



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**MODELOS INFLACIONARIOS EN TEORÍAS CON  
SUPERGRAVEDAD**

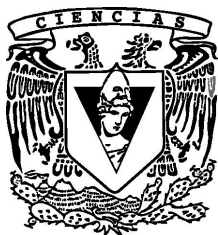
**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**FÍSICO**

**P R E S E N T A:**

**MIGUEL ANGEL HERNÁNDEZ SEGURA**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. SAÚL NOÉ RAMOS SÁNCHEZ**

**Ciudad Universitaria, CD. MX., 2018**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Hernández

Segura

Miguel Angel

55-4913-9688

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

309106720

2. Datos del tutor

Dr

Saúl Noé

Ramos

Sánchez

3. Datos de sinodal 1

Dr

Hernando

Quevedo

Cubillos

4. Datos de sinodal 2

Dra

Myriam

Mondragón

Ceballos

5. Datos del sinodal 3

Dr

Chryssomalis

Chryssomalakos

6. Datos del sinodal 4

Dr

Erick Leonardo

Patiño

Jaidar

7. Datos del trabajo escrito

Modelos Inflacionarios en Teorías con Supergravedad.

52 p

2018

*A mis padres y a mi pequeña amiga Leyla.*

# Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mamá y a papá: Judith y Miguel Angel. Sin duda soy afortunado por tenerlos precisamente a ustedes como padres. Estoy convencido de que no sería la persona que soy el día de hoy sin su ejemplar desempeño en cada etapa de mi vida. Gracias por su cariño infinito, paciencia, dedicación, admirable carácter y forma de afrontar la vida. Los amo, sepan que su sello está en cada acción que realizo.

A mis hermanitas: Melissa y Daniela, mi más grande fuente de inspiración y energía. Gracias por impulsarme a ser mejor y darle tantísima fuerza a mi espíritu con su inagotable y especial cariño, ustedes son mi mayor orgullo.

A mis abuelitas: Mari y Carmelita. Porque desde el día que nací me han brindado el más tierno amor y por ser los pilares de la familia que me rodea.

Al resto de mi familia, quienes siempre han caminado a mi lado brindándome cariño desinteresado y apoyo incondicional.

A mis amigos de siempre: Rambo y Xiomara. Gracias por estar cuando más los necesitaba, por compartir tanto durante más de 9 años y porque junto a ustedes he vivido desde la situación más absurda hasta la más apremiante, aprendiendo invaluable lecciones de vida.

A los dos muy buenos amigos que hice en la facultad y que estuvieron a mi lado durante toda la carrera: Diego y Jaime. Quienes además de brindar apoyo y discusiones valiosas cuando de ciencia se trataba, han sabido estar en las buenas y en las malas.

A mis amigos compañeros de celda en el Instituto de Física, en quienes encontré personas nobles y trabajadoras. Gracias por las enriquecedoras discusiones académicas, consejos, apoyo y sobre todo por brindarme su sincera amistad al recibirme como uno más de ustedes.

A todos los profesores que dedicaron tiempo valioso en transmitirme su conocimiento, especialmente al Dr. Saúl Ramos. Quien además de haber sido mi profesor durante cuatro semestres de la licenciatura y mi asesor de tesis, ha sido mi guía y ejemplo en estos primeros pasos en la academia brindándome herramientas para acceder a conocimiento nuevo así como consejos y apoyo de gran valor.

Finalmente, gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México, por brindar a nuestra nación y al mundo un lugar magnífico para el libre pensamiento y el cultivo del conocimiento.

# Índice general

<b>1. Introducción y Motivación</b>	<b>1</b>
<b>2. Principios de supersimetría y supergravedad</b>	<b>5</b>
2.1. Teorema de Coleman-Mandula . . . . .	5
2.2. Supersimetría . . . . .	5
2.2.1. Un primer modelo supersimétrico: supermultiplete quirale libre . . . . .	6
2.2.2. Un primer modelo interactuante : Interacción de campos quirales . . . . .	8
2.2.3. Lagrangiano para un supermultiplete de norma libre . . . . .	10
2.2.4. Interacciones de norma supersimétricas . . . . .	11
2.3. Superespacio y supercampos . . . . .	13
2.3.1. Superespacio: una extensión del espaciotiempo . . . . .	13
2.3.2. Supercampos . . . . .	14
2.4. Acciones supersimétricas cuatro dimensionales . . . . .	16
2.4.1. Superpotencial . . . . .	17
2.4.2. Potencial de Kähler . . . . .	17
2.4.3. Función cinética de norma . . . . .	17
2.5. Supergravedad . . . . .	18
2.5.1. Potencial escalar en supergravedad . . . . .	18
<b>3. Cosmología Relativista</b>	<b>21</b>
3.1. Cosmología estándar . . . . .	21
3.2. Inflación . . . . .	23
3.2.1. Inflación mediante un campo escalar y aproximación de slow-roll . . . . .	24
3.3. Contacto con las observaciones . . . . .	25
3.3.1. Perturbaciones primordiales a partir de Inflación. . . . .	27
<b>4. Modelos Inflacionarios supersimétricos</b>	<b>29</b>
4.1. Inflación mediante término $F$ . . . . .	30
4.1.1. Inflación Nueva . . . . .	31
4.1.2. Inflación $F$ Híbrida . . . . .	33

4.2. Inflación mediante término $D$ . . . . .	36
4.2.1. Inflación $D$ Híbrida . . . . .	36
<b>5. Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>

# Capítulo 1

## Introducción y Motivación

Es bien sabido que la cosmología establecida por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y las ecuaciones de Einstein, en conjunto con el concepto de *inflación cósmica*, propuesto por A. Guth [1] y A. Linde [2], proveen suficientes herramientas para explicar nuestras observaciones del universo a escalas de varios Mpc, incluyendo la formación de estructura (distribución de materia galáctica) a gran escala y la existencia de anisotropías de la radiación de fondo de microondas (CMB) [3]. Con cada vez mayor precisión, estas afirmaciones han sido confirmadas en las últimas décadas por los observatorios COBE, WMAP y Planck [4], lo cual ha conducido al consenso de que la cosmología inflacionaria es una descripción correcta de los primeros instantes de la existencia del universo.

Pese al aparente éxito, la cosmología inflacionaria no ha sido comprobada del todo. Entre otras cosas, desconocemos con precisión qué tipo de dinámica es la base del periodo inflacionario e ignoramos aún las condiciones iniciales del universo que condujeron al desarrollo de inflación. La propuesta de inflación se basa en la existencia de un campo escalar cuántico, llamado *inflatón*, cuyo potencial estable (y aún desconocido) permite que el inflatón “ruede” hacia su mínimo lentamente a medida que el tiempo pasa; es decir, el potencial es bastante plano. Bajo este *rodamiento lento* o *slow-roll*, la ecuación de estado como contenido del universo satisface aproximadamente  $p = -\rho$ , donde  $\rho$  es densidad de energía y  $p$  es presión, o sea, la presión es negativa, motivando la expansión acelerada del universo. La duración del rodamiento lento (desde un valor inicial también desconocido del campo) determina qué tanto el universo aumentaría de tamaño. Para justificar que el universo pueda hoy ser tan homogéneo como aparenta ser a gran escala, es necesario que durante el periodo inflacionario el cosmos haya crecido por un factor de alrededor de ¡ $10^{26}$  veces su tamaño original!

Durante el proceso inflacionario, pequeñas fluctuaciones cuánticas (aparición de minúsculas deformaciones espacio-temporales y/o diminutas inhomogeneidades en la distribución espacial del campo inflacionario) crecen por un factor parecido al rescalamiento del espacio entero. Entonces esas pequeñas fluctuaciones podrían ser la causa de la formación de estructura. Además, cuando la edad del universo rebasa la vida media del inflatón, determinada por su tasa de decaimiento, toda la energía acumulada en el campo inflacionario es convertida en radiación (partículas del modelo



estándar en movimiento a velocidades relativistas). Este proceso conocido como *recalentamiento* sería el responsable de la aparición de la radiación que algún tiempo después se reduciría a lo que hoy llamamos la CMB, cargando con toda la posible información proveniente del proceso inflacionario y su origen en forma de un “código” que los cosmólogos intentan descifrar hoy. La clave podría ser determinar el origen del inflatón y su potencial.

Las observables que nos sirven hoy en día para saber si un modelo inflacionario es adecuado o no, son: el valor de la temperatura de la CMB,  $T_\gamma \sim 2.7$  K; el valor del índice espectral  $n_s \sim 0.96$ , que mide qué tan homogéneas son las fluctuaciones cuánticas debidas a la existencia de campos escalares en la CMB; y el cociente de fluctuaciones tensoriales sobre fluctuaciones escalares,  $r < 0.07$ . Los valores aquí enlistados corresponden a los reportados por las más recientes observaciones del satélite Planck [4]. Todo modelo inflacionario debe ser compatible con estas observaciones.

Por otro lado, una solución a algunos conflictos en la física de partículas conduce a teorías supersimétricas: teorías cuánticas de campos provistas de una simetría adicional, la *supersimetría*. La supersimetría surge como un contraejemplo al conocido teorema de Coleman-Mandula [5], el cual establece que no hay forma de construir un grupo de simetrías que tome en cuenta las simetrías internas y las del espaciotiempo siempre y cuando los generadores de las transformaciones de simetría acepte una descripción algebraica basada en conmutadores. Al incluir estructuras algebraicas de anticonmutación (o equivalente transformaciones de simetría fermiónicas), el teorema deja de aplicar. El resultado es una extensión no trivial del grupo de Poincaré [6]. Otro resultado impactante es que, debido a su relación con el grupo de Poincaré, al considerar parámetros de transformaciones supersimétricas dependientes de las posiciones, se llega a una forma de teoría cuántica de campos con gravitación conocida como *supergravedad*.

En el contexto supersimétrico, J. Wess y B. Zumino propusieron [7, 8] una acción cuatro dimensional invariante bajo supersimetría, compatible con algunos aspectos de la física de partículas. Este logro, combinado con resultados sobre teoría de cuerdas [9, 10, 11], desencadenaron una intensa actividad en la búsqueda de la fenomenología supersimétrica correcta, la cual incluye campos escalares que no han sido observados aún. De ser correcta la simetría planteada, la física inflacionaria debe ser compatible con ella, por lo que es natural plantear escenarios inflacionarios supersimétricos, en los que uno de los campos escalares resultantes sea precisamente el inflatón.

Es importante dejar claro que la nula evidencia experimental de la existencia de supersimetría en el LHC, con cotas cada vez más rigurosas [12, 13, 14], ha conducido a la cautela y escepticismo en la comunidad científica. Sin embargo, desde un punto de vista teórico, no es descartable que la supersimetría exista, rota a una escala energética aún inaccesible para la tecnología de la que disponemos hoy en día. En mi óptica, en lugar de una búsqueda en aceleradores, parece más sensato buscar pruebas de la existencia de supersimetría en el universo temprano: nuestro escenario más energético y por tanto un excelente laboratorio para confrontar la teoría supersimétrica con la naturaleza.<sup>1</sup>

Dadas estas premisas, la cosmología supersimétrica debe ser tomada como una propuesta pu-

---

<sup>1</sup>Una propuesta que sigue esta línea de pensamiento y que me parece merece explorarse es la presentada por Baumann [15].

ramente teórica. El presente trabajo, por lo tanto, es un trabajo teórico que pretende establecer la viabilidad del paradigma inflacionario en teorías supersimétricas, con el objetivo de aportar mayores herramientas para la búsqueda de supersimetría y, simultáneamente, encontrar posibles canales simultáneos para descubrir que la inflación sí ocurrió. Con este propósito, en esta tesis, estudiaré la fenomenología de algunos escenarios inflacionarios relacionados con el rompimiento de supersimetría a muy altas energías.

En la literatura, hay varias propuestas supersimétricas de inflación, tales como la correspondiente a *inflación nueva* [2] y la de *inflación híbrida* [16]. En particular, en esta tesis serán puestos a prueba los potenciales inflacionarios que aparecen en [17, 18, 19, 20]. Es importante notar que estos modelos están basados totalmente en teorías supergravitacionales en las cuales el rompimiento de supersimetría se da de forma espontánea. Existen dos tipos de rompimiento espontáneo de supergravedad: el mediado por campos  $F$ , cuyo valor esperado en el vacío es no nulo, y el mediado por campos  $D$ , también con  $\langle D \rangle \neq 0$ . En el primer caso, el rompimiento está enteramente asociado a la estructura de las interacciones entre los campos escalares y sus términos de masa. En cambio, el segundo está asociado a las cargas de las partículas escalares asociadas a las simetrías (internas) de norma de la teoría; es decir, a las cargas bajo las fuerzas del modelo estándar de partículas si el modelo supegravitacional tiene algo que ver con nuestro universo.

Cada rompimiento de supersimetría tiene sus complicaciones para asociarlo a inflación. Cuando el rompimiento se da por medio de campos  $F$ , el potencial supergravitacional en el sector escalar posee factores exponenciales que dependen de la estructura cinética de los campos, el llamado *potencial de Kähler*. Estos factores multiplican los términos de masa de los campos escalares, por lo que contribuyen a la masa del inflatón, haciéndola más grande. Si esos factores son lo suficientemente grandes, es muy difícil encontrar un potencial inflacionario que garantice un rodamiento lo suficientemente lento para lograr que el universo crezca por el enorme factor requerido. Este conflicto, es conocido como *problema  $\eta$* . Una forma de evitar esto es, por ejemplo, proponer que el llamado *superpotencial* de la teoría supergravitacional sea lineal en el supercampo que contenga al inflatón, o, en su defecto, ignorar las contribuciones debidas al campo  $F$  y considerar únicamente relevante a la contribución atribuida al término  $D$ .

Estas dos alternativas nos permiten clasificar en dos grandes grupos a los modelos inflacionarios supergravitacionales basados en rompimiento espontáneo de supersimetría: aquéllos donde la parte relevante del potencial proviene de la contribución asociada al campos  $F$  y los que vienen caracterizados por la propia del campo  $D$ . Así, en esta tesis separo el tratamiento de los modelos con campos  $F$ , aquí basados en las referencias [17, 18], del tratamiento de modelos inflacionarios dominados por campos  $D$ , aquí basados en las referencias [19, 20].

El estudio presentado en esta tesis no sólo es una revisión de los modelos presentados en las citadas referencias, sino, en mi óptica, una corrección a los resultados ahí presentados. En particular, al realizar la revisión de estos modelos, que en esos trabajos no se consideran todas las condiciones necesarias para que exista inflación (el llamado parámetro  $\epsilon$  es ignorado); además, algunas de las aproximaciones tomadas en esas referencias podrían conducir a resultados algo diferentes al ser relajadas. Este par de observaciones motivaron la reproducción de los resultados aquí presentados,

en búsqueda de modelos compatibles con las restricciones cosmológicas mencionadas antes, las cuales también representan una actualización de las presentadas en los artículos citados.

Cabe mencionar que como motivación adicional se encuentra el hecho de obtener intuición en teorías supergravitacionales para posteriormente poder construir modelos propios, o trabajar con modelos más complicados sin ir a ciegas. Además, en el transcurso de este trabajo se revisaron de manera superficial un par de resultados muy recientes obtenidos por A. Van Proeyen [21] y A. Riotto [22] en lo que parecen ser direcciones de estudio valiosas para seguir desarrollando el conocimiento y las herramientas obtenidas a lo largo de este trabajo.

## Organización de la tesis

En el capítulo 2, se discuten los elementos esenciales de supersimetría, se explica cómo extender el álgebra de Poincaré y cómo se refleja este hecho físicamente. Asimismo, se explica el formalismo de súperespacio y súpercampos, así como la metodología para construir y caracterizar teorías supersimétricas. Finalmente, se da una breve visión de la versión local de las transformaciones de supersimetría haciendo especial énfasis en la forma que tiene el potencial escalar en una teoría gravitacional arbitraria.

En el capítulo 3, se presentan las bases de la cosmología relativista, los problemas que soluciona y los que deja pendientes. Posteriormente, se presenta el mecanismo de inflación, el cual cura los problemas de la cosmología estándar, provee algunas predicciones y nos deja algunas otras preguntas, entre las cuales destaca el origen del inflatón y la forma poco natural *ad hoc* del potencial asociado a este campo.

En el capítulo 4, se presenta una forma concreta de dar origen al potencial del inflatón, la cual consiste en proponer una teoría de supergravedad, compatible con física a muy altas energías (lo que algunos denominan una *completez ultravioleta*) y obtener el potencial buscado a partir del sector escalar de la teoría, de forma concreta desde el potencial escalar asociado a la teoría en cuestión. Se discuten las dificultades para implementar inflación en supergravedad así como un par de soluciones viables. Además, se realiza el estudio de tres modelos existentes en la literatura mediante los cálculos de los parámetros de rodamiento lento presentados en el capítulo 2, empleando un método diferente al reportado en los artículos que se tomaron como base. Este es el capítulo principal de esta tesis.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones, discutiendo los resultados obtenidos, la metodología utilizada y se plantea una posible dirección a seguir a futuro.

## Capítulo 2

# Principios de supersimetría y supergravedad

### 2.1. Teorema de Coleman-Mandula

Uno de los grandes objetivos en física teórica es la construcción de una teoría que sea capaz de describir las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza. Es sabido que tres de ellas, la electromagnética y las interacciones nucleares débil y fuerte, son descritas mediante el Modelo Estándar de partículas elementales, una exitosa teoría de campos dotada del siguiente grupo de simetría  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ .

Por otro lado, la teoría que mejor describe a la gravedad es la Relatividad General de Einstein. Y al menos en el caso de relatividad especial, el grupo de simetría de dicha teoría es el grupo de Lorentz.

Así, una característica que debe tener esa supuesta teoría que describa las cuatro fuerzas antes mencionadas, debería contar con un grupo de norma que contenga tanto el grupo de simetría del Modelo Estándar como el de la Relatividad Especial cuando menos.

El Teorema de Coleman-Mandula representaba un serio impedimento para lograr la construcción de dicho grupo, pues el teorema establece que no hay modo de construir un grupo de simetría de norma que mezcle de forma no trivial el grupo de Lorentz y el del modelo estándar.<sup>1</sup>

### 2.2. Supersimetría

Afortunadamente el Teorema de Coleman-Mandula no puso un alto al sueño de la llamada teoría del todo, puesto que sus autores únicamente consideraron una estructura de conmutadores (bosónica) sin considerar una posible estructura de anticonmutadores (fermiónica).

---

<sup>1</sup>Para revisar el enunciado preciso del teorema y una prueba de este, véase [23], apéndice B

Para tomar esto en cuenta hace falta extender el álgebra de Poincaré, para lo cual debemos introducir el concepto de álgebra gradada.

Sea  $\mathcal{O}_a$  un conjunto de operadores de un álgebra de Lie, entonces

$$[\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b] \equiv \mathcal{O}_a \mathcal{O}_b - (-1)^{\eta_a \eta_b} \mathcal{O}_b \mathcal{O}_a,$$

donde  $\eta_a$  es cero si se trata de un generador bosónico y uno en el caso fermiónico.

Ahora, como mencionamos queremos extender el álgebra de Poincaré por tanto se introducen los operadores  $Q_\alpha^A$  y  $\bar{Q}_{\dot{\beta}}^A$ , con las siguientes relaciones de conmutación y anticonmutación:

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad (2.1)$$

$$[Q_\alpha, P^\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P^\mu] = 0 \quad (2.2)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.3)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P^\mu, \quad (2.4)$$

cabe mencionar que las relaciones usuales del álgebra de Poincaré permanecen intactas.

Los nuevos operadores,  $Q_\alpha^A$  y  $\bar{Q}_{\dot{\beta}}^A$  serán los generadores de las transformaciones de supersimetría, como se puede ver en la estructura del álgebra son operadores de carácter fermiónico y sus respectivos índices  $\alpha$  y  $\dot{\beta}$ , son índices espinoriales que indican la representación de  $SO(1, 3) \cong SU(2) \oplus SU(2)$  en la que viven:  $(1/2, 0)$  para los índices sin punto y  $(0, 1/2)$  para los puntuados.

### 2.2.1. Un primer modelo supersimétrico: supermultiplete quiral libre

Sin pérdida de generalidad, sabemos que el contenido férmionico mínimo en una teoría cuántica de campos es un espinor izquierdo de Weyl de dos componentes. Dado que es un objeto intrínsecamente complejo es natural elegirle como supercompañero un campo escalar complejo. La acción libre más simple que podemos construir con estos campos es la correspondiente al modelo de Wess-Zumino

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{WZ} = \int d^4x (-\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + i \bar{\psi}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi).$$

La transformación supersimétrica más sencilla da lugar a las siguientes transformaciones en los campos

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \epsilon\psi \quad , \quad \delta\phi^* = \epsilon^\dagger \psi^\dagger, \\ \delta\psi_\alpha &= -i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi \quad , \quad \delta\psi_\alpha^\dagger = i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^*, \end{aligned}$$

con  $\epsilon_\alpha$  un espinor de Weyl de dos componentes que parametriza la transformación y tiene unidades de  $[masa]^{-1/2}$ . Cabe mencionar que será un parámetro tal que de lugar a una simetría global.

Usando relaciones para las matrices de Pauli y el hecho de que las parciales conmutan, la variación para la acción de Wess-Zumino es

$$\delta S = \int dx^4 \delta \mathcal{L} = -\epsilon \partial^\mu \psi \partial_\mu \phi^* - \epsilon^\dagger \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \phi - \epsilon \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \psi \partial_\mu \phi^* + \psi^\dagger \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \epsilon^\dagger \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0,$$

por tanto podemos concluir que la teoría descrita por la acción de Wess-Zumino es supersimétrica. Ahora veamos que el álgebra de supersimetría cierra, es decir que el conmutador de dos transformaciones supersimétricas parametrizadas por dos espinores distintos, digamos  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  es también simetría de la teoría. Usando las propiedades de transformación para los campos fermiónicos y bosónicos usados anteriormente, se obtiene que

$$(\delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1}) \phi = i(-\epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger + \epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger) \partial_\mu \phi,$$

y

$$(\delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1}) \phi_\alpha = i(-\epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger + \epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger) \partial_\mu \psi_\alpha + i \epsilon_{1\alpha} \epsilon_2^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - i \epsilon_{2\alpha} \epsilon_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi,$$

notemos que los últimos dos términos de la transformación del campo fermiónico es cero en la capa de masa, i.e si la ecuación de movimiento  $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = 0$  se satisface. Mientras que el primer término es idéntico a la transformación para el campo escalar.

El hecho de que el álgebra de supersimetría solo cierre en capa de masa es preocupante, pues nos interesa que la simetría se mantenga incluso al hacer el tratamiento cuántico. Para esto, se introduce un campo auxiliar, en este caso será escalar complejo  $F$  y sin término cinético. La densidad lagrangiana para este campo auxiliar está dada por

$$\mathcal{L}_{aux} = F^* F$$

por tanto, sus dimensiones son  $[masa]^2$  y las ecuaciones de movimiento para el campo son  $F^* = 0$  y  $F = 0$ . Mientras que la variación debida a la transformación de supersimetría es

$$\delta F = -i \epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \quad , \quad \delta F^* = i \partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \epsilon$$

de donde

$$\delta \mathcal{L}_{aux} = -i \epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi F^* + i \partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \epsilon F$$

nótese que se hace cero en capa de masa. Ahora, añadimos también términos extra a la regla de transformación para el campo fermiónico se tiene que

$$\delta \psi_\alpha = -i (\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi + \epsilon_\alpha F \quad , \quad \delta \psi^\dagger_{\dot{\alpha}} = i (\epsilon \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^* + \epsilon^\dagger_{\dot{\alpha}} F^*$$

con lo cual nuestra teoría modificada sigue siendo invariante ante transformaciones supersimétricas. Pero, si ahora calculamos la variación para cualquiera de los campos, obtenemos

$$(\delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1}) X = i(-\epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger + \epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger) \partial_\mu X,$$

este resultado es muy importante, pues hemos encontrado que el conmutador de dos transformaciones de supersimetría nos devuelve la derivada del campo original. En el marco de Heisenberg

$-i\partial_\mu$  corresponde al conmutador de translaciones espaciotemporales  $P_\mu$ , lo cual tiene sentido según el álgebra de supersimetría dada por la ec.(4). Con esto hemos probado que nuestra teoría es invariante ante transformaciones de supersimetría tanto en capa de masa como fuera de ella.

Como las simetrías continuas siempre dan lugar a corrientes conservadas, es natural preguntarse cual es la corriente asociada a esta transformación. Vía el Teorema de Noether, uno encuentra que

$$J_\alpha^\mu = (\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \psi)_\alpha \partial_\nu \phi^* \quad J_{\dot{\alpha}}^{\dagger\mu} = (\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu)_{\dot{\alpha}} \partial_\nu \phi.$$

A partir de estas uno puede calcular también las cargas conservadas

$$Q_\alpha = \int d^3x J_\alpha^0 \quad Q_{\dot{\alpha}} = \int d^3x J_{\dot{\alpha}}^{\dagger 0},$$

las cuales justamente son los generadores de las transformaciones de supersimetría.

### 2.2.2. Un primer modelo interactuante : Interacción de campos quirales

Ahora la meta es construir la teoría de interacciones (sin considerar interacciones de norma aún) para partículas de supermultipletes quirales.

Nuestro punto de partida es la densidad Lagrangiana para una colección de supermultipletes quirales libres etiquetados por un índice  $i$ . Consideraremos que todo supermultiplete consta de un escalar complejo  $\phi$ , un espinor de Weyl  $\psi$  y un campo auxiliar escalar complejo sin propagación  $F$ . Como ya vimos, la parte libre viene dada por

$$\mathcal{L}_{libre} = -\partial_\mu \phi^{*i} \partial^\mu \phi + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i, \quad (2.5)$$

la cual es invariante ante la transformación de supersimetría descrita en la subsección anterior. Buscamos ahora la expresión más general de interacciones renormalizables que sean compatibles con supersimetría. Los únicos candidatos resultan ser

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i + x^{ij} F_i F_j - U.$$

Necesitamos que esta parte de la densidad Lagrangiana sea invariante ante la misma transformación de simetría que la parte libre, por lo cual tanto el término  $U$ , como el término  $x^{ij}$  deben ser cero. Quedamos así con

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i.$$

Ahora estudiemos por partes la variación a esta expresión, comenzaremos con la que contiene cuatro espinores

$$\delta \mathcal{L}_{int_1} = -\frac{1}{2} \frac{\delta W}{\delta \phi_k} (\epsilon \psi_k) (\psi_i \psi_j) - \frac{1}{2} \frac{\delta W}{\delta \phi^{*k}} (\epsilon^\dagger \psi^{\dagger k}) (\psi_i \psi_j),$$

de lo anterior y por la identidad de Fierz, vemos que la variación se anula si y sólo si  $\delta W/\delta\phi_k$  es totalmente simétrico bajo el intercambio de los índices  $i, j, k$ . Pero no hay tal identidad disponible para el término proporcional a  $(\epsilon^\dagger\psi^\dagger{}^k)(\psi_i\psi_j)$ , como no se puede eliminar con ningún otro término, entonces requerimos que  $W^{ij}$  no sea función de  $\phi^{*k}$ .

Por tanto

$$W^{ij} = M^{ij} + y^{ijk}\phi_k,$$

con  $M^{ij}$  matriz de masa simétrica para fermiones y  $y^{ijk}$  el acoplamiento de Yukawa para el campo escalar  $\phi_k$  y dos campos fermiónicos  $\psi_i$  y  $\psi_j$ , el cual debe ser totalmente simétrico ante el intercambio de índices.

Definimos entonces el superpotencial  $W$  como

$$W = \frac{1}{2}M^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k,$$

con lo cual tenemos que

$$W^{ij} = \frac{\delta^2}{\delta\phi_i\delta\phi_j}W.$$

Veamos ahora la parte que contiene una derivada

$$\delta\mathcal{L}_{int_2} = iW^{ij}\partial_\mu\phi_j\psi_i\sigma^\mu\epsilon^\dagger + iW^i\partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\epsilon^\dagger,$$

nótese que

$$W^{ij}\partial_\mu\phi_j = \partial_\mu\left(\frac{\delta W}{\delta\phi_i}\right),$$

entonces la contribución a  $\delta\mathcal{L}_{int}$  debido a  $\delta\mathcal{L}_{int_2}$  es una derivada total si

$$W^i = \frac{\delta W}{\delta\phi_i} = M^{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y^{ijk}\phi_j\phi_k,$$

los términos restantes son lineales en  $F$  y  $F^*$  y se cancelan dados los resultados obtenidos para  $W^i$  y  $W^{ij}$ .

Ahora, si calculamos las ecuaciones de movimiento para  $F$  y  $F^*$  y sustituimos en la expresión para  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{libre} + \mathcal{L}_{int}$  obtenemos

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\phi^{*i}\partial^\mu\phi + i\psi^\dagger{}^i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i - \frac{1}{2}\left[W^{ij}\psi_i\psi_j + W_{ij}^*\psi^\dagger{}^i\psi^\dagger{}^j\right] - W^iW_i^*,$$

de donde se sigue que el potencial escalar de la teoría viene dado por

$$V(\phi, \phi^*) = W^k W_k^*,$$



con lo cual obtenemos la expresión final para la densidad lagrangiana completa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i - V(\phi, \phi^*) + i\psi^\dagger{}^i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i \\ & - \frac{1}{2} \left[ M^{ij} \psi_i \psi_j + M_{ij}^* \psi^\dagger{}^i \psi^\dagger{}^j \right] - \frac{1}{2} \left[ y^{ijk} \phi_i \psi_j \psi_k + y_{ijk}^* \phi^{*i} \psi^\dagger{}^j \psi^\dagger{}^k \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Esta expresión es sumamente útil, pues nos permite comparar las masas de los campos fermiónicos y bosónicos mediante las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu \phi_i &= M_{ik}^* M^{kj} \phi_j + \dots, \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i &= M_{ij}^* \psi^\dagger{}^j + \dots, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \psi^\dagger{}^i = M^{ij} \psi_j, \end{aligned} \quad (2.7)$$

poniendo  $\psi$  en términos de  $\psi^\dagger$  y viceversa, uno obtiene que

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi_i = M_{ik}^* M^{kj} \psi_j + \dots, \quad \partial^\mu \partial_\mu \psi^\dagger{}^j = \psi^\dagger{}^j = M_{ik}^* M^{kj} + \dots, \quad (2.8)$$

de las ecuaciones 2.7 y 2.8 vemos que los campos bosónicos y fermiónicos satisfacen la misma ecuación de onda con la misma matriz de masa con eigenvalores no negativos. Si diagonalizamos esta matriz redefiniendo los campos con una matriz unitaria obtenemos una colección de supermultipletes quirales, que contienen cada uno un campo escalar complejo y un fermión de Weyl con misma masa, como era de esperarse.

### 2.2.3. Lagrangiano para un supermultiplete de norma libre

Ahora los grados de libertad de propagación en un supermultiplete de norma son un campo escalar  $A_\mu^a$  y un fermión de Weyl de dos componentes llamado gaugino  $\lambda^a$ . Las transformaciones de norma de un supermultiplete vectorial son

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + \partial_\mu \Lambda^a + g f^{abc} A_\mu^b \Lambda^c \\ \lambda^a &\rightarrow \lambda^a + g f^{abc} \lambda^b \Lambda^c. \end{aligned}$$

Igual que en el caso anterior, necesitamos de un campo escalar auxiliar que permita que la supersimetría cierre fuera de capa de masa, llamaremos  $D^a$  a dicho campo, el cual también transformara en la representación adjunta del grupo de norma, tendrá las mismas unidades que el campo  $F$  y no tendrá término cinético, de modo que pueda ser eliminado en capa de masa usando su ecuación de movimiento.

De modo que la densidad lagrangiana para un supermultiplete de norma, será

$$\mathcal{L}_{norma} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + i\lambda^\dagger{}^a \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a, \quad (2.9)$$

con  $F_{\mu\nu}^a$  la intensidad de campo de Yang-Mills usual y

$$\nabla_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a + g f^{abc} A_\mu^b \lambda^c,$$

la derivada covariante del campo del gaugino.

Ahora especifiquemos la transformación de los campos ante transformaciones de supersimetría

$$\delta A_\mu^a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \epsilon^\dagger \bar{\sigma}_\mu \lambda^a + \lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}_\mu \epsilon \right), \quad (2.10)$$

$$\delta \lambda_\alpha^a = \frac{i}{2\sqrt{2}} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \epsilon)_\alpha F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_\alpha D^a, \quad (2.11)$$

$$\delta D^a = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( -\epsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \lambda^a + \nabla_\mu \lambda^{\dagger a} \bar{\sigma}^\mu \epsilon \right). \quad (2.12)$$

Con estas definiciones se obtiene, en analogía con el caso anterior que

$$(\delta_{\epsilon_1} \delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2} \delta_{\epsilon_1}) X = i(-\epsilon_1 \sigma^\mu \epsilon_2^\dagger + \epsilon_2 \sigma^\mu \epsilon_1^\dagger) \nabla_\mu X.$$

#### 2.2.4. Interacciones de norma supersimétricas

Supongamos que los supermultipletes quirales transforman bajo el grupo de norma en una representación con matrices hermitianas  $(T^a)_i^j$  tales que

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c.$$

Como la supersimetría y las transformaciones de norma conmutan, entonces los campos deben estar en la misma representación de norma, por lo cual

$$X_i \rightarrow X_i + ig \Lambda^a (T^a X)_i. \quad (2.13)$$

Para tener una densidad Lagrangiana invariante de norma, necesitamos cambiar las derivadas en la ec. 2.5 por derivadas covariantes

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \phi_i &= \partial_\mu \phi_i - ig A_\mu^a (T^a \phi)_i \\ \nabla_\mu \phi^{*i} &= \partial_\mu \phi^{*i} + ig A_\mu^a (\phi^* T^a)_i \\ \nabla_\mu \psi_i &= \partial_\mu \psi_i - ig A_\mu^a (T^a \psi)_i. \end{aligned}$$

Uno podría pensar que con esto basta para tener interacciones, sin embargo hace falta considerar las interacciones entre el gaugino y el campo auxiliar. Tenemos así tres tipos de interacciones permisibles

$$(\phi^* T^a \psi) \lambda^a, \quad \lambda^{\dagger a} \left( \psi^\dagger T^a \phi \right), \quad (\phi^* T^a \phi) D^a,$$

uno podría añadir estos términos a la densidad lagrangiana y pedir que todo sea real e invariante bajo supersimetría salvo por una derivada total. Resulta que esto es posible si modificamos las

reglas de transformación para los campos de materia para incluir derivadas covariantes y también resulta necesario un término extra en la variación de  $F$

$$\begin{aligned}\delta\phi_i &= \epsilon\psi_i \\ \delta\psi_{i\alpha} &= -i\left(\sigma^\mu\epsilon^\dagger\right)_\alpha\nabla_\mu\phi_i + \epsilon F_\alpha \\ \delta F_i &= -i\epsilon^\dagger\bar{\sigma}^\mu\nabla_\mu\psi_i + \sqrt{2}g(T^a\phi)_i\epsilon^\dagger\lambda^{\dagger a}.\end{aligned}$$

Bajo estas reglas la densidad Lagrangiana completa viene dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{quiral} + \mathcal{L}_{norma} \\ &\quad - \sqrt{2}g(\phi^*T^a\psi)\lambda^a - \sqrt{2}g\lambda^{\dagger a}\left(\psi^\dagger T^a\phi\right) + g(\phi^*T^a\phi)D^a.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Nótese que la segunda línea de la expresión anterior consiste de interacciones cuyas intensidades están forzadas a ser constantes de acoplamiento por los requerimientos de supersimetría, aunque no sean interacciones de norma en el sentido de una teoría cuántica de campos usual. Los primeros dos términos son acoplamientos directos de los gauginos a los campos de materia; lo cual puede pensarse como la supersimetrización de los acoplamientos usuales de los bosones de norma con los campos de materia. Mientras que el último término junto con el término para  $D^a$  en  $\mathcal{L}_{norma}$  da lugar a una ecuación de movimiento distinta para el campo auxiliar

$$D^a = -g(\phi^*T^a\phi),$$

de modo que, al igual que los campos auxiliares  $F$  y  $F^*$  el campo  $D^a$  se puede escribir en términos de los campos escalares. Si reemplazamos en la ec2.14, encontramos que es posible escribir el potencial escalar como

$$V(\phi, \phi^*) = F^{*i}F_i + \frac{1}{2}D^aD^a = W^{*i}W_i + \frac{1}{2}g^2(\phi^*T^a\phi)^2, \quad (2.15)$$

los dos términos en esta expresión son conocidos como contribución debida al término F y al término D, respectivamente. Lo interesante de este potencial es que posee una característica única de las teorías supersimétricas; el potencial escalar está completamente determinado por las demás interacciones en la teoría. Los términos F están dados por los acoplamientos de Yukawa, y los términos D por las interacciones de norma.

Hasta ahora hemos construido teorías supersimétricas con base en nuestra intuición y nuestros conocimientos básicos de teoría cuántica de campos, pero ¿cómo estar seguros de que son en efecto las teorías más generales que podemos construir?, ¿podremos dar un origen fundamental para estos términos auxiliares que parecen estar metidos a mano?. Para dar respuesta a estas preguntas debemos introducir el concepto de superespacio para dar lugar al formalismo de supercampos.

## 2.3. Superespacio y supercampos

### 2.3.1. Superespacio: una extensión del espaciotiempo

La idea es extender las coordenadas de nuestro espaciotiempo usual,  $\{x^\mu\}$ , añadiendo unas nuevas coordenadas,  $\{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\}$ , las cuales pueden ser interpretadas como los supercompañeros de nuestras coordenadas usuales y sus conjugados. Así las coordenadas que describen un punto en el superespacio serán  $\{x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\}$ .

Se habrá notado que las coordenadas  $\theta$  y  $\bar{\theta}$  tienen índices espinoriales  $\alpha$  y  $\dot{\alpha}$  por lo cual es de esperarse que su naturaleza no sea bosónica, i.e no son números reales propiamente, pues no cumplen con la propiedad de conmutar. Estas nuevas variables son lo que se conoce como variables de Grassmann, a continuación se presentan algunas de sus propiedades.

Supongamos que tenemos una sola variable de Grassmann  $\theta$ , i.e  $\{\theta, \theta\} = 0$ . Entonces es claro que  $\theta^2 = 0$ . Ahora, sea  $f$  una función de  $\theta$ , si expandimos en serie de Taylor, tenemos:

$$f(\theta) = f_0 + f_1\theta,$$

pues los términos de orden mayor o igual a dos son cero debido a la estructura anticonmutativa de  $\theta$ .

La derivada es claramente

$$\frac{df}{d\theta} = f_1,$$

y definimos

$$\int d\theta \frac{df}{d\theta} := 0 \quad \int \theta d\theta := 1.$$

Ahora consideremos variables de Grassmann con índices espinoriales  $\theta_\alpha$  y  $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ . Definimos sus cuadrados como

$$\theta\theta := \theta^\alpha\theta_\alpha \quad \bar{\theta}\bar{\theta} := \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}},$$

de lo cual se sigue que

$$\theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta},$$

así que

$$\frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta^\alpha} = \delta_\alpha^\beta \quad \frac{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}},$$

por otro lado, la integración va como

$$\int d\theta^1 \int d\theta^2 := \int d^2\theta, \quad \int \theta\theta d^2\theta = 1, \quad \int \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} d^2\theta d^2\bar{\theta} = 1.$$

Con estas propiedades en mente estamos listos para hablar de supercampos.

### 2.3.2. Supercampos

Consideremos una función de las coordenadas del superespacio  $S(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ . La cual podemos expresar mediante su desarrollo en serie de potencias de  $\theta$  y  $\bar{\theta}$  teniendo una cantidad finita de términos distintos de cero debido a la naturaleza fermiónica de dichas coordenadas. La expresión más general tendrá la siguiente forma:

$$S(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) = \phi(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}N(x) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})V_\mu(x) \\ + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\rho(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \quad (2.16)$$

Esta función será lo que llamaremos supercampo. Es de nuestro interés saber como transforma esta cantidad ante transformaciones de supersimetría, para esto debemos dar una representación para los operadores  $Q$  y  $\bar{Q}$ . Antes de eso, conviene recordar el hecho de que al efectuar una transformación de Poincarè obtenemos una traslación en el espaciotiempo, así esperamos que al actuar con una transformación de súper-Poincarè obtengamos una traslación en el superespacio.

Así, la representación que elegimos es la siguiente

$$\mathcal{Q}_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\theta^{\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.17)$$

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + \theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.18)$$

$$\mathcal{P}_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.19)$$

de esta representación podemos deducir que

$$i[S, \epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}] = i(\epsilon\mathcal{Q} + \bar{\epsilon}\bar{\mathcal{Q}})S = \delta S.$$

La transformación explícita de cada componente viene dada por

$$\delta\phi = \epsilon\psi + \bar{\epsilon}\bar{\chi}, \quad (2.20)$$

$$\delta\psi = 2\epsilon M + \sigma^\mu\bar{\epsilon}(i\partial_\mu\phi + V_\mu), \quad (2.21)$$

$$\delta\bar{\chi} = 2\bar{\epsilon}N - \epsilon\sigma^\mu(i\partial_\mu\phi - V_\mu), \quad (2.22)$$

$$\delta M = \bar{\epsilon}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\epsilon}, \quad (2.23)$$

$$\delta N = \epsilon\rho + \frac{i}{2}\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}, \quad (2.24)$$

$$\delta V_\mu = \epsilon\sigma_\mu\bar{\lambda} + \rho\sigma_\mu\bar{\epsilon} + \frac{i}{2}(\partial^\nu\psi\sigma_{\mu\nu}\bar{\sigma}_\nu\epsilon - \bar{\epsilon}\bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu\partial^\nu\bar{\chi}), \quad (2.25)$$

$$\delta\bar{\lambda} = 2\bar{\epsilon}D + \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\epsilon})\partial_\mu V_\nu + i\sigma^\mu\epsilon\partial_\mu M, \quad (2.26)$$

$$\delta\rho = 2\epsilon D - \frac{i}{2}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\epsilon)\partial_\mu V_\nu + i\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu N, \quad (2.27)$$

$$\delta D = \frac{i}{2}\partial_\mu(\epsilon\sigma^\mu\bar{\lambda} - \rho\sigma^\mu\bar{\epsilon}), \quad (2.28)$$

notesé que la componente  $D$  transforma como una derivada total.

Ahora, esta función  $S$  no es una representación irreducible de supersimetría pero podemos imponer constricciones sobre  $S$  que nos lleven a súpercampos con menos componentes que sí lo sean.

Para dicho fin, debemos definir la derivada supercovariante

$$\mathcal{D}_\alpha \doteq \partial_\alpha + i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \doteq -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu,$$

la cual satisface la siguiente estructura

$$\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\} = \{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{Q}_\beta\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}}\} = 0.$$

Con esto en mente podemos dar una clasificación de súpercampos que sí son representaciones irreducibles de supersimetría

- supercampo quiral  $\Phi$ , satisface  $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$
- supercampo antiquiral  $\bar{\Phi}$ , cumple  $\mathcal{D}_\alpha\bar{\Phi} = 0$
- supercampo vectorial  $V$ , satisface  $V = V^\dagger$
- supercampo lineal  $L$ , cumple que  $L = L^\dagger$  y  $\mathcal{D}\mathcal{D}L = 0$

en particular, son de nuestro interés los súpercampos quirales y vectoriales.

La expresión general para un supercampo quiral es

$$\begin{aligned} \Phi(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = & \varphi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\varphi(x) \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x), \end{aligned} \quad (2.29)$$

mientras que para un supercampo vectorial tenemos

$$\begin{aligned} V(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta(M(x) + iN(x)) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M(x) - iN(x)) \\ & + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\left(-i\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)\right) \\ & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(i\lambda(x) - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}\right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(D - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C\right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nótese que dado un supercampo quiral  $\Lambda$ ,  $i(\Lambda - \Lambda^\dagger)$  es un supercampo vectorial pues satisface la condición de realidad. Con lo anterior podemos definir una transformación de norma generalizada para súpercampos vectoriales, digamos  $V$ , dada por

$$V \rightarrow V - \frac{i}{2}(\Lambda - \Lambda^\dagger),$$

dicha transformación es importante, pues si tomamos un  $\Lambda$  adecuado, podemos llevar nuestro supercampo vectorial a la norma de Wess Zumino. En dicha norma, un supercampo vectorial  $V$  toma la forma

$$V_{WZ}(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x),$$

esta norma es conveniente pues nos deja únicamente las componentes físicas del supercampo. Para finalizar esta sección, vale la pena mencionar la forma en que transforman las componentes  $F$  de supercampos quirales y las  $D$  de supercampos vectoriales ante una transformación general de supersimetría, la cual viene dada por

$$i[X, \epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}] = i(\epsilon\mathcal{Q} + \bar{\epsilon}\bar{\mathcal{Q}})S = \delta X,$$

para un supercampo  $X$ .

Ante tal transformación el término  $F$  de un supercampo quiral  $\Phi$  transforma como

$$\delta F = i\sqrt{2}\bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi$$

mientras que en el caso de un supercampo vectorial en la norma de Wess-Zumino, la componente  $D$  transforma como

$$\delta D = \frac{i}{2}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}(\epsilon^{\dot{\alpha}}\lambda^\alpha - \epsilon^\alpha\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}),$$

es de suma importancia notar que en ambos casos, el término  $F$  y el término  $D$  transforman como derivadas totales antes transformaciones de supersimetría.

## 2.4. Acciones supersimétricas cuatro dimensionales

En el formalismo de superespacio y supercampos, la acción asociada a una teoría supersimétrica se expresa como una integral de un supercampo sobre las coordenadas  $x^\mu$  y  $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ . Para construir las mismas acciones en términos de las componentes de los súpercampos, basta notar lo que se menciono al final de la sección anterior. Tanto el término  $F$  de un supercampo quiral como el término  $D$  de un supercampo vectorial transforman como derivadas totales ante supersimetría, por tanto son invariantes ante transformaciones de supersimetría las siguientes integrales

$$S_F = \int d^4x F \quad , \quad S_D = \int d^4x D, \tag{2.31}$$

así, las acciones supersimétricas se obtienen al elegir  $F$  y  $D$  de algún supercampo compuesto obtenido de súpercampos quirales y de norma.

Llegado este punto conviene hablar de las cantidades que definen por completo una teoría supersimétrica.

### 2.4.1. Superpotencial

Pensemos en un conjunto de  $n$  supercampos quirales  $\Phi^i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . A partir de estos podemos construir un supercampo quiral compuesto, cuya componente de orden  $\theta^0 \bar{\theta}^0$  sea una función holomorfa  $W$  de los escalares  $Z^a$ , las demás componentes van como

$$\begin{aligned}\chi(W) &= W_i \Phi^i, \\ F(W) &= W_i F^i - \frac{1}{2} W_{ij} \bar{\Phi}^i \Phi^j,\end{aligned}$$

donde  $W_i = \frac{\partial W}{\partial Z^i}$  y  $W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial Z^i \partial Z^j}$ .

A esta función  $W(\Phi^i)$  se le conoce como superpotencial, más adelante veremos que se encarga de construir los términos de interacción de la teoría que estemos describiendo.

### 2.4.2. Potencial de Kähler

Ahora consideremos que tenemos no solo el conjunto de campos quirales arriba mencionado, sino también un conjunto de supercampos antiquirales  $\bar{\Phi}^i$ , con lo cual construimos un supercampo vectorial cuya componente de orden  $\theta^0, \bar{\theta}^0$  sea una función analítica de los supercampos quirales y antiquirales  $K(\Phi, \bar{\Phi})$ .

### 2.4.3. Función cinética de norma

Esta función nos brinda información sobre las constantes de acoplamiento de la teoría así como de la existencia de términos de mezcla entre interacciones. En el caso de interacciones asociadas a grupos abelianos pueden surgir términos del estilo  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  con cada tensor de esfuerzo asociado a una distinta simetría  $U(1)$ , este tipo de términos se deberían a una función cinética de norma no trivial. Cabe mencionar que en todos los modelos que se presentaran en este trabajo la función será la trivial, es decir, proporcional a la identidad.

Con estos conceptos en mente, las acciones supersimétricas se pueden construir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}S &= S(K) + S(f) + S(W), \\ S(K) &= \int d^4x D(K) = \int d^4x \mathcal{L}_{kin \text{ escalar-quiral}}, \\ S(f) &= \int d^4x F(f) = \int d^4x \mathcal{L}_{kin \text{ norma}}, \\ S(W) &= \int d^4x F(W) = \int d^4x \mathcal{L}_{int}.\end{aligned}$$

En particular nos será de sumo interés el potencial asociado al sector escalar de nuestra teoría, este se obtiene al desarrollar por completo los términos arriba mencionados para obtener la densidad



lagrangiana y poder calcular las ecuaciones de movimiento para los campos auxiliares  $F$  y  $D$ . Estas ecuaciones resultan ser algebraicas y al hacer uso de sus soluciones obtenemos la densidad lagrangiana que describe los grados de libertad físicos. Además, al realizar esta eliminación de los campos auxiliares e identificar las partes escalares que no contengan derivadas, podemos obtener el siguiente potencial escalar:

$$V = \sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial \Phi_i} \right|^2 + \frac{1}{2} \chi D. \quad (2.32)$$

## 2.5. Supergravedad

Hasta ahora hemos estudiado supersimetría cuando sus generadores son operadores que no dependen del punto del espaciotiempo sobre el que se apliquen, es decir como una simetría global de nuestra teoría. Veamos ahora las consecuencias de estudiarla como una simetría local, lo que dará lugar a la llamada supergravedad.

La interacción gravitacional surge al estudiar supersimetría local pues recordemos que en el caso de supersimetría global el conmutador de dos transformaciones supersimétricas daba lugar a una traslación, ahora al hacer que los generadores de supersimetría dependan del punto, la traslación generada también dependerá del punto del espaciotiempo al cual se aplique

$$[\delta_{\epsilon_1}(x^\mu), \delta_{\epsilon_2}] \mathcal{O} \propto \epsilon_1(x^\mu) \epsilon_2(x^\mu) \partial_\mu \mathcal{O}.$$

Por tanto nos generarán una traslación que dependa del punto al cual se aplique y justamente este tipo de transformaciones de coordenadas son las que estudiamos en relatividad general.

Por dar un ejemplo, la acción más sencilla invariante ante transformaciones de supersimetría local que podemos construir es la siguiente:

$$S = S_{3/2} + S_2 = \int d^4x \bar{\psi}_\mu^\alpha \gamma^{\mu\nu\gamma} \partial_\nu \psi_\gamma^\beta + \int d^4x \sqrt{-g} R,$$

donde la acción  $S_{3/2}$  es la llamada acción de Rarita-Schwinger que describe un campo libre de espín  $s = 3/2$ , mientras que la acción  $S_2$  es la conocida acción de Einstein-Hilbert, que describe un campo libre de espín dos. Para una discusión a fondo y una prueba de la invariancia ante susy local, véase [24, 25, 26]

### 2.5.1. Potencial escalar en supergravedad

Así como en el caso de supersimetría global, una teoría de supergravedad queda determinada por el potencial de Kähler, el superpotencial y la función cinética de norma. Es de esperarse que también aparezcan campos auxiliares cuyas ecuaciones de movimiento sean algebraicas y que al integrar estos campos obtengamos la acción física que describa a nuestra teoría. de igual modo que en la versión global, podemos identificar al potencial escalar de la teoría con aquellos términos

escalares que no incluyan derivadas. En general el potencial escalar de una teoría supergravitacional tiene la siguiente forma [25]

$$V = e^K \left[ D_{\Phi_i} W K_{ij}^* D_{\Phi_j} W^* - 3|W|^2 \right] + \sum_a \frac{g_a^2}{2} [\text{Re } f_a(\Phi_i)]^{-1} D_a^2. \quad (2.33)$$



## Capítulo 3

# Cosmología Relativista

### 3.1. Cosmología estándar

En 1916, Albert Einstein culminó la construcción de la teoría de la Relatividad General, la mejor teoría que tenemos para describir la interacción gravitacional con predicciones que se siguen confirmando en la actualidad, como la existencia de las ondas gravitacionales. Dado que describe la interacción gravitacional, se esperaba conocer la historia de nuestro universo a través de ella y así resolver diversas preguntas: cómo había comenzado, cómo se formó la estructura a gran escala, la edad del mismo, la abundancia de elementos en él, por qué se encuentra en expansión, etc. Además se contaba con el llamado Principio Cosmológico. El cual nos dice que a tiempo constante y a gran escala nuestro Universo es isotrópico y homogéneo. Esto ha sido confirmado observacionalmente, con la gran escala aproximadamente  $10^9 pc$ . En otras palabras, estamos asumiendo que a tiempo constante y a escalas de  $10^9 pc$ , el universo se ve igual en todas direcciones y que es invariante ante traslaciones. ¿Cómo modelamos esto en Relatividad General para intentar resolver las preguntas planteadas?

Para poder traducir estas palabras a un lenguaje que nos permita trabajar, asumiremos que el Universo es un fluido perfecto, es decir el Universo es un sistema termodinámico descrito por tan solo dos variables. Por tradición usaremos presión,  $p$ , y densidad,  $\rho$ . De modo que la ecuación de Einstein será la siguiente

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

donde  $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$ . Podemos obtener como solución la métrica de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaitre, dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \tag{3.2}$$

con  $a$  una función del tiempo y  $k$  una constante.

Esta función del tiempo  $a$  será de suma importancia. Basta ver la ecuación para entender que

tendrá la función de evolucionar el espacio en el tiempo.

Si elegimos  $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$  obtenemos las ecuaciones de Friedmann:

$$3H^2 + 3\frac{k}{a^2} = 8\pi\rho \quad (3.3)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3p), \quad (3.4)$$

con  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ . Notemos que tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas por determinar. Para tener una solución única se debe cerrar el sistema, i.e debemos dar una ecuación adicional que relacione al menos dos de nuestras variables.

Una forma de hacerlo es considerando la termodinámica del Universo. Al imponer que nuestro Universo sea barotrópico, obtenemos la siguiente ecuación de estado

$$p = \omega\rho, \quad (3.5)$$

juntas, las ecuaciones de Friedmann y la ecuación de estado, son la base de la Cosmología Relativista. Otra ecuación que nace de nuestro modelo es la que obtenemos al tomar en cuenta la conservación de la energía  $T^{\mu\nu};_{\mu} = 0$ , lo cual nos conduce a

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0,$$

esta ecuación puede ser resuelta usando la ecuación de estado. De este modo encontramos la siguiente expresión para  $\rho$

$$\rho = \rho_0 \frac{a_0^{3(1+\omega)}}{a},$$

sustituyendo esta expresión en las ecuaciones de Friedmann, podemos encontrar distintas soluciones para  $a(t)$ , dependiendo del valor de  $\omega$ , por ejemplo [27]

$$a \propto t^{\frac{2}{3}}, \omega = 0 \quad (3.6)$$

$$a \propto \sqrt{t}, \omega = \frac{1}{3} \quad (3.7)$$

$$a \propto e^{Ht}, \omega = -1. \quad (3.8)$$

Cabe mencionar que la última solución, la asociada a  $\omega = -1$ , se puede entender como una etapa de expansión acelerada del universo debido a la forma que toma el factor de escala durante esa época. Será de importancia más adelante.

Como resultados importantes que podemos obtener de este sencillo modelo se encuentran la estimación de la edad del universo [3] de aproximadamente  $13.9 \times 10^9$  años, así como una muy buena estimación de la abundancia de elementos en el universo.

Pese a su éxito presenta algunos problemas, siendo el más serio de ellos el problema del horizonte pues no nos da una explicación al porque puntos del espaciotiempo que están desconectados causalmente muestren el mismo valor de temperatura  $\approx 2.73K$  [28].

## 3.2. Inflación

Este problema de la cosmología estándar tiene solución si consideramos una época de expansión acelerada del universo a la cual llamamos inflación [1][2]. Recordemos las soluciones que se presentaron en la sección anterior, en especial aquella asociada a  $\omega = -1$  la cual nos daba un factor de escala creciente exponencialmente en el tiempo, justamente esa etapa del Universo es la que asociamos con Inflación. Esto presenta una solución clara para el serio problema del horizonte, pues si tenemos una etapa en la que el universo creció como  $a(t) \propto e^{Ht}$  con una duración suficiente para que un parche menor a  $H^{-1}$  tenga el tiempo necesario para crecer lo suficiente como para cubrir el espaciotiempo, con lo cual los puntos por lejanos que estén hoy día, habrían estado conectados causalmente anteriormente.

Para convencernos del argumento anterior, pensemos un poco más en el problema del Horizonte. El corazón de este problema reside en el hecho de que el horizonte de Hubble siempre se expande más rápido que la escala física  $\lambda \sim a(t)$ , esto es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda}{H^{-1}} \right) \sim \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{\dot{a}} \right) = \ddot{a} < 0,$$

esto sucede sin importar que tipo de materia predomine en el universo. Así que podemos voltear la relación y pedir que ahora la escala física crezca más rápido que el radio de Hubble, lo cual permitirá la conexión causal entre los puntos del espaciotiempo que parecen desconectados hoy día. Esto se traduce en lo siguiente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda}{H^{-1}} \right) > 0 \leftrightarrow \ddot{a} > 0.$$

Lo cual nos indica que el universo experimenta una época de expansión acelerada, llamada Inflación. Nos interesa saber bajo que condiciones se da la época de Inflación, desarrollemos la siguiente expresión obtenida de las ecuaciones de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{2\rho}{6m_{Pl}^2} - \frac{3p + 3\dot{p}}{6m_{Pl}^2} = H^2 + \dot{H} > 0,$$

la última desigualdad se sigue de la definición de inflación. Nos es de suma importancia pues nos permite definir el primer parámetro que nos dice si hay inflación o no

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (3.9)$$

es claro que cuando  $\epsilon < 1$  tenemos inflación, pues es justo la definición de esta época.

Además viene bien definir un segundo parámetro  $\eta$  que nos dará información sobre que tan rápido cambia  $\epsilon$

$$\eta \equiv \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon}, \quad (3.10)$$

más adelante discutiré detalles de estos parámetros en el contexto de la aproximación de slow-roll. Vale la pena preguntarnos que tipo de materia predomina el universo mientras inflación tiene lugar

### 3.2.1. Inflación mediante un campo escalar y aproximación de slow-roll

Ahora, discutamos la dinámica de Inflación. Como hemos notado, necesitamos una fuente esta será provista por un campo escalar, el inflatón, acoplado mínimamente a gravedad. Así, la acción de la teoría será la siguiente

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (3.11)$$

donde  $V(\phi)$  es el potencial de nuestro campo escalar. Mientras que para obtener el tensor de energía momento basta calcular la variación del lagrangiano asociado al campo respecto a la métrica

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi + V(\phi) \right].$$

Podemos identificar entonces la densidad y la presión con las entradas  $T_{00}$  y  $T_{ii}$  respectivamente

$$\rho = -T_{00}^0 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \frac{(\nabla\phi)^2}{a^2} + V(\phi) \quad (3.12)$$

$$p = \frac{1}{3} T_{ii}^i = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{6} \frac{(\nabla\phi)^2}{a^2} - V(\phi), \quad (3.13)$$

nótese que cuando el potencial domina sobre el término cinético  $\rho \approx V \approx -p$ . Es decir, el inflatón nos lleva al escenario de expansión acelerada del universo, viz. inflación.

Ahora, para obtener las ecuaciones de movimiento del inflatón debemos hacer uso de las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi},$$

de lo cual obtenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.14)$$

Trabajemos esta última ecuación para simplificarla. Recordemos que  $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$  esto se reduce a pedir  $\dot{\phi}^2 < V$ . Si tomamos una derivada temporal de ambos lados de la desigualdad terminamos con  $\ddot{\phi} < \frac{\partial V}{\partial \phi}$ . Esta es la llamada aproximación de Slow-Roll, con la cual la ecuación 3.14 queda como

$$3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (3.15)$$

este resultado es importante pues nos permite escribir la dinámica del inflatón en términos de derivadas de  $V$ .

Veamos como se ven los parámetros  $\epsilon$  y  $\eta$  en la aproximación de Slow-Roll. Para  $\epsilon$  tenemos que

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \approx \frac{\dot{\phi}^2}{V} \approx \frac{3}{2} \frac{1}{V} \frac{V_\phi^2}{9H^2} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2, \quad (3.16)$$

con  $V_\phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}$ . Nótese que  $\epsilon$  es una función del potencial de nuestra teoría, más aún, describe que tan pronunciada es la pendiente del potencial.

Por otro lado, para el parámetro  $\eta$  tenemos que

$$\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} \approx \left[ H \frac{1}{2} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2 \right]^{-1} = \frac{V_\phi}{V} \left[ \frac{V_{\phi\phi}}{V} - \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2 \right] \phi \approx \frac{V_{\phi\phi}}{V}. \quad (3.17)$$

Por último el número de  $e$ -folds  $N$  viene dado en términos del potencial como

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{t_i}^{t_f} H \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_{t_i}^{t_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V_\phi} d\phi.$$

### 3.3. Contacto con las observaciones

Resulta que las fluctuaciones presentes en el CMB y la estructura a gran escala del universo, se deben a la etapa inflacionaria descrita en la sección anterior. Esto sucede debido a las fluctuaciones del inflatón, pues como hemos visto la dinámica de dicho campo gobierna la evolución de la densidad de energía. Así que para obtener expresiones que nos permitan conocer los valores teóricos de estas observables comenzamos nuestros cálculos a partir de la acción del inflatón acoplado a gravedad.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right),$$

recordemos que estamos en un fondo FRW, al sustituir la métrica propia de dicho espaciotiempo obtenemos la siguiente acción

$$S = \int d\tau d^3x \left[ \frac{1}{2} a^2 \left( (\phi')^2 - (\nabla \phi)^2 \right) - a^4 V(\phi) \right]. \quad (3.18)$$

En principio deberíamos de escribir esta acción considerando fluctuaciones tanto del espaciotiempo como del inflatón, pero resulta que los términos de las fluctuaciones espaciotemporales, en la norma de espacio plano, están suprimidas por factores del parámetro  $\epsilon$  de rodamiento lento [3]. Por tanto basta considerar únicamente fluctuaciones del inflatón. Conviene escribir a este último como

$$\phi(\tau, x) = \bar{\phi}(\tau) + \frac{f(\tau, x)}{a(\tau)},$$

de modo que la acción 3.18, a segundo orden en las fluctuaciones del inflatón, queda como

$$S \approx \int d\tau d^3x \frac{1}{2} \left[ (f')^2 - (\nabla f)^2 + \frac{a''}{a} f^2 \right]. \quad (3.19)$$



Mediante la ecuación de Euler-Lagrange podemos obtener la ecuación de movimiento para las fluctuaciones  $f$

$$f'' - \nabla^2 f - \frac{a''}{a} f = 0.$$

o para cada modo de Fourier, tenemos

$$f''_{\kappa} - \left( \kappa^2 - \frac{a''}{a} \right) f_{\kappa} = 0.$$

Finalmente, en el límite de sub-horizonte tenemos

$$f''_{\kappa} - \kappa^2 f_{\kappa} = 0,$$

está es la ecuación que describe a un oscilador armónico por cada modo de Fourier. Veremos más adelante que al tratarlo como un sistema cuántico, las fluctuaciones del vacío de este sistema proveerán la semilla de estructura de nuestro universo.

Procedemos ahora a cuantizar canónicamente el sistema. El momento canónico conjugado a nuestra variable  $f$  es

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}.$$

Se impone la relación de conmutación a tiempos iguales usual

$$\left[ \hat{f}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}') \right] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

que en espacio de momentos tiene la siguiente forma

$$\left[ \hat{f}_{\kappa}(\tau), \hat{\pi}_{\kappa'}(\tau) \right] = i\delta(\kappa + \kappa').$$

A partir de escribir el operador  $\hat{f}$  en términos de los operadores de creación y aniquilación usuales y de las condiciones iniciales, es posible llegar a la siguiente forma explícita para dicho operador

$$\hat{f}_{\kappa}(\tau) = \frac{e^{-i\kappa\tau}}{\sqrt{2\kappa}} \left( 1 - \frac{i}{\kappa\tau} \right).$$

Con esta expresión, podemos calcular el valor esperado del operador  $\hat{f}$  en el vacío para empezar a estudiar el espectro de potencias.

Tenemos que

$$\langle |\hat{f}|^2 \rangle = \int d \ln \kappa \frac{\kappa^3}{2\pi^2} |f_{\kappa}(\tau)|^2,$$

a partir de esta cantidad definimos el espectro de potencias, como

$$\Delta_f^2(\kappa, \tau) = \frac{\kappa^2}{2\pi^2} |f_{\kappa}(\tau)|^2$$

en el límite de superhorizonte, se ve como

$$\Delta_{\delta\phi}^2(\kappa) \approx \left( \frac{H}{2\pi} \right) \Big|_{\kappa=aH}. \quad (3.20)$$

Ya que estamos trabajando en el límite de superhorizonte, es importante notar que la forma que obtiene el operador canónico conjugado  $\hat{\pi}$  es proporcional al operador  $\hat{f}$ . Por tanto en este límite, los operadores  $\hat{\pi}$  y  $\hat{f}$  conmutan, en este sentido es que decimos que las fluctuaciones se han vuelto clásicas y podemos identificar el valor esperado con el promedio clásico.

### 3.3.1. Perturbaciones primordiales a partir de Inflación.

#### Perturbaciones escalares.

Ahora que se ha discutido la idea general de la dinámica de las perturbaciones del inflatón, aprovecharemos la relación que existe entre la perturbación conservada a la curvatura  $\mathcal{R}$  y las fluctuaciones del inflatón  $\delta\phi$  para establecer también una relación entre los espectros de ambas cantidades, la cual vendrá dada por:

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_{\delta\phi}}{M_{pl}} \right)^2 \Rightarrow \Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{H^2}{M_{pl}^2} \Big|_{\kappa=aH},$$

donde hemos hecho uso de la ecuación 3.20.

Si además ocupamos la aproximación de slow-roll, obtenemos

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{1}{12\pi^2} \frac{V^3}{M_{pl}^6 (V')^2}.$$

Nótese que el lado derecho depende de  $\kappa$ , sin embargo asumiendo que tanto  $H$  como  $\epsilon$  tengan una variación lenta en el tiempo, esperamos que el comportamiento del espectro de potencias de  $\mathcal{R}$  sea justo como una regla de potencias que va de la siguiente manera

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = A_s \left( \frac{k}{k^*} \right)^{n_s - 1},$$

donde  $A_s$  es la amplitud del espectro escalar, del cual se tiene el siguiente valor medido a  $k^* = 0.05 Mpc^{-1}$

$$A_s = (2.196 \pm 0.060) \times 10^{-9}.$$

Además se habrá notado que se introdujo la cantidad  $n_s$ , la cual codifica información sobre que tanto tenemos una desviación de la invariancia de escala de la función  $\Delta_{\mathcal{R}}^2$ . Podemos despejar y obtener una expresión para tal parámetro

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln \kappa},$$

si aplicamos regla de la cadena con respecto al número de  $e$ -folds y a primer orden en los parámetros de slow-roll, la cantidad  $n_s$  queda como

$$n_s - 1 \approx -6\epsilon + 2\eta, \quad (3.21)$$

para el cual se ha reportado el siguiente valor[4]

$$n_s = 0.968 \pm 0.006.$$

### Perturbaciones tensoriales

El mismo tratamiento que fue llevado para las perturbaciones escalares, puede reproducirse para los modos tensoriales para obtener una de las predicciones más notorias de Inflación: el espectro de ondas gravitacionales primordiales.

A grandes rasgos, este puede ser calculado a partir de considerar la siguiente métrica

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ d\tau^2 - \left( \delta_{ij} + 2\hat{E}_{ij} \right) d\hat{\xi}^i d\hat{\xi}^j \right],$$

insertar esta expresión en la acción de Einstein-Hilbert y expandir a segundo orden en los  $\hat{E}_{ij}$ , con lo que se obtendrán dos copias de la acción 3.19 y así podemos inferir que el espectro para los modos tensoriales

$$\Delta_t^2 \equiv 2 \left( \frac{2}{aM_{pl}} \right)^2 \Delta_f^2,$$

por tanto, la expresión final es

$$\Delta_t^2(\kappa) = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_{pl}^2} \Big|_{\kappa=aH}. \quad (3.22)$$

La dependencia en la escala del espectro tensorial, en analogía con el escalar, también está dado por una regla de potencias

$$\Delta_t^2(\kappa) \equiv A_t \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_t},$$

donde  $A_t$  es la amplitud tensorial y  $n_t$  el índice espectral tensorial. La amplitud tensorial suele estar normalizada respecto a la amplitud escalar, se define así la razón tensor-escalar

$$r \equiv \frac{A_t}{A_s}.$$

En términos de los parámetros de rodamiento lento

$$r = 16\epsilon,$$

Para esta cantidad únicamente contamos con la siguiente cota superior[4]

$$r < 0.17.$$

En base a los parámetros  $n_s$  y  $r$  es posible clasificar y calificar los diversos modelos inflacionarios. Entre los cuales se encuentran *Inflación nueva* [2], *Inflación híbrida* [16], cuyas versiones supersimétricas serán examinadas en el 4.

## Capítulo 4

# Modelos Inflacionarios supersimétricos

Como hemos revisado en los capítulos anteriores, inflación es un escenario bastante estudiado y aceptado que provee solución para algunos problemas de la cosmología estándar en el Universo temprano. Como hemos visto, inflación puede deberse a la energía potencial asociada a un campo escalar, el Inflatón. Tal potencial debe ser suficientemente plano para permitir que inflación dure lo suficiente. Pero la planitud del potencial puede ser destruida debido a correcciones radiativas. Por otro lado, el formalismo de supersimetría plantea una elegante solución para el problema de jerarquía del modelo estándar de partículas elementales. Pues la milagrosa cancelación de las correcciones radiativas protegiendo así la masa del Higgs. Además, su versión como simetría de norma, supergravedad, debería ser una teoría que nos permita estudiar la física del Universo temprano, pues al estudiar física de altas energías cerca de la escala de Planck debemos tomar en cuenta efectos gravitacionales. De todo lo anterior, es sensato considerar inflación en el contexto de supergravedad.

Sin embargo llevar a cabo inflación en una teoría supergravitacional no es trivial. Pues de la forma del potencial escalar

$$V = e^K \left[ D_{\Phi_i} W K_{ij}^* D_{\Phi_j} W^* - 3|W|^2 \right] + \sum_a \frac{g_a^2}{2} [\text{Re } f_a(\Phi_i)]^{-1} D_a^2,$$

es claro que para tener la energía positiva necesaria para inflación, al menos uno de los  $D_{\Phi_i} W$  debe ser distinto de cero. Dado que estos términos son los parámetros de orden de supersimetría resulta que inflación siempre va acompañado del rompimiento de esta. Este efecto se puede transmitir a cualquier campo escalar y darnos problemas. Pues si pensamos en un potencial de Kähler canónico, los términos cinéticos de los campos escalares son los usuales. De modo que el potencial escalar

asociado al término  $F$  tiene la siguiente forma

$$V_F = \exp\left(\sum_i |\Phi_i|^2 + \dots\right) \left\{ \left[ \frac{\partial W}{\partial \phi_i} + (\phi_j^* + \dots)W \right] \sum_{ij} (\delta_{ij} + \dots) \left[ \frac{\partial W^*}{\partial \phi_j} + (\phi_j + \dots)W^* \right] - 3|W|^2 \right\},$$

con lo cual

$$\eta = \frac{V''}{V} = 1 + \dots,$$

lo cual rompe la condición de slow roll y no permite que tengamos inflación.

Afortunadamente esta no es la última palabra, pues tenemos diversos modelos que logran evitar este problema. Estas propuestas se clasifican en dos grandes grupos: aquellos en los que domina la contribución propia del término  $F$  y aquellos donde lo hace la correspondiente al término  $D$ . A continuación se presentan a detalle algunos modelos y se discuten ventajas y desventajas.

#### 4.1. Inflación mediante término $F$

Como se observó en la sección previa, el principal problema al tomar en cuenta la contribución del término  $F$  es el factor exponencial  $e^K$ , pues provocaba que los términos de masa de los campos escalares se volvieran del orden del parámetro de Hubble. Una de las formas de evitar este problema es proponer un superpotencial  $W$  que sea lineal en el supercampo quirral  $\Phi$  cuya componente escalar sea identificada con el inflatón

$$W = \Phi f(\chi_i),$$

donde  $\chi_i$  son súpercampos quirrales distintos del inflatón y  $f$  una función holomorfa de los mismos. Notemos que aún si el potencial de Kähler es canónico

$$K = |\Phi|^2 + \sum_i |\chi_i|^2,$$

el potencial escalar tendrá la siguiente forma

$$\begin{aligned} V_F &= e^K \left[ |f|^2 (1 - |\Phi|^2 + |\Phi|^4) + |\Phi|^2 \left| \frac{\partial f}{\partial \chi_i} + \chi_i^* f \right|^2 \right] \\ &\approx \left| \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right|^2 \left( 1 + \frac{|\Phi|^4}{2} + |\chi|^2 \right) + |\Phi|^2 \left| \frac{\partial f}{\partial \chi_i} + \chi_i^* f \right|^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

De lo anterior es claro que no hay término de masa para el inflatón asociado con  $\left| \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right|^2$ . Pero si que lo hay debido a los campos  $\chi_i$ , sin embargo este valor es típicamente pequeño de modo que es posible evitar el problema  $\eta$ .

Con esto en mente podemos abordar modelos concretos de inflación mediante término  $F$ .

### 4.1.1. Inflación Nueva

Este modelo, propuesto por A. Linde en 1982 [2], fue el primero que seguía las condiciones de slow-roll descritas en el capítulo anterior. Como un modelo concreto que utiliza un potencial asociado a un término  $F$  tomaré el propuesto por F. Takahashi [17].

Este modelo viene determinado por el potencial de Kähler  $K$  y el superpotencial  $W$  que se muestran a continuación

$$K = |\Phi|^2 + \frac{k}{4}|\Phi|^4 + \dots \quad W = v^2\Phi - \frac{g}{n+1}\Phi^{n+1} + c, \quad (4.2)$$

donde  $\Phi$  es un supercampo quiral y asumiremos que  $g$ ,  $c$  y  $v$  son reales y positivos. A partir de estas dos funciones es posible calcular el potencial escalar asociado al término  $F$

$$V_F = e^K [D_\Phi W D_{\Phi^*} W^* - 3|W|^2],$$

con  $D_\Phi W = W_\Phi + K_\Phi W$ .

De la forma que tenemos para  $K$  y  $W$  obtenemos

$$|W|^2 = |\Phi|^2 \left| v^2 - \frac{g}{n+1}\Phi^n + c\Phi^{-1} \right|^2,$$

$$D_\Phi W = v^2(1 + |\Phi|^2) - g\Phi^n \left( 1 + \frac{1}{n+1}|\Phi|^2 \right) + \frac{k}{2} \left( 1 - \frac{g}{n+1}\Phi^n \right) |\Phi|^4 + c \left( 1 + \frac{k}{2}|\Phi|^2 \right) \Phi^*,$$

con lo cual el potencial escalar queda como

$$V \approx e^{|\Phi|^2 + \frac{k}{4}|\Phi|^4} \left[ \left| v^2(1 + |\Phi|^2) - g\Phi^n \left( 1 + \frac{1}{n+1}|\Phi|^2 \right) + \frac{k}{2} \left( 1 - \frac{g}{n+1}\Phi^n \right) |\Phi|^4 + c \left( 1 + \frac{k}{2}|\Phi|^2 \right) \Phi^* \right|^2 - 3|\Phi|^2 \left| v^2 - \frac{g}{n+1}\Phi^n + c\Phi^{-1} \right|^2 \right]. \quad (4.3)$$

Ahora para abordar la dinámica inflacionaria del modelo mediante la aproximación de slow-roll, se aproxima el potencial únicamente en términos del inflatón al cual identificamos como  $\phi \equiv \sqrt{2} \operatorname{Re} \Phi$ . De esto, tenemos que el potencial con el que trabajaremos tendrá la siguiente forma

$$V(\phi) = v^4 - 2\sqrt{2}cv^2\phi - \frac{k}{2}v^4\phi^2 - \frac{g}{2^{\frac{n}{2}-1}}v^2\phi^n + \frac{g^2}{2^n}\phi^{2n}.$$

Ahora podemos calcular los parámetros de slow roll  $\epsilon$  y  $\eta$ , tomando en cuenta que el término dominante del potencial es el que va como  $v^4$  y que la contribución de  $\phi^{2n}$  es despreciable durante inflación. Con estas consideraciones obtenemos

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left( 2\sqrt{2}cv^{-2} + k\phi + \frac{ng^2}{v^2 2^{\frac{n}{2}-1}} \phi^{(n-1)} \right)^2,$$

y

$$\eta = -k - g^2 \frac{n(n-1)}{v^2 2^{\frac{n-2}{2}}} \phi^{n-2}.$$

A partir de este punto consideraré  $n = 4$ . Dado que inflación termina si  $\epsilon \approx 1$ , podemos saber el valor  $\phi_f$  del campo en el cual inflación ha terminado

$$\phi_f = \frac{kv^2}{2g^2} \left( \frac{2}{27\sqrt{2}\frac{kv^2}{2g^2}(2cv^{-2}-1) + \left( \left( 27\sqrt{2}\frac{kv^2}{2g^2}(2cv^{-2}-1) \right)^2 - 4 \left( -\frac{3kv^2}{2g^2} \right)^3 \right)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \left( \frac{27\sqrt{2}\frac{kv^2}{2g^2}(2cv^{-2}-1) + \left( \left( 27\sqrt{2}\frac{kv^2}{2g^2}(2cv^{-2}-1) \right)^2 - 4 \left( -\frac{3kv^2}{2g^2} \right)^3 \right)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.4)$$

Por otro lado, el número de  $e$ -folds que provee este modelo es

$$N = \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} = \int_{\phi_m}^{\phi_i} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} + \int_{\phi_f}^{\phi_m} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} = - \int_{\phi_m}^{\phi_i} \frac{d\phi}{k\phi + 2\sqrt{2}cv^{-2}} - \int_{\phi_f}^{\phi_m} \frac{d\phi}{2g^2v^{-2}\phi^3} = - \frac{1}{k} \ln \left( \phi + \frac{2\sqrt{2}}{k}cv^{-2} \right) \Big|_{\phi_m}^{\phi_i} + \frac{v^2}{4g^2} \left( \frac{1}{\phi^4} \right) \Big|_{\phi_f}^{\phi_m}, \quad (4.5)$$

expresión de la cual nos valemos para obtener el valor del campo al inicio de inflación  $\phi_i$

$$\phi_i = \left( \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{v}{g} + \frac{2\sqrt{2}c}{k} \frac{1}{v^2} \right) \exp \left[ -k \left( N - \frac{v^2}{4g^2} \left( \frac{4g^4}{k^2v^4} - \frac{1}{\phi_f^4} \right) \right) \right] - \frac{2\sqrt{2}c}{k} \frac{1}{v^2}. \quad (4.6)$$

Este valor es sumamente importante, pues para hacer contacto con las observaciones debemos evaluar las cantidades  $n_s$  y  $r$  en este valor del campo. En este punto es importante mencionar que se realizaron algoritmos numéricos del tipo Monte Carlo en Mathematica 11 con el fin de obtener un rango de valores aceptables para cada parámetro libre de nuestro modelo. La función de dicho algoritmo consistió en barrer dominios motivados con argumentos físicos para cada parámetro y refinarlos seleccionando los valores que proporcionaran valores aceptables para  $n_s$  y  $r$ . Mediante ese algoritmo obtuvimos los siguientes dominios

- $k$ , el factor del término de orden 4 en  $K$ , toma valores entre 0.017 y 0.019;
- $c$ , el término constante que aparece en  $W$ , debe ser del orden de  $10^{-3}$  particularmente el modelo arroja buenos resultados para  $c = 0.004$ ;
- $g$ , una constante de acoplamiento presente en  $W$ , toma valores entre 0.003 y 0.004;
- $v$ , quien aporta la parte dominante en el potencial la cual interpretamos como el valor de la constante cosmológica, es de orden 1, pues toma valores entre 0.9 y 1.12.

Con los parámetros corriendo en su respectivo dominio encontramos valores que son congruentes con lo reportado por Planck y Bicep II, pues

- el índice espectral escalar  $n_s$ , está entre 0.962 y 0.965;
- la razón tensor a escalar  $r$ , es del orden de  $10^{-10}$ .

Es importante mencionar que al realizar la simulación se obtuvieron resultados consistentes con dominios idénticos para cada parámetro, exceptuando  $c$ , pero con valores de orden 100 para la constante cosmológica, lo cual está bastante alejado de la realidad. Sin embargo, se encontró un resultado a notar: si  $c = 0.004$  la constante cosmológica toma valores de orden 1, lo cual aún es grave pero es una diferencia de dos órdenes de magnitud con respecto al primer resultado. Además, al variar ligeramente el parámetro  $c$  alrededor del 0.004 se notó estabilidad para los valores de  $n_s$  y  $r$ , así como el mismo orden de magnitud para el parámetro  $v$ . Por tanto, se concluye que tenemos un modelo inflacionario exitoso estable bajo el ajuste fino sobre la constante cosmológica que se mencionó anteriormente.

#### 4.1.2. Inflación $F$ Híbrida

El objetivo de este modelo es obtener un potencial escalar que asemeje al propuesto por A. Linde en [16]. Ese modelo recibió el nombre de Inflación Híbrida debido a que involucra no solo un campo para producir y terminar Inflación, si no que el Inflatón se dedica de desarrollar inflación mientras que el campo de disparo es un campo auxiliar que provoca el término de la etapa inflacionaria del universo.

La versión supergravitacional con contribución relevante en el término  $V_F$  está basado en el modelo propuesto en [18] y viene dado por la función cinética de norma trivial y los siguientes potencial de Kähler y superpotencial

$$K = |S|^2 + |\Psi_+|^2 + |\Psi_-|^2, \quad W = \lambda S \Psi_+ \Psi_- - \mu^2 S,$$

donde  $S$ ,  $\Psi_+$  y  $\Psi_-$  son súpercampos quirales,  $\lambda$  una constante de acoplamiento y  $\mu$  un número real. Con estas cantidades, el potencial escalar correspondiente toma la siguiente forma

$$V = e^{|S|^2 + |\Psi_+|^2 + |\Psi_-|^2} \left[ (1 - |S|^2 + |S|^4) |\lambda \Psi_+ \Psi_- - \mu^2|^2 + |S|^2 \left[ |\lambda(1 + |\Psi_+|^2) \Psi_- - \mu^2 \Psi_+^*|^2 + |\lambda(1 + |\Psi_-|^2) \Psi_+ - \mu^2 \Psi_-^*|^2 \right] \right]. \quad (4.7)$$



Nótese que este potencial tiene un mínimo global supersimétrico en  $S = 0$  y  $\Psi_+ = \Psi_- = \frac{\mu}{\sqrt{k}}$ . Podemos realizar la identificación  $\sigma = \sqrt{2} \text{Re} S$ ,  $\sigma$  será el campo asociado al Inflatón. Con esto último, podemos escribir la matriz de masa para los campos  $\Psi_+$ ,  $\Psi_-$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^4)\sigma^2 & -\lambda\mu^2 \\ -\lambda\mu^2 & \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^4)\sigma^2 \end{pmatrix},$$

la cual tiene como eigenvalores

$$m_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^4)\sigma^2 \pm \lambda^2\mu^2.$$

Algo importante a notar es que la contribución del término  $D$  no es cero en este caso, pero si imponemos la condición  $\Psi_+ = \Psi_-^*$ , tenemos una dirección  $D$ -plana. Esta será la condición bajo la cual trabajaremos, pues además es la trayectoria relevante para nuestros fines.

Así, al imponer  $\Psi_+ = \Psi_-^* \equiv \Psi$ , nos queda el siguiente potencial

$$V = (\lambda|\Psi|^2 - \mu^2)^2 + \lambda^2\sigma^2|\Psi|^2 + \frac{1}{8}\mu^4\sigma^4,$$

el cual, para valores de  $\sigma > \frac{\sqrt{2}\mu}{\lambda}$  tiene mínimo en  $\Psi = 0$ .

Dado que el valor en el mínimo local es mayor a cero, entendemos que supersimetría está rota en nuestra teoría. Este rompimiento de simetría generaría una diferencia en las masas de las partículas pertenecientes a un mismo multiplete, en particular produce una diferencia en las masas de los campos  $\Psi_+$  y  $\Psi_-$  y sus supercompañeros. Esto induce correcciones radiativas al potencial escalar dadas por la formula encontrada por Coleman y Weinberg [29]

$$V_{1-loop} = \sum_n (-1)^{2s_n} (2s_n + 1) h(m_n^2), \quad h(z^2) = \frac{\mathcal{N}}{64\pi^2} z^2 \left[ \ln\left(\frac{z}{\Lambda^2}\right) + n \right].$$

Para el modelo que estamos trabajando esto toma la forma

$$V_{1-loop} = \frac{\mathcal{N}}{64\pi^2} \left[ \left( \frac{\lambda\sigma^2 + 2\mu^2}{2} \right)^2 \ln \frac{\lambda\sigma^2 + 2\mu^2}{2\Lambda^2} + \left( \frac{\lambda\sigma^2 - 2\mu^2}{2} \right)^2 \ln \frac{\lambda\sigma^2 - 2\mu^2}{2\Lambda^2} - 2 \left( \frac{\lambda\sigma^2}{2} \right)^2 \ln \frac{\lambda\sigma^2}{2\Lambda^2} \right], \quad (4.8)$$

donde  $\mathcal{N}$  es la dimensión de la representación de un grupo de norma oculto a la que pertenecen  $\Psi_+$  y  $\Psi_-$ .

Es de interés el límite  $\sigma_c \ll \sigma$ , pues para estos valores del campo el potencial es estable en este mínimo local. En este límite el potencial se ve como

$$V_{1-loop} = \frac{\lambda^2 \mathcal{N} \mu^4}{32\pi^2} \ln \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2\Lambda^2}.$$

Así, tenemos la expresión final para nuestro potencial efectivo

$$V_{eff} = \mu^4 \left( 1 + \frac{1}{8}\sigma^4 + \frac{\lambda^2 \mathcal{N}}{32\pi^2} \ln \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2\Lambda^2} \right),$$

de esta expresión nos valdremos de ahora en adelante para calcular los parámetros de rodamiento lento, el número de  $e$ -folds y finalmente el índice espectral escalar así como la razón tensor-escalar.

Ahora podemos proceder al cálculo de los parámetros de slow-roll, obteniendo las siguientes expresiones

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{V_\sigma}{V} \right)^2 \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^2 \mathcal{N}}{16\pi^2 \sigma} + \frac{1}{2}\sigma^3 \right)^2, \quad \eta = \frac{V_{\sigma\sigma}}{V} \approx -\frac{\lambda^2 \mathcal{N}}{16\pi^2 \sigma^2} + \frac{3}{2}\sigma^2, \quad (4.9)$$

de estas relaciones, tenemos que la etapa de inflación llegará a su fin cuando  $\sigma = \sigma_f$

$$\sigma_f = \frac{1}{2} \left[ \frac{4 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} c^3}{\left(9k^2 + \sqrt{3}\sqrt{-256c^3 + 27k^4}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(9k^2 + \sqrt{3}\sqrt{-256c^3 + 27k^4}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{2}{3}}} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left[ -\frac{4 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} c^3}{\left(9k^2 + \sqrt{3}\sqrt{-256c^3 + 27k^4}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\left(9k^2 + \sqrt{3}\sqrt{-256c^3 + 27k^4}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{2}{3}}} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2k}{\left( \frac{4 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} c^3}{\left(9k^2 + \sqrt{3}\sqrt{-256c^3 + 27k^4}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(9k^2 + \sqrt{3}\sqrt{-256c^3 + 27k^4}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.10)$$

donde

$$c = \frac{\lambda^2 \mathcal{N}}{8\pi^2} \quad y \quad k = 2\sqrt{2}.$$

Mediante dicho valor final del inflatón nos es posible calcular al valor inicial del campo en función de este  $\sigma_f$  y del número de  $e$ -folds  $N$

$$\sigma_i = \left( \frac{1}{\sigma_m} + \frac{8\pi^2}{\lambda^2 \mathcal{N}} (\sigma_m^2 - \sigma_f^2) - N \right)^{-2}.$$

Con lo cual podemos realizar el cálculo numérico, análogo a lo realizado en el modelo anterior, para obtener valores congruentes para  $n_s$  y  $r$  con los resultados reportados y así encontrar los dominios de los parámetros libres de nuestro modelo. Mediante este cálculo se encontró que

- $\lambda$ , la constante de acoplamiento del superpotencial, toma valores de orden  $10^{-1}$  entre 0.08 y 0.098;
- $\mathcal{N}$ , la dimensión de la representación de algún grupo de norma en el que se encuentran  $\Psi_+$  y  $\Psi_-$ , tomamos la representación **126** del grupo de norma  $SO(10)$ .

Vale la pena hacer notar que nos interesamos en el grupo  $SO(10)$  motivados por el modelo de gran unificación basado en este grupo de simetría [30], así como un modelo inflacionario que requiere dicho grupo de norma [31]. Se eligió la representación **126** entre las distintas representaciones posibles debido a que al ser de orden 100 vuelve comparable la contribución radiativa del potencial escalar con la supergravitacional, de otro modo para estudiar la dinámica inflacionaria bastaría con considerar la contribución  $\sigma^4$ .

Con estos valores, y fijando el número de  $e$ -folds entre 60 y 70, se obtuvieron

- $n_s$ , el índice espectral escalar, está entre 0.969 y 0.972;
- $r$ , la razón tensor-escalar, tiene como valor máximo 0.014.

Por tanto, nuestro modelo se adapta a los resultados observacionales y provee una descripción adecuada del universo, dándole también cierto valor a la simetría  $SO(10)$ .

Con este modelo se concluye la revisión de inflación mediante término  $F$  supergravitacional.

## 4.2. Inflación mediante término $D$

Ahora toca el turno de inflación mediante término  $D$ , dada la estructura del potencial escalar, cuando tomamos como contribución relevante la debida al término  $D$ , automáticamente descartamos el problema  $\eta$ , pues la parte que va como  $e^K$  no tiene relevancia en este escenario. A continuación se presentan un modelo concreto donde Inflación tiene lugar debido a la contribución  $D$  del potencial escalar.

### 4.2.1. Inflación $D$ Híbrida

El modelo presentado a continuación busca obtener un potencial con la forma propuesta por A. Linde [16] a partir de la contribución  $V_D$  del potencial escalar de una teoría supergravitacional, está basado en lo presentado por E. Haylo [19] y por P. Binetruy y G. Dvalí [20]. Dicho modelo viene dado por el siguiente superpotencial

$$W = \lambda S \phi_+ \phi_-, \quad (4.11)$$

y el siguiente potencial de Kähler

$$K = |S|^2 + |\phi_+|^2 + |\phi_-|^2, \quad (4.12)$$

donde  $\lambda$  es una constante de acoplamiento,  $S$ ,  $\phi_+$  y  $\phi_-$  son supercampos quirales, cargados ante una simetría de norma  $U(1)$  con cargas 0, +1 y -1 respectivamente. Por tanto el potencial escalar es

$$V = \lambda^2 e^{|\mathcal{S}|^2 + |\phi_+|^2 + |\phi_-|^2} \left[ |\phi_+ \phi_-|^2 + |\mathcal{S} \phi_+|^2 + |\mathcal{S} \phi_-|^2 + (|\mathcal{S}|^2 + |\phi_+|^2 + |\phi_-|^2 + 3) [|\mathcal{S}|^2 + |\phi_+|^2 + |\phi_-|^2]^2 \right] + \frac{g^2}{2} (|\phi_+|^2 - |\phi_-|^2 + \xi). \quad (4.13)$$

El cual tiene mínimo global supersimétrico en  $S = \phi_+ = 0$  y  $\phi_- = \sqrt{\xi}$ . Además, tiene un mínimo local no supersimétrico en  $\phi_+ = \phi_- = 0$ ,  $S$  arbitrario, con valor  $V(S, 0, 0) = \frac{g^2 \xi}{2} > 0$ . Si calculamos los términos de masa para  $\phi_+$  y  $\phi_-$  en la dirección del mínimo local, obtenemos

$$m_+^2 = \lambda^2 |\mathcal{S}|^2 e^{|\mathcal{S}|^2} + g^2 \xi \quad m_-^2 = \lambda^2 |\mathcal{S}|^2 e^{|\mathcal{S}|^2} - g^2 \xi,$$

notemos que  $m_+^2$  siempre toma valores no negativos, mientras que  $m_-^2$  puede ser negativo si  $|\mathcal{S}| \leq S_c = \frac{g}{\lambda} \sqrt{\xi}$ . Así que mientras  $|\mathcal{S}| > S_c$ , el mínimo local  $\phi_+ = \phi_- = 0$  es estable.

Ahora, como se menciono es un mínimo no supersimétrico con valor positivo  $\frac{g^2 \xi}{2}$ , esto inducirá una diferencia en las masas de los bosones  $\phi_+$ ,  $\phi_-$  y sus compañeros fermiones,  $\psi_+$  y  $\psi_-$  respectivamente. Este cambio en las masas induce correcciones radiativas al potencial efectivo en la dirección del mínimo, esta corrección viene dada por la formula encontrada por S. Coleman y E. Weinberg [29]

$$V_{1-loop} = \frac{1}{32\pi^2} \left[ (\lambda^2 |\mathcal{S}|^2 e^{|\mathcal{S}|^2} + g^2 \xi)^2 \ln \left( \frac{\lambda^2 |\mathcal{S}|^2 e^{|\mathcal{S}|^2} + g^2 \xi}{\Lambda^2} \right) + (\lambda^2 |\mathcal{S}|^2 e^{|\mathcal{S}|^2} - g^2 \xi)^2 \ln \left( \frac{\lambda^2 |\mathcal{S}|^2 e^{|\mathcal{S}|^2} - g^2 \xi}{\Lambda^2} \right) - 2(\lambda^2 |\mathcal{S}|^2 e^{|\mathcal{S}|^2})^2 \ln \left( \frac{\lambda^2 |\mathcal{S}|^2 e^{|\mathcal{S}|^2}}{\Lambda^2} \right) \right], \quad (4.14)$$

donde  $\Lambda$  representa la escala de corte, en este modelo la tomaremos como la escala a la que se da el rompimiento de supersimetría, pues por encima de esta escala supersimetría seguiría siendo una simetría buena y por tanto no tendríamos la diferencia en las masas de modo que este potencial sería cero y no tendría relevancia alguna.

En el límite  $S_c \ll |\mathcal{S}|$ , el potencial anterior toma la forma

$$V_{1-loop} = \frac{g^2 \xi^4}{16\pi^2} \ln \left( \frac{\lambda^2 |\mathcal{S}|^2 e^{|\mathcal{S}|^2}}{\Lambda^2} \right). \quad (4.15)$$

Por tanto la forma del potencial efectivo en la dirección impuesta por el mínimo local  $\phi_+ = \phi_- = 0$  es

$$V_{eff} = \frac{g^2 \xi^2}{2} \left[ 1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \left( \frac{\lambda^2 |\mathcal{S}|^2 e^{|\mathcal{S}|^2}}{\Lambda^2} \right) \right]. \quad (4.16)$$

Un aspecto peculiar de este modelo es que se parece mucho al potencial que podemos obtener si consideramos los mismos  $W$  y  $K$  pero calculamos la versión supersimétrica global del potencial escalar, cosa que no sucedía en el modelo híbrido a partir de término  $F$  donde la contribución supergravitacional era lo obtenido de la contribución local, una constante, más algo que va como el campo a la cuarta potencia.

Por otro lado, notemos que depende de la norma del campo  $S$  por lo que podemos trabajar, sin pérdida de generalidad, únicamente con la parte real del campo, digamos  $\sigma = \frac{\text{Re}S}{\sqrt{2}}$ . En términos de  $\sigma$  el potencial 4.16 queda como

$$V(\sigma) = \frac{g^2 \xi^2}{2} \left[ 1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \left( \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2\Lambda^2} \right) \right]. \quad (4.17)$$

A partir de 4.17 podemos calcular los parámetros de slow-roll  $\epsilon$  y  $\eta$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2 = \frac{g^4}{32\pi^4 \sigma^2} \left( 1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2\Lambda^2} \right)^{-2},$$

$$\eta = \frac{V_{\phi\phi}}{V} = -\frac{g^2}{4\pi^2 \sigma^2} \left( 1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2\Lambda^2} \right)^{-1}.$$

Estas expresiones difieren de las presentadas en [32] De lo cual podemos concluir que inflación termina cuando  $\sigma$  toma el siguiente valor

$$\sigma = \sigma_f = - \left( 1 - \frac{g^4}{32\pi^4} \left( 1 + \frac{g^2}{2\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2} \right)^{-2} - \frac{g^4}{16\pi^4} \left( 1 + \frac{g^2}{4\pi^2} + \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2} \right) \left( 1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2} \right)^{-3} \right)$$

$$\times \left( \frac{g^4}{16\pi^4} \left( 1 + \frac{g^2}{4\pi^2} + \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2} \right) \right)^{-1} \left( 1 + \frac{g^2}{2\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2} \right)^3, \quad (4.18)$$

pues  $\epsilon(\sigma_f) = 1$ .

Con este valor de  $\sigma$  podemos calcular el número de  $e$ -folds  $N$  provisto por nuestro modelo y de ahí obtener la expresión para el Inflatón al inicio de inflación

$$\sigma_i = 2N \left( \ln \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2} + \frac{8\pi^4}{g^2} - 3 \right)^{-1} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g^2}{2\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2} \right)$$

$$\times \left( 2^{-1} \left( 1 + \frac{g^2}{4\pi^2} + \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2} \right)^{-1} - \left( \frac{g^4}{16\pi^4} \left( 1 + \frac{g^2}{4\pi^2} + \frac{g^2}{8\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2} \right) \right)^{-1} \left( 1 + \frac{g^2}{2\pi^2} \ln \frac{\lambda^2}{2\Lambda^2} \right)^2 \right). \quad (4.19)$$

Al evaluar los parámetros de slow roll en  $\sigma = \sigma_i$  tendremos el valor de  $n_s$  y de  $r$  para hacer contacto con las observaciones y contrastar nuestro modelo. Para encontrar resultados congruentes

con los valores reportados por Bicep II y Planck, así como obtener un número de  $e$ -folds aceptable, entre 50 y 70, se realizó un algoritmo numérico que en esencia es igual al utilizado en los modelos de la sección anterior. Mediante este algoritmo se concluye que los parámetros libres del modelo deben tomar los siguientes valores

- $g$  la constante de acoplamiento asociada a la simetría  $U(1)$ , debe tomar valores en el  $[10^{-2}, 10^{-1}]$ ,
- $\lambda$  la constante de acoplamiento de los supercampos involucrados, debe tomar valores en el  $[10^{-4}, 10^{-1}]$ ,
- $\Lambda$  la escala de rompimiento de supersimetría, se toma en el  $[10^{12}eV, 10^{20}eV]$ .

Cabe mencionar que se ignoraron las cotas sobre los parámetros reportadas en [32], puesto que están basadas en cálculos realizados tomando en cuenta cuerdas cósmicas, tema sobre el cual hay aún demasiadas especulaciones.

Con estos dominios para los parámetros libres del modelo se obtuvieron los siguientes valores para las observables

- el índice espectral escalar  $n_s$ , toma valores entre 0.9623 y 0.9690;
- la razón tensor a escalar  $r$ , toma como valor máximo 0.0652.

Estos valores son totalmente compatibles con lo reportado experimentalmente, por tanto concluimos que es un buen modelo.



# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se llevó a cabo el desarrollo y estudio de las ideas básicas de supersimetría, su versión local conocida como supergravedad, y la cosmología inflacionaria. Con base en este estudio, planteamos el escenario de inflación en teorías con supergravedad, proveyendo un origen para el potencial del inflatón.

Discutimos particularmente el problema  $\eta$ , el principal problema con el que uno se encuentra al tratar de obtener inflación a través de un potencial escalar de supergravedad. Este problema surge de que el potencial escalar supergravitacional exhibe términos de masa adicionales para los campos escalares (en particular, para el inflatón) que provocan que no se cumplan las condiciones de rodamiento lento ( $\eta \geq 1$  para casi cualquier valor del campo inflacionario).

En este contexto, se persiguieron dos ideas: i) construir teorías cuyo superpotencial  $W$  sea lineal en el supercampo que contiene al inflatón como una solución para el problema  $\eta$  aún cuando la contribución debida al término  $F$  sea la que domine; ii) considerar únicamente la parte correspondiente al término  $D$  para evitar el problema. Siguiendo estas dos propuestas, se procedió a estudiar un par de modelos, uno basado en [17, 18], que sigue la primera, y otro basado en [19, 20], que sigue la segunda.

A pesar de que los modelos coinciden con los hallados en la literatura, su análisis en esta tesis difiere a lo presentado tanto en los artículos citados como en los artículos de revisión que se consultaron, particularmente en [32]. La principal diferencia es que en este trabajo imponemos el final de inflación a partir de la condición  $\epsilon = 1$ , contrario a lo presentado en la literatura donde únicamente les preocupa la condición  $|\eta| = 1$ . Aunque esta condición también es importante, sólo en los casos en los que ambas se satisfacen podemos considerar que se tienen las condiciones precisas para caracterizar el final de inflación.

Una vez habiendo obtenido el valor del inflatón al final de inflación, se utilizó esta expresión para obtener el valor del inflatón al inicio de inflación mediante el cálculo del número de  $e$ -folds provisto por cada modelo. Estos valores son cruciales para establecer el contacto con las cantidades medidas por las colaboraciones Planck y Bicep II, las cuales dependen de los parámetros  $\epsilon$  y  $\eta$  al inicio de la etapa inflacionaria. Mis resultados hasta este punto son analíticos, pero, para delimitar el espacio



de parámetros libres, desarrollé algoritmos numéricos tipo Monte Carlo realizados en Mathematica 11. Mediante las rutinas obtenidas, se realizó un “barrido” de los dominios físicamente válidos para cada parámetro, refinando los valores hasta identificar la forma en la que cada modelo produce valores de  $n_s$  y  $r$  compatibles con observaciones.

Con todo lo anterior en mente, se realizó primero el estudio del modelo correspondiente a la llamada *inflación nueva* [17], para el cual se obtuvieron los siguientes valores de los parámetros libres:

- $k$ , el factor del término de orden 4 en  $K$ , toma valores entre 0.017 y 0.019;
- $c$ , el término constante que aparece en  $W$ , debe ser del orden de  $10^{-3}$ ; particularmente el modelo arroja buenos resultados para  $c = 0.004$ ;
- $g$ , una constante de acoplamiento presente en  $W$ , toma valores entre 0.003 y 0.004;
- $v$ , quien aporta la parte dominante en el potencial la cual interpretamos como el valor de la constante cosmológica, es de orden 1, pues toma valores entre 0.9 y 1.12.

Con este dominio para cada parámetro, encontramos valores que son compatibles con las observaciones de Planck y Bicep II, pues

- el índice espectral escalar  $n_s$ , está entre 0.962 y 0.965;
- la razón tensor a escalar  $r$ , es del orden de  $10^{-10}$ .

Estos últimos resultados son muy sólidos frente a variaciones de los parámetros  $k$ ,  $c$  y  $g$ . Sin embargo, notamos que la constante cosmológica  $v$  varía por hasta ocho órdenes de magnitud al variar poco  $c$ . Es decir, mientras que  $n_s$  y  $r$  son estables ante perturbaciones de los parámetros del modelo, la constante cosmológica es susceptible a un *ajuste fino*. Esto no es una gran sorpresa (hubiera sido una grata sorpresa lo contrario), ya que esta es una manifestación del llamado *problema de la constante cosmológica*, que no buscamos resolver en esta tesis.

Habiendo finalizado este estudio, se procedió al análisis de un modelo de *inflación F híbrida* basado en [18], realizando cálculos análogos para este modelo. Encontramos que la versión supergravitacional del potencial tiene una contribución proporcional a  $\sigma^4$ , donde  $\sigma$  es el campo inflacionario. Además, la existencia campos en representaciones de norma (de un grupo de gran unificación) provoca que, tras el rompimiento de supersimetría, aparezca una contribución adicional en el potencial debida a correcciones radiativas, conocida como término de Coleman-Weinberg. Estas dos contribuciones se equilibran para llegar finalmente a un escenario inflacionario adecuado.

Tras un estudio detallado de estos aspectos, identificamos que los valores de los parámetros del modelo que conducen a resultados prometedores se encuentran en los siguientes dominios:

- $\lambda$ , la constante de acoplamiento del superpotencial, toma valores de orden  $10^{-1}$ , entre 0.08 y 0.098;

- $\mathcal{N}$ , la dimensión de la representación de algún grupo de norma (de gran unificación) al que pertenecen  $\Psi_+$  y  $\Psi_-$ ; en este caso, se asoció el campo a la representación **126** del grupo  $SO(10)$ .

Como un comentario importante sobre el parámetro  $\mathcal{N}$ , el grupo de norma  $SO(10)$  se eligió motivado por el modelo de gran unificación basado en este grupo de simetría [30], así como un modelo inflacionario que requiere dicho grupo de norma [31]. Además, se eligió la representación **126** debido a que al tener dimensión de orden 100 hace que la contribución radiativa tome importancia respecto a la supergravitacional.

Con estos valores y fijando el número de  $e$ -folds entre 60 y 70, se obtuvieron

- $n_s$  está entre 0.969 y 0.972;
- $r$  tiene como valor máximo 0.014.

Por lo tanto, este modelo se adapta a los resultados observacionales y provee una descripción adecuada del universo, dándole también cierta valía a la simetría  $SO(10)$ .

Para finalizar, se estudió un modelo basado en inflación mediante término  $D$ , es decir, un modelo en el cual la contribución  $F$ , de suma relevancia en los dos modelos anteriores, es despreciada para evitar de forma deliberada el problema  $\eta$ . Este modelo de *inflación  $D$  híbrida* está basado en los trabajos de P. Binétruy, G. Dvali y E. Haylo [19, 20].

Contrario a lo obtenido para el caso de inflación  $F$  híbrida, la contribución supergravitacional es una constante. Dominando así la contribución proveniente del potencial de Coleman-Weinberg, razón por la cual en este modelo tomamos  $\mathcal{N} = 1$ .

Para este modelo, ignorando las cotas sobre los parámetros, reportadas en [32], puesto que están basadas en suposiciones que aún no cuentan con un consenso general, y fijando el número de  $e$ -folds entre 50 y 70, se obtuvieron los resultados que se enuncian a continuación:

- $g$ , la constante de acoplamiento asociada a la simetría  $U(1)$ , debe tomar valores en el  $[10^{-2}, 10^{-1}]$ ;
- $\lambda$ , la constante de acoplamiento de los supercampos involucrados, debe tomar valores en el intervalo  $[10^{-4}, 10^{-1}]$ ;
- $\Lambda$ , la escala de rompimiento de supersimetría, se toma en el intervalo  $[10^{12}eV, 10^{20}eV]$ .

Con estos datos, se obtienen los siguientes valores para las observables

- $n_s$  toma valores entre 0.9623 y 0.9690;
- $r$  adopta como valor máximo 0.0652.

Nuevamente, obtenemos valores que son compatibles con lo reportado experimentalmente.

Más allá del estudio analítico de las propiedades de los modelos citados, la obtención de observables inflacionarias compatibles con las mediciones en modelos provenientes de supergravedad fue

el objetivo central de este trabajo. Dado que obtuvimos valores estables exitosos, incluso ignorando algunas suposiciones que consideramos poco adecuadas, es entusiastamente continuar con esta línea de investigación, buscando propuestas más sofisticadas, particularmente considerando observables que no discutimos en este trabajo sobre anisotropías de las fluctuaciones.

Como trabajo a futuro se tiene pensado explorar las ideas propuestas por A. van Proeyen en [21], donde se propone una nueva forma para la contribución  $D$ , así como las condiciones bajo las cuales se puede acoplar a materia y producir potenciales que nos lleven a modelos inflacionarios conocidos. Además, sería interesante estudiar la propuesta de *supergravedad liberada*, propuesta recientemente por A. Riotto [22], en la que se introduce una nueva interacción en teorías de supergravedad en las que el rompimiento de supersimetría ocurra mediante términos  $F$ . Esta nueva interacción induce modificaciones sobre el potencial escalar de la teoría. Sería interesante ver cómo podría llegar a modificar la dinámica de inflación, así como saber si existen condiciones bajo las cuales pueda considerarse como una contribución  $F$ ,  $D$  o del tipo  $KKLT$ ,  $KKLMT$ , etc.

# Bibliografía

- [1] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23** (1981), 347–356.
- [2] A. Linde, Physics Letters B **108** (1982), no. 6, 389 – 393.
- [3] D. Baumann, *Inflation*, in *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*, 2011, pp. 523–686.
- [4] Particle Data Group, C. Patrignani et al., Chin. Phys. **C40** (2016), no. 10, 100001.
- [5] S. Coleman and J. Mandula, Physical Review **159** (1967), no. 5, 1251.
- [6] Y. A. Gol’Fand and E. Likhtman, *Extension of the algebra of poincaré group generators and violation of  $p$ -invariance*, Supergravities in Diverse Dimensions: Commentary and Reprints (In 2 Volumes), World Scientific, 1989, pp. 20–23.
- [7] J. Wess and B. Zumino, Nuclear Physics B **70** (1974), no. 1, 39–50.
- [8] J. Wess and B. Zumino, Physics Letters B **49** (1974), no. 1, 52–54.
- [9] P. Ramond, Physical Review D **3** (1971), no. 10, 2415.
- [10] A. Neveu and J. H. Schwarz, Nuclear Physics B **31** (1971), no. 1, 86–112.
- [11] J.-L. Gervais and B. Sakita, Nuclear Physics B **34** (1971), no. 2, 632–639.
- [12] N. Craig and D. Green, Journal of High Energy Physics **2014** (2014), no. 7, 102.
- [13] F. Borzumati and K. Hagiwara, Journal of High Energy Physics **2011** (2011), no. 3, 103.
- [14] A. Dighe, D. Ghosh, K. M. Patel, and S. Raychaudhuri, International Journal of Modern Physics A **28** (2013), no. 26, 1350134.
- [15] D. Baumann and D. Green, Physical Review D **85** (2012), no. 10, 103520.
- [16] A. D. Linde, Phys. Rev. **D49** (1994), 748–754, [astro-ph/9307002].

- 
- [17] F. Takahashi, Phys. Lett. **B727** (2013), 21–26, [1308.4212].
- [18] A. D. Linde and A. Riotto, Phys. Rev. **D56** (1997), R1841–R1844, [hep-ph/9703209].
- [19] E. Halyo, Phys. Lett. **B387** (1996), 43–47, [hep-ph/9606423].
- [20] P. Binétruy and G. Dvali, Physics Letters B **388** (1996), no. 2, 241–246.
- [21] N. Cribiori, F. Farakos, M. Tournoy, and A. van Proeyen, JHEP **04** (2018), 032, [1712.08601].
- [22] F. Farakos, A. Kehagias, and A. Riotto, (2018), 1805.01877.
- [23] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry*, Cambridge University Press, 2013.
- [24] H. P. Nilles, Physics Reports **110** (1984), no. 1-2, 1–162.
- [25] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity*, Cambridge University Press, 2012.
- [26] P. Van Nieuwenhuizen, Physics Reports **68** (1981), no. 4, 189–398.
- [27] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [28] D. Fixsen, E. Cheng, J. Gales, J. C. Mather, R. Shafer, and E. Wright, The Astrophysical Journal **473** (1996), no. 2, 576.
- [29] S. Coleman and E. Weinberg, Physical Review D **7** (1973), no. 6, 1888.
- [30] T. Fukuyama, Int. J. Mod. Phys. **A28** (2013), 1330008, [1212.3407].
- [31] G. Esposito, G. Miele, and P. Santorelli, Phys. Rev. **D54** (1996), 1359–1368, [gr-qc/9512033].
- [32] M. Yamaguchi, Class. Quant. Grav. **28** (2011), 103001, [1101.2488].