



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EFFECTOS DE UN CAMPO MAGNÉTICO EN
LA TASA DE DECAIMIENTO DE UNA
PARTÍCULA ESCALAR NEUTRA A
FERMIONES CARGADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Jorge Igor Jaber Urquiza

TUTOR:

Dr. Ángel Sánchez Cecilio

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., julio de 2018.





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A mi querida familia.

Resumen

En el siguiente trabajo de tesis se indaga sobre un proceso físico relevante en la física teórica y experimental de altas energías: la tasa de decaimiento de una partícula escalar neutra a fermiones cargados y cómo ésta es afectada por la presencia de un campo magnético homogéneo. Para ello se calcula la función de autoenergía a un lazo a partir del diagrama, amputado, de Feynman que incluye el efecto de un campo magnético de intensidad arbitraria. Posteriormente se toma su parte imaginaria, la cual se relaciona con la tasa de decaimiento a través del *teorema óptico*.

En el régimen de campo magnético débil, con la ayuda de dos aproximaciones, se estudia el efecto del campo magnético en el proceso de decaimiento

$$\phi \longrightarrow \bar{\psi}\psi.$$

Los resultados obtenidos en el presente trabajo de tesis indican que el campo magnético tiene diferentes efectos dependiendo del régimen cinemático en el que se encuentre la partícula escalar: para momentos transversos grandes la tasa de decaimiento aumenta con la intensidad de campo magnético, mientras que en el régimen de momentos bajos la tasa de decaimiento decae.

Adicionalmente, sin ser el objetivo de ésta tesis, se comparan los resultados obtenidos con los resultados para el proceso de decaimiento a escalares cargados

$$\phi \longrightarrow \varphi^*\varphi,$$

para determinar el rol que juega el espín en el decaimiento. Se encontró que éste tiende a aumentar la producción de pares de fermiones.

Índice general

Dedicatoria	I
Resumen	III
Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Ecuación de Dirac	5
1.2. Teoría cuántica de campos	10
1.2.1. Teoría de Yukawa	15
1.3. Función de autoenergía	19
1.4. Tasa de decaimiento	19
2. Tasa de Decaimiento sin Campo Magnético	23
2.1. Modelo de interacción	23
2.2. Función de autoenergía	26
2.2.1. Cálculo de la traza	28
2.2.2. Integrales Gaussianas	28
2.3. Estructura analítica de la función de autoenergía	31
2.3.1. Parte imaginaria de la función de autoenergía	33
2.4. Tasa de decaimiento	38
3. Dinámica de Fermiones Bajo la Influencia de un Campo Magnético	41
3.1. Dinámica no relativista	41
3.2. Ecuación de Dirac con campo magnético	44
3.3. Propagador fermiónico con campo magnético	49

4. Tasa de Decaimiento con Campo Magnético	53
4.1. Función de autoenergía con campo magnético	53
4.1.1. Cálculo de la traza	55
4.1.2. Integrales Gaussianas	57
4.2. Aproximación de campo débil para bajas velocidades	60
4.2.1. Parte imaginaria de la función de autoenergía	62
4.2.2. Tasa de decaimiento	63
4.3. Aproximación de campo débil <i>à la</i> Tsai & Erber	65
4.3.1. Parte imaginaria de la función de autoenergía	66
4.3.2. Tasa de decaimiento	68
5. Efectos del Campo Magnético en la Tasa de Decaimiento	71
5.1. Aproximación para bajas velocidades	72
5.2. Aproximación <i>à la</i> Tsai & Erber	75
5.3. Caso bosónico	79
Conclusiones	83
A. Trazas	85
A.1. Matrices de Dirac	85
A.2. Proyectores	87
A.3. Más matrices de Dirac	89
B. Integrales Gaussianas	91
B.1. Caso general	91
B.2. Caso sin campo magnético	92
B.3. Caso con campo magnético	93
C. Regularización Dimensional	97
C.1. Cálculo de $\Sigma(0)$	97
Bibliografía	101

Introducción

Desde la predicción del bosón de Higgs [1, 2], y especialmente desde su descubrimiento en 2012 [3, 4], los procesos que involucran a campos escalares¹ han cobrado gran relevancia en la física, teórica y experimental, de altas energías debido al gran impacto que tiene el mecanismo de Higgs en la generación de masas de las partículas del Modelo Estándar de las Partículas Elementales (ME) [5, 6].

Una de las dificultades que se presentó a lo largo de los años y contribuyó a que el Higgs fuera descubierto tantos años después de su predicción en 1964 es que no se ha podido detectar directamente sino mediante sus productos de decaimiento [7, 8]. Siendo de importancia conocer los procesos físicos que intervienen en su decaimiento para poder reconstituir las trayectorias y tener la certeza que la partícula inicial corresponde a un bosón de Higgs.

Los campos escalares aparecen de diferente forma en distintas ramas de la física y a diversas escalas de energía, estando presentes desde la física de materiales (superconductores) [9], objetos astrofísicos compactos [10] hasta etapas tempranas del Universo (inflación) [11] entre otros. Es por ello que un estudio detallado sobre el comportamiento de estos campos escalares sujetos a la acción de agentes externos es de gran importancia para nuestro entendimiento de la naturaleza.

Por otra parte, existen una gran cantidad de procesos físicos, en la física de altas energías en donde las partículas se encuentran en presencia de campos magnéticos, y la pregunta que surge de manera natural es: ¿cuál es el efecto del campo magnético en dichos procesos?

Distintas respuestas han llegado a ésta pregunta junto con el descubrimiento

¹Bosones de espín 0.

de nuevos fenómenos como la catálisis magnética [12], el efecto quiral magnético [13], etc. En particular, el efecto de un campo magnético en el proceso de decaimiento de una partícula ha sido estudiados en diferentes situaciones: experimentos con láseres de alta intensidad [14–16], colisiones de iones pesados relativistas [17–19], objetos compactos [20–24], eventos en el Universo Temprano [25], etc.

En los contextos físicos a los que se ha hecho referencia, los procesos de decaimiento de campos escalares en presencia de un campo magnético se llevan a cabo en diferentes condiciones externas dependiendo de las características del sistema [26] como lo son: la temperatura, la densidad de materia, la intensidad del campo magnético, la presencia de campos eléctricos, los productos de decaimiento, etc. Se han realizado numerosos estudios sobre éstos sistemas y obteniendo resultados que varían de un trabajo a otro. En particular, el decaimiento de una partícula escalar neutra a un par de fermiones cargados en presencia de un campo magnético es un proceso que despierta interés debido al ingrediente extra que se debe de considerar, el espín. Dicho proceso será el tema de estudio de este trabajo.

En la presente tesis se calcula la tasa de decaimiento de una partícula escalar neutra a un par de fermiones cargados tanto en el vacío como en presencia de un campo magnético homogéneo, posteriormente se comparan estos resultados y se extrae el efecto del campo magnético en el proceso de decaimiento. La estructura del trabajo está organizada de la siguiente manera:

En el primer capítulo se desarrollan de manera breve tanto las herramientas teóricas como los conceptos físicos necesarios, en el ámbito de la *teoría cuántica de campos*, para llevar a cabo el cálculo de la tasa de decaimiento, como son: ecuación de Dirac, propagadores, función de autoenergía y *teorema óptico*.

En el segundo capítulo se propone el modelo de interacción bosón-fermion que se usará a lo largo del trabajo y se presenta el diagrama de Feynman asociado a la función de autoenergía a un lazo. Posteriormente se obtiene la tasa de decaimiento en el caso del vacío, es decir, sin campo magnético a partir de la parte imaginaria de la función de autoenergía.

En el capítulo 3 se estudia brevemente la ecuación de Dirac en presencia

de un campo magnético homogéneo y el rompimiento de simetría que éste provoca en las direcciones paralela y perpendicular al campo, y se presenta el cálculo del propagador fermiónico “vestido” con los efectos del campo magnético externo y la forma explícita que éste adquiere cuando el campo magnético define la dirección z .

En el cuarto capítulo se aplica la metodología desarrollada en el capítulo 2 pero ahora incorporando un campo magnético homogéneo de intensidad arbitraria y se analiza la función de autoenergía en el régimen de campo magnético débil mediante dos aproximaciones.

En el quinto y último capítulo se analizan los resultados obtenidos para la tasa de decaimiento, en el vacío y en presencia de un campo magnético, y se contrastan con los resultados publicados en [27].

Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo y se dan a conocer los posibles caminos a seguir para un mayor desarrollo del proyecto.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se abordara de forma breve los diferentes conceptos de la *teoría cuántica de campos* que permiten situar y realizar el cálculo de la tasa de decaimiento de una partícula y como ésta se relaciona con la función de autoenergía.

1.1. Ecuación de Dirac

En la *mecánica cuántica no relativista*, la dinámica de las partículas está gobernada por la ecuación de Schrödinger¹ [28]

$$\hat{H}\psi(\vec{x}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t), \quad (1.1)$$

donde $\psi(\vec{x}, t)$ es la función de onda que describe al sistema, \hat{H} es el operador Hamiltoniano.

Para el caso de una sola partícula, la ecuación (1.1) tiene la forma

$$\left[-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t), \quad (1.2)$$

¹En unidades naturales, es decir, $G = \hbar = c = 1$.

donde m es la masa de la partícula, $V(\vec{x})$ es un potencial externo que sólo depende de la posición y ∇^2 es el operador Laplaciano.

Si bien la *mecánica cuántica* describe perfectamente muchos fenómenos², en donde las partículas se mueven a bajas velocidades. Ésta deja de ser válida en la descripción cuántica de partículas que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz.

De tal manera que la ecuación de Schrödinger no es válida para partículas relativistas, no es invariante de Lorentz, y esto se puede observar fácilmente dado que trata al tiempo y al espacio de maneras diferentes (las derivadas espaciales y temporales son de diferente orden) como se observa en (1.2).

Basados en los principios de la *relatividad especial*, un primer intento para encontrar una *teoría cuántica relativista* partió del Hamiltoniano de una partícula libre relativista

$$H = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (1.3)$$

del cual, siguiendo la prescripción para la cuantización [29, 30]

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \hat{H} = i\frac{\partial}{\partial t} \\ p &\longrightarrow \hat{p} = -i\nabla, \end{aligned}$$

desembocó en la conocida ecuación de Klein-Gordon³ [31, 32]

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m^2]\phi(x) = 0. \quad (1.4)$$

Ésta ecuación presentó serios problemas de interpretación pues se observó que la densidad de probabilidad no es positiva definida así como la existencia

²Por ejemplo, el efecto fotoeléctrico, el tunelamiento cuántico, etc.

³Con la convención para la métrica de Minkowski $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ que se usará en el presente trabajo de tesis.

de estados con energía negativa para una partícula libre, lo cual era de esperarse si se observa la ecuación (1.3). Dicha situación provocó que la ecuación fuera descartada de un inicio.

En 1928 el físico Paul Dirac [33], partiendo de que la ecuación de Shrödinger es lineal en la derivada temporal, propuso una ecuación que fuera una combinación lineal de todos los momentos

$$\left(\hat{H} + i\alpha_j \hat{p}^j - \beta m\right) \psi(x) = 0, \quad (1.5)$$

con $j = 1, 2, 3$ y donde α_j y β son coeficientes constantes. Imponiendo que el cuadrado de ésta ecuación satisfaga la ecuación de Klein-Gordon⁴, obtuvo que los coeficientes debían de ser matrices de $N \times N$ y satisfacer

$$\begin{aligned} \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j &= 2\delta_{jk} \\ \alpha_j \beta + \beta \alpha_j &= 0 \\ \alpha_j^2 = \beta^2 &= 1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

de tal manera que N sólo puede ser par y su valor más pequeño es 4. La ecuación de Dirac en su forma reducida tiene la forma

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi(x) = 0, \quad (1.7)$$

donde γ^μ son conocidas como las matrices de Dirac o matrices γ y, en la representación quirral [34], están dadas por

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

con $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$ y $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$ las matrices de Pauli [28, 29], entendiéndose que 1 representa la matriz identidad de 2×2 .

⁴Debido a que debe satisfacer el Hamiltoniano de una partícula libre relativista.

Además la función de onda $\psi(x)$ es un biespinor, esto es, un objeto con cuatro entradas que transforma de determinada manera bajo las rotaciones espaciales.

La ecuación de Dirac, por construcción, es invariante de Lorentz y resuelve el problema de la densidad de probabilidad positiva definida pero sigue teniendo el problema de las energías negativas. ¿Cómo es posible que una partícula libre pueda tener energía negativa? Y si es así, ¿qué impide que la partícula pase a estados de energía “más” negativos?

Dirac propone una solución a este problema argumentando que su ecuación sólo es válida para fermiones, que cumplen el principio de exclusión de Pauli, así como que en el vacío existe un mar de partículas que ocupan todos los niveles de energía negativa y que impiden que la partícula libre caiga en dichos estados. Ya con esta idea se preguntó, ¿qué pasaría si uno de los fermiones del mar, con energía negativa, fuera excitado y llegara a un estado de energía positiva? Esto dejaría un “hoyo” en el mar que tendría las mismas propiedades que el fermión pero carga contraria, a estos estados se le llamó antipartículas y fue una predicción que la física experimental confirmó pocos años después [35].

Dirac buscaba una versión relativista de la ecuación de Shrödinger que preservara la interpretación probabilística de la función de onda asociada a una partícula. Lo que encontró fue una ecuación que en realidad describe a muchos cuerpos, lo que podemos pensar es que describe a un campo clásico (que al momento de cuantizar nos da las partículas y antipartículas).

Las soluciones espacio-temporales de la ecuación de Dirac están dadas por ondas planas [29, 30]

$$\begin{aligned}\psi_s^{(+)} &= u^s e^{-ip \cdot x} = u^s e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \\ \psi_s^{(-)} &= v^s e^{ip \cdot x} = v^s e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})},\end{aligned}\tag{1.9}$$

donde E es la energía, \vec{p} es el momento, el subíndice s denota el espín, el superíndice (\pm) si la solución es de energía positiva o negativa y u y v son los biespinores correspondientes.

En la representación quiral, estos biespinores están dados por

$$u^s = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p} \eta^s \\ \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \eta^s \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v^s = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot p} \eta^s \\ -\sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \eta^s \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

donde σ son las matrices de Pauli y η^s es un espinor unitario arbitrario, el cual usualmente se toma como un espinor propio de σ^3 .

Un aspecto que es importante discutir es la propagación de las partículas, es decir, la evolución espacio-temporal de las funciones de onda asociadas. Para ello es útil el concepto de propagador, éste indica como viaja la información de un punto del espacio-tiempo a otro.

En mecánica cuántica, dada una base $\{|\psi_n\rangle\}$ para el espacio de Hilbert correspondiente, es posible determinar la evolución de cualquier estado $|\psi\rangle$ a partir del propagador [36, 37]

$$\begin{aligned} {}_S \langle \psi_m | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | \psi_n \rangle_S &= ({}_S \langle \psi_m | e^{-i\hat{H}t'}) (e^{i\hat{H}t} | \psi_n \rangle_S) \\ &\equiv_H \langle \psi_m, t' | \psi_n, t \rangle_H, \end{aligned}$$

que representa la amplitud de probabilidad que, si el sistema está en un estado $|\psi_n\rangle$ al tiempo t , se encuentre entonces en un estado $|\psi_m\rangle$ al tiempo t' . Donde los subíndices S y H nos indican si estamos en el cuadro de Schrödinger o de Heisenberg respectivamente y \hat{H} es el operador Hamiltoniano del sistema.

Al estar trabajando con funciones de onda, se puede emplear el principio de Huygens⁵; y junto con el formalismo de las funciones de Green, la deducción del propagador es sencilla de hacer.

⁵Si una partícula está descrita por la función de onda $\psi(\vec{x}, t)$ a un tiempo t , la función de onda estará descrita por $\psi(\vec{x}', t')$ para un tiempo posterior t' por la superposición de las ondas esféricas generadas por cada uno de los puntos del frente de onda al tiempo t .

En el caso de la ecuación de Dirac, el propagador de Feynman (de un punto x del espacio-tiempo, a un punto y) en el espacio de configuraciones está dado por [34]

$$S_F(x, y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{\gamma \cdot p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.11)$$

donde γ son las matrices de Dirac⁶, p y m el momento y la masa de la partícula. El término $i\epsilon$ garantiza la causalidad de la propagación.

1.2. Teoría cuántica de campos

En la sección anterior se mencionó que la ecuación de Dirac describe a un sistema de muchas partículas. Debido a ello, se puede pensar que ésta ecuación describe a un campo, es decir, a sistema con un número infinito de grados de libertad cuyos modos normales de vibración describen a las partículas [38].

Describir al sistema como una teoría de campos resulta natural dado que es necesaria una teoría que describa a muchos cuerpos y a partículas cuánticas y relativistas.

Existen varias formas de llegar a la *teoría cuántica de campos*, una de ellas consiste en llevar acabo la segunda cuantización que se explica brevemente a continuación por el método de *cuantización canónica* para una teoría libre:

Partiendo de la densidad Lagrangiana que describe al campo que se quiere cuantizar $\psi(x)$, es posible encontrar las ecuaciones de movimiento y posteriormente encontrar las soluciones correspondientes.

El siguiente paso consiste en escribir al campo como una superposición de las soluciones. Una vez hecho ésto, el campo y el momento conjugado asociado se promueven a operadores

⁶Notar que por ello el propagador fermiónico es una matriz de 4×4 .

$$\begin{aligned}\psi &\longrightarrow \hat{\psi} \\ \Pi &\longrightarrow \hat{\Pi},\end{aligned}$$

y se establecen las relaciones de conmutación que deben de cumplir. Al promover el campo a un operador, los coeficientes para asociados a la superposición de las soluciones también adquieren ese carácter y se asocian con los operadores de creación y aniquilación. Haciendo analogía con el oscilador armónico, se imponen las relación de conmutación de éstos operadores. Una vez hecho esto, se determina el estado vacío $|0\rangle$ a partir del operador de aniquilación y se construye el espacio de Fock, el espacio de todos los estados que pueden tener las partículas, a partir de actuar con el operador de creación sobre el vacío. Con todo lo anterior, es posible encontrar el operador Hamiltoniano determinar el espectro de energías correspondiente. Finalmente, se calcula el propagador a partir del producto *temporalmente ordenado* de las soluciones.

Para el campo de Dirac libre, la solución general se escribe como una superposición soluciones del tipo (1.9), de tal manera que el campo de Dirac cuantizado está dado por [34]

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=\pm 1} \left(\hat{a}_p^s u^s e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_p^{s\dagger} v^s e^{ip \cdot x} \right), \quad (1.12)$$

donde \hat{a} y \hat{a}^\dagger son los operadores de creación y aniquilación de partículas respectivamente, mientras que \hat{b} y \hat{b}^\dagger corresponden a antipartículas. Estos cumplen las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\{\hat{a}_p^s, \hat{a}_{p'}^{s'\dagger}\} = \{\hat{b}_p^s, \hat{b}_{p'}^{s'\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{ss'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (1.13)$$

mientras que todos los demás anticonmutadores se anulan.

Ahora, toda teoría de campos se puede desarrollar a partir de su densidad Lagrangiana, en ella se codifica toda la dinámica del campo. Si se consideran diferentes campos en el caso libre (no interactuante) la densidad Lagrangiana total es la suma de la densidad Lagrangiana de cada uno de los campo y éstos no se ven entre sí, es decir, no son afectados por los otros campos que existen en el espacio. En cambio, en el caso interactuante, se agregan nuevos términos que indican como será la interacción entre los diferentes campos. Como es de imaginar, el caso interesante, y que describe a los procesos que ocurren en la naturaleza corresponde a la interacción de diferentes campos que representan a diferentes tipos de partículas.

Para tratar los términos de interacción, la aproximación más sencilla que se tiene es la teoría de perturbaciones que se desarrolló con el formalismo de la *mecánica cuántica*; en éste método se supone que el Hamiltoniano que describe al sistema es el Hamiltoniano de una teoría libre (sin interacción), al cual se le agrega una pequeña perturbación (Hamiltoniano de interacción) que modificará los estados del sistema así como su evolución temporal, esto es

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (1.14)$$

de tal manera que la evolución temporal de los estados está dada mayormente por \hat{H}_{int} , mientras que la de los operadores se debe a \hat{H}_0 .

En *el cuadro de interacción* los operadores y estados se denotan con el subíndice I y están dados por

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_S \quad (1.15)$$

$$\mathcal{O}_I = e^{i\hat{H}_0 t} \mathcal{O}_S e^{-i\hat{H}_0 t}, \quad (1.16)$$

donde el subíndice S denota a los operadores en *el cuadro de Schrödinger*. De tal manera que el Hamiltoniano de interacción en *el cuadro de interacción* se ve como

$$(\hat{H}_{int})_I \equiv \hat{H}_I = e^{i\hat{H}_0 t} (\hat{H}_{int})_S e^{-i\hat{H}_0 t}. \quad (1.17)$$

De tal manera que la evolución temporal de las soluciones está dada por

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \hat{H}_I(t) |\psi(t)\rangle_I. \quad (1.18)$$

Nótese que la solución a (1.18) es de la forma

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I, \quad (1.19)$$

donde $\hat{U}(t, t_0)$ es el operador de evolución. De (1.18) y (1.19) se sigue que $\hat{U}(t, t_0)$ satisface la ecuación

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}_I(t) \hat{U}(t, t_0). \quad (1.20)$$

Cuya solución para el operador de evolución está dada por la *fórmula de Dyson* [34]

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left(-i \int_{t_0}^t \hat{H}_I(t') dt' \right), \quad (1.21)$$

donde \mathcal{T} representa el *ordenamiento temporal* que indica que los operadores evaluados a tiempos mayores se escriben a la izquierda; donde la exponencial de un operador tiene sentido por su serie de Taylor, esto es

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t \hat{H}_I(t') dt' + \frac{(-i)^2}{2} \left[\int_{t_0}^t \int_{t'}^t \hat{H}_I(t'') \hat{H}_I(t') dt'' dt' \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t \int_{t'}^t \hat{H}_I(t') \hat{H}_I(t'') dt'' dt' \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde 1 representa la identidad.

Otro aspecto de interés en una *teoría cuántica de campos* interactuante, es el estudiar como evolucionan o se modifican los estados al pasar por procesos de dispersión. De la *mecánica cuántica*, se sabe que ésto se puede ver mediante la matriz de dispersión S .

Para hacer el análisis de los procesos de dispersión, se asume que los estados inicial y final de la partícula son eigenestados del Hamiltoniano libre \hat{H}_0 . De tal manera, la amplitud de dispersión está dada por el traslape

$$\lim_{t_{\pm} \rightarrow \pm\infty} \langle f | \hat{U}(t_+, t_-) | i \rangle \equiv \langle f | S | i \rangle, \quad (1.23)$$

así que la matriz de dispersión S está dada por el operador de evolución valuado en dos tiempos específicos. Se puede mostrar que los coeficientes de la matriz S están ligados a las funciones de correlación o funciones de Green de n-puntos, para más detalle véase [34].

En (1.23) se está calculando la amplitud de probabilidad de que una partícula en el estado $|i\rangle$ evolucione al estado $|f\rangle$ a través de un proceso físico. Para entender esto más fácil, considere por ejemplo que el estado inicial y final son el mismo, y la partícula sólo se trasladó de un punto del espacio-tiempo a otro. En ese caso puede que la partícula haya pasado de largo (sin interactuar, es decir, sin dispersión) o que haya interactuado de alguna manera pero el resultado final es una partícula igual a la inicial, existen muchísimos procesos físicos (unos más probables que otros) que cumplen ese punto. Toda esa información está almacenada y considerada en la matriz S y es importante notarlo ya que será de gran ayuda más adelante cuando se describan a los diagramas de Feynman.

Ahora, recordando que el operador de evolución está *temporalmente ordenado*. Se puede ver en (1.22) que el operador contiene a los campos (en los operadores) y al observar (1.23) parecería buena idea que las operadores de aniquilación que se encuentran en los campos, como se observa en (1.12), estuvieran hasta la derecha para que aniquilaran al vacío en el estado $|i\rangle$. Este nuevo orden se llama *ordenamiento normal* (\mathcal{N}), y se puede llegar a él mediante el *teorema de Wick* [34]

$$\mathcal{T}(\psi_1 \dots \psi_m) = \mathcal{N}(\psi_1 \dots \psi_m) + \mathcal{N}(\text{todas las posibles contracciones}), \quad (1.24)$$

donde la contracción de dos campos se define como

$$\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} \equiv \mathcal{T}(\psi(x)\bar{\psi}(y)) - \mathcal{N}(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = S_F(x, y), \quad (1.25)$$

donde $S_F(x, y)$, en éste caso, es el propagador de Feynman que se muestra en (1.11), formalmente definido como

$$S_F(x, y) = \langle 0 | \mathcal{T} \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \equiv \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle, & x^0 > y^0 \\ \langle 0 | -\bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle, & x^0 < y^0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Al emplear estos resultados en el cálculo de amplitudes de dispersión, Feynman se dio cuenta de que había una estructura que se repetía y logró construir un camino para simplificar los cálculos y visualizar fácilmente la física que se representaba llevándolo a formular las famosas reglas y diagramas de Feynman.

Como ya se mencionó, la matriz S está dada por una serie infinita. Feynman logró relacionar cada uno de dichos términos con diagramas (de Feynman) que representan procesos físicos y además nos dio reglas para calcular cada uno de ellos (o al menos asociarles ciertas integrales).

1.2.1. Teoría de Yukawa

Para ejemplificar de manera más concreta el desarrollo perturbativo en la teoría cuántica de campos, se mostrará un ejemplo sencillo con una interacción tipo Yukawa (un modelo simplificado de la *electrodinámica cuántica*) con la que se explicaron diferentes procesos nucleares antes del descubrimiento de los gluones y los quarks.

La interacción tipo Yukawa contempla la interacción entre fermiones y bosones escalares. El operador Hamiltoniano correspondiente es:

$$\hat{H}_{Yukawa} = \hat{H}_{Dirac} + \hat{H}_{Klein-Gordon} + \int d^3x g \hat{\psi} \hat{\psi} \hat{\phi}, \quad (1.27)$$

donde $\hat{\phi}$ es el campo escalar, $\hat{\psi}$ y $\hat{\bar{\psi}}$ los campos fermiónicos y g la constante de acoplamiento.

Comparando con la expresión (1.14), el Hamiltoniano de interacción corresponde al tercer término de la ecuación (1.27). En donde, para poder aplicar la teoría de perturbaciones, se requiere que $g \ll 1$.

Para calcular amplitudes de dispersión en ésta teoría (o en cualquier otra), se recurre a la ecuación (1.23) y al *teorema de Wick* pero ésto es algo tedioso. Feynman logró representar cada uno de los términos de la expansión de la matriz S con ciertos diagramas y dio reglas para asociarles integrales.

Considérese el caso sencillo, donde el estado inicial y el estado final son iguales, y representan a una sola partícula. Así que lo que se tendría que calcular es lo siguiente

$$\langle i | S | i \rangle = \lim_{t_{\pm} \rightarrow \pm\infty} \langle i | \hat{U}(t_+, t_-) | i \rangle. \quad (1.28)$$

De la expresión (1.22), se puede ver que el primer término está dado por

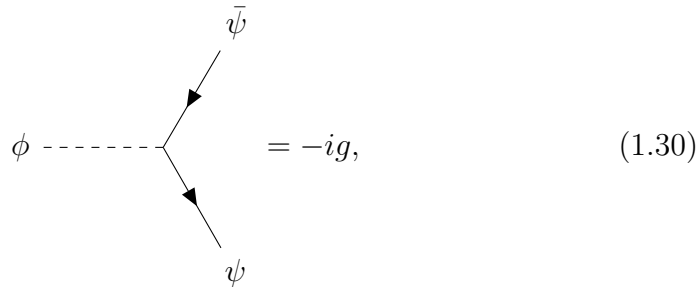
$$\langle i | 1 | i \rangle = \langle i | i \rangle, \quad (1.29)$$

que da la amplitud de probabilidad de que la partícula se desplace libremente de un punto inicial del espacio-tiempo a uno final. Entonces, ¿a qué procesos corresponden los demás términos de la expresión (1.22)? Los demás términos de la serie corresponden a fluctuaciones cuánticas, dispersión fuera de la capa de masa (de partículas virtuales), que finalmente se reabsorben de tal manera que el estado final es el mismo que el estado inicial.

A todo éste conjunto de procesos cuánticos que corresponden los términos restantes de la serie infinita se le conoce como función de autoenergía, pero ya se profundizará en el tema más adelante. Por ahora se tomará el diagrama más sencillo para la teoría de Yukawa y se darán las reglas de Feynman correspondientes⁷.

⁷Las reglas generales son las mismas para cualquier teoría pero la estructura de los componentes cambia dependiendo de la interacción y los campos considerados.

Para una interacción tipo Yukawa dada por (1.27), el vértice de los diagramas de Feynman debe de tener la interacción de los tres campos que se consideran y está dado por la ecuación



$$= -ig, \quad (1.30)$$

donde cada una de las líneas exteriores representa una partícula con un cuadrimomento dado.

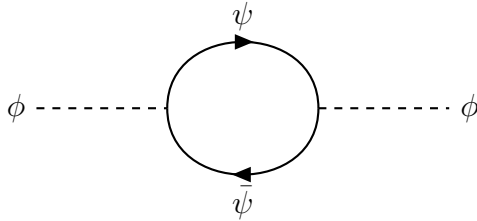


Figura 1.1: Diagrama de Feynman de la corrección a un lazo para una interacción tipo Yukawa.

El diagrama de Feynman que corresponde al siguiente término de la expresión (1.28), es la corrección a un lazo y se ilustra en la figura 1.1. Para poder calcular explícitamente la contribución, debemos de aplicar las siguientes reglas [39]:

- Al estar trabajando con fermiones, el orden es importante. Si el diagrama se lee en la dirección de las flechas del lazo, se escribe de izquierda a derecha y viceversa.
- Se escribe el estado inicial de la partícula.

- Por cada línea externa se escribe la onda plana asociada al estado asintótico.
- En cada vértice se escribe el término de interacción $-ig$ y un factor de $(2\pi)^4$ correspondiente al espacio fase junto con la conservación del cuadrimomento que fluye en el vértice a través de una delta de Dirac.
- Por cada línea interna se escribe el propagador correspondiente (en éste caso, el propagador libre de un fermión) tomando en cuenta el sentido en el que se recorre la línea.
- Se siguen los puntos anteriores hasta que se regrese al vértice inicial (en este caso se tiene vértice-propagador-vértice-propagador).
- Se escribe el estado final de la partícula.
- Se suma sobre todos los grados de libertad indeterminados. Para los cuadrimomentos se escriben las integrales correspondientes (normalizadas) y para el espín se toma la traza.
- Al tener un lazo cerrado de fermiones es necesario escribir un factor de -1 , que toma en cuenta la anticonmutación de los campos fermiónicos.

Siguiendo éste procedimiento se pueden asociar interpretaciones gráficas de los procesos físicos e integrales a los diferentes términos de la serie en (1.28). Por ejemplo, el diagrama de la figura 1.1 representa la fluctuación cuántica de una bosón escalar en un par fermión-antifermión (virtuales) que posteriormente se reabsorben dejando la partícula escalar inicial.

Nótese que la constante de acoplamiento g aparece en el vértice, ecuación (1.30), entonces al considerarse diagramas con más interacciones (que contengan más vértices) la potencia de g va a aumentar. En el régimen que se trabaja en el desarrollo perturbativo, $g \ll 1$, esto indica que los términos asociados a dichos diagramas van a ser cada vez más pequeños, y despreciables, según sea la escala de energías a la que se esté trabajando.

1.3. Función de autoenergía

Se sabe que el propagador completo, o función de Green de 2-puntos, en cualquier teoría de campos débilmente acoplada está dado por el propagador libre más todos los diagramas que contengan lazos cerrados correspondientes a procesos cuánticos con partículas virtuales, lo que se representa como [40]

$$\text{---}\rightarrow\text{---} = \text{---}\rightarrow\text{---} + \text{---}\rightarrow\text{---}\text{---}\text{---}\rightarrow\text{---} \quad (1.31)$$

donde la “bola” ashurada indica todos los diagramas ya mencionados y se le denomina autoenergía. Se interpreta como la modificación a la energía de la partícula (masa efectiva) debido a la autointeracción por fluctuaciones cuánticas [6], ésta es una función del momento incidente de la partícula que describe la contribución de partículas fuera de la capa de masa (partículas virtuales).

Formalmente, la función de autoenergía se define como [40]

$$\text{---}\text{---}\text{---} \equiv \frac{1}{i}\Sigma(p), \quad (1.32)$$

donde $\Sigma(p)$ es la función de autoenergía de una partícula incidente con cuadrimomento p .

1.4. Tasa de decaimiento

En la física clásica existe una relación fundamental, llamada *teorema óptico*, que relaciona la sección eficaz total con la parte imaginaria de la amplitud de dispersión hacia adelante. Este teorema se obtiene a partir de la conservación de la energía y el momento. Además tiene a su contraparte en la *mecánica cuántica* que se formula a partir de la conservación de la probabilidad [41].

En el caso de ondas electromagnéticas, el *teorema óptico* está dado por

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \mathbf{Im}[\vec{\epsilon}_0^* \cdot \vec{f}(\vec{k} = \vec{k}_0)], \quad (1.33)$$

donde \mathbf{Im} denota la parte imaginaria, σ_t es la sección eficaz total del medio dispersor, \vec{f} es la amplitud de dispersión normalizada, $\vec{\epsilon}_0$ es el vector de polarización de la onda incidente y, \vec{k}_0 y \vec{k} son los vectores de onda de las ondas incidente y dispersada, respectivamente.

El *teorema óptico* también se puede escribir en el formalismo de la *teoría cuántica de campos*, lo que no debe de ser extraño pues se trabaja con una teoría de campos como en el caso electromagnético. Además, tomando en cuenta las reglas de corte [42] para diagramas de Feynman se pueden calcular de manera sencilla las discontinuidades.

En el caso que se consideran partículas inestables, que no están en estados asintóticos, gracias al *teorema óptico* se llega a la siguiente expresión para la tasa de decaimiento [34]

$$\Gamma = -\frac{\mathbf{Im}(\Sigma(p))}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}}, \quad (1.34)$$

donde Γ es la tasa de decaimiento diferencial, $\Sigma(p)$ es la función de autoenergía y \vec{p} y M son el momento y la masa en reposo de la partícula inicial, respectivamente.

Se sabe que la tasa de decaimiento diferencial no es un invariante de Lorentz⁸, depende del observador, mientras que la autoenergía sí lo es (esto se verá más claramente a la hora de hacer el cálculo explícitamente). Así que que la parte imaginaria de la autoenergía aparezca dividida por el factor de Lorentz $\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$, asegura que la tasa de decaimiento diferencial será afectada por los efectos de la relatividad especial (dilatación del tiempo, etc.). Para obtener la tasa de decaimiento total se tiene que integrar sobre todos los valores de momento posible. En el presente trabajo no se llevará a cabo

⁸La tasa de decaimiento total sí es invariante de Lorentz.

dicha integración y de éste punto en adelante se hará referencia a la tasa de decaimiento diferencial simplemente como la tasa de decaimiento.

Con esto se da por completada la “lista” de herramientas teóricas necesarias y los conceptos físicos básicos que se usarán a lo largo de este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Tasa de Decaimiento sin Campo Magnético

En este capítulo se plantea un modelo en el que un campo escalar neutro interactúe con dos campos fermiónicos cargados; dicho modelo permite estudiar el decaimiento de una partícula escalar a fermiones. El estudio se realiza analizando la estructura analítica de la función de autoenergía del campo escalar y su relación con la tasa de decaimiento.

El propósito principal del presente es introducir las herramientas y la metodología que se usará en el capítulo 4, en donde se considera un campo magnético homogéneo y su efecto en la tasa de decaimiento, objetivo principal del presente trabajo.

2.1. Modelo de interacción

Una interacción relevante en la física de partículas, que involucra a un bosón escalar y a dos fermiones, es la interacción de Yukawa. Ésta interacción está presente en el Modelo Estándar y es la responsable de proveer de masa a los fermiones del modelo a través del bosón de Higgs.

Experimentalmente se sabe que en los aceleradores de partículas se pueden producir bosones de Higgs [7, 8], pero estos no son detectados directamente dado que son neutros y carecen de espín; sin embargo, a través de la detección

de sus productos de decaimiento es posible reconstruir a la partícula padre (el bosón de Higgs en este caso).

Uno de los posibles canales de decaimiento corresponde al decaimiento en dos fermiones cargados que puede ser modelado por el siguiente Lagrangiano de interacción

$$\mathcal{L}_{int} = g\phi\bar{\psi}\psi, \quad (2.1)$$

en donde ϕ representa al campo de Higgs, ψ y $\bar{\psi}$ representan a un campo fermiónico cargado y su conjugado correspondiente¹, g es la constante de acoplamiento, que depende del campo fermiónico con el que interactúa el campo escalar.

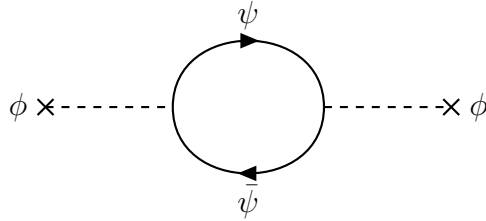


Figura 2.1: Diagrama amputado de Feynman de la función de autoenergía a un lazo.

En este modelo, dentro del formalismo de la teoría cuántica de campos, el campo escalar recibe correcciones cuánticas de la interacción con los campos fermiónicos. La corrección cuántica a orden más bajo a la función de autoenergía del campo escalar tiene asociado el diagrama de Feynman que se muestra en la figura 2.1.

Nótese que en dicho diagrama no son considerados los estados asintóticos inicial y final de la partícula escalar, como se hace normalmente al calcular amplitudes de transición, esto se debe a que dichos estados no son de interés sino es el proceso que ocurre entre ellos; a estos diagramas donde no aparecen los estados asintóticos se les conoce como diagramas amputados de Feynman

¹En el ME éstos campos fermiónicos pueden ser e^- , μ , τ , etc.

y es indicado en la figura con un “ \times ” sobre los escalares.

El interés de estudiar la función de autoenergía radica en que esta contiene información sobre las correcciones cuánticas a la masa (en la parte real), así como la posibilidad de que se lleve a cabo un proceso de decaimiento de la partícula escalar (en la parte imaginaria) bajo determinadas condiciones cinemáticas.

Físicamente, al desarrollarse una parte imaginaria en la autoenergía, los fermiones del lazo pasan de ser partículas virtuales a ser partículas reales, es decir, ahora se encuentran en la capa de masa. Pictóricamente, este proceso se representa mediante una línea punteada sobre el lazo de fermiones en el diagrama de Feynman que indica un corte como se observa en la figura 2.2.

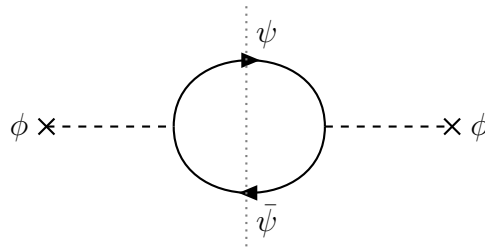


Figura 2.2: Diagrama amputado de Feynman de la función de autoenergía a un lazo cortado.

2.2. Función de autoenergía

La forma analítica de la función de autoenergía del campo escalar, asociada a la figura 2.1, se obtiene fácilmente añadiendo cuatrimomentos arbitrarios a cada una de las líneas del diagrama como se muestra en la figura 2.3.

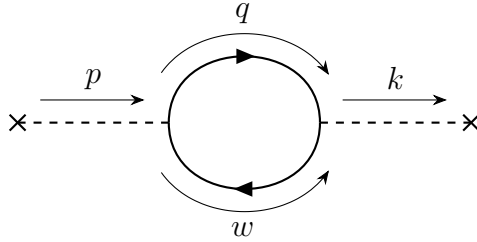


Figura 2.3: Diagrama amputado de Feynman de la función de autoenergía a un lazo para el espacio de momentos.

Aplicando las reglas de Feynman en el espacio de momentos al diagrama de la figura 2.3 tal como se plantearon en la sección 1.2.1, se obtiene

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p) = (-1)tr & \left[\int \frac{d^4w}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ig)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - w - q) \right. \\
 & \left. \times S_F(w)(-ig)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(w + q - k) S_F(-q) \right], \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

donde tr indica la traza sobre los índices espinoriales, $S_F(p)$ es el propagador de Feynman fermiónico dado por

$$S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}, \tag{2.3}$$

donde se introdujo la notación $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ con γ^μ las matrices de Dirac.

Realizando las integrales sobre q y k , la expresión (2.2) se reduce a

$$\Sigma(p) = ig^2 \int \frac{d^4w}{(2\pi)^4} \text{tr} [S_F(w)S_F(w-p)], \quad (2.4)$$

donde las dos sumas restantes, la integral sobre el momento interno del lazo y la operación de traza, físicamente indican la suma sobre todos los posibles momentos y orientaciones de espín de los fermiones virtuales.

Estas dos sumas se pueden llevar a cabo escribiendo explícitamente los propagadores (2.3) y realizando algunas manipulaciones sencillas, de modo que la autoenergía se puede reescribir como sigue

$$\Sigma(p) = ig^2 \int \frac{d^4w}{(2\pi)^4} \frac{i}{w^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(w-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \times \text{tr} [(\not{w} + m)(\not{w} - \not{p} + m)]. \quad (2.5)$$

La integral que aparece en la ecuación (2.5) se puede resolver de forma simple usando la siguiente identidad matemática

$$\frac{1}{x} = -i \int_0^\infty ds e^{ixs}, \quad (2.6)$$

donde s se conoce como tiempo propio de Schwinger y es válida si se cumple que $\text{Im}(x) > 0$ [43]. De tal manera que la ecuación (2.5) toma la forma

$$\Sigma(p) = ig^2 \int \frac{d^4w}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 e^{is_1(w^2 - m^2 + i\epsilon)} e^{is_2((w-p)^2 - m^2 + i\epsilon)} \times \text{tr} [(\not{w} + m)(\not{w} - \not{p} + m)], \quad (2.7)$$

nótese que el factor “ $i\epsilon$ ” en el propagador de Feynman ha permitido el uso de (2.6).

2.2.1. Cálculo de la traza

Para calcular la traza de la expresión (2.7), primero se desarrolla el producto, esto es

$$\begin{aligned} \text{tr}[(\not{w} + m)(\not{w} - \not{p} + m)] &= \text{tr}[\gamma^\mu w_\mu \gamma^\nu p_\nu - \gamma^\mu w_\mu \gamma^\nu w_\nu + \gamma^\mu w_\mu m \\ &\quad + m\gamma^\nu w_\nu - m\gamma^\nu p_\nu + m^2]. \end{aligned}$$

Ahora, utilizando el álgebra de las matrices de Dirac junto con las propiedades cíclica y distributiva de la traza (como se muestra en el apéndice A), se obtiene

$$\text{tr}[(\not{w} + m)(\not{w} - \not{p} + m)] = 4(w_\mu w^\mu - w_\mu p^\mu + m^2), \quad (2.8)$$

con $a_\mu b^\mu \equiv a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$, donde a y b son dos cuadvectores arbitrarios.

Remplazando este último resultado en la igualdad (2.7), la expresión analítica para la autoenergía adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= 4ig^2 \int \frac{d^4 w}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 e^{is_1(w^2 - m^2 + i\epsilon)} e^{is_2((w-p)^2 - m^2 + i\epsilon)} \\ &\quad \times (w_\mu w^\mu - w_\mu p^\mu + m^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2.2. Integrales Gaussianas

El siguiente paso que se llevará a cabo es resolver las integrales sobre w , para ello se manipularán las exponenciales en la expresión (2.9) con el fin de obtener integrales Gaussianas en dicha variable.

Primero se agrupan todos los términos que contengan potencias de w para posteriormente completar cuadrados y, finalmente, con una sencilla manipulación toman la forma

$$e^{is_1(w^2-m^2+i\epsilon)}e^{is_2((w-p)^2-m^2+i\epsilon)} = e^{-im^2(s_1+s_2)}e^{-\epsilon(s_1+s_2)} \\ \times e^{i(s_1+s_2)\left(w-\frac{s_2p}{s_1+s_2}\right)^2}e^{ip^2\left(\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\right)}. \quad (2.10)$$

Fácilmente se nota que el siguiente término se puede identificar con una integral Gaussiana

$$e^{-[-i(s_1+s_2)]\left(w-\frac{s_2p}{s_1+s_2}\right)^2} \simeq e^{-a(w-b)^2},$$

pero para poder realizar dicha identificación es necesario que $\mathbf{Re}(a) > 0$. En éste caso a es puramente imaginario ya que el tiempo propio de Schwinger es un parámetro puramente real. Para solucionar este problema se hará lo siguiente, primero consideremos la exponencial que contiene al parámetro ϵ y se define

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\left(w - \frac{s_2p}{s_1 + s_2}\right)^2}. \quad (2.11)$$

Al escribir la expresión (2.10) en términos de $\tilde{\epsilon}$ y realizando las manipulaciones mencionadas anteriormente, se puede identificar un término que corresponde a una integral de tipo Gaussiana

$$e^{(s_1+s_2)\left[i\left(w-\frac{s_2p}{s_1+s_2}\right)^2 - \tilde{\epsilon}\left(w-\frac{s_2p}{s_1+s_2}\right)^2\right]} = e^{-(\tilde{\epsilon}-1)(s_1+s_2)\left(w-\frac{s_2p}{s_1+s_2}\right)^2} \\ \simeq e^{-a(w-b)^2}, \quad (2.12)$$

y ahora se tiene que $\mathbf{Re}(a) = \mathbf{Re}((\tilde{\epsilon}-1)(s_1+s_2)) = \tilde{\epsilon}(s_1+s_2) > 0$. Se seguirá escribiendo $a = -i(s_1+s_2)$ pero entendiendo que la parte real (asociada a $\tilde{\epsilon}$) sigue ahí. Otra manera de pensarlo es que ahora las variables s_1 y s_2 ya no son puramente reales sino que desarrollan una pequeña parte imaginaria (ésta sólo puede contribuir con una fase en el resultado final).

Así que la expresión (2.9) para la autoenergía se reescribe como

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & \frac{4ig^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 e^{-im^2(s_1+s_2)} e^{ip^2\left(\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\right)} \\ & \times \int d^4w e^{-[-i(s_1+s_2)]\left(w-\frac{s_2p}{s_1+s_2}\right)^2} [w_\mu w^\mu - w_\mu p^\mu + m^2]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A partir de los resultados y cálculos que se muestran en el apéndice B, el resultado final de las integrales Gaussianas de la expresión (2.13) está dado por

$$\begin{aligned} \int d^4w e^{-[-i(s_1+s_2)]\left(w-\frac{s_2p}{s_1+s_2}\right)^2} [w_\mu w^\mu - w_\mu p^\mu + m^2] = \\ \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)^2} \left[\frac{2i}{s_1+s_2} - \frac{s_1s_2}{(s_1+s_2)^2} p^2 + m^2 \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

de modo que al sustituir en resultado en (2.13), se obtiene que la autoenergía adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 e^{-im^2(s_1+s_2)} e^{ip^2\left(\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}\right)} \\ & \times \frac{1}{(s_1+s_2)^2} \left[\frac{2i}{s_1+s_2} - \frac{s_1s_2}{(s_1+s_2)^2} p^2 + m^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La integración sobre los tiempos propios que parecen en la ecuación (2.15) para la autoenergía se pueden realizar de forma simple con las siguientes cambios de variable

$$s_1 = \frac{s}{2}(1+v) \quad \text{y} \quad s_2 = \frac{s}{2}(1-v), \quad (2.16)$$

donde $s \in [0, \infty)$ y $v \in [-1, 1]$. Vale la pena notar que el parámetro s tiene unidades de $[E^{-2}]$, mientras que el parámetro v es adimensional.

2.3. ESTRUCTURA ANALÍTICA DE LA FUNCIÓN DE AUTOENERGÍA 31

En términos de estas nuevas variables, la ecuación (2.15) se reduce a

$$\Sigma(p) = \frac{g^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 dv e^{-im^2s} e^{ip^2 \frac{s(1-v^2)}{4}} \times \left[\frac{2i}{s} - \frac{(1-v^2)}{4} p^2 + m^2 \right]. \quad (2.17)$$

Esta forma de la función de auto-energía permite de manera simple estudiar su estructura analítica, mismo que se llevará a cabo en la siguiente sección.

2.3. Estructura analítica de la función de autoenergía

Un conteo de potencias en la expresión (2.5) señala que la función de autoenergía diverge cuadráticamente con la energía. Ésta divergencia también se presenta en la ecuación (2.17) en la región donde $s \rightarrow 0$.

En teoría cuántica de campos existen métodos para lidiar con los infinitos que surgen al hacer los cálculos que son de interés. De manera general, se pueden dividir en dos categorías: los procesos de regularización y los de renormalización que tienen como fin aislar y “esconder” las divergencias respectivamente, así como darles una interpretación física.

En pocas palabras, la regularización separa los términos infinitos de las expresiones que se están trabajando mientras que la renormalización los asocia con ciertas cantidades físicas.

Una manera de explicar estos infinitos desde un punto de vista clásico es pensarlo como un problema de puntos de referencia, es decir, las integrales divergen porque los puntos de referencia que se usan no son los adecuados para el problema que se intenta resolver (pero en éste caso son los únicos accesibles).

Además no es posible medir de forma absoluta cantidades físicas ya que dependen del punto de referencia. Lo que si se puede medir e interpretar físicamente es su cambio o diferencia con respecto a algún parámetro, por ejemplo, la energía potencial

$$\vec{F} = -\nabla U,$$

donde U representa a la energía potencial, ∇ representa al operador gradiente y es el que da el cambio en las direcciones espaciales y \vec{F} es la fuerza producida debido a ésta diferencia de potencial. Nótese que si se agrega una constante a la energía potencial, lo que corresponde a un cambio de punto de referencia, el resultado seguirá siendo el mismo.

En teoría cuántica de campos las divergencias aparecen debido a que se trabaja con objetos puntuales con características físicas como la función de onda, masa, carga eléctrica, carga de color, etc. Al interactuar dichos objetos, es de esperar que la interacción entre ellos también sea singular. En general, todas las divergencias se asocian a éstas características físicas y por ende toman valores reales.

Para mostrar ésta última aseveración, basta con asilar la parte divergente en la expresión (2.17).

El proceso que se seguirá consiste en integrar por partes en v hasta que las integrales sobre s sean inmediatas y se puedan hacer de manera sencilla [43]. Una vez hecho esto, se obtiene

$$\Sigma(p) \equiv \Sigma(0) + \tilde{\Sigma}_R(p), \quad (2.18)$$

donde

$$\Sigma(0) = \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-im^2s} \left[\frac{2i}{s} + m^2 \right] \quad (2.19)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_R(p) = \frac{g^2}{8\pi^2} & \left[\left(\frac{p^4}{2} - 2m^2 p^2 \right) \int_{-1}^1 dv \frac{v^2}{(1-v^2)p^2 - 4m^2} \right. \\ & \left. + \frac{p^4}{2} \int_{-1}^1 dv \frac{v^4}{(1-v^2)p^2 - 4m^2} - p^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nótese que $\Sigma(0)$ contiene términos que divergen, las cuales se calculan explícitamente en el apéndice C y se muestra que estos toman valores puramente reales.

La cantidad $\tilde{\Sigma}_R(p)$ aún contiene una divergencia debido al último término, sin embargo dicho término es puramente real como se muestra en el apéndice C. Ésta última divergencia se asocia con la función de onda de la partícula [43].

A partir de la ecuación (2.18), se tiene que

$$\tilde{\Sigma}_R(p) = \Sigma(p) - \Sigma(0)$$

indica la parte “efectiva” de la función de autoenergía y en ella está codificada la información acerca del posible decaimiento de la partícula escalar en fermiones, debido a que la parte imaginaria de $\Sigma(0)$ es nula.

2.3.1. Parte imaginaria de la función de autoenergía

Lo función de autoenergía $\Sigma(p)$ dada por la expresión (2.18) contiene información sobre la contribución de los procesos virtuales a la masa efectiva de la partícula. Al ser la masa un observable físico, las correcciones provenientes de $\Sigma(p)$ se asocian con su parte real, mismas que se ignoraran en la presente tesis debido a que el objetivo es estudiar el decaimiento de la partícula escalar, el cual está relacionado con la parte imaginaria. Al final del trabajo se hacen comentarios relacionados con ésta aproximación.

Para estudiar las condiciones bajo las cuales $\tilde{\Sigma}_R(p)$ desarrolla una parte imaginaria se definen

$$V_2 \equiv \int_{-1}^1 dv \frac{v^2}{(1-v^2)p^2 - 4m^2} \quad (2.21)$$

y

$$V_4 \equiv \int_{-1}^1 dv \frac{v^4}{(1-v^2)p^2 - 4m^2}, \quad (2.22)$$

los cuales son los dos primeros términos que aparecen en la expresión (2.20). Nótese que ambas tienen dos polos en el plano complejo de v , uno en algún punto en $(0, 1]$ en el eje real y el otro es simétrico en $[-1, 0)$ si $p^2 \geq 4m^2$ como se muestra en la figura 2.4. Cabe mencionar que estos dos polos se juntan en el cero cuando $p^2 = 4m^2$.

El último término de la expresión (2.20) es puramente real, como se muestra en el apéndice C, por lo que se ignorará en el análisis subsecuente.

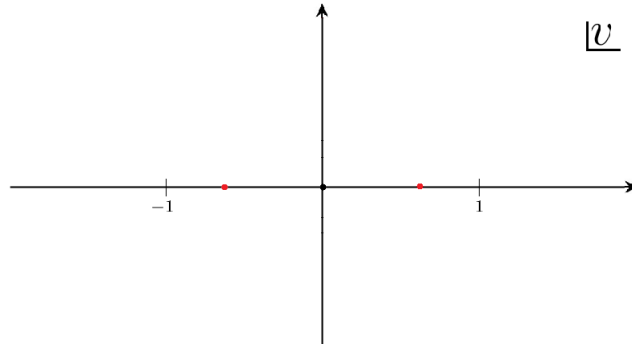


Figura 2.4: Polos de las integrales (2.21) y (2.22) en el plano complejo de v .

Recordando que en la masa se “incorporó” el término $i\epsilon$ procedente de los propagadores y que garantiza la convergencia de varias expresiones cuando $s \rightarrow \infty$, para el análisis de la parte imaginaria es importante escribir dicho término explícitamente en las expresiones (2.21) y (2.22), esto es

$$V_2 = \int_{-1}^1 dv \frac{v^2}{(1-v^2)p^2 - 4m^2 + i\epsilon}$$

y

$$V_4 = \int_{-1}^1 dv \frac{v^4}{(1-v^2)p^2 - 4m^2 + i\epsilon}.$$

Usando la siguiente igualdad

$$\mathbf{Im} \left(\frac{1}{a + i\epsilon} \right) = -\frac{\epsilon}{a^2 + \epsilon^2},$$

donde $\mathbf{Im}(a) = 0$, junto con la representación para la delta de Dirac dada por [44]

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}. \quad (2.23)$$

Es fácil ver que la parte imaginaria de V_2 y V_4 están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{Im}(V_2) &= - \int_{-1}^1 dv \frac{\epsilon v^2}{[(1-v^2)p^2 - 4m^2]^2 + \epsilon^2} \\ &= -\pi \int_{-1}^1 dv v^2 \delta((1-v^2)p^2 - 4m^2) \\ &= -\frac{\pi}{2p^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-1}^1 dv |v| \delta \left(v - \sigma \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \right) \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{Im}(V_4) = -\frac{\pi}{2p^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-1}^1 dv |v^3| \delta \left(v - \sigma \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \right),$$

donde se ha utilizado la propiedad [45]

$$\delta(g(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - a_j)}{\left| \frac{dg}{dx}(a_j) \right|}, \quad (2.24)$$

con a_j las raíces de $g(x)$. Y sólo es posible si $\frac{dg}{dx}(a_j) \neq 0$.

Nótese que en ambos casos, V_2 y V_4 desarrollan parte imaginaria si

$$\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \in [-1, 1],$$

de tal manera que las partes imaginarias correspondientes están dadas por

$$\mathbf{Im}(V_2) = -\frac{\pi}{p^3} \sqrt{p^2 - 4m^2} \Theta(p^2 - 4m^2) \quad (2.25)$$

y

$$\mathbf{Im}(V_4) = -\frac{\pi}{p^5} (p^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}} \Theta(p^2 - 4m^2), \quad (2.26)$$

donde $\Theta(x)$ representa a la función de Heaviside dada por [46]

$$\Theta(x) \equiv \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Reemplazando estos dos resultados en $\Sigma(p)$, se obtiene

$$\mathbf{Im}(\Sigma(p)) = -\frac{g^2}{8\pi} \frac{(p^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}}{p} \Theta(p^2 - 4m^2). \quad (2.28)$$

Recordando la ecuación (1.34), la tasa de decaimiento es proporcional a $-\text{Im}(\Sigma_R(p))$. De modo que la parte imaginaria de la autoenergía sea negativa, como se observa en la ecuación (2.28), es algo que se espera para que la tasa de decaimiento sea positiva y tenga significado físico.

Para facilitar la interpretación visual, tanto en el presente capítulo como en los subsecuentes, se grafica su valor absoluto.

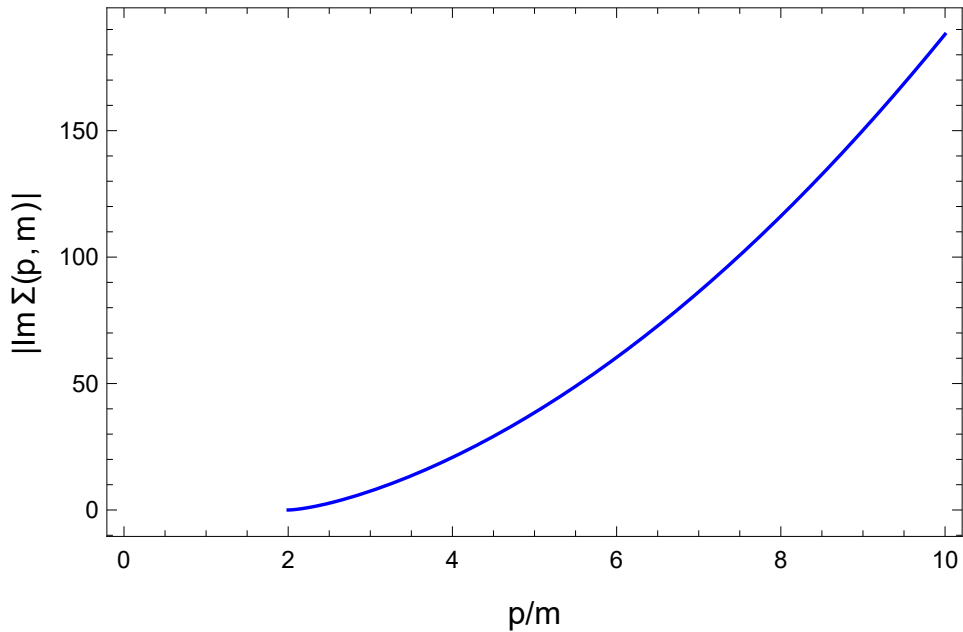


Figura 2.5: Valor absoluto de la parte imaginaria de la autoenergía en función del momento de la partícula escalar.

En la figura 2.5 se muestra el comportamiento del valor absoluto de la parte imaginaria de la autoenergía en función del momento del bosón escalar. Es posible observar que se incrementa uniformemente de manera cuadrática conforme el momento aumenta. Además la gráfica comienza en el punto donde $p = 2m$ como lo especifica la función de Heaviside.

2.4. Tasa de decaimiento

Al sustituirse el resultado de la expresión para la parte imaginaria de la autoenergía (2.28) en la ecuación para la tasa de decaimiento (1.34), se obtiene que la tasa de decaimiento para una partícula escalar real² en el vacío está dada por

$$\Gamma = \frac{g^2}{8\pi\sqrt{p^2 + M^2}} \frac{(M^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}}{M} \Theta(M^2 - 4m^2). \quad (2.29)$$

Es importante notar que el punto $p = 2m$ es el umbral de energía a partir del cual la partícula empieza a decaer, esto es de esperarse ya que físicamente el decaimiento no se puede dar si la energía de la partícula inicial es menor a la energía en reposo de los fermiones a los que decae.

Como ya se mencionó en la sección 1.4, la tasa de decaimiento cambia dependiendo del sistema de referencia. Considerando el marco de referencia en reposo de la partícula escalar, la expresión para la tasa de decaimiento se reduce a

$$\Gamma = \frac{g^2}{8\pi} \frac{(M^2 - 4m^2)^{\frac{3}{2}}}{M^2} \Theta(M^2 - 4m^2). \quad (2.30)$$

En la figura 2.6 se muestra el comportamiento de la tasa de decaimiento como función de la masa del bosón escalar. Se puede apreciar que cuando el cociente $\frac{M}{m}$ es cercano al umbral de decaimiento el comportamiento crece cuadráticamente, mientras que a valores grandes el comportamiento se vuelve lineal.

²Al estar en la capa de masa se cumple que $p^2 = M^2$.

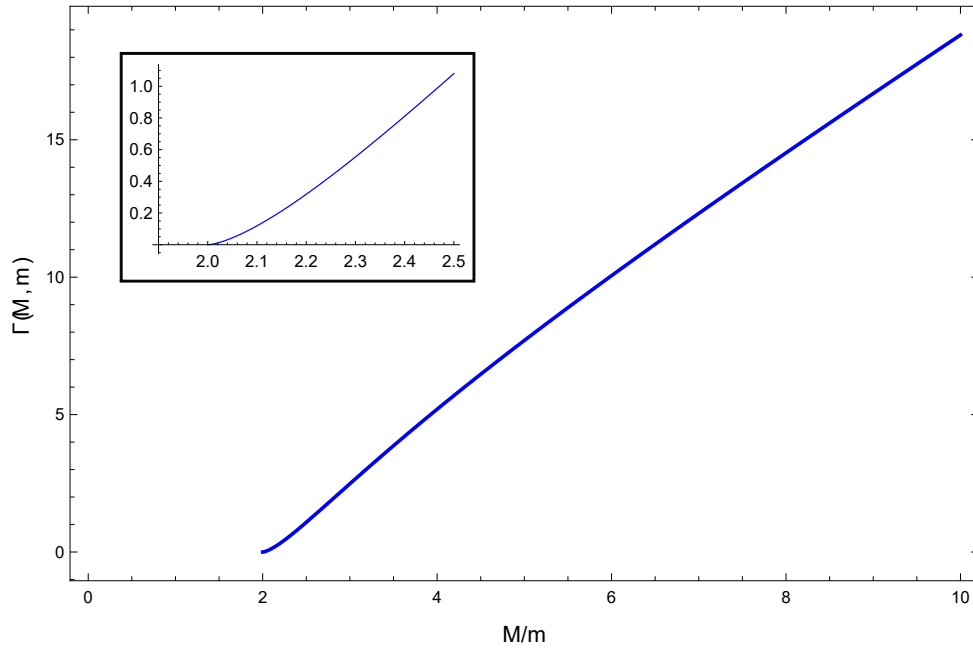


Figura 2.6: Tasa de decaimiento de la partícula escalar en función de la masa en reposo de la partícula escalar con acercamiento en el intervalo del umbral de decaimiento.

En lo que resta del presente trabajo de tesis se aplicaran las ideas generales desarrolladas en el presente capítulo, para el estudio de la tasa de decaimiento del campo escalar neutro en presencia de un campo magnético homogéneo.

Capítulo 3

Dinámica de Fermiones Bajo la Influencia de un Campo Magnético

En este capítulo se revisa como se modifica la dinámica de los fermiones bajo la influencia de un campo magnético homogéneo.

Se comienza en análisis con el caso de partículas cuánticas no relativistas usando la ecuación de Schrödinger acoplada con campo magnético. Enseguida se extienden estas ideas a partículas relativistas mediante la ecuación de Dirac y se obtienen las soluciones correspondientes.

Finalmente, usando las soluciones encontradas, se calcula el propagador mediante el producto temporalmente ordenado.

3.1. Dinámica no relativista

En el caso de una partícula de masa m y carga e moviéndose bajo la influencia de un campo magnético se sabe que su dinámica queda totalmente determinada a partir del Hamiltoniano, que en este caso está dado por [28,47]

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - e\vec{A} \right)^2, \quad (3.1)$$

donde \vec{A} es el potencial vector¹ y \vec{p} es el momento de la partícula. Las ecuaciones de Hamilton dan origen a la ecuación de movimiento

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.2)$$

donde \vec{v} es la velocidad de la partícula y a \vec{F} se le conoce como fuerza de Lorentz² [28, 41].

Las trayectorias de las partículas cargadas bajo la influencia de ésta fuerza, en general, están descritas por hélices que se obtienen de la combinación de un movimiento con velocidad constante a lo largo de la dirección del campo y un movimiento circular en el plano transversal a este.

Si las escalas de energía son tales que el comportamiento ondulatorio de las partículas cargadas es relevante, uno debe de trabajar con la ecuación de Schrödinger en presencia de un campo magnético. Ésta última se obtiene fácilmente promoviendo H , \vec{A} y \vec{p} a operadores en (3.1), esto es

$$\hat{H}\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - e\hat{\vec{A}} \right)^2 \psi(\vec{x}, t), \quad (3.3)$$

donde $\psi(\vec{x}, t)$ representa a la función de onda de la partícula. Resolviendo la ecuación anterior, se encuentra que las energías permitidas son

$$E_n = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{|e\vec{B}|}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

De (3.4) se puede ver que la partícula se mueve libremente en la dirección paralela a la dirección del campo magnético y como consecuencia su energía cambia de forma continua con p_z ; mientras que en el plano perpendicular, debido a que el movimiento está confinado a órbitas, la energía está discretizada por el número n .

¹ $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

² $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, donde \vec{E} es el campo eléctrico externo que en este caso es nulo.

Ahora, si se consideran partículas con espín, se debe incluir un término de interacción entre el espín y el campo magnético [47, 48]

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - e\vec{A} \right)^2 - \hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}, \quad (3.5)$$

donde $\hat{\vec{\mu}} = g\mu_B\hat{\vec{s}}$ es el momento magnético de la partícula, g el factor de Landé, $\mu_B = \frac{e}{2m}$ el magnetón de Bohr y $\hat{\vec{s}} = \frac{\hat{\vec{\sigma}}}{2}$ el operador de espín con $\vec{\sigma}$ las matrices de Pauli.

En este caso, las energías permitidas están dadas por

$$E_n = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{|e\vec{B}|}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \mu_B\sigma B, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots, \quad \sigma = \pm 1, \quad (3.6)$$

donde σ son los eigenvalores de la matriz de Pauli σ_z y denota las diferentes proyecciones de espín: (+) orientado en la dirección del campo y (-) en la dirección opuesta.

Nótese que (3.6) puede reescribirse como

$$E_l = \frac{p_z^2}{2m} + 2lB\mu_B, \quad \text{con } l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

donde $l = n + \frac{1}{2} - \frac{e\sigma}{|2e|}$ se conoce como nivel de Landau.

En el análisis mostrado en la presente sección se puede observar que el campo magnético, al romper la isotropía del espacio, provoca que el movimiento a lo largo de la dirección del campo sea muy diferente al movimiento en la dirección transversa. De manera análoga, eso es lo que se espera en el caso relativista (cuando consideremos la ecuación de Dirac) y esto se verá reflejado tanto en el propagador como en la función de autoenergía de la partícula escalar en presencia de un campo magnético homogéneo y, por ende, en su tasa de decaimiento.

3.2. Ecuación de Dirac con campo magnético

En la sección anterior se trabajó en el régimen de la mecánica cuántica no relativista al considerar la ecuación de Schrödinger; para extender el análisis al caso de la mecánica cuántica relativista se considera la ecuación de Dirac y se desarrolla de manera similar [49].

En ésta sección se procederá a trabajar con el campo de Dirac de manera clásica para después considerarlo un campo cuántico y obtener el propagador en la siguiente sección.

La ecuación de Dirac para fermiones en presencia de un campo magnético tiene la siguiente forma [34]

$$(i\not{D} - m)\psi(x) = 0, \quad (3.8)$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$ es la derivada covariante, m la masa de los fermiones y $e = -|e|$ la carga del electrón. El primer término de la ecuación (3.8) se puede reescribir en términos del momento asociado a la derivada covariante y las matrices de Dirac, de tal manera que se obtiene

$$(\gamma_\mu \hat{\Pi}^\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (3.9)$$

donde $\hat{\Pi}_\mu \equiv \hat{p}_\mu - eA_\mu$ con $\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$.

Sin pérdida de generalidad, se supondrá que el campo magnético es uniforme y define la dirección z , $\vec{B} = B\hat{k}$. Esta configuración de campo magnético se puede obtener de manera simple eligiendo la norma

$$A^\mu = (0, 0, Bx^1, 0), \quad (3.10)$$

de tal forma que el tensor electromagnético es

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Con el fin de encontrar las soluciones a la ecuación (3.9), se multiplica por la izquierda por su binomio conjugado $(\gamma_\mu \hat{\Pi}^\mu + m)$. Después de realizar algunas manipulaciones algebraicas sencillas que obtiene

$$(\Pi^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m^2) \psi(x) = 0, \quad (3.12)$$

donde $\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ con $[\ , \]$ el conmutador. En el caso particular que se está analizando, al usar(3.11) en (3.12), ésta última se reduce a

$$(\Pi^2 + ie\gamma^1\gamma^2B - m^2)\psi(x) = 0. \quad (3.13)$$

Introduciendo el operador de proyección de espín

$$\Delta(\sigma) \equiv \frac{1}{2} (1 + i\sigma\gamma^1\gamma^2), \quad \text{con } \sigma = \pm 1, \quad (3.14)$$

se observa que el biespinor $\psi(x)$ puede escribirse como

$$\psi = \psi_\uparrow + \psi_\downarrow, \quad (3.15)$$

donde

$$\psi_\uparrow = \Delta(+)\psi \quad \text{y} \quad \psi_\downarrow = \Delta(-)\psi,$$

de forma tal, que al reemplazar (3.15) en (3.13), se obtiene

$$(\Pi^2 + \sigma eB - m^2) \psi_\sigma = 0. \quad (3.16)$$

Nótese que ésta expresión es una ecuación general para el caso de campo magnético, y de ella es posible obtener las soluciones espaciales para la ecuación de Dirac (tanto para frecuencias negativas como positivas).

Tal como en el caso sin campo (1.9), se propone que la solución para (3.16) se pueda escribir en dos partes, la parte espacial y la espinorial. A diferencia de la solución para la ecuación de Dirac en el caso libre, ahora la solución se verá modificada por el campo magnético. Es de esperar que la solución espacial sea de ondas planas en la dirección del campo mientras que cambiará en las perpendiculares (como se mostró en la sección anterior); además la parte del espín también se verá afectada por la interacción que se da con el campo.

Teniendo en mente esto, una descomposición útil para la solución a (3.16) es

$$\psi_\sigma^r = e^{-i(Et+p^2x_2+p^3x_3)} \chi_\sigma^r(x^1) w_\sigma^r, \quad \text{con } r = \pm 1, \quad (3.17)$$

donde w_σ^r es un biespinor que sólo depende de la energía y el espín, no contiene información sobre la parte espacial y r indica si las soluciones corresponden a frecuencias positivas o negativas. Además nótese que en la onda plana aparece la componente en x_2 aunque ésta sea perpendicular a la dirección del campo, esto se debe a la norma asimétrica que se eligió previamente en (3.10) y en el caso de una norma distinta, esta podría no aparecer³.

Para determinar la parte espacial que falta χ_σ^r , se sustituye, (3.17) en (3.16) y después de algunas manipulaciones se llega a

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \left(\frac{1}{4} \rho^2 - \frac{1}{2} - \eta \right) \right] \chi_\sigma^r(\rho) = 0 \quad (3.18)$$

³En la norma simétrica $A^\mu = (0, -\frac{Bx^2}{2}, \frac{Bx^1}{2}, 0)$, el factor en cuestión desaparece.

con

$$\rho \equiv \sqrt{2|eB|} \left(\frac{p^2}{eB} - rx^1 \right),$$

$$\eta \equiv \frac{E^2 - (p^3{}^2 + m^2)}{2|eB|} + \frac{\sigma \text{sign}(eB) - 1}{2} \equiv l + \frac{\hat{\sigma} - 1}{2},$$

donde l representa a los niveles de Landau, los mismos que se encontraron en la sección anterior.

La ecuación (3.18) corresponde a una parabólica cilíndrica⁴ (o ecuación diferencial de Weber), de tal forma que la solución está dada por

$$\chi_\sigma^r(\rho) = N_n D_n(\rho), \quad (3.19)$$

en donde N_n es un factor de normalización y D_n es la solución a la ecuación de Weber y están dadas por

$$N_n = \left(\frac{\sqrt{4\pi|eB|}}{n!} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$D_n(z) = 2^{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} z^2 \right),$$

en donde $W_{k,m}(z)$ es la función de Whittaker⁵.

Con la ecuación (3.19), se ha determinado completamente la parte espacial de la solución (3.17). Así que sólo falta determinar los biespinores w_σ^r para tener la solución completa.

Para poder encontrar la parte espinorial se sustituye (3.19) en (3.9), y luego de algunas manipulaciones junto con las propiedades para las derivadas de

$${}^4 y''(z) + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2 \right) y(z) = 0$$

⁵Whittaker and Watson 1990, p. 347; Gradshteyn and Ryzhik 2000, p. 1018.

los parabólicos cilíndricos se llega a la siguiente expresión

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \chi_{l+\frac{\sigma-1}{2}}^r \Delta(\sigma) \left[\gamma^0(rE) - \gamma^2 \left(r \operatorname{sign}(eB) \sqrt{2|eBl|} \right) - \gamma^3 (rp^3) - m \right] w^r = 0, \quad (3.20)$$

que una vez simplificada toma la forma

$$\mathbb{E}_p^r [\gamma_\mu \bar{p}_r^\mu - m] w^r = 0, \quad (3.21)$$

con

$$\begin{aligned} w_\sigma^r &= \Delta(\sigma) w^r, \\ \mathbb{E}_p^r &\equiv \left[\sum_{\sigma=\pm 1} \chi_{l+\frac{\sigma-1}{2}}^r \Delta(\sigma) \right] e^{-ir(Et+p^2x_2+p^3x_3)}, \\ \bar{p}_r^\mu &\equiv \left(rE, 0, r \operatorname{sign}(eB) \sqrt{2|eBl|}, rp^3 \right), \end{aligned}$$

donde \mathbb{E}_p^r son conocidas como eigenfunciones de Ritus [50].

La ecuación que cumplen los espinores (3.21) es muy semejante al caso libre, así que las soluciones en la representación quiral son

$$w^+ \equiv u = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot \bar{p}} \eta \\ \sqrt{\sigma \cdot \bar{p}} \eta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w^- \equiv v = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma \cdot \bar{p}} \eta \\ -\sqrt{\sigma \cdot \bar{p}} \eta \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

con $\bar{p}^\mu \equiv (E, 0, \operatorname{sign}(eB) \sqrt{2|eBl|}, p^3)$.

Finalmente, la solución general está dada por

$$\psi^r \equiv \mathbb{E}_p^r w^r. \quad (3.23)$$

Nótese que en el caso con campo magnético las eigenfunciones de Ritus ahora juegan el papel de las ondas planas en el caso libre.

3.3. Propagador fermiónico con campo magnético

Dentro del formalismo de la cuantización canónica, el propagador se calcula a partir del producto temporalmente ordenado de los campos cuánticos, los cuales se obtienen promoviendo las soluciones a operadores y escribiéndolas en términos de los operadores de creación y aniquilación (véase cap.5 [51]). De tal manera, se obtiene

$$\hat{\psi}(x) = \not\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} A(p) \sum_{\sigma=\pm 1} \left(\hat{a}_p^\sigma \mathbb{E}_p^+ u_p^\sigma + \hat{b}_p^{\sigma\dagger} \mathbb{E}_p^- v_p^\sigma \right), \quad (3.24)$$

con

$$\not\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{dp_2 dp_3}{(2\pi)^2},$$

donde $A(p)$ es un factor de normalización y los operadores de creación y aniquilación cumplen las siguientes relaciones de conmutación

$$\{\hat{a}_p^\sigma, \hat{a}_{p'}^{\sigma'\dagger}\} = \{\hat{b}_p^\sigma, \hat{b}_{p'}^{\sigma'\dagger}\} = (2\pi)^2 \delta^{ll'} \delta^{\sigma\sigma'} \delta(p_2 - p_2') \delta(p_3 - p_3'). \quad (3.25)$$

El propagador de Feynman para una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme, en el espacio de configuraciones, está dado por

$$\begin{aligned} S_F^B(x, y) &\equiv \langle 0 | \mathcal{T} \left(\hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \right) | 0 \rangle \\ &= i \not\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{E}_p(x) [\not{p} + m] \bar{\mathbb{E}}_p(y)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde en el resultado anterior se han usado las propiedades de las eigenfunciones de Ritus junto con las relaciones de conmutación dadas por (3.25). Nótese que ahora la información se propaga de manera diferente en las direcciones paralelas y perpendiculares al campo, gracias a las funciones de Ritus.

En 1951, Schwinger realizó el cálculo del propagador asociado a fermiones cargados en presencia de campos electromagnéticos uniformes de manera distinta [43]; su análisis consistió en diagonalizar la función de Green y calcular la acción sobre de diferentes estados en una métrica Euclidiana. En la métrica de Minkowski, la forma del propagador obtenida por Schwinger (en el espacio de configuraciones) está dado por [52]

$$S_F^B(x, y) = \Omega(x, y) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_F^B(k) e^{-ik(x-y)}, \quad (3.27)$$

donde

$$\Omega(x, y) = \exp\left(-i\frac{e}{2}x_\mu F^{\mu\nu}y_\nu\right) \quad (3.28)$$

se conoce coma fase de Schwinger.

En el caso particular en que el campo magnético define la dirección z , se tiene que [52]

$$S_F^B(w) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(eBs)} \exp\left[-is\left(m^2 - w_\parallel^2 - w_\perp^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs}\right)\right] \times \left[(m + \not{w}_\parallel) e^{-ieBs\Sigma_3} + \frac{\not{w}_\perp}{\cos(eBs)}\right], \quad (3.29)$$

en donde w_\parallel y w_\perp son las componentes del cuadrimomento paralela y perpendicular al campo magnético respectivamente

$$w_\parallel^\mu = (w^0, 0, 0, w^3) \quad \text{y} \quad w_\perp^\mu = (0, w^1, w^2, 0). \quad (3.30)$$

Para simplificar las expresiones vale la pena separar las matrices de Dirac, en perpendiculares y paralelas al campo magnético de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\gamma_{\parallel} &= \gamma_0, \gamma_3 \\ \gamma_{\perp} &= \gamma_1, \gamma_2\end{aligned}\tag{3.31}$$

Donde además Σ_3 se define como

$$\Sigma_3 \equiv i\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{3.32}$$

y este surge de la forma que toma la ecuación de Dirac en el caso particular que se está trabajando, como se puede observar en (3.13).

A pesar de que los métodos y resultados son diferentes para los propagadores en (3.26) y (3.27), se puede pasar del uno al otro haciendo algunas manipulaciones [53]. Con esto se quiere decir que la física que representan los dos resultados es la misma pero están expresados de manera diferente y, dependiendo del caso, es más conveniente usar uno u otro.

En el desarrollo que se lleva a cabo en el siguiente capítulo se usará el propagador de Schwinger (basado en el tiempo propio de Schwinger) ya que es el que se usó anteriormente en el capítulo 2. Además en el presente trabajo se explora el límite de campo magnético débil, en el cual, contribuyen todos los niveles de Landau a la suma en (3.26) y por cuestiones técnicas es más sencillo trabajar con una integral que con una suma infinita.

Sin embargo, en el límite de campo magnético fuerte, sólo se considera el primer nivel de Landau debido a que al ser el campo magnético la escala de energía más grande (mayor que la energía cinética y en reposo de los fermiones), las partículas no tienen la energía necesaria para pasar de un nivel de Landau al siguiente y se quedan confinadas en el nivel $l = 0$. Por lo que en dicho caso es preferible usar el propagador en términos de las funciones de Ritus dado que la suma de los niveles de Landau se reduce a un sólo término.

Capítulo 4

Tasa de Decaimiento con Campo Magnético

En este capítulo se extenderán las ideas planteadas en el capítulo 2, considerando ahora que el campo escalar neutro se mueve en presencia de un campo magnético constante y uniforme en la dirección z . Esto afectará la propagación de los fermiones cargados producidos por fluctuaciones cuánticas.

Debido a que el campo magnético rompe la simetría del movimiento en las direcciones paralela y perpendicular, como se mostró en el capítulo 3, la función de autoenergía que incluye los efectos del campo magnético hereda este rompimiento de simetría.

4.1. Función de autoenergía con campo magnético

Dado que el propagador fermiónico que incluye los efectos del campo magnético dado por (3.27) está escrito en el espacio de configuraciones, la función de autoenergía del campo escalar también estará dada en el espacio de configuración. Sin embargo, usando la transformada de Fourier, es posible obtener su expresión en el espacio de momentos de la siguiente manera

$$\Sigma(p, k) = \int d^4x \int d^4y \Sigma(x, y) e^{ipx} e^{-iky}. \quad (4.1)$$

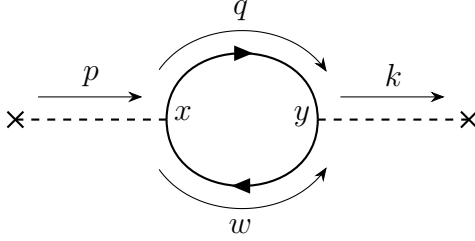


Figura 4.1: Diagrama amputado de Feynman de la función de autoenergía a un lazo para el espacio de configuraciones.

Para poder aplicar las reglas de Feynman en el espacio de configuraciones para el diagrama de la figura 2.3 es necesario determinar los puntos del espacio-tiempo en los cuales se dan las interacciones, es decir, en dónde se ubican los vértices del diagrama.

El diagrama de Feynman de la figura 4.1 es el correspondiente para el espacio de configuración y aplicando las reglas de Feynman se obtiene el siguiente resultado para la autoenergía

$$-i\Sigma^B(p, k) = (-1)tr \left[\int d^4x \int d^4y (-ig) S_F^B(x, y) (-ig) S_F^B(y, x) e^{ipx} e^{-iky} \right], \quad (4.2)$$

donde tr representa el operador de la traza sobre los índices espinoriales y $S_F^B(x, y)$ es el propagador de Feynman fermiónico de una partícula en un campo magnético dado por (3.27). Al sustituir explícitamente los propagadores fermiónicos, la autoenergía toma la siguiente forma

$$\Sigma^B(p, k) = ig^2 tr \left[\int d^4x \int d^4y \Omega(x, y) \int \frac{d^4w}{(2\pi)^4} S_F^B(w) e^{-iw(x-y)} \right. \\ \left. \times \Omega(y, x) \int \frac{d^4(-q)}{(2\pi)^4} S_F^B(-q) e^{-i(-q)(y-x)} e^{ipx} e^{-iky} \right]. \quad (4.3)$$

En la expresión anterior aparecen dos fases de Schwinger valuadas en puntos contrarios, así que al escribirlas en su forma explícita (3.28) se llega a que el producto es la unidad, siempre y cuando las partículas en el lazo tengan la misma carga. Al eliminarse las fases de Schwinger, las integrales espaciales son inmediatas, de modo que la autoenergía se reduce a

$$\Sigma^B(p) = ig^2 tr \left[\int \frac{d^4 w}{(2\pi)^4} S_F^B(w) S_F^B(w-p) \right]. \quad (4.4)$$

Para mostrar la dependencia explícita de la autoenergía con el campo magnético, se sustituyen los propagadores de la expresión (3.29), de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \Sigma^B(p) = & ig^2 \int \frac{d^4 w}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 \frac{e^{-im^2(s_1+s_2)}}{\cos(eBs_1) \cos(eBs_2)} \\ & \times e^{is_1 \left(w_\parallel^2 + w_\perp^2 \frac{\tan(eBs_1)}{eBs_1} \right)} e^{is_2 \left((w-p)_\parallel^2 + (w-p)_\perp^2 \frac{\tan(eBs_2)}{eBs_2} \right)} \\ & \times tr \left\{ \left[(m + \not{w}_\parallel) e^{-ieBs_1 \Sigma_3} + \frac{\not{w}_\perp}{\cos(eBs_1)} \right] \right. \\ & \left. \times \left[(m + \not{w}_\parallel - \not{p}_\parallel) e^{-ieBs_2 \Sigma_3} + \frac{\not{w}_\perp - \not{p}_\perp}{\cos(eBs_2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.1.1. Cálculo de la traza

Para calcular la traza en (4.5), es conveniente escribir el término $e^{-ieBs\Sigma_3}$ a partir de la definición de la exponencial de un operador [28]

$$e^{-ieBs\Sigma_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ieBs\Sigma_3)^n}{n!}, \quad (4.6)$$

la cual, utilizando las propiedades de Σ_3

$$\Sigma_3^{2n} = \mathbf{I}, \quad \Sigma_3^{2n+1} = \Sigma_3, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

permite reescribir a la exponencial como

$$e^{-ieBs\Sigma_3} = \mathbf{I} \cos(eBs) - i\Sigma_3 \sin(eBs), \quad (4.8)$$

donde en (4.6) se han identificado las series del seno y del coseno respectivamente.

Para hacer más sencillo el cálculo de las trazas, es conveniente introducir los operadores de proyección que permiten separar las componentes de momento en paralelas y perpendiculares al campo magnético¹

$$P_{\mu\nu}^\perp = -\hat{F}_{\mu\alpha} \hat{F}_\nu^\alpha, \quad (4.9)$$

$$P_{\mu\nu}^\parallel = g_{\mu\nu} + \hat{F}_{\mu\alpha} \hat{F}_\nu^\alpha, \quad (4.10)$$

donde $\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{F_{\mu\nu}}{B}$ es el tensor de Faraday normalizado.

Con ayuda de los proyectores y utilizando las ideas mostradas en la sección 2.2.1, el resultado para la traza de la expresión (4.5) está dada por

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left\{ \left[(m + \not{w}_\parallel) e^{-ieBs_1\Sigma_3} + \frac{\not{w}_\perp}{\cos(eBs_1)} \right] \right. \\ & \quad \left. \times \left[(m + \not{w}_\parallel - \not{p}'_\parallel) e^{-ieBs_2\Sigma_3} + \frac{\not{w}_\perp - \not{p}'_\perp}{\cos(eBs_2)} \right] \right\} \\ & = 4 \left[\cos(eB(s_1 + s_2)) \left[m^2 + (w \cdot (w - p))_\parallel \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{(w \cdot (w - p))_\perp}{\cos(eBs_1) \cos(eBs_2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

¹Ver apéndice A.2

Para ver más detalles sobre el procedimiento anterior consulte el apéndice A.3.

Sustituyendo el resultado anterior en (4.5), se obtiene que la autoenergía se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\Sigma^B(p) = & 4ig^2 \int \frac{d^4w}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 e^{-im^2(s_1+s_2)} \\
& \times e^{is_1\left(w_\parallel^2 + w_\perp^2 \frac{\tan(eBs_1)}{eBs_1}\right)} e^{is_2\left((w-p)_\parallel^2 + (w-p)_\perp^2 \frac{\tan(eBs_2)}{eBs_2}\right)} \\
& \times \left[[1 - \tan(eBs_1)\tan(eBs_2)] \left[m^2 + (w \cdot (w-p))_\parallel \right] \right. \\
& \left. + \frac{(w \cdot (w-p))_\perp}{\cos^2(eBs_1)\cos^2(eBs_2)} \right], \tag{4.12}
\end{aligned}$$

donde

$$(a \cdot b)_\parallel = a_0b_0 - a_3b_3 \quad \text{y} \quad (a \cdot b)_\perp = -a_1b_1 - a_2b_2,$$

con a y b dos cuádrimomentos arbitrarios.

4.1.2. Integrales Gaussianas

En ésta sección se llevará a cabo un procedimiento análogo al realizado en la sección 2.2.2 para llevar a la exponencial y las integrales en w de la ecuación (4.12) a la forma de integrales Gaussianas

$$e^{-a(w-b)^2},$$

con la condición de que $\mathbf{Re}(a) > 0$, para ello se siguen las mismas manipulaciones que en el caso libre pero ahora aparecen integrales Gaussianas con factores diferentes, esto es

$$e^{-a_\parallel(w-b_\parallel)^2} e^{-a_\perp(w-b_\perp)^2},$$

donde

$$\begin{aligned} a_{\parallel} &= -i(s_1 + s_2), & b_{\parallel} &= \frac{s_2}{s_1 + s_2}, \\ a_{\perp} &= -i(s_1\xi_1 + s_2\xi_2) & \text{y} & & b_{\perp} &= \frac{s_2\xi_2}{s_1\xi_1 + s_2\xi_2}, \end{aligned}$$

con

$$\xi_1 = \frac{\tan(eBs_1)}{eBs_1} \quad \text{y} \quad \xi_2 = \frac{\tan(eBs_2)}{eBs_2}.$$

Cabe mencionar que es necesario recurrir nuevamente al truco de definir un $\tilde{\epsilon}$ a partir del ϵ que proviene del propagador para asegurar que $\mathbf{Re}(a_{\parallel}) > 0$ y $\mathbf{Re}(a_{\perp}) > 0$.

Una vez hecho lo anterior, la expresión (4.12) se escribe como

$$\Sigma^B(p) = \frac{4ig^2}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} ds_1 \int_0^{\infty} ds_2 \Lambda(s_1, s_2) e^{-im^2(s_1+s_2)} e^{i\left(\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}p_{\parallel}^2 + \frac{s_1\xi_1s_2\xi_2}{s_1\xi_1+s_2\xi_2}p_{\perp}^2\right)}, \quad (4.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \Lambda(s_1, s_2) \equiv \int d^4w & e^{-a_{\parallel}(w_{\parallel}-b_{\parallel}p_{\parallel})^2} e^{-a_{\perp}(w_{\perp}-b_{\perp}p_{\perp})^2} \left[\frac{(w \cdot (w-p))_{\perp}}{\cos^2(eBs_1) \cos^2(eBs_2)} \right. \\ & \left. + [1 - \tan(eBs_1) \tan(eBs_2)] [m^2 + (w \cdot (w-p))_{\parallel}] \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

la cual concentra las integrales Gaussianas y cuyo cálculo detallado se muestra en el apéndice B.3.

Como en el caso libre, ahora se reescribe a la función de autoenergía en términos de las variables

$$s = s_1 + s_2 \quad \text{y} \quad v = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2},$$

de tal manera que la autoenergía en (4.13) toma la forma

$$\begin{aligned} \Sigma^B(p) = \frac{4ig^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds \int_{-1}^1 dv \left(\frac{s}{2}\right) \Lambda(s, v) e^{-im^2 s} e^{i\frac{s(1-v^2)}{4} p_\parallel^2} \\ \times e^{\frac{i}{eB} \frac{\cos(eBsv) - \cos(eBs)}{2 \sin(eBs)} p_\perp^2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Al sustituir explícitamente el resultado de las integrales Gaussianas (B.21) en términos de las variables s y v en (4.15), la expresión final para la función de autoenergía es

$$\begin{aligned} \Sigma^B(p) = \frac{g^2 eB}{8\pi^2} \int_0^\infty ds \int_{-1}^1 dv e^{-ism^2} e^{i\frac{s(1-v^2)}{4} p_\parallel^2} e^{\frac{i}{eB} \frac{\cos(eBsv) - \cos(eBs)}{2 \sin(eBs)} p_\perp^2} \\ \times \left[\frac{1}{\tan(eBs)} \left(m^2 + \frac{i}{s} - \frac{1-v^2}{4} p_\parallel^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{ieB}{\sin^2(eBs)} - \frac{\cos(eBsv) - \cos(eBs)}{2 \sin^3(eBs)} p_\perp^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ésta expresión (4.16) es totalmente exacta ya que no se ha hecho ningún tipo de aproximación en su deducción. Ahora, las integrales que quedan por resolver no se pueden calcular analítica o numéricamente así que es en este punto en donde se tienen que empezar a realizar ciertas aproximaciones con el fin de conocer el efecto del campo magnético en la función de autoenergía.

Nótese que las escalas físicas de energía que aparecen en la expresión (4.16) son el momento de la partícula escalar p , la masa de los fermiones cargados m y una combinación de la carga de los fermiones con el campo

magnético eB . Entonces, dependiendo de la jerarquía que haya entre estas escalas de energía² será el tipo de aproximación que se pueda realizar.

Las aproximaciones en las que se piensa rápidamente son las de campo débil³ y campo fuerte⁴ ($eB \ll m^2$ y $eB \gg m^2$).

Con el fin de explorar el límite del campo débil se toma en cuenta que la principal contribución a la integral sobre s viene de la región $eBs \ll 1$ [54–56], así que es posible realizar distintas expansiones en Taylor de las funciones que contienen términos de eB es su argumento.

4.2. Aproximación de campo débil para bajas velocidades

En las aproximaciones de campo débil se considera que la escala de energía eB es la más pequeña en comparación con la masa de las partículas con las cuales interactúa el campo magnético, es decir $eB \ll m^2$.

En este régimen de energías es posible hacer un desarrollo en Taylor a orden cuadrático en eB en todos los términos de la expresión (4.16) donde aparece el campo magnético. Sin embargo, se tiene que tener cuidado con el término exponencial que combina el momento transversal de la partícula escalar con el campo magnético

$$e^{\frac{i}{eB} \frac{\cos(eBsv) - \cos(eBs)}{2 \sin(eBs)} p_{\perp}^2},$$

pues si el momento transversal de la partícula escalar es muy grande en comparación con la masa (cross field approximation), $p_{\perp} \gg m$, el desarrollo de Taylor de dicho término no es válido y es necesario preservar el factor exponencial. Este análisis se realiza en la siguiente sección.

Por el contrario, si la partícula escalar tiene un momento transversal del mismo orden de la masa de los fermiones, $p_{\perp} \sim m$, el desarrollo en Taylor de

²La jerarquía dependerá del problema físico bajo estudio.

³Por ejemplo, en las etapas finales de colisiones relativistas de iones pesados.

⁴En diferentes objetos astrofísicos y en las etapas iniciales de colisiones relativistas de iones pesados.

este factor si es válido.

Al tomarse en cuenta éstas consideraciones, la función de autoenergía del campo escalar en la aproximación de campo débil para bajas velocidades a orden $(eB)^2$ [27], tiene la forma [43]

$$\Sigma^B(p) \simeq \Sigma(0) + \tilde{\Sigma}_R(p) + \tilde{\Sigma}_R^B(p), \quad (4.17)$$

donde los primeros dos términos ya se conocen del caso libre y están dados por (2.19)

$$\Sigma(0) = \frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-im^2s} \left[\frac{2i}{s} + m^2 \right],$$

que es la contribución a la autoenergía que contiene la mayor parte de las divergencias, y (2.20)

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_R(p) = \frac{g^2}{8\pi^2} & \left[\left(\frac{p^4}{2} - 2m^2p^2 \right) \int_{-1}^1 dv \frac{v^2}{(1-v^2)p^2 - 4m^2} \right. \\ & \left. + \frac{p^4}{2} \int_{-1}^1 dv \frac{v^4}{(1-v^2)p^2 - 4m^2} - p^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \right], \end{aligned}$$

que contiene la divergencia asociada a la función de onda. Por último, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_R^B(p) = \frac{g^2}{8\pi^2} & \left[\frac{16}{3} (eB)^2 m^2 \int_{-1}^1 \frac{dv}{((1-v^2)p^2 - 4m^2)^2} \right. \\ & - \frac{4}{3} (eB)^2 p_{\parallel}^2 \int_{-1}^1 dv \frac{1-v^2}{((1-v^2)p^2 - 4m^2)^2} \\ & + \frac{8}{3} (eB)^2 p_{\perp}^2 m^2 \int_{-1}^1 dv \frac{(1-v^2)^2}{((1-v^2)p^2 - 4m^2)^3} \\ & - \frac{2}{3} (eB)^2 p^2 p_{\perp}^2 \int_{-1}^1 dv \frac{(1-v^2)^3}{((1-v^2)p^2 - 4m^2)^3} \\ & \left. + \frac{1}{3} (eB)^2 p_{\perp}^2 \int_{-1}^1 dv \frac{(1-v^2)(7-3v)}{((1-v^2)p^2 - 4m^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

la contribución a la función de autoenergía que contiene los efectos del campo magnético. Cabe mencionar que en la deducción de (4.17) se ha seguido el procedimiento de integración por partes mostrado en la sección 2.3 para aislar el término $\Sigma(0)$.

Otro punto importante que vale la pena mencionar es que al tomar el límite $eB \rightarrow 0$, el término $\tilde{\Sigma}_R^B(p)$ se anula idénticamente y la función de autoenergía con campo magnético dada por (4.17) se reduce a la encontrada en el caso libre (2.17).

4.2.1. Parte imaginaria de la función de autoenergía

Para calcular la parte imaginaria de la función de autoenergía con campo magnético definida por (4.17), sólo hace falta calcular la parte imaginaria de $\tilde{\Sigma}_R^B(p)$ debido a que los demás términos ya han sido calculados en el caso libre, capítulo 2.

Dado que la parte imaginaria de la expresión (4.18) sólo depende de los resultados de las integrales sobre v , se seguirá un proceso muy similar al de la sección 2.3.1, identificando representaciones de la delta de Dirac y sus derivadas⁵ [45, 46]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{Im} \left(\frac{1}{(x + i\epsilon)^n} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{d^n \delta(x)}{dx^n}, \quad (4.19)$$

así como la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m \delta(x - a)}{dx^m} f(x) dx = (-1)^m \frac{d^m f(x)}{dx^m} \Big|_{x=a}. \quad (4.20)$$

Una vez hecho lo anterior, se obtiene que la parte imaginaria de la expresión (4.18) está dada por

⁵A pesar de que la Delta es una distribución y no una función, se pueden obtener sus derivadas de manera formal [46].

$$\begin{aligned} \mathbf{Im} \left(\tilde{\Sigma}_R^B(p) \right) = \frac{g^2}{8\pi} \left[\frac{24(eB)^2 m^4 p_\perp^2}{p^5} \frac{1}{(p^2 - 4m^2)^{3/2}} \right. \\ + \frac{16(eB)^2 m^2 p_\perp^2}{3p^5} \frac{12m^4 - 7m^2 p^2 + p^4}{(p^2 - 4m^2)^{5/2}} \\ \left. - \frac{4(eB)^2}{3p^3} \frac{4m^2 p^2 + 2m^2 p_\perp^2 + 2p^2 p_\perp^2 - p^4}{(p^2 - 4m^2)^{3/2}} \right] \Theta(p^2 - 4m^2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Finalmente, combinando este último resultado con los términos en ausencia de campo magnético, se llega a

$$\begin{aligned} \mathbf{Im} \left(\Sigma^B(p) \right) = \frac{g^2}{8\pi} \left[- \frac{(p^2 - 4m^2)^{3/2}}{p} + \frac{24(eB)^2 m^4 p_\perp^2}{p^5 (p^2 - 4m^2)^{3/2}} \right. \\ + \frac{16(eB)^2 m^2 p_\perp^2}{3p^5} \frac{12m^4 - 7m^2 p^2 + p^4}{(p^2 - 4m^2)^{5/2}} \\ \left. - \frac{4(eB)^2}{3p^3} \frac{4m^2 p^2 + 2m^2 p_\perp^2 + 2p^2 p_\perp^2 - p^4}{(p^2 - 4m^2)^{3/2}} \right] \Theta(p^2 - 4m^2). \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.2.2. Tasa de decaimiento

Al igual que en el capítulo 2, empleando el teorema óptico (1.33), que relaciona la tasa de decaimiento con la parte imaginaria de la función de autoenergía, se llega a que la tasa de decaimiento de un campo escalar neutro a fermiones cargados en presencia de un campo magnético está dada por

$$\begin{aligned} \Gamma^B = \frac{g^2}{8\pi} \left[\frac{(p^2 - 4m^2)^{3/2}}{p} - \frac{24(eB)^2 m^4 p_\perp^2}{p^5 (p^2 - 4m^2)^{3/2}} \right. \\ - \frac{16(eB)^2 m^2 p_\perp^2}{3p^5} \frac{12m^4 - 7m^2 p^2 + p^4}{(p^2 - 4m^2)^{5/2}} \\ \left. + \frac{4(eB)^2}{3p^3} \frac{4m^2 p^2 + 2m^2 p_\perp^2 + 2p^2 p_\perp^2 - p^4}{(p^2 - 4m^2)^{3/2}} \right] \frac{\Theta(p^2 - 4m^2)}{\sqrt{\vec{p}^2 + M_B^2}}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde M_B es la masa efectiva del escalar que incluye todos los efectos de correcciones cuánticas, en particular, depende del campo magnético⁶.

En el presente trabajo se considerará $M_B = M$, donde M es la masa efectiva de la partícula escalar en el caso libre, debido a que las correcciones cuánticas a la masa que incluyen al campo magnético, provenientes de la parte real de la función de autoenergía, son de orden muy bajo en la jerarquía de energías en la que se está trabajando [27].

Para realizar el cálculo del presente trabajo de manera más exacta sí se deberían incluir dichas correcciones a la masa del campo escalar, y su efecto principal se vería reflejado en el umbral de decaimiento, pero siendo ésta sólo una primera aproximación se dejará para un análisis posterior dichos efectos.

Considerando una partícula real en la capa de masa y un marco de referencia donde ésta encuentre en reposo, la tasa de decaimiento se correspondiente es

$$\Gamma^B = \frac{g^2}{8\pi} \left[\frac{(M^2 - 4m^2)^{3/2}}{M^2} - \frac{4(eB)^2}{3M^2\sqrt{M^2 - 4m^2}} \right] \Theta(M^2 - 4m^2). \quad (4.24)$$

De ésta expresión se observa que el efecto del campo magnético tiende a inhibir el decaimiento.

Además vale la pena mencionar que el segundo término de (4.24), así como varios términos de la expresión (4.23), parece que divergen en el umbral del decaimiento $p = 2m$. Éste no es el caso dado que para que la aproximación de campo débil siga siendo válida, y los términos con contengan información del campo magnético sean considerados como una perturbación del resultado en el vacío, la magnitud del campo magnético debe de tender a cero más rápido que los términos que contienen la información del umbral⁷.

⁶En el caso del vacío también se tiene una masa efectiva M , pero ésta no depende de eB debido a que la función de autoenergía en ese caso no considera un campo magnético.

⁷Si esto no se cumple, la aproximación se rompe y los resultados de la expansión ya no son válidos.

4.3. Aproximación de campo débil à la Tsai & Erber

La aproximación de campo débil à la Tsai & Erber [54, 55], a diferencia del caso anterior, considera que el momento transverso de la partícula escalar es muy grande en comparación con la masa de los fermiones en los que decae, es decir, $p_{\perp} \gg m$; de modo que la exponencial que contiene a p_{\perp}^2 no se puede expandir en serie de Taylor como en la aproximación anterior. Lo que se hace es expandir el resto de los términos en Taylor a orden 2 en eB , de tal manera que en la exponencial aparezcan los términos cuadráticos $(eBs)^2$ y $(eBsv)^2$.

Al sustituir la expansión del argumento de la exponencial en la ecuación (4.16) se llega a

$$\begin{aligned} \Sigma^B(p) \simeq \frac{g^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} ds \int_{-1}^1 dv e^{-ism^2} e^{i\frac{s(1-v^2)}{4}p^2} e^{is^3\frac{(eB)^2}{48}(1-v^2)^2p_{\perp}^2} \\ \times \left[\frac{m^2}{s} + \frac{2i}{s^2} - \frac{1-v^2}{4s}p^2 - \frac{m^2(eB)^2s}{3} \right. \\ \left. + \frac{(eB)^2s}{12}(1-v^2)p_{\parallel}^2 - \frac{(eB)^2s}{48}(1-v^2)(5-v^2)p_{\perp}^2 \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

de donde el resultado para el caso sin campo magnético se recupera fácilmente al tomar $eB = 0$, obteniendo la ecuación (2.17).

De manera similar a lo realizado en la aproximación anterior, la función de autoenergía se puede separar de acuerdo a la expresión

$$\Sigma^B(p) \simeq \Sigma(0) + \tilde{\Sigma}_R^B(p), \quad (4.26)$$

donde $\Sigma(0)$ está dada por (2.19), y

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_R^B(p) = \frac{g^2}{8\pi^2} \left[-p^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} - \frac{(eB)^2}{3} \left(m^2 - \frac{p_\parallel^2}{4} + \frac{5p_\perp^2}{16} \right) V_0 S_1 \right. \\
+ \frac{i}{2} \left(m^2 p^2 - \frac{p^4}{4} \right) V_2 S_0 - \frac{(eB)^2}{12} \left(p_\parallel^2 + \frac{p_\perp^2}{2} \right) V_2 S_1 \\
+ i \frac{(eB)^2}{12} p_\perp^2 \left(m^2 - \frac{p^2}{4} \right) V_2 S_2 - i \frac{p^4}{8} V_4 S_0 \\
\left. + \frac{7(eB)^2}{48} p_\perp^2 V_4 S_1 - i \frac{m^2 (eB)^2}{12} p_\perp^2 V_4 S_2 + i \frac{(eB)^2}{48} p^2 p_\perp^2 V_6 S_2 \right], \tag{4.27}
\end{aligned}$$

donde, por fines prácticos, se ha introducido la notación

$$V_n S_m \equiv \int_{-1}^1 dv v^n \int_0^\infty ds s^m e^{is \left(\frac{1-v^2}{4} p^2 - m^2 + s^2 \frac{(eB)^2}{48} (1-v^2)^2 p_\perp^2 \right)}. \tag{4.28}$$

Vale la pena mencionar que ahora no se pudo identificar de manera explícita el término $\tilde{\Sigma}_R(p)$ en la descomposición (4.26) debido a que las integrales tienen un factor exponencial nuevo.

4.3.1. Parte imaginaria de la función de autoenergía

La parte imaginaria de la función de autoenergía dada por la expresión (4.17) para ésta aproximación se calcula de forma directa usando la identidad de Euler

$$e^{-i \left(xt + \frac{t^3}{3} \right)} = \cos \left(xt + \frac{t^3}{3} \right) - i \sin \left(xt + \frac{t^3}{3} \right), \tag{4.29}$$

con

$$x \equiv \frac{m^2 - \frac{1-v^2}{4} p^2}{\left(\frac{-(eB)^2 (1-v^2)^2 p_\perp^2}{16} \right)^{-\frac{1}{3}}}, \tag{4.30}$$

de manera que al sustituir en la ecuación (4.27) es posible separar fácilmente la parte imaginaria.

Al llevar a cabo lo anterior y realizando algunas manipulaciones algebraicas, la parte imaginaria de la función de autoenergía se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\mathbf{Im} \left(\Sigma^B(p) \right) = & -\frac{g^2}{8\pi} \frac{4\sqrt[3]{2}}{(eB)^{2/3} p_{\perp}^{2/3}} \Theta(p^2 - 4m^2) \\
& \times \left[\frac{2\sqrt[3]{2}(eB)^{4/3}}{3p_{\perp}^{2/3}} \int_{\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}}^1 dv (1-v^2)^{-4/3} Ai(x)' \right. \\
& \quad \times \left(\frac{1-v^2}{4} p_{\parallel}^2 - \frac{(1-v^2)(7v^2-5)}{16} p_{\perp}^2 - m^2 \right) \\
& - \frac{p^2}{2} \int_{\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}}^1 dv (1-v^2)^{-2/3} v^2 \left(\frac{1+v^2}{4} p^2 - m^2 \right) Ai(x) \\
& + \frac{4}{3} \int_{\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}}^1 dv (1-v^2)^{-5/3} v^2 \left(\frac{1+v^2}{4} p^2 - m^2 \right) \\
& \quad \left. \times \left(\frac{1-v^2}{4} p^2 - m^2 \right) Ai(x) \right], \tag{4.31}
\end{aligned}$$

donde las integrales sobre s se han identificado con la representación integral de las funciones de Airy de primer tipo y sus derivadas [57]

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left(xt + \frac{t^3}{3} \right) dt. \tag{4.32}$$

El límite de campo cero en la expresión (4.31) se obtiene utilizando la representación para la delta de Dirac [57]

$$\delta(x) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} Ai \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \tag{4.33}$$

con

$$\varepsilon \equiv \left(\frac{(eB)^2}{m^4} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.34)$$

de tal forma que ésta se reduce a (2.28). De esta manera se corrobora el resultado.

4.3.2. Tasa de decaimiento

Finalmente, remplazando el resultado anterior en la expresión para la tasa de decaimiento, se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma^B &= \frac{g^2}{8\pi} \frac{4\sqrt[3]{2}}{(eB)^{2/3} p_{\perp}^{2/3}} \frac{\Theta(p^2 - 4m^2)}{\sqrt{p^2 + M^2}} \\ &\times \left[\frac{2\sqrt[3]{2}(eB)^{4/3}}{3p_{\perp}^{2/3}} \int_{\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}}^1 dv (1-v^2)^{-4/3} Ai(x)' \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1-v^2}{4} p_{\parallel}^2 - \frac{(1-v^2)(7v^2-5)}{16} p_{\perp}^2 - m^2 \right) \\ &\quad - \frac{p^2}{2} \int_{\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}}^1 dv (1-v^2)^{-2/3} v^2 \left(\frac{1+v^2}{4} p^2 - m^2 \right) Ai(x) \\ &\quad + \frac{4}{3} \int_{\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}}^1 dv (1-v^2)^{-5/3} v^2 \left(\frac{1+v^2}{4} p^2 - m^2 \right) \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1-v^2}{4} p^2 - m^2 \right) Ai(x) \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

En esta aproximación no es posible considerar un marco de referencia en el que $p_{\perp} = 0$ porque uno de los argumentos iniciales de la aproximación fue que el momento transversal era muy grande (cross field approximation) y no permitía expandir en Taylor la exponencial completa.

La ecuación (4.35) junto con (4.23) contienen información sobre el efecto del campo magnético en la tasa de decaimiento de un campo escalar a fermiones cargados en dos regiones de momento transversal diferentes; $p_{\perp} \gg m$ ó $p_{\perp} \sim m$.

En el siguiente capítulo se realiza un estudio detallado de éstas dos expresiones.

Capítulo 5

Efectos del Campo Magnético en la Tasa de Decaimiento

En este capítulo se comparan los resultados obtenidos en los capítulos 2 y 4 para la tasa de decaimiento. Se hará una breve discusión sobre los resultados obtenidos y las gráficas utilizadas así como su interpretación física. Cabe mencionar que los resultados de las diferentes aproximaciones que se hicieron en el capítulo 4 no se comparan entre sí ya que corresponden a situaciones físicas diferentes. Finalmente, contrastan los resultados obtenidos en la presente tesis del proceso

$$\phi \longrightarrow \bar{\psi}\psi,$$

con los resultados para el caso bosónico reportados en [27], en donde el campo escalar neutro decae en escalares cargados

$$\phi \longrightarrow \varphi^*\varphi.$$

Ésta comparación se realiza para poder entender el rol que juega el espín en el decaimiento.

5.1. Aproximación para bajas velocidades

La parte imaginaria de la autoenergía para ambas aproximaciones, que se muestran en las expresiones (4.22) y (4.31) respectivamente, son negativas. Así que al igual que en el capítulo 2 se grafica su valor absoluto para hacer sencilla la lectura del efecto que tiene el campo magnético en la tasa de decaimiento.

En la figura 5.1 se grafica la ecuación (4.22) como función de la intensidad del campo magnético para tres valores de momento transversal $\frac{p_{\perp}}{m} = 0, 0.5, 1$.

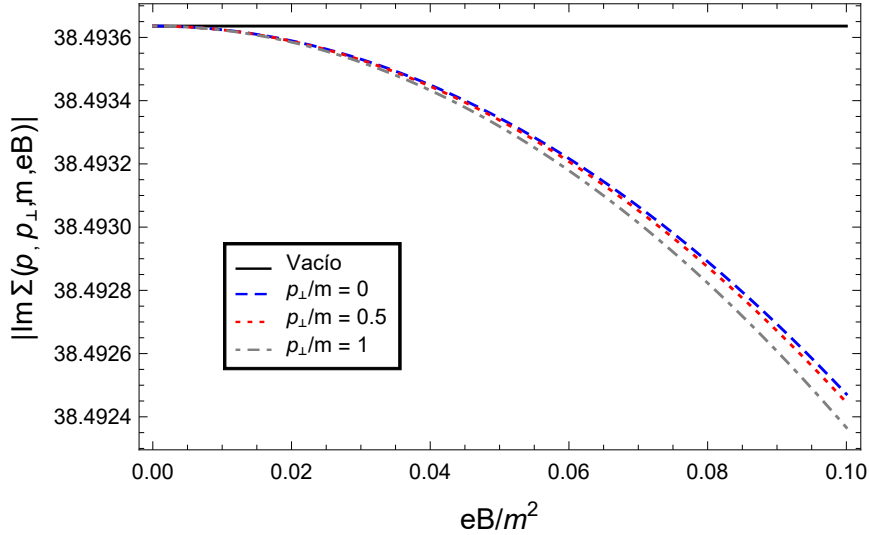


Figura 5.1: Parte imaginaria de la autoenergía como función del campo magnético para diferentes valores de momento transversal, tomando $M/m = 5$.

El caso del vacío presenta un comportamiento constante dado que no depende del campo magnético. Además, cuando la intensidad de campo magnético se va a cero, las curvas con diferentes momentos transversales convergen al mismo punto.

Se puede ver que a medida que la intensidad del campo magnético y el momento transversal p_{\perp} aumentan, la parte imaginaria de la disminuye.

Este comportamiento de la gráfica sugiere que a mayores momentos transversales y mayores intensidades de campo magnético, las curvas seguiría de-

creciendo hasta intersectar con el eje de las abscisas y volverse negativas, provocando que la tasa de decaimiento también lo fuera. Dicho corte no es posible dado que para el intervalo de valores (tanto para campo magnético como para momento transversal) para los cuales se presentaría están fuera de el intervalo donde la aproximación que se ha realizado es válida.

En la figura 5.2 se grafica la tasa de decaimiento de la ecuación (4.23) en función de la intensidad de campo magnético para diferentes valores de momento transversal. Se puede observar que las curvas decrecen a medida que el campo magnético aumenta, al igual que en la figura 5.1, además de que su ordenada al origen disminuye a medida que el momento transversal aumenta a diferencia de la gráfica anterior donde todas las curvas convergían al mismo punto cuando el campo magnético tendía a cero. Esto se debe a que la tasa de decaimiento incluye el factor de Lorentz, así que el comportamiento de las curvas contempla los efectos de dilatación del tiempo de la relatividad especial. Vale la pena decir que cada curva representa la tasa de decaimiento del campo escalar vista por distintos observadores.

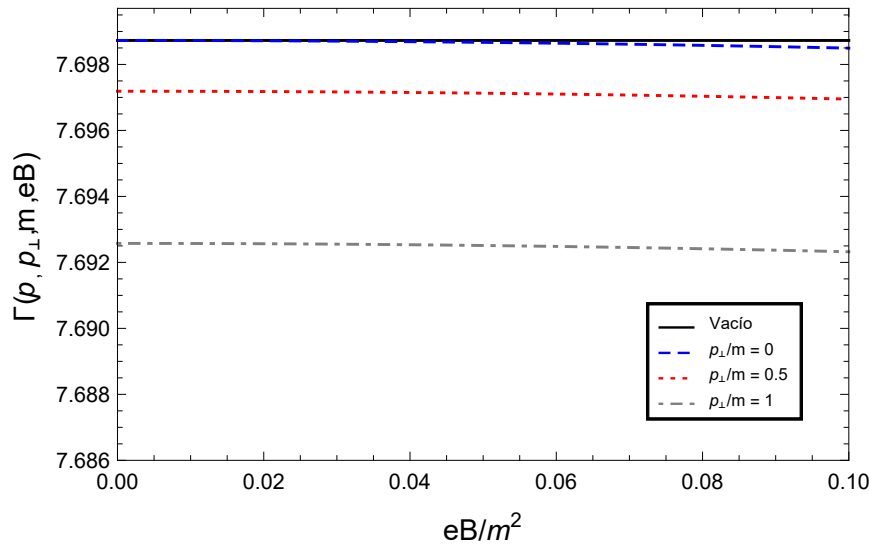


Figura 5.2: Tasa de decaimiento como función del campo magnético para diferentes valores de momento transversal, tomando $M/m = 5$.

El comportamiento de la parte imaginaria de la función de autoenergía como función del momento transverso para tres valores distintos de campo magnético se muestra en la figura 5.3.

Se observa que a medida que el momento transverso aumenta, la parte imaginaria va decreciendo. Además, las curvas con mayor intensidad de campo magnético tienen valores cada vez menores.

Otra característica que es posible observar es que, a diferencia de la figura 5.1, las curvas para los diferentes valores de campo magnético no convergen al mismo punto cuando $p_{\perp} = 0$. Esto se debe a que en la ecuación (4.22), existen términos que sólo dependen del campo magnético y las masas pero no del momento transverso.

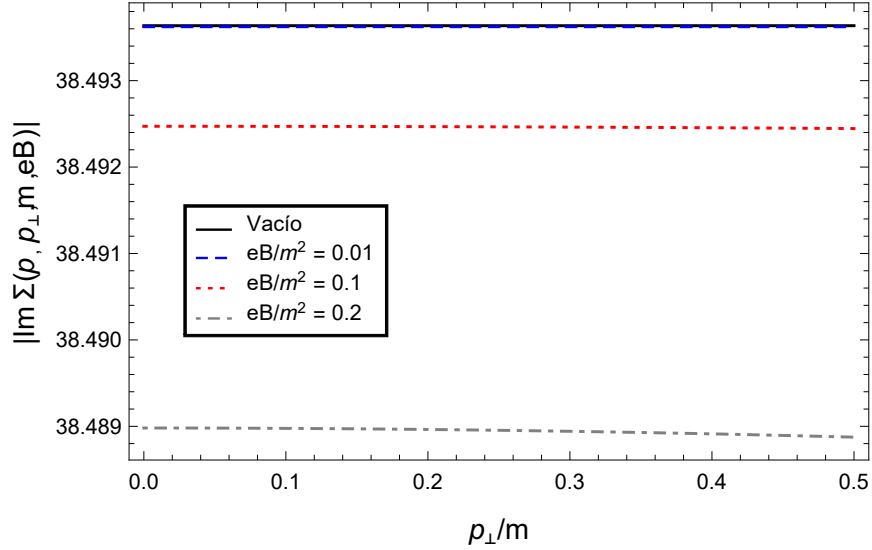


Figura 5.3: Parte imaginaria de la autoenergía como función del momento transverso para diferentes valores de campo magnético, tomando $M/m = 5$.

Finalmente, en la figura 5.4 se muestra la tasa de decaimiento en función del momento transverso para diferentes valores de la intensidad de campo magnético.

En esta gráfica se puede observar el comportamiento que ya se ha descrito en la presente sección, tanto el campo magnético como el momento transverso disminuyen la tasa de decaimiento. Es decir, la partícula escalar tiende a estabilizarse a medida que la intensidad del campo magnético aumenta y/o

se mueve más rápido¹ en la dirección transversa al campo.

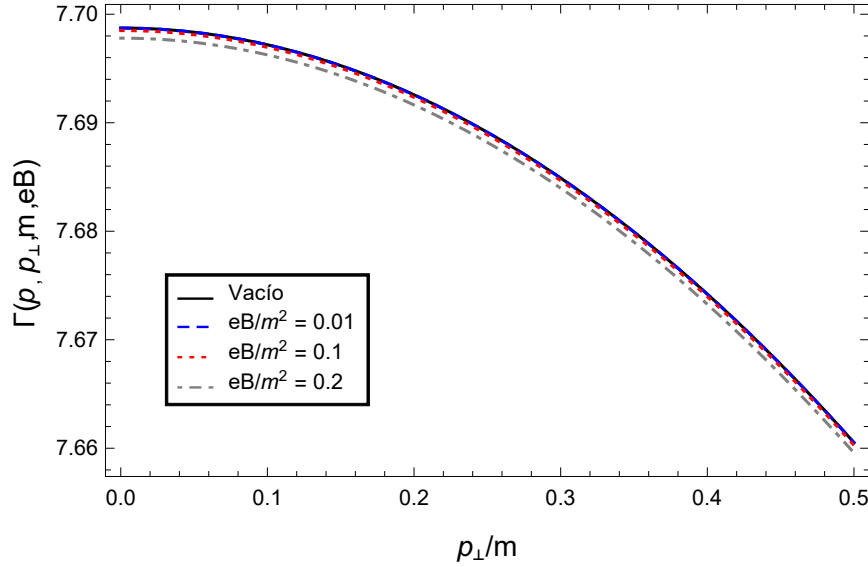


Figura 5.4: Tasa de decaimiento como función del momento transverso para diferentes valores de campo magnético, tomando $M/m = 5$.

5.2. Aproximación a la Tsai & Erber

En la figura 5.5 se grafica la parte imaginaria de la autoenergía dada por (4.31) como función de la intensidad de campo magnético para tres valores de momento transverso.

La línea sólida representa el caso del vacío dado por la ecuación (2.28), pero debido a que en este caso la autoenergía no tiene dependencia del campo magnético, se mantiene constante a medida que el campo magnético crece.

Nótese que cuando el campo magnético tiende a $eB = 0$, todas las líneas convergen al mismo punto. Es lo que se espera dado que al tomar el límite de la expresión (4.31) cuando $eB \rightarrow 0$ se recupera el resultado del vacío.

En este caso se observa que tanto el momento transverso como la intensidad de campo magnético aumentan el valor de la parte imaginaria de la función

¹En el límite de velocidades bajas para que la aproximación sea válida, es decir, $p_{\perp} \sim m$.

de autoenergía y el campo magnético tiene ese mismo efecto, comportamiento opuesto al obtenido en el caso anterior.

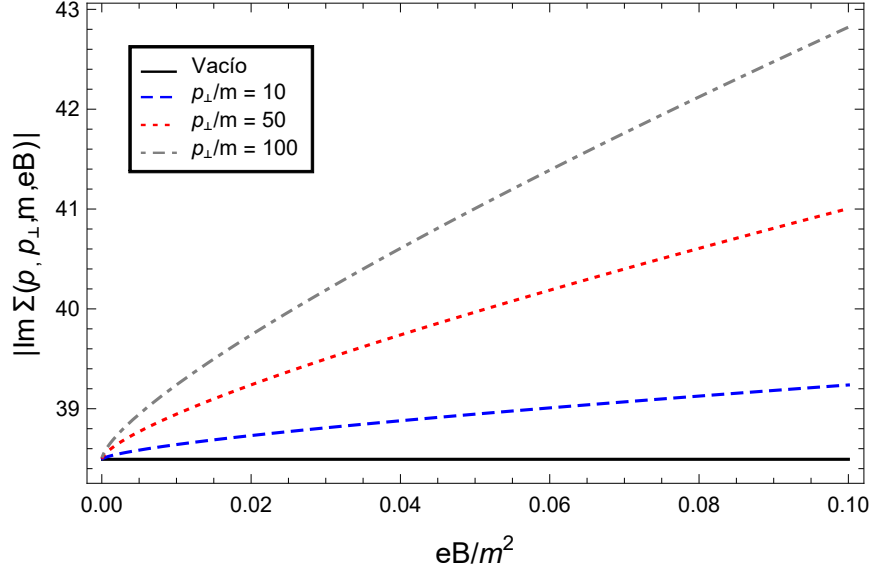


Figura 5.5: Parte imaginaria de la autoenergía como función del campo magnético para diferentes valores de momento transversal, tomando $M/m = 5$.

En la figura 5.6 se puede observar que la tasa de decaimiento disminuye a medida que el momento transversal aumenta, esto se debe a que se incorporó un factor el Lorentz que es diferente en cada caso y por lo tanto tal disminución se debe al efecto relativista de dilatación del tiempo y no a un efecto causado por el campo magnético.

El comportamiento que se sigue observando en la presente gráfica es que el campo magnético aumenta la tasa de decaimiento, es decir, promueve que la partícula escalar neutra decaiga más rápido a fermiones cargados.

El comportamiento de la parte imaginaria de la autoenergía como función del momento transversal para diferentes valores de campo magnético se muestra en la figura 5.7.

En esta gráfica se observa que a medida que la intensidad de campo magnético y el momento transversal aumentan, la parte imaginaria de la función de autoenergía se incrementa. En este caso las curvas para diferentes intensidades de campo magnético parecen converger al mismo punto, sin embargo

dicho punto de convergencia no es accesible en ésta aproximación ($p_{\perp} \gg m$).

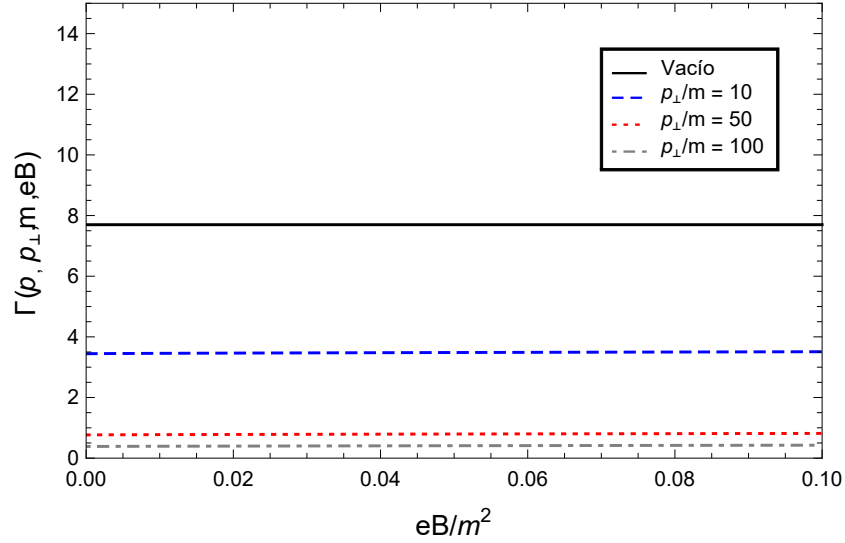


Figura 5.6: Tasa de decaimiento como función del campo magnético para diferentes valores de momento transversal, tomando $M/m = 5$.

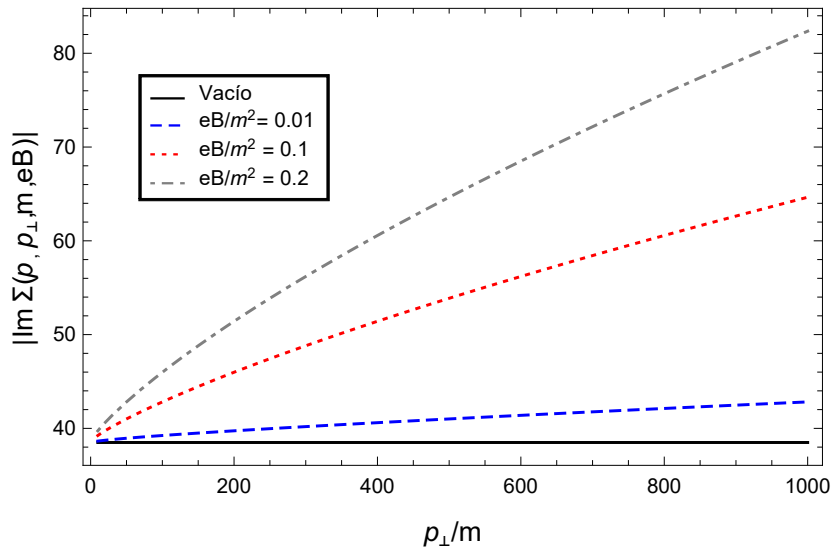


Figura 5.7: Parte imaginaria de la autoenergía como función del momento transversal para diferentes valores de campo magnético, tomando $M/m = 5$.

Finalmente, en la figura 5.8 se grafica la tasa de decaimiento en función del momento transverso para tres intensidades de campo magnético. El comportamiento que se observa en ésta gráfica es que: el campo magnético aumenta la tasa de decaimiento mientras que pareciera que el momento transverso la disminuye pero esto se debe, como ya se dijo previamente, a efectos relativistas.

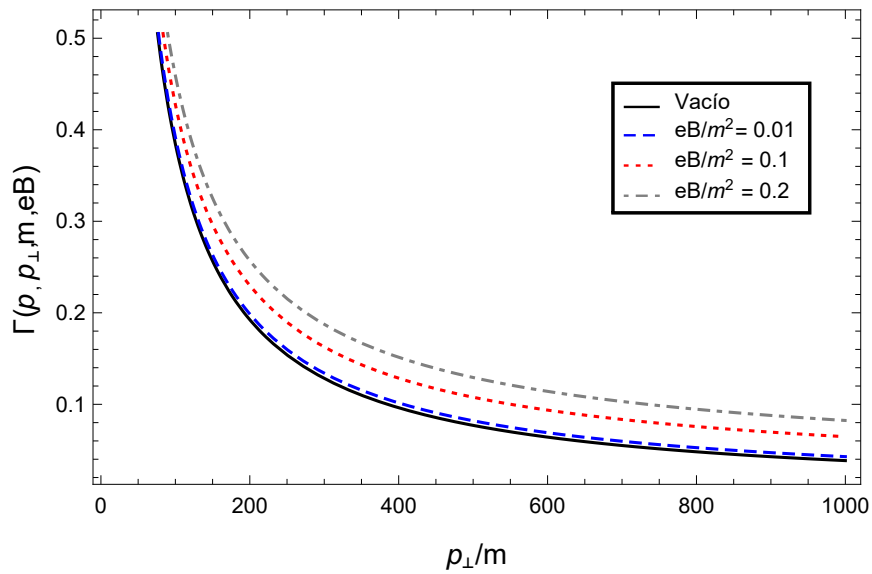


Figura 5.8: Tasa de decaimiento como función del momento transverso para diferentes valores de campo magnético, tomando $M/m = 5$.

En lo que va del presente capítulo, se discutió el comportamiento de la tasa de decaimiento con respecto a la intensidad del campo magnético y el momento transverso para ambas aproximaciones. De las gráficas anteriores no es posible identificar que efectos tienen la carga y el espín, sobre la tasa de decaimiento, por separado; para poder cuantificar cada uno de ellos se van a comparar los resultados obtenidos con un caso que no considere el espín, decaimiento de un escalar neutro a escalares cargados.

5.3. Caso bosónico

El decaimiento de un escalar neutro a un par de escalares cargados ya fue estudiado anteriormente bajo las mismas aproximaciones del presente trabajo [27]. Las tasas de decaimiento para dicho caso están dadas por

$$\Gamma_{Vacío} = \frac{1}{\sqrt{M^2 + p^2}} \frac{\tilde{g}^2}{16\pi} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4m^2), \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{Bajas}^B = & \frac{1}{\sqrt{M^2 + p^2}} \frac{\tilde{g}^2 p^2 \sqrt{3}}{32\pi m} \int_{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}}^1 dv \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{1}{\left(1 - (1 - v^2) \frac{p^2}{4m^2}\right)^{1/4}} \\ & \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{4}{\lambda} \frac{\left(1 - (1 - v^2) \frac{p^2}{4m^2}\right)^{3/2}}{1 - v^2}\right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma_{Tsai}^B = & \frac{1}{\sqrt{M^2 + p^2}} \frac{\tilde{g}^2 p^2}{32\pi} \int_{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}}^1 dv v^2 \frac{4^{2/3}}{\left((1 - v^2)|p_\perp|eB\right)^{2/3}} \\ & \times Ai\left(4^{2/3} \frac{m^2 - \frac{1}{4}(1 - v^2)p^2}{\left((1 - v^2)|p_\perp|eB\right)^{2/3}}\right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde \tilde{g} es la constante de acoplamiento correspondiente a la teoría de interacción de un escalar neutro con dos escalares cargados, $Ai(x)$ las funciones de Airy de primer tipo y λ está definido por

$$\lambda \equiv \frac{3 eB p_\perp}{2 m^2 m}. \quad (5.4)$$

En ambas aproximaciones de campo débil, para bajas velocidades y *à la* Tsai & Erber, en el caso escalar se encontró que el campo magnético inhibe el decaimiento mientras que el momento transverso lo promueve.

Para poder comparar directamente los resultados, es de utilidad definir la siguiente cantidad

$$\Delta\Gamma \equiv \frac{\Gamma^B}{\Gamma_{Vacío}}, \quad (5.5)$$

este cociente mide el efecto que tiene el campo magnético sobre el sistema con respecto al sistema del vacío, donde no hay campo magnético. Adicionalmente ayuda a evitar complicaciones como los efectos relativistas y las diferentes constantes de acoplamiento.

De ésta manera es posible comparar los resultados obtenidos en el decaimiento a escalares cargados con los del presente trabajo de manera cuantitativa para tratar de dilucidar el rol que juega el espín en el decaimiento.

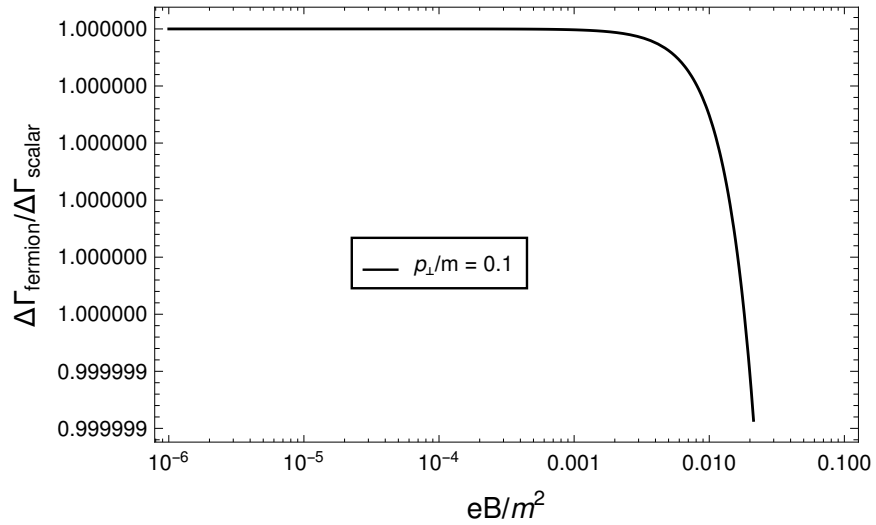


Figura 5.9: Comparación de las razones de cambio del caso fermiónico y bosónico en función del momento transverso para la aproximación de campo débil a bajas velocidades tomando $M/m = 5$.

En la figura 5.9 se muestra el comportamiento de la aproximación de campo débil para bajas velocidades en función de la intensidad de campo magnético para un valor fijo de momento transverso.

Antes que nada vale la pena resaltar que la escala del eje de las ordenadas varía de manera mínima, a pesar de ser una gráfica logarítmica, así que la diferencia entre los resultados para los casos bosónico y fermiónico es constante. Además se observa que el valor al que tiende es 1, así que las tasas de cambio son prácticamente iguales.

A medida que el campo magnético aumenta, la gráfica decrece; así que la razón de cambio de la tasa de decaimiento en el caso escalar es mayor a la del caso fermiónico. Dicho efecto sólo puede deberse al espín dado que es la única propiedad extra que se incluye en éste trabajo, de manera que la interacción del espín a momentos transversos pequeños causa una disminución en la tasa de decaimiento.

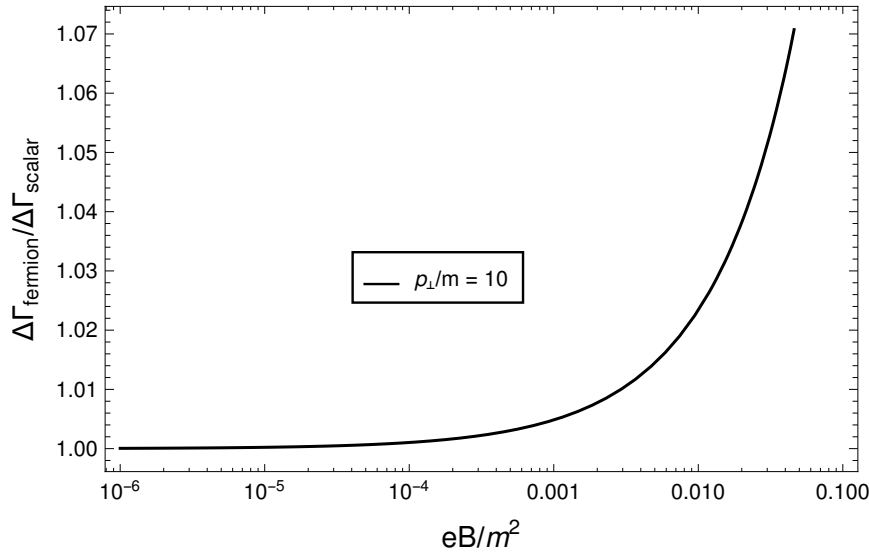


Figura 5.10: Comparación de las razones de cambio del caso fermiónico y bosónico en función del momento transverso para la aproximación *à la* Tsai & Erber tomando $M/m = 5$.

El comportamiento para la aproximación *à la* Tsai & Erber en función del campo magnético para un valor fijo de momento transverso se muestra en la figura 5.10.

En ésta se observa que en el límite cuando la intensidad de campo magnético se va a cero, el cociente tiende a la unidad. Así que el comportamiento sin campo magnético es idéntico.

Por otro lado, a medida que el campo magnético aumenta la gráfica crece. Esto indica que en el caso fermiónico, la tasa de decaimiento se incrementa más rápidamente a medida que el campo magnético aumenta; el único factor nuevo en ese caso es el espín, así que dicho aumento tiene que asociarse a la interacción que tiene el campo magnético con el espín de los fermiones cargados.

Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se estudiaron los efectos de un campo magnético homogéneo en la tasa de decaimiento de una partícula escalar neutra a fermiones cargados. Este efecto puede ser de interés en diversos procesos físicos como el decaimiento del bosón de Higgs en aceleradores de partículas o el decaimiento del inflatón en el Universo temprano entre otros.

Se trabajó en la aproximación de campo débil y en dos regímenes diferentes: a p_{\perp} pequeño y grande, mediante dos métodos de aproximación distintos. Se encontró que los efectos del campo magnético en la tasa de decaimiento dependen de la cinemática de partícula, es decir, intervienen directamente diferentes fenómenos físicos que dominan en distintas regiones de los parámetros involucrados.

En la aproximación de bajas velocidades, que considera momentos transversos pequeños, se encontró que para un momento fijo la tasa de decaimiento Γ^B y la tasa de cambio $\Delta\Gamma$ disminuyen a medida que la intensidad de campo magnético aumenta, esto se debe a que la separación entre los niveles de Landau aumenta al incrementarse la intensidad del campo y causa que sean menos accesibles para las partículas producto del decaimiento. Por otro lado, se encontró que para una intensidad de campo fija, Γ^B y $\Delta\Gamma$ disminuyen a medida que el momento transversal aumenta. Esto es provocado por el factor de Lorentz que aparece en el denominador.

En la aproximación para momentos transversos grandes, *à la* Tsai & Erber, se encontraron resultados diferentes. Se obtuvo que para un momento transversal fijo, la tasa de decaimiento Γ^B se incrementa a medida que la intensidad de campo magnético aumenta, una manera intuitiva de visualizar

este efecto es si se considera a la partícula escalar como un sistema compuesto por los dos fermiones cargados, éstos al moverse en presencia de un campo magnético tienden a separarse debido a la acción de la fuerza de Lorentz dado que tienen carga contraria. Otra manera de explicar dicho resultado es que en el marco de referencia de la partícula escalar, donde no hay movimiento, aparece un campo eléctrico \vec{E} que separa a los fermiones debido a su carga. Ahora, si se trabaja a una intensidad de campo fija, la tasa de decaimiento decrece a medida que el momento transversal aumenta. Al igual que en la aproximación anterior, esto se explica por efectos relativistas.

Hasta ahora no se han discutido los efectos que tiene el espín en la tasa de decaimiento, para ello se compararon los resultados obtenidos en el presente estudio con los del caso bosónico estudiado en la referencia [27]. A partir de la comparación, se puede ver que en el caso de momentos transversales pequeños el cambio debido al campo magnético es prácticamente igual y pareciera que el espín no afecta el decaimiento. Por otro lado, para momentos transversales grandes, el efecto del campo magnético en el decaimiento a fermiones es mayor que en el decaimiento a escalares y esto parecería indicar que la interacción del espín con el campo magnético aumenta la producción de pares fermión-antifermión.

Finalmente, cabe mencionar que el presente trabajo es sólo una primera aproximación al estudio del decaimiento de una partícula en presencia de un campo magnético ya que este proceso ocurre en diversos contextos físicos en donde factores como la temperatura, la densidad de partículas, la modificación de las masas debido al campo magnético, entre otros, podrían ser relevantes.

Para trabajo a futuro, además de considerar los factores anteriores, se podrían estudiar distintas características de la partícula inicial como lo son la carga y el espín, así como realizar el cálculo a un orden superior en la expansión perturbativa.

Apéndice A

Trazas

En el presente apéndice se muestran más detalladamente algunos de los cálculos que se realizaron para calcular las trazas de los capítulos 2 y 4. Cabe mencionar que algunos de los cálculos presentados aparecen explícitamente en [34].

A.1. Matrices de Dirac

Calcular la traza de una sólo matriz γ es innecesario porque ya sabemos que cumplen con un álgebra de Clifford y eso impone que la traza es nula

$$\text{tr}\gamma^\mu = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Para las trazas de más de una matriz γ es útil tener a la mano la relación de anticonmutación

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{I}, \quad (\text{A.1})$$

donde \mathbf{I} representa la matriz identidad de 4×4 , la cual generalmente no se escribe explícitamente. La operación de traza tiene el significado físico

de sumar sobre todos los posible valores de espín en el lazo cerrado por lo que ésta actúa sobre los índices espinoriales y no sobre los espacio-temporales.

La estrategia para calcular la traza de varias matrices γ 's es ir conmutando la matriz inicial con cada una de las demás matrices hasta llegar al final con la ayuda de (A.1), y después aplicar la propiedad cíclica de la traza para escribirla al inicio de nuevo. A continuación se calcula el caso más sencillo de dos matrices γ

$$\begin{aligned} tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= tr[\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \gamma^\nu \gamma^\mu] = tr[2g^{\mu\nu} \mathbf{I} - \gamma^\nu \gamma^\mu] \\ &= 2g^{\mu\nu} tr[\mathbf{I}] - tr[\gamma^\nu \gamma^\mu] = 2g^{\mu\nu} (4) - tr[\gamma^\mu \gamma^\nu], \\ &\Rightarrow 2tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 8g^{\mu\nu} \\ &\therefore tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Además, usando el método anterior y con la ayuda de γ^5 también se muestra fácilmente que las traza de un número impar de matrices γ 's siempre es cero.

Así que es posible calcular la traza de cada uno de los elementos que aparecen en la sección 2.2.1 sin mayor dificultad

$$\begin{aligned} tr[\gamma^\mu w_\mu \gamma^\nu p_\nu] &= 4w_\mu p^\mu \\ tr[\gamma^\mu w_\mu \gamma^\nu w_\nu] &= 4w_\mu w^\mu \\ tr[\gamma^\mu w_\mu m] &= 0 \\ tr[m \gamma^\nu p_\nu] &= 0 \\ tr[m \gamma^\nu w_\nu] &= 0 \\ tr[m^2] &= m^2 tr[\mathbf{I}_{4 \times 4}] = 4m^2. \end{aligned}$$

A.2. proyectores

De acuerdo a las definiciones en (3.30) y usando la siguiente convención para la métrica de Minkowski

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

se tiene que

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a \cdot b)_{\parallel} + (a \cdot b)_{\perp} \\ (a \cdot b)_{\parallel} &= a^0 b^0 - a^3 b^3 \\ (a \cdot b)_{\perp} &= -a^1 b^1 - a^2 b^2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} = a_{\nu} b^{\nu} = (a \cdot b) = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3,$$

lo que se busca es separar a la métrica en su parte paralela y perpendicular

$$g^{\mu\nu} = g_{\parallel}^{\mu\nu} + g_{\perp}^{\mu\nu}.$$

Para encontrar la forma de $g_{\perp}^{\mu\nu}$, es útil darse cuenta que ésta debe estar relacionada con el tensor electromagnético, dado por

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{F_{\mu\nu}}{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

donde se ha normalizado, pues $g_{\perp}^{\mu\nu}$ es adimensional. En este caso, sólo las entradas (2,1) y (1,2) son no nulas.

Ahora, al contraerse con dos cuádrimomentos arbitrarios actúa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 b^{\mu} \hat{F}_{\mu\alpha} \hat{F}^{\alpha}_{\nu} a^{\nu} &= b^1 \hat{F}_{12} \hat{F}^2_1 a^1 + b^2 \hat{F}_{21} \hat{F}^1_2 a^2 \\
 &= b^1 (-1)(-1) a^1 + b^2 (1)(1) a^2 \\
 &= b^1 a^1 + b^2 a^2 \\
 &= -(b \cdot a)_{\perp},
 \end{aligned}$$

observéese que sólo aparece la componente transversa. Esto sugiere que el proyector perpendicular puede identificarse con

$$P_{\mu\nu}^{\perp} = -\hat{F}_{\mu\alpha} \hat{F}^{\alpha}_{\nu}, \quad (\text{A.4})$$

de tal forma que

$$P_{\mu\nu}^{\perp} a^{\mu} b^{\nu} = (a \cdot b)_{\perp}.$$

Intuitivamente, el proyector paralelo es definido como

$$P_{\mu\nu}^{\parallel} = g_{\mu\nu} - P_{\mu\nu}^{\perp} = g_{\mu\nu} + \hat{F}_{\mu\alpha} \hat{F}^{\alpha}_{\nu} \quad (\text{A.5})$$

de modo que

$$P_{\mu\nu}^{\parallel} a^{\mu} b^{\nu} = g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} - P_{\mu\nu}^{\perp} a^{\mu} b^{\nu} = (a \cdot b) - (a \cdot b)_{\perp} = (a \cdot b)_{\parallel}.$$

Además se verifica de manera simple que

$$g^{\mu\nu} = g_{\parallel}^{\mu\nu} + g_{\perp}^{\mu\nu} = P_{\parallel}^{\mu\nu} + P_{\perp}^{\mu\nu}.$$

Con ayuda de éstos proyectores, se tiene una nueva manera de escribir a los productos $\not{q} = \gamma^{\mu}q_{\mu}$ es sus diferentes componentes

$$\not{q}_{\perp} = P_{\mu\nu}^{\perp}\gamma^{\mu}q^{\nu} \quad (\text{A.6})$$

$$\not{q}_{\parallel} = P_{\mu\nu}^{\parallel}\gamma^{\mu}q^{\nu}. \quad (\text{A.7})$$

A.3. Más matrices de Dirac

Al sustituir la igualdad (4.8) en la traza de la expresión (4.5) y desarrollar, la traza que se tiene que calcular para la autoenergía del caso con campo magnético está dada por

$$\begin{aligned} tr \left\{ \left[m\mathbf{I} \cos(eBs_1) - im\Sigma_3 \sin(eBs_1) + \not{p}_{\parallel} \cos(eBs_1) \right. \right. \\ \left. \left. - i\Sigma_3 \not{p}_{\parallel} \sin(eBs_1) + \frac{\not{p}_{\perp}}{\cos(eBs_1)} \right] \left[m\mathbf{I} \cos(eBs_2) - im\Sigma_3 \sin(eBs_2) \right. \right. \\ \left. \left. + (\not{p} - \not{p})_{\parallel} \cos(eBs_2) - i\Sigma_3 (\not{p} - \not{p})_{\parallel} \sin(eBs_2) + \frac{(\not{p} - \not{p})_{\perp}}{\cos(eBs_2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Haciendo cuidadosamente el desarrollo la expresión anterior consta de 25 términos aunque varios de ellos tienen factor común. Por las propiedades de la traza, se puede calcular la traza de cada uno de ellos y sumar todos los resultados al final.

Varios de los términos de la expresión (A.8) contienen un número impar de matrices de Dirac, por lo que el resultado es nulo. La traza de los demás términos se calcula usando los proyectores que se definieron anteriormente.

Ahora, se presenta el procedimiento para calcular la traza de uno de los términos a partir de el desarrollo de la sección A.1 y los proyectores que se acababan de definir junto con sus relaciones (A.6-A.7)

$$\begin{aligned}
tr [\not{p}_\perp (\not{p} - \not{p}')_\perp] &= tr [P_{\mu\nu}^\perp \gamma^\mu w^\nu P_{\alpha\beta}^\perp \gamma^\alpha (w - p)^\beta] \\
&= P_{\mu\nu}^\perp w^\nu P_{\alpha\beta}^\perp (w - p)^\beta tr [\gamma^\mu \gamma^\alpha] \\
&= P_{\mu\nu}^\perp w^\nu P_{\alpha\beta}^\perp (w - p)^\beta 4g^{\mu\alpha} \\
&= 4P_{\mu\nu}^\perp g^{\mu\alpha} P_{\alpha\beta}^\perp w^\nu (w - p)^\beta \\
&= 4P_{\nu}^{\perp\alpha} P_{\alpha\beta}^\perp w^\nu (w - p)^\beta \\
&= 4P_{\nu\beta}^\perp w^\nu (w - p)^\beta \\
&= 4(w \cdot (w - p))_\perp.
\end{aligned}$$

Siguiendo el desarrollo anterior, uno tiene un camino de como calcular la traza para los demás términos de la expresión (A.8).

Otro punto que se debe de mencionar es que si en el término aparece la matriz Σ_3 , es de gran ayuda escribirla de la siguiente manera

$$\Sigma_3 = -\frac{\hat{F}_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}}{2} = -\frac{i}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu. \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B

Integrales Gaussianas

En este apéndice se dan algunos resultados generales para las integrales Gaussianas que son de gran utilidad para calcular las integrales que aparecen en las secciones 2.2.2 y 4.1.2. Además dichos cálculos también se desarrollan posteriormente.

B.1. Caso general

El resultado general para las integrales Gaussianas es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (\text{B.1})$$

con la condición de que $\mathbf{Re}(a) > 0$.

Integrando por partes y haciendo algunos cambios de variable adecuados, es fácil mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{B.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x\pm b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{B.4})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-a(x\pm b)^2} dx = \mp b \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{B.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a(x\pm b)^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + b^2 \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (\text{B.6})$$

B.2. Caso sin campo magnético

La expresión (2.13) se puede separar fácilmente en cinco términos diferentes. En ésta sección se dará el resultado de cada uno de ellos y se calculará explícitamente uno de ellos con la ayuda de las expresiones (B.1)-(B.6), como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} & \int dw_0 d\vec{w} e^{-[-i(s_1+s_2)](w_0 - \frac{s_2 p_0}{s_1+s_2})^2} e^{-i(s_1+s_2)(\vec{w} - \frac{s_2 \vec{p}}{s_1+s_2})^2} w_0^2 \\ &= \left[\sqrt{\frac{\pi}{-i(s_1+s_2)}} \right] \left[\frac{1}{-2i(s_1+s_2)} + \left(\frac{s_2}{s_1+s_2} \right)^2 p_0^2 \right] \\ & \quad \times \int d\vec{w} e^{-i(s_1+s_2)(\vec{w} - \frac{s_2 \vec{p}}{s_1+s_2})^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{-i(s_1+s_2)}} \left[\frac{1}{-2i(s_1+s_2)} + \left(\frac{s_2}{s_1+s_2} \right)^2 p_0^2 \right] \left[\sqrt{\frac{\pi}{i(s_1+s_2)}} \right]^3 \\ &= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)^2} \left[\frac{i}{2(s_1+s_2)} + \left(\frac{s_2}{s_1+s_2} \right)^2 p_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Siguiendo el procedimiento anterior para los demás términos de la expresión

(2.13), se llega a que

$$\begin{aligned} & \int d^4 w e^{-[i(s_1+s_2)]\left(w_0-\frac{s_2 p_0}{s_1+s_2}\right)^2} e^{-i(s_1+s_2)\left(w_j-\frac{s_2 p_j}{s_1+s_2}\right)^2} (\vec{w} \cdot \vec{w}) \\ &= \frac{i\pi^2}{(s_1+s_2)^2} \left[\frac{3i}{2(s_1+s_2)} + \left(\frac{s_2}{s_1+s_2}\right)^2 (-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) \right] \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int d^4 w e^{-[i(s_1+s_2)]\left(w_0-\frac{s_2 p_0}{s_1+s_2}\right)^2} e^{-i(s_1+s_2)\left(w_j-\frac{s_2 p_j}{s_1+s_2}\right)^2} w_0 p_0 \\ &= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)^2} \left(\frac{s_2}{s_1+s_2}\right) p_0^2 \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int d^4 w e^{-[i(s_1+s_2)]\left(w_0-\frac{s_2 p_0}{s_1+s_2}\right)^2} e^{-i(s_1+s_2)\left(w_j-\frac{s_2 p_j}{s_1+s_2}\right)^2} (\vec{w} \cdot \vec{p}) \\ &= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)^2} \left(\frac{s_2}{s_1+s_2}\right) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

$$\int d^4 w e^{-[i(s_1+s_2)]\left(w_0-\frac{s_2 p_0}{s_1+s_2}\right)^2} e^{-i(s_1+s_2)\left(w_j-\frac{s_2 p_j}{s_1+s_2}\right)^2} m^2 = \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)^2} m^2. \quad (\text{B.11})$$

B.3. Caso con campo magnético

En ésta sección se van a calcular los términos de las integrales Gaussianas de la expresión (4.13) con la ayuda de los resultados de la sección B.1.

En el caso sin campo sólo se tenía que tener cuidado el signo diferente que lleva la integral sobre w_0 , pero en este caso el momento perpendicular y transversal están separados y sus correspondientes integrales Gaussianas tiene factores diferentes. Para ilustrar dicho punto, se calcula uno de los términos explícitamente

$$\begin{aligned}
& \int d^4w e^{-a_{\parallel}(w_0-b_{\parallel}p_0)^2} e^{a_{\perp}(w_1-b_{\perp}p_1)^2} e^{a_{\perp}(w_2-b_{\perp}p_2)^2} e^{a_{\parallel}(w_3-b_{\parallel}p_3)^2} m^2 \\
&= m^2 \left(\sqrt{\frac{\pi}{a_{\parallel}}} \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{-a_{\perp}}} \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{-a_{\perp}}} \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{-a_{\parallel}}} \right) \\
&= m^2 \sqrt{\frac{\pi}{-i(s_1+s_2)}} \sqrt{\frac{\pi}{i(s_1+s_2)}} \left(\frac{\pi}{i(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} \right) \\
&= \frac{-i\pi^2 m^2}{(s_1+s_2)(s_1\xi_1+s_2\xi_2)}.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Siguiendo el desarrollo anterior, los demás términos de la expresión están dados por

$$\begin{aligned}
& \int d^4w e^{-a_{\parallel}(w_0-b_{\parallel}p_0)^2} e^{a_{\perp}(w_1-b_{\perp}p_1)^2} e^{a_{\perp}(w_2-b_{\perp}p_2)^2} e^{a_{\parallel}(w_3-b_{\parallel}p_3)^2} w_0^2 \\
&= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} \left(-\frac{1}{2i(s_1+s_2)} + \frac{s_2^2}{(s_1+s_2)^2} p_0^2 \right)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4w e^{-a_{\parallel}(w_0-b_{\parallel}p_0)^2} e^{a_{\perp}(w_1-b_{\perp}p_1)^2} e^{a_{\perp}(w_2-b_{\perp}p_2)^2} e^{a_{\parallel}(w_3-b_{\parallel}p_3)^2} w_1^2 \\
&= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} \left(\frac{1}{2i(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} + \left(\frac{s_2\xi_2}{s_1\xi_1+s_2\xi_2} \right)^2 p_1^2 \right)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4w e^{-a_{\parallel}(w_0-b_{\parallel}p_0)^2} e^{a_{\perp}(w_1-b_{\perp}p_1)^2} e^{a_{\perp}(w_2-b_{\perp}p_2)^2} e^{a_{\parallel}(w_3-b_{\parallel}p_3)^2} w_2^2 \\
&= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} \left(\frac{1}{2i(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} + \left(\frac{s_2\xi_2}{s_1\xi_1+s_2\xi_2} \right)^2 p_2^2 \right)
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4w e^{-a_{\parallel}(w_0-b_{\parallel}p_0)^2} e^{a_{\perp}(w_1-b_{\perp}p_1)^2} e^{a_{\perp}(w_2-b_{\perp}p_2)^2} e^{a_{\parallel}(w_3-b_{\parallel}p_3)^2} w_3^2 \\
&= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} \left(\frac{1}{2i(s_1+s_2)} + \frac{s_2^2}{(s_1+s_2)^2} p_3^2 \right)
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4w e^{-a_{\parallel}(w_0-b_{\parallel}p_0)^2} e^{a_{\perp}(w_1-b_{\perp}p_1)^2} e^{a_{\perp}(w_2-b_{\perp}p_2)^2} e^{a_{\parallel}(w_3-b_{\parallel}p_3)^2} w_0 p_0 \\
&= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} \left(\frac{s_2}{s_1+s_2} p_0^2 \right) \quad (\text{B.17})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4w e^{-a_{\parallel}(w_0-b_{\parallel}p_0)^2} e^{a_{\perp}(w_1-b_{\perp}p_1)^2} e^{a_{\perp}(w_2-b_{\perp}p_2)^2} e^{a_{\parallel}(w_3-b_{\parallel}p_3)^2} w_1 p_1 \\
&= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} \left(\frac{s_2\xi_2}{s_1\xi_1+s_2\xi_2} p_1^2 \right) \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4w e^{-a_{\parallel}(w_0-b_{\parallel}p_0)^2} e^{a_{\perp}(w_1-b_{\perp}p_1)^2} e^{a_{\perp}(w_2-b_{\perp}p_2)^2} e^{a_{\parallel}(w_3-b_{\parallel}p_3)^2} w_2 p_2 \\
&= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} \left(\frac{s_2\xi_2}{s_1\xi_1+s_2\xi_2} p_2^2 \right) \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4w e^{-a_{\parallel}(w_0-b_{\parallel}p_0)^2} e^{a_{\perp}(w_1-b_{\perp}p_1)^2} e^{a_{\perp}(w_2-b_{\perp}p_2)^2} e^{a_{\parallel}(w_3-b_{\parallel}p_3)^2} w_3 p_3 \\
&= \frac{-i\pi^2}{(s_1+s_2)(s_1\xi_1+s_2\xi_2)} \left(\frac{s_2}{s_1+s_2} p_3^2 \right). \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

Incorporando los resultados (B.12)-(B.20), la expresión (4.14) para Λ toma la forma

$$\begin{aligned}
\Lambda(s_1, s_2) &= \frac{-i\pi^2 eB}{(s_1+s_2)(\tan(eBs_1) + \tan(eBs_2))} \left\{ [1 - \tan(eBs_1) \tan(eBs_2)] \right. \\
&\quad \times \left[m^2 + \frac{i}{s_1+s_2} - \frac{s_1 s_2}{(s_1+s_2)^2} p_{\parallel}^2 \right] + \left[\frac{1}{\cos^2(eBs_1) \cos^2(eBs_2)} \right] \\
&\quad \left. \times \left[\frac{ieB}{\tan(eBs_1) + \tan(eBs_2)} - \frac{\tan(eBs_1) \tan(eBs_2)}{(\tan(eBs_1) + \tan(eBs_2))^2} p_{\perp}^2 \right] \right\}. \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

Apéndice C

Regularización Dimensional

En este apéndice se explica y se emplea un proceso llamado *regularización dimensional* para calcular explícitamente la cantidad $\Sigma(0)$ que aparece en los capítulos 2 y 4 y mostrar que tiene términos divergentes y estos son puramente reales.

C.1. Cálculo de $\Sigma(0)$

Se puede ver que las dos integrales que aparecen en la la expresión (2.19) van a lo largo de el eje real del parámetro s . Es decir, en el plano complejo corresponden a la figura (C.1).

Además nótese que ambas integrales tienen una singularidad en el cero. Es conocido que en el caso $\frac{1}{s^a}$, la singularidad es removible siempre y cuando $a \neq 1$. Así que en la primera integral no es posible remover la singularidad, para poder calcularla se realiza la siguiente manipulación

$$a = \lim_{\delta \rightarrow 0} (a - \delta).$$

De tal manera que la autoenergía se reescribe como

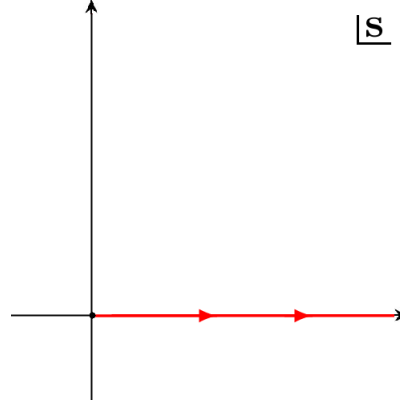


Figura C.1: Contorno de integración.

$$\Sigma(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{g^2 \mu^{-\delta}}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1-\delta}} e^{-im^2 s} \left[\frac{2i}{s} + m^2 \right] \right), \quad (\text{C.1})$$

donde μ es sólo un factor para preservar las unidades de manera correcta (regularización dimensional), porque como ya se discutió previamente en la sección 2.2.2, s tiene unidades.

Para trabajar con variables adimensionales, se redefine $s \mapsto m^2 s$. De modo que

$$\Sigma(0) = \frac{g^2 m^2}{4\pi^2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\mu^{-\delta} m^{-2\delta} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\infty ds s^{\delta-1} e^{-is} \left[\frac{2i}{s} + 1 \right] \right). \quad (\text{C.2})$$

Las integrales de la expresión (C.2) se pueden resolver de manera sencilla trabajando en el plano complejo de s como ya se había propuesto al inicio de la sección, y los resultados son [58]

$$\int_0^\infty ds s^{\delta-1} e^{-is} = \Gamma(\delta) \quad (\text{C.3})$$

$$\int_0^\infty ds s^{\delta-2} e^{-is} = i\Gamma(\delta - 1), \quad (\text{C.4})$$

donde $\Gamma(z)$ es la función Gamma, definida por [59]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (\text{C.5})$$

con la condición de que $\mathbf{Re}(z) > 0$.

Sustituyendo los resultados (C.3) y (C.4) en la expresión (C.2), se llega a¹

$$\Sigma(0) = \frac{g^2 m^2}{4\pi^2} \left(\mu^{-\delta} m^{-2\delta} [2i^2 \Gamma(\delta - 1) + \Gamma(\delta)] \right). \quad (\text{C.6})$$

Por otro lado, si δ es lo suficientemente pequeño es posible realizar las siguientes aproximaciones para la función Gamma [40]

$$\Gamma(\delta) \simeq \frac{1}{\delta} - \gamma + \left[\frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\zeta(2)}{2} \right] + \dots \quad (\text{C.7})$$

$$\Gamma(\delta - 1) \simeq -\frac{1}{\delta} + (\gamma - 1) + \dots \quad (\text{C.8})$$

en donde γ es la constante de Euler-Mascheroni y $\zeta(x)$ la función Zeta de Riemann.

Así como llevar acabo la siguiente expansión [40]

$$a^{-\delta} \simeq 1 - \delta \ln(a) + \dots \quad (\text{C.9})$$

Usando la aproximaciones anteriores a primer orden en δ en la expresión (C.6), finalmente se llega a la siguiente expresión para la autoenergía

$$\Sigma(0) = \frac{3}{4} \frac{g^2 m^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\delta} - \ln(m^2 \mu) - \gamma + \frac{2}{3} \right). \quad (\text{C.10})$$

¹A partir de ésta expresión ya no se escribirán los límites explícitamente pero se tendrá en mente cada vez que aparezcan los parámetros ϵ o δ .

El proceso que se acaba de llevar a cabo es conocido como regularización. Se puede observar que la parte divergente (el infinito) está aislada en un sólo término y ésta es puramente real. Esto permite trabajar de manera más sencilla las expresiones subsecuentes.

Bibliografía

- [1] P. W. Higgs. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508, (1964).
- [2] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 585, (1964).
- [3] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration]. *Phys. Lett. B* **716**, 1, (2012).
- [4] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration]. *Phys. Lett. B* **716**, 30, (2012).
- [5] M. D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [6] N. Jun. *Principles of Physics: From Quantum Field Theory to Classical Mechanics*. World Scientific, 2014.
- [7] J. Beringer *et al.* [Particle Data Group]. *PR D* **86**, 010001, (2012).
- [8] C. Patrignani *et al.* [Particle Data Group]. *Chin. Phys. C* **40**, 100001, (2016).
- [9] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 1064, (1950).
- [10] M. Alford, K. Rajagopal, and F. Wilczek. *Phys. Lett. B* **422**, 247, (1998).
- [11] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [12] V. A. Miransky. *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories*. World Scientific Publishing, 1993.
- [13] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, and H. J. Warringa. *Nucl. Phys. A* **803**, 227, (2008).

- [14] A. Gonoskov, I. Gonoskov, C. Harvey, A. Ilderton, A. Kim, M. Marklund, G. Mourou, and A. Sergeev. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 060404, (2013).
- [15] I. Akal, S. Villalba-Chávez, and C. Muller. *Phys. Rev. D* **90**, 113004, (2014).
- [16] S. Meuren, K. Z. Hatsagortsyan, C. H. Keitel, and A. Di Piazza. *Phys. Rev. D* **91**, 013009, (2015).
- [17] M. N. Chernodub. *Phys. Rev. D* **82**, 085011, (2010).
- [18] M. Kawaguchi and S. Matsuzaki. *Eur. Phys. J. A* **53**, 68, (2017).
- [19] A. Bandyopadhyay and S. Mallik. arXiv:1610.07887 [hep-ph].
- [20] G. G. Raffelt. *Stars as Laboratories for Fundamental Physics*. University of Chicago Press, Chicago, 1996.
- [21] A. K. Harding and D. Lai. *Rep. Prog. Phys.* **69**, 2631, (2006).
- [22] J. M. Lattimer and M. Prakash. *Phys. Rep.* **442**, 109, (2007).
- [23] A.Y. Potekhin. *Usp. Fiz. Nauk* **180**, 1279, (2010).
- [24] D. Lai. *Space Sci. Rev.* **191**, 13, (2015).
- [25] M. Bastero-Gil, G. Piccinelli, and A. Sanchez. *Astron. Nachr.* **336**, 805, (2015).
- [26] A.V. Borisov, A. S. Vshivtsev, V. C. Zhukovskii, and P. A. Eminov. *Usp. Fiz. Nauk* **167**, 241, (1997).
- [27] G. Piccinelli and A. Sánchez. *Phys. Rev. D* **96**, 076014, (2017).
- [28] D. J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson, 2nd edition, 2005.
- [29] J. D. Bjorken and S. D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 1964.
- [30] W. Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*. Springer, 3rd edition, 2000.

- [31] W. Gordon. *Z. Physik* **40**, 117, (1926).
- [32] O. Klein. *Z. Physik* **41**, 407, (1927).
- [33] P. A. M. Dirac. *Proc. Roy. Soc. (London) A* **117**, 610, (1928).
- [34] M. Peskin and D. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [35] C. D. Anderson. *Phys. Rev.* **43**, 491, (1933).
- [36] A. Güijosa. *Notas del curso: Teoría Cuántica de Campos*. Posgrado de Ciencias Físicas, UNAM., 2007.
- [37] A. Aragao, H. Boschi-Filho, C. Farina, and F. A. Barone. *Braz. J. Phys.* **37**, 1260, (2007).
- [38] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood. *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*. Cambridge University Press, 3rd edition, 2007.
- [39] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover, 1980.
- [40] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1996.
- [41] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 3rd edition, 1999.
- [42] R. E. Cutowsky. *J. Math. Phys.* **1**, 429, (1960).
- [43] J. Schwinger. *Phys. Rev.* **82**, 664, (1951).
- [44] M. Le Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [45] E. Butkov. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley, 1968.
- [46] M. Stone and P. Goldbart. *Mathematics for Physics: A Guided Tour for Graduate Students*. Cambridge University Press, 2009.
- [47] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*. Pergamon Press, 3rd edition, 1977.
- [48] L. D. Landau. *Z. Phys.* **64**, (1930).

- [49] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii. *Teoría Cuántica Relativista: Parte 1*. Reverté, 2da edición en español, 1975.
- [50] V. I. Ritus. *Ann. Phys. (N.Y.)* **69**, 555, (1972).
- [51] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer, 1993.
- [52] A. Erdas. *Phys. Rev. D* **80**, 113004, (2009).
- [53] E. J. Ferrer, V. De La Incera, D. Manreza Paret, A. Pérez Martínez, and A. Sanchez. *Phys. Rev. D* **91**, 085041, (2015).
- [54] W. Tsai and T. Erber. *Phys. Rev. D* **10**, 492, (1974).
- [55] W. Tsai and T. Erber. *Phys. Rev. D* **12**, 1132, (1975).
- [56] L. F. Urrutia. *Phys. Rev. D* **17**, 085033, (1978).
- [57] O. Vallée and M. Soares. *Airy Functions and Applications to Physics*. Imperial College Press, 2004.
- [58] W. Dittrich and H. Gies. *Probing the Quantum Vacuum*. Springer, 2000.
- [59] J. E. Marsden. *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman and Company, 1973.