \times_G - \dashv [A, -]$.

Para esto, veremos que ε y η satisfacen las identidades triangulares, vistas en el teorema 2.1.26.
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "q_E"] \arrow[d, "id_A"'] & \frac{A}{H_E} \arrow[d, "A\times_G \eta_E"] \\
A \arrow[r, "q_{[A,\frac{A}{H_E}]}"'] \arrow[dr, "q_E"'] & \frac{A}{H_{[A,\frac{A}{H_E}]}} \arrow[d, "\varepsilon_{\frac{A}{H_E}}"] \\
 & \frac{A}{H_E}
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de q_E, $\varepsilon_{\frac{A}{H_E}} \circ A \times_G \eta_E = id_{\frac{A}{H_E}}$; i.e. el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\frac{A}{H_E} \arrow[rr, "A\times_G \eta_E"] \arrow[dr, "id_{\frac{A}{H_E}}"'] & & \frac{A}{H_{[A,\frac{A}{H_E}]}} \arrow[dl, "\varepsilon_{\frac{A}{H_E}}"] \\
 & \frac{A}{H_E} &
\end{tikzcd}$$

Esto demuestra la primer identidad triangular.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "q_{[A,X]}"] \arrow[dr, "x_{[A,X]}"'] & & \frac{A}{H_{[A,X]}} \arrow[dl, "\varepsilon_X"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $(\varepsilon_x)_* \circ \eta_{[A,X]}(x_{[A,X]}) = (\varepsilon_x)_*(q_{[A,X]}) = \varepsilon_x \circ q_{[A,X]} = x_{[A,X]}$, i.e, el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
{[A,X]} \arrow[rr, "\eta_{[A,X]}"] \arrow[dr, "id_{[A,X]}"'] & & {[A, \frac{A}{H_{[A,X]}}]} \arrow[dl, "(\varepsilon_X)_*"] \\
 & {[A,X]} &
\end{tikzcd}$$

Esto demuestra la segunda identidad triangular. Por lo tanto, $A \times_G - \dashv [A, -]$. $\square$

5.2. Axiomas para el caso representable conexo.

Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría y $A \in \boldsymbol{C}$. A partir de aquí ya no supondremos que los G-conjuntos $[A, X]$ son transitivos. Partiremos de los siguientes axiomas:

RC0) $\forall X \in \boldsymbol{C} \quad [A, X] \neq \varnothing$ y cada flecha $A \to X$ es epi estricto.

RC1) El cociente $q : A \to \frac{A}{H}$ de A para cualquier $H \leqslant Aut(A)^{op}$ existe en $\boldsymbol{C}$ y es preservado por el funtor $[A, -]$ (véase la observación 5.1.13 y la observación 5.2.3).

RC2) Cada endomorfismo de A es un automorfismo i.e. $[A, A] = Aut(A)$.

Observación 5.2.1. De la condición RC0) se sigue que cada flecha $X \to Y \in \boldsymbol{C}$ es un epi estricto.

Demostración. Sea $(f : X \to Y) \in \boldsymbol{C}$ y sea $g : X \to Z$ una flecha compatible con f. Tomemos una flecha $s : A \to X$ pues por RC0) $[A, X] \neq \varnothing$ y además $f \circ s$ es epi estricto. Es fácil ver que $g \circ s$ es compatible con $f \circ s$, por lo tanto existe una única flecha $h : Y \to Z$ tal que $h \circ f \circ s = g \circ s$. Como los epis estrictos son epis podemos cancelar a s y concluir que existe una única $h : Y \to Z$ tal que $h \circ f = g$. $\square$

Proposición 5.2.2. *La condición RC0) implica que el funtor* $[A, -]$ *es fiel, refleja monos y refleja isos.*

Demostración. Sean $f : B \to C$ y $g : B \to C \in \boldsymbol{C}$ tales que $f_* = g_*$. Por RC0) existe $h \in [A, B]$ y es epi estricto, luego $f \circ h = f_*(h) = g_*(h) = g \circ h$. Así $f = g$, pues h es epi. Por lo tanto $[A, -]$ es fiel.
Supongamos que $f_* : [A, B] \to [A, C]$ es mono y sean $a : D \to B, b : D \to B$ ($a_* : [A, D] \to [A, B], b_* : [A, D] \to [A, B]$) tales que $f \circ a = f \circ b$, entonces $f_* \circ a_* = (f \circ a)_* = (f \circ b)* = f_* \circ b_*$ y como f_* es mono (cancelable a la izquierda), entonces $a_* = b_*$. Por RC0 existe $k : A \to D$ y entonces $a \circ k = a_*(k) = b_*(k) = b \circ k$. Como k es epi, entonces $a = b$, por lo tanto f es mono. Por lo tanto $[A, -]$ refleja monos. Por la observación 5.1.4, como todas las flechas en $\boldsymbol{C}$ son epis estrictos es fácil ver que $[A, -]$ refleja isos. $\square$

Observación 5.2.3. Sobre RC1).

La función $q_* : [A, A] \to [A, \frac{A}{H}]$ se factoriza como $q_* = \eta \circ \rho$, donde ρ es la proyección natural.

$$\begin{tikzcd} {[A,A]} \arrow[r, "\rho"] \arrow[rr, bend left, "q_*"] & \frac{[A,A]}{H} \arrow[r, "\eta"] & {[A, \frac{A}{H}]} \end{tikzcd}$$

Que el funtor $[A, -]$ preserve cocientes significa que η es una biyección. De aquí se desprende:

i) Sean $f, g : A \to A$. Si $q \circ f = q \circ g \implies \exists h \in H$ tal que $f = h \circ g$.

ii) $\forall x : A \to \frac{A}{H}$, $\exists f : A \to A$ tal que $q \circ f = x$.

Observación 5.2.4. Sobre RC2).

En presencia de RC2), la condición i) se vuelve equivalente a:

iii) $q \circ f = q \implies f \in H$.

También, dada una flecha $x : A \to X$, si consideramos la siguiente factorización $x_* = \psi \circ \rho$:

$$\begin{tikzcd}
[A,A] \arrow[r, "\rho"] \arrow[rr, bend left, "x_*"] & \frac{[A,A]}{H} \arrow[r, "\psi"] & {[A,X]}
\end{tikzcd}$$

donde $H = Fij(x)$ y ψ es el morfismo inducido por el cociente, resulta que ψ es inyectiva.

Demostración. Supongamos que $\psi(\rho(f)) = \psi(\rho(g))$, entonces $x_*(f) = x_*(g)$, i.e. $x \circ f = x \circ g$, por lo tanto $f \circ g^{-1} \in H$ y así $\rho(f) = \rho(g)$. $\square$

En las siguientes tres proposiciones se usan los tres axiomas.

Proposición 5.2.5. *Cualquier flecha $x : A \to X$ es un cociente de A por el subgrupo $H \leqslant Aut(A)$, donde $H = Fij(x)$.*

Demostración. Consideremos la factorización.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "q"] \arrow[rr, bend left, "x"] & \frac{A}{H} \arrow[r, "\varepsilon"] & X
\end{tikzcd}$$

Si aplicamos el funtor $[A, -]$ a este diagrama obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
{[A,A]} \arrow[r, "q_*"] \arrow[rr, bend left, "x_*"] \arrow[dr, "\rho"'] & {[A, \frac{A}{H}]} \arrow[r, "\varepsilon_*"] & {[A,X]} \\
& \frac{[A,A]}{H} \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde ρ, η y ψ son como en las dos figuras anteriores.

Como ψ es inyectivo y η es una biyección tenemos que ε_* es mono. Como $[A, -]$ refleja monos, entonces ε es mono y como también es epi estricto, entonces ε es iso. $\square$

Proposición 5.2.6. *El funtor $[A, -]$ preserva epimorfismos estrictos.*

Demostración. Por RC0) es suficiente considerar el caso $x : A \to X$ y de la proposición 5.2.5 se sigue inmediato el resultado. $\square$

Proposición 5.2.7. *La acción de G en $[A, X]$ es transitiva para toda X.*

Demostración. Como toda flecha $x : A \to X$ es epi estricto, la proposición 5.2.6 nos dice exactamente que la acción del monoide $[A, A]^{op}$ es transitiva, luego RC2) finaliza la prueba. $\square$

Observación 5.2.8. Abusando de la notación, la función η en la observación 5.2.3 es la transformación natural η descrita en la demostración del teorema 5.1.14 en la componente $\frac{[A,A]}{H}$ usando como elemento elegido a $id_A \in [A, A]$, esto es fácil de ver con la descripción de $\frac{[A,A]}{H}$ en la observación 5.1.13). Además en la prueba de la proposición 5.2.5, el isomorfismo ε corresponde a la transformación natural ε descrita en la prueba del teorema 5.1.14 en la componente X.

Teorema 5.2.9. *Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría y $A \in \boldsymbol{C}$. Si los axiomas RC0) a RC2) se cumplen, entonces el adjunto izquierdo $A \times_G - \dashv [A, -]$ existe y los morfismos:*
a) $\eta : E \simeq \frac{[A,A]}{H_E} \to [A, \frac{A}{H_E}]$
b) $\varepsilon : \frac{A}{H_{[A,X]}} \to X$
son isomorfismos. Así, ellos establecen una equivalencia de categorías.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C} \arrow[rr, bend left, "{[A,-]_G}"] & & \boldsymbol{tCon}^G \arrow[ll, bend left, "A\times_G -"] \end{tikzcd}$$

Demostración. La existencia de dicho adjunto se sigue del teorema 5.1.14. Por la observación 5.2.8 tenemos que η y ε son isomorfismos naturales. $\square$

Notemos que los ejemplos de extensiones de Galois, tanto en el caso de campos (caso finito) como en espacios cubrientes cumplen los axiomas RC0)-RC2).

En el caso de campos, nuestra categoría $\boldsymbol{C}$ es la categoría opuesta de la categoría de extensiones intermedias de una extensión de Galois finita $K|L$ y el objeto A es $K|L$ (no es difícil ver que los cocientes en $\boldsymbol{C}$ son precisamente los campos L^H).

En el caso de espacios cubrientes, nuestra categoría $\boldsymbol{C}$ es la categoría de cubrientes conexos $p : Y \to X$ donde X es conexo, localmente conexo y localmente simplemente conexo y nuestro objeto A es el cubriente universal.

Capítulo 6

Acciones transitivas continuas de un grupo profinito.

El contenido de este capítulo fue extraído de [1].

Consideremos una categoría $\boldsymbol{C}$ y un funtor $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$.

Definición 6.0.1. La categoría de elementos de F, la cual denotamos $\int F$, es la categoría cuyos objetos son parejas (a, A) con $A \in \boldsymbol{C}$ tales que $a \in F(A)$ y cuyas flechas $f : (a, A) \to (a', A')$ son flechas $(f : A \to A') \in \boldsymbol{C}$ tales que $F(f)(a) = a'$.

Tenemos un funtor (diagrama):

$$\begin{array}{ccc} \int F^{op} & \xrightarrow{\Gamma} & \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}} \\ (a, A) & \longrightarrow & [A, -] \end{array}$$

donde Γ es el funtor que olvida seguido del funtor de Yoneda.

Recordemos que por el lema de Yoneda se tiene una biyección entre transformaciones naturales $\eta : [A, -] \to F$ y elementos $a \in F(A)$ (aquí vemos a F como una pregavilla $F : (\boldsymbol{C}^{op})^{op} \to \boldsymbol{Con}$). Entonces utilizaremos la notación $a : [A, -] \to F$ para referirnos a la transformación natural determinada por $a_A(id_A) = a$.

Proposición 6.0.2. *F es un colímite del diagrama anterior.*

Demostración. Veamos que $(F, a : [A, -] \to F)_{(a,A) \in \int F}$ es colímite para Γ. Sea $(f : (a, A) \to (b, B)) \in \int F$, queremos ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & F & \\ {[B, -]} \arrow[ur, "b"] \arrow[rr, "f^*"'] & & {[A, -]} \arrow[ul, "a"'] \end{tikzcd}$$

Por el lema de Yoneda basta ver que conmuta en la componente B en id_B

$$b_B(id_B) = b = F(f)(a) = F(f)(a_A(id_A)) = a_B(f_*(id_A))$$

la última igualdad se da pues a es transformación natural. Por lo tanto tenemos que $(F, a : [A, -] \to F)_{(A,a)\in\int F}$ es un cocono para Γ.

Supongamos que $(G, (\lambda_{(a,A)})_{(a,A)\in\int F})$ es un cocono para Γ. Queremos hallar $\gamma : F \to G$ tal que el siguiente diagrama conmute $\forall C \in \boldsymbol{C}$, $\forall (f : (a, A) \to (b, B)) \in \int F$:

$$\begin{tikzcd}
 & G(C) & \\
 & F(C) \arrow[u, "\gamma_C"] & \\
{[B,C]} \arrow[ur, "b_C"] \arrow[uur, bend left, "(\lambda_{(B,b)})_C"] \arrow[rr, "f^*"'] & & {[A,C]} \arrow[ul, "a_C"'] \arrow[uul, bend right, "(\lambda_{(A,a)})_C"']
\end{tikzcd}$$

En particular, para $id_C : (c, C) \to (c, C)$, con $c \in F(C)$,

$$\gamma_C(c) = \gamma_C(c_C(id_C)) = (\lambda_{(C,c)})_C(id_C)$$

por lo que se sigue de inmediato la unicidad de γ. Es claro que γ definido de esta forma hace conmutar el triángulo izquierdo del diagrama anterior pues por el lema de Yoneda basta que conmute evaluando en id_B. $\square$

En el ejemplo 5.1.13 teníamos un funtor representable. Para nuestro caso actual tenemos un resultado similar

Observación 6.0.3. Del ejemplo 5.1.7, dados $A \in \boldsymbol{C}$ y $H \leqslant Aut(A)^{op}$, existe el cociente $\rho : F(A) \to \frac{F(A)}{H}$, donde al escribir $\frac{F(A)}{H}$ nos referimos a $\frac{F(A)}{F(H)}$.

6.1. Axiomas para el caso conexo.

Consideremos los siguientes axiomas:

C-1) $(\int F)^{op}$ es filtrante.

C0) $\forall A \in \boldsymbol{C}$, $F(A) \neq \varnothing$ y cada flecha $x : A \to B$ es epimorfismo estricto (En este caso, en presencia de C-1) $\int F$ es COPO, ver observación 6.1.1).

C1) Dados un objeto A y un grupo finito H actuando en A, $H \to Aut(A)$, el cociente $q : A \to \frac{A}{H}$ (aquí identificamos a H con su imagen en $Aut(A)$) existe y es preservado por F (véase las observaciones 6.0.3 y 6.2.8).

C2) $F(A)$ es finito para toda A y F preserva epimorfismos estrictos.

C3) La categoría $\int F$ tiene productos finitos.

Observación 6.1.1. Si tenemos morfismos $f, g : (a, A) \to (b, B) \in \int F$, por C-1) existe $h : (c, C) \to (a, A) \in \int F$ tal que $f \circ h = g \circ h$, por C0) h es epimorfismo estricto (en particular es epi) y por lo tanto $f = g$. Por lo tanto $\int F$ es un COPO. Además, las flechas $a : [A, -] \to F$ son monomorfismos en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}}$, pues cada componente $a_B : [A, B] \to F(B)$ es una función inyectiva. Para ver esto supongamos que $F(f)(a) = a_B(f) = a_B(g) = F(g)(a) = b$, entonces $f, g : (a, A) \to (b, B)$, por lo que vimos antes $f = g$.

Observación 6.1.2. Notemos que la condición de tener productos finitos nos dice que dados $a : [A, -] \to F$ y $b : [B, -] \to F$ existe una última (c, C) debajo de (a, A) y (b, B) tal que se tiene la siguiente factorización:

$$\begin{tikzcd}
{[A,-]} \arrow[dr, "x*"'] \arrow[drr, "a"] & & \\
& {[C,-]} \arrow[r, "c"] & F \\
{[B,-]} \arrow[ur, "y*"] \arrow[urr, "b"'] & &
\end{tikzcd}$$

Observación 6.1.3. En el axioma C1), que F preserve cocientes significa que la factorización de $F(q)$ a través de $\frac{F(A)}{H}$ es una biyección:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[rr, "F(q)"] \arrow[dr] & & F(\frac{A}{H}) \\
& \frac{F(A)}{H} \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación 6.1.4. Notemos que la condición de ser filtrante en un COPO se reduce a ser dirigido, pues la propiedad $F2$) como en la subsección de categorías filtrantes se trivializa al haber una posible única flecha entre dos objetos.

De la parte de categorías filtrantes recordemos que, para una categoría $\boldsymbol{C}$, tenemos un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C} \arrow[rr] \arrow[dr] & & (\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}})^{op} \\
& Pro(\boldsymbol{C}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donde todas las flechas son fieles y plenas. En el caso de que $\int F$ sea cofiltrante, F determina un objeto en $Pro(\boldsymbol{C})$, el cual denotaremos por P (esto por pura comodidad de pensarlo como un nuevo objeto en nuestro sistema), y cada flecha $a : [A, -] \to F$ nos determina una flecha $a : P \to A$ en $Pro(\boldsymbol{C})$. Aquí abusamos de la notación escribiendo A en vez de $[A, -]$, de manera que el funtor F se vuelve representable en $Pro(\boldsymbol{C})$ por el pro-objeto P. Notemos que tautológicamente tenemos $F(X) = Pro(\boldsymbol{C})(P, X)$. También tautológicamente tenemos que $\int F$ se vuelve la categoría de todos los objetos de $\boldsymbol{C}$ debajo de P, es decir de flechas $a : P \to A$ cuyos morfismos son flechas $A \to B$ que hacen conmutar el triángulo:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ A \arrow[rr, "x"] & & B \end{tikzcd}$$

Más aún, para un objeto $A \in \boldsymbol{C}$, todas las flechas $a : P \to A$ son epis en $Pro(\boldsymbol{C})$, pues ya vimos en la observación 6.1.1 que son monos en $\boldsymbol{Con^C}$.

Proposición 6.1.5. *De los axiomas C-1) y C0) se sigue que el funtor F es fiel, refleja monomorfismos y refleja isomorfismos.*

Demostración. Primero veamos que es fiel. Sean $f : A \to B$, $g : A \to B$, tales que $F(f) = F(g)$. Sea $a \in F(A)$ y tomemos $b = F(f)(a) = F(g)(a)$. Tenemos nuestro diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ A \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & B \end{tikzcd}$$

Como a es un epimorfismo, se sigue que $f = g$. Ahora veamos que refleja monos. Sea $f : A \to B$ tal que $F(f)$ es inyectiva y sean $x : C \to A$, $y : C \to A$, tales que $f \circ x = f \circ y$, entonces $F(f) \circ F(x) = F(f) \circ F(y)$, como $F(f)$ es inyectiva se sigue que $F(x) = F(y)$ y como F es fiel $x = y$. Es claro de la observación 5.1.4 que F refleja isos. $\square$

Observación 6.1.6. El axioma C2) implica que para cada $A \in \boldsymbol{C}$, $End(A) = Aut(A)$, es decir $[A, A] = Aut(A)$.

Demostración. Dado $h : A \to A$, $F(h) : F(A) \to F(A)$ es suprayectiva. Como $F(A)$ es finito, entonces $F(h)$ es iso y como F refleja isos, entonces h es iso. $\square$

Definición 6.1.7. Un objeto $a : P \to A$ es Galois si y solo si la flecha $a^* : Aut(A) \to [P, A]$ es una biyección, es decir:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "\forall y"] & \\ A \arrow[rr, "\exists ! h"'] & & A \end{tikzcd}$$

De nuestra observación anterior, esto es equivalente a pedir que la flecha $a^* : [A, A] \to [P, A]$ sea una biyección.

Observación 6.1.8. Si $a : P \to A$ es Galois, entonces $b : P \to A$ es Galois para toda b.

Demostración. Se sigue inmediato del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A & P \arrow[l, "c"'] \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"] & A \\ & A \arrow[ul, "\exists ! h'"] \arrow[ur, "\exists ! h"'] & \end{tikzcd}$$

$\square$

De este modo, no hay ambigüedad en definir que A es un objeto Galois si $a : P \to A$ es Galois para alguna a.

Definición 6.1.9. Sea $a : P \to A$ Galois, definimos la subcategoría plena $\boldsymbol{C}_A \to \boldsymbol{C}$ como sigue: $X \in \boldsymbol{C}_A$ si y solo si $a^* : [A, X] \to [P, X] = F(X)$ es suprayectiva (por lo tanto una biyección), es decir:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\forall x"'] \arrow[dr, "a"] & \\ X & & A \arrow[ll, "\exists! h"] \end{tikzcd}$$

Observemos que esta definición no depende de a y $A \in \boldsymbol{C}_A$.

Proposición 6.1.10. *Dado un morfismo de transición entre objetos Galois:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ A \arrow[rr, "x"] & & B \end{tikzcd}$$

se tiene un encaje de categorías $\boldsymbol{C}_B \to \boldsymbol{C}_A$.

Demostración. Sea $X \in \boldsymbol{C}_B$, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\forall y"'] \arrow[dr, "b"] & \\ X & & B \arrow[ll, "\exists! h"] \end{tikzcd}$$

por lo tanto se tiene el siguiente diagrama del cual ya es claro el resultado:

$$\begin{tikzcd} X & P \arrow[l, "\forall y"'] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & A \arrow[dl, "x"] \\ & B \arrow[ul, "\exists! h'"] & \end{tikzcd}$$

$\square$

Observación 6.1.11. La restricción del funtor F en $\boldsymbol{C}_A$ es el funtor representado por A:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C}_A \arrow[r] \arrow[dr, "{[A,-]}"'] & \boldsymbol{C} \arrow[d, "{[P,-]=F}"] \\ & \boldsymbol{Con} \end{tikzcd}$$

Proposición 6.1.12. *La categoría* $\boldsymbol{C}_A$ *es cerrada bajo cocientes de acciones de grupos finitos.*

Demostración. Sea $q : X \to \frac{X}{H}$ un cociente de $X \in \boldsymbol{C}_A$ por un grupo finito, consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[A,X]} \arrow[r, "a^*"] \arrow[d, "q_*"'] & {[P,X]} \arrow[d, "q_*"] \\
{[A,\frac{X}{H}]} \arrow[r, "a^*"'] & {[P,\frac{X}{H}]}
\end{tikzcd}$$

Por el axioma C1), $[P, \frac{X}{H}] \cong \frac{[P,X]}{H}$ y por lo tanto q_* del lado derecho es epi y como a_* arriba es una biyección, se sigue que $a^* : [A, \frac{X}{H}] \to [P, \frac{X}{H}]$ es una biyección y por lo tanto $\frac{X}{H} \in \boldsymbol{C}_A$. □

Teorema 6.1.13. *Sea A un objeto Galois. Se tiene una equivalencia de categorías:*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C_A} \arrow[rr, bend left, "{[A,-]_G}"] & & \boldsymbol{tCon}^G \arrow[ll, bend left, "A\times_G -"]
\end{tikzcd}$$

donde $G = Aut(A)^{op}$.

Demostración. Por el teorema 5.2.9 basta ver que la categoría $\boldsymbol{C_A}$ con el objeto $A \in \boldsymbol{C_A}$ satisface los axiomas RC0) a RC2). La observación 6.1.11 junto con el axioma C0) nos da RC0), la proposición 6.1.12 junto con el axioma C1) nos da RC1) y la observación 6.1.6 nos da RC2). □

Teorema 6.1.14. *(Existencia de una cerradura Galois) Sea $X \in \boldsymbol{C}$. Existe un objeto Galois $a : P \to A$ tal que $X \in \boldsymbol{C}_A$.*

Demostración. Consideremos el conjunto finito $[P, X]$ y sea (a, A) el ínfimo de la colección $\{(x, X)\}_{x\in[P,X]}$ en $\int F$, el cual existe por C3), entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X & & A \arrow[ll, "\pi_x"]
\end{tikzcd}$$

Veamos que A es Galois. Sea $y : P \to A$ y consideremos la función $\phi : [P, X] \to [P, X]$ que manda a x en $\pi_x \circ y$. Esta función es inyectiva $(\pi_x \circ y = \pi_{x'} \circ y \to \pi_x = \pi_{x'} \to x = x')$ entre conjuntos finitos, por lo tanto es una biyección. Sea $x \in [P, X]$, entonces existe $x' \in [P, X]$ tal que $x = \pi_{x'} \circ y$. Esto nos dice que $(y, A) \leqslant (x, X) \quad \forall x \in [P, X]$ y como (a, A) es el ínfimo de la colección $\{(x, X)\}_{x\in[P,X]}$ tenemos una única $b : A \to A$ como en el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
& & X \\
P \arrow[urr, "x"] \arrow[r, "a"] \arrow[drr, "y"'] & A \arrow[ur, "\pi_x"] & \\
& & A \arrow[ul, "\exists! b"'] \arrow[uu, "\pi_{x'}"']
\end{tikzcd}$$

□

Corolario 6.1.15. *Los objetos Galois son cofinales en* $\int F$.

Demostración. Es directo del teorema anterior y la proposición 2.1.59. □

Entonces, por la proposición 2.1.50, F es un colímite filtrante de representables $[A, -]$, con A Galois. Sea Λ_F la subcategoría de $\int F$ que consiste de objetos Galois. En este caso, tenemos que $(P, \{a : P \to A\}_{(a,A)\in\Lambda_F})$ es un límite cofiltrante y entonces $\boldsymbol{C}$ se vuelve un colímite filtrante de las subcategorías plenas $\boldsymbol{C}_A \to \boldsymbol{C}$ en $\boldsymbol{Cat}$.

6.2. Acciones de un grupo profinito.

Seguimos con nuestra categoría $\boldsymbol{C}$ y nuestro funtor $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$ que cumplen los axiomas del caso conectado y nuestro pro-objeto P asociado a F.

Construcción 6.2.1. Sea $(x : (a, A) \to (b, B)) \in \Lambda_F$. Definimos $\rho_x : [A, A] \to [B, B]$ mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[P,A]} \arrow[r, "x_*"] & {[P,B]} \\
{[A,A]} \arrow[u, "a^*", "\cong"'] \arrow[r, "\rho_x"'] & {[B,B]} \arrow[u, "b^*", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Veamos que ρ_x es un morfismo de grupos. Dado $f \in [A, A]$, $\rho_x(f) : B \to B$ es la única flecha tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "x\circ f"] \\
B \arrow[r, "\rho_x(f)"'] & B
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad de la flecha de A en B que manda a en b tenemos que $\rho_x(f)^{-1} \circ x \circ f = x$ y por lo tanto $\rho_x(f)$ es la flecha en $[B, B]$ que cumple $\rho_x(f) \circ x = x \circ f$. Sean $f, g \in [A, A]$, entonces

$$\rho_x(f) \circ \rho_x(g) \circ x = \rho_x(f) \circ x \circ g = x \circ f \circ g$$

Por lo tanto $\rho_x(f \circ g) = \rho_x(f) \circ \rho_x(g)$

Definimos también $\pi_a : [P, P] \to [A, A]$ mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[P,P]} \arrow[rr, "\pi_a"] \arrow[dr, "a_*"'] & & {[A,A]} \arrow[dl, "a^*", "\cong"'] \\
& {[P,A]} &
\end{tikzcd}$$

Si $f \in [P,P]$, entonces $\pi_a(f)$ es la flecha de $[A,A]$ tal que $\pi_a(f) \circ a = a \circ f$ y de forma análoga a los morfismos ρ_x obtenemos que π_a es un morfismo de grupos.

Así, hemos construido un cono en $\boldsymbol{Gr}$ (la categoría de grupos) sobre Λ_F:

$$\begin{tikzcd} {[P,P]} \arrow[rr, "\pi_a"] \arrow[dr, "\pi_b"'] & & {[A,A]} \arrow[dl, "\rho_x"] \\ & {[B,B]} & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, si consideramos un elemento $(f_{(a,A)}) \in \prod_{(a,A)}[A,A]$ tal que para cada flecha $x : (a,A) \to (b,B)$ $\rho_x(f_{(a,A)}) = f_{(b,B)}$, entonces para cada $x : (a,A) \to (b,B)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ A \arrow[rr, "x"] \arrow[d, "f_{(a,A)}"'] & & B \arrow[d, "f_{(b,B)}"] \\ A \arrow[rr, "x"'] & & B \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de P existe una única flecha $f : P \to P$ tal que para cada $x : (a,A) \to (b,B)$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "f_{(a,A)} \circ a"'] \arrow[ddr, "f_{(b,B)} \circ b"] & \\ & P \arrow[dl, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \\ A \arrow[rr, "x"'] & & B \end{tikzcd}$$

Notemos que $f_{(a,A)} = \pi_a(f)$ y claramente $([P,P], \pi_a : [P,P] \to [A,A])_{(a,A)}$ es de hecho el límite del diagrama expuesto, por lo tanto $[P,P] = Aut(P)$ al ser grupo. Finalmente como los morfismos $x_* : [P,A] \to [P,B]$ son suprayectivos, los morfismos de transición ρ_x son suprayectivos; como veremos en la proposición 6.2.7 inciso 1, esto implica que las proyecciones π_a son suprayectivas.

Definición 6.2.2. Sea $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{Gr}$ un diagrama cofiltrante de grupos finitos con límite $(G, \pi_I : G \to G_I)$. Decimos que G es un grupo profinito cuando lo consideramos con la topología producto de los grupos discretos G_I.

Lema 6.2.3. *De acuerdo a la definición anterior, los subgrupos $K_I = ker(\pi_I)$ forman una base de vecindades abiertas de la unidad e.*

Demostración. Sea U un abierto básico de G que contenga al elemento neutro de G, $e = (e_I)$. Entonces existen un subconjunto finito $S \subset Ob(\boldsymbol{I})$ y abiertos U_s de G_s (con $e_s \in U_s$) para cada $s \in S$ tales que

$$U = G \bigcap \left(\prod_{s \in S} U_s \prod_{J \notin S} G_J \right)$$

donde $\prod_{s\in S} U_s \prod_{J \notin S} G_J = \{(g_I)_{I \in \boldsymbol{I}} \in \prod_I G_I \quad | \quad g_I \in U_I \text{ si } I \in S\}$. Notemos que $\bigcap_S K_s \subset U$ y la condición de que $\boldsymbol{I}$ sea cofiltrante nos aseguran la existencia de un $I \in \boldsymbol{I}$ tal que $K_I \subset \bigcap_S K_s$. Por lo tanto existe $I \in \boldsymbol{I}$ tal que $K_I \subset U$. □

Ejemplo 6.2.4. 1) Todo grupo finito es un grupo profinito ya que lo podemos ver como el límite del diagrama trivial formado por él mismo y su identidad.

2) El grupo de Galois absoluto de un campo es un grupo profinito. En este caso si k es un campo, entonces $Gal(k)$ es el límite del diagrama sobre las extensiones de Galois finitas de k formado por los morfismos restricción

$$\{\pi_{L,M} : Gal(L|k) \to Gal(M|k)\}_{L|M|k}$$

3) Sea p un número primo y consideremos el siguiente diagrama en $\boldsymbol{Gr}$ sobre $\mathbb{N}$, $\{\phi_{i,j} : \mathbb{Z}_{p^i} \to \mathbb{Z}_{p^j}\}_{0 \leqslant j \leqslant i}$, donde $\phi_{i,j}$ es la proyección canónica para cada $0 \leqslant j \leqslant i$. Entonces $\widehat{\mathbb{Z}_p} = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k | a_k \in \mathbb{Z}\}$ (El grupo de los enteros p-ádicos) junto con las proyecciones canónicas es el límite del diagrama descrito y por lo tanto es un grupo profinito. En la descripción de $\widehat{\mathbb{Z}_p}$ las sumas son series formales.

Proposición 6.2.5. *Sea G un grupo profinito como en la definición 6.2.2. Una acción transitiva $\phi : G \times E \to E$ sobre un conjunto discreto E es continua si y solo si existen $I \in \boldsymbol{I}$ y una acción $Im(\pi_I) \times E \to E$ tales que se tiene la siguiente factorización:*

$$\begin{tikzcd} G \times E \arrow[r] \arrow[d, "(\pi_I, id_E)"'] & E \\ Im(\pi_I) \times E \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Demostración. $\Leftarrow$] Es trivial, pues cada G_I es discreto y composición de funciones continuas es continua.

$\Rightarrow$] Sea $x \in E$ y consideremos a $H = Fij(x) \subset G$. Tenemos que H es abierto porque E es discreto y $H = G \times \{x\} \bigcap \phi^{-1}(x)$. Por el lema 6.2.3 existe $I \in \boldsymbol{I}$ tal que $K_I \subset H$. Como K_I es normal en G, $K_I \subset Fij(y)$ $\forall y \in E$ (esto ocurre pues si $gy = x$, entonces $(g(a_J)g^{-1})gy = g(a_J)g^{-1}x = x = gy$ $\forall (a_J) \in K_I$, i.e. $(a_J)y = y$ $\forall (a_J) \in K_I$). Por lo tanto, podemos definir una acción de $\frac{G}{K_I}$ en E mediante $[g]x = gx$ para cada $[g] \in \frac{G}{K_I} \cong Im(\pi_I)$ y claramente con esta acción el diagrama requerido conmuta. □

De la proposición anterior, observamos que si tenemos una acción continua y transitiva de un grupo profinito G sobre un conjunto discreto E, entonces E es finito pues, si fijamos $x \in E$, entonces $E = \{gx | g \in Im(\pi_I)\}$ el cual es finito. Si además las proyecciones fueran suprayectivas la factorización se daría a través de algún G_I.

En lo que sigue del capítulo supondremos que los morfismos de transición $\rho_x : G_I \to G_J$ son suprayectivos.

Observación 6.2.6. Sea G un grupo profinito como en la definición 6.2.2. Entonces, las flechas $\rho_x : G_I \to G_J$ están completamente determinadas por I y J.

Demostración. Sean $\rho_x, \rho_y : G_J \to G_I$ un par de flechas donde $(x, y : J \to I) \in \boldsymbol{I}$. Como $\boldsymbol{I}$ es cofiltrante existe una flecha $(z : K \to J) \in \boldsymbol{I}$ tal que $x \circ z = y \circ z$, por lo tanto $\rho_x \circ \rho_z = \rho_y \circ \rho_z$ y como ρ_z es suprayectiva, entonces $\rho_x = \rho_y$. Por lo tanto las flechas ρ_x están determinadas por el dominio y codominio de x. $\square$

Definimos un orden parcial para $Ob(\boldsymbol{I})/\cong$ como sigue: $I \leqslant J$ si y solo si $Hom_I(J, I) \neq \emptyset$. Si $I \leqslant J$ denotaremos como $\pi_{JI} : G_J \to G_I$ al morfismo determinado por cualquier flecha en $Hom_I(J, I)$. De esta forma nuestro grupo profinito G adquiere la siguiente descripción

$$G = \{(g_I)_I | \pi_{JI}(g_J) = g_I \quad \forall I < J \in \boldsymbol{I}\}$$

En la proposición siguiente, la prueba del inciso 1) fue extraída de [14].

Proposición 6.2.7. *Sea* $\{\pi_I : G \to G_I\}_I$ *un grupo profinito.* $\forall x : I \to J$ *se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) Las proyecciones $\pi_I : G \to G_I$ *son suprayectivas.*

2) Dado $I \in \boldsymbol{I}$*, se tiene un encaje de categorías:*

$$\boldsymbol{tCon}^{G_I} \hookrightarrow \boldsymbol{ctCon}^G$$

donde $\boldsymbol{ctCon}^G$ *denota a la categoría de* G*-conjuntos transitivos continuos (la* **c** *se refiere a continuo, i.e. tal que* G *actúa continuamente de acuerdo a la definición 2.2.10).*

3) Dada una flecha $(x : I \to J) \in \boldsymbol{I}$*, se tiene un encaje de categorías:*

$$\boldsymbol{tCon}^{G_J} \hookrightarrow \boldsymbol{tCon}^{G_I}$$

4) La categoría $\boldsymbol{ctCon}^G$ *es un colímite filtrante en la categoría* $\boldsymbol{Cat}$ *(indexado por* $\boldsymbol{I}^{op}$*) de las subcategorías* $\boldsymbol{tCon}^{G_I}$*.*

Demostración. 1) Sea $a \in G_I$ para algún objeto $I \in \boldsymbol{I}$. Queremos encontrar un elemento $g \in G$ tal que $\pi_I(g) = a$. Para cada $I \leqslant J$ definimos el conjunto

$$T_J = \{(a_K)_K \in \prod_K G_K | a_I = a \wedge \pi_{JN}(a_J) = a_N \forall N \leqslant J\}$$

Notemos que T_J es cerrado en $\prod_K G_K$ pues

$$T_J = \left(\bigcap_{N \leqslant J, a_J \in J} \pi_N^{-1}(\pi_{JN}(a_J)) \right) \cap \pi_I^{-1}(a)$$

donde estamos abusando de la notación para referirnos por π_J a la proyección canonica $\pi_J : \prod_K G_K \to G_J$. Esto ocurre pues T_J es una intersección de cerrados ya que cada G_J es Hausdorff. Además T_J es no vacío pues los morfismos de transición son suprayectivos.

Queremos probar que $\bigcap_{J\in \boldsymbol{I}} T_J \neq \varnothing$ pues un elemento en la intersección tiene I-ésima coordenada a y además pertenece a G por construcción. Por el teorema de Tychonoff $\prod_K G_K$ es compacto y entonces basta probar que la colección $\{T_J\}_{J\in\boldsymbol{I}}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Sea $\{T_{J_1}, \ldots, T_{J_n}\}$ un subconjunto finito de $\{T_J\}_{J\in\boldsymbol{I}}$. Como $\boldsymbol{I}$ es cofiltrante existe $J \in \boldsymbol{I}$ tal que $J_i \leqslant J$ para $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $\varnothing \neq T_J \subset \bigcap_i T_{J_i}$.

2) A cada $Y \in \boldsymbol{tCon}^{G_I}$ lo dotamos de una acción de G de la siguiente manera: para cada $y \in Y$ y $g \in G$ definimos $gy = \pi_I(g)y$. Por la proposición 6.2.5, esta definición nos genera una acción transitiva y continua de G en Y.

3) A cada $Y \in \boldsymbol{tCon}^{G_J}$ lo dotamos de una acción de G_I de la siguiente manera: para cada $y \in Y$ y $g \in G_I$ definimos $gy = \rho_x(g)y$. Como ρ_x es suprayectiva, esta definición nos genera una acción transitiva de G_I.

4) Es inmediato de la proposición 6.2.5 y el hecho de que las proyecciones son suprayectivas. □

Proposición 6.2.8. *Sean A y B objetos Galois y una flecha $x : (a, A) \to (b, B)$. El siguiente diagrama conmuta (salvo isomorfismo natural):*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C}_A \arrow[r, "{[A,-]}"] & \boldsymbol{tCon}^K \\
\boldsymbol{C}_B \arrow[r, "{[B,-]}"] \arrow[u, hook] & \boldsymbol{tCon}^L \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

donde $K = Aut(A)^{op}$ y $L = Aut(B)^{op}$ (Notemos que la flecha vertical derecha está inducida como vimos en la proposición 6.2.7 inciso 3 y la definición de ρ_x es la vista en la construcción 6.2.1).

Demostración. Sea $X \in \boldsymbol{C}_B$ y consideremos el morfismo $x^* : [B, X] \to [A, X]$, el cual es un morfismo de K-conjuntos por el siguiente cálculo: dados $h \in K$, $f \in [B, X]$ tenemos la siguiente secuencia de igualdades

$$x^*(hf) = x^*(\rho_x(h)f) = f \circ \rho_x(h) \circ x = f \circ x \circ h = hx^*(f)$$

Por otro lado tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[A,X]} \arrow[r, "a^*"] & {[P,X]} \\
{[B,X]} \arrow[u, "x^*"] \arrow[ur, "b^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Como a^* y b^* son biyecciones, entonces x^* es una biyección. □

Proposición 6.2.9. *Con las mismas hipótesis de la proposición anterior, el siguiente diagrama conmuta (salvo isomorfismo natural).*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C}_A & \boldsymbol{tCon}^K \arrow[l, "A\times_K -"'] \\
\boldsymbol{C}_B \arrow[u, hook] & \boldsymbol{tCon}^L \arrow[l, "B\times_L -"'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{C}_A \\
\boldsymbol{C}_A \arrow[ur, "id_{\boldsymbol{C}_A}"] \arrow[r, "{[A,-]}"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\cong\uparrow\varepsilon"] & \boldsymbol{tCon}^K \arrow[u, "A\times_K -"'] \\
\boldsymbol{C}_A \arrow[u, hook] \arrow[r, "{[B,-]}"] \arrow[r, phantom, shift left=5ex, "\cong\uparrow x^*"] & \boldsymbol{tCon}^L \arrow[u, hook] \\
\boldsymbol{tCon}^L \arrow[u, "B\times_L -"] \arrow[ur, "id_{\boldsymbol{tCon}^L}"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3ex, "\cong\uparrow\eta"] &
\end{tikzcd}$$

donde estamos abusando de la notación al referirnos con ε a la counidad del par adjunto $(A\times_K -, [A,-])$ y con η a la unidad del par adjunto $(B\times_L -, [B,-])$. De este diagrama, es fácil observar que el diagrama requerido conmuta salvo el siguiente isomorfismo natural

$$\begin{tikzcd}
A\times_K([B, B\times_L -]) \arrow[r, "A\times_K - \circ x^* \circ B\times_L -"] & A\times_K([A, B\times_L -]) \arrow[d, "\varepsilon\circ B\times_L -"] \\
A\times_K - \arrow[u, "A\times_K - \circ\eta"] \arrow[r, "\cong"] & B\times_L -
\end{tikzcd}$$

$\square$

Proposición 6.2.10. *Sea $X \in \boldsymbol{C}$. Se tiene una acción transitiva y continua izquierda del grupo $[P,P]^{op} = G$ en el conjunto $[P,X]$:*

$$\begin{aligned} G\times[P,X] &\longrightarrow [P,X] \\ (h,x) &\longrightarrow hx = x\circ h \end{aligned}$$

dado por la composición en $Pro(\boldsymbol{C})$.

Demostración. Usando el teorema 6.1.14 podemos encontrar un objeto Galois $a : P \to A$. Sea $L := Aut(A)^{op}$. Por la proposición 5.2.7 tenemos una acción transitiva $L \times [A,X] \to$

$[A,X]$. Como $a : P \to A$ es Galois, la función $a^* : [A,X] \to [P,X]$ es biyectiva y por lo tanto tenemos una acción de L en $[P,X]$ definida mediante

$$L \times [P,X] \xrightarrow{(id_L,(a^*)^{-1})} L \times [A,X] \to [A,X] \xrightarrow{a^*} [P,X]$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G \times [P,X] \arrow[d, "(\pi_a, id_X)"'] \arrow[r] & {[P,X]} \\
L \times [P,X] \arrow[d, "(id_L,(a^*)^{-1})"'] & \\
L \times [A,X] \arrow[r] & {[A,X]} \arrow[uu, "a^*"']
\end{tikzcd}$$

Por la proposición 6.2.5 tenemos que esta acción es continua. Como la acción de L en $[A,X]$ es transitiva y las proyecciones π_a son suprayectivas, entonces la acción $G \times [P,X] \to [P,X]$ es transitiva. $\square$

Por lo tanto tenemos un funtor

$$\boldsymbol{C} \xrightarrow{[P,-]_G} \boldsymbol{ctCon}^G$$

Veremos ahora como de nuestro teorema para el caso representable y de nuestros resultados de estructura en las proposiciones 6.1.10 y 6.2.7, el funtor $[P,-]_G$ tiene adjunto izquierdo el cual establece una equivalencia de categorías.

Teorema 6.2.11. *El funtor*

$$\boldsymbol{C} \xrightarrow{[P,-]_G} \boldsymbol{ctCon}^G$$

tiene un adjunto izquierdo $P \times_G -$, el cual establece una equivalencia de categorías.

Demostración. Tenemos colímites filtrantes de subcategorías plenas:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C} \arrow[r, "{[P,-]_G}"] & \boldsymbol{ctCon}^G \\
\boldsymbol{C_A} \arrow[u, hook] \arrow[r, shift left, "{[A,-]_L}"] & \boldsymbol{tCon}^L \arrow[u, hook] \arrow[l, shift left, "B \times_L -"]
\end{tikzcd}$$

los cuales son compatibles en el sentido de las proposiciones 6.2.8 y 6.2.9. Dado $E \in \boldsymbol{ctCon}^G$, para definir $P \times_G E$ observamos que $E \in \boldsymbol{Con}^L$ para algún $L = [A,A]^{op}$ y definimos $P \times_G E = A \times_L E$. Que esto está bien definido y que determina un adjunto izquierdo de $[P,-]_G$ se sigue de que estas subcategorías son plenas y de las compatibilidades citadas. Finalmente, como en cada uno de los niveles de este diagrama se tiene una equivalencia, tenemos entonces una equivalencia en el colímite. $\square$

Capítulo 7

Todas las acciones continuas de un grupo profinito.

El contenido de este capítulo fue extraído de [1].

Convención: La palabra [finito] entre corchetes significará que la afirmación se seguirá de dos maneras: una suponiendo finito y la otra no suponiendo finito. Cuando la palabra finito aparezca sin corchetes tendrá el significado usual.

Ahora consideraremos los axiomas de Grothendieck como los escribió él mismo en [7] y probaremos su teorema fundamental. Él consideró una categoría que tuviera, en particular, sumas finitas y probó que esa categoría es equivalente a la categoría de todas las acciones continuas sobre conjuntos finitos de un grupo profinito. En la prueba que aquí se muestra se puede apreciar claramente que el argumento es válido si uno supone la existencia de sumas arbitrarias y la conclusión es que esta categoría es equivalente a la categoría de todas las acciones continuas del mismo grupo profinito. Se escribirán estos dos resultados en paralelo.

7.1. Axiomas de Grothendieck.

Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría y $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$ un funtor. Supondremos los siguiente axiomas:

Primero introducimos el axioma G0) para tratar con el caso no finito: Un objeto $X \in \boldsymbol{C}$ es llamado finito si $F(X)$ es finito.

G0) La subcategoría plena de $\int F$ que consiste de aquellos objetos $(x, X) \in \int F$, con X finito, es cofinal en $\int F$.

Axiomas en $\boldsymbol{C}$:

G1) $\boldsymbol{C}$ tiene objeto final 1 y productos fibrados (Esto implica la existencia de límites finitos, véase la proposición 2.1.43).

G2) $\boldsymbol{C}$ tiene coproductos [finitos] y cocientes de objetos por grupos finitos.

G3) $\boldsymbol{C}$ tiene factorizaciones epi estricto-mono. Esto es, dada una flecha $f : X \to Y$, hay una factorización:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend left, "f"] & I \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

donde e es un epimorfismo estricto e i es un monomorfismo. Más aún, supondremos que I es sumando directo de Y. Esto es, existe un subobjeto $J \to Y$ tal que $Y \cong I \bigsqcup J$.

Axiomas en F:

G4) F es exacto izquierdo. Esto es que preserva límites finitos.

G5) F preserva coproductos [finitos], cocientes de acciones sobre grupos finitos y manda epimorfismos estrictos en suprayecciones.

G6) F refleja isomorfismos.

Mostraremos que todo objeto de $\boldsymbol{C}$ es un coproducto [finito] de objetos conexos (véase la definición 2.1.76) y que la subcategoría plena de todos los objetos conexos satisface los axiomas C-1) a C3).

Ejemplo 7.1.1. Dado un grupo profinito G, la categoría $\boldsymbol{cCon}^G$ junto con el funtor que olvida $F : \boldsymbol{cCon}^G \to \boldsymbol{Con}$ satisfacen los axiomas G0)-G6).

Proposición 7.1.2. *1) El objeto inicial 0 es estricto, véase la definición 2.1.70.*

2) Dado $X \in \boldsymbol{C}$, $F(X) = \varnothing$ si y solo si $X \cong 0$.

3) Dados objetos finitos A, A_1, A_2 y un isomorfismo $A \cong A_1 \coprod A_2$, si $F(A_1) \cong F(A)$, entonces $A_2 \cong 0$.

4) El funtor F preserva y refleja monomorfismos.

5) Los coproductos [finitos] son ajenos y estables bajo productos fibrados.

Demostración. Los incisos 1) y 2) se siguen inmediatamente de G5) y G6).
Para el inciso 3) aplicamos el funtor F y por G5) obtenemos una biyección de conjuntos finitos, $F(A) \cong F(A_1) \coprod F(A_2)$, como $F(A) \cong F(A_1)$ entonces $F(A_2) = \varnothing$ y por G6), $A_2 \cong 0$.
4) Que F preserve monomorfismos se sigue de G4) pues en una categoría, una flecha $u : X \to Y$ es un monomorfismo si y solo si el cuadrado:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] \arrow[d, "id_X"'] & X \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Ahora veamos que F refleja monomorfismos. Sea $(f : X \to Y) \in \boldsymbol{C}$ tal que $F(f)$ es mono. Por G3) f tiene una factorización epi estricto-mono

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend left, "f"] & I \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

y por G5) $F(e)$ es suprayectiva. Como $F(f) = F(i) \circ F(e)$ y $F(f)$ es mono, entonces $F(e)$ es mono, por lo tanto $F(e)$ es iso. Por G6) $e : X \to I$ es iso y por lo tanto $f : X \to Y$ es mono. Finalmente veamos que el inciso 4) se satisface. Sea $\{X_i\}_i \in I$ una familia [finita] de objetos de $\boldsymbol{C}$. Consideremos el coproducto

$$\left(\coprod_i X_i, u_j : X_j \to \coprod_i X_i\right)$$

el cual existe por G2). Por G5)

$$\left(F\left(\coprod_i X_i\right), F(u_j) : F(X_j) \to F\left(\coprod_i X_i\right)\right)$$

es un coproducto en $\boldsymbol{Con}$. Sea $f : A \to \coprod_i X_i$ y para cada $j \in I$ consideremos el producto fibrado en $\boldsymbol{C}$ el cual existe por G1)

$$\begin{tikzcd} f^*X_j \arrow[r, "g_j"] \arrow[d, "h_j"'] & A \arrow[d, "f"] \\ X_j \arrow[r, "u_j"'] & \coprod_i X_i \end{tikzcd}$$

Por G4), el diagrama en $\boldsymbol{Con}$

$$\begin{tikzcd} F(f^*X_j) \arrow[r, "F(g_j)"] \arrow[d, "F(h_j)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(X_j) \arrow[r, "F(u_j)"'] & F(\coprod_i X_i) \end{tikzcd}$$

es un diagrama de producto fibrado. Como $\boldsymbol{Con}$ es extensiva tenemos que $(F(A), F(g_j))_j$ es un coproducto. Si $(k : \coprod_i f^*X_i \to A) \in \boldsymbol{C}$ es la flecha inducida por la propiedad universal del coproducto, entonces $(F(k) : F(\coprod_i f^*X_i) \to F(A)) \in \boldsymbol{Con}$ es la flecha inducida por la propiedad universal del coproducto. Como $(F(A), F(g_j))_j$ es coproducto, entonces $F(k)$ es un isomorfismo, por G6) k es un isomorfismo. Ver que los coproductos [finitos] son ajenos es aún más fácil usando el inciso 2). $\square$

Del último inciso de la proposición anterior concluimos por la proposición 2.1.75 que la categoría $\boldsymbol{C}$ es extensiva. Ahora consideremos la categoría de elementos $\int F$. Por G0) F será también el colímite de la subcategoría plena θ_F de $\int F$ que consiste de parejas (x, X)

tal que X es finito. Notemos que como $\boldsymbol{C}$ tiene límites finitos y F los preserva, θ_F es una categoría cofiltrante. Por lo tanto F es un pro-objeto de la categoría $\boldsymbol{C}$ y lo denotaremos por P. Tenemos por el lema de Yoneda las siguientes biyecciones.

$$\frac{\dfrac{P \xrightarrow{x} X}{[X,-] \xrightarrow{x} F}}{x \in F(X)}$$

y el funtor F es representable por P. Escribimos $F(X) \cong [P, X]$.

Observación 7.1.3. El hecho de que F preserve coproductos [finitos] (G5) significa que P es conexo en la categoría que resulta de agregarle a $\boldsymbol{C}$ el objeto P y las flechas $x : P \to X$.

Proposición 7.1.4. *Sean A un objeto no inicial y B conexo, entonces toda flecha $f : A \to B$ es un epimorfismo estricto.*

Demostración. Consideremos la factorización dada por G3):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & B \\ & I \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

Como A no es inicial y los iniciales son estrictos, I no es inicial. Como B es conexo e I es sumando de B tenemos que $I \cong B$. □

Proposición 7.1.5. *Dado un epimorfismo estricto $f : A \to B$, si A es conexo entonces B es conexo.*

Demostración. Consideremos una factorización de B, $B \cong B_1 + B_2$. Como $\boldsymbol{C}$ es extensiva $A \cong f^*B_1 + f^*B_2$ donde f^*B_i es el producto fibrado sobre B_i a lo largo de f. Como A es conexo $f^*B_1 \cong 0$ o $f^*B_2 \cong 0$. Supongamos que $f^*B_1 \cong 0$, como F preserva límites finitos y $F(f)$ es suprayectiva (G5), entonces $F(B_1) = \varnothing$ y por el inciso 2 de la proposición 7.1.2 $B_1 \cong 0$. Por lo tanto B es conexo. □

Definición 7.1.6. Un objeto de θ_F, $a : P \to A$, es minimal si y solo si no admite subobjetos propios en θ_F. i.e. Cada vez que tengamos un diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "a"] \arrow[d, "x"'] & A \\ X \arrow[ur, tail, "u"'] & \end{tikzcd}$$

con u mono, entonces u es iso.

Proposición 7.1.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) A es un objeto conexo y finito en $\boldsymbol{C}$.
2) Cada $a : P \to A$ es minimal y $[P, A] \neq \varnothing$.
3) Existe $a : P \to A$ minimal.

Demostración. 1)⇒ 2)] Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "a"] \arrow[d, "x"'] & A \\ X \arrow[ur, tail, "u"'] & \end{tikzcd}$$

con u mono. Por G3) cada subobjeto de A es sumando de A y por lo tanto $A \cong X$.

2)⇒ 3)] Es claro.

3)⇒ 1)] Supongamos que $A \cong A_1 + A_2$ y tomemos $a : P \to A$ minimal. Como F preserva coproductos entonces a se factoriza a través de A_1 o A_2. Supongamos SPG que es A_1, entonces $A \cong A_1$ y por la proposición 7.1.2 $A_2 = 0$. □

Proposición 7.1.8. *Los objetos minimales son cofinales en θ_F.*

Demostración. Sea $x : P \to X$ un objeto de θ_F. Si x es minimal ya no hay nada que hacer. Si no lo es, existe un subobjeto propio $u_1 : X_1 \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "x"] \arrow[d, "x_1"'] & X \\ X_1 \arrow[ur, tail, "u_1"'] & \end{tikzcd}$$

Si $x_1 : P \to X_1$ es minimal ya no hay nada que hacer. Como nuestros objetos son finitos y en cada paso $F(X_i)$ es más pequeño que el anterior, eventualmente acabamos. □

Corolario 7.1.9. *La subcategoría plena Γ_F de θ_F que consiste de aquellos objetos $a : P \to A$ con A finito y conexo es cofinal en θ_F. (Por G0) también es cofinal en $\int F$).*

Corolario 7.1.10. *Todos los objetos conexos son finitos.*

Demostración. Sea $x : P \to X$ un objeto conexo. Por el corolario anterior existe un objeto conexo y finito $a : P \to A$ y una flecha $q : A \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & X \\ A \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

Por la proposición 7.1.4, q es epi estricto. Por lo tanto $F(q)$ es suprayectiva y $F(X)$ es finito. □

Proposición 7.1.11. Γ_F *tiene productos finitos.*

Demostración. Sean $(a : P \to A)$, $(b : P \to B) \in \Gamma_F$ y consideremos una flecha $(c : P \to C) \in \Gamma_F$ tal que existen flechas $a' : C \to A$, $b' : C \to B$ de manera que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "c"] \arrow[ddl, bend right, "a"'] \arrow[ddr, bend left, "b"] & \\
& C \arrow[dl, "a'"] \arrow[dr, "b'"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Esto nos induce una única flecha $(a', b') : C \to A \times B$. Consideremos su factorización epi estricto-mono

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "(a',b')"] \arrow[dr, two heads] & & A \times B \\
& I \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

Por la proposición 7.1.5 I es conexo. Veamos que $P \to C \to I$ es el producto de $a : P \to A$ y $b : P \to B$ en Γ_F. Sea

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d] \arrow[ddl, bend right, "a"'] \arrow[ddr, bend left, "b"] & \\
& Z \arrow[dl, "x"] \arrow[dr, "y"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

con Z conexo y tomemos el producto fibrado H:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[ddr] & & \\
& H \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[d, tail] \\
& Z \arrow[r, "(x,y)"'] & A \times B
\end{tikzcd}$$

Primero notemos que H no es inicial pues el elemento (a, b) se encuentra en las imágenes de $F(x, y)$ y $F(a', b')$. Como todo subobjeto es sumando directo y $\boldsymbol{C}$ es extensiva, entonces H es un sumando directo no inicial de Z que es conexo. Por lo tanto $H \cong Z$. Esto nos induce la única flecha hacia I. $\square$

Teorema 7.1.12. *La subcategoría plena de objetos conexos $Con(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}$ junto con el funtor F satisface los axiomas C-1) a C3).*

Demostración. C-1) Una parte se sigue del hecho de que Γ_F tiene productos finitos. Por otro lado si tenemos dos flechas paralelas entre objetos conexos $u : A \to B$ y $v : A \to B$, podemos encontrar el igualador de ambas $w : C \to A$ y luego factorizarlo encontrando I conexo que las iguala también.

C0) Se sigue de la proposición 7.1.4.

C1) Se sigue de G2) y G5).

C2) Se sigue del corolario 7.1.10 y que en $\boldsymbol{Con}$ las suprayecciones son epis estrictos.

C3) Se sigue de la proposición anterior. □

Ahora probaremos que todo objeto [finito] de $\boldsymbol{C}$ es un coproducto [finito] de objetos conexos.

Proposición 7.1.13. *Sean $A \to X$ y $B \to X$ dos subobjetos ajenos de X. El morfismo inducido $A + B \to X$ es mono.*

Demostración. Aplicamos el funtor F y usamos que en $\boldsymbol{Con}$ se sigue este resultado. Luego usamos que F refleja monomorfismos. □

Proposición 7.1.14. *Sean $X \in \boldsymbol{C}$ y $f : A \to X$, $g : B \to X$ dos subobjetos conexos de X, entonces $A \times_X B = 0$ o existe un isomorfismo $\phi : A \to B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Demostración. Consideremos el diagrama de producto fibrado y la factorización epi estricto-mono dada por G3) como indica el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, tail] & X \\ I \arrow[ur, tail] & & \\ & A \times_X B \arrow[ul, two heads] \arrow[uu] \arrow[r] & B \arrow[uu, tail] \end{tikzcd}$$

Como A es conexo, $I = 0$ ó $I \cong A$. En el primer caso $A \times_X B = 0$ y en el segundo $A \times_X B \to A$ es un monomorfismo y un epimorfismo estricto, por lo tanto es un isomorfismo. □

Teorema 7.1.15. *Cada objeto [finito] $X \in \boldsymbol{C}$ es un coproducto [finito] de objetos conexos de $\boldsymbol{C}$.*

Demostración. Sea $(x : P \to X) \in \int F$ y consideremos una factorización:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "a_x"] \arrow[d, "x"'] & A_x \arrow[dl, "\theta_x"] \\ X & \end{tikzcd}$$

con A_x conexo. Esta factorización siempre existe por el corolario 7.1.9. Tomemos la factorización epi estricto-mono de cada θ_x dada por G3):

$$\begin{tikzcd} A_x \arrow[rr, "\theta_x"] \arrow[dr, two heads] & & X \\ & I_x \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

Por la proposición 7.1.5, los objetos I_x son conexos y por la proposición 7.1.14 podemos tomar un subconjunto $J \subset [P, X]$ tal que:

i) Si $l, s \in J$ y $l \neq s$ entonces $I_l \times_X I_s = 0$.

ii) $\forall x \in [P, X]$, existe $l \in J$ y un isomorfismo $\phi_x : I_x \to I_l$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} I_x \arrow[rr, "\phi_x"] \arrow[dr, tail] & & I_l \arrow[dl, tail] \\ & X & \end{tikzcd}$$

De i) y de la proposición 7.1.13 se sigue que el morfismo inducido $\lambda : \coprod_{l \in J} I_l \to X$ es un monomorfismo y por lo tanto $F(\lambda)$ es inyectiva. Mostraremos que $F(\lambda)$ es suprayectiva. Entonces por G6) se seguirá que λ es iso.

Sea $x \in F(X)$, i.e $x : P \to X$. Tenemos la factorización dada $P \to I_x \to X$. De ii) se sigue que x se factoriza a través de alguna $l \in F(I_l)$ con $l \in J$,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "l"] \arrow[d, "x"'] & I_l \arrow[dl, tail] \\ X & \end{tikzcd}$$

Esto completa la prueba. Notemos que si X es finito entonces este coproducto es finito. □

Proposición 7.1.16. *Dado $X \in \boldsymbol{C}$, el conjunto $[P, X] = F(X)$ tiene una acción izquierda continua del grupo $G = Aut(P)^{op}$ (la cual ahora no será transitiva si X no es conexo).*

Demostración. Escribimos $X \cong \coprod_{i \in I} X_i$ con X_i conexo. Se sigue de la proposición 7.1.12 y de la proposición 6.2.10 que cada conjunto $[P, X_i]$ tiene una acción izquierda continua de G. Por otro lado como $[P, -]$ preserva coproductos tenemos una flecha inducida por propiedad universal del coproducto:

$$\begin{tikzcd} G \times [P, X] \arrow[r, dashed] & {[P, X]} \\ G \times [P, X_i] \arrow[r] \arrow[u] & {[P, X_i]} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son coproyecciones en ***Con***. Más aún, son coproyecciones en ***Top***, pues $[P, X]$ es discreto y por lo tanto la flecha inducida es continua. □

Estamos en condiciones para establecer el teorema de Grothendieck.

Para cada $X \in \boldsymbol{C}$ denotamos por $[P, X]_G$ al conjunto $[P, X]$ dotado de la acción de G definida anteriormente.

Teorema 7.1.17. *Sean $\boldsymbol{C}$ una categoría y $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$ un funtor tales que los axiomas G0)-G6) se cumplen. Consideremos el funtor:*

$$\boldsymbol{C} \xrightarrow{[P,-]_G} \boldsymbol{cCon}^G$$

Donde $G = Aut(P)^{op}$. Entonces este funtor es una equivalencia de categorías.

Sea $f\boldsymbol{C}$ la subcategoría plena de $\boldsymbol{C}$ que consiste de los objetos finitos. Entonces el funtor $[P,-]_G$ se restringe a un funtor:

$$f\boldsymbol{C} \xrightarrow{[P,-]_G} f\boldsymbol{Con}^G$$

el cual también establece una equivalencia de categorías.

Demostración. Tenemos diagramas conmutativos de categorías y funtores:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{C} \arrow[r, "{[P,-]_G}"] & \boldsymbol{cCon}^G \\ Con(\boldsymbol{C}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "{[P,-]_G}"] & \boldsymbol{ctCon}^G \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f\boldsymbol{C} \arrow[r, "{[P,-]_G}"] & f\boldsymbol{cCon}^G \\ Con(\boldsymbol{C}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "{[P,-]_G}"] & \boldsymbol{ctCon}^G \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Es inmediato que cada objeto en $\boldsymbol{cCon}^G$ (respectivamente en $f\boldsymbol{cCon}^G$) es un coproducto (respectivamente coproducto finito) de acciones transitivas. Definimos funtores:

$$\boldsymbol{C} \xleftarrow[P\times_G(-)]{} \boldsymbol{cCon}^G \qquad \boldsymbol{fC} \xleftarrow[P\times_G(-)]{} \boldsymbol{fcCon}^G$$

usando coproductos en $\boldsymbol{C}$ (respectivamente coproductos finitos en $f\boldsymbol{C}$) y el hecho de que ya los tenemos definidos en $\boldsymbol{ctCon}^G$. Como los funtores

$$\boldsymbol{C} \xrightarrow{[P,-]_G} \boldsymbol{cCon}^G \qquad \boldsymbol{fC} \xrightarrow{[P,-]_G} \boldsymbol{fcCon}^G$$

preservan coproductos (respectivamente coproductos finitos), entonces la prueba se sigue de el teorema 7.1.15 y el hecho que las flechas inferiores en los diagramas son una equivalencia de categorías por los teoremas 6.2.11 y 7.1.12. $\square$

Terminamos este trabajo dando uno de los ejemplos mas emblemáticos de esta teoría, el cual es la formulación de Grothendieck del caso en campos.

7.1.1. La categoría k-$\boldsymbol{AlgS}$.

Algunos de los resultados aquí expuestos fueron extraídos de [13] y [6].

Definición 7.1.18. Sea k un campo. Decimos que un anillo conmutativo con 1, A, junto con un morfismo de anillos $\iota : k \to A$ es una k-algebra. Esto nos dice que hay una copia de k en A junto con una acción de k que se lleva bien con el producto del anillo.

Decimos que una k-algebra es finita si es de dimensión finita sobre k.

Definición 7.1.19. Sean $\iota : k \to A$, $\iota' : k \to B$ dos k-algebras. Un morfismo de k-algebras de A en B es un morfismo de anillos $\varphi : A \to B$ tal que $\varphi \circ \iota = \iota'$.

Dado k un campo, las k-algebras junto con los morfismos de k-algebras forman una categoría denotada k-$\boldsymbol{Alg}$.

Definición 7.1.20. Sea A una k-algebra. Decimos que un elemento $a \in A$ es algebraico sobre k si existe un polinomio $p(x) \in k[x]$ tal que $p(a) = 0$. Decimos que A es algebraica sobre k si cada elemento en A es algebraico sobre k.

Al igual que ocurre en el caso de extensiones de campos, dado $a \in A$ algebraico, existe un único polinomio mónico de grado mínimo $p(x)$ tal que $p(a) = 0$. A este polinomio se le llama el polinomio mínimo de a sobre k y se denota $min(k, a)$. Toda k-algebra finita es algebraica.

Si tenemos una extensión de campos $L|k$, entonces toda L-algebra se vuelve una k-algebra restringiendo la acción a k. Por otro lado, si tenemos una k-algebra A, entonces $L \otimes_k A$ tiene estructura de L-algebra definiendo para cada $l \in L$ y cada par de elementos básicos $l' \otimes a$ y $s \otimes b$, $l(l' \otimes a) = (ll') \otimes a$ y $(l' \otimes a)(s \otimes b) = (l's) \otimes (ab)$. Más aún, estas asignaciones son adjuntas.

$$\begin{tikzcd} k - \boldsymbol{Alg} \arrow[rr, bend left, "L\otimes -"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & L - \boldsymbol{Alg} \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

Definición 7.1.21. Sean $L|k$ una extensión de campos y A una k-algebra. Decimos que L descompone a A cuando:

1) A es algebraica sobre k.

2) El polinomio mínimo $p(x) \in k[x]$ de cada elemento de A se factoriza en $L[x]$ como un producto de factores lineales con todas sus raíces distintas.

Decimos que la k-algebra A es separable si $\widehat{k}$ descompone a A.

Podemos notar que esta definición generaliza la noción de separabilidad de extensiones de campos y que una extensión $L|k$ es Galois si y solo si se descompone a si misma como k-algebra.

A continuación se enuncian algunas de las principales caracterizaciones de la definición anterior.

Teorema 7.1.22. *Sean $L|k$ una extensión de campos finita de dimensión m y A una k-algebra finita de dimensión n. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) L descompone a A.

2) La siguientes función, llamada transformación de Gelfand, es un isomorfismo de L-algebras

$$\begin{aligned} L \otimes_k A &\xrightarrow{Gel} L^{Hom_L(L\otimes_k A, L)} \\ l \otimes a &\mapsto (f(l \otimes a))_{f \in Hom_L(L\otimes_k A, L)} \end{aligned}$$

3) La siguiente función es un isomorfismo de L-algebras

$$\begin{aligned} L \otimes_k A &\longrightarrow L^{Hom_k(A,L)} \\ l \otimes a &\longmapsto (lg(a))_{g \in Hom_k(A,L)} \end{aligned}$$

4) $Hom_L(L \otimes_k A, L) = n$.
5) $Hom_k(A, L) = n$.
6) $L \otimes_k A$ es isomorfo a L^n como L-algebra.
7) Para toda $x \in L \otimes_k A$, $x \neq 0$, existe $f \in Hom_L(L \otimes_k A, L)$ tal que $f(x) \neq 0$.

Demostración. Véase en [13], página 24. □

Las k-algebras separables finitas junto con los morfismos de k-algebras forman una categoría que denotaremos k-***AlgS***.

Lema 7.1.23. *La categoría k-**AlgS** es estable bajo subobjetos, cocientes, productos y productos tensoriales. Más aún, si $A \in k$-**AlgS** admite dos subobjetos A_1 y A_2, entonces el algebra generada por A_1 y A_2 es separable.*

Tenemos la siguiente caracterización de k-algebras separables finitas cuya demostración se puede encontrar en [6].

Teorema 7.1.24. *Sea A una k-algebra de dimensión finita. A es separable si y solo si existen $L_1, \ldots, L_k$ extensiones separables de k tales que $A \cong \prod L_i$.*

Observación 7.1.25. Todo morfismo de k-algebras $f : \prod_{i \in I} L_i \to L$, con L y L_i campos separables sobre k se factoriza como

$$\prod_{i \in I} L_i \xrightarrow{p_k} L_k \xrightarrow{f_k} L$$

para alguna $k \in I$ y un único morfismo de campos $f_k : L_k \to L$ donde p_k es la proyección.

Notemos que si tenemos un morfismo $(f : A \to B) \in k$-***AlgS*** con factorizaciones $A = \prod_{i \in I} L_i$, $B = \prod_{j \in J} L'_j$, entonces tenemos una función $\alpha_f : J \to I$ tal que para cada $j \in J$ tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{\alpha_f(j)}"'] & B \arrow[d, "q_j"] \\ L_{\alpha_f(j)} \arrow[r, "f_j"'] & L'_j \end{tikzcd}$$

donde $p_{\alpha_f(j)}$ y q_j son las respectivas proyecciones

Lema 7.1.26. *Dado $f : A \to B$ y $\alpha_f : J \to I$ como anteriormente:*
1) f es epi si y solo si α_f es inyectiva y f_j es iso $\forall j \in J$.
2) f es mono si y solo si α_f es suprayectiva.

Demostración. 1) $\Rightarrow$] Supongamos que f es epi y que $\alpha_f(j) = \alpha_f(j')$ para algunas $j, j' \in J$ distintas. Sea $e_j \in B$ el elemento que consta de un 1 en la coordenada j-ésima y 0's en las demás coordenadas. Como f es epi existe $a \in A$ tal que $f(a) = e_j$, por un lado $q_j(f(a)) = 1 = f_j(p_{\alpha_f(j)}(a)) = f_j(p_{\alpha_f(j')}(a))$, por lo tanto $p_{\alpha_f(j)}(a) \neq 0$ pero $q_{j'}(f(a)) = 0 = f_{j'}(p_{\alpha_f(j')}(a))$ lo cual es una contradicción, por lo tanto α es inyectiva. Finalmente que f sea epi nos dice que f_j es epi para toda j, como los f_j son morfismos de campos automáticamente son isos.

$\Leftarrow$] Supongamos que α_f es inyectiva y f_j es iso $\forall j \in J$. Sea $b \in B$ y sea $a \in A$ el elemento cuya i-ésima coordenada es $f_j^{-1}(q_j(b))$ si $i = \alpha_f(j)$ para alguna $j \in J$ y 0 en otro caso. Es claro que $f(a) = b$. Por lo tanto f es epi.

2) $\Rightarrow$] Es claro que si f es mono entonces α_f tiene que ser suprayectiva, pues si $i \in I$ estuviera fuera de la imagen de α_f, entonces la imagen de un elemento en A no dependería de su i-ésima coordenada.

$\Leftarrow$] Supongamos que α_f es suprayectiva y $f(a) = f(b)$ para algunos $a, b \in A$. Tenemos que $f_j \circ p_{\alpha_f(j)}(a) = q_j(a) = q_j \circ f(b) = f_j \circ p_{\alpha_f(j)}(b)$ $\forall j \in J$, como cada f_j es mono tenemos que $p_{\alpha_f(j)}(a) = p_{\alpha_f(j)}(b)$ $\forall j \in J$, finalmente como α_f es suprayectiva, entonces $a = b$. $\square$

Lema 7.1.27. *Todo monomorfismo de k-algebras es un monomorfismo estricto (Recuérdese la definición 5.1.2).*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un monomorfismo de k-algebras con $A = \prod_{i \in I} L_i$, $B = \prod_{j \in J} L'_j$ y consideremos un morfismo de k-algebras $g : C \to B$ ($C = \prod_{u \in U} L''_u$) que iguale las mismas flechas que f. Sea $l \in L'_j \backslash im(f_j)$ con $j \in J$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} k_S & L'_j \arrow[l, shift right, "s_j"'] \arrow[l, shift left, "t_j"] & B \arrow[l, "q_j"'] & A \arrow[l, "f"'] \\ & & & C \arrow[ul, "g"] \end{tikzcd}$$

donde s_j y t_j extienden a f_j y mueven de dos formas distintas a l. Como f iguala ambas flechas, entonces g las iguala también, dado que l fue arbitrario concluimos que $im(g_j) \subset im(f_j)$. Por lo tanto f_j factoriza a g_j a través de un único morfismo de campos $h_j : L''_{\alpha_g(j)} \to L_{\alpha_f(j)}$. Supongamos que $\alpha_f(j) = \alpha_f(j')$, notemos que como en este caso $im(f_j) \cong im(f_{j'}$ podemos suponer que $im(f_j) = im(f_{j'})$ cambiando salvo isomorfismos a L_j y $L_{j'}$. Sea $B' = \prod_{l \in J} L''_l$ donde $L''_l = L'_l$ si $l \neq j, j'$ y $L''_l = L'_j(L'_{j'})$ si $l = j$ o $l = j'$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} B' & B \arrow[l, shift right, "m"'] \arrow[l, shift left, "\iota"] & A \arrow[l, "f"'] \\ & & C \arrow[ul, "g"] \end{tikzcd}$$

donde ι es la inclusión y m es ι seguido de intercambiar la coordenada j con la j'. Notemos que f iguala a m con ι, por lo tanto g también las iguala, pero la única forma de que ocurra esto es que $\alpha_g(j) = \alpha_g(j')$. Por lo tanto, existe una única flecha $h : C \to A$ tal que $f \circ h = g$, donde h esta determinada por las h_j ya que α_f es suprayectiva por el lema anterior. $\square$

Lema 7.1.28. *Sea $L|k$ una extensión finita separable de campos y $H \leqslant Aut_{E(k)}(L)$. Entonces, $E(k)(L^H, k_S) \cong E(k)(L, k_S)/H$.*

Demostración. Consideremos el siguiente morfismo de $Gal(k)$-conjuntos

$$\begin{array}{ccc} E(k)(L,k_S)/H & \xrightarrow{\varphi} & E(k)(L^H,k_S) \\ f & \longmapsto & f_{L^H} \end{array}$$

Claramente φ es suprayectiva. Como $L|L^H$ es Galois finita con grupo de Galois H, sabemos que $[L:L^H]=|H|$, como $L|L^H$ es separable sabemos que

$$|E(k)(L,k_S)|=[L:L^H]|E(k)(L^H,k_S)|=|H||E(k)(L^H,k_S)|$$

Por lo tanto $|E(k)(L,k_S)/H|=|E(k)(L^H,k_S)|$ y φ es un isomorfismo. $\square$

Sean $A=\prod_{i\in I}L_i\in k$-$\boldsymbol{AlgS}$ y $H\leqslant Aut(A)$ y consideremos el siguiente diagrama conmutativo para cada $h\in H$ y $(f:A\to k_S)=(f_i:L_i\to k_S)\circ p_i$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_{\alpha_h(i)}"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i"] & k_S \\ L_{\alpha_h(i)} \arrow[r, "h_i"'] & L_i \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Notemos que H actúa en I mediante

$$\begin{array}{ccc} H\times I & \longrightarrow & I \\ (h,i) & \longrightarrow & \alpha_h(i) \end{array}$$

Lema 7.1.29. *Con la misma notación que antes, se tiene un isomorfismo de k-algebras $A^H=\{a\in A|h(a)=a\forall h\in H\}\cong\prod_{j\in J}L_j^{H_j}$ donde $J\subset I$ es un sistema completo de representantes de I/H y H_j es el estabilizador de j para cada $j\in J$.*

Demostración. Sea $\varphi:A^H\to\prod_{j\in J}L_j^{H_j}$ definida mediante $\varphi((a_i)_{i\in I})=(a_j)_{j\in J}$. Veamos que φ está bien definida. Sea $a=(a_i)_{i\in I}\in A^H$, entonces $h(a)=a$ para toda $h\in H$, en particular para cada $i\in I$, tenemos que $h_i(a_i)=a_i$ para toda $h_i\in H_i$, por lo tanto φ está bien definida. Además, claramente φ es un morfismo de k-algebras.

Veamos que φ es suprayectiva. Sea $(a_j)_{j\in J}\in\prod_{j\in J}L_j^{H_j}$. Para cada $i\in[j]$ existe $h\in H$ tal que $\alpha_h(i)=j$, sea $a_i=h_i(a_j)$. Veamos que esta elección de a_i no depende de h. Supongamos que $\alpha_h(i)=\alpha'_h(i)=j$, entonces $h'^{-1}\circ h\in H_j$, como $a_j\in L_j^{H_j}$ tenemos que $h_i'^{-1}\circ h_i(a_j)=a_j$, por lo tanto $h_i'(a_j)=h_i(a_j)$. Veamos que $(a_i)_{i\in I}\in A^H$. Sea $h\in H$ e $i\in I$, sabemos que existe $h'\in H$ y $j\in J$ tal que $\alpha_{h'}(\alpha_h(i))=j$, entonces $h_i(a_{\alpha_h(i)})=h_i\circ h'_{\alpha_h(i)}(a_j)=a_i$, por lo tanto $a\in A^H$ y φ es suprayectiva.

La inyectividad de φ se sigue directamente de que un elemento en A^H está determinado por sus coordenadas sobre J y sus extensiones a las demás coordenadas bajo H. $\square$

Teorema 7.1.30. *La categoría $(k$-$\boldsymbol{AlgS})^{op}$ junto con el funtor representable por la cerradura separable de k, $[k_S,-]:(k$-$\boldsymbol{AlgS})^{op}\to\boldsymbol{Con}$, satisface los axiomas G0)-G6).*

Demostración. G0) No hay nada que hacer pues todos los objetos son finitos.

G1) k es objeto final en k-$\boldsymbol{AlgS}$ y por lo tanto es inicial en $(k\text{-}\boldsymbol{AlgS})^{op}$. Dado un diagrama en $(k\text{-}\boldsymbol{AlgS})^{op}$ como el siguiente:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama de producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} A \otimes_C B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

G2) Los coproductos corresponden a los productos usuales en k-$\boldsymbol{AlgS}$ y los cocientes a k-algebras fijas bajos subgrupos de automorfismos.

G3) Sea $f : A \to B$ un morfismo de k-algebras, entonces este morfismo se factoriza como

$$A \xrightarrow{f} im(f) \hookrightarrow B$$

donde, por el lema 7.1.27 la correspondiente factorización en k-$\boldsymbol{AlgS}$ es epi estricto-mono.

G4) Por la proposición 2.1.45, el funtor $[k_S, -]$ preserva limites.

G5) Notemos que el funtor $[k_S, -]$ preserva coproductos finitos ya que el funtor representable $Hom_k(-, k_S) : k\text{-}\boldsymbol{AlgS} \to \boldsymbol{Con}$ manda productos en coproductos pues k_S es campo. Sea $A \in k$-$\boldsymbol{AlgS}$ y $H \leqslant Aut(A)$.

Veamos que el funtor $[k_S, -]$ preserva cocientes. Sea $A = \prod_{i \in I} L_i$ y $H \leqslant Aut(A)$. Por el lema 7.1.29 $A^H \cong \prod_{j \in J} L_j^{H_j}$ para un sistema completo de representantes de I/H, $J \subset I$, entonces tenemos la siguiente secuencia de isomorfismos

$$Hom_k(A^H, k_S) \cong Hom_k(\prod_{j \in J} L_j^{H_j}, k_S) \cong \coprod_{j \in J} Hom_k(L_j^{H_j}, k_S) \cong$$

$$\coprod_{j \in J} (Hom_k(L_j, k_S)/H_j) \cong \left(\coprod_{i \in I} Hom_k(L_i, k_S) \right) /H$$

Este último isomorfismo se da pues la acción de H en $Hom_k(A, k_S)$ pega la órbitas y, si nos restringimos a un índice, i, dos flechas $f : L_i \to k_S$, $g : L_i \to k_S$ están relacionadas si y solo si existe $h \in H$ tal que $f \circ h_i = g$, i.e. cuando la clase de f es la clase de g bajo H_i.

Veamos que el funtor $[k_S, -]$ manda epimorfismos en suprayecciones o lo que es lo mismo, el funtor $Hom_k(-, k_S)$ manda monomorfismos en suprayecciones. Sea $(f : A \to B) \in k$-$\boldsymbol{AlgS}$ un monomorfismo. Queremos probar que dada una flecha $h : A \to k_S$, existe otra flecha $g : B \to k_S$ tal que $g \circ f = h$. Sabemos que h se descompone como $h = \phi \circ p_i$, por el lema 7.1.26 $i = \alpha(j)$ para algún $j \in J$. El resultado se sigue del siguiente diagrama conmutativo usando que en la categoría $E(k)$ se vale el resultado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p_{\alpha_f(j)}"] \arrow[d, "f"'] & L_{\alpha_f(j)} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_j"'] & k_S \\
B \arrow[r, "q_j"'] & L'_j \arrow[ur, "\exists\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

G6) Sea $(f : A \to B) \in k$-***AlgS*** tal que $f^* : Hom_k(B, k_S) \to Hom_k(A, k_S)$ sea un isomorfismo. Esto nos da el siguiente diagrama conmutativo para cada $h \in Hom_k(A, k_S)$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "f"'] & L_i \arrow[r, "\phi"] & k_S \\
B \arrow[r, "\exists! q_j"'] & L'_j \arrow[ur, "\exists!\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde aquí ya pusimos los respectivos morfismos factorizados, además tenemos el siguiente diagrama conmutativo para una única ϕ'

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p_{\alpha_f(j)}"] \arrow[d, "f"'] & L_{\alpha_f(j)} \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "f_j"'] & k_S \\
B \arrow[r, "q_j"'] & L'_j \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

de aquí deducimos que $i = \alpha_f(j)$, $\alpha_f : J \to I$ es una biyección y cada f_j es un isomorfismo por la unicidad de ψ, de acuerdo al lema 7.1.26 f es un isomorfismo. $\square$

Bibliografía

[1] DUBUC E. J. & SANCHEZ DE LA VEGA, C. (09/2000). *On the Galois Theory of Grothendieck*. arXiv Sitio web: https://arxiv.org/abs/math/0009145

[2] MASAKI KASHIWARA & PIERRE SCHAPIRA. (2005). *Categories and Sheaves*. Países Bajos: Springer.

[3] SAUNDERS MAC LANE. (1997). *Categories for the Working Mathematician*, 2a edición. U.S.A.: Springer.

[4] JAMES R. MUNKRES. (2000). *TOPOLOGY*, 2a edición. U.S.A.: Prentice Hall.

[5] JAAP VAN OOSTEN. (1995). *Basic Category theory*. Dinamarca: BRICS.

[6] TAMÁS SZAMUELY. (2008). *Galois Groups and Fundamental Groups*. Budapest: Cambridge University Press.

[7] GROTHENDIECK A.. (1971). *SGA 1*. Francia: Springer.

[8] ARTIN M; GROTHENDIECK A. & VERDIER J.. (1972). *SGA 4*. Francia: Springer.

[9] AURELIO CARBONI; STEPHEN LACK & R.F.C.WALTERS. (3 de febrero de 1993). *Introduction to extensive and distributive categories*. Elsevier, volumen 84, paginas 145-158. 2017, De ScienceDirect Base de datos.

[10] DAVID SHARPE. (1987). *Anillos y factorización*. USA :Cambridge University Press.

[11] PATRICK MORANDI. (1996). *Field and Galois Theory*. USA : Springer.

[12] JOSEPH J. ROTMAN. (1995). *An Introduction to the Theory of Groups*, 4a edición. USA: Springer-Verlag.

[13] FRANCIS BORCEUX & GEORGE JANELIDZE. (2001). *Galois theories*. Reino Unido: Cambridge University Press.

[14] Maik Pickl (https://math.stackexchange.com/users/317129/maik-pickl), Inverse limit of finite sets with surjective maps has surjective projection?, URL (version: 2017-04-13): https://math.stackexchange.com/q/1880173