



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

CARACTERIZACIÓN ESTADÍSTICA DE MERCADOS EUROPEOS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
MANUEL MIJAÍL MARTÍNEZ RAMOS

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. THOMAS HENRY SELIGMAN SCHURCH  
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:  
DR. FRANÇOIS ALAIN LEYVRAZ WALTZ - ICF UNAM  
DR. RUBEN YVAN MAARTEN FOSSION - ICN UNAM

MORELOS, JULIO DE 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Por el inmenso amor que tengo por mi madre, mi familia, mi perrita Chona y mi novia China bb de luz (espacial).

Gracias a mi asesor, quien me ayudó en todo momento y de manera incondicional, por creer en mí y ser solidario.

Muchas gracias al Dr. Hirdesh Pharasi por su orientación, paciencia y apoyo.

**Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IG100616 *Sistemas abiertos clásicos y cuánticos: análisis y modelaje*, y en el marco del Proyecto Fronteras 201 *Nuevas técnicas de análisis y modelación multivariados: Econofísica y otros sistemas complejos* del CONACyT. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.**



# Índice general

0.1. Motivación . . . . .	1
0.2. Objetivos . . . . .	3
<b>I Fundamentos teóricos</b>	<b>5</b>
<b>1. Los principales mercados financieros de Europa</b>	<b>7</b>
1.1. Los sistemas financieros . . . . .	7
1.2. Mercados e instrumentos financieros . . . . .	9
1.3. Crisis financieras . . . . .	9
<b>2. La Teoría de Matrices Aleatorias</b>	<b>11</b>
2.1. Bases probabilísticas . . . . .	11
2.2. Los ensembles clásicos de matrices aleatorias . . . . .	12
2.2.1. Preámbulos . . . . .	12
2.2.2. Forma asintótica para la densidad de niveles: la ley del semicírculo de Wigner . .	14
2.2.3. Repulsión entre niveles y la conjetura de Wigner . . . . .	15
2.3. Ensemble de Wishart-Laguerre . . . . .	17
2.3.1. Ensembles Gaussianos de Wishart-Laguerre . . . . .	17
2.3.2. Ley de Marchenko-Pastur . . . . .	18
2.3.3. Universalidad de las fluctuaciones . . . . .	18
2.3.4. Ensemble de Wishart correlacionado . . . . .	19
<b>3. Econofísica y Estadística Multivariada</b>	<b>21</b>

3.1. Series de tiempo financieras y hechos estilizados . . . . .	22
3.2. Matrices de covarianza y correlación . . . . .	25
3.2.1. Matriz de correlación empírica . . . . .	26
3.2.2. Espectro de la matriz de correlación y componentes principales . . . . .	26
3.2.3. Correlación entre acciones . . . . .	27
3.2.4. Espectro emergente de matrices de correlación singulares . . . . .	27
3.2.5. Momentos de la matriz de correlación . . . . .	28
3.2.6. Matrices de similitud . . . . .	29
<b>II Resultados</b>	<b>31</b>
<b>4. Metodología y resultados</b>	<b>33</b>
4.1. Características de los datos . . . . .	33
4.2. Preámbulos del análisis . . . . .	34
4.2.1. Alemania . . . . .	35
4.2.2. Francia . . . . .	41
4.2.3. Inglaterra . . . . .	44
4.3. Análisis comparativo . . . . .	57
4.3.1. Matrices de similitud para los índices STOXX Europe 600 y EuroSTOXX 50 .	57
4.3.2. Comparación entre Alemania, Francia e Inglaterra . . . . .	60
<b>5. Conclusión</b>	<b>71</b>
<b>A. Manejo de los datos</b>	<b>77</b>
A.1. Los países europeos con mayor participación bursátil . . . . .	77
A.2. STOXX TMI - Alemania . . . . .	78
A.3. STOXX TMI - Francia . . . . .	78
A.4. FTSE 350 - Inglaterra . . . . .	78
A.5. STOXX Europe 50 . . . . .	79
A.6. STOXX Europe 600 . . . . .	79

<b>B. Rutinas para el análisis de datos</b>	<b>87</b>
B.1. Funciones utilizadas . . . . .	87
B.1.1. Rutinas para descargar datos . . . . .	87
B.1.2. Rutinas de cálculo . . . . .	90
B.1.3. Rutinas de graficación . . . . .	93





# Prefacio

## 0.1. Motivación

Los mercados financieros constituyen un ejemplo de sistemas complejos, donde el comportamiento colectivo de agentes económicos en interacción genera una dinámica rica e impredecible. Cuando el número de partes en interacción (entre sí y con el ambiente) es grande, éstas se pueden auto-organizar y generar patrones o propiedades emergentes [44, 10, 31].

Debido a la no-linealidad de las interacciones individuales y la no-markovianidad del sistema por la memoria larga de los agentes, cualquier intento analítico de descripción o predicción es vano. Por otra parte, las Ciencias de la Complejidad ofrecen un punto de vista *estadístico* que puede explicar los eventos extremos, raros y súbitos que ocurren en escalas de tiempo del orden de días [49, Cáp. 9]. El ejemplo más común de este tipo de eventos extremos es el de *crisis financiera* (también llamado colapso o *crash*).

Desde el punto de vista de un físico, es natural plantearse las siguientes preguntas:

1. ¿Qué tipo de interacción genera una crisis?
2. ¿Se trata de algún tipo de transición de fase?
3. ¿Hay alguna manera precisa de cuantificar, predecir o describir una crisis?

En septiembre de 2008, en Estados Unidos, estalló una de las peores crisis financieras de la historia moderna por su alcance global [45]: algo que comenzó con una inestabilidad en las viviendas residenciales (40% de las cuales, en 2005, eran adquiridas como inversión o segunda vivienda) se extendió a la deuda de las tarjetas de crédito, créditos para automóviles y locales comerciales.

La clave de ésta crisis está en la existencia de una red de unos pocos actores financieros con una enorme influencia y poder de decisión [36], en los *productos financieros* (v.gr. las hipotecas *subprime*)<sup>1</sup>, su uso indiscriminado y la dificultad para calcular los riesgos involucrados al asumir el *modelo clásico financiero*<sup>2</sup> [26, pp. 51-54]. Dichos cálculos toman, entre otras, las siguientes hipótesis:

1. *Racionalidad de los agentes*: Los agentes (inversionistas) toman decisiones racionales basándose en la información pertinente disponible.

---

<sup>1</sup>Se trata de un abuso de la función manipulativa por encima de la cognitiva.

<sup>2</sup>Cuyas bases se encuentran en la teoría económica neoclásica de Léon Walras, Alfred Marshal y Carl Menger (s. XIX), entre otros.

2. *Homogeneidad*: Todos los agentes se parecen, en el sentido de situarse en el mismo horizonte temporal, disponer de la misma información y tener las mismas creencias.
3. *Continuidad*: Las métricas económicas (por ejemplo, los precios de bienes) son variables aleatorias continuas, de modo que es posible utilizar las herramientas del Análisis Matemático y la Teoría de la Probabilidad.
4. *Normalidad*: Dichas métricas económicas siguen distribuciones normales, o funciones simples de éstas (v.gr. log-normal).

Un colapso financiero ocurre porque el mercado, en este estado crítico, se vuelve inestable y altamente sensible a cualquier perturbación (lo que hace recordar a la susceptibilidad magnética  $\chi$ ) [44, 38]. La percepción de un mercado financiero como un sistema de muchos cuerpos puede aportar nuevas apreciaciones sobre la naturaleza de las crisis.

En el año de 1972, Robert M. May[32] propuso un modelo de interacción<sup>3</sup> (o conexión) entre  $n$  agentes de un sistema complejo caracterizados por ciertas funciones  $\{\rho_i = \rho_i(t)\}_{i=1}^n$ : de existir algún régimen de equilibrio (independiente del tiempo)  $\{\rho_i^*\}_{i=1}^n$ , las funciones:

$$x_i(t) := \rho_i(t) - \rho_i^*$$

deben satisfacer (tras fijar una escala de tiempo especial):

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i$$

de no existir interacciones. En el caso opuesto, May propone:

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \alpha \sum_{j=1}^n J_{ij} x_j \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (1)$$

donde  $\alpha > 0$  representa la magnitud promedio de las interacciones y  $J_{ij}$  es *algún tipo* de matriz aleatoria simétrica.

Si  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  es el espectro de  $\mathbf{J} = (J_{ij})$ , entonces la dinámica del sistema será estable si y sólo si se satisface la siguiente condición:

$$\alpha \lambda_i - 1 < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

o equivalentemente:

$$\lambda_{\text{máx}} := \max_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\} < \frac{1}{\alpha}. \quad (2)$$

---

<sup>3</sup>Surgido en el contexto de la Ecología, al investigar la interacción de  $n$  especies y sus poblaciones individuales como función del tiempo.

Dada la naturaleza aleatoria de  $\mathbf{J}$ , surge la pregunta: ¿cuál es la probabilidad de que se satisfaga 2? Una respuesta a ésto llevaría a conocer las condiciones de estabilidad del sistema:

$$\mathbb{P}_{estabilidad}(\alpha) \equiv \mathbb{P} \left[ \lambda_{\text{máx}} < \frac{1}{\alpha} \right]$$

Una posible relación con los estados críticos de los mercados financieros es la dada por las altas correlaciones entre distintas acciones en períodos de alta volatilidad (un hecho empírico bien documentado entre los *hechos estilizados*). La matriz completa de las correlaciones entre todos los pares de acciones de un mercado (o un subconjunto representativo del mismo) contiene un espectro que, en su mayoría, está predicho por la *Teoría de Matrices Aleatorias*. El valor propio máximo  $\lambda_{\text{máx}}$  (llamado *mercado*) es representante de la parte dominante de las correlaciones, y puede ser explicado por un *modelo de un factor*: Si  $\{r_i = \frac{P(t_{i+1}) - P(t_i)}{P(t_i)}\}_{i=1}^n$  es el conjunto de rendimientos de  $n$  acciones vistos como variables aleatorias, entonces el modelo [5]:

$$r_i = a_i + b_i \lambda_{\text{máx}} + e_i \quad (3)$$

(donde  $\mathbb{E}(e_i) = 0$ ,  $\mathbb{E}(e_i e_j) = 0$  ( $i \neq j$ ),  $e_i \perp f$ ) es muy preciso <sup>4</sup>.

## 0.2. Objetivos

La finalidad del presente trabajo es estudiar los mercados de valores europeos francés, inglés y alemán mediante matrices de correlación y series de tiempo. Más precisamente:

1. Tomar colecciones de *acciones* cotizadas en estos tres mercados y obtener sus precios de cierre en el período del año 2000 a finales del 2016.
2. Calcular los rendimientos diarios y, dividiendo el período de 17 años en *épocas* (de entre 10 y 25 días), estudiar las matrices empíricas de correlación y su evolución en el tiempo.
3. Mediante técnicas recientes de análisis de datos, surgidas de la *Teoría de Matrices Aleatorias*, la *Física de los Sistemas Complejos* y la *Estadística de Extremos*, estudiar las similitudes y diferencias de los tres mercados *vistos como sistemas dinámicos colectivos*.
4. Tratar de entender la relación entre los eventos críticos y la fuerte correlación (o anticorrelación) entre las series de tiempo financieras.

---

<sup>4</sup>K. Sigman. *Notes on Financial Engineering*: <http://www.columbia.edu/~ks20/FE-Notes/FE-Notes-Sigman.html> (Consultado el 2 de febrero de 2018).



## Parte I

# Fundamentos teóricos



# Capítulo 1

## Los principales mercados financieros de Europa

En este capítulo revisaremos los conceptos fundamentales de los mercados financieros, y mencionaremos brevemente la posible naturaleza de sus crisis.

### 1.1. Los sistemas financieros

Los sistemas económicos occidentales pasaron por cambios profundos en la edad media, cuando en los burgos fueron creados los sistemas financieros y la contabilidad para hacer más eficiente el comercio. El proceso de industrialización hizo necesaria la creación de los sistemas financieros: recaudar las reservas en una economía y destinarlas eficazmente a quienes las requirieran. Por supuesto, los recursos deben dirigirse a aquellos agentes económicos<sup>1</sup> que puedan *sacarles provecho*, es decir, que los destinen a una labor, proyecto o empresa que incremente su valor inicial<sup>2</sup> [37, Cáp. 1].

Específicamente, un sistema financiero es el conjunto de estructuras (intermediarios, mercados e instituciones financieras) que favorecen la transmisión de fondos de prestadores a prestatarios. El objetivo es canalizar los recursos excedentes de un sector a otro que los necesite [15, Cáp. 1]. Para lograrlo, el sistema financiero lleva a cabo las dos siguientes actividades principales:

1. *Reducir los costos de información y transacción imperfectos*: los prestadores pueden no tener el tiempo, la capacidad o los medios para evaluar quiénes son los mejores prestatarios o cuáles son los proyectos de inversión con mayor potencial, ni tener la capacidad para obligar a los prestatarios a utilizar los recursos conseguidos para los propósitos inicialmente acordados. Más aún, los costos operativos asociados, por ejemplo, al préstamo de recursos de distintas fuentes para financiar un mismo proyecto se puede reducir mediante el agrupamiento o aglomeración de capital (*pooling*). Los sistemas financieros apoyan en estas tareas, para poder destinar más recursos a la inversión e innovación;
2. *Facilitar el comercio, la diversificación y gestión de los riesgos*: Generalmente los proyectos más

---

<sup>1</sup>Generalmente divididos en tres sectores: gubernamental, empresarial y doméstico.

<sup>2</sup>Aunque esto es altamente cuestionable: financiamiento de guerras, trata de personas, la burbuja de los tulipanes y las hipotecas chatarra de EE.UU. son fines infames e inicuos.



riesgosos son los que generan mayores rendimientos. *Diversificar* la inversión es una manera en que los sistemas financieros promueven el financiamiento de proyectos innovadores reduciendo el riesgo. Otra manera es proveer *liquidez*, es decir, facilidad para que los agentes financieros conviertan activos en poder de compra. Por ejemplo, los *mercados de acciones* permiten disponer a los inversores de sus recursos sin que una empresa reduzca su capital.

La figura 1.1 esquematiza el funcionamiento de un mercado financiero: a la izquierda, los sectores que han ahorrado prestan fondos a los sectores de la derecha, que necesitan financiamiento. Éste flujo puede ocurrir de dos maneras:

1. **Financiación directa:** Los fondos son prestados via un *mercado financiero*. Un mercado financiero es un mercado donde los participantes emiten y cotizan valores;
2. **Financiación indirecta:** Los fondos son obtenidos de los ahorradores por un intermediario, y dados como crédito a los sectores con necesidad de financiamiento. Los intermediarios financieros son coaliciones de agentes que proveen servicios financieros, tales como bancos, compañías aseguradoras o financieras, fondos de inversión o jubilación, etc.

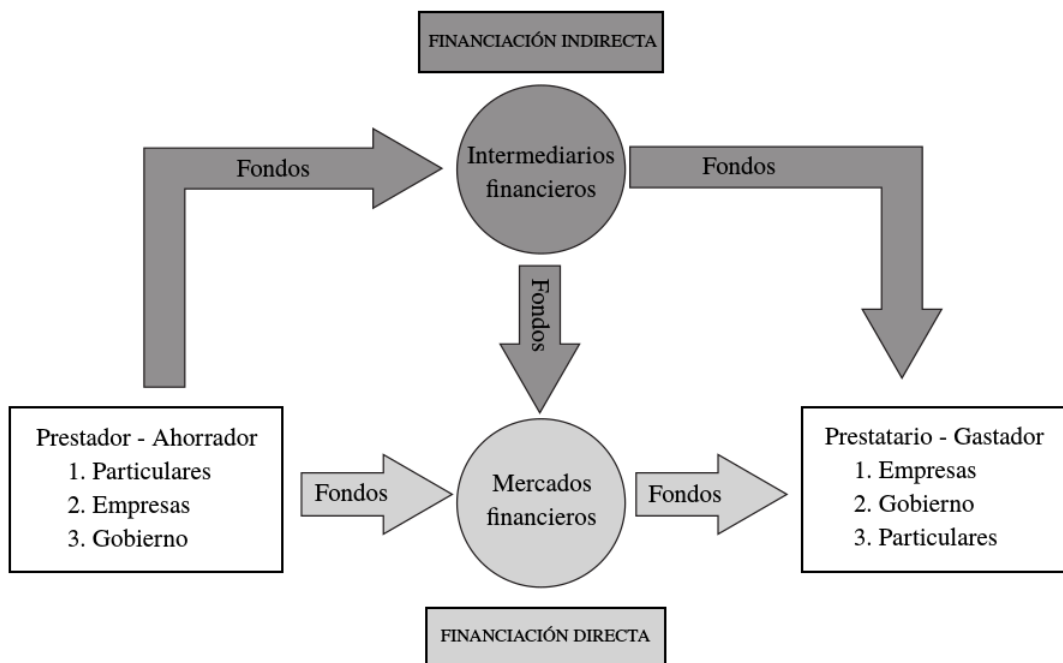


Figura 1.1: Funcionamiento del sistema financiero. Tomado de [15, p. 5].

El desarrollo y buen funcionamiento de los sistemas financieros de un país, que dirija los fondos a su uso más productivo, ayuda a la prosperidad de su economía. Esto se debe a que el sector financiero puede estimular la formación de capital e innovación tecnológica.

La mayoría de los mercados financieros europeos están *basados en la banca*, es decir, utilizan la financiación indirecta con los bancos como intermediarios. Éstos tienen que medir y gestionar los riesgos asociados a las inversiones, lo que les ha obligado a utilizar modelos matemáticos avanzados basados en métodos estadísticos y de teoría de la información [15, Cáp. 7,9].

## 1.2. Mercados e instrumentos financieros

Una *bolsa* o *mercado bursátil* es un lugar de reunión (físico o electrónico) de agentes (inversionistas, emprendedores, corredores, especuladores etc.) donde pueden llevar a cabo la compra o venta de instrumentos financieros. Algunos mercados bursátiles se localizan en ciudades específicas (Nueva York, Tokio, Londres, Fráncfort del Meno etc.), y otros están deslocalizados y son accesibles por todo el mundo [1, Cáps. 37,38].

Un *activo* es un bien económico que un individuo, corporación o país posee o controla, y del que espera un beneficio presente o futuro.<sup>3</sup> Se trata de un instrumento financiero que puede gastarse, comprarse o venderse, v.gr. acciones, divisas, efectivo, bienes inmuebles, metales preciosos, bonos etc. [6, p. 3]

Un *activo financiero* es un derecho sobre el ingreso o patrimonio de una compañía u organismo gubernamental, normalmente representado con un certificado, recibo, registro informático o algún otro documento legal creado por o relacionado con el préstamo de fondos (dinero). Una **acción** es un activo financiero emitido por la empresa que confiere derechos de propiedad a los inversionistas, llamados accionistas [37, pp. 10-13].

Los participantes del mercado bursátil acuerdan con este tipo de contratos beneficios mutuos y un cierto riesgo, asociado con los rendimientos e intereses que puedan generar: *las ganancias*. La *gestión de riesgos* es un enfoque estructurado cuyo propósito es identificar las fuentes de riesgo y diseñar estrategias para minimizarlo.

## 1.3. Crisis financieras

De acuerdo con George Soros [45] y Philippe Herlin [26], la complejidad para regular y supervisar los mercados financieros eficientemente se debe a las deficiencias del modelo financiero clásico en términos conceptuales, metódicos y analíticos. Un ejemplo claro de esto es la frecuente subestimación de los riesgos de ruina financiera<sup>4</sup>. Citando a Soros [45, p. 86]:

[La teoría económica clásica,] en su uso del concepto de equilibrio, imita a la física newtoniana. Pero en los mercados financieros, donde las expectativas juegan un papel importante, la idea de que los mercados tienden al equilibrio no corresponde con la realidad. La teoría de las expectativas racionales se ha afanado por crear un mundo artificial en que se mantenga el equilibrio, pero en ese mundo se pretende ajustar la realidad a la teoría en vez de al revés. [...] El equilibrio general y las expectativas racionales están muy lejos de la realidad. Proporcionan ejemplos de cómo un enfoque que produce que produce resultados válidos se sobreexplota y sobreextiende hasta el punto de que ya deja de ser válido.

Esto implica que las situaciones sociales se ven influidas por las afirmaciones que se hace de ellas. Creer que los mercados tienden al equilibrio favorece las políticas neoliberales en finanzas; así, los mercados no pueden predecir decaimientos en su actividad pero sí predecirlos: las burbujas llevan a crisis financieras, que a su vez llevan a la regulación de los mercados [45, pp. 115-118].

<sup>3</sup><https://www.investopedia.com/terms/a/asset.asp>

<sup>4</sup>El índice estadounidense Dow Jones *debía* variar más del 4.5% sólo 6 días en el período de 1916 a 2003 (asumiendo un proceso browniano geométrico de la forma  $S(t) = S_0 \exp(\sigma B(t) + \mu t)$ ); en realidad fueron 366 días [26, p. 56].



## Capítulo 2

# La Teoría de Matrices Aleatorias

En este capítulo abordaremos los tópicos básicos para el desarrollo de nuestra investigación. En particular, citaremos algunos resultados fundamentales de la *Teoría de Matrices Aleatorias* aplicados a la *Estadística Multivariada*<sup>1</sup>.

### 2.1. Bases probabilísticas

*Definición 2.1.1.* Dada una variable aleatoria  $X$ , la **función generadora de momentos** se define como:

$$M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) \quad (2.1)$$

siempre y cuando ésta exista en una vecindad de  $t = 0$ .

Se puede demostrar que:

$$\left. \frac{d^n}{dx^n} M_X(t) \right|_{t=0} \equiv \mu^{(n)} := \mathbb{E}[X^n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La importancia de esta función radica en que, bajo ciertas condiciones, determina unívocamente la distribución de una variable aleatoria:

*Teorema 2.1.1.* Dadas dos variables aleatorias  $X, Y$  con funciones de distribución<sup>2</sup>  $F_X(x), F_Y(y)$  con momentos de cualquier orden finitos:

1. Si  $X, Y$  tienen soporte<sup>3</sup> acotado, entonces  $F_X(u) = F_Y(u) \forall u$  si y sólo si  $\mathbb{E}[X^r] = \mathbb{E}[Y^r] \forall r \in \mathbb{N}$ .
2. Si las funciones generadoras de momentos existen y  $M_X(t) = M_Y(t)$  para una vecindad de  $t = 0$ , entonces  $F_X(u) = F_Y(u) \forall u$ .

*Ejemplo 2.1.1.* Se puede demostrar que:

---

<sup>1</sup>Mejor conocida como RMT, del inglés *Random Matrix Theory*.

<sup>2</sup> $F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x]$  es la *función de distribución (acumulativa)* de la variable aleatoria  $X$ .

<sup>3</sup>El soporte de una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es el conjunto  $A = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ .

- Si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ <sup>4</sup>, entonces  $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
- $M_{aX+Y}(t) = M_X(at) \cdot M_Y(t)$  si  $X \perp Y$ <sup>5</sup>.

Como corolario de lo anterior, si  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$  y  $X \perp Y$ , entonces  $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ .

## 2.2. Los ensembles clásicos de matrices aleatorias

### 2.2.1. Preámbulos

Wishart fue quien introdujo las matrices aleatorias en 1920, dentro del contexto de la estadística multivariada. En 1935, Cartan las estudió en el contexto de la teoría de grupos en su publicación *La Théorie des groupes continus et des espaces généralisés*<sup>6</sup>. Wigner fue quien las aplicó por primera vez en la física en 1951, para obtener información sobre las resonancias nucleares y sus fluctuaciones:

*The assumption is that the Hamiltonian which governs the behavior of a complicated system is a random symmetric matrix with no particular properties except for its symmetric nature. [27, p. 1]*

Sea  $\mathbb{K}$  un campo<sup>7</sup> y  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N > 0$ . Además, considérense el conjunto de matrices cuadradas  $\text{Mat}(N, \mathbb{K})$  y un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  arbitrario.

**Definición 2.2.1.** Una **matriz aleatoria** [3, p. 2]  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(N)$  es una función medible:

$$\mathcal{M} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\text{Mat}(N, \mathbb{K}), \mathcal{B}, \mu) \quad (2.2)$$

donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel y  $\mu$  la medida de Lebesgue. Cualquier familia  $\mathfrak{M}(N) = \{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$  de matrices aleatorias independientes e idénticamente distribuidas es llamada **ensemble**.

En 1951, Wigner propuso aproximar el hamiltoniano de nucleos atómicos altamente excitados por matrices aleatorias de dimensiones grandes, en lugar de considerar la enorme cantidad de complejas interacciones hadrónicas [25]. Por eso, si  $\hat{H} \in \text{End}(\mathcal{H}) \simeq \text{Mat}(N, \mathbb{C})$  es el Hamiltoniano asociado a un sistema físico con espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , entonces:

$$\mathcal{W} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \text{Her}(N, \mathbb{C})$$

<sup>8</sup> modela las **matrices de Wigner** [33].

Adicionalmente, Wigner imponía restricciones sobre dichas matrices de carácter físico (además de la hermiticidad requerida en Mecánica Cuántica): entradas reales (en caso de que el sistema sea invariante bajo inversión temporal), etc. La manera de formalizar esto es la siguiente [27, 16]:

<sup>4</sup>Cuya densidad está dada por  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

<sup>5</sup>Donde  $\perp$  denota independencia entre variables aleatorias.

<sup>6</sup>Élie-Joseph Cartan en la *Encyclopaedia Britannica*: <https://www.britannica.com/biography/Elie-Joseph-Cartan>

<sup>7</sup>Para nuestros propósitos,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ .

<sup>8</sup>Donde  $\text{Her}(N, \mathbb{C}) = \{\hat{H} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C}) : \hat{H} = \hat{H}^\dagger\}$ .

**Definición 2.2.2.** Si  $A \in \text{Mat}(N, \mathbb{K})$  y  $P \in \text{GL}(N, \mathbb{K})$ <sup>9</sup>, la función  $A \mapsto P^{-1}AP$  es llamada **transformación de similaridad o conjugación** bajo  $P$ .

**Definición 2.2.3.** Si  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es un espacio de probabilidad y  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  es medible, entonces  $T$  **preserva la medida**  $\mathbb{P}$  si:

$$\mathbb{P}(T^{-1}(B)) = \mathbb{P}(B) \quad \forall B \in \mathcal{F}$$

Nótese que si  $\mathcal{M} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\text{Mat}(N, \mathbb{K}), \mathcal{B}, \mu)$  es una matriz aleatoria, entonces la función

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &:= \mathcal{M}_* \mathbb{P} : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}(\mathcal{M}^{-1}(B)) \end{aligned}$$

hace de la terna  $(\text{Mat}(N, \mathbb{K}), \mathcal{B}, \tilde{\mu})$  un espacio de probabilidad. Los *ensembles clásicos de matrices* surgen al considerar ensembles de matrices aleatorias con medida de probabilidad  $\tilde{\mu}$  preservada bajo la acción de cierto grupo.

Es necesario recordar algunos subgrupos importantes de  $\text{GL}(N, \mathbb{K})$ :

- $O(N) := \{S \in \text{GL}(N, \mathbb{R}) : S^t = S^{-1}\}$  (Grupo ortogonal de orden  $N$ ).
- $U(N) := \{S \in \text{GL}(N, \mathbb{C}) : S^\dagger = S^{-1}\}$  (Grupo unitario de orden  $N$ ).
- $\text{USp}(2N') := \{S \in \text{U}(2N') : S^t \Omega S = \Omega\}$ , donde  $N' \in \mathbb{N}$  y  $\Omega := \begin{pmatrix} 0 & I_{N'} \\ -I_{N'} & 0 \end{pmatrix}$ .<sup>10</sup> (Grupo simpléctico de orden  $2N'$ ).

**Definición 2.2.4.** Dado un subgrupo  $G \leq \text{GL}(N, \mathbb{K})$ , un **ensemble  $G$ -invariante** es un ensemble de matrices aleatorias  $\mathfrak{M}_G(N) = \{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$  donde  $A$  preserva la medida<sup>11</sup>  $\tilde{\mu} \forall A \in G$ .

Los **ensembles clásicos de matrices aleatorias** son<sup>12</sup>:

1.  $\text{GOE}(N)$  - el ensemble de *todas* las matrices de Wigner  $O(N)$ -invariantes.
2.  $\text{GUE}(N)$  - el ensemble de *todas* las matrices de Wigner  $U(N)$ -invariantes.
3.  $\text{GSE}(2N')$  - el ensemble de *todas* las matrices de Wigner  $\text{USp}(2N')$ -invariantes.

En [33] se demuestra que los hamiltonianos  $\hat{H}$  de sistemas físicos con simetrías rotacionales y de inversión temporal se corresponden precisamente con los ensembles clásicos:

1.  $\text{GOE}(N)$  - Simetría rotacional y temporal.
2.  $\text{GUE}(N)$  - Simetría rotacional.
3.  $\text{GSE}(N)$  - Simetría temporal.

<sup>9</sup>Visto como grupo bajo el producto cotidiano de matrices.

<sup>10</sup> $I_n$  es la matriz identidad de  $n \times n$ .

<sup>11</sup>Común para cada  $i \in I$ .

<sup>12</sup> $\text{GOE}$ =Gaussian Orthogonal Ensemble,  $\text{GUE}$ =Gaussian Unitary Ensemble,  $\text{GSE}$ =Gaussian Symplectic Ensemble.

De acuerdo con el teorema de Radon-Nikodým (1930) [24, p. 132], dado un ensemble de matrices  $\mathfrak{M}_{\mathbb{G}}(N)$  es posible dar una *única*<sup>13</sup> función  $f : \text{Mat}(N, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$  (la *densidad de probabilidad del ensemble*) tal que:

$$\tilde{\mu}(B) = \int_B f \, d\mu \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad (2.3)$$

En [33, pp. 43-47] se demuestra que la forma explícita de  $f$  para los ensembles clásicos está dada por la **medida Gaussiana**:

$$f(\hat{H}) = \exp \left[ -a \text{tr}(\hat{H}^2) + b \text{tr}(\hat{H}) + c \right] \quad (2.4)$$

donde  $a > 0$  y  $b, c \in \mathbb{R}$ .

Si  $A$  es una matriz de cualquiera de los ensembles clásicos de orden  $N$ , y  $\lambda_1(a) \leq \dots \leq \lambda_N =: \lambda_{max}$  sus valores propios ordenados de manera ascendente, entonces se puede demostrar [43, p. 770] que éstos tienen la siguiente densidad conjunta:

$$\varphi_{\beta, N}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = C_{N, \beta} \prod_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - x_j|^\beta \prod_{i=1}^N e^{-\beta x_i^2 / 2} \quad (2.5)$$

donde  $C_{N, \beta}$  es una constante de normalización y  $\beta \in \{1, 2, 4\}$  es llamado el *índice de Dyson*.<sup>14</sup>

### 2.2.2. Forma asintótica para la densidad de niveles: la ley del semicírculo de Wigner

Para cualquier ensemble de matrices  $\mathfrak{M}(N)$  cuyas entradas tienen varianza finita, y las no diagonales una varianza común  $\sigma^2$  (en particular para los ensembles  $\text{GOE}(N)$ ,  $\text{GUE}(N)$ ,  $\text{GSE}(N)$ ), la densidad de valores propios  $\rho(x, \sigma^2)$ <sup>15</sup> de la matriz  $\hat{H}/\sqrt{N}$  en el límite  $N \gg 1$  está dada por la *ley del semicírculo de Wigner*:

$$\rho(x, \sigma^2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} \mathbf{1}_{\{|x| < 2\sigma\}} \quad (2.6)$$

Dicho de otro modo, si  $S = S_{(\alpha, \beta)}(\hat{H}, N)$  es el número de valores propios de  $\hat{H}$  (de  $N \times N$ ) que hay en el intervalo  $(\alpha N^{1/2}, \beta N^{1/2})$ , con  $\alpha < \beta$ , entonces:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(S)}{N} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} \mathbf{1}_{\{|x| < 2\sigma\}} \, dx \quad (2.7)$$

<sup>13</sup>Módulo un conjunto de medida cero.

<sup>14</sup>Que corresponde, respectivamente, a los ensembles  $\text{GOE}(N)$ ,  $\text{GUE}(N)$ ,  $\text{GSE}(N)$ .

<sup>15</sup>Es decir, el número de eigenvalores entre  $x$  y  $x + dx$ .

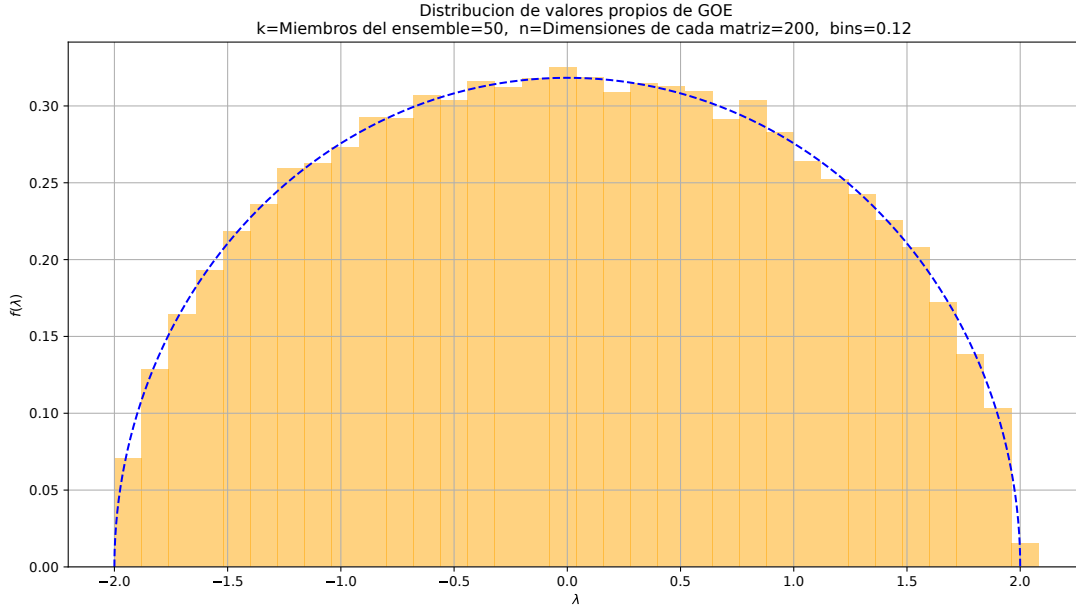


Figura 2.1: Histograma de los valores propios de un ensemble de 50 matrices aleatorias del GOE(100).

### 2.2.3. Repulsión entre niveles y la conjetura de Wigner

Considérese el ensemble GOE(2); se puede demostrar que la matriz Hamiltoniana tiene la forma:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 & X_3 \\ X_3 & X_1 - X_2 \end{pmatrix}$$

donde  $X_i \perp X_j$  si  $i \neq j$ , y  $X_i \sim N(0, \sigma^2)$ . Si  $\lambda_1, \lambda_2$  son los valores propios de  $\hat{H}$ , éstos satisfacen:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(\hat{H}) = X_1^2 - X_2^2 - X_3^2,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(\hat{H}) = 2X_1$$

De modo que al definir  $S^2 := (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = (2X_2)^2 + (2X_3)^2$ , notar que  $2X_2, 2X_3 \sim N(0, 4\sigma^2)$  con densidad conjunta  $P(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(4\sigma^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(4\sigma^2)}}$  (por el ejemplo 2.1.1), y definir el cambio de variable  $(S, \phi) \mapsto (x_1 = S \cos(\phi), x_2 = S \sin(\phi))$  para  $0 \leq S, 0 \leq \phi < 2\pi$ , se tiene:

$$P(x_2, x_3) dx_1 dx_2 = P(S(x_1, x_2), \phi(x_1, x_2)) \left| \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(S, \phi)} \right| dS d\phi = \frac{1}{(2\pi)(4\sigma^2)} \exp\left[-\frac{s^2}{8\sigma^2}\right] dS d\phi$$

Al integrar la ecuación anterior sobre  $\phi$  se concluye que  $S$  se distribuye según la densidad:

$$p(s) = \frac{s}{4\sigma^2} \exp\left[-\frac{s^2}{8\sigma^2}\right] \quad (2.8)$$





Figura 2.2: Histograma de la separación entre niveles para un ensemble de 1000 matrices GOE(500).

El espectro de las matrices propuestas por Wigner debía coincidir con las resonancias nucleares<sup>16</sup> observadas experimentalmente; en particular, la distribución probabilística de la separación normalizada<sup>17</sup> entre niveles sucesivos<sup>18</sup> debía coincidir con las brechas energéticas [33]. El caso deducido arriba sirvió a Wigner para conjeturar que, dada una matriz  $M \in \text{GOE}(N)$  con espectro  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  ordenado de manera ascendente, la densidad de probabilidad  $p = p(s)$  del espaciamiento normalizado  $s$  entre valores propios consecutivos sigue la misma ley que en el caso  $N = 2$  [33, p. 19]:

$$p(s) = As \exp(-Bs^2) \quad (2.9)$$

que indica que *la probabilidad de encontrar valores propios cercanos es nula, o bien, que hay repulsión entre niveles.*

Usando la fórmula 2.5 para  $N = 2$ , es posible dar la forma para la densidad de probabilidad del espaciamiento entre vecinos para los ensembles gaussianos [27, pp. 16-20]:

$$p_\beta(s) = A_\beta s^\beta \exp(-B_\beta s^2) \quad (2.10)$$

donde  $A_\beta, B_\beta$  son constantes y  $\beta$  el índice de Dyson mencionado anteriormente.

<sup>16</sup>Núcleos con el mismo espín y paridad.

<sup>17</sup> $s = S/D$ , donde  $D$  es la separación promedio entre niveles sucesivos dentro de un rango energético  $\Delta E$  con un número grande de niveles.

<sup>18</sup>Conocida en la literatura de física nuclear como *spacing distribution*.

## 2.3. Ensemble de Wishart-Laguerre

**Definición 2.3.1.** El **Ensemble de Wishart-Laguerre de orden  $N$**  es el ensemble de matrices aleatorias  $\mathcal{W}(N) = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$  tales que  $\forall \alpha$ :

$$W_\alpha : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \{S \in \text{Mat}(N, \mathbb{K}) : S = XX^t, X \in \text{Mat}(N \times K, \mathbb{K}), 0 < K \in \mathbb{N}\}$$

donde  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . En este trabajo consideraremos sólo el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Una diferencia importante entre los ensembles clásicos de matrices y el de de Wishart-Laguerre es que, en general, éste no es invariante<sup>19</sup>.

### 2.3.1. Ensembles Gaussianos de Wishart-Laguerre

De manera semejante a los ensembles gaussianos, es posible estudiar sub familias del ensemble de Wishart-Laguerre que sean invariantes bajo los grupos  $O(N)$ ,  $U(N)$  o  $\text{Sp}(2N')$ :  $\text{WOE}(N)$ ,  $\text{WUE}(N)$  y  $\text{WSE}(2N')$ <sup>20</sup>. Éstos comparten con los ensembles gaussianos la *universalidad de fluctuaciones espectrales* (en términos del espaciamiento promedio) cuando las dimensiones de las matrices tienden a infinito; esto es, la densidad de probabilidad de las entradas de las matrices son irrelevantes al tratar las fluctuaciones espectrales.

Una forma de caracterizar estos ensembles es mediante la distribución de las entradas de cada matriz: si, por ejemplo,  $S = XX^t \in \text{GOE}(N)$  con  $X = (x_{ij}) \in \text{Mat}(N \times K, \mathbb{R})$ ,  $0 < K \in \mathbb{N}$ , entonces:

$$x_{ij} \perp x_{kl} \sim N(0, 1) \quad \forall (i, j) \neq (k, l) \quad (2.11)$$

La densidad conjunta de valores propios resulta, en este caso [29, p. 12]:

$$\psi_{N,\beta}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = B_{N,\beta}(\gamma_0) \left( \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\gamma_0\beta/2} \right) \Delta_{N,\beta}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) e^{-\frac{N\beta}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i} \quad (2.12)$$

donde:

$$\Delta_{N,\beta}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) := \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j)$$

es un determinante de Vandermonde,  $\gamma_0 := (1 + K - N) - 2/\beta$  y  $B_{N,\beta}(\gamma_0)$  es una constante de normalización.

<sup>19</sup>En el sentido anteriormente descrito de preservar la medida de probabilidad.

<sup>20</sup>También suele usarse la notación, por ejemplo,  $\text{chGOE}(N)$ , del inglés *Chiral Gaussian Orthogonal Ensemble*.

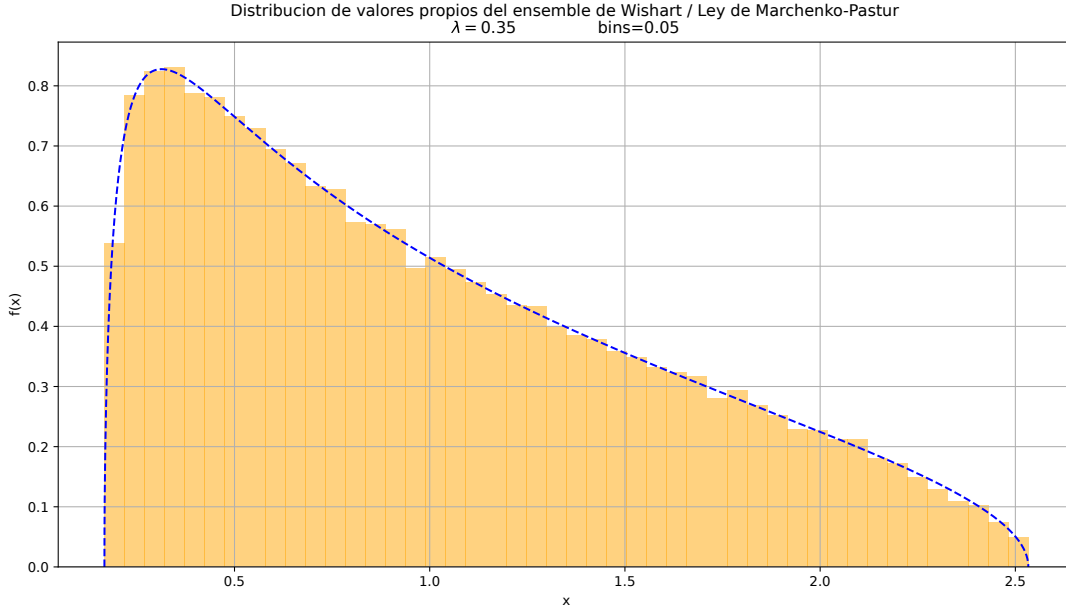


Figura 2.3: Histograma de los valores propios de un ensemble de 200 matrices de Wishart de  $105 \times 105$ , cuando  $N/K = 105/300 = 0,35 = \lambda$ . La curva punteada es la ley de Marchenko-Pastur (ecuación 2.13).

### 2.3.2. Ley de Marchenko-Pastur

La distribución de valores propios de una matriz de Wishart-Laguerre  $\mathbf{S}$  cuando  $N, K \gg 1$ , pero  $N/K \sim \lambda \in \mathbb{R}^{+21}$ , tiene como función de densidad la *ley de Marchenko-Pastur*<sup>22</sup>, dada por:

$$f_{\lambda}(x) = \frac{1}{2\pi x \lambda \sigma^2} \sqrt{(\lambda_+ - x)(x - \lambda_-)} \mathbf{1}_{[\lambda_-, \lambda_+]} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \delta(x) \mathbf{1}_{\{\lambda \geq 1\}} \quad (2.13)$$

donde:

$$\lambda_{\pm} := \sigma^2(1 \pm \sqrt{\lambda})^2$$

La degeneración en  $x = 0$  que surge cuando  $\lambda \geq 1$  se debe a que  $N \geq K$  implica un total de  $N - K$  valores propios nulos de la matriz  $\mathbf{S}$ .

### 2.3.3. Universalidad de las fluctuaciones

Uno de los resultados más importantes en RMT es aquel relacionado con las *fluctuaciones espectrales* [47]: dado el índice de Dyson  $\beta$ , si las fluctuaciones espectrales se normalizan en términos del espaciamiento promedio (recordar el ejemplo 2.8), entonces los ensembles de Wishart-Laguerre y Gaussianos coinciden para matrices de dimensiones suficientemente grandes. Dicho de otro modo, las

<sup>21</sup>A veces se utiliza  $\kappa := K/N$ , el número de columnas dividido entre el número de renglones.

<sup>22</sup>En el sentido de convergencia en probabilidad para dicho límite.

densidades conjuntas 2.5 y 2.12 producen las mismas fluctuaciones espectrales normalizadas para matrices suficientemente grandes.

### 2.3.4. Ensemble de Wishart correlacionado

Las primeras matrices aleatorias fueron estudiadas en la estadística multivariada (precisamente las matrices de Wishart), pues representan un modelo de hipótesis nula para las correlaciones entre  $M$  muestras de un conjunto de  $N$  variables aleatorias estadísticamente independientes (o bien, entre series de tiempo estacionarias) acomodadas en una matriz  $A$ .

Sin embargo, las entradas de la matriz  $A$  pueden tener correlaciones entre columnas, renglones o ambos. En estos casos dejan de ser válidos varios teoremas de universalidad, como los relacionados con las fluctuaciones del espectro. El estudio de series de tiempo de sistemas complejos confirma este tipo de desviaciones.

En [47] se estudia la densidad de niveles asociada a matrices de Wishart de la forma:

$$S = XX^t, X = \xi^{1/2}Y \in \text{Mat}(N \times K, \mathbb{R}), 0 < \xi \in \text{Mat}(N, \mathbb{R}) \quad (2.14)$$

invariantes bajo el grupo  $O(N)$ , donde  $\xi$  es una matriz simétrica positiva definida que describe las correlaciones entre los renglones de  $X$ . La fórmula correspondiente para la distribución de valores propios (que generaliza la ley de Marchenko-Pastur cuando  $\xi_{jk} = \delta_{jk}$ ) es [48, 47]:

$$\rho(x) = \frac{G(x \mp i\epsilon) - G(x \pm i\epsilon)}{2\pi i}$$

$$G^*(z) = \mathbb{E} \left[ \left( z - \lambda\sigma^2 \left( \frac{1}{\lambda} - 1 + zG^*(z) \right) \xi \right)^{-1} \right]$$

donde  $\lambda$  es como en la ecuación 2.13.

Pese a no ser una fórmula cerrada, es posible encontrar (a segundo orden en  $1/N$ ) una expresión para  $\rho$  en el caso de *correlaciones constantes* [47, Sec. IV]:

$$\xi_{jk} := \delta_{jk} + c(1 - \delta_{jk}), \quad -1 \leq c \leq 1$$

En dicho caso resulta:

$$\rho(x) = \rho_0(x) + \frac{1}{N} \delta \left( x - \frac{\lambda\sigma^2(Nc + 1 - c)(\frac{Nc}{\lambda} + 1 - c)}{Nc} \right) \mathbf{1}_{\{c \geq \frac{\sqrt{\lambda}}{N}\}} + \mathcal{O}(N^2) \quad (2.15)$$

donde

$$\rho_0(x) = \frac{\sqrt{4\lambda\sigma^4(1-c)^2 - [x - \lambda\sigma^2(1-c) - \sigma^2(1-c)]^2}}{2\pi x \lambda \sigma^2(1-c)}$$

Éstas relaciones muestran la existencia de un valor propio aislado en  $x = \frac{\lambda\sigma^2(Nc+1-c)(\frac{Nc}{\lambda}+1-c)}{Nc}$  y una densidad tipo Marchenko-Pastur con la sustitución  $\sigma^2 \mapsto \sigma^2(1-c)$ .

## Capítulo 3

# Econofísica y Estadística Multivariada

La aplicación de técnicas o modelos de la Física en problemas de Economía es conocido como *Econofísica*<sup>1</sup>. En palabras de Mantegna y Stanley, pioneros de esta disciplina en la década de 1990, la Econofísica es [31, pp. viii-ix]:

[...] a neologism that denotes the activities of physicists who are working on economics problems to test a variety of new conceptual approaches deriving from the physical sciences.

Esta teoría ha encontrado aplicaciones en Macroeconomía, estructura microscópica de los mercados financieros, modelado de *burujas* y *crashes* financieros, etc. Particularmente, la Econofísica ha cuestionado seriamente diversos postulados clásicos en Economía, como suponer que las variables financieras siguen una distribución normal (o cualquier tipo de transformación simple de ésta, como la log-normal), la interacción racional de los agentes económicos o incluso la *hipótesis del mercado eficiente* [39, pp. 753-756].

En el primer caso, la evidencia empírica muestra que las distribuciones probabilísticas de las variables financieras tienen colas largas y sesgos parecidos a los de una distribución Pareto o Zipf:

$$\mathbb{P}(X = x) \propto x^{-\alpha}$$

En Física Estadística, las leyes de potencias pueden implicar auto-similaridad (o invarianza bajo cambios de escala) en la composición de un sistema, correlaciones de largo alcance y transiciones de fase. Esto conduce naturalmente a la búsqueda de un mecanismo o proceso subyacente, inspirado en los fenómenos críticos, que explique eventos económicos como crisis, recesiones, auges, etc. [40],[4, Cáp. 11]

Más aún: desde el punto de vista puramente matemático es posible cuestionar el uso indiscriminado de distribuciones de probabilidad gaussianas [38, Cáp. 4]:

**Teorema 3.0.1.** *Dada una variable aleatoria  $S$  con densidad  $L(x)$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

---

<sup>1</sup>Aunque la relación entre las ciencias sociales y exactas (como la Física o las Matemáticas) tiene al menos 200 años de historia [39, p. 750-751].

1.  $L(x)$  es una distribución **límite**; es decir, existe un conjunto de variables aleatorias  $\{l_n\}_{n=1}^N$  independientes e idénticamente distribuidas con densidad  $p(l)$ , y ciertas constantes positivas  $A_N, B_N$  tales que  $\hat{S}_N := \frac{1}{B_N} \sum_{n=1}^N l_n - A_N$  converge en probabilidad a  $S$ .
2.  $L(x)$  es una distribución **estable**; es decir, existen constantes  $a > 0$  y  $b$  tales que:

$$\forall a_i > 0, b_i : L(a_1x + b_1) * L(a_2x + b_2) := \int_{-\infty}^{\infty} L(a_1(y - x) + b_1) L(a_2x + b_2) dx \equiv L(ay + b)$$

Lévy, Khintchine y otros demostraron en la década de 1930 que  $L = L_{\alpha,\beta}(x)$  es estable si y sólo si su función característica:

$$L_{\alpha,\beta}(k) = \mathbb{E}[e^{ikx}] := \int_{-\infty}^{\infty} L_{\alpha,\beta}(x) e^{ikx} dx$$

satisface la siguiente relación:

$$\log [L_{\alpha,\beta}(k)] = i\gamma k - c|k|^\alpha \left( 1 + i\beta \frac{k}{|k|} \omega(k, \alpha) \right); \quad (3.1)$$

donde:

$$\omega(k, \alpha) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log |k| & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} ; \quad \gamma \in \mathbb{R}, c \geq 0, \alpha \in (0, 2], \beta \in [-1, 1].$$

Cabe resaltar que  $L_{\alpha,\beta}(x)$  es gaussiana si  $\alpha = 2$ ; pero si  $0 < \alpha < 2$ , entonces  $L_{\alpha,\beta}(x) \rightarrow \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}$  cuando  $x \rightarrow \infty$  [38, pp. 134-136]. En otras palabras, *no toda distribución límite es normal*.

### 3.1. Series de tiempo financieras y hechos estilizados

Los mercados financieros son un ejemplo de sistemas complejos, donde los agentes interactúan unos con otros e incorporan información sobre activos mediante las series de tiempo de sus precios, intuición e incluso rumores [31, pp. 8-13] [6, Cáp. 5.3] [4].

El estudio cuantitativo de los mercados financieros se hace mediante sus series de tiempo, cuya alta frecuencia de muestreo y calidad las hace aptas para hacer estadística. A primera vista, su comportamiento parece impredecible, errático y sin información económica importante; sin embargo, estas series de tiempo contienen una gran cantidad de información no redundante [5].

Ejemplos de dichas series de tiempo son las asociadas a precios de acciones, bonos y derivados. En este trabajo consideraremos *portafolios*<sup>2</sup> compuestos únicamente por acciones, las cuales estarán definidas por las series de tiempo de sus precios a través de un horizonte temporal fijo (ver figura 3.1).

<sup>2</sup>Entendido como cualquier agrupación de activos financieros.

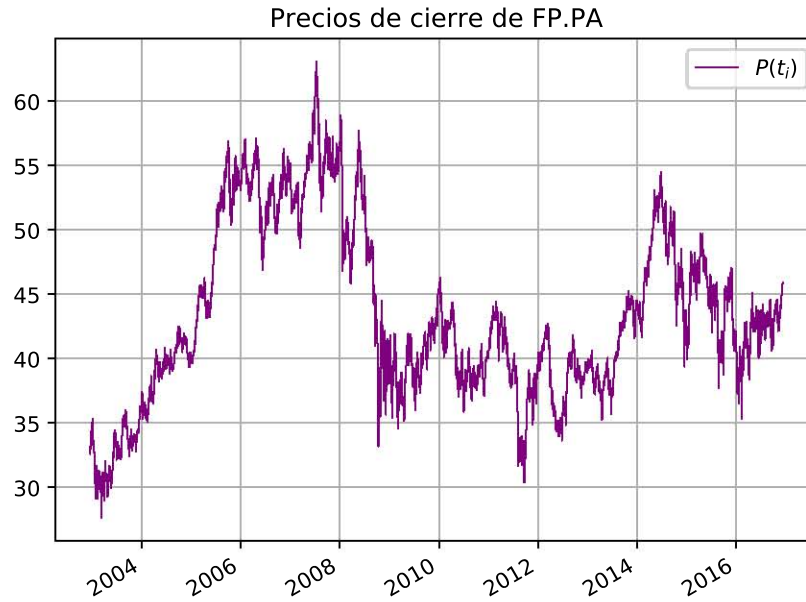


Figura 3.1: Precios de cierre de la acción FP.PA (Total S.A., Francia) en el período de 2003 a 2017.

**Definición 3.1.1.** Dada una serie de tiempo de precios  $\{P(t_i)\}_{i=0}^N$ , se definen los **rendimientos**<sup>3</sup>  $\{R(t_i)\}_{i=1}^N$  como:

$$R(t_i) := \frac{P(t_i) - P(t_{i-1})}{P(t_{i-1})} \quad (3.2)$$

y los **rendimientos logarítmicos**  $\{r(t_i)\}_{i=1}^N$  como:

$$r(t_i) := \log \left( \frac{P(t_i)}{P(t_{i-1})} \right) \quad (3.3)$$

Diversos autores<sup>4</sup> coinciden en la mayor ventaja que representa el uso de rendimientos logarítmicos ante el de rendimientos *crudos*. A lo largo de nuestro estudio ocuparemos los logarítmicos.

**Definición 3.1.2.** La desviación estándar de los rendimientos se llama **volatilidad**.

Dado que la desviación estándar depende de la cantidad de datos (rendimientos) que se escojan, la volatilidad depende de la *ventana temporal* en el pasado que se considere. Mientras más larga sea ésta, *más información*; mientras más corta, la volatilidad estimada será *más cercana* a la situación del presente. Esto motiva la siguiente definición:

**Definición 3.1.3.** Una serie de tiempo  $\{S(t)\}_{t \in T}$  es **estrictamente estacionaria** si la distribución conjunta de  $(S(t_1), \dots, S(t_k))$  es igual a la de  $(S(t_{1+l}), \dots, S(t_{k+l})) \forall k, l$ . Esto es, la densidad de  $(S(t_1), \dots, S(t_k))$  es invariante bajo traslaciones temporales. Una serie de tiempo  $\{S(t)\}_{t \in T}$  es **débilmente estacionaria** si  $\mathbb{E}(S(t))$  y  $\text{cov}(S(t), S(t'))$  son independientes del tiempo.

<sup>3</sup>Llamados comúnmente *simple gross returns* o rendimientos crudos en la literatura financiera.

<sup>4</sup>En <https://quantivity.wordpress.com/2011/02/21/why-log-returns/> y <https://mathbabe.org/2011/07/24/measuring-historical-volatility/> se hace una discusión detallada.



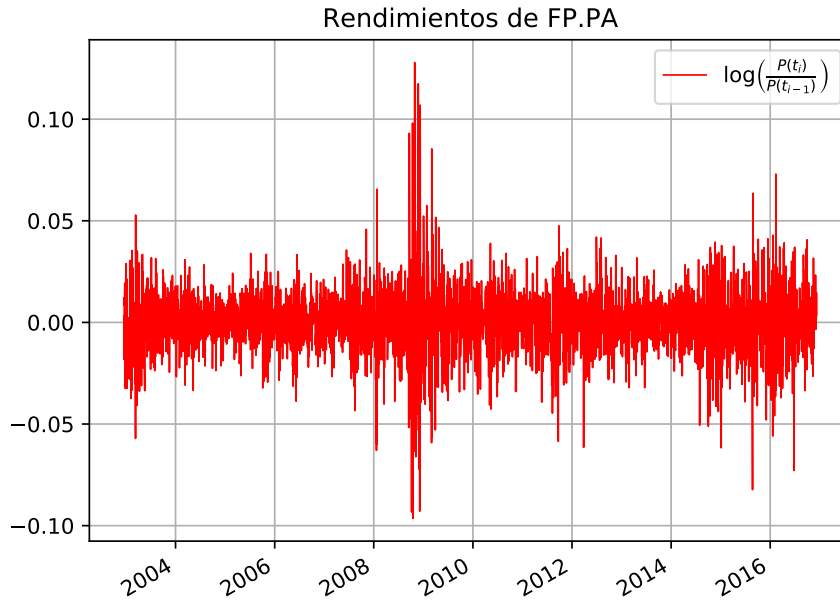


Figura 3.2: Rendimientos logarítmicos diarios, calculados a partir de los precios de cierre, de la acción FP.PA (Total S.A., Francia) en el período de 2003 a 2017.

En finanzas es común asumir que las series de tiempo de rendimientos de un activo son estacionarias. Ésto es válido en buena medida siempre que se consideren series de tiempo cortas [42, pp. 30-34], [10], [13, Cáp. 29].

Al comparar las estadísticas de series de tiempo financieras de gran diversidad (en términos de períodos de tiempo, instrumentos o mercados) se han hallado ciertas propiedades generales, llamadas *hechos estilizados* (*stylized facts*). A continuación presentamos aquellos que serán útiles para nuestro trabajo [5, 42, 11]:

1. Los rendimientos están, en buena aproximación, decorrelacionados en una escala de decenas de minutos. Por otro lado, existen correlaciones pequeñas en la escala de días.
2. La distribución de los rendimientos  $r$  es fuertemente no gaussiana; las colas están bien descritas por leyes de potencias  $r^{-1-\mu}$  (ver la figura 3.3).
3. La función de autocorrelación de la volatilidad diaria se ajusta a una potencia negativa del desfase.
4. La volatilidad y el volumen de actividad están fuertemente correlacionados.
5. Rendimientos pasados y volatilidad futura están negativamente correlacionados. A este efecto se le llama *apalancamiento*.

Éstos hechos, de carácter cualitativo, tienen la utilidad de restringir los modelos o teorías que traten de describir las series de tiempo reales. Sin embargo, plantear un modelo microscópico que exhiba tales

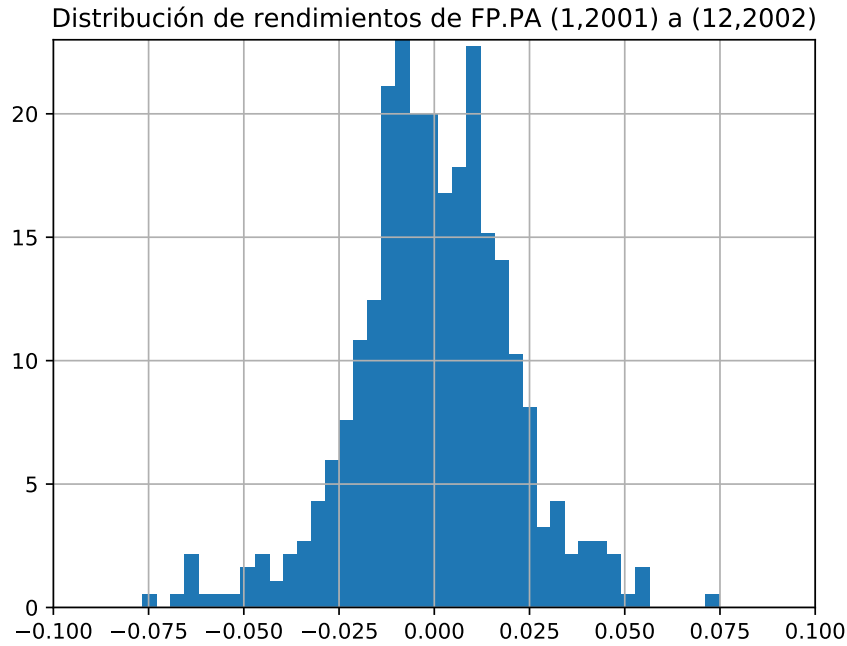


Figura 3.3: Distribución de los rendimientos logarítmicos diarios (calculados a partir de los precios de cierre) de la acción FP.PA (Total S.A., Francia) a lo largo de dos años. La gráfica sugiere anomalía, asimetría y colas largas.

propiedades, implica un tratamiento matemático sofisticado y poco práctico [11, 5]. Por esta razón, la orientación más directa para describir los sistemas económicos es una global: la dinámica estocástica, los efectos de correlación y la emergencia de valores extremos en los precios de acciones y sus rendimientos.

## 3.2. Matrices de covarianza y correlación

*Definición 3.2.1.* Sea  $\mathbb{X} = (X_1 \ \cdots \ X_n)$  un vector aleatorio con varianza finita. La matriz de covarianza  $\Sigma = (\Sigma_{ij})$  se define como:

$$\Sigma_{ij} := \text{cov}(X_i, X_j) := \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \equiv \mathbb{E}[X_i X_j] - \mu_i \mu_j \quad (3.4)$$

donde  $\mu_i := \mathbb{E}[X_i]$ .

Se puede demostrar que:

$$\Sigma \equiv \mathbb{E}[(\mathbb{X} - \mathbb{E}[\mathbb{X}])(\mathbb{X} - \mathbb{E}[\mathbb{X}])^t]$$

por lo que  $\Sigma$  suele interpretarse como una generalización vectorial de la varianza escalar.

**Definición 3.2.2.** La matriz de correlación se define como la matriz de los coeficientes de correlación de Pearson:

$$(\text{corr}(\mathbb{X}))_{ij} := \text{corr}(X_i, X_j) := \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sigma_i \sigma_j} \quad (3.5)$$

donde  $\sigma_i := \sqrt{\mathbb{E}[(X_i - \mu_i)^2]}$ .

Las siguientes identidades serán útiles para nuestros propósitos:

**Teorema 3.2.1.** Si  $\mathbb{X} = (X_1 \ \cdots \ X_n)$  es un vector aleatorio con matriz de covarianza  $\Sigma$ , entonces:

- $(\text{corr}(\mathbb{X}))_{ij} \equiv (\text{diag}(\Sigma))^{-\frac{1}{2}} \Sigma (\text{diag}(\Sigma))^{-\frac{1}{2}}$ , donde  $\text{diag}(\Sigma)$  es la matriz de la diagonal de  $\Sigma$ .
- Cuando las  $X_i$  están estandarizadas:

$$\hat{X}_i := \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$$

las matrices de covarianza y correlación coinciden:  $\Sigma = \text{corr}(\mathbb{X})$ .

### 3.2.1. Matriz de correlación empírica

Si  $\{X_j(t) : j = 1, \dots, p; t = 1, \dots, n\}$ , con  $p, n \in \mathbb{N}$  fijos, es un conjunto de métricas financieras<sup>5</sup> estandarizadas, la matriz

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} X_1(1) & X_1(2) & \cdots & X_1(n) \\ X_2(1) & X_2(2) & \cdots & X_2(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_p(1) & X_p(2) & \cdots & X_p(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{X}_p \end{pmatrix}$$

sirve para estimar una versión *empírica* de la matriz de correlación (según el resultado 3.2.1).

**Definición 3.2.3.** La *matriz de correlación empírica o muestral*<sup>6</sup> se define como:

$$\mathbf{C} := \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{X}^t \in \text{Mat}(p, \mathbb{R})$$

### 3.2.2. Espectro de la matriz de correlación y componentes principales

Es importante notar que  $\mathbf{C} = \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{X}^t$  es una matriz positiva semidefinida: si consideramos al vector aleatorio  $\mathbb{Y}_u = u^t \mathbf{X}$  para  $u \in \mathbb{R}^p$  arbitrario, entonces:

$$0 \leq \mathbb{E}(Y_u^2) = u^t \mathbf{C} u$$

<sup>5</sup>Por ejemplo,  $X_j(t)$  puede ser el  $t$ -ésimo rendimiento de la  $p$ -ésima acción.

<sup>6</sup>También llamada **matriz de Wishart**.

Por eso, el espectro de  $\mathbf{C}$  es un conjunto  $\{\lambda_i\}_{i=1}^p$  de números reales no negativos, cuyos vectores propios  $\{v_i\}_{i=1}^p$  forman una base ortonormal. Más aún, al considerar los vectores aleatorios  $\mathbb{Z}_i = v_i^t \mathbf{X}$  para  $i \in \{1, \dots, p\}$ , se cumple:

$$\text{cov}(\mathbb{Z}_i, \mathbb{Z}_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \quad (3.6)$$

Lo que equivale a decir (módulo una inversión) que  $\mathbb{X}_i = v_i^t \mathbf{Z}$ , con:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$$

es un *modo colectivo*. De este modo, el espectro de una matriz de covarianza corresponde a las varianzas de estos modos colectivos.

### 3.2.3. Correlación entre acciones

Si se estima la matriz de correlación empírica entre rendimientos, es otro *hecho estilizado* que los períodos de alta volatilidad se corresponden con incrementos en la correlación global. La parte dominante de la correlación (mayor eigenvalor y modo colectivo) suele interpretarse como *el mercado*. [6]

Así pues, los resultados de la Teoría de Matrices Aleatorias (particularmente los relacionados con el ensemble de Wishart-Laguerre [28]) representan un modelo de hipótesis nula a compararse con las matrices empíricas de correlación de series de tiempo financieras: la presencia de estadísticas atípicas (asociadas con el espectro, promedio, etc.) pone en evidencia la existencia de correlaciones no triviales.

En el caso de correlación constante, es precisamente el valor propio aislado de la ecuación 2.3.4 el más grande, y representa la *varianza global* del sistema **siempre y cuando no se encuentre en el soporte de  $\rho_0(x)$** .

### 3.2.4. Espectro emergente de matrices de correlación singulares

La determinación de las  $\frac{p(p-1)}{2}$  entradas independientes de la matriz empírica de correlación se hace a partir de  $p$  series con horizonte temporal  $n$ . Cuando  $n$  es menor que  $p$ , las correlaciones contienen *ruido* considerable (pues la matriz de correlación tendrá  $p - n + 1$  eigenvalores nulos), de modo que la estructura de la matriz está dominada por su naturaleza aleatoria. Esto se traduce en una pérdida de información de la dinámica subyacente, así como en estadísticas pobres.

Por otro lado, muchos resultados teóricos suponen que las series de tiempo bajo consideración son (débilmente) estacionarias, lo cual es falso en series de tiempo financieras a menos que se consideren horizontes temporales cortos [11].

En [48] se presenta un método no lineal, conocido como *power map*, para romper la degeneración de las matrices de correlación de series de tiempo cortas y reducir el ruido de éstas. La idea básica consiste en considerar la transformación:

$$C_{kl} \mapsto C_{kl}^{(q)} := \text{sgn}(C_{kl}) |C_{kl}|^q \quad (3.7)$$

donde  $q = 1 + \epsilon$ ,  $\epsilon \in (0, 1)$ .

Cuando se aplica el *power map* a una matriz del ensemble de Wishart-Laguerre, se obtendrá de nuevo una matriz real simétrica, de modo que todos los eigenvalores serán reales pero no necesariamente positivos. Resulta que la densidad de eigenvalores tendrá dos soportes separados bien definidos [47, 48]: uno parecido al definido por la ley de Marchenko-Pastur (ecuación 2.13) y otro cercano a cero, al que se conoce como *espectro emergente* de valores propios  $\{\hat{\lambda}_j\}_{j \in J}$ .

Algo similar ocurre en el caso de matrices empíricas de correlación: cuando se aplica el *power map* a una matriz singular del ensemble de Wishart correlacionado (asumiendo el modelo de correlaciones internas constantes  $\xi_{jk} := \delta_{jk} + c$ ,  $-1 \leq c \leq 1$ ) y una expansión a primer orden en  $\epsilon$  de la ecuación 3.7, se pueden estimar (en el régimen de respuesta lineal) los primeros dos momentos de la densidad de eigenvalores del espectro emergente [48, Sec. V], de los cuales se deduce que **el espectro emergente es sensible a la presencia o ausencia de correlaciones en series de tiempo cortas** ( $\kappa \leq 1$ ), lo que permitiría detectar cambios en la estructura dinámica subyacente de un sistema no estacionario.

### 3.2.5. Momentos de la matriz de correlación

Las matrices de correlación  $C_{ij}(t)$  asociadas a  $p$  métricas financieras sobre un intervalo de tiempo de  $n$  puntos (la *ventana temporal* con punto final en el instante  $t \leq N$ ) tienen un total de  $\frac{p(p-1)}{2}$  entradas independientes. Si, por ejemplo, se analizan las correlaciones entre los rendimientos de 50 acciones, se tendrá un total de 1225 coeficientes de correlación de Pearson  $\{c_j\}$  *por matriz*. Los *momentos muestrales centrales* de estas variables aleatorias<sup>7</sup>:

$$\hat{\mu}^{(k)} := \frac{2}{p(p-1)} \sum_{j=1}^{p(p-1)/2} (c_j - \mu)^k = \langle (C_{ij}(t) - \mu)^k \rangle_{i < j} \quad (3.8)$$

donde:

$$\mu := \langle C_{ij}(t) \rangle_{i < j} \quad (3.9)$$

formarán nuevas series de tiempo de  $N - n + 1$  instantes si la separación entre ventanas temporales (es decir, entre instantes finales de tiempo) es uno. Éstas aportarán información sobre la correlación global de las métricas estudiadas.

Además, los momentos centrales permiten calcular la **kurtosis** (excesiva) y **asimetría**<sup>8</sup> de las correlaciones:

<sup>7</sup>Hay que notar que el segundo momento central y la varianza muestral (sin sesgo) de una población de tamaño  $n$  están relacionados por la ecuación  $n\mu^{(2)} = (n-1)\sigma^2$ ; éstos coinciden prácticamente si  $n \gg 1$ .

<sup>8</sup>Suele usarse el anglicismo **skewness**.

$$s := \frac{\mu^{(4)}}{(\mu^{(2)})^2} - 3 = \frac{\mu^{(4)}}{\sigma^4} - 3 \quad (3.10)$$

$$k := \frac{\mu^{(3)}}{(\mu^{(2)})^{3/2}} = \frac{\mu^{(3)}}{\sigma^3} \quad (3.11)$$

que miden *las colas largas* y la asimetría de la densidad de probabilidad respecto a su mediana. Éstas cantidades, a su vez, se pueden combinar en el **coeficiente de bimodalidad de Sarle**:

$$B := \frac{1 + s^2}{k + 3} \quad (3.12)$$

que da una medida sencilla de la *bimodalidad* de una distribución de probabilidad.

El valor propio máximo  $\lambda_{\text{máx}}$  de una matriz de correlación es aproximadamente una función lineal de la correlación promedio<sup>9</sup>  $\mu$  entre las variables aleatorias involucradas *siempre y cuando* todas las correlaciones  $C_{ij}$  sean positivas:

$$\lambda_{\text{máx}} \approx 1 + (p - 1)\mu \quad (3.13)$$

Más generalmente,  $1 + (p - 1)\mu$  es en buena aproximación una cota inferior para  $\lambda_{\text{máx}}$ <sup>10</sup> [20].

### 3.2.6. Matrices de similitud

Dadas dos matrices empíricas de correlación  $\mathbf{C}(t_1)$  y  $\mathbf{C}(t_2)$  calculadas sobre dos horizontes cortos de tiempo (de la misma longitud), se define la matriz de similitud como [35]:

$$\zeta(t_1, t_2) := \langle |C_{ij}(t_1) - C_{ij}(t_2)| \rangle_{i \neq j} \quad (3.14)$$

para dar una medida de la diferencia en la estructura de correlación entre dos intervalos de tiempo, comúnmente llamados *épocas*. En el caso de matrices de correlación de rendimientos, esta matriz contiene información sobre los cambios estructurales del mercado financiero.

<sup>9</sup>Conocido informalmente como *el promedio de la matriz de correlación*.

<sup>10</sup>Esto no es así en casos de fuertes correlaciones negativas en muchos elementos, como sucede cuando hay frustración; por ejemplo en modelos de Ising antiferromagnéticos.



## Parte II

# Resultados





# Capítulo 4

## Metodología y resultados

En este capítulo describiremos la manera en que obtuvimos, limpiamos y analizamos las series de tiempo de precios para acciones inglesas, alemanas y francesas.

### 4.1. Características de los datos

Un **índice de mercado** es la combinación ponderada de varias acciones (u otros vehículos de inversión), que trata de representar su valor conjunto como una serie de tiempo.<sup>1</sup> En otras palabras, es una manera de *englobar* un mercado y registrar su evolución en el tiempo, considerando sólo un portafolio representativo.

Existen muchos índices que tratan de representar las componentes dominantes de los mercados inglés, alemán y francés. En este trabajo hemos escogido los siguientes<sup>2</sup>:

1. Inglaterra: - Financial Times Stock Exchange <sup>3</sup>
2. Alemania: - STOXX TMI Alemania <sup>4</sup>
3. Francia: - STOXX TMI Francia <sup>5</sup>

Por otro lado, hemos considerado los índices *STOXX Europe 50* y *STOXX Europe 600* para dar una representación de todo el mercado europeo (ver apéndice A).

Hemos considerado solamente un período de análisis (UTC)<sup>6</sup> desde el 12 de julio de 2001 hasta el 8 de diciembre de 2016. Obtuvimos los precios de cierre de *Yahoo Finance*<sup>7</sup> según la metodología descrita en el apéndice B. Aquellas acciones que no tuvieran un registro constante en dicho período (es decir,

---

<sup>1</sup>Tomado de *Investopedia*: <https://www.investopedia.com/terms/m/marketindex.asp>

<sup>2</sup>Existen otros índices más famosos para Francia (CAC 40) y Alemania (DAX 30); sin embargo, éstos tienen un número poco representativo para el mercado.

<sup>3</sup><http://www.ftse.com/products/indices/uk> (Consultado el 9 de octubre de 2017).

<sup>4</sup><https://www.stoxx.com/index-details?symbol=TCDEGR> (Consultado el 10 de octubre de 2017).

<sup>5</sup><https://www.stoxx.com/index-details?symbol=TCFRGR> (Consultado el 13 de octubre de 2017).

<sup>6</sup>Tiempo universal coordinado.

<sup>7</sup><https://finance.yahoo.com/>

que suspendieran sus actividades en más de 5 días consecutivos) fueron descartadas; por eso sólo analizamos la siguiente cantidad de datos:

1. Alemania: 58 acciones.
2. Francia: 75 acciones.
3. Inglaterra: 199 acciones.

La tabla 4.1 resume la composición de las acciones analizadas por sectores.

*	Alemania	Francia	Inglaterra
Banca	2	2	5
Bienes personales y domésticos	4	7	14
Servicios sanitarios	6	5	7
Bienes industriales y servicios	13	10	36
Petróleo y gas	0	1	6
Industria alimentaria	1	3	8
Tecnología	5	8	5
Telecomunicaciones	3	1	2
Industria automotriz	6	5	0
Servicios públicos	2	3	5
Seguros	2	4	8
Productos químicos	5	1	5
Medios de comunicación	1	8	7
Comercio minorista	1	3	11
Recursos básicos	2	1	6
Construcción y materiales	1	5	4
Viajes y ocio	1	3	16
Bienes inmobiliarios	2	4	16
Servicios financieros	1	1	31
Industria armamentista y de defensa	0	0	7

Cuadro 4.1: Número de acciones analizadas por sector y país.

Los pormenores de éstos portafolios se dan en el apéndice A.

## 4.2. Preámbulos del análisis

Para calcular matrices de correlación empíricas  $\mathbf{C} = \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{X}^t$  (sección 3.2) para los rendimientos (logarítmicos) de cada mercado, hemos considerado lo siguiente:

1. Épocas de  $q = 15$  días por matriz de correlación, en cada una de las cuales se hizo una normalización a promedio 0 y varianza 1. Ésto generó un ensemble de  $T_j - q + 1$  matrices de correlación, donde  $T_j$  es el número de rendimientos en cada mercado.
2. Power map con exponente  $\epsilon = 1,003$ .

En cambio, para calcular las matrices de similaridad (ecuación 3.14), consideramos ventanas temporales de  $q = 20$  días sin traslapo pero el mismo exponente del power map.

(Aunque quizá parezca redundante, es importante mencionar que los renglones de las matrices  $X$  (que constituyen  $\mathbf{C} = \frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{X}^t$ ), con  $q$  números en ciertos instantes sucesivos  $t_{j_1}, \dots, t_{j_q}$ , representan la época de longitud  $q$  hasta el instante  $t_{j_q}$ . De este modo, por ejemplo, los eigenvalores máximos de las  $Q := T_j - q + 1$  matrices de correlación conformarán una nueva serie de tiempo  $\{\lambda_{\max}(t_i)\}_{i=1}^Q$  del estado del mercado hasta el tiempo  $t_i$ .)

### 4.2.1. Alemania

#### Matriz de similaridad

En la figura 4.1, cada punto en la diagonal (en color azul claro) indica un «ahora»; desde éste, y moviéndose hacia arriba (o a la izquierda) se encontrarán puntos cuyo color (entre 0 y 1) indicará la similaridad o diferencia con el mercado en el pasado. Las regiones rosas indican cambios drásticos en la estructura de correlación del mercado. Cada una se puede asociar a un evento extraordinario en la bolsa de Fráncfort. Las más notables son:

- |                                    |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. Junio de 2001.                  | 9. Julio de 2011.                 |
| 2. Enero y febrero de 2005.        | 10. Septiembre y octubre de 2011. |
| 3. Abril de 2006.                  | 11. Marzo de 2014.                |
| 4. Julio a septiembre de 2006.     | 12. Octubre de 2014.              |
| 5. Marzo de 2007.                  | 13. Febrero de 2015.              |
| 6. Febrero de 2008.                | 14. Junio a octubre de 2015.      |
| 7. Septiembre a diciembre de 2008. | 15. Junio a agosto de 2016.       |
| 8. Mayo y junio de 2010.           |                                   |

#### Valores propios y promedios de las matrices de correlación

El valor propio mínimo de la matriz de correlación, surgido del espectro emergente del *power map*, induce una señal independiente que podría aportar nueva información sobre los datos bajo estudio [10]. La figura 4.2 muestra su evolución como función de (el último punto temporal de) la ventana, junto con el eigenvalor máximo (*el mercado*). Lo más sobresaliente de esta figura es la presencia de *baches* en ambas señales, siendo más pronunciadas en el eigenvalor más pequeño. Su aparición está contenida en la lista dada en la sección anterior.

Por otro lado, la figura 4.3 muestra el promedio (sobre las entradas)  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i < j}$  de las matrices de correlación sucesivas, así como el promedio de los valores absolutos de las entradas  $\langle |C_{ij}(t)| \rangle_{i < j}$ . La diferencia entre éste y aquél da una medida de las correlaciones negativas (o anticorrelaciones) promedio de todas las acciones bajo consideración.

Por otra parte, la ecuación 3.13 se hace obvia al comparar las figuras 4.3 y 4.2. Ambas se muestran

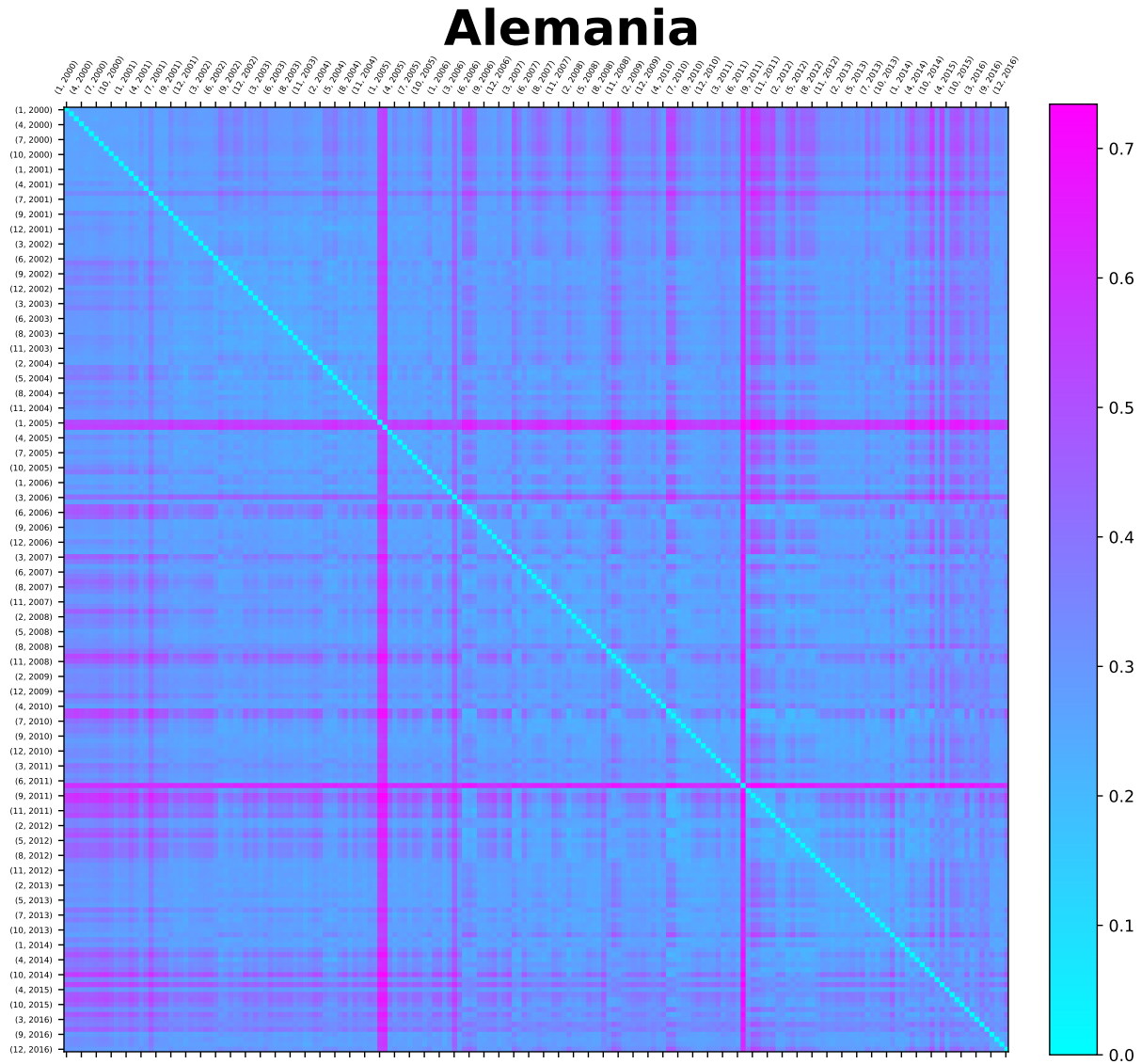


Figura 4.1: Matriz de similitud del mercado alemán.

simultáneamente en la figura 4.4.

Es un hecho bien conocido la correlación entre el valor propio máximo y el promedio sobre las entradas no diagonales de la matriz de correlación. Sin embargo, para describir con mayor precisión dicha relación lineal hemos calculado, para cada época sucesiva de 15 días, la correlación entre  $\lambda_{\text{máx}}$  y  $\langle C_{ij} \rangle_{i \neq j}$ . Ésta se muestra en la figura 4.5, donde se puede apreciar un horizonte predominantemente correlacionado (correlación igual a 1) pero también momentos de alta anticorrelación. La localización de 4 «baches» pronunciados parece coincidir con las de aquellos aparecidos en la figura 4.2.

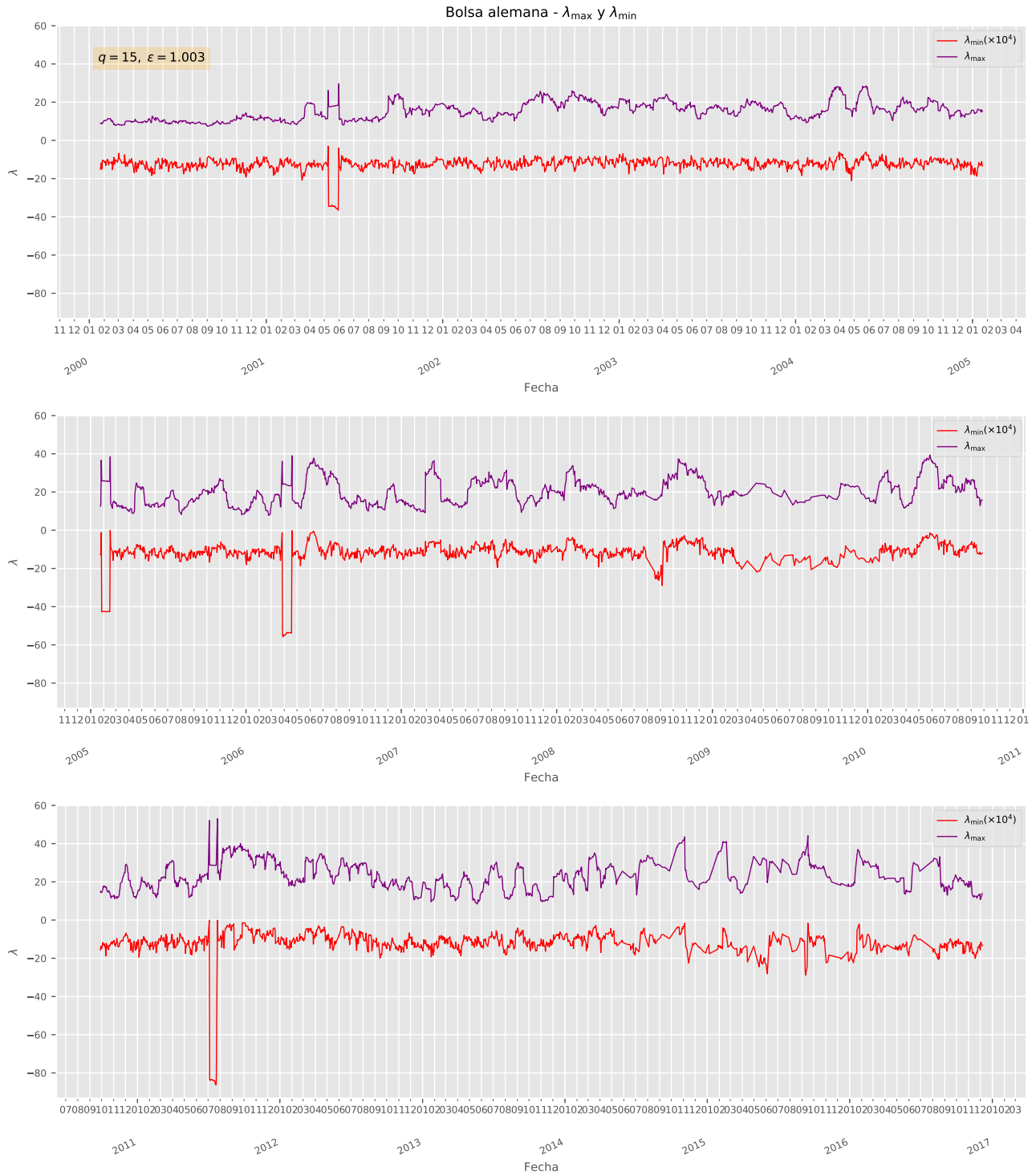


Figura 4.2: Valores propios máximo y mínimo para Alemania.

### Momentos de orden superior de las matrices de correlación

La figura 4.6 muestra los momentos centrales (según la ecuación 3.8) de las matrices de correlación como función del tiempo. Sólo es evidente la anticorrelación entre los momentos de orden 3 y 4.

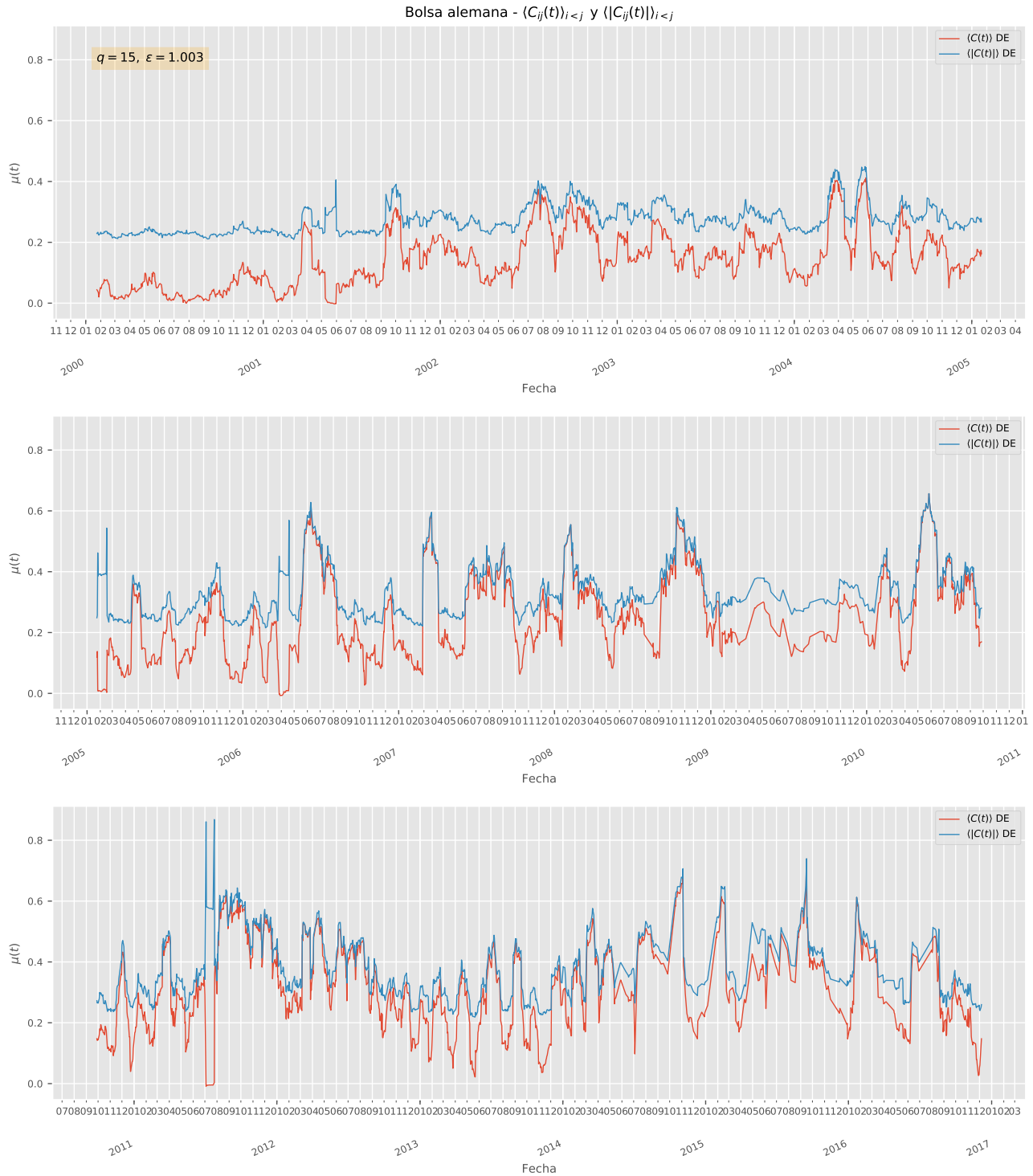


Figura 4.3: Promedio y valor absoluto del promedio de las matrices de correlación para Alemania.

La figura 4.7 muestra la kurtosis y asimetría de las matrices de correlación del mercado alemán (ecuación 3.10), que aparentan anticorrelación. Son notables los máximos en la kurtosis (mínimos en la asimetría) en ciertos períodos, v.g. mediados de septiembre de 2001, octubre de 2002, finales de mayo de 2006, mediados de octubre de 2014 etc., que parecen coincidir con los valores extremos del máximo

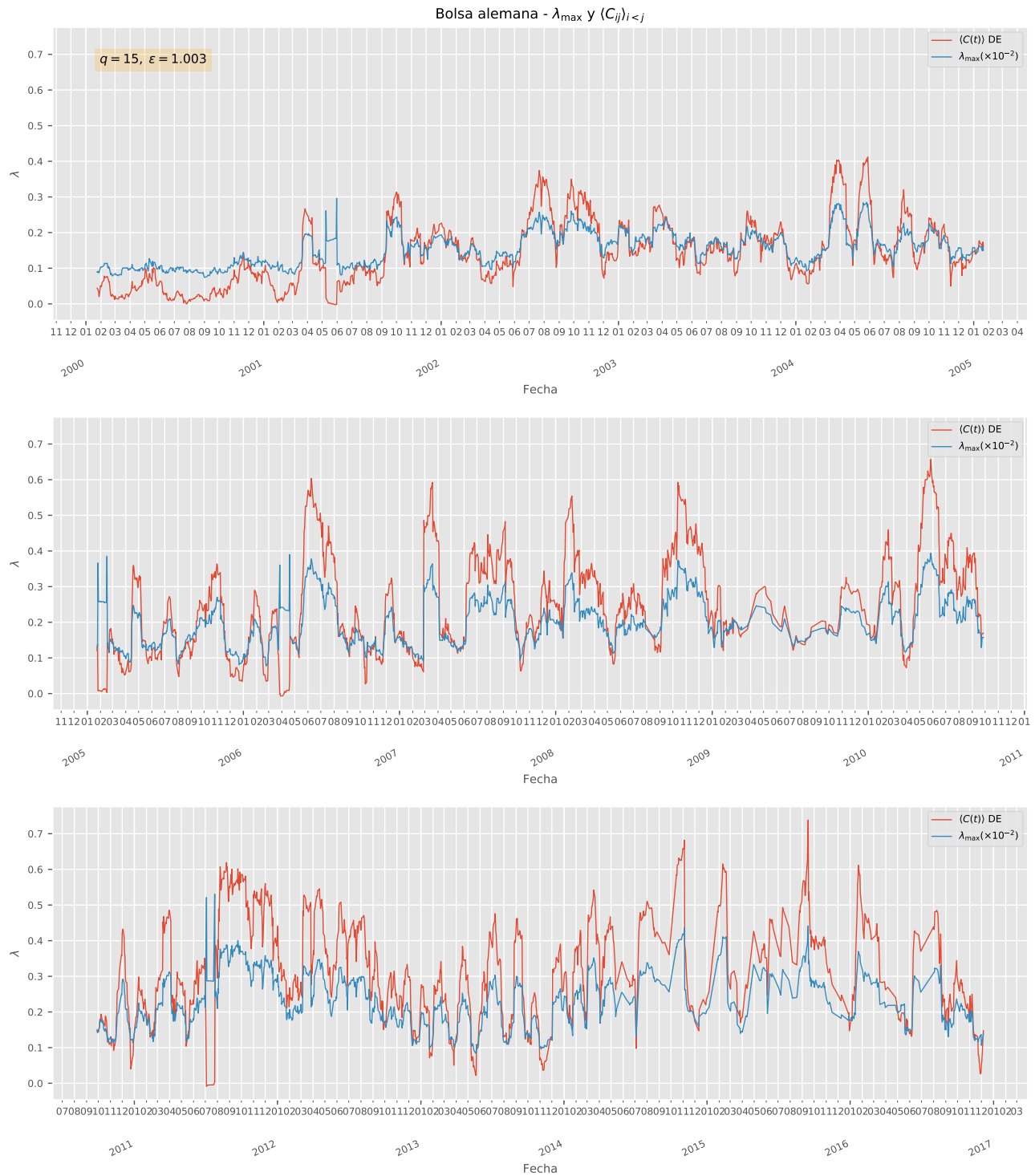


Figura 4.4: Valor propio máximo y promedio de las matrices de correlación para Alemania.

eigenvalor (figura 4.4).



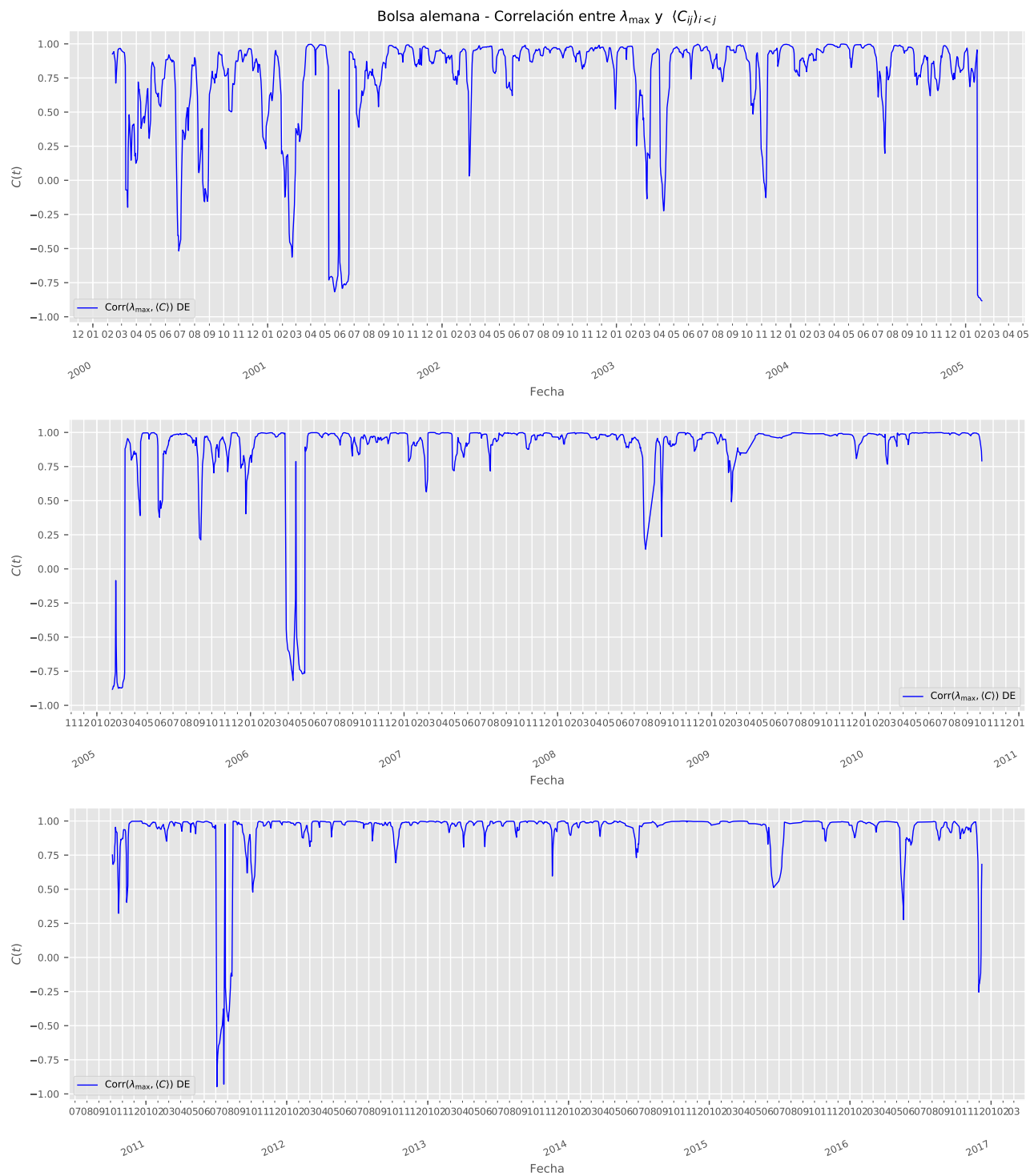


Figura 4.5: Correlación lineal entre el valor propio máximo y el promedio de las matrices de correlación para Alemania. Se usaron ventanas temporales de 15 puntos (días).



Figura 4.6: Momentos de orden superior de las matrices de correlación para Alemania.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de las correlaciones (días).

#### 4.2.2. Francia

##### Matriz de similitud

La figura 4.8 muestra la matriz de similitud  $\langle |C_{ij}(t_1) - C_{ij}(t_2)| \rangle_{ij}$  para el mercado francés. En este caso, son notables los siguientes períodos de cambios extremos en la estructura de correlación:



Figura 4.7: Kurtosis y asimetría de las matrices de correlación para Alemania.  $\epsilon$  representa la distorsión de la *power map* y  $q$  es el tamaño de las épocas (días).

1. Julio de 2002.
2. Abril de 2003.
3. Abril de 2004.
4. Mayo a julio de 2006.

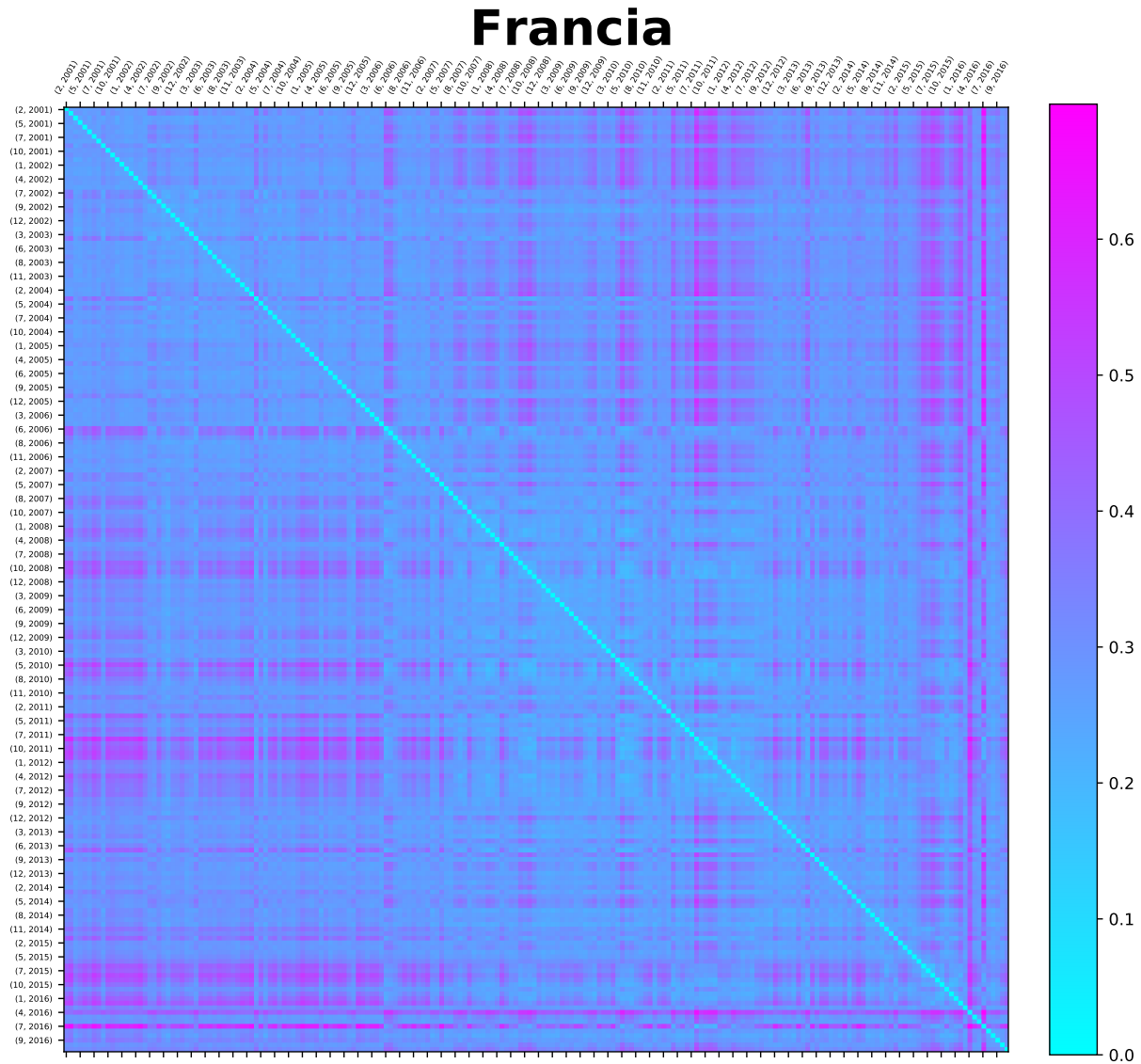


Figura 4.8: Matriz de similitud del mercado francés.

- |                                    |                                        |
|------------------------------------|----------------------------------------|
| 5. Agosto a octubre de 2007.       | 12. Abril a agosto de 2012.            |
| 6. Febrero a abril de 2008.        | 13. Julio de 2013.                     |
| 7. Septiembre a diciembre de 2008. | 14. Noviembre de 2014 a enero de 2015. |
| 8. Noviembre y diciembre de 2009.  | 15. Junio a octubre de 2015.           |
| 9. Abril a julio de 2010.          | 16. Diciembre a abril de 2016.         |
| 10. Abril de 2011.                 | 17. Agosto de 2016.                    |
| 11. Agosto a diciembre de 2011.    |                                        |

Es importante notar la duración más prolongada de los períodos críticos en el mercado francés, en comparación con aquellos del mercado alemán. Además, es más notable el impacto en la estructura mercantil francesa después de la salida de Inglaterra de la Unión Europea (junio de 2016), a diferencia del habido en el mercado alemán.

### Valores propios y promedios de las matrices de correlación

La figura 4.2 muestra los valores propios máximo y mínimo (emergente) de las matrices de correlación francesas. En este caso, y a diferencia del mercado alemán, se sugiere una leve correlación sistemática entre ambos números. Por otra parte, los *baches* que estaban presentes con mayor frecuencia en la señal de  $\lambda_{\min}$  alemana (figura 4.2) sólo ocurren una vez (entre abril y mayo de 2016) en el caso francés.

La figura 4.10 muestra  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i < j}$  y  $\langle |C_{ij}(t)| \rangle_{i < j}$ . Cabe resaltar la enorme anticorrelación promedio (entendida como la brecha entre  $\langle |C_{ij}| \rangle_{i \neq j}$  y  $\langle C_{ij} \rangle_{i \neq j}$ ) en el período de abril a mayo de 2016, así como persistente de 2001 hasta mediados del 2002.

La figura 4.11 compara, haciendo un reescalamiento, el valor propio máximo y la correlación promedio del mercado francés. Por otra parte, en la figura 4.12 se muestra que la correlación entre  $\lambda_{\max}$  y  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i < j}$  para épocas sucesivas es prácticamente igual a 1 desde mediados de 2006 hasta principios de 2016.

### Momentos de orden superior de las matrices de correlación

La figura 4.13 muestra los momentos de orden superior (ecuación 3.8) de las matrices de correlación del mercado francés. Entre estos es notable la presencia de mínimos para  $\mu^{(2)}$ , que indican una alta concentración alrededor del promedio en la distribución de las correlaciones cruzadas y, quizá, un comportamiento coordinado del mercado.

La figura 4.14 muestra la kurtosis y asimetría de las correlaciones cruzadas en función de la época. Se logra distinguir anticorrelación entre éstas variables, y la presencia de *picos* pronunciados en ciertos momentos (v.gr. entre septiembre y octubre de 2001, a finales de julio de 2002, muy notablemente a principios de agosto de 2011 etc.), cuya aparición coincide (aunque no siempre) con los máximos más pronunciados del mayor valor propio (figura 4.11).

#### 4.2.3. Inglaterra

##### Matriz de similitud

En el caso inglés (figura 4.15), la matriz de similitud da cuenta de los siguientes períodos de cambio en la estructura de las correlaciones internas:

1. Enero de 2006.
2. Mayo a junio de 2006.
3. Marzo a abril de 2007.
4. Junio a septiembre de 2007.
5. Noviembre y diciembre de 2007.
6. Febrero a abril de 2008.
7. Diciembre de 2008 a enero de 2009.
8. Diciembre de 2009.

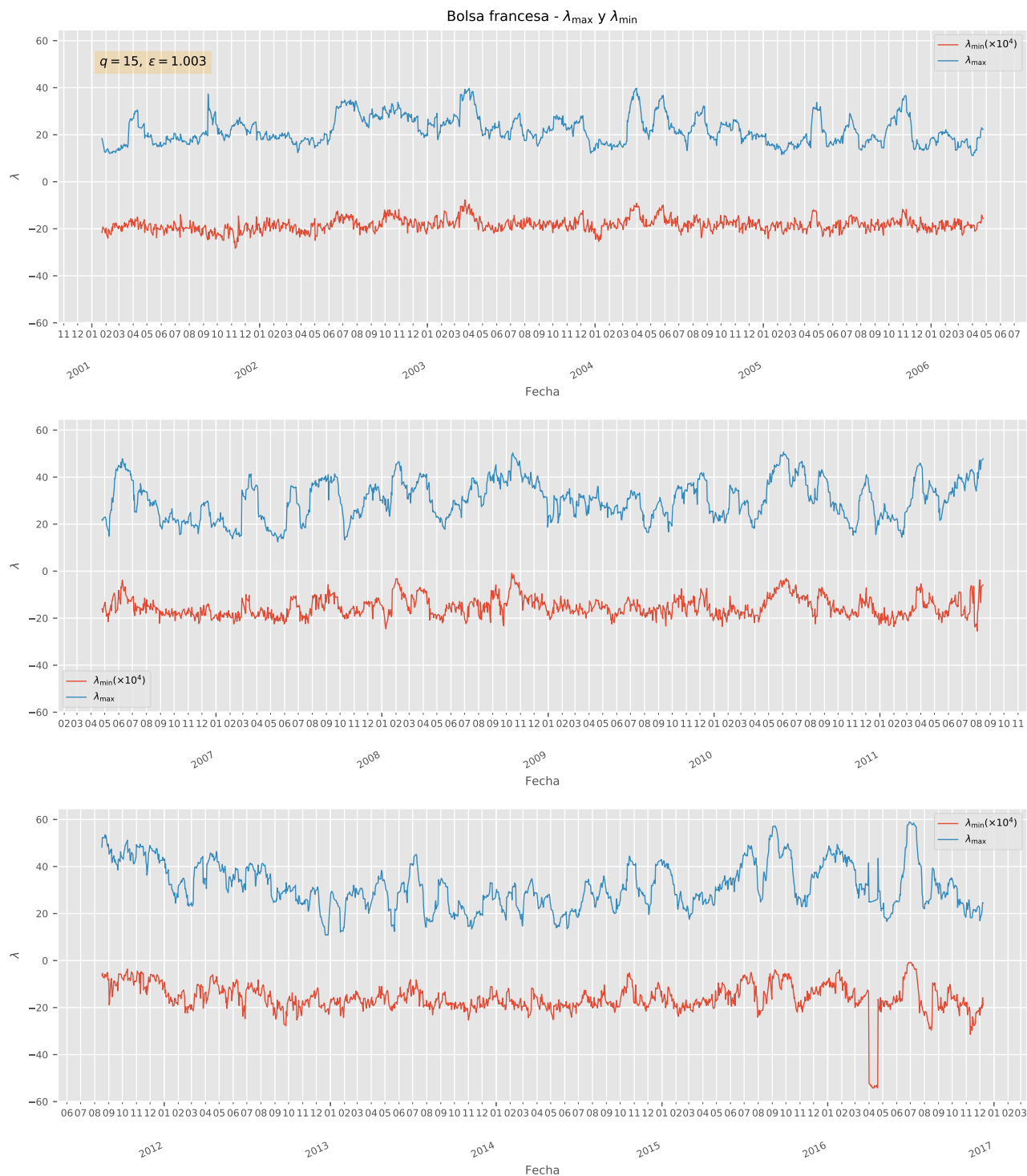


Figura 4.9: Valores propios máximo y mínimo para Francia.

- |                                     |                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 9. Junio de 2010.                   | 12. Junio a julio de 2013.        |
| 10. Agosto de 2011 a enero de 2012. | 13. Septiembre de 2013.           |
| 11. Marzo a julio de 2012.          | 14. Septiembre a octubre de 2015. |

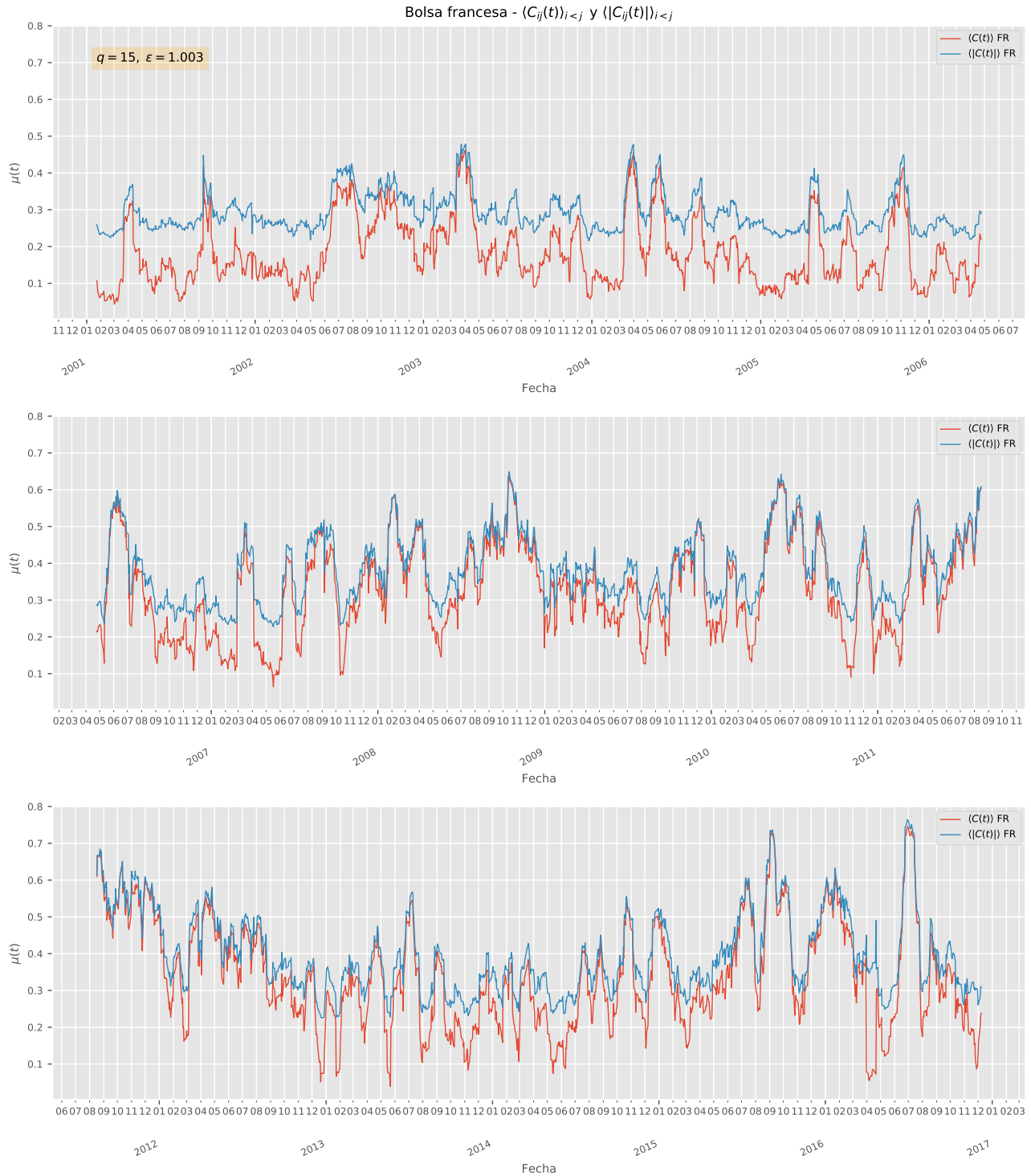


Figura 4.10: Promedio y valor absoluto del promedio de las matrices de correlación para Francia.

15. Febrero de 2016.

16. Julio de 2016.

Una observación importante es la coincidencia de éstos períodos críticos en los mercados inglés y francés, siendo más persistentes o duraderos en éste que en aquel. El parecido de las fechas recién



Figura 4.11: Valor propio máximo y promedio de las matrices de correlación para Francia.

listadas con aquellas marcadas en la matriz de similitud del mercado alemán es marcadamente menor.



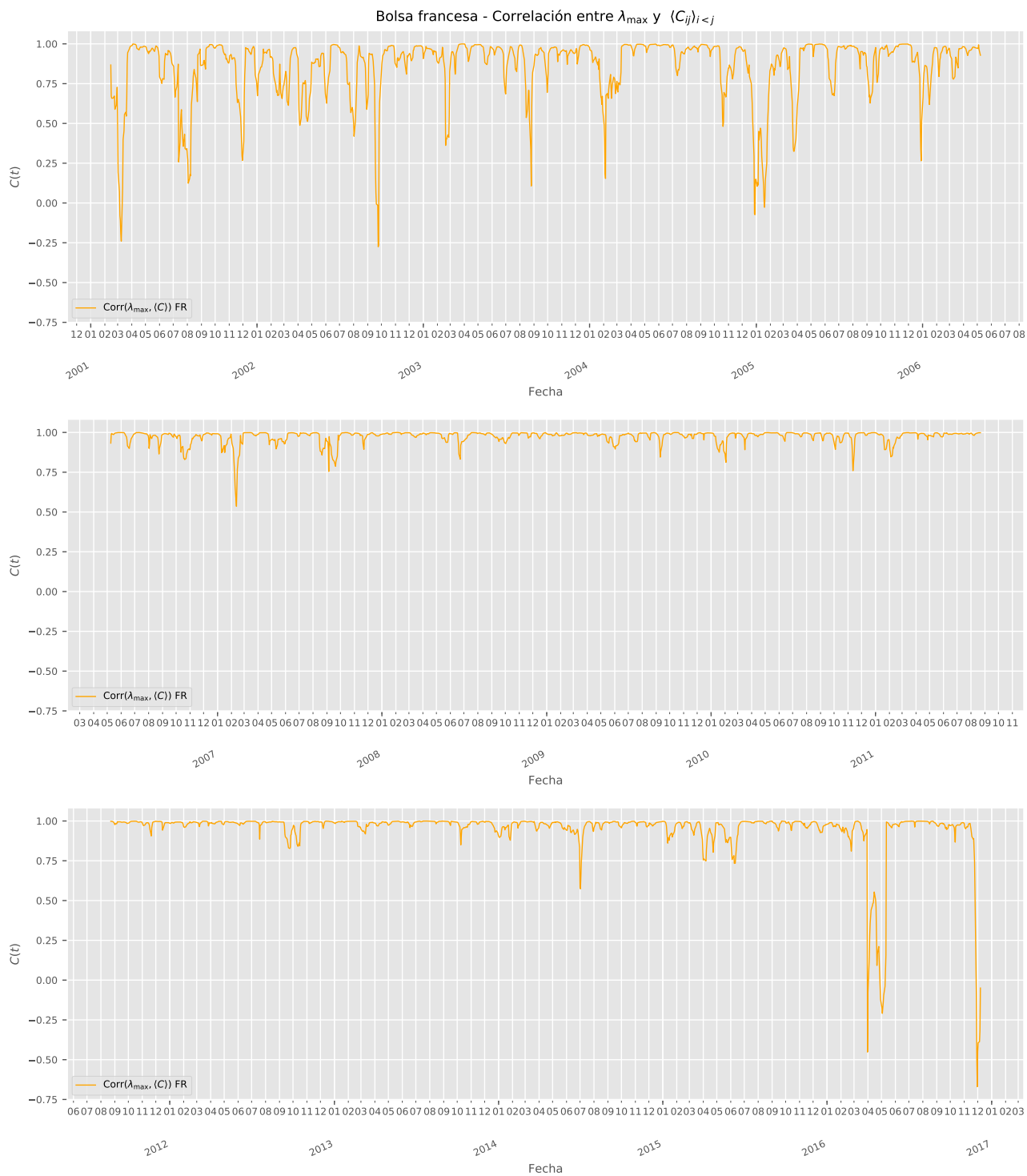


Figura 4.12: Correlación lineal entre el valor propio máximo y el promedio de las matrices de correlación para Francia. Se usaron ventanas temporales de 15 puntos (días).



Figura 4.13: Momentos de orden superior de las matrices de correlación para Francia.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de las correlaciones (días).

### Valores propios y promedios de las matrices de correlación

En la figura 4.16 se muestran los valores propios máximo y mínimo (del espectro emergente) de las matrices de correlación inglesas como función de la época. A diferencia de los *baches* aparecidos en las

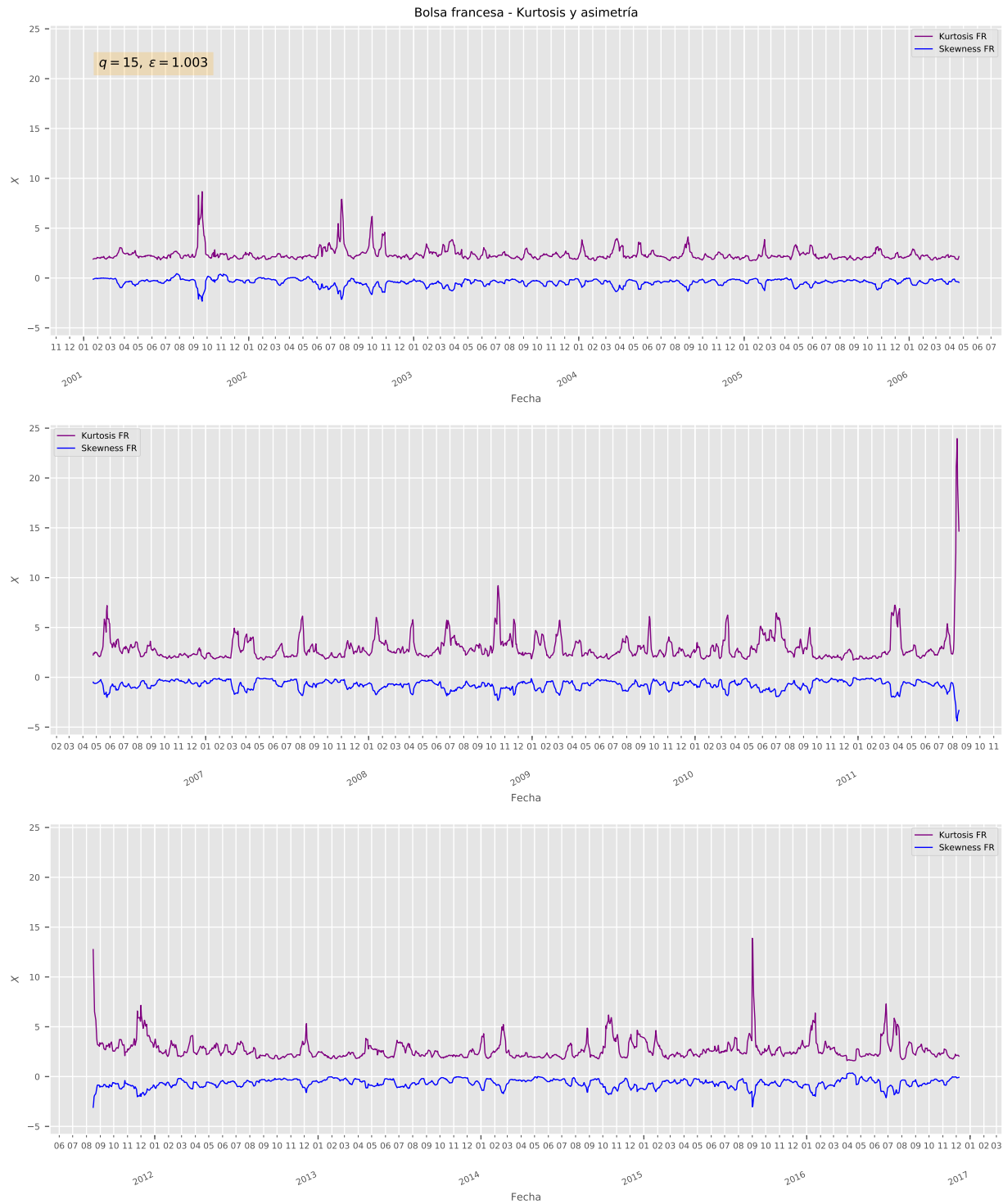


Figura 4.14: Kurtosis y asimetría de las matrices de correlación para Francia.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de las correlaciones (días).

señales de  $\lambda_{\min}$  francesa y alemana, en el mercado inglés sólo es notable un par de mínimos («picos») prominentes a mediados de diciembre de 2014 y en septiembre de 2015.

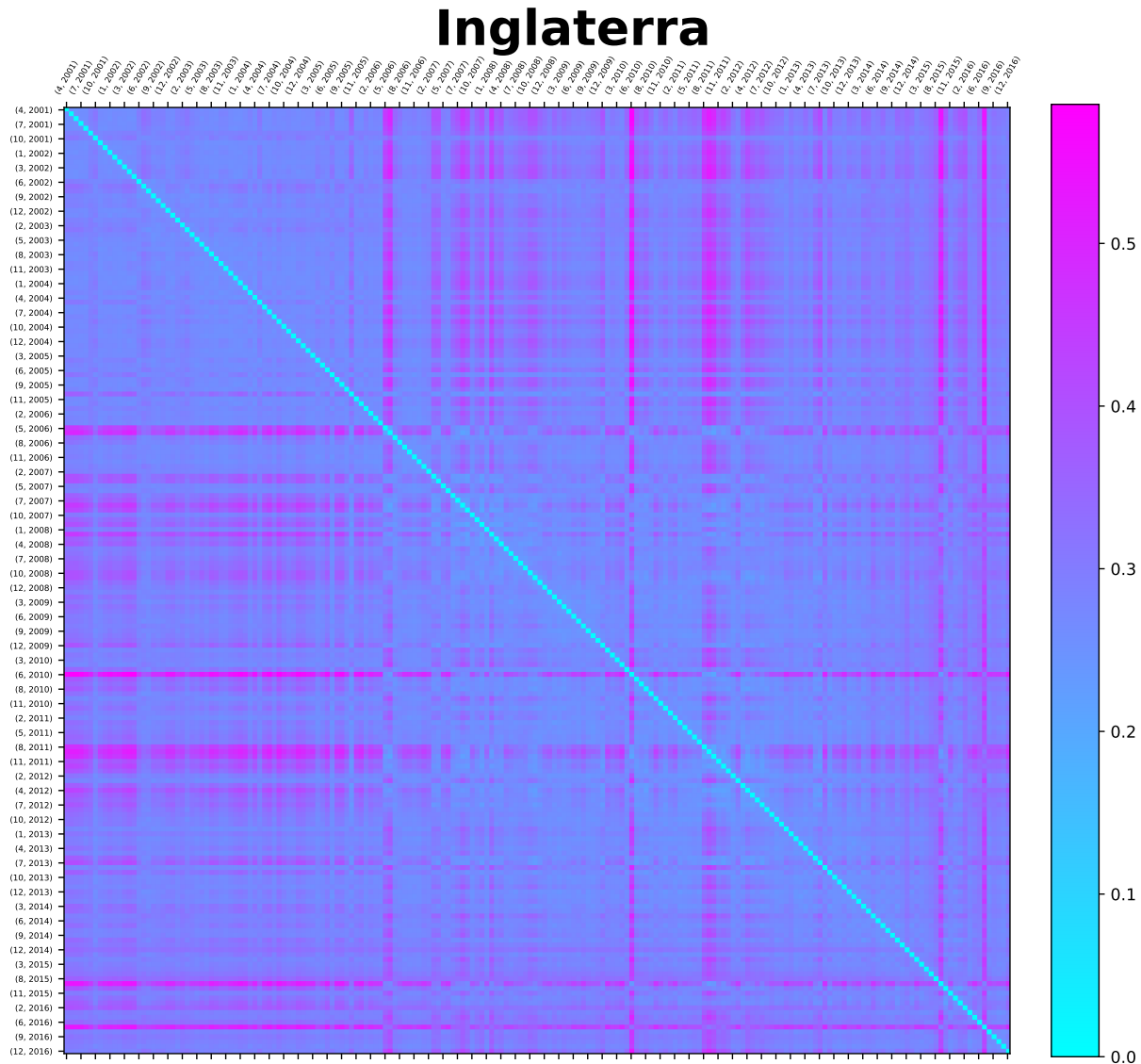


Figura 4.15: Matriz de similitud del mercado inglés.

En la figura 4.17 se muestran los promedios  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i < j}$  y  $\langle |C_{ij}(t)| \rangle_{i < j}$  de las matrices de correlación inglesas en función de la época. Como se ha mencionado en los casos anteriores, la diferencia entre estos promedios da una medida concreta de las correlaciones negativas totales del mercado: éstas son predominantes en el período de 2001 a mayo de 2005, volviéndose intermitente en el resto del tiempo de análisis excepto de abril a junio de 2006, período en donde se realizó el referéndum sobre la permanencia del Reino Unido en la Unión Europea<sup>8</sup>.

De hecho, de junio a agosto de 2016 puede notarse un aumento abrupto en el valor de  $\lambda_{\text{máx}}$  (figura 4.18), significativamente mayor al sufrido por la correlación promedio en el mismo período. Ésto es

<sup>8</sup>*United Kingdom European Union membership referendum, 2016*, en Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/United\\_Kingdom\\_European\\_Union\\_membership\\_referendum,\\_2016](https://en.wikipedia.org/wiki/United_Kingdom_European_Union_membership_referendum,_2016) (Consultado el 25 de abril de 2018).



Figura 4.16: Valores propios máximo y mínimo para Inglaterra.

consistente con el hecho bien conocido del efecto del *Brexit* sobre el mercado de valores inglés. Otros períodos críticos pueden rastrearse con los máximos de la figura 4.18, v.gr. septiembre de 2015, finales de octubre de 2011, fines de mayo de 2010 etc. En este sentido, y en concordancia con los resultados citados en [10], la serie de tiempo de  $\lambda_{\min}$  puede representar una señal de alerta temprana (del orden



Figura 4.17: Promedio y valor absoluto del promedio de las matrices de correlación para Inglaterra.

de días) para eventos catastróficos.

En la figura 4.19 puede apreciarse con mayor precisión la afirmación del párrafo anterior: en períodos críticos, la señal de  $\lambda_{\min}$  parece estar (dado un lag de 1 o 2 días hacia atrás) correlacionada con la

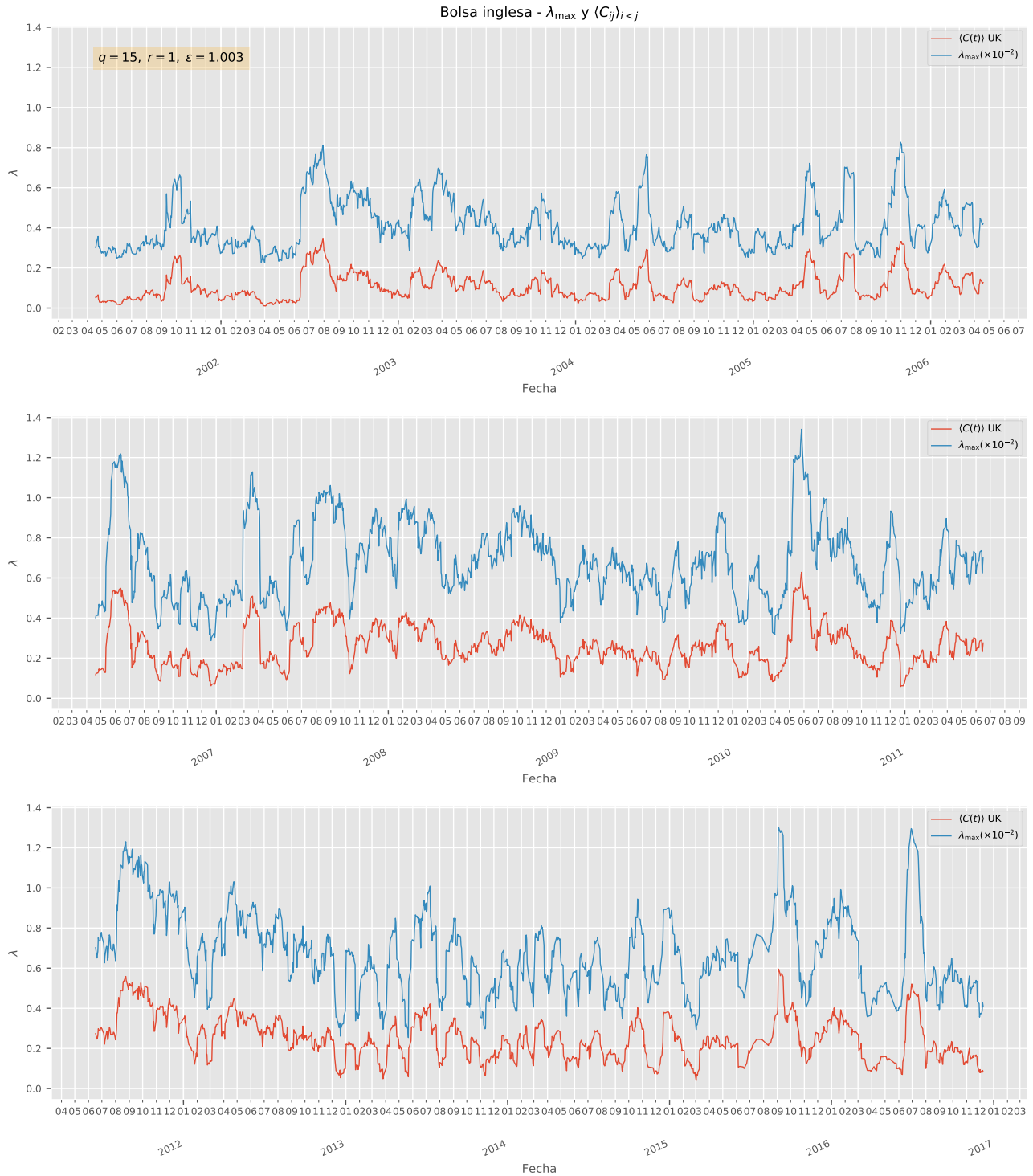


Figura 4.18: Valor propio máximo y promedio de las matrices de correlación para Inglaterra.

correlación promedio.

Por último, la figura 4.20 sugiere las siguientes observaciones: primero, que en el período de 2001 a mayo de 2005 la alta anticorrelación promedio (es decir,  $\langle |C_{ij}(t)| \rangle_{i < j} - \langle C_{ij}(t) \rangle_{i < j}$ ) coincide con la



Figura 4.19: Valor propio mínimo y promedio de las matrices de correlación para Inglaterra.

pérdida de correlación «perfecta» (igual a 1) entre las señales  $\lambda_{\max}$  y  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i < j}$ ; segundo, la correlación de la figura 4.20 es *cero* en épocas relacionadas a la estructura interna del mercado inglés (v.gr. *Brexit*, junio de 2016). Ésto último permite formular la siguiente hipótesis: ¿Los periodos de correlación nula entre  $\lambda_{\max}$  y  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i < j}$  se pueden asociar siempre a crisis internas? ¿La correlación



+1 correspondería a períodos de estabilidad, mientras que  $-1$  a *shocks* externos<sup>9</sup>?



Figura 4.20: Correlación lineal entre el valor propio máximo y el promedio de las matrices de correlación para Inglaterra. Se usaron ventanas temporales de 15 puntos (días).

<sup>9</sup>Es decir, eventos críticos inducidos por la actividad financiera en el extranjero.

### Momentos de orden superior de las matrices de correlación

La figura 4.21 muestra los momentos de órdenes 2, 3 y 4 de las matrices de correlación inglesas. En tal gráfica es notoria la presencia de mínimos en el momento de segundo orden (v.gr. entre julio y agosto de 2016, enero y septiembre de 2015, agosto de 2011), que indican una aglomeración de la distribución de las correlaciones alrededor de su media. Por otra parte, en los momentos de tercer y cuarto orden es notorio que, a diferencia de los casos francés y alemán, existen periodos de correlación (en lugar de anticorrelación, por tratarse de promedios de potencias impar y par de números acotados por  $[-1, 1]$ , respectivamente), v.gr. de 2010 a 2012.

La figura 4.22 muestra la kurtosis y asimetría de las matrices de correlación inglesas. La asimetría nunca es positiva porque, según lo descrito por los hechos estilizados (la correlación promedio es siempre positiva). Por otra parte, la presencia de máximos en la kurtosis (claramente anticorrelacionada con la asimetría) indica la presencia considerable de correlaciones o anticorrelaciones atípicas (v.gr. agosto de 2011, ver figura 4.23).

## 4.3. Análisis comparativo

### 4.3.1. Matrices de similitud para los índices STOXX Europe 600 y EuroSTOXX 50

La figura 4.24 muestra la matriz de similitud  $\langle |C_{ij}(t_1) - C_{ij}(t_2)| \rangle_{i \neq j}$  de las componentes del índice *STOXX Europe 600* (ver apéndice A para consultar los países y compañías componentes). En este caso, son notables las siguientes épocas con cambios notables en la estructura de correlación:

- |                                   |                                 |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| 1. Octubre de 2001.               | 10. Agosto a diciembre de 2011. |
| 2. Junio de 2002 a abril de 2003. | 11. Mayo a junio de 2012.       |
| 3. Enero de 2006.                 | 12. Junio de 2013.              |
| 4. Mayo a septiembre de 2006.     | 13. Septiembre de 2013.         |
| 5. Marzo de 2007.                 | 14. Mayo a julio de 2014.       |
| 6. Mayo de 2007.                  | 15. Noviembre de 2014.          |
| 7. Agosto a octubre de 2007.      | 16. Abril a octubre de 2015.    |
| 8. Enero a abril de 2008.         | 17. Mayo a agosto de 2016.      |
| 9. Abril a septiembre de 2010.    |                                 |

Por otra parte, la figura 4.25 muestra la matriz de similitud en el caso del *STOXX Europe 50*. Aunque ésta es más difusa (en el sentido de tener una "distinción" menos clara entre los colores), es posible notar las siguientes épocas con cambios fuertes en la estructura de las correlaciones:

- |                        |                       |
|------------------------|-----------------------|
| 1. Septiembre de 2001. | 3. Mayo de 2004.      |
| 2. Agosto de 2002.     | 4. Noviembre de 2005. |



Figura 4.21: Momentos de orden superior de las matrices de correlación para Inglaterra.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de las correlaciones (días).

5. Junio de 2006.

7. Febrero de 2008.

6. Julio de 2007.

8. Abril de 2009.

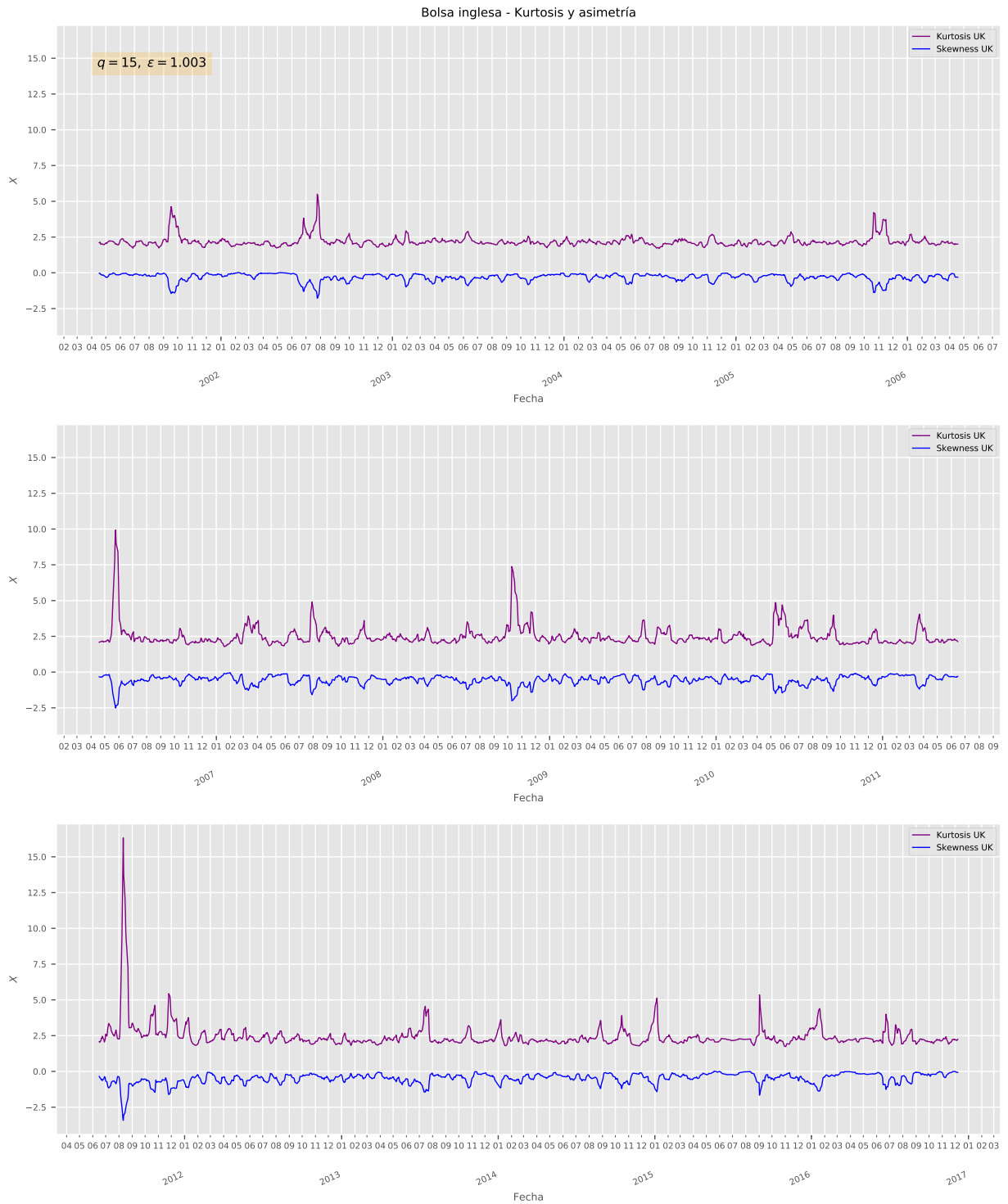


Figura 4.22: Kurtosis y asimetría de las matrices de correlación para Inglaterra.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de las correlaciones (días).

9. Noviembre a diciembre de 2009.

11. Enero a abril de 2013.

10. Julio de 2012.

12. Febrero de 2014.

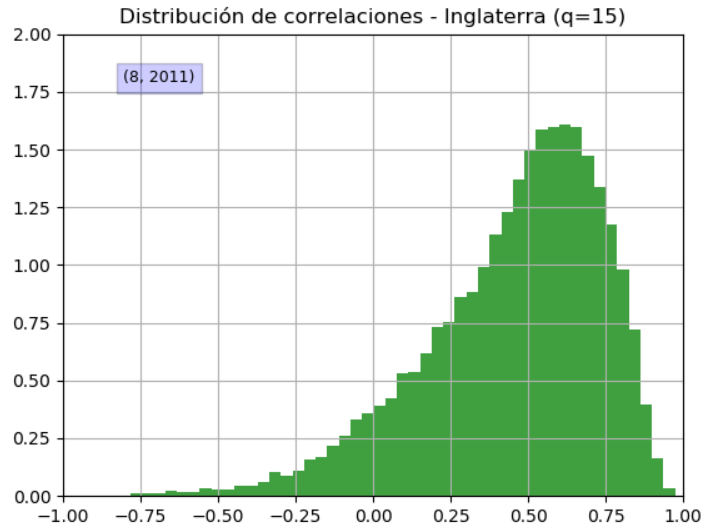


Figura 4.23: Distribución de las correlaciones entre los rendimientos del mercado inglés a principios de agosto de 2011. Éste histograma se relaciona con el máximo en la kurtosis y mínimo en la asimetría de la figura 4.22

13. Julio de 2015.

particularmente notables las franjas

14. Mayo a diciembre de 2016, siendo

obscuras en junio y septiembre.

### 4.3.2. Comparación entre Alemania, Francia e Inglaterra

En la gráfica 4.26 se muestran (tras un reescalamiento apropiado) los valores propios máximos de las matrices de correlación de cada mercado en función de la época, incluyéndose aquellos del ensemble dado por el índice *STOXX Europe 600*. La línea azul, correspondiente al mercado alemán, constituye una serie de tiempo con un comportamiento notoriamente distinto al resto de curvas (v.gr junio a septiembre de 2016). Esta observación lleva a la siguiente hipótesis: los mercados francés e inglés, vistos como algún tipo de sistema dinámico, están *esencialmente acoplados*, y ambos son representativos del mercado europeo. La figura 4.27 muestra una comparación similar de los tres países, pero ahora con las componentes del índice *EuroSTOXX 50*; en este caso, los periodos de acoplamiento entre las 3 señales son menos frecuentes, pero globalmente es posible dar la misma observación: los mercados inglés y francés están acoplados y tienen una dinámica representativa de toda Europa, mientras que el mercado alemán sigue una evolución distinta en épocas claramente distinguibles.

Para dar una medida más objetiva de tal parecido, calculamos el coeficiente de correlación entre las señales de  $\lambda_{\text{máx}}$  para cada posible par de países. Éste se muestra en la gráfica 4.28, donde es evidente que la curva asociada a la correlación entre Inglaterra y Francia es predominantemente igual a 1.

Una posible manera de comparar la *dinámica interna* de cada país (como se ha mencionado en secciones anteriores), es calcular el coeficiente de correlación de Pearson entre  $\lambda_{\text{máx}}$  y  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i \neq j}$  a través de una cierta ventana temporal (en este caso, elegida de 15 puntos (días)). La figura 4.29 muestra dichos coeficientes como función de la época para cada país. En este caso, es posible observar que esta correlación es esencialmente distinta para cada país.

En la figura 4.30 se muestra una comparación de la asimetría (*skewness*) de las entradas no diagonales en las matrices de correlación de cada mercado. Esta imagen representa una evidencia para la hipótesis del acoplamiento entre los mercados francés e inglés, y la dinámica esencialmente distinta del mercado alemán.

La figura 4.31, por otra parte, la kurtosis de las matrices de correlación como función de la época.

Por último, la figura 4.32 muestra el coeficiente de bimodalidad (definido por la ecuación 3.12) para cada país. Esta señal es demasiado ruidosa, por lo que es difícil obtener una conclusión como la sugerida por las gráficas de la asimetría y kurtosis.

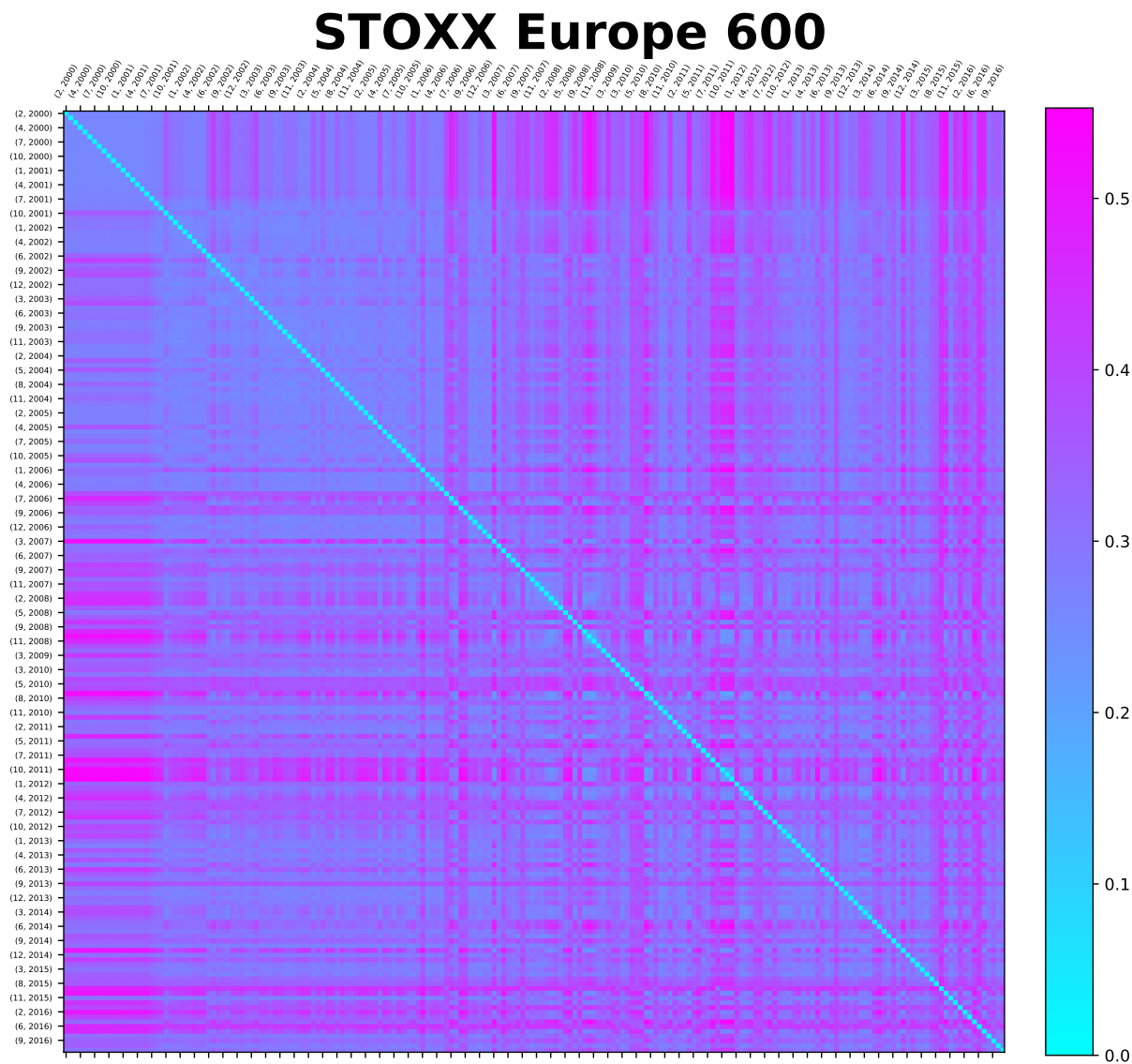


Figura 4.24: Matriz de similitud del mercado europeo, representado por un subconjunto representativo del las componentes del índice STOXX Europe 600.

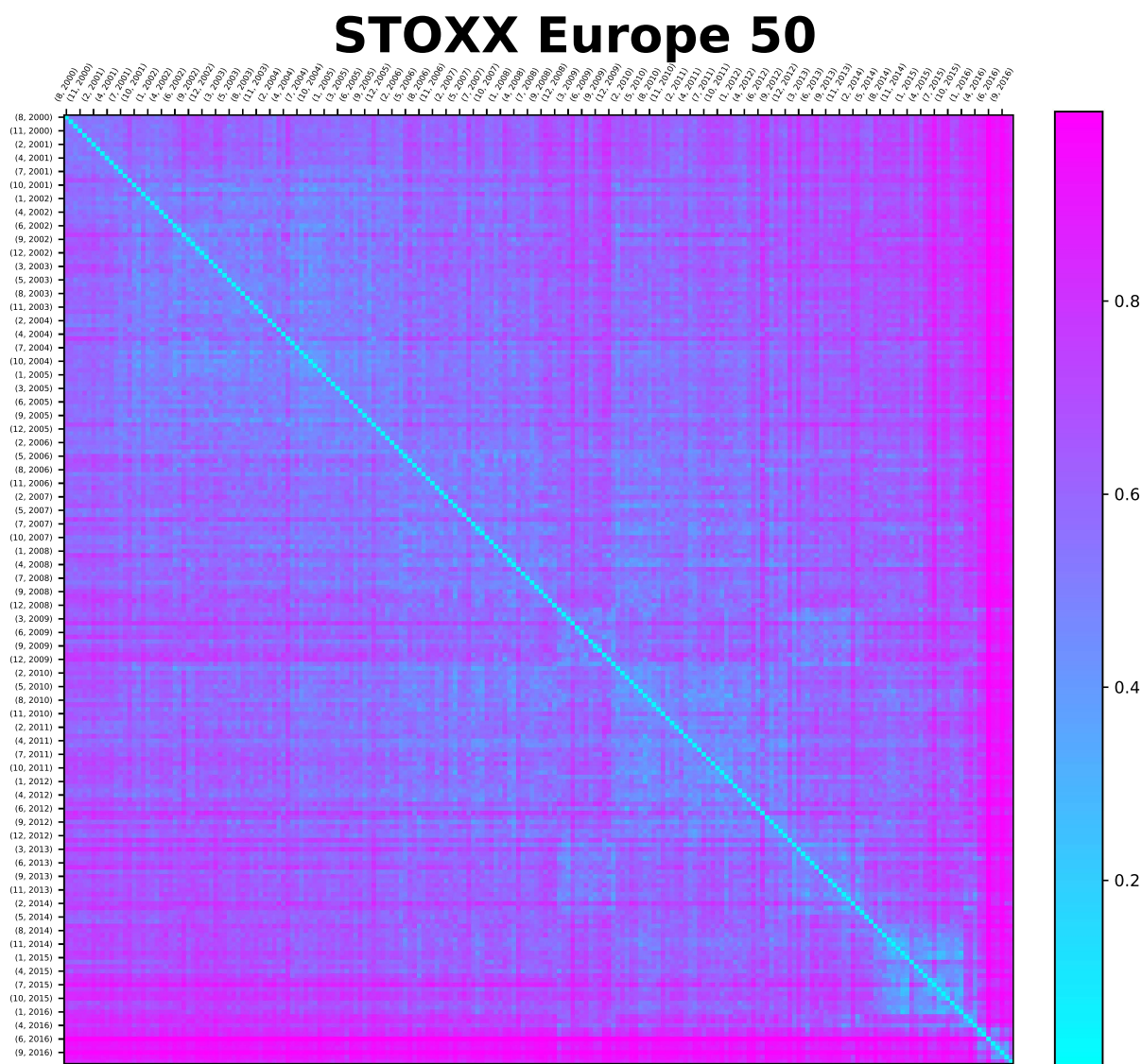


Figura 4.25: Matriz de similaridad del mercado europeo según el índice STOXX Europe 50.



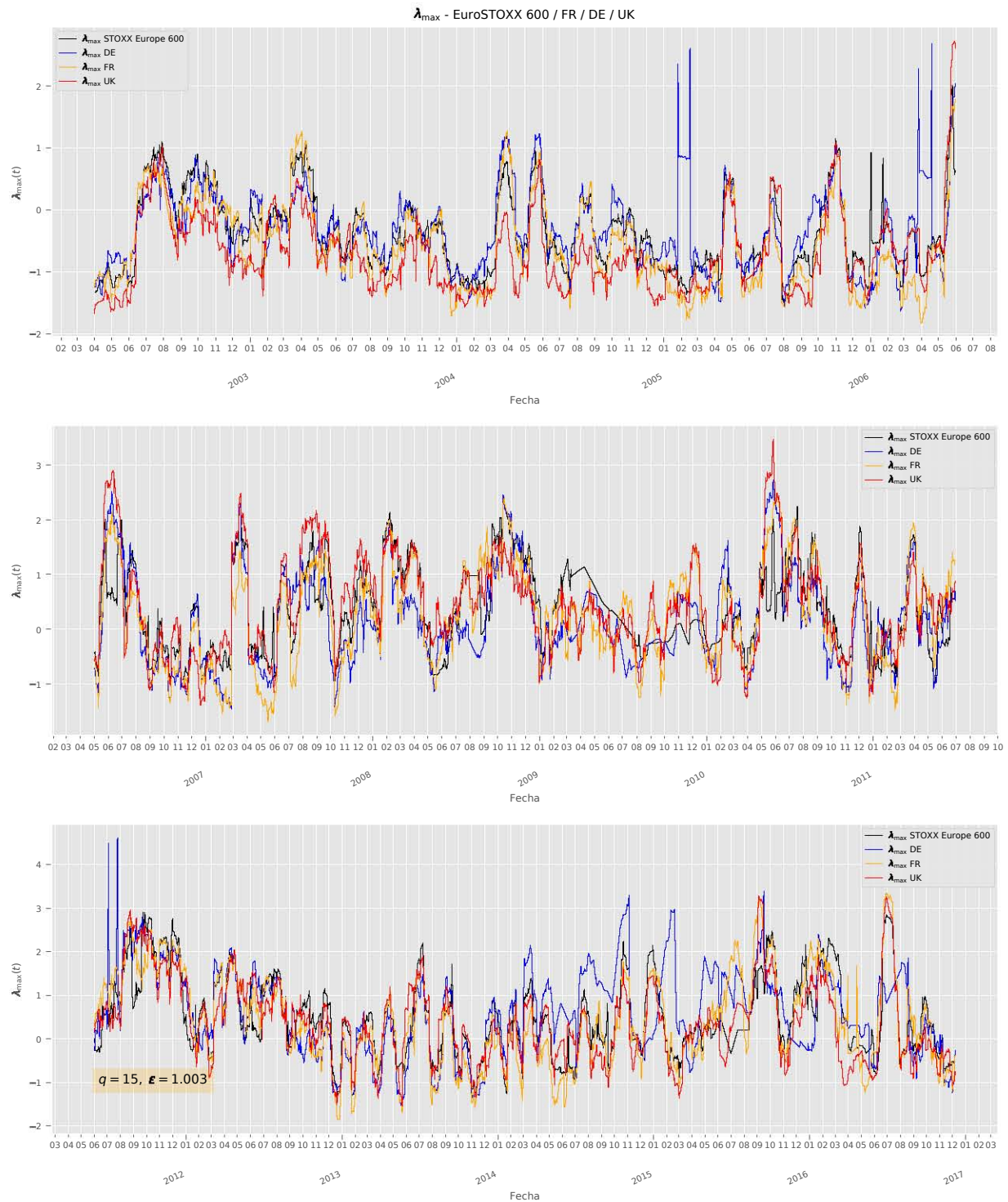


Figura 4.26: Valor propio máximo de las matrices de correlación para los tres países y las componentes del *STOXX Europe 600*.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de las correlaciones (días).

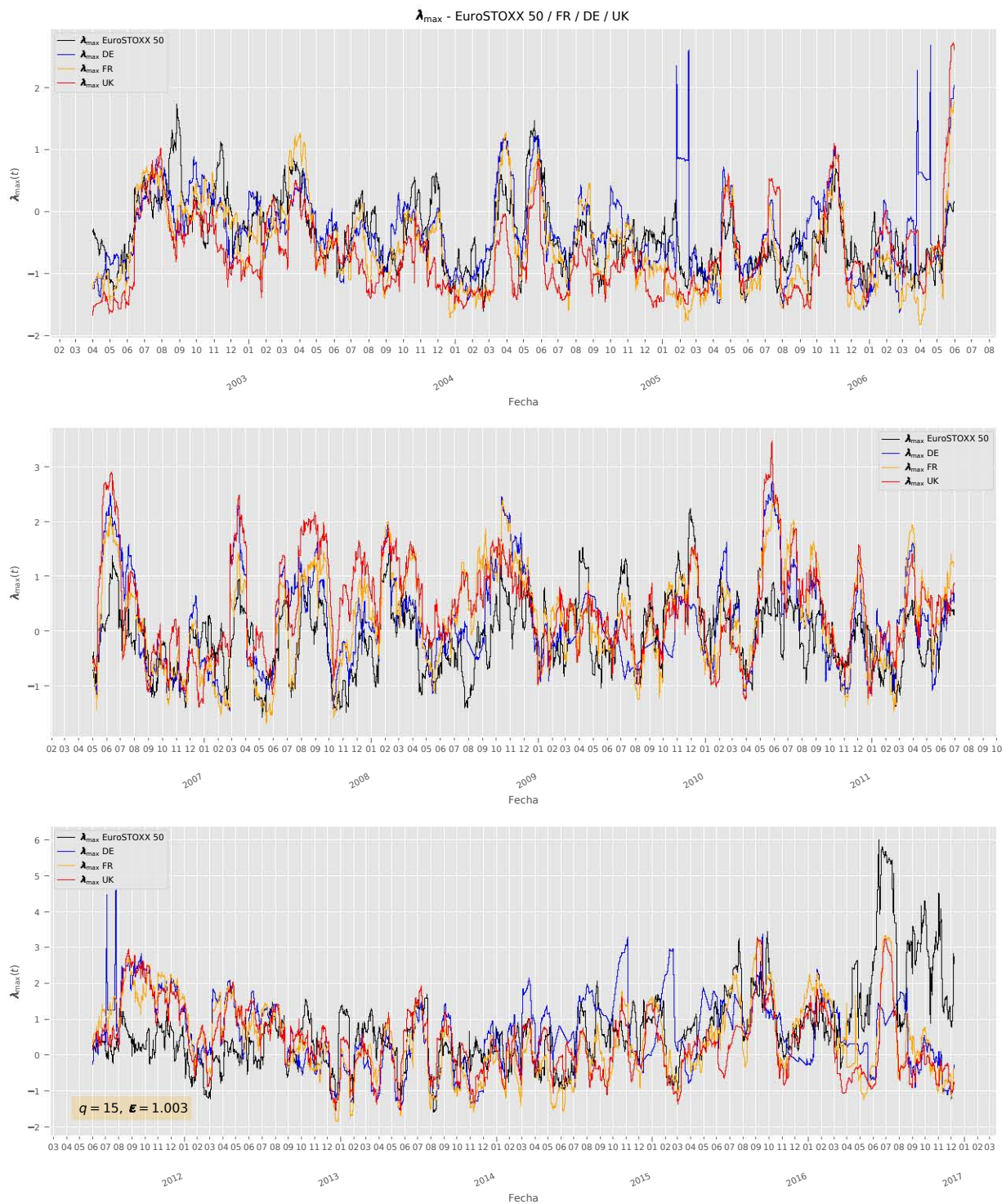


Figura 4.27: Valor propio máximo de las matrices de correlación para los tres países y las componentes del EuroSTOXX 50.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de las correlaciones (días).

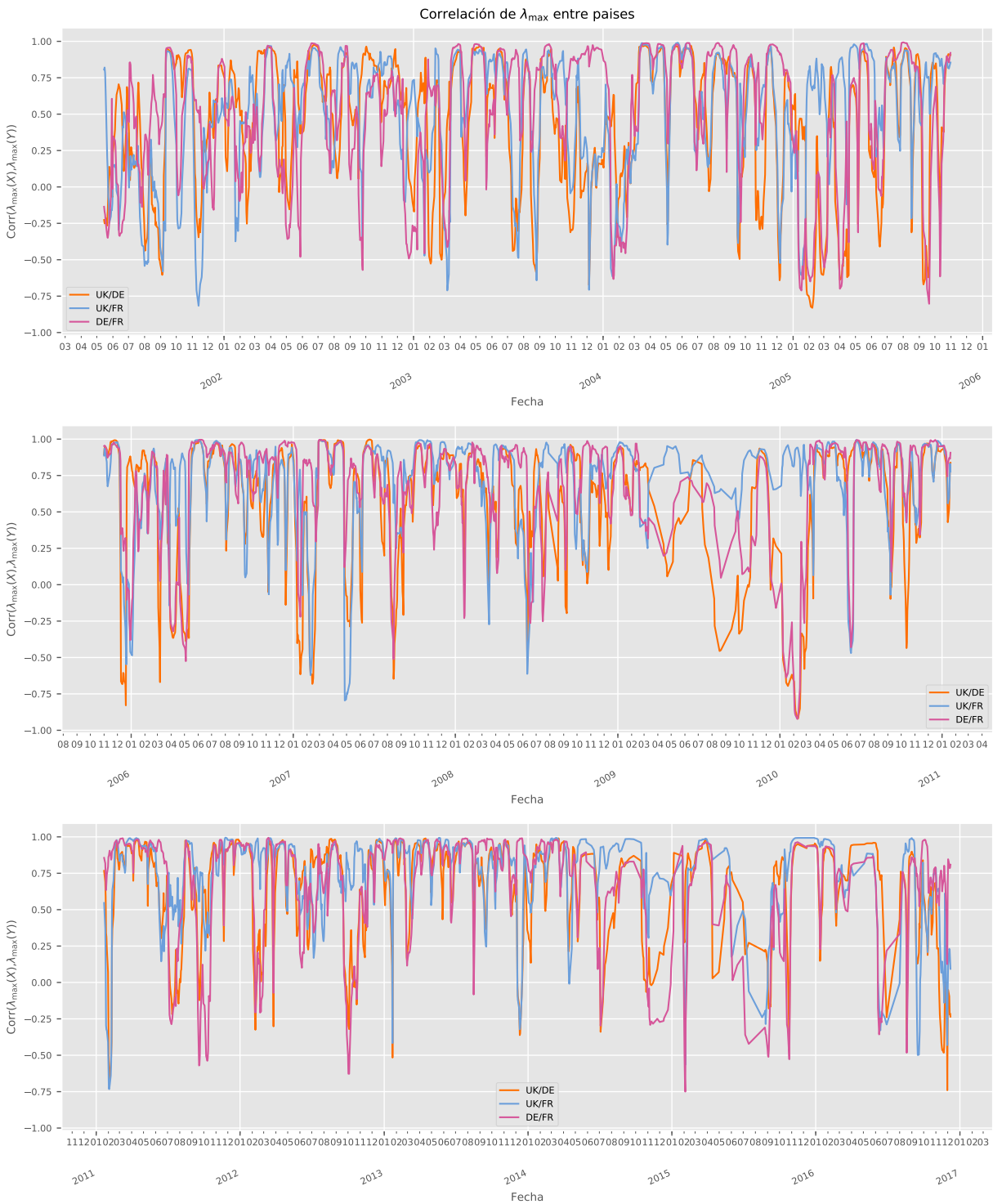


Figura 4.28: Correlación lineal entre el valor propio máximo de las matrices de correlación para parejas de países. En este caso se usó una ventana temporal del 15 días, con una deformación de *power map* de 1.01.

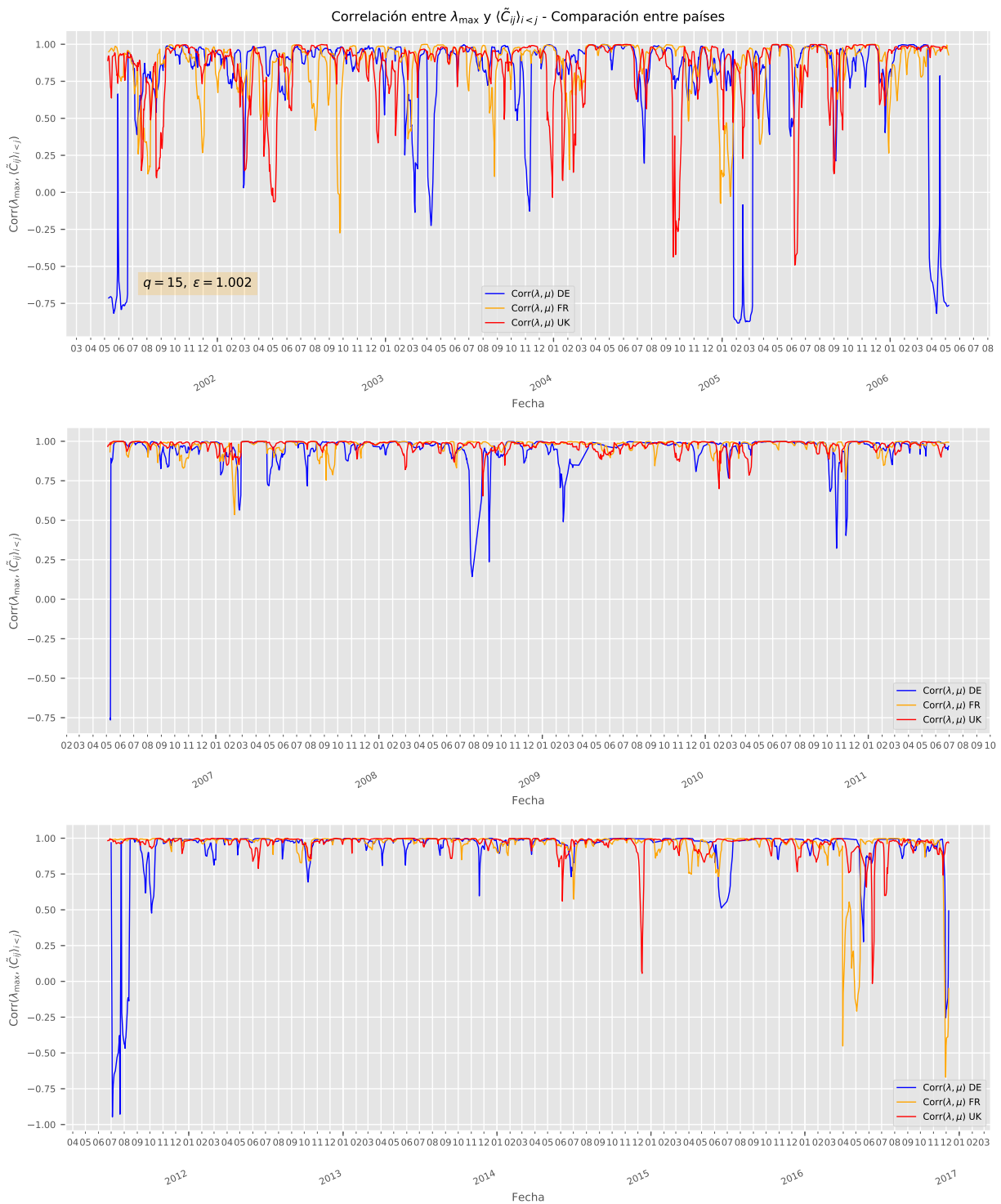


Figura 4.29: Correlación lineal entre el valor propio máximo y el promedio de las matrices de correlación.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de la nueva correlación.



Figura 4.30: Asimetría de las matrices de correlación para los tres países.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de las correlaciones (días).

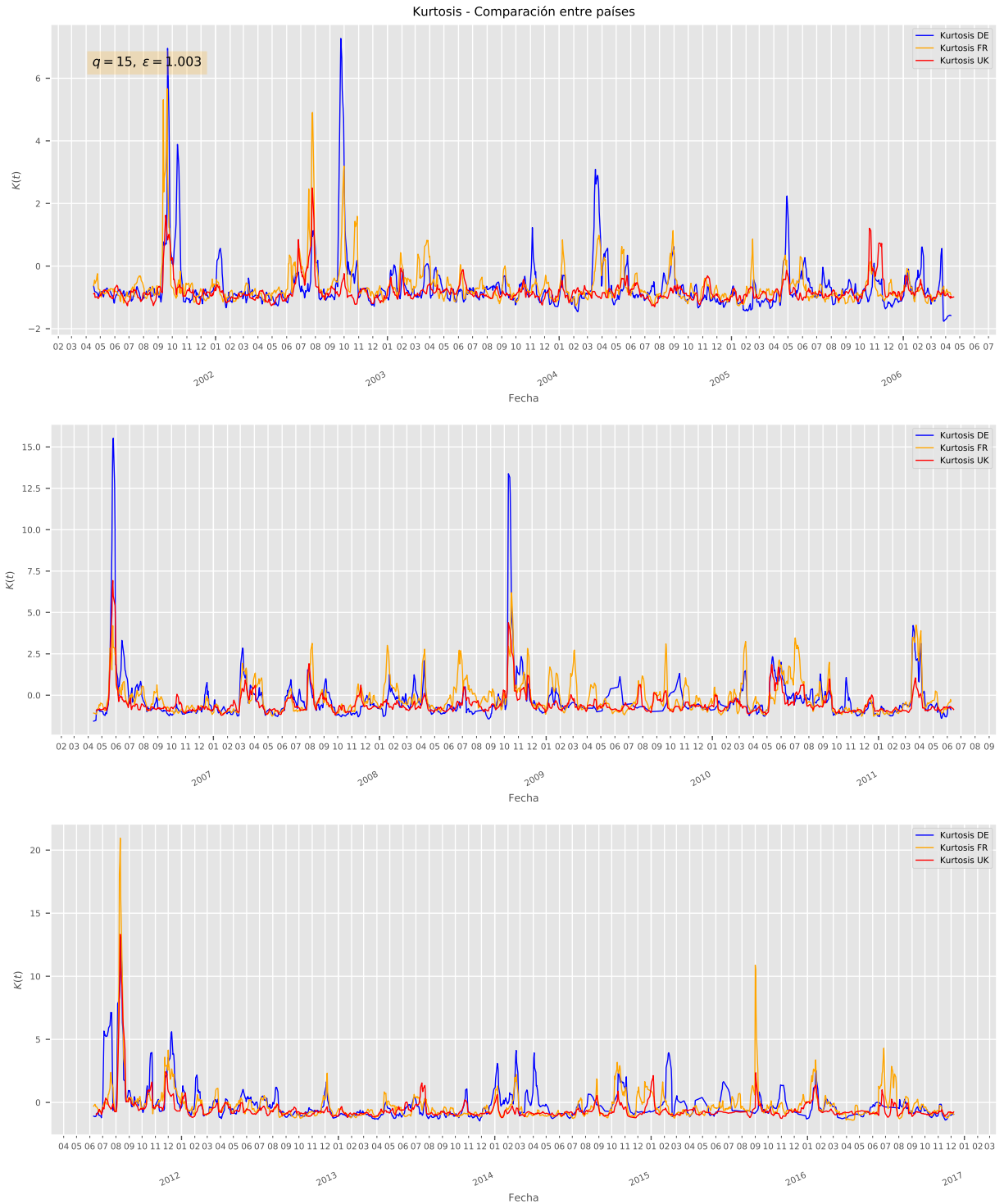


Figura 4.31: Kurtosis de las matrices de correlación para los tres países.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de las correlaciones (días).

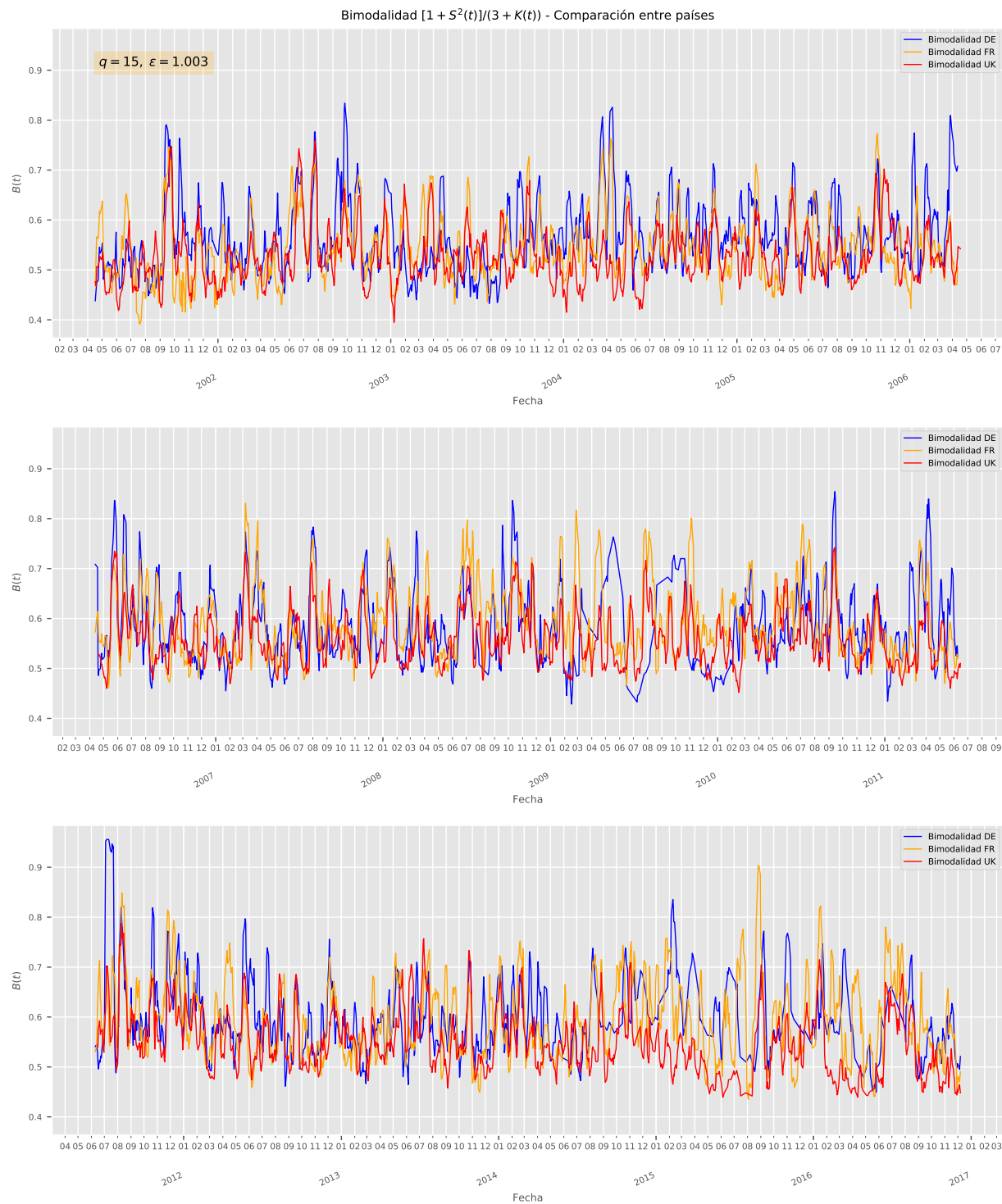


Figura 4.32: Bimodalidad de las matrices de correlación para los tres países.  $\epsilon$  representa la distorsión del *power map* y  $q$  es el tamaño de ventana de las correlaciones (días).

## Capítulo 5

# Conclusión

Los mercados inglés y francés muestran una dinámica altamente acoplada, con eventos extremos *prácticamente* coincidentes en el lapso analizado y evolución global representativa del mercado europeo (según las componentes de los índices *STOXX Europe 600* y *EuroSTOXX 50*); ésto se apoya en la alta similaridad de las señales de correlación promedio y valor propio máximo de las matrices de correlación entre series de tiempo de rendimientos de acciones. El mercado de Alemania, por otra parte, presenta una dinámica significativamente distinta; ésto puede deberse al número reducido de accionistas de la bolsa de Fráncfort (pertenecientes a unas pocas familias de élite) en comparación a los existentes en las bolsas inglesa y francesa (ver figura 5.1). A ésto debemos sumarle la baja capitalización de la bolsa alemana, así como a su sector financiero poco desarrollado [41, 19].

En [6] se muestra que  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i \neq j}$  es un indicador importante de las crisis y la tendencia a hacer ventas de pánico; además, ésta señal está fuertemente correlacionada con  $\lambda_{\text{máx}}$ . Al comparar la dinámica individual con la dada por el cúmulo de *STOXX Europe 600* y *EuroSTOXX 50*, es posible ver que el mercado inglés domina individualmente la dinámica europea: los valores propios máximos están fuertemente correlacionados y presentan los mismos valores extremos (bien marcados, además, por las matrices de similaridad). Por otra parte, la relación entre la anticorrelación promedio y el acoplamiento de las señales  $\lambda_{\text{máx}}$  y  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i \neq j}$  sugiere que el mercado francés es más susceptible a ser influida por los mismos eventos que cambian al mercado inglés.

El valor propio mínimo del espectro emergente ( $\lambda_{\text{mín}}$ ), por último, presenta correlaciones y anticorrelaciones con  $\lambda_{\text{máx}}$  dado un retraso en ésta señal de 1 a 3 días, lo que sugiere fuertemente que *el espectro emergente constituye un precursor de los eventos críticos* (ver figuras 5.2,5.3). Además, la correlación lineal entre el valor propio máximo y el promedio (sobre las entradas) de las matrices sucesivas de correlación entre rendimientos, también parece ser significativa al mostrar los eventos críticos e internos de cada mercado (ver figuras 5.4,5.5).



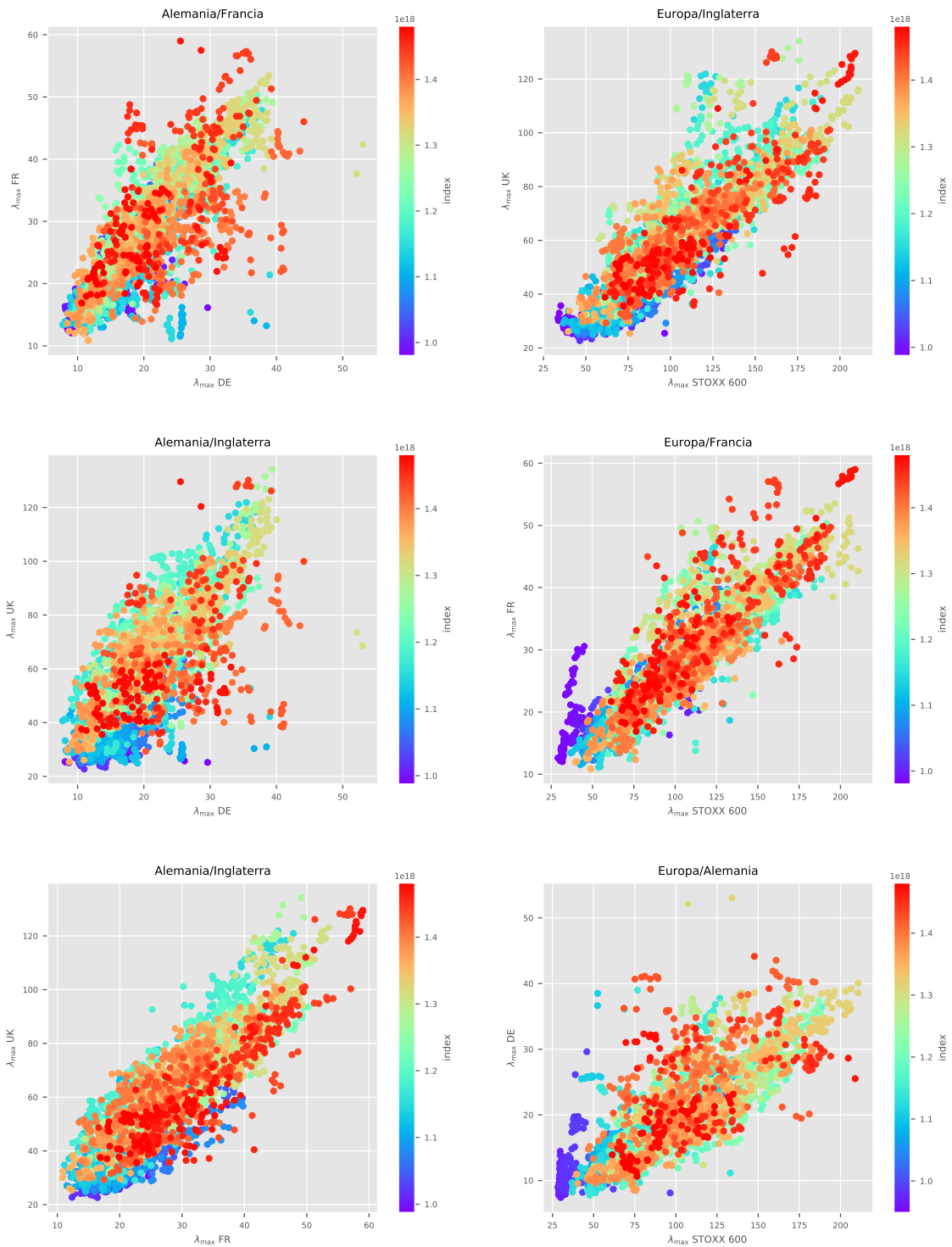
Diagramas de dispersión ( $\lambda_{\max}$ )

Figura 5.1: Diagramas de dispersión para  $\lambda_{\max}$  para distintos apareamientos de mercados. Es notoria la mayor dispersión de puntos en las gráficas con valores alemanes. Colores más rojos indican puntos más recientes.

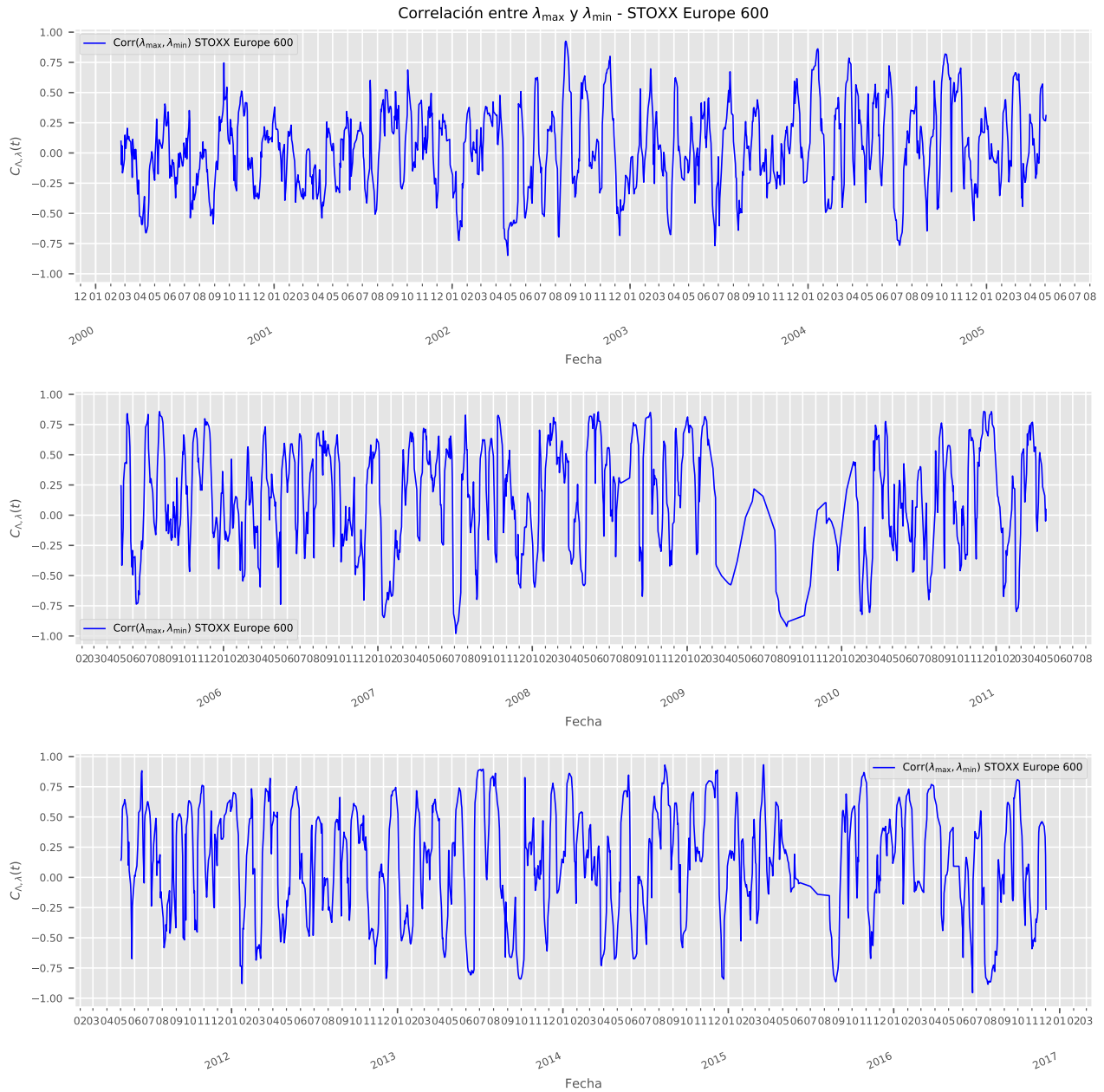


Figura 5.2: Coeficiente de correlación de Pearson como función del punto final  $t$  entre  $\lambda_{\max}(t)$  y  $\lambda_{\min}(t-2)$ , usando ventanas de 15 puntos sucesivos con traslape.

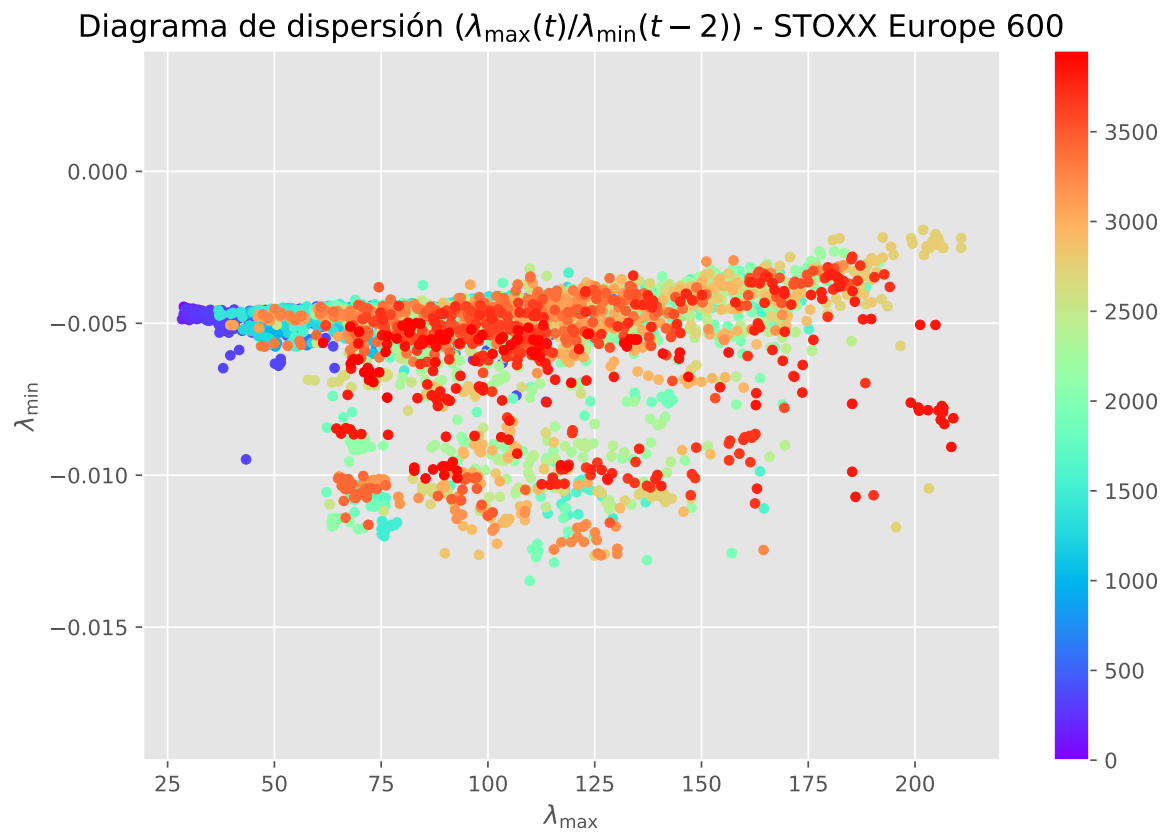


Figura 5.3: Diagrama de dispersión entre  $\lambda_{\max}(t)$  y  $\lambda_{\min}(t-2)$ , donde se sugiere una relación no lineal entre  $\lambda_{\max}$  y  $\lambda_{\min}$ . Colores corridos al rojo indican puntos más recientes.

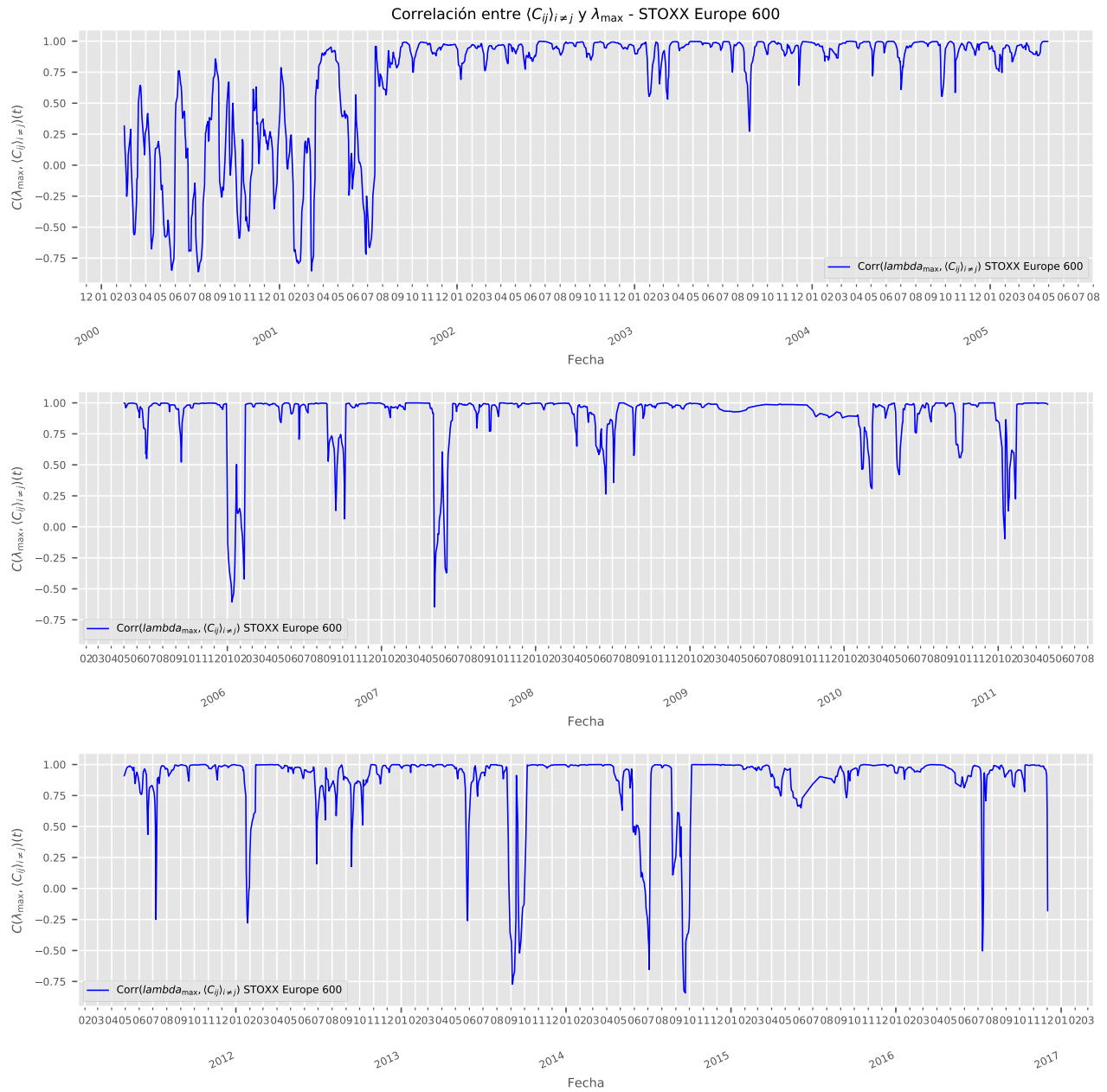


Figura 5.4: Coeficiente de correlación de Pearson como función del punto  $t$  final entre  $\lambda_{\max}(t)$  y  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i \neq j}$ , usando ventanas de 15 puntos sucesivos con traslape.

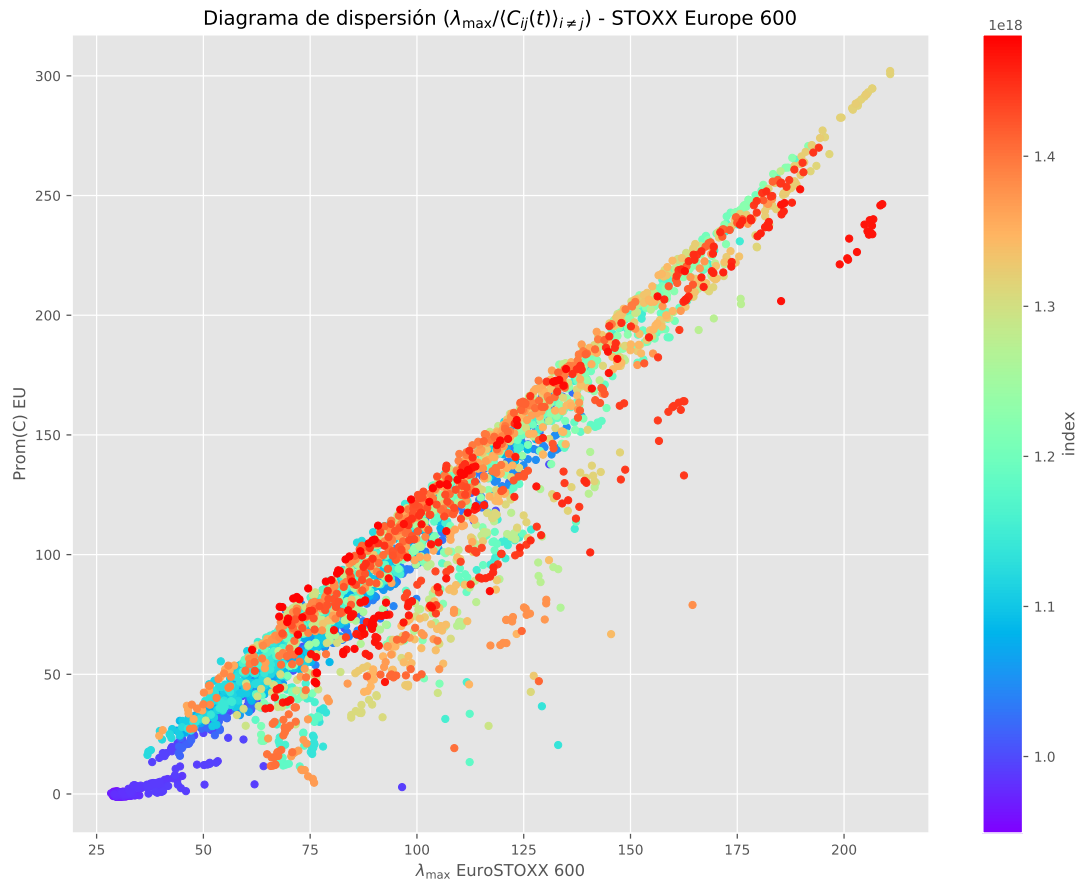


Figura 5.5: Diagrama de dispersión entre  $\lambda_{\max}(t)$  y  $\langle C_{ij}(t) \rangle_{i \neq j}$ . Es aparente una relación lineal entre ambas cantidades, mas un examen más detallado indica relaciones más complicadas. Colores corridos al rojo indican puntos más recientes.

# Apéndice A

## Manejo de los datos

### A.1. Los países europeos con mayor participación bursátil

Los índices que consideramos engloban la actividad financiera de un limitado subconjunto de países europeos. En el estándar *ISO 3166-1*<sup>1</sup> para nombrar países, territorios dependientes y otras áreas geográficas de interés, existen los códigos *alpha-2* que, según la siguiente tabla, listan dichos países.

País	Código	País	Código
Austria	AT	Reino Unido	GB
Bélgica	BE	Irlanda	IE
Suiza	CH	Italia	IT
República Checa	CZ	Luxemburgo	LU
Alemania	DE	Países Bajos	NL
Dinamarca	DK	Noruega	NO
España	ES	Portugal	PT
Finlandia	FI	Suecia	SE
Francia	FR		

Cuadro A.1: Códigos de los países en los índices STOXX Europe 50 y STOXX Europe 600, según el estándar *ISO 3166-1 alpha-2*

Generalmente los centros bursátiles se encuentran en la capital de cada país, pero pueden localizarse en otras metrópolis (como en el caso de Fráncfort del Meno o Zúrich). En cada bolsa se utilizan *teletipos bursátiles* (en inglés *Ticker Symbol*) para listar los valores negociados; estos símbolos consisten en un arreglo único de caracteres (normalmente letras) para identificar y comerciar diariamente los valores cotizados<sup>2</sup>. Por ejemplo, *Air France* tiene el símbolo **AF.PA**; las primeras iniciales hacen referencia al nombre de la empresa, y *.PA* indica que la acción se cotiza en la bolsa de París.

<sup>1</sup>*International Organization for Standardization.*

<sup>2</sup><https://www.investopedia.com/terms/t/tickersymbol.asp#ixzz5F7FCc7z6> (Consultado el 25 de abril de 2018).

## A.2. STOXX TMI - Alemania

Como se discutió en el 4, escogimos un subconjunto de acciones del índice *STOXX TMI* para Alemania, considerando un horizonte temporal de aproximadamente 10 años con registros continuos. La tabla A.2 da la lista completa.

Sector	Componentes
Servicios públicos	[EOAN.FRWE.F]
Bancos	[DBK.F,CBK.F]
Viajes y ocio	[LHA.F]
Industria automotriz	[DAL.F,BMW.F,VOW3.F,CON.F,VOW.F,BMW.F]
Bienes inmobiliarios	[TEG.F,DEQ.F]
Comercio minorista	[FIE.F]
Industria alimentaria	[SZU.F]
Tecnología	[SAP.F,IFX.F,UTDI.F,DLG.F,BC8.F]
Seguros	[MUV2.F,HNR1.BE]
Telecomunicaciones	[DTE.F,FNTN.F,DRI.F]
Servicios sanitarios	[FRE.F,FME.F,MRK.F,EVT.F,SAZ.F,AFX.F]
Químicos	[LIN.F,LXS.F,SDF.F,FPE.F,FPE.F]
Recursos básicos	[NDA.F,SZG.F]
Construcción y materiales	[HOT.F]
Bienes industriales y servicios	[SIE.F,DPW.F,TKA.F,G1A.F,MAN.F,FRA.F,SRT.F,GLJ.F,EVD.F,RAA.F,JUN3.F,CRN.F,GBF.F]
Servicios financieros	[DB1.F]
Medios de comunicación	[SPR.F]
Bienes personales y domésticos	[ADS.F,HEN3.F,BELF,BOSS.F]

Cuadro A.2: Acciones alemanas analizadas, organizadas por sectores.

## A.3. STOXX TMI - Francia

Sector	Componentes
Servicios públicos	[ENGI.PA,VIE.PA,RUI.PA]
Bancos	[BNP.PA,GLE.PA]
Viajes y ocio	[SW.PA,AC.PA,AF.PA]
Industria automotriz	[ML.PA,RNO.PA,UG.PA,EO.PA,POM.PA]
Bienes inmobiliarios	[LI.PA,GFC.PA,FDR.PA,ICAD.PA]
Comercio minorista	[KER.PA,CA.PA,CO.PA]
Industria alimentaria	[BN.PA,RI.PA,RCO.PA]
Tecnología	[CAP.PA,ATO.PA,DSY.PA,ING.PA,SOP.PA,ALT.PA,ATE.PA,NEO.PA]
Seguros	[CS.PA,SCR.PA,CNP.PA,ELE.PA]
Telecomunicaciones	[ORA.PA]
Servicios sanitarios	[SAN.PA,EI.PA,ERF.PA,DIM.PA,KORI.PA]
Químicos	[AL.PA]
Recursos básicos	[NK.PA]
Petróleo y gas	[FP.PA]
Construcción y materiales	[DG.PA,SGO.PA,EN.PA,FGR.PA,VCT.PA]
Bienes industriales y servicios	[SU.PA,SAF.PA,HO.PA,RCF.PA,ZC.PA,BOL.PA,RF.PA,AM.PA,VK.PA,ODET.PA]
Servicios financieros	[MF.PA]
Medios de comunicación	[VIV.PA,PUB.PA,MMB.PA,HAV.PA,TFI.PA,MMT.PA,IPS.PA,TCH.PA]
Bienes personales y domésticos	[MC.PA,OR.PA,RMS.PA,UBL.PA,SK.PA,CDI.PA,BB.PA]

Cuadro A.3: Acciones francesas analizadas, organizadas por sectores.

## A.4. FTSE 350 - Inglaterra

En el caso de Inglaterra hemos intentado reclasificar los sectores originales para hacerlos consistentes con los casos alemán y francés. No obstante, éstos carecen, al menos en los índices, de sector aeroespacial y de defensa.

Sector	Componentes
Industria aeroespacial y de defensa	[BA.L,COB.L,GKN.L,MGGT.L,RR.L,SNR.L,ULE.L]
Servicios públicos	[CNA.L,NG.L,PNN.L,SVT.L,UU.L]
Bancos	[BARC.L,CBG.L,HSBA.L,RBS.L,STAN.L]
Viajes y ocio	[CCL.L,CPG.L,DOM.L,EZJ.L,FGP.L,GOG.L,GNK.L,LCL.L,MARS.L,MLC.L,NEX.L,PPB.L,RNK.L,SGC.L,JDW.L,WTB.L]
Industria automotriz	
Bienes inmobiliarios	CLL.L,DJAN.L,GWW.SVS.L,SMP.L,BYG.L,BLND.L,DLN.L,GPOR.L,HMSO.L,INTU.L,LAND.L,SGRO.L,SHB.L,UTG.L,WKP.L]
Comercio minorista	[GRG.L,MRW.L,RTN.L,SBRY.L,TSCO.L,INCH.L,JD.L,KGF.L,MKS.L,MTO.L,NXT.L]
Industria alimentaria	[BAG.L,DGE.L,ABF.L,BTI,CWK.L,DCG.L,GNC.L,TATE.L]
Tecnología	[AVV.L,CCC.L,FDSA.L,RENX,SGE.L]
Seguros	[AV.L,LGEN.L,OML.L,PRU.L,STJ.L,HSX.L,JLT.L,RSA.L]
Telecomunicaciones	[TEP.L,VOD.L]
Servicios sanitarios	[AZN.L,DPH.L,GNS.L,GSK.L,SHP.L,SN.L,UDG.L]
Químicos	[CRDA.L,ELM.L,JMAT.L,SYNT.L,VCT.L]
Recursos básicos	[AAL.L,ANTO.L,BLT.L,PDL.L,RRS.L,RIO.L]
Petróleo y gas	[BP.L,CNE.L,RDSB.L,TIW.L,AMFW.L,HTG.L]
Construcción y materiales	[BBY.L,CRH.L,KIE.L,MSL.H.L]
Bienes industriales y servicios	[AGK.L,AHT.L,BAB.L,BNZL.L,BRSN.L,CPIL.DCC.L,DPLM.L,ECM.L,HAS.L, HSV.L,HWDN.L,NTG.L,PAGE.L,RTO.L,SRP.L,TPK.L,SSE.L,HLMA.L,MGAM.L,RSW.L, * SXS.L,COA.L,RPC.L,SMDS.L,SMIN.L,VSVS.L,BOY.L,HILS.L,IML.L,ROR.L,SPX.L, * WEIR.L,BBA.L,CKN.L,FSJ.L]
Servicios financieros	[ATST.L,BNKR.L,BTEM.L,EDIN.L,EMP.FEV.L,FGT.L,GSS.L,JMG.L,JHL, * MYL,PLI.L,PNL.L,PCT.L,RCP.L,SCIN.L,TMPL.L,TRY.L,WWH.L,ADN.L, * III.L,BRW.L,ICP.L,LSE.L,EMG.L,NXG.L,PAG.L,PGF.L,RAT.L,SDR.L,TCAP.L]
Medios de comunicación	[ERM.L,INF.L,ITV.L,PSON.L,SKY.L,UBM.L,WPP.L]
Bienes personales y domésticos	[PZC.L,TED.L,UULV.L,BDEV.L,BWY.L,BKG.L,BVS.L,CLLN.L,GFRD.L,PSN.L,RB.L,RDW.L,SIG,TW.L]

Cuadro A.4: Acciones inglesas analizadas, organizadas por sectores.

## A.5. STOXX Europe 50

Éste índice da una representación de los principales sectores Europeos, agrupando 50 acciones de los siguientes 17 países: Austria, Bélgica, República Checa, Dinamarca, Finlandia, Francia, Alemania, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Países Bajos, Noruega, Portugal, España, Suecia, Suiza y el Reino Unido <sup>3</sup>.

En la tabla A.5 listamos las componentes de éste índice <sup>4</sup>:

## A.6. STOXX Europe 600

El índice escogido para representar más detalladamente las generalidades del mercado europeo fue *STOXX Europe 600*, de la bolsa de valores de Frankfurt. Los países que lo componen se listan en la siguiente tabla.

Los sectores a los que pertenecen las acciones analizadas, junto con el número de componentes, se resumen en la siguiente tabla:

Para depurar los componentes del índice *STOXX Europe 600*, se consideró:

- Período de análisis (UTC)<sup>5</sup> 12 de julio de 2001 - 8 de diciembre de 2016.
- Número de precios por acción: al menos 3970.

<sup>3</sup><https://www.stoxx.com/index-details?symbol= SX5P> (Consultado el 25 de abril de 2018).

<sup>4</sup>El símbolo sirve para ubicar en el mercado de acciones a la empresa y la ciudad donde cotiza.

<sup>5</sup>Tiempo universal coordinado.



Símbolo	Empresa	Sector	País
FP.PA	TOTAL	Petróleo y gas	FR
SIE.F	SIEMENS	Bienes industriales y servicios	DE
SAP.F	SAP	Tecnología	DE
BAYN.F	BAYER	Químicos	DE
ALV.F	ALLIANZ	Seguros	DE
SAN.MC	BCO SANTANDER	Bancos	ES
SAN.PA	SANOFI	Servicios sanitarios	FR
BAS.F	BASF	Químicos	DE
UNA.AS	UNILEVER NV	Bienes personales y domésticos	NL
BNP.PA	BNP PARIBAS	Bancos	FR
ABI.BR	ANHEUSER-BUSCH INBEV	Industria alimentaria	BE
DAI.F	DAIMLER	Industria automotriz	DE
MC.PA	LVMH MOET HENNESSY	Bienes personales y domésticos	FR
INGA.AS	ING GRP	Bancos	NL
ASML.AS	ASML HLDG	Tecnología	NL
CS.PA	AXA	Seguros	FR
AIR.PA	AIRBUS	Bienes industriales y servicios	FR
DTE.F	DEUTSCHE TELEKOM	Telecomunicaciones	DE
BBVA.MC	BCO BILBAO VIZCAYA ARGENTARIA	Bancos	ES
DG.PA	VINCI	Construcción y materiales	FR
AI.PA	AIR LIQUIDE	Químicos	FR
OR.PA	L'OREAL	Bienes personales y domésticos	FR
BN.PA	DANONE	Industria alimentaria	FR
ENEL.MI	ENEL	Servicios públicos	IT
ISP.MI	INTESA SANPAOLO	Bancos	IT
SU.PA	SCHNEIDER ELECTRIC	Bienes industriales y servicios	FR
TEF.MC	TELEFONICA	Telecomunicaciones	ES
IBE.MC	IBERDROLA	Servicios públicos	ES
DPW.F	DEUTSCHE POST	Bienes industriales y servicios	DE
ENI.MI	ENI	Petróleo y gas	IT
GLE.PA	GRP SOCIETE GENERALE	Bancos	FR
ADS.F	ADIDAS	Bienes personales y domésticos	DE
ITX.MC	Industria de Diseno Textil SA	Comercio minorista	ES
PHIA.AS	PHILIPS	Servicios sanitarios	NL
SAF.PA	SAFRAN	Bienes industriales y servicios	FR
MUV2.F	MUENCHENER RUECK	Seguros	DE
DBK.F	DEUTSCHE BANK	Bancos	DE
VOW3.F	VOLKSWAGEN PREF	Industria automotriz	DE
ORA.PA	ORANGE	Telecomunicaciones	FR
FME.F	FRESENIUS	Servicios sanitarios	DE
BMW.F	BMW	Industria automotriz	DE
SGO.PA	SAINT GOBAIN	Construcción y materiales	FR
ENGI.PA	ENGIE	Servicios públicos	FR
CRG.IR	CRH	Construcción y materiales	IE
NOKIA.HE	NOKIA	Tecnología	FI
EI.PA	ESSILOR INTERNATIONAL	Servicios sanitarios	FR
EOAN.F	E.ON	Servicios públicos	DE
UL.NX	UNIBAIL-RODAMCO	Bienes inmobiliarios	FR
VIV.PA	VIVENDI	Medios de comunicación	FR
AD.AS	AHOLD DELHAIZE	Comercio minorista	NL

Cuadro A.5: Lista completa de las acciones analizadas - STOXX Europe 50.

País	Número de elementos	Peso (%)
Gran Bretaña	110	36.03
Francia	56	20.02
Alemania	31	9.65
Países Bajos	18	6.35
España	13	6.03
Suiza	26	5.56
Suecia	24	4.1
Dinamarca	14	3.52
Italia	15	3.36
Bélgica	9	2.45
Finlandia	8	1.2
Noruega	9	1.15
Austria	4	0.46
Portugal	1	0.08
República Checa	1	0.05

Cuadro A.6: Países de la Unión Europea involucrados en el análisis, con el número de acciones correspondientes e *importancia económica* según *STOXX Europe 600*.

Sector	Número de elementos	Peso (%)
Banca	28	20.2
Bienes personales y domésticos	25	11.3
Servicios sanitarios	24	9.93
Bienes industriales y servicios	60	8.73
Petróleo y gas	12	5.91
Industria alimentaria	14	5.27
Tecnología	15	5.2
Telecomunicaciones	11	4.69
Industria automotriz	12	4.12
Servicios públicos	17	4.12
Seguros	16	4.04
Productos químicos	13	2.93
Medios de comunicación	17	2.73
Comercio minorista	13	2.66
Recursos básicos	11	2.49
Construcción y materiales	11	1.9
Viajes y ocio	9	1.38
Bienes inmobiliarios	18	1.35
Servicios financieros	13	1.03

Cuadro A.7: Sectores económicos involucrados en el conjunto de acciones analizadas.

Símbolo	Empresa	Sector	País	Peso (%)
NOVN.VX	NOVARTIS	Servicios sanitarios	CH	2.19
HSBA.L	HSBC	Banca	GB	2.01
BATS.L	BRITISH AMERICAN TOBACCO	Bienes personales y domésticos	GB	1.73
FP.PA	TOTAL	Petróleo y gas	FR	1.37
BP.L	BRITISH PETROLEUM	Petróleo y gas	GB	1.23
SAN.PA	SANOFI	Servicios sanitarios	FR	1.15
SAP.F	SAP	Tecnología	DE	1.13
SAN.MC	BCO SANTANDER	Banca	ES	1.10
GSK.L	GLAXOSMITHKLINE	Servicios sanitarios	GB	1.00
UNA.AS	UNILEVER NV	Bienes personales y domésticos	NL	0.98
ABL.BR	ANHEUSER-BUSCH INBEV	Industria alimentaria	BE	0.92
BNP.PA	BNP PARIBAS	Banca	FR	0.91
NOVO-B.CO	NOVO NORDISK B	Servicios sanitarios	DK	0.89
DGE.L	DIAGEO	Industria alimentaria	GB	0.87
AZN.L	ASTRAZENECA	Servicios sanitarios	GB	0.83
DAL.F	DAIMLER	Industria automotriz	DE	0.81
ULVR.L	UNILEVER PLC	Bienes personales y domésticos	GB	0.79
MC.PA	LVMH MOET HENNESSY	Bienes personales y domésticos	FR	0.77
VOD.L	VODAFONE GRP	Telecomunicaciones	GB	0.77
INGA.AS	ING GRP	Banca	NL	0.72
UBSG.VX	UBS GROUP	Banca	CH	0.66
LLOY.L	LLOYDS BANKING GRP	Banca	GB	0.65
RB.L	RECKITT BENCKISER GRP	Bienes personales y domésticos	GB	0.63
PRU.L	PRUDENTIAL	Seguros	GB	0.63
CS.PA	AXA	Seguros	FR	0.63
ASML.AS	ASML HLDG	Tecnología	NL	0.63
BBVA.MC	BCO BILBAO VIZCAYA ARGENTARIA	Banca	ES	0.60
DTE.F	DEUTSCHE TELEKOM	Telecomunicaciones	DE	0.59
RIO.L	RIO TINTO	Recursos básicos	GB	0.58
DG.PA	VINCI	Construcción y materiales	FR	0.55
OR.PA	L OREAL	Bienes personales y domésticos	FR	0.54
AI.PA	AIR LIQUIDE	Productos químicos	FR	0.51
BN.PA	DANONE	Industria alimentaria	FR	0.50
SH.P.L	SHIRE	Servicios sanitarios	GB	0.50
TEF.MC	TELEFONICA	Telecomunicaciones	ES	0.50
IBE.MC	IBERDROLA	Servicios públicos	ES	0.49
CFR.VX	CIE FINANCIERE RICHEMONT	Bienes personales y domésticos	CH	0.49
SU.PA	SCHNEIDER ELECTRIC	Bienes industriales y servicios	FR	0.49
NG.L	NATIONAL GRID	Servicios públicos	GB	0.48
GLE.PA	GRP SOCIETE GENERALE	Banca	FR	0.48
UCG.MI	UNICREDIT	Banca	IT	0.46
ITX.MC	Industria de Diseno Textil SA	Comercio minorista	ES	0.45
ENI.MI	ENI	Petróleo y gas	IT	0.43
DPW.F	DEUTSCHE POST	Bienes industriales y servicios	DE	0.43
NDA-SEK.ST	NORDEA BANK	Banca	SE	0.42
BARC.L	BARCLAYS	Banca	GB	0.42
PHIA.AS	PHILIPS	Servicios sanitarios	NL	0.39
BLT.L	BHP BILLITON	Recursos básicos	GB	0.39
SAF.PA	SAFRAN	Bienes industriales y servicios	FR	0.37
NOKIA.HE	NOKIA	Tecnología	FI	0.37
CSGN.VX	CREDIT SUISSE GRP	Banca	CH	0.37
CPG.L	COMPASS GRP	Viajes y ocio	GB	0.35
LIN.F	LINDE	Productos químicos	DE	0.35
BT-A.L	BT GRP	Telecomunicaciones	GB	0.35
ORA.PA	ORANGE	Telecomunicaciones	FR	0.34
BMW.F	BMW	Industria automotriz	DE	0.34
VOW.F	VOLKSWAGEN PREF	Industria automotriz	DE	0.31
ENGL.PA	ENGIE	Servicios públicos	FR	0.31
DANSKE.CO	DANSKE BANK	Banca	DK	0.30
VOLV-B.ST	VOLVO B	Bienes industriales y servicios	SE	0.30
RI.PA	PERNOD RICARD	Industria alimentaria	FR	0.29
AV.L	AVIVA	Seguros	GB	0.29
IFX.F	INFINEON TECHNOLOGIES	Tecnología	DE	0.29
EI.PA	ESSILOR INTERNATIONAL	Servicios sanitarios	FR	0.28
KER.PA	Kering	Comercio minorista	FR	0.28
STAN.L	STANDARD CHARTERED	Banca	GB	0.28
CON.F	CONTINENTAL	Industria automotriz	DE	0.27
ATCO-A.ST	ATLAS COPCO A	Bienes industriales y servicios	SE	0.27

Cuadro A.8: Lista completa de las acciones analizadas.

Símbolo	Empresa	Sector	País	Peso (%)
ML.PA	MICHELIN	Industria automotriz	FR	0.27
HSBA.L	HSBC	Banca	GB	2.01
VIV.PA	VIVENDI	Medios de comunicación	FR	0.26
SWED-A.ST	SWEDBANK	Banca	SE	0.26
HM-B.ST	HENNES and MAURITZ B	Comercio minorista	SE	0.26
UCG.MI	UNICREDIT	Banca	IT	0.46
WPP.L	WPP	Medios de comunicación	GB	0.25
HEN3.F	HENKEL PREF	Bienes personales y domésticos	DE	0.25
EOAN.F	E.ON	Servicios públicos	DE	0.25
REL.L	REED ELSEVIER PLC	Medios de comunicación	GB	0.25
AKZA.AS	AKZO NOBEL	Productos químicos	NL	0.24
HEIA.AS	HEINEKEN	Industria alimentaria	NL	0.23
RR.L	ROLLS ROYCE HLDG	Bienes industriales y servicios	GB	0.23
REP.MC	REPSOL	Petróleo y gas	ES	0.23
KBC.BR	KBC GRP	Banca	BE	0.22
STL.OL	STATOIL	Petróleo y gas	NO	0.22
REN.AS	RELX NV	Medios de comunicación	NL	0.21
FME.F	FRESENIUS MEDICAL CARE	Servicios sanitarios	DE	0.21
LGEN.L	LEGAL and GENERAL GRP	Seguros	GB	0.21
CAP.PA	CAP GEMINI	Tecnología	FR	0.21
LONN.VX	LONZA	Servicios sanitarios	CH	0.20
SSE.L	SCOTTISH and SOUTHERN ENERGY	Servicios públicos	GB	0.20
TSCO.L	TESCO	Comercio minorista	GB	0.20
VWS.CO	VESTAS WIND SYSTEMS	Petróleo y gas	DK	0.19
SAND.ST	SANDVIK	Bienes industriales y servicios	SE	0.19
AAL.L	ANGLO AMERICAN	Recursos básicos	GB	0.19
RNO.PA	RENAULT	Industria automotriz	FR	0.19
FCA.MI	FIAT CHRYSLER AUTOMOBILES	Industria automotriz	IT	0.18
GEBN.VX	GEBERIT	Construcción y materiales	CH	0.18
GIVN.VX	GIVAUDAN	Productos químicos	CH	0.17
SN.L	SMITH and NEPHEW	Servicios sanitarios	GB	0.17
SIK.VX	SIKA	Construcción y materiales	CH	0.16
ABF.L	ASSOCIATED BRITISH FOODS	Industria alimentaria	GB	0.16
PUB.PA	PUBLICIS GRP	Medios de comunicación	FR	0.15
DSM.AS	KONINKLIJKE DSM	Productos químicos	NL	0.15
TEL.OL	TELENOR	Telecomunicaciones	NO	0.15
CNA.L	CENTRICA	Servicios públicos	GB	0.15
DSV.CO	DSV B	Bienes industriales y servicios	DK	0.14
GEN.CO	GENMAB	Servicios sanitarios	DK	0.14
DSY.PA	DASSAULT SYSTEMS	Tecnología	FR	0.14
ABE.MC	ABERTIS INFRAESTRUCTURAS	Bienes industriales y servicios	ES	0.14
TKA.F	THYSSENKRUPP	Bienes industriales y servicios	DE	0.14
HEXA-B.ST	HEXAGON B	Tecnología	SE	0.14
VIE.PA	VEOLIA ENVIRONNEMENT	Servicios públicos	FR	0.14
SKY.L	SKY	Medios de comunicación	GB	0.14
MAERSK-B.CO	A.P. MOLLER-MAERSK B	Bienes industriales y servicios	DK	0.14
WKL.AS	WOLTERS KLUWER	Medios de comunicación	NL	0.13
EBS.VI	ERSTE GROUP BANK	Banca	AT	0.13
ADEN.VX	ADECCO	Bienes industriales y servicios	CH	0.13
BAER.VX	JULIUS BAER GRP	Banca	CH	0.13
SGSN.VX	SGS	Bienes industriales y servicios	CH	0.13
STM.MI	STMICROELECTRONICS	Tecnología	IT	0.13
CCL.L	CARNIVAL	Viajes y ocio	GB	0.13
CARL-B.CO	CARLSBERG B	Industria alimentaria	DK	0.12
ACA.PA	CREDIT AGRICOLE	Banca	FR	0.23
III.L	3I GRP	Servicios financieros	GB	0.12
UHR.VX	SWATCH BEARER	Bienes personales y domésticos	CH	0.12
RWE.F	RWE	Servicios públicos	DE	0.12
SAB.MC	BCO SABADELL	Banca	ES	0.12
HO.PA	THALES	Bienes industriales y servicios	FR	0.12
KPN.AS	KPN	Telecomunicaciones	NL	0.12
RBS.L	ROYAL BANK OF SCOTLAND GRP	Banca	GB	0.12
OML.L	OLD MUTUAL	Seguros	GB	0.12
UG.PA	PEUGEOT	Industria automotriz	FR	0.12
RMS.PA	HERMES INTERNATIONAL	Bienes personales y domésticos	FR	0.12
SLHN.VX	SWISS LIFE HLDG	Seguros	CH	0.12
SW.PA	SODEXO	Viajes y ocio	FR	0.11
SOLB.BR	SOLVAY	Productos químicos	BE	0.11

Cuadro A.9: Lista completa de las acciones analizadas (continuación).

Símbolo	Empresa	Sector	País	Peso (%)
BEL.F	BEIERSDORF	Bienes personales y domésticos	DE	0.11
TIT.MI	TELECOM ITALIA	Telecomunicaciones	IT	0.11
SGE.L	SAGE GRP	Tecnología	GB	0.11
LUX.MI	LUXOTTICA	Bienes personales y domésticos	IT	0.11
AHT.L	ASHTHEAD GRP	Bienes industriales y servicios	GB	0.11
NZYM-B.CO	NOVOZYMES	Servicios sanitarios	DK	0.11
WRT1V.HE	WARTSILA	Bienes industriales y servicios	FI	0.11
AGN.AS	AEGON	Seguros	NL	0.11
PSN.L	PERSIMMON	Bienes personales y domésticos	GB	0.11
BNZL.L	BUNZL	Bienes industriales y servicios	GB	0.10
KNIN.VX	KUEHNE+NAGEL	Bienes industriales y servicios	CH	0.10
NXT.L	NEXT	Comercio minorista	GB	0.10
LAND.L	LAND SECURITIES	Bienes inmobiliarios	GB	0.10
NSG.OL	NORSK HYDRO	Recursos básicos	NO	0.10
AC.PA	ACCOR	Viajes y ocio	FR	0.10
FGR.PA	EIFFAGE	Construcción y materiales	FR	0.10
RRS.L	RANDGOLD RESOURCES	Recursos básicos	GB	0.10
REE.MC	RED ELECTRICA CORPORATION	Servicios públicos	ES	0.10
COLO-B.CO	COLOPLAST B	Servicios sanitarios	DK	0.10
WTB.L	WHITBREAD	Viajes y ocio	GB	0.09
UCB.BR	UCB	Servicios sanitarios	BE	0.09
DCC.L	DCC	Bienes industriales y servicios	GB	0.09
SCHP.VX	SCHINDLER P	Bienes industriales y servicios	CH	0.09
KGF.L	KINGFISHER	Comercio minorista	GB	0.09
RSA.L	RSA Seguros GRP	Seguros	GB	0.09
ELUX-B.ST	ELECTROLUX B	Bienes personales y domésticos	SE	0.09
BLND.L	BRITISH LAND COMPANY	Bienes inmobiliarios	GB	0.09
SMIN.L	SMITHS GRP	Bienes industriales y servicios	GB	0.09
ORK.OL	ORKLA	Industria alimentaria	NO	0.09
GBLB.BR	GRP BRUXELLES LAMBERT	Servicios financieros	BE	0.09
SKA-B.ST	SKANSKA B	Construcción y materiales	SE	0.09
LI.PA	KLEPIERRE	Bienes inmobiliarios	FR	0.09
TW.L	TAYLOR WIMPEY	Bienes personales y domésticos	GB	0.09
GAS.MC	GAS NATURAL SDG	Servicios públicos	ES	0.08
UU.L	UNITED Servicios públicos GRP	Servicios públicos	GB	0.08
RCF.PA	TELEPERFORMANCE	Bienes industriales y servicios	FR	0.08
OMV.VI	OMV	Petróleo y gas	AT	0.08
BDEV.L	BARRATT DEVELOPMENTS	Bienes personales y domésticos	GB	0.08
STJ.L	ST.JAMES PLACE CAPITAL	Seguros	GB	0.08
GKN.L	GKN	Industria automotriz	GB	0.08
G1A.F	GEA GRP	Bienes industriales y servicios	DE	0.08
BALN.VX	BALOISE	Seguros	CH	0.08
STE-R.ST	STORA ENSO R	Recursos básicos	FI	0.08
ITV.L	ITV	Medios de comunicación	GB	0.08
SKF-B.ST	SKF B	Bienes industriales y servicios	SE	0.08
UTDI.F	UNITED INTERNET	Tecnología	DE	0.08
LISN.SW	LINDT and SPRUENGLI REG	Industria alimentaria	CH	0.08
JMAT.L	JOHNSON MATTHEY	Productos químicos	GB	0.08
UMI.BR	UMICORE	Productos químicos	BE	0.08
ELE.MC	ENDESA	Servicios públicos	ES	0.08
MHG.OL	MARINE HARVEST	Industria alimentaria	NO	0.08
RAND.AS	RANDSTAD	Bienes industriales y servicios	NL	0.08
INF.L	INFORMA	Medios de comunicación	GB	0.08
QIA.F	QIAGEN	Servicios sanitarios	DE	0.08
RTO.L	RENTOKIL INITIAL	Bienes industriales y servicios	GB	0.08
KINV-B.ST	KINNEVIK B	Servicios financieros	SE	0.08
MRW.L	MORRISON (WILLIAM) SUPERMARK	Comercio minorista	GB	0.08
MKS.L	MARKS and SPENCER GRP	Comercio minorista	GB	0.07
GFC.PA	GECINA	Bienes inmobiliarios	FR	0.07
HNRI.F	HANNOVER RUECK	Seguros	DE	0.07
SVT.L	SEVERN TRENT	Servicios públicos	GB	0.07
SCR.PA	SCOR	Seguros	FR	0.07
SGRO.L	SEGRO	Bienes inmobiliarios	GB	0.07
EXO.MI	EXOR NV	Servicios financieros	IT	0.07
STMN.SW	STRAUMANN	Servicios sanitarios	CH	0.07
CLN.VX	CLARIANT	Productos químicos	CH	0.07
SWMA.ST	SWEDISH MATCH	Bienes personales y domésticos	SE	0.07
CRDA.L	CRODA INTERNATIONAL	Productos químicos	GB	0.07

Cuadro A.10: Lista completa de las acciones analizadas.

Símbolo	Empresa	Sector	País	Peso (%)
BKG.L	BERKELEY GRP HLDG	Bienes personales y domésticos	GB	0.07
SPSN.SW	SWISS PRIME SITE	Bienes inmobiliarios	CH	0.07
ELISA.HE	ELISA CORPORATION	Telecomunicaciones	FI	0.07
PERSON.L	PEARSON	Medios de comunicación	GB	0.07
SMDS.L	DS SMITH	Bienes industriales y servicios	GB	0.07
LHA.F	LUFTHANSA	Viajes y ocio	DE	0.06
MB.MI	MEDIOBANCA	Banca	IT	0.06
NREIV.HE	NOKIAN RENKAAT	Industria automotriz	FI	0.06
TREL-B.ST	TRELLEBORG B	Bienes industriales y servicios	SE	0.06
BKT.MC	BANKINTER	Banca	ES	0.06
ZC.PA	ZODIAC AEROSPACE	Bienes industriales y servicios	FR	0.06
BAMI.MI	BANCO BPM	Banca	IT	0.06
SAZ.F	STADA ARZNEIMITTEL	Servicios sanitarios	DE	0.06
VOE.VI	VOESTALPINE	Recursos básicos	AT	0.06
HMSO.L	HAMMERSON	Bienes inmobiliarios	GB	0.06
CPL.L	CAPITA GRP	Bienes industriales y servicios	GB	0.06
HLMA.L	HALMA	Bienes industriales y servicios	GB	0.06
SPX.L	SPIRAX-SARCO	Bienes industriales y servicios	GB	0.06
SBRY.L	SAINSBURY (J)	Comercio minorista	GB	0.06
ING.PA	INGENICO	Tecnología	FR	0.06
RPC.L	RPC GROUP	Bienes industriales y servicios	GB	0.05
SECU-B.ST	SECURITAS B	Bienes industriales y servicios	SE	0.05
SCA-B.ST	SVENSKA CELLULOSA B	Bienes personales y domésticos	SE	0.05
MGGT.L	MEGGITT	Bienes industriales y servicios	GB	0.05
WEIR.L	WEIR GRP	Bienes industriales y servicios	GB	0.05
RUI.PA	RUBIS	Servicios públicos	FR	0.05
GN.CO	GN STORE NORD	Servicios sanitarios	DK	0.05
SDR.L	SCHRODERS	Servicios financieros	GB	0.05
BWY.L	BELLWAY	Bienes personales y domésticos	GB	0.05
HSX.L	HISCOX	Seguros	GB	0.05
UBI.PA	UBISOFT ENTERTAINMENT	Bienes personales y domésticos	FR	0.05
ANTO.L	ANTOFAGASTA	Recursos básicos	GB	0.05
EO.PA	FAURECIA	Industria automotriz	FR	0.05
JMT.LS	JERONIMO MARTINS	Comercio minorista	PT	0.05
MF.PA	WENDEL	Servicios financieros	FR	0.05
TPK.L	TRAVIS PERKINS	Bienes industriales y servicios	GB	0.05
INCH.L	INCHCAPE	Comercio minorista	GB	0.05
TDC.CO	TDC	Telecomunicaciones	DK	0.05
SK.PA	SEB	Bienes personales y domésticos	FR	0.05
AALB.AS	AALBERTS INDUSTRIES	Bienes industriales y servicios	NL	0.05
PNN.L	PENNON GRP	Servicios públicos	GB	0.05
REC.MI	RECORDATI	Servicios sanitarios	IT	0.05
BOL.PA	BOLLORE	Bienes industriales y servicios	FR	0.05
CAST.ST	CASTELLUM	Bienes inmobiliarios	SE	0.05
IMI.L	IMI	Bienes industriales y servicios	GB	0.04
FHZN.SW	FLUGHAFEN ZURICH	Bienes industriales y servicios	CH	0.04
FNTN.F	FRENET	Telecomunicaciones	DE	0.04
TATE.L	TATE and LYLE	Industria alimentaria	GB	0.04
DLN.L	DERWENT LONDON	Bienes inmobiliarios	GB	0.04
FPE3.F	FUCHS PETROLUB PREF	Productos químicos	DE	0.04
HUH1V.HE	HUHTAMAKI	Bienes industriales y servicios	FI	0.04
REACH.OL	SUBSEA7	Petróleo y gas	NO	0.04
EKTA-B.ST	ELEKTA B	Servicios sanitarios	SE	0.04
ACKB.BR	ACKERMANS and VAN HAAREN	Servicios financieros	BE	0.04
RF.PA	EURAZEO	Bienes industriales y servicios	FR	0.04
MAN.F	MAN	Bienes industriales y servicios	DE	0.04
SXS.L	SPECTRIS	Bienes industriales y servicios	GB	0.04
EMG.L	MAN GRP	Servicios financieros	GB	0.04
ECM.L	ELECTROCOMPONENTS	Bienes industriales y servicios	GB	0.04
BBA.L	BBA AVIATION	Bienes industriales y servicios	GB	0.04
BION.SW	BB BIOTECH	Servicios sanitarios	CH	0.04
DLG.F	DIALOG SEMICON	Tecnología	DE	0.04
AM.PA	DASSAULT AVIATION	Bienes industriales y servicios	FR	0.04
HWDN.L	HOWDEN JOINERY GRP	Bienes industriales y servicios	GB	0.04
STB.OL	STOREBRAND	Seguros	NO	0.04
UBM.L	UBM	Medios de comunicación	GB	0.04
CNP.PA	CNP ASSURANCES	Seguros	FR	0.04
HAS.L	HAYS	Bienes industriales y servicios	GB	0.04

Cuadro A.11: Lista completa de las acciones analizadas.

Símbolo	Empresa	Sector	País	Peso (%)
BARN.SW	BARRY CALLEBAUT	Industria alimentaria	CH	0.04
MMB.PA	LAGARDERE	Medios de comunicación	FR	0.04
SRT.F	SARTORIUS PREF	Bienes industriales y servicios	DE	0.03
ICP.L	INTERMEDIATE CAPITAL GRP	Servicios financieros	GB	0.03
CDI.PA	CHRISTIAN DIOR	Bienes personales y domésticos	FR	0.03
COLR.BR	ETS COLRUYT	Comercio minorista	BE	0.03
HELN.SW	HELVETIA HLDG	Seguros	CH	0.03
CO.PA	CASINO GUICHARD	Comercio minorista	FR	0.03
NIBE-B.ST	NIBE INDUSTRIER B	Construcción y materiales	SE	0.03
EZJ.L	EASYJET	Viajes y ocio	GB	0.03
CEZ.F	CEZ	Servicios públicos	CZ	0.03
BB.PA	BIC	Bienes personales y domésticos	FR	0.03
OUT1V.HE	OUTOKUMPU	Recursos básicos	FI	0.03
FDR.PA	FONCIERE DES REGIONS	Bienes inmobiliarios	FR	0.03
ICAD.PA	ICADE	Bienes inmobiliarios	FR	0.03
HOT.F	HOCHTIEF	Construcción y materiales	DE	0.03
ASM.AS	ASM INTERNATIONAL	Tecnología	NL	0.03
SBMO.AS	SBM OFFSHORE	Petróleo y gas	NL	0.03
AMEAS.HE	AMER SPORTS	Bienes personales y domésticos	FI	0.03
SAAB-B.ST	SAAB B	Bienes industriales y servicios	SE	0.03
CBG.L	CLOSE BROTHERS GRP	Servicios financieros	GB	0.03
SOP.PA	SOPRA STERIA GROUP	Tecnología	FR	0.03
PARG.SW	PARGESA	Servicios financieros	CH	0.03
SPR.F	SPRINGER (AXEL)	Medios de comunicación	DE	0.03
BTG.L	BTG	Servicios sanitarios	GB	0.03
DOKA.SW	dorma+kaba	Bienes industriales y servicios	CH	0.03
DUE.BE	DUERR	Bienes industriales y servicios	DE	0.03
AGK.L	AGGREKO	Bienes industriales y servicios	GB	0.03
UDG.L	UDG HEALTHCARE PUBLIC	Servicios sanitarios	GB	0.03
TLW.L	TULLOW OIL	Petróleo y gas	GB	0.03
BILL.ST	BILLERUDKORSNAS	Recursos básicos	SE	0.03
NK.PA	IMERYS	Recursos básicos	FR	0.03
LUND-B.ST	LUNDBERGFÖRETAGEN B	Bienes inmobiliarios	SE	0.03
WDH.CO	WILLIAM DEMANT	Servicios sanitarios	DK	0.03
ROR.L	ROTORK	Bienes industriales y servicios	GB	0.03
BOKA.AS	BOSKALIS WESTMINSTER	Construcción y materiales	NL	0.03
ARYN.VX	ARYZTA	Industria alimentaria	CH	0.03
POM.PA	PLASTIC OMNIUM	Industria automotriz	FR	0.03
SHB.L	SHAFTESBURY	Bienes inmobiliarios	GB	0.03
VPK.AS	VOPAK	Bienes industriales y servicios	NL	0.03
SYDB.CO	SYDBANK	Banca	DK	0.03
A2A.MI	A2A	Servicios públicos	IT	0.03
BAB.L	BABCOCK INTERNATIONAL	Bienes industriales y servicios	GB	0.03
NXG.L	NEX GROUP	Servicios financieros	GB	0.03
VCT.L	VICTREX	Productos químicos	GB	0.03
BPE.MI	BPER Banca	Banca	IT	0.03
INTU.L	Intu Properties PLC	Bienes inmobiliarios	GB	0.03
WIE.VI	WIENERBERGER	Construcción y materiales	AT	0.03
HPOL-B.ST	HEXPOL B	Productos químicos	SE	0.03
SIM.CO	SIMCORP	Tecnología	DK	0.03
BALD-B.ST	FASTIGHETS BALDER B	Bienes inmobiliarios	SE	0.03
COFB.BR	COFINIMMO	Bienes inmobiliarios	BE	0.03
BBY.L	BALFOUR BEATTY	Construcción y materiales	GB	0.03
GPOR.L	GREAT PORTLAND ESTATES	Bienes inmobiliarios	GB	0.02
TGS.OL	TGS-NOPEC GEOPHYSICAL	Petróleo y gas	NO	0.02
GNK.L	GREENE KING	Viajes y ocio	GB	0.02
DEC.PA	JCDECAUX	Medios de comunicación	FR	0.02
DMGT.L	DAILY MAIL and GENERAL TRUST	Medios de comunicación	GB	0.02
SPM.MI	SAIPEM	Petróleo y gas	IT	0.02
VIS.MC	VISCOFAN	Industria alimentaria	ES	0.02
NCC-B.ST	NCC B	Construcción y materiales	SE	0.02
SCHA.OL	SCHIBSTED GRUPPEN	Medios de comunicación	NO	0.02
DEQ.F	DEUTSCHE EUROSHOP	Bienes inmobiliarios	DE	0.02
DOM.L	DOMINOS PIZZA GROUP	Viajes y ocio	GB	0.02
GBF.F	BILFINGER	Bienes industriales y servicios	DE	0.02
PNL.AS	POSTNL	Bienes industriales y servicios	NL	0.02
PFG.L	PROVIDENT FINANCIAL	Servicios financieros	GB	0.02
MS.MI	MEDIASET	Medios de comunicación	IT	0.01

Cuadro A.12: Lista completa de las acciones analizadas (continuación).

## Apéndice B

# Rutinas para el análisis de datos

### B.1. Funciones utilizadas

El lenguaje de programación que utilizamos para nuestros cálculos es *Python 3.6.4*. Además, hemos hecho uso fundamental de las siguientes bibliotecas:

1. Numpy<sup>1</sup>;
2. Matplotlib<sup>2</sup>;
3. Pandas<sup>3</sup>.

#### B.1.1. Rutinas para descargar datos

El siguiente *script* es una modificación del código `get-yahoo-quotes-python`, disponible en *GitHub* desde la cuenta <https://github.com/bradlucas>.

---

```
from datetime import datetime
import numpy as np
import requests
import calendar
import csv
import re

# Obtener datos historicos de yahoo finance
def get(yahoo_code):

    # Parametros de conexion
    # ----- #

    # http timeout
```

---

<sup>1</sup><http://www.numpy.org/>

<sup>2</sup><https://matplotlib.org/>

<sup>3</sup><https://pandas.pydata.org/>



```

timeout_secs = 5

# reintentos
num_retries = 4

# url
yahoo_url = r'https://finance.yahoo.com/quote/{0}/history?p={0}'.format(yahoo_code)

# iniciar encabezados
headers = dict()
headers['Connection'] = 'keep-alive'
headers['Upgrade-Insecure-Requests'] = '1'
headers['User-Agent'] = r'Mozilla/5.0 (Windows NT 10.0; Win64; x64) AppleWebKit/537.36
    (KHTML, like Gecko) Chrome/56.0.2924.87 Safari/537.36"

# Manejo de la conexion
# ----- #

csv_data = None
while num_retries>0:

    try:

        session = requests.Session()

        r = session.get(yahoo_url,headers=headers,timeout=timeout_secs)
        r.encoding = 'utf-8'
        html_text = r.text

        # Defragmentar
        pattern = r"(\\"CrumbStore\\":{\\"crumb\\":\")(\\\[^\"]+\)(\\")"
        m = re.search(pattern, html_text)
        crumb = m.group(2).replace("\\u002F","/")

        # Fechas de extraccion (UTC - formato aaaa.mm.dd)
        start_time = calendar.timegm(datetime(2001,4,18).utctimetuple())
#         end_time = calendar.timegm(datetime.now().utctimetuple()) # Hasta hoy
        end_time = calendar.timegm(datetime(2016,12,8).utctimetuple())

        # url de descarga
        data_url = r"https://query1.finance.yahoo.com/v7/finance/download/{0}?period1={1}
            &period2={2}&interval=1d&events=history&crumb={3}".format(yahoo_code, start_time,
                end_time, crumb)

        # descargar en csv
        r = session.get(data_url,headers=headers,timeout=timeout_secs)
        csv_data = csv.reader(r.content.decode().splitlines(),delimiter=',')

    except requests.exceptions.Timeout:

        wtext = 'Tiempo de conexion agotado, {0} intentos
            restantes'.format(str(num_retries))

        # imprimir o registrar

```

```
        print(wtext)

    except AttributeError:

        wtext = 'Error de rastreo, {0} intentos restantes'.format(str(num_retries))

        # imprimir o registrar
        print(wtext)

    except Exception:

        wtext = 'Error generico, {1} intentos restantes'.format(str(num_retries))

        # imprimir o registrar
        print(wtext)

    finally:

        if csv_data:
            wtext = 'Datos para {0} descargados correctamente'.format(yahoo_code)

            # print or log
            print(wtext)
            break

        else:
            num_retries -= 1

# datos de activos
if csv_data:

    eod_data = []
    for ii,row in enumerate(csv_data):

        if ii>0 and not 'null' in row:
            #Organizar los datos en diccionarios

            eod_data.append({
                'fecha': row[0],
                'apertura': float(row[1]),
                'mayor': float(row[2]),
                'menor': float(row[3]),
                'cierre': float(row[4]),
                'volumen': int(row[6])
            })

    else:

        wtext = 'Imposible descargar {0}'.format(yahoo_code)

        # imprimir o registrar
        print(wtext)

return eod_data
```

```
# Listado de indices por descargar (desde el archivo local simbolos.txt)
I=np.loadtxt('simbolos.txt', delimiter=',', usecols=0 ,dtype=str,skiprows=1)

for i in range(len(I)):
    np.save(I[i],get(I[i])) # Guardar datos en archivo '.npy' para cada simbolo
```

---

### B.1.2. Rutinas de cálculo

El siguiente script es de nuestra autoría.

---

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

# Hacer power map a una matriz C (de correlacion) con exponente e
def pow_m(C,e):
    return np.sign(C[:,:]) * np.power(np.abs(C[:,:]),e)

#X tiene p acciones y horizonte n; cada accion se normaliza
def normalizar(X):
    Y=np.empty([len(X),len(X[0])])
    for i in range(len(X)):
        Y[i]=(X[i]-np.mean(X[i]))/np.std(X[i])
    return Y

# Sacar la matriz de correlacion con power map a partir de la matriz de rendimientos
def corr(A,e):
    n=float(len(A[0]))
    A_n = normalizar(A)
    S=np.dot(A_n,np.transpose(A_n))/n
    return pow_m(S,e)

# Sacar la matriz de rendimientos
def rendimientos(X):
    N=len(X[0])
    p=len(X)
    R=np.empty([p,N-1])
    for i in range(p):
        for j in range(N-1):
            R[i,j]=(X[i,j+1]/X[i,j])-1.
    return R

# Sacar la matriz de rendimientos logaritmicos
def logrends(X):
    N=len(X[0])
    p=len(X)
    r=np.empty([p,N-1])
    for i in range(p):
        for j in range(N-1):
            if (X[i,j]==-1 or X[i,j+1]==-1):
                r[i,j]=np.random.normal(0.,3.)
            else:
                r[i,j]=np.log(X[i,j+1]/X[i,j])
```

```

    return r

# Reemplazar acciones de desviacion nula con ruido gaussiano mu=0 sigma=3
def reemplazar(X):
    Y=X
    for i in range(len(X)):
        if (abs(np.std(X[i])) <= 0.0000001):
            Y[i]=np.random.normal(0.,3.,len(X[i]))
    return Y

#####
# A partir de aqui, las funciones estan definidas en terminos de los rendimientos#
#####

# Para el promedio de la correlacion de X de pxn normalizada
def prom_corr_powm(R,e):      #R son los rendimientos, n es el horizonte temporal, e el
    exponente del power map
    n=float(len(R))
    S = corr(R,e)
    return np.sum(S-np.diagflat(np.diag(S)))/(n*(n-1.))

# Ibidem, con valores absolutos
def promabs_corr_powm(R,e):  #R son los rendimientos, n es el horizonte temporal, e el
    exponente del power map
    n=float(len(R))
    S = corr(R,e)
    return np.sum(np.abs(S-np.diagflat(np.diag(S))))/(n*(n-1.))

# Para obtener el espectro ordenado de una matriz de correlacion
def espectro_correlacion_powm(R,e):  #R son los rendimientos, n es el horizonte temporal, e
    el exponente del power map
    S = corr(R,e)
    return np.sort(np.linalg.eig(S)[0])[::-1]

# Para obtener matrices de correlacion en un lapso n dividido en ventanas de tamaño q y
    separadas r unidades de tiempo entre si. Ademas se hace power map con exponente e
def evol_corr_powm(R,q,r,e):
    n=len(R[0])
    corr_t=[]
    for k in range(0,n-q+1,r):
        X=R[:,k:k+q]
        X=reemplazar(X)
        corr_t.append(corr(X,e))
    return corr_t

# Para obtener la supradiagonal de la matrix de correlacion C=C[i,j]
def sup_diag(C):
    n=len(C)
    return [C[i,j] for i in range(n) for j in range(i+1,n)]

# Esta funcion toma una matriz R y devuelve el promedio de las correlaciones sucesivas de
    ventanas de tamaño q separadas por r
def evol_prom_powm(R,q,r,e):  #R = matriz rend, n=horizonte total=cols, p=series=reng,
    q=tamaño de ventana, r=resolucion, e=exponente del power-map
    n=len(R[0])

```

```

espectro_t=[]
for k in range(0,n-q+1,r):
    X=R[:,k:k+q]
    X=reemplazar(X)
    espectro_t.append(prom_corr_powm(X,e))
return espectro_t

# Ibidem, con valor absoluto
def evol_promabs_powm(R,q,r,e): #R = matriz rend, n=horizonte total=cols, p=series=reng,
    q=tamano de ventana, r=resolucion, e=exponente del power-map
    n=len(R[0])
    espectro_t=[]
    for k in range(0,n-q+1,r):
        X=R[:,k:k+q]
        X=reemplazar(X)
        espectro_t.append(promabs_corr_powm(X,e))
    return espectro_t

# Esta funcion toma una matriz R y devuelve un arreglo de valores propios para ventanas de
    tamaño q separadas por r
def evol_espec_powm(R,q,r,e): #R = matriz rend, n=horizonte total=cols, p=series=reng,
    q=tamano de ventana, r=resolucion, e=exponente del power-map
    n=len(R[0])
    espectro_t=[]
    for k in range(0,n-q+1,r):
        X=R[:,k:k+q]
        X=reemplazar(X)
        espectro_t.append(espectro_correlacion_powm(X,e))
    return espectro_t

# Para calcular matrices de similaridad
def sim_mat(R,q,r,e):
    Mat=[]
    n=len(R[0])
    for k in range(0,n-q+1,r):
        X=R[:,k:k+q]
        X=reemplazar(X)
        Mat.append(corr(X,e))
    l=len(Mat)
    C=np.empty([l,l])
    for i in range(l):
        for j in range(l):
            C[i,j]=np.mean(np.abs(Mat[i]-Mat[j]))
    return C

# Para calcular la funcion de autocorrelacion C de una Serie, que se anula en L (salidas:
    [C,L])
def autocorr(Serie):
    C = np.correlate(Serie, Serie, mode='full')
    C=C[C.size/2:]
    C=C/np.abs(C[0]-np.mean(C))
    return [C-np.mean(C),np.argmin(C>0.)]

```

---

### B.1.3. Rutinas de graficación

Por último, presentamos un ejemplo del código que utilizamos para graficar nuestros resultados. Hicimos uso de la aplicación-interfaz *Jupyter*<sup>4</sup>.

---

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.dates as dates

matplotlib.style.use('ggplot')

#Primero fijamos los parametros a graficar
q=15 #tamano de ventana
r=1 #separacion entre ventanas
epsilon=1.003 #indice del power-map

#Parametros de las graficas
matplotlib.rcParams.update({'font.size': 6})

#Funcion para sacar columnas de una matriz
def columna(A, i):
    return [row[i] for row in A]

%matplotlib notebook

# Cargar datos (aqui sirve de ejemplo el valor propio maximo y minimo de matrices de
# correlacion sucesivas)
DEmin=columna(np.load('./Europa/correlaciones/Et_DE_q'+str(q)+'_r'+
str(r)+'_exp'+str(epsilon)+'.npy'),-1) #min
DEmax=columna(np.load('./Europa/correlaciones/Et_DE_q'+str(q)+'_r'+
str(r)+'_exp'+str(epsilon)+'.npy'),0) #max
l=len(DEmin)

# Definir arreglo de fechas
datesDE=np.load('./Europa/datesDE.npy')
fechasDE=pd.to_datetime(datesDE, format='%Y-%m-%d')
fechasDE=[fechasDE[i] for i in range(q,len(fechasDE),r)]

# Definir arreglos de datos
s1=pd.DataFrame(np.multiply(DEmin,9000), index=fechasDE,columns=['$\lambda$'])
s2=pd.DataFrame(DEmax, index=fechasDE,columns=['$\Lambda$'])

# Graficar en 3 pedazos
fig, ax = plt.subplots(3,1,figsize=(9.0,9.0),sharey=True)
plt.subplots_adjust(left=0.2,bottom=0.2)

# Para graficar cada pedazo
for i in range(3):
    s1[i*int(l/3):(i+1)*int(l/3)].plot(ax=ax[i],lw=0.8,c='red')
    s2[i*int(l/3):(i+1)*int(l/3)].plot(ax=ax[i],lw=0.8,c='purple')
```

---

<sup>4</sup><http://jupyter.org/>

```
ax[i].xaxis.set_minor_locator(dates.MonthLocator())
ax[i].xaxis.set_minor_formatter(dates.DateFormatter('%m'))
ax[i].xaxis.set_major_locator(dates.YearLocator())
ax[i].xaxis.set_major_formatter(dates.DateFormatter('\n\n\n%Y'))
ax[i].xaxis.grid(True, which="minor")
ax[i].yaxis.grid(True, which="major")
ax[i].set(ylabel='$\lambda$', xlabel='Fecha')

plt.xticks(rotation = '25')

ax[0].set(title='Bolsa alemana - Valores propios maximo y minimo')
plt.figtext(0.1, 0.94, '$q'+str(q)+'\n';
           '\epsilon'+str(epsilon)+'$', fontsize=9, bbox=dict(facecolor='orange', alpha=0.2))

plt.tight_layout(pad=1.5, w_pad=1.5, h_pad=1.5)

#Para guardar grafica en .pdf
#plt.savefig('Mm_DE.pdf', dpi=700.0)

plt.show()
```

---

# Bibliografía

- [1] *Handbook of Key Global Financial Markets, Institutions, and Infrastructure*. Academic Press, 2012.
- [2] M. Andenas and G. Deipenbrock, editors. *Regulating and Supervising European Financial Markets: More Risks than Achievements*. Springer International Publishing, 1 edition, 2016.
- [3] G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni. *An Introduction to Random Matrices*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1 edition, 2010.
- [4] P. Bak. *How Nature works: The Science of Self-Organized Criticality*. Copernicus. Springer-Verlag, 1 edition, 1996.
- [5] J.-P. Bouchaud. An introduction to statistical finance. *Physica A*, 313:238–251, 2002.
- [6] J.-P. Bouchaud and M. Potters. *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press, 2 edition, 2004.
- [7] G. Casella and R. Berger. *Statistical Inference*. Duxbury Advanced Series, 2 edition, 2002.
- [8] B. K. Chakrabarti, A. Chakraborti, and A. Chatterjee. *Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives*. 1 edition, 2006.
- [9] A. Chakraborti and G. Germano. *Mathematical modeling of collective behavior in socio-economic and life sciences*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser Basel, 1 edition, 2010.
- [10] A. Chakraborti, K. Sharma, H. K. Pharasi, S. Das, R. Chatterjee, and T. H. Seligman. Characterization of catastrophic instabilities: Market crashes as paradigm. *arXiv:1801.07213 [q-fin.GN]*, 2018.
- [11] A. Chakraborti, I. M. Toke, M. Patriarca, and F. Abergel. Econophysics review: I. empirical facts. *Quantitative Finance*, 11(7):991–1012, 2011.
- [12] D. Charles. *The Story of the Stock Exchange. Its History and Position*. London: Grant Richards, 1901. <https://archive.org/details/storyofstockexch00dugu>.
- [13] K. Cuthbertson. *Quantitative financial economics: stocks, bonds, and foreign exchange*. Series in financial economics and quantitative analysis. John Wiley, 1996.
- [14] J. de de Haan, S. Oosterloo, and D. Schoenmaker. *Modern multivariate statistical techniques: Regression, Classification and Manifold Learning*. Springer Texts in Statistics. Cambridge University Press, 1 edition, 2008.



- [15] J. de Haan, S. Oosterloo, and D. Schoenmaker. *European Financial Markets and Institutions*. Cambridge University Press, 1 edition, 2009.
- [16] P. Deift and D. Gioev. *Random Matrix Theory: Invariant Ensembles and Universality*. Courant Lecture Notes, 3 edition, 2009.
- [17] G. Demange. *Econophysics of Systemic Risk and Network Dynamics*. New Economic Windows. Springer Milan, 2013.
- [18] J. Floreani and M. Polato. *The Economics of the Global Stock Exchange Industry*. Palgrave Macmillan Studies in Banking and Financial Institutions. Palgrave Macmillan UK, 2014.
- [19] J. Franks and C. Mayer. Corporate ownership and control in the u.k., germany and france. *Journal of Applied Corporate Finance*, 9:30–45, Winter 1997.
- [20] S. Friedman and H. Weisberg. Interpreting the first eigenvalue of a correlation matrix. *Educational and Psychological measurement*, 41, 1981.
- [21] W. G. and M. Seifert. *European Capital Markets*. MacMillan, 2000.
- [22] N. Golyandina, V. Nekrutkin, and A. Zhigljavsky. *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques*. Chapman and Hall/CRC, 1 edition, 2001.
- [23] N. Golyandina and A. Zhigljavsky. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*. SpringerBriefs in Statistics. Springer-Verlag, 1 edition, 2013.
- [24] G. Grabinsky. *Teoría de la medida*. Las prensas de Ciencias, 1 edition, 2011.
- [25] A. Guionnet. *Statistical Mechanics and Random Matrices*. IAS/Park City Mathematics Series. American Mathematical Society, 1 edition, 2008.  
<http://perso.ens-lyon.fr/aguionne/pcmipark.pdf>.
- [26] P. Herlin. *Finance : le nouveau paradigme. Comprendre la finance et l'economie avec Mandelbrot, Taleb...* Éditions d'Organisation. Eyrolles, 2010.
- [27] V. Kota. *Embedded Random Matrix Ensembles in Quantum Physics*. Springer, 2014.
- [28] L. Laloux, P. Cizeau, J.-P. Bouchaud, and M. Potters. Noise dressing of financial correlation matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 83:1467–1470, Aug 1999.
- [29] S. N. Majumdar and G. Schehr. Top eigenvalue of a random matrix: large deviations and third order phase transition. *arXiv*, 2015. <https://arxiv.org/abs/1311.0580v4>.
- [30] B. B. Mandelbrot, R. Gomory, P. Cootner, E. Fama, W. Morris, and H. Taylor. *Fractals and scaling in finance*. Springer, 1997.
- [31] R. N. Mantegna and H. E. Stanley. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, 2 edition, 1999.
- [32] R. M. May. Will a large complex system be stable? *Nature*, 238(413), 1972.
- [33] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, Elsevier, 3 edition, 2004.
- [34] R. Michie. *The London Stock Exchange*. Oxford University Press, USA, 2000.
- [35] M. C. Münnix, T. Shimada, R. Schäfer, F. Leyvraz, T. H. Seligman, T. Guhr, and H. E. Stanley. Identifying states of a financial market. *Scientific Reports*, 2, Sep 2012.

- [36] S. Navidi. *The Superhubs: How the Financial Elite and Their Networks Rule Our World*. Nicholas Brealey Publishing, 2017.
- [37] S. Parameswaran. *Fundamentals of Financial Instruments: An Introduction to Stocks, Bonds, Foreign Exchange and Derivatives*. Wiley Finance. Wiley, 2011.
- [38] W. Paul and J. Baschnagel. *Stochastic Processes. From Physics to Finance*. Springer, 2 edition, 1999.
- [39] J. B. Rosser. Econophysics and economic complexity. *Advances in Complex Systems*, 11(5):745–760, 2008.
- [40] J. B. Rosser. Econophysics. In S. N. Durlauf and L. E. Blume, editors, *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Palgrave Macmillan, 2017.  
<http://www.dictionaryofeconomics.com/dictionary>.
- [41] E. Seligman. Comunicación privada.
- [42] M. Sewell. Characterization of financial time series. *UCL Research Note*. [http://www.cs.ucl.ac.uk/fileadmin/UCL-CS/images/Research\\_Student\\_Information/RN\\_11\\_01.pdf](http://www.cs.ucl.ac.uk/fileadmin/UCL-CS/images/Research_Student_Information/RN_11_01.pdf).
- [43] V. Sidoravičius, editor. *New Trends in Mathematical Physics: Selected Contributions of the XVth International Congress on Mathematical Physics*. Springer, 1 edition, 2009.
- [44] D. Sornette. *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*. Princeton University Press, 1 edition, 2003.
- [45] G. Soros. *El nuevo paradigma de los mercados financieros*. Taurus Pensamiento. Santillana Ediciones Generales, 1 edition, 2008.
- [46] G. Tondl. *The EU and Emerging Markets*, volume 12. European Community Studies Association of Austria, 1 edition, 2009.
- [47] Vinayak and A. Pandey. Correlated wishart ensembles and chaotic time series. *Physical Review E*, 81(036202), 2010.
- [48] Vinayak, R. Schäfer, and T. H. Seligman. Emerging spectra of singular correlation matrices under small power-map deformations. *arXiv*, 2013. <https://arxiv.org/abs/1304.4982v2>.
- [49] J. Voit. *The Statistical Mechanics of Financial Markets*. Springer, 3 edition, 2005.
- [50] M. Vyas, T. Guhr, and T. H. Seligman. Multivariate analysis of short time series in terms of ensembles of correlation matrices. *arXiv:1801.07790 [physics.data-an]*, 2018.