



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**MATRICES DE ERICKSON Y ALGUNAS VARIANTES**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS**

---

**P R E S E N T A:**

**ALMA ROSARIO ARÉVALO LOYOLA**

**DIRECTORA DE TESIS:**

**DRA. AMANDA MONTEJANO CANTORAL**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX. 2018**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>1. Definiciones básicas</b>	<b>4</b>
1.1. Coloraciones . . . . .	4
1.2. Objetos . . . . .	9
1.2.1. Progresiones aritméticas . . . . .	9
1.2.2. Subgráficas completas . . . . .	12
1.2.3. 2-cuadrados en matrices . . . . .	15
<b>2. Teoría de Ramsey</b>	<b>21</b>
2.1. Teoría de Ramsey clásica . . . . .	21
2.1.1. Historia y filosofía de la teoría de Ramsey . . . . .	21
2.1.2. El teorema de Ramsey . . . . .	25
2.2. Números de Ramsey . . . . .	28
2.2.1. Números de Ramsey para dos colores . . . . .	29
2.2.2. Números de Van der Waerden . . . . .	31
2.3. Variantes a la teoría de Ramsey . . . . .	33
2.3.1. Teoría anti-Ramsey . . . . .	33
2.3.2. Teoría de Ramsey balanceada . . . . .	34
<b>3. Matrices de Erickson</b>	<b>37</b>
3.1. El problema planteado por Erickson . . . . .	37
3.2. El teorema de Axenovich y Manske . . . . .	38
3.2.1. La cota inferior . . . . .	39
3.2.2. La cota superior . . . . .	41
3.3. El resultado de Bacher y Eliahou . . . . .	42
<b>4. Variantes al problema de las matrices de Erickson</b>	<b>44</b>
4.1. Versión heterocromática . . . . .	44
4.2. Versión balanceada . . . . .	48
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>60</b>

# Introducción

El título de esta tesis hace referencia a un problema combinatorio que fue planteado en el año de 1996, por el matemático Martin J. Erickson [6]. El primer objetivo de este trabajo es enunciar este problema y contar la historia de su reciente solución [2, 5].

Dada una matriz  $A$ , llamamos un *2-cuadrado* a las cuatro esquinas de una sub-matriz cuadrada de  $A$ . Una *matriz de Erickson* es una matriz binaria que no contiene 2-cuadrados constantes. El problema que planteó Martin J. Erickson en 1996 fue el de encontrar la matriz de Erickson más grande posible. Dicho problema se puede replantear de la siguiente manera: sea

$$[n]^2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x \leq n - 1, 0 \leq y \leq n - 1\},$$

determine el mínimo entero,  $n_0$ , tal que si  $n \geq n_0$ , entonces toda bicoloración,  $f : [n]^2 \rightarrow \{A, R\}$ , produce un 2-cuadrado monocromático. En 2008, M. Axenovich y J. Manske [2] proporcionaron una cota superior para  $n_0$ , utilizando el número de Van der Waerden,  $w(2, 8)$ , correspondiente a la existencia de progresiones aritméticas de longitud 8 en toda 2-coloración del intervalo inicial de números enteros. Dicha cota, de orden  $2^{2^{40}}$ , era la mejor que se conocía hasta 2010, cuando R. Bacher y S. Eliahou [5] demostraron que  $n_0 = 15$ , utilizando herramientas computacionales.

Un rasgo que buscamos destacar del problema de las matrices de Erickson, es su naturaleza tipo Ramsey, por lo que el segundo objetivo de esta tesis es mostrar la idea general de lo que es la teoría de Ramsey, qué características tienen los problemas de dicha teoría, y ubicar en ella el problema de Erickson.

En analogía con la teoría de Ramsey (que se ocupa de estudiar la existencia de estructuras monocromáticas en universos coloreados), se encuentran la teoría anti-Ramsey y la teoría de Ramsey balanceada, que se ocupan de estudiar, respectivamente, la existencia de estructuras heterocromáticas y balanceadas en universos coloreados. El tercer objetivo de este trabajo es plantear las correspondientes variantes al problema de las matrices de Erickson; concretamente, proponemos los siguientes problemas:

- ¿Existirá un mínimo entero  $n_1$ , tal que si  $n \geq n_1$  entonces toda 4-coloración

de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado heterocromático, es decir, con cada esquina de un color diferente?

- ¿Existirá un mínimo entero  $n_2$ , tal que si  $n \geq n_2$  entonces toda 2-coloración de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado balanceado, es decir, con exactamente dos esquinas de cada color?

El orden del contenido de esta tesis es el siguiente: En el primer capítulo, se dan algunas definiciones que se usan a lo largo del desarrollo de todo el manuscrito, dando por hecho algunas otras más básicas (como las que se refieren a conjuntos y funciones). En el segundo capítulo se expone, a grandes rasgos, la historia del surgimiento de la teoría de Ramsey y qué tipo de problemas abarca; además, se presentan la teoría anti-Ramsey y la teoría de Ramsey balanceada. En el tercer capítulo se da a conocer el problema original de Erickson, y un breve estudio de la historia de su solución. El cuarto capítulo se compone del trabajo propio, donde se exponen la solución y la solución parcial, respectivamente, a los dos problemas arriba mencionados.

# Capítulo 1

## Definiciones básicas

En este primer capítulo expondremos los conceptos básicos que se requieren para el desarrollo de la tesis. Comenzaremos con la noción de coloración, y daremos algunas definiciones que se usarán más adelante. Posteriormente, presentaremos los objetos matemáticos que vamos a estudiar, y a colorear, proporcionando diversos ejemplos para asimilar las ideas.

### 1.1. Coloraciones

A lo largo de toda la tesis hablaremos de coloraciones. En el lenguaje común, colorear significa asignar colores; en el lenguaje matemático, una coloración no es más que una función.

**Definición 1.1.** *Una coloración de un conjunto  $A$  es una función  $f : A \rightarrow C$ , donde  $C$  es un conjunto de colores.*

**Definición 1.2.** *Dado un entero positivo  $k$ , una  $k$ -coloración es una coloración en la que el conjunto de colores tiene cardinalidad  $k$ . A una 2-coloración también se le puede llamar bicoloración.*

Dada una  $k$ -coloración  $f : A \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  y un color  $c_i \in \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , el conjunto de elementos en  $A$  a los que les fue asignado el color  $c_i$  es un subconjunto importante de considerar.

**Definición 1.3.** *Sea  $f : A \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  una  $k$ -coloración. Dado un color  $c_i \in \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , llamamos clase cromática de  $c_i$  al conjunto de preimágenes de  $c_i$ ,  $f^{-1}(c_i) := \{x \in A \mid f(x) = c_i\}$ .*

Tomando en cuenta la definición anterior, no es difícil ver que una  $k$ -coloración,  $f$ , de un conjunto  $A$ , es equivalente a una partición de  $A$ . Para esto, veremos la definición de partición.

**Definición 1.4.** Dado un conjunto  $A$ , una partición de  $A$  es una familia

$$P = \{A_i \mid i \in I\}$$

de subconjuntos de  $A$ , tales que:

- (i) Para toda  $i \in I$ ,  $A_i \neq \emptyset$ ,
- (ii) si  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , y
- (iii)  $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ .

Antes de continuar, queremos establecer la siguiente notación: dada una  $k$ -coloración  $f : A \rightarrow C$ , donde  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , denotemos por  $Im_f$  al conjunto de colores que fueron usados, es decir,

$$Im_f = \{c_i \in C \mid f(a) = c_i, \text{ para algún } a \in A\}.$$

Además, denotemos por  $A_j$  a la clase cromática del color  $c_j$ , es decir,  $A_j := f^{-1}(c_j)$ . Notemos que para cada  $c_j \in C$ :

- si  $c_j \notin Im_f$  entonces  $A_j = \emptyset$ , y
- si  $c_j \in Im_f$  entonces  $A_j \neq \emptyset$ .

**Proposición 1.1.** Dada una  $k$ -coloración,  $f$ , de un conjunto  $A$ , el conjunto de clases cromáticas no vacías de  $f$  inducen una partición de  $A$ .

*Demostración.* Sea  $f : A \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  una  $k$ -coloración de  $A$ , y sea  $A_i$  la clase cromática del color  $c_i$ , es decir,  $A_i = \{a \in A \mid f(a) = c_i\}$ . Consideremos el conjunto de las clases cromáticas no vacías,  $P = \{A_i \mid A_i \neq \emptyset\} = \{A_i \mid c_i \in Im_f\}$ . Ahora veremos que  $P$  es una partición de  $A$ .

- (i) Por como fue definido  $P$ , sabemos que para todo  $A_i \in P$ ,  $A_i \neq \emptyset$ .
- (ii) Sean  $A_i, A_j \in P$ ,  $A_i \neq A_j$ . Veamos que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ .  
Para llegar a una contradicción, supongamos que existe  $x \in A_i \cap A_j$ ; así, por definición de clase cromática, tenemos que  $f(x) = c_i = c_j$ , lo cual implica que  $A_i = A_j$ , contradiciendo la afirmación inicial. Por lo tanto  $A_i \cap A_j = \emptyset$ .
- (iii) Veamos que  $\bigcup_{A_i \in P} A_i = A$ .  
Todo elemento de  $\bigcup_{A_i \in P} A_i = A$  pertenece a  $A$  por como están definidas las clases cromáticas. Notemos que todo elemento de  $A$  pertenece a alguna clase cromática y por lo tanto a la unión, ya que si  $a \in A$  entonces existe  $c_i \in C$  tal que  $f(a) = c_i$ . Por lo tanto  $\bigcup_{A_i \in P} A_i = A$ .

□

Las coloraciones en las que todos los colores disponibles son utilizados, reciben un nombre especial, que veremos en la siguiente definición.

**Definición 1.5.** Sea  $f : A \rightarrow C$  una coloración. Decimos que  $f$  es una coloración estricta o suprayectiva si  $Im_f = C$ .

Dada una  $k$ -coloración,  $f : A \rightarrow C$ ; la afirmación  $Im_f = C$  es equivalente a cada una de las siguientes:

- $f$  es una función suprayectiva.
- Todas las clases cromáticas bajo  $f$  son no vacías.
- Las clases cromáticas bajo  $f$  forman una  $k$ -partición, es decir, una partición en exactamente  $k$  subconjuntos.

Dada una coloración de un conjunto  $A$ , existen tres tipos de subconjuntos de  $A$  que nos interesa estudiar.

**Definición 1.6.** Sean  $f : A \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  una coloración y  $S$  un subconjunto de  $A$ . Decimos que  $S$  es:

- monocromático, si todos los elementos de  $S$  pertenecen a una misma clase cromática. En otras palabras, si existe  $c_i \in \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  tal que

$$|S \cap f^{-1}(c_i)| = |S|;$$

- heterocromático, si cada elemento de  $S$  pertenece a una clase cromática distinta. Es decir, para todo  $c_i \in \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  sucede que

$$|S \cap f^{-1}(c_i)| \leq 1;$$

- balanceado, si en  $S$  el número de elementos de cada color (que aparece en  $S$ ) es el mismo. Equivalentemente, existe una constante  $1 \leq b \leq |S|$  tal que, para todo  $c_i \in \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  sucede que

$$|S \cap f^{-1}(c_i)| \in \{0, b\}.$$

De la definición anterior podemos deducir las siguientes afirmaciones.

- Todo subconjunto monocromático es balanceado, y todo subconjunto heterocromático también lo es. Sin embargo, los recíprocos de ambos enunciados no son ciertos.

- Todo subconjunto de un conjunto monocromático es también monocromático. Y todo subconjunto de un conjunto heterocromático es también heterocromático. Sin embargo, un subconjunto de un conjunto balanceado no necesariamente es balanceado.
- Dada una  $k$ -coloración, si un subconjunto es heterocromático, la cardinalidad de este es menor o igual que  $k$ .

En la literatura especializada, a los conjuntos heterocromáticos en ocasiones se les conoce como conjuntos *arcoíris*. Sin embargo, frecuentemente, el concepto de heterocromático (o arcoíris) se refiere a lo que nosotros llamaremos heterocromático estricto, lo cual significa que requerimos la presencia de todos los colores.

**Definición 1.7.** Sean  $f : A \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  una coloración y  $S$  un subconjunto de  $A$ . Decimos que  $S$  es:

- heterocromático estricto, si cada elemento de  $S$  tiene un color distinto, y todos los colores aparecen en  $S$ . Es decir, para todo  $c_i \in \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  sucede que

$$|S \cap f^{-1}(c_i)| = 1;$$

- balanceado estricto, si en  $S$  el número de elementos de cada color es el mismo. O bien, para todo  $c_i \in \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  sucede que

$$|S \cap f^{-1}(c_i)| = \frac{|S|}{k}.$$

Observemos que, dada una  $k$ -coloración, para que un subconjunto pueda ser heterocromático estricto, la cardinalidad de este necesariamente tiene que ser  $k$ ; de la misma manera, para que un subconjunto pueda ser balanceado estricto, la cardinalidad del subconjunto tiene que ser divisible entre  $k$ .

Son de interés particular las coloraciones en las que todo el conjunto coloreado (el dominio de la coloración) cumple con alguna de las definiciones anteriores.

**Definición 1.8.** Dada una coloración,  $f : A \rightarrow C$ , decimos que  $f$  es una coloración monocromática (análogamente heterocromática o balanceada) si el conjunto  $A$  es monocromático (respectivamente heterocromático o balanceado) bajo  $f$ . De la misma manera,  $f$  es una coloración heterocromática (respectivamente balanceada) estricta si el conjunto  $A$  es heterocromático (respectivamente balanceado) estricto bajo  $f$ .

Es claro que una  $k$ -coloración podrá ser balanceada solo si la cardinalidad del dominio es divisible entre  $k$ . En ocasiones, es útil destacar coloraciones en las que no se cumple esta divisibilidad, pero las clases cromáticas no distan mucho de ser iguales en cardinalidad. Por eso es importante la siguiente definición.

**Definición 1.9.** Una coloración,  $f : A \rightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ , es cuasibalanceada si para cualesquiera  $c_i, c_j \in \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  sucede que

$$||f^{-1}(c_i)| - |f^{-1}(c_j)|| \leq 1.$$

Aunque los llamamos colores, los elementos del conjunto  $C$  pueden ser objetos de cualquier tipo; en particular, números naturales. De hecho, cuando trabajamos con  $k$ -coloraciones, comúnmente usamos el conjunto de colores  $C = \{1, 2, \dots, k\}$ . En el caso de bicoloraciones, es usual que se use el conjunto  $\{0, 1\}$ .

Con el objetivo de asentar las definiciones anteriores, a continuación veremos dos ejemplos.

**Ejemplo 1.1.** Consideremos el conjunto de las cinco vocales,  $A = \{a, e, i, o, u\}$  y el conjunto de colores  $C = \{\text{azul}, \text{verde}, \text{rojo}\}$ . Entonces, una posible coloración de  $A$  con los colores de  $C$  es la función  $f : A \rightarrow C$  tal que

$$f(a) = \text{rojo}, f(e) = \text{verde}, f(i) = \text{verde}, f(o) = \text{rojo}, f(u) = \text{azul}.$$

Cabe destacar que  $f$  es una 3-coloración, ya que  $|C| = 3$  y es estricta porque se usan los tres colores. Como en este caso los elementos de  $C$  son literalmente colores, podemos visualizar la coloración anterior de la siguiente manera:

$$a, e, i, o, u,$$

que de forma sencilla nos muestra exactamente qué color le fue asignado a cada elemento del conjunto  $A$ .

Las clases cromáticas formadas por esta coloración están dadas como sigue:

$$\begin{aligned} \{a, o\} &\text{ es la clase del color rojo,} \\ \{e, i\} &\text{ la del color verde,} \\ \{u\} &\text{ la del color azul.} \end{aligned}$$

También podemos observar que  $\{a, o\}$  es un conjunto monocromático, ya que sus dos elementos son rojos;  $\{a, e\}$  es un conjunto heterocromático, ya que sus elementos tienen asignado distinto color, mas no es heterocromático estricto, porque no contiene algún elemento de color azul; en cambio  $\{a, i, u\}$  sí es heterocromático estricto. Los conjuntos  $\{a\}$ ,  $\{e, u\}$ ,  $\{a, e, i, o\}$  y  $\{e, o, u\}$  son todos balanceados, porque tienen la misma cantidad de elementos de cada color, pero únicamente el último de ellos es balanceado estricto, porque aparecen los tres colores de  $C$ . Finalmente, notemos que la coloración  $f$  es cuasibalanceada pues la diferencia de cardinalidades entre cualesquiera dos clases cromáticas es menor o igual que uno.

En el ejemplo anterior, vemos que es posible exhibir una coloración de un conjunto ya sea explícitamente, dando la función; o bien, visualmente, coloreando a los elementos con los colores del conjunto  $C$ . Veamos ahora un ejemplo en el que los elementos del conjunto  $C$  son números enteros.

**Ejemplo 1.2.** Consideremos el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y el conjunto de colores  $C = \{0, 1\}$ . Sea  $f : A \rightarrow C$  la coloración tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ es par} \\ 1 & x \text{ es impar} \end{cases}$$

En este caso, podemos representar la coloración como una cadena de ceros y unos, en la cual la posición indica el elemento de  $A$  al que fue asignado 0 o 1:

1010101

- Algunos subconjuntos de  $A$  monocromáticos son  $\{2\}$ ,  $\{1, 5\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{2, 4, 6\}$ ,  $\{1, 3, 7\}$ ,  $\{1, 3, 5, 7\}$ .
- Algunos subconjuntos de  $A$  heterocromáticos son  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 6\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3, 6\}$ ,  $\{7\}$ . De los cuales,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 6\}$ ,  $\{3, 6\}$  son conjuntos heterocromáticos estrictos.
- Algunos subconjuntos de  $A$  balanceados son  $\{5\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{1, 6\}$ ,  $\{1, 3, 4, 6\}$ ,  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . De los cuales,  $\{3, 4\}$ ,  $\{1, 6\}$ ,  $\{1, 3, 4, 6\}$ ,  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  son balanceados estrictos.

En general, al estudiar coloraciones de objetos, el hecho de resaltar la existencia de subestructuras monocromáticas, heterocromáticas o balanceadas, hace que nos resulte importante también destacar coloraciones en las que no exista alguna subestructura en específico, ya sea monocromática, heterocromática o balanceada. A este tipo de coloraciones las llamaremos *libres*, y más adelante veremos ejemplos.

En la siguiente sección describiremos los universos matemáticos que en esta tesis nos interesa colorear, así como las subestructuras monocromáticas, heterocromáticas o balanceadas que estudiaremos.

## 1.2. Objetos

Para el propósito de esta tesis, trabajaremos principalmente en tres diferentes universos, estudiando en ellos diferentes subestructuras. A saber, progresiones aritméticas en intervalos de números enteros, subgráficas completas en gráficas completas, y 2-cuadrados en matrices.

### 1.2.1. Progresiones aritméticas

A continuación, trataremos con un objeto matemático que se suele emplear desde niveles muy básicos, ya que es sencillo de entender y se pueden estudiar

propiedades interesantes. Informalmente, las progresiones aritméticas no son otra cosa que secuencias de números que se obtienen al sumarle a un entero varias veces la misma cantidad (también entera).

**Definición 1.10.** Una progresión aritmética es un conjunto de dos o más números enteros  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ , tal que para cada  $i \geq 2$ ,  $a_i - a_{i-1} = d$ . Donde a la constante  $d$  se le llama diferencia.

**Nota:** en algunos textos se considera que existen progresiones aritméticas de un solo elemento, en donde la diferencia es  $d = 0$ . En esta tesis no consideramos progresiones aritméticas de un solo elemento.

En ocasiones, nos interesa fijar la longitud de las progresiones, aquí mostramos la definición que resalta dicho parámetro.

**Definición 1.11.** Sean  $k$  y  $d$  enteros positivos con  $k \geq 2$ . Una  $k$ -progresión aritmética con diferencia  $d$  es una progresión aritmética con exactamente  $k$  elementos,  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ , donde  $a_i = a_1 + (i-1)d$ , para toda  $1 \leq i \leq k$ . Es decir, la progresión tiene la forma:  $\{a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (k-1)d\}$ .

Podemos denotar a las progresiones aritméticas como  $AP$  o como  $AP(k)$ , por sus iniciales en inglés y siendo  $k$  la longitud de la progresión.

Para ubicar estas definiciones en el contexto de las coloraciones, nos interesa colorear conjuntos de números enteros, e identificar progresiones aritméticas de cierta longitud y con determinada característica cromática. Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.3.** Consideremos la siguiente coloración de los números naturales.

$$f(x) = \begin{cases} \text{azul} & x \text{ es par,} \\ \text{rojo} & x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Algunas  $AP$  monocromáticas son:  $\{2, 4, 6\}$ , con longitud 3 y diferencia 2;  $\{20, 28, 36, 44\}$ , con longitud 4 y diferencia 8;  $\{7, 19, 31\}$ , con longitud 3 y diferencia 12.

Observemos que, bajo esta coloración, una  $AP$  es monocromática, si y solo si su diferencia es un número par. También podemos tener progresiones aritméticas monocromáticas de longitud infinita, como  $\{x \mid x \text{ es par}\}$  de diferencia 2, o  $\{x \mid x \equiv 0 \pmod{4}\}$  de diferencia 4.

Algunas  $AP$  heterocromáticas son:  $\{5, 6\}$ , con longitud 2 y diferencia 1;  $\{14, 19\}$ , con longitud 2 y diferencia 5.

Notemos que, bajo esta coloración, una  $AP$  es heterocromática si y solo si es de longitud 2 y diferencia impar, (recordemos que no consideramos progresiones aritméticas de un solo elemento), de modo que todas las progresiones aritméticas heterocromáticas son estrictas.

Algunas AP balanceadas son:  $\{6, 8, 10\}$ , con longitud 3 y diferencia 2, y  $\{11, 18, 25, 32\}$ , con longitud 4 y diferencia 7.

Es fácil ver que, bajo esta coloración, se cumplen las siguientes afirmaciones:

- Toda AP balanceada es, o bien monocromática, o bien de longitud par y diferencia impar.
- Toda AP balanceada estricta es de longitud par y diferencia impar.

**Ejemplo 1.4.** Consideremos el ejercicio de encontrar una coloración, de los primeros 8 números enteros no negativos, con dos colores, digamos rojo y azul, de manera que no haya ninguna  $AP(3)$  monocromática, es decir, una 2-coloración libre de  $AP(3)$  monocromáticas.

Lo primero que descartamos es que haya 3 números consecutivos del mismo color, ya que formarían una  $AP(3)$ , con diferencia 1, monocromática. Comencemos, pues, coloreando a los primeros tres números de la siguiente manera:

0, 1, 2.

Para colorear el 3 podemos usar cualquiera de los dos colores y seguirá sin formarse una  $AP(3)$  monocromática; lo ponemos rojo:

0, 1, 2, 3.

Para colorear el 4 observemos que, si fuera azul, se formaría una  $AP(3)$  de color azul, a saber  $\{0, 2, 4\}$ ; entonces lo coloreamos rojo:

0, 1, 2, 3, 4.

Para colorear el 5 observemos que, si fuera rojo, se formaría una  $AP(3)$  de color rojo, a saber  $\{3, 4, 5\}$ ; entonces lo ponemos en color azul:

0, 1, 2, 3, 4, 5.

El 6 puede ir de cualquier color, y la coloración seguirá siendo libre; pongámoslo azul:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ahora, si el 7 fuera azul formaría la progresión  $\{5, 6, 7\}$  de color azul, y si fuera rojo formaría la progresión  $\{1, 4, 7\}$  de color rojo, como son los únicos colores posibles ya no podemos completar la coloración libre. Como sabemos que, en el paso anterior, el 6 podía ser coloreado de cualquiera de ambos colores y lo elegimos azul, veamos qué pasa si lo cambiamos por rojo:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

De esta manera, el 7 ya puede ser azul sin formar  $AP(3)$  monocromática:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Y hemos logrado el objetivo.

Del ejercicio anterior, se puede intuir que exhibir coloraciones libres de progresiones aritméticas monocromáticas, puede no ser tarea sencilla. De hecho, no existen algoritmos eficientes para construir tales coloraciones en general. Más aún, se sabe por el teorema de Van der Waerden, que veremos en el segundo capítulo (Teorema 2.2), que si  $n$  es suficientemente grande no existen tales coloraciones libres, es decir, para  $n$  grande, se garantiza la existencia de  $AP$  monocromáticas. En particular, veremos que a partir de 9 enteros, no es posible dar una bicoloración libre de  $AP(3)$  monocromáticas.

### 1.2.2. Subgráficas completas

Daremos ahora algunas definiciones de teoría de gráficas, ya que las gráficas son objetos matemáticos muy útiles para modelar y visualizar problemas y resultados de distintas áreas. En específico, veremos coloraciones por aristas de gráficas completas y destacaremos la presencia o ausencia de subgráficas completas con determinada característica cromática, es decir, monocromáticas, heterocromáticas o balanceadas.

**Definición 1.12.** Una gráfica,  $G = (V, E)$ , consiste de un conjunto  $V$  de elementos llamados vértices, y un conjunto  $E$  de parejas de vértices, llamadas aristas.

El conjunto de vértices de una gráfica  $G$  se suele denotar como  $V(G)$  y el conjunto de aristas como  $E(G)$ , por las iniciales en inglés.

**Definición 1.13.** En una gráfica  $G = (V, E)$ , dos vértices  $u, v \in V$  son adyacentes si  $(u, v) \in E$ .

**Definición 1.14.** Una subgráfica  $G' = (V', E')$  de una gráfica  $G = (V, E)$  es una gráfica tal que  $V' \subset V$  y  $E' \subset E$ .

**Definición 1.15.** Una gráfica completa de  $n$  vértices, denotada como  $K_n$ , es una gráfica de  $n$  vértices, con la propiedad de que cualesquiera dos vértices distintos son adyacentes entre sí. Es decir, si  $u, v \in V(K_n)$  y  $u \neq v$ , entonces  $(u, v) \in E(K_n)$ .

**Definición 1.16.** Una gráfica  $G = (V, E)$  es isomorfa a una gráfica  $G' = (V', E')$  si existe una función  $f : V \rightarrow V'$  biyectiva y que preserva las adyacencias entre los vértices.

Dada una gráfica,  $G$ , podemos pensar en dar una coloración del conjunto de vértices,  $V(G)$ , o bien del conjunto de aristas,  $E(G)$ . Para el fin de los temas que trataremos más adelante nos interesa, en particular, colorear el conjunto de aristas.

**Definición 1.17.** Una coloración por aristas de una gráfica  $G$  es una coloración  $f : E(G) \rightarrow C$ , donde  $C$  es cualquier conjunto de colores.

A partir de aquí, al usar el término *coloración* para gráficas, nos referiremos a una coloración por aristas. Como habíamos mencionado anteriormente, nos interesa estudiar coloraciones por aristas de gráficas completas, y la existencia de subgráficas, también completas, con diferentes características cromáticas. Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.5.** Consideremos la bicoloración  $f : E(K_5) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$  ilustrada en la figura 1.1. Observemos que:

- $f$  es balanceada,
- $f$  es libre de triángulos (subgráficas isomorfas a  $K_3$ ) monocromáticos, y
- toda subgráfica isomorfa a  $K_4$  es balanceada.

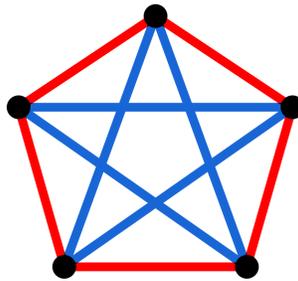


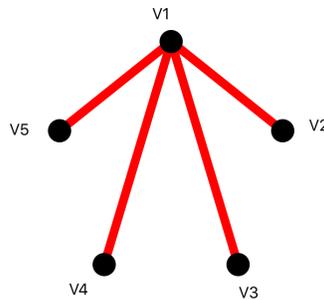
Figura 1.1: Bicoloración balanceada de  $K_5$ .

**Ejemplo 1.6.** Consideremos el ejercicio de probar que no existen bicoloraciones balanceadas de  $K_5$  libres de  $K_4$  balanceadas.

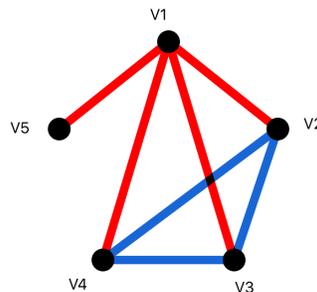
Sea  $f$  una bicoloración balanceada,  $f : E(K_5) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ . Entonces, tenemos cinco aristas rojas y cinco aristas azules. Para cada vértice  $v \in V(K_5)$ , sea  $m(v)$  la mayor cantidad de aristas de un mismo color que inciden en  $v$ .

Notemos que en cada vértice inciden cuatro aristas y  $2 \leq m(v) \leq 4$ . Sea  $M = \max_{v \in V(K_5)} m(v)$ . Ahora veremos, por casos, según el valor de  $M$ , que  $f$  produce alguna  $K_4$  balanceada.

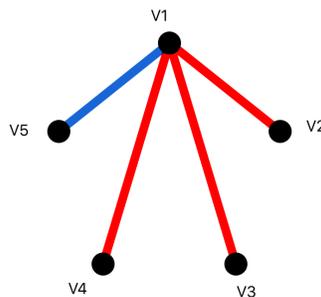
Si  $M = 4$ , esto es, que existe un vértice,  $v_1$ , cuyas cuatro aristas incidentes son del mismo color, sin pérdida de generalidad, supongamos que rojo. Entonces,



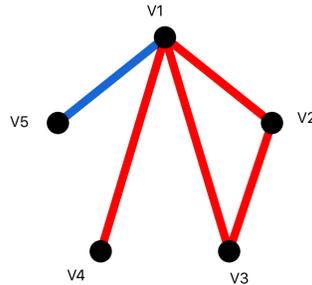
los 4 vértices restantes,  $v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ , inducen a las 5 aristas azules, y por ende existen tres de ellos que forman entre sí un triángulo monocromático azul, que junto con  $v_1$  inducen una subgráfica isomorfa a  $K_4$  balanceada.



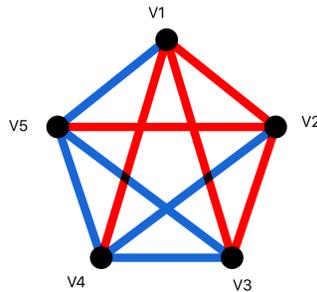
Si  $M = 3$ , esto es, que existe un vértice,  $v_1$ , en el cual inciden tres aristas del mismo color, digamos rojo; y que ningún otro vértice tiene cuatro aristas incidentes del mismo color. Sean  $v_2, v_3$ , y  $v_4$  los vértices a los que llegan las tres aristas rojas de  $v_1$ . Si  $v_2, v_3$  y  $v_4$  forman un triángulo azul, entonces  $v_1, v_2, v_3$ ,



$v_4$  inducen una  $K_4$  balanceada. Por lo tanto, supongamos que existe una arista roja entre dos de ellos, sin pérdida de generalidad, digamos que  $f((v_2, v_3)) = \text{rojo}$ . Ahora, como  $v_1, v_2$  y  $v_3$  inducen un triángulo rojo, entonces, si las aristas



$(v_2, v_5), (v_3, v_5)$  fueran ambas azules, los vértices  $v_1, v_2, v_3, v_5$  inducirían una  $K_4$  balanceada. Luego, alguna de las aristas  $(v_2, v_5)$  o  $(v_3, v_5)$  es roja, y el resto son azules. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $(v_2, v_5)$  es roja, entonces tendríamos que  $v_1, v_2, v_4, v_5$  inducen una  $K_4$  balanceada.



Por último, si  $M = 2$ , entonces para cada vértice  $v$ ,  $m(v) = 2$  y la coloración es equivalente a la de la figura 1.1, donde es claro que hay  $K_4$  balanceadas.

### 1.2.3. 2-cuadrados en matrices

En esta sección, veremos las coloraciones en matrices (o tableros), y las subestructuras que destacaremos. Primero veamos formalmente a qué nos referimos por colorear una matriz.

Denotaremos como  $[n]$  al intervalo de los primeros  $n$  enteros no negativos<sup>1</sup>. Es decir,

$$[n] = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq n - 1\}.$$

<sup>1</sup>En ocasiones se usa la notación  $[n]$  para el conjunto de los primeros  $n$  enteros positivos,  $\{1, 2, \dots, n\}$ , sin embargo en esta tesis nos es conveniente usar la notación  $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal cual lo hacen los autores en [2].

Dados  $m$  y  $n$ , números naturales, el producto cartesiano

$$[m] \times [n] = \{(x, y) \mid x \in [m], y \in [n]\},$$

se puede visualizar como una matriz de tamaño  $m \times n$ , con la identificación de cada pareja  $(x, y)$  con una entrada de la matriz, donde la  $x$  representa el renglón y la  $y$  la columna.

Notemos que una coloración  $f : [m] \times [n] \rightarrow C$  queda determinada de manera única mediante una matriz  $A$  de tamaño  $m \times n$ , con entradas en el conjunto  $C$ , donde la entrada  $a_{ij} = f((i, j))$ . Por esto, es muy fácil visualizar estas coloraciones, literalmente coloreando las casillas de un tablero del tamaño que nos interesa.

A partir de ahora, para fines prácticos, utilizaremos indistintamente el término matriz o tablero, para referirnos a  $[m] \times [n]$ , y utilizaremos la notación  $[n]^2 = [n] \times [n]$ , para el caso de matrices cuadradas.

**Ejemplo 1.7.** Sea  $f : [3]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ , la siguiente coloración.

$$f((x, y)) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$$

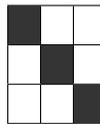
A partir de un sencillo análisis, vamos a visualizar esta coloración por medio de una matriz, o tablero, de  $3 \times 3$  bicoloreado. Los elementos de  $[3]^2$  son:

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2).$$

Tenemos que:

$$\begin{array}{lll} f((0, 0)) = 1 & f((0, 1)) = 0 & f((0, 2)) = 0 \\ f((1, 0)) = 0 & f((1, 1)) = 1 & f((1, 2)) = 0 \\ f((2, 0)) = 0 & f((2, 1)) = 0 & f((2, 2)) = 1 \end{array}$$

Para plasmar lo anterior visualmente, debemos pensar al 0 y al 1 como colores, digamos blanco y negro, respectivamente. Así, la expresión  $f((0, 0)) = 1$ , significa que la casilla ubicada en el primer renglón y en la primera columna es de color negro. De esta manera, es fácil ver que en el tablero de  $3 \times 3$ , se colorean de negro las casillas que pertenecen a la diagonal principal, y de blanco las que no. La siguiente imagen muestra de manera adecuada la coloración descrita anteriormente.



A partir de ahora, para dar una coloración de  $[m] \times [n]$ , la podremos exhibir mediante un tablero con  $m$  renglones y  $n$  columnas, coloreado; en lugar de dar explícitamente la función.

Ahora vamos a definir la subestructura que nos interesa estudiar en el ámbito de matrices coloreadas.

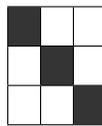
**Definición 1.18.** *Dada una matriz  $A$ , llamaremos un 2-cuadrado a las cuatro esquinas de una submatriz cuadrada de  $A$ . Es decir, un 2-cuadrado del tablero  $[m] \times [n]$  es un subconjunto  $\{(x, y), (x, y + d), (x + d, y), (x + d, y + d)\} \subset [m] \times [n]$ , donde  $d$  es un entero positivo al que llamaremos la diferencia del 2-cuadrado.*

Observemos que, dado un tablero  $[m] \times [n]$ , este puede contener 2-cuadrados con distintas diferencias, e incluso 2-cuadrados distintos con la misma diferencia; pero si contiene un 2-cuadrado de diferencia  $d$ , entonces  $1 \leq d \leq \min(m, n) - 1$ .

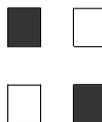
**Ejemplo 1.8.** *El tablero  $[3]^2$  contiene un 2-cuadrado de diferencia  $d = 2$ , y cuatro 2-cuadrados de diferencia  $d = 1$ , a saber:*

- 2-cuadrados de diferencia  $d = 2$ :  $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$ .
- 2-cuadrados de diferencia  $d = 1$ :  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ ,  
 $\{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$ ,  
 $\{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$ ,  
 $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ .

Consideremos la 2-coloración del tablero  $[3]^2$  dada en el ejemplo 1.7:



Podemos observar que esta es libre de 2-cuadrados monocromáticos. También notemos que, en este caso, no es posible hablar de 2-cuadrados heterocromáticos; ya que un 2-cuadrado se compone de cuatro casillas, necesitaríamos una coloración con al menos cuatro colores. En contraparte, esta coloración sí produce 2-cuadrados balanceados, en particular, las cuatro esquinas del tablero completo forman uno de ellos:



En la sección 4.2 estudiaremos la existencia de 2-cuadrados balanceados en 2-coloraciones balanceadas de  $[n]^2$  para  $n$  par. Notemos que, a diferencia de los cuadrados monocromáticos y heterocromáticos (con respecto a 4-coloraciones), un cuadrado balanceado (con respecto a 2 colores) puede ser de dos tipos:

- o bien las diagonales son monocromáticas:



- o bien renglones (o columnas) son monocromáticas:



En este punto resulta conveniente explicar cuándo consideramos que dos coloraciones son equivalentes o isomorfas.

**Definición 1.19.** *Dados  $m$  y  $n$ , números naturales, y dadas  $f$  y  $g$ , dos coloraciones de  $[m] \times [n]$ , diremos que  $f$  y  $g$  son coloraciones isomorfas (o equivalentes), si el tablero coloreado que corresponde a  $f$  se puede obtener mediante una isometría del tablero coloreado correspondiente a  $g$ .*

Recordemos que una isometría es una rotación, una reflexión, o una composición de rotaciones y reflexiones. Y notemos que en el caso de  $[n]^2$  (tableros cuadrados), las isometrías corresponden a las simetrías del cuadrado, es decir, al grupo diédrico  $D_4$ , que consta de 4 reflexiones y 4 rotaciones (siendo una de ellas la identidad).

**Ejemplo 1.9.** *Como el tablero  $[2]^2$  tiene cuatro casillas, sabemos que existen  $2^4 = 16$  bicoloraciones del mismo. Sin embargo, en vista de la definición anterior, observemos que, salvo isomorfismo, existen sólo 6 bicoloraciones del tablero  $[2]^2$ :*

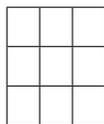


*Notemos que de estos seis tipos de bicoloraciones del tablero  $[2]^2$ , solamente dos son balanceados.*

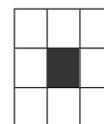
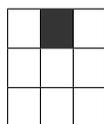
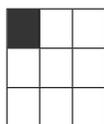
El siguiente ejemplo será muy útil para una de las pruebas de la sección 4.2.

**Ejemplo 1.10.** *A continuación veremos, salvo isomorfismos, todas las posibles bicoloraciones del tablero  $[3]^2$  que son libres de 2-cuadrados balanceados. Estas coloraciones las podemos clasificar en nueve tipos, según la cantidad de casillas de cada color.*

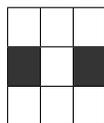
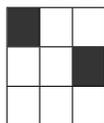
- *Con 0 casillas negras:*



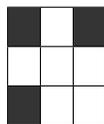
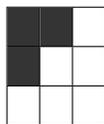
- *Con 1 casilla negra:*



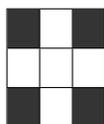
- *Con 2 casillas negras:*



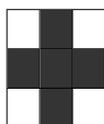
- *Con 3 casillas negras:*



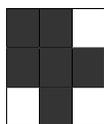
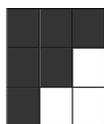
- *Con 4 casillas negras:*



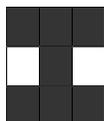
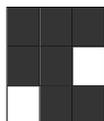
- *Con 5 casillas negras:*



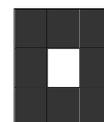
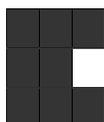
- *Con 6 casillas negras:*



- *Con 7 casillas negras:*



- *Con 8 casillas negras:*



- *Con 9 casillas negras:*



Afirmamos que cualquier bicoloración de  $[3]^2$  que sea libre de 2-cuadrados balanceados, o bien es una de las exhibidas anteriormente, o bien se obtiene mediante una rotación o reflexión de una de ellas. Lo anterior se puede verificar caso por caso, analizando cada uno de los cinco 2-cuadrados contenidos en  $[3]^2$ . Esta clasificación nos será útil para probar uno de los resultados originales que se presentan en este trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Teoría de Ramsey

La teoría de Ramsey suele describirse como el estudio de la existencia de estructuras monocromáticas en universos coloreados. De manera más coloquial, se dice que la teoría de Ramsey evidencia que *“el desorden absoluto es imposible”*.

En este capítulo presentaremos algunos de los resultados clásicos más importantes de la teoría de Ramsey, tales como el teorema de Ramsey y el teorema de Van der Waerden. También hablaremos de los números de Ramsey, así como de los números de Van der Waerden, que son los parámetros más importantes a estudiar en el área, y que además sirven para atacar otros problemas; tal es el caso del problema de las matrices de Erickson, que estudiaremos en el siguiente capítulo y que es el objeto principal de estudio en esta tesis.

En la segunda sección del capítulo, daremos a conocer algunas variantes que se han suscitado a partir de la teoría de Ramsey, con algunas semejanzas y otras diferencias en la naturaleza de los problemas y resultados. Las dos variantes que presentaremos son la teoría anti-Ramsey (también conocida como teoría de Ramsey-arcoíris) y la teoría de Ramsey-balanceada.

### 2.1. Teoría de Ramsey clásica

La bibliografía que existe sobre esta área es muy extensa; abarca desde artículos de divulgación hasta libros especializados, pasando por una gran cantidad de artículos de investigación. La mayoría del material presentado en esta sección se puede consultar en el libro [8] y en el artículo [9].

#### 2.1.1. Historia y filosofía de la teoría de Ramsey

La teoría de Ramsey debe su nombre al matemático inglés Frank Plumpton Ramsey (1903 - 1930), quien mostró que en conjuntos suficientemente grandes de

objetos, se puede garantizar siempre la existencia de subestructuras con determinado patrón. Un ejemplo usual para explicar lo anterior es conocido coloquialmente como el *teorema de la amistad*, que presentamos a continuación.

**Proposición 2.1.** *En cualquier reunión de 6 personas sucede que: o bien 3 de ellas se conocen entre sí, o bien 3 de ellas no se conocen entre sí.*

Observemos que la conclusión de la proposición anterior no es verdad si consideramos menos de 6 personas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.1.** *Consideremos una reunión a la que asisten 5 personas: Alma, Bárbara, Carlos, Daniel y Esteban. Supongamos que Alma conoce a Carlos y a Daniel, Bárbara conoce a Daniel y a Esteban, Carlos conoce a Esteban y a Alma, Daniel conoce a Alma y a Bárbara; y Esteban conoce a Bárbara y a Carlos. Podemos notar que no hay grupos de 3 personas que se conozcan todos entre sí, ni grupos de 3 personas en los que nadie se conozca.*

Más adelante veremos que lo anterior se puede enunciar en términos de coloraciones en gráficas, para así demostrar la proposición 2.1 y mostrar visualmente el ejemplo 2.1.

La proposición 2.1 es en realidad una forma coloquial de expresar un caso particular del teorema de Ramsey, que presentaremos en la sección 2.1.2. Antes de ello, quisiéramos enfatizar en las características que tiene un teorema o problema *tipo Ramsey*.

La idea general en la teoría de Ramsey es que, fijando un universo y determinando en él algún tipo de subestructura, se colorea el universo y se observan las coloraciones de dichas subestructuras. Más en específico, se estudiará bajo qué condiciones se puede garantizar la existencia de una subestructura, del tipo que nos interesa, monocromática. Los resultados de esta teoría, suelen ser tales que plantean el universo a colorear y afirman que si este es suficientemente grande, se puede garantizar que toda coloración, tal vez con un número fijo de colores, siempre contendrá a la subestructura monocromática. Los resultados pueden ser tan variados, como universos distintos podemos colorear.

Curiosamente, existen resultados anteriores al teorema de Ramsey, que pertenecen a la que hoy conocemos como la teoría de Ramsey, como los demostrados por Issai Schur y por Bartel Leendert Van der Waerden, que enunciamos a continuación.

**Teorema 2.1** (Schur, 1916). *Para todo entero positivo  $k$ , existe un mínimo entero  $N = S(k)$  tal que si  $n \geq N$  entonces toda  $k$ -coloración del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  produce un subconjunto  $\{x, y, z\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$  monocromático que es solución a la ecuación  $x + y = z$ .*

**Teorema 2.2** (Van der Waerden, 1927). *Para cada par de enteros positivos  $t$  y  $k$ , existe un mínimo entero  $N = W(t, k)$  tal que si  $n \geq N$  entonces toda  $k$ -coloración de  $[n]$  produce una progresión aritmética monocromática de longitud  $t$ .*

Ramsey demostró su teorema en 1928, en un artículo titulado “*On a problem of formal logic*” (Un problema de lógica formal), el cual fue publicado en 1930, año en que murió. Hasta ese momento, no se conocía que la relevancia de su trabajo sería tal que establecería una teoría nombrada en su honor. Como hemos dicho anteriormente, el teorema de Ramsey será ampliamente tratado en la siguiente sección. Mientras tanto, continuaremos con un breve recorrido en el nacimiento de la teoría de Ramsey.

Posteriormente a los teoremas de Schur y Van der Waerden, podría decirse que la esencia de la teoría de Ramsey fue redescubierta en 1931, año en que Esther Klein probó el siguiente resultado geométrico:

**Proposición 2.2.** *Dada una configuración de cinco puntos en el plano en posición general (es decir, cualesquiera tres son no colineales), se puede garantizar que cuatro de los puntos forman un cuadrilátero convexo.*

La demostración de esta proposición es muy sencilla pues, en esencia, existen únicamente tres configuraciones de cinco puntos en el plano, en posición general. Lo relevante de la observación de Klein es el siguiente problema más general: Dado un entero  $c \geq 4$ , ¿existe un número  $N(c)$  tal que en cualquier colección de puntos en el plano con al menos  $N(c)$  elementos, en posición general, siempre sea posible obtener un subconjunto de tamaño  $c$  formando el conjunto de vértices de un polígono convexo? Los matemáticos Paul Erdős y George Szekeres fueron quienes resolvieron este problema que de hecho pasó a ser conocido como “*The happy ending problem*” (El problema del final feliz), nombrado así por Paul Erdős, porque condujo a la relación y posterior matrimonio entre George Szekeres y Esther Klein.

**Teorema 2.3** (Erdős-Szekeres, 1935). *Para todo entero positivo  $c$ , existe un mínimo entero positivo  $N = ES(c)$  tal que si  $n \geq N$  entonces cualquier configuración de  $n$  puntos en el plano, en posición general, contiene  $c$  puntos siendo los vértices de un polígono convexo.*

A partir de entonces la teoría de Ramsey comenzó a crecer y/o evolucionar; muchas generalizaciones y problemas nuevos empezaron a emerger. En esta tesis, en particular, nos resulta interesante presentar dos importantes resultados (ambos generalizaciones al teorema de Van der Waerden) pues el problema de las matrices de Erickson es un caso particular de cada uno de ellos. Usaremos la siguiente notación,

$$\mathbb{Z}^d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z} \text{ para cada } 1 \leq i \leq d\},$$

$$[n]^d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z} \text{ con } 0 \leq x_i \leq n-1 \text{ para cada } 1 \leq i \leq d\}.$$

Dado un conjunto finito  $S \subset \mathbb{Z}^d$ , una copia *homotética* de  $S$  es un conjunto de la forma  $cS + \mathbf{x}$  donde  $c \in \mathbb{N}$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ ; es decir, una copia homotética de  $S$  es la traslación de una dilación de  $S$ .

**Teorema 2.4** (Gallai, 1937<sup>1</sup>). *Para todo entero positivo  $k$ , y todo subconjunto finito  $S \subset \mathbb{N}^d$  existe un mínimo entero  $N = G(S, k)$  tal que toda  $k$ -coloración de  $[n]^d$ , con  $n \geq N$ , contiene una copia homotética de  $S$  monocromática.*

Observemos que el teorema 2.4 es una generalización al teorema de Van der Waerden, pues al tomar  $d = 1$  y  $S = \{0, 1, 2, \dots, t-1\}$ , una copia homotética de  $S$  no es más que una progresión aritmética de longitud  $t$ .

Otra de las generalizaciones más importantes al teorema de Van der Waerden es el teorema de Hales-Jewett, que estudia la existencia de líneas monocromáticas en toda coloración del cubo  $d$ -dimensional. El cubo  $d$ -dimensional es isomorfo al conjunto  $[n]^d$ , sin embargo usaremos la notación que es usual para presentar el teorema de Hales-Jewett.

**Definición 2.1.** *Sean  $d$  y  $n$  enteros positivos. El cubo  $d$ -dimensional sobre  $n$  elementos,  $C_n^d$ , es el conjunto de palabras de longitud  $d$  formadas con elementos del alfabeto  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ , es decir:*

$$C_n^d = \{x_1 x_2 \dots x_d : x_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}.$$

Una línea en  $C_n^d$  es una secuencia de  $n$  puntos distintos  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1} \in C_n^d$  con  $\mathbf{x}_i = x_{i1} x_{i2} \dots x_{id}$ , tal que para cada  $1 \leq j \leq d$  sucede, o bien

$$x_{0j} = x_{1j} = \dots = x_{n-1j},$$

o bien

$$x_{sj} = s \text{ para toda } 0 \leq s \leq n-1.$$

**Ejemplo 2.2.**

$$C_1^1 = \{0\},$$

$$C_t^1 = \{0, 1, \dots, t-1\},$$

$$C_3^2 = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\},$$

$$C_2^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\};$$

y las siguientes son líneas en  $C_3^2$ ,

$$00, 01, 02$$

$$01, 11, 21$$

$$00, 11, 22.$$

<sup>1</sup>Al parecer Tibor Gallai nunca publicó su resultado, y la primera mención de este es en un artículo de Richar Rado en 1943. En [5] se expone una reseña histórica de esta situación.

**Teorema 2.5** (Hales-Jewett,1963). *Para cualesquiera enteros positivos  $k$  y  $t$ , existe un mínimo entero  $N = HJ(k,t)$  tal que toda  $k$ -coloración de las celdas de un cubo  $n$ -dimensional sobre  $t$  elementos,  $C_t^n$ , con  $n \geq N$ , contiene una línea monocromática.*

En el caso particular  $k = 2$ ,  $t = 3$ , el enunciado del teorema de Hales-Jewett es equivalente a decir que el juego “gato” (también conocido como “tres en línea”) no puede terminar en empate si la dimensión,  $n$ , del tablero es suficientemente grande.

El teorema de Hales-Jewett es importante, en particular, porque implica el teorema de Gallai, y por ende también el de Van der Waerden. En este trabajo, nos interesa el teorema de Hales-Jewett, pues una matriz  $[t]^2$  es exactamente un cubo 2-dimensional sobre  $t$  elementos. De modo que, el problema de las matrices de Erickson y sus variantes (que son el tema principal de esta tesis) se pueden generalizar para el cubo  $n$ -dimensional sobre  $t$  elementos. Este aspecto lo explicaremos en la sección 5.

En esta sección no han sido proporcionadas las pruebas a los teoremas mencionados, ya que la finalidad es únicamente mostrar, con ejemplos, la estructura y la filosofía que hay en común detrás de todos ellos, para ser considerados de tipo Ramsey. En la siguiente sección mostraremos el enunciado y la demostración del teorema de Ramsey.

### 2.1.2. El teorema de Ramsey

Observemos que el teorema de la amistad (proposición 2.1) se puede replantear en términos de coloraciones del conjunto de aristas de una gráfica completa, de la siguiente manera. Vamos a construir una gráfica que modele la situación de la reunión de seis personas; podemos representar a cada persona con un vértice, y colocar una arista entre cualesquiera dos, que representa la relación que existe o no entre ellos; esto nos genera a la gráfica completa  $K_6$ , y por último para distinguir la relación referente a *ser conocidos* o *ser desconocidos* vamos a colorear las aristas de esta gráfica con dos colores, digamos que de azul van las aristas que unen vértices de personas que se conocen, y de rojo las aristas entre vértices de personas que no se conocen. (Notemos que la relación que estamos considerando como *conocer a alguien* es simétrica, es decir, si una persona  $A$  conoce a otra persona  $B$ , entonces también  $B$  conoce a  $A$ , y además nadie es conocido ni desconocido de sí mismo).

Antes de propocionar la versión en gráficas del teorema de la amistad y su demostración, veremos que, tal como mencionamos en la sección anterior, con menos de 6 personas no se cumple la conclusión del teorema, y es muy fácil verlo usando una coloración análoga a la construida anteriormente (cada vértice representa a una persona y las aristas se colorean de azul entre vértices de personas

que se conocen y de rojo entre vértices de personas que no se conocen). En el ejemplo 2.1, mostramos que es posible una reunión de 5 personas en la que no haya 3 personas que se conozcan entre sí, ni 3 personas mutuamente desconocidas. Al traducirlo a coloraciones (por aristas) de gráficas estamos afirmando lo siguiente.

**Proposición 2.3.** *Existe una 2-coloración de  $E(K_5)$  libre de triángulos (subgráficas isomorfas a  $K_3$ ) monocromáticos.*

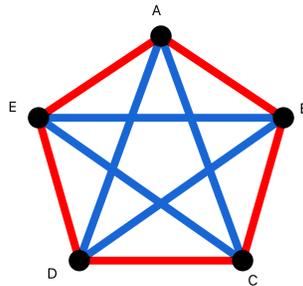


Figura 2.1: Bicoloración de  $K_5$  que modela el ejemplo 2.1.

En la figura 2.1 se muestra la representación en gráficas de la reunión del ejemplo 2.1, notemos que esta coloración es equivalente a la coloración mostrada en la figura 1.1 del capítulo 1. Al ser bicoloraciones de  $E(K_5)$  libres de subgráficas isomorfas a  $K_3$  monocromáticas, exhibir cualquiera de estas, es prueba suficiente de la proposición anterior.

Procederemos a demostrar la proposición 2.1, utilizando que es equivalente al siguiente enunciado.

**Proposición 2.4** (Caso particular del teorema de Ramsey). *Toda 2-coloración de  $E(K_6)$  produce una subgráfica isomorfa a  $K_3$  monocromática.*

*Demostración.* Dada una 2-coloración de  $E(K_6)$ , en que los colores son rojo y azul, al elegir un vértice  $v \in V(K_6)$ , sabemos que este es adyacente a los otros 5 vértices, es decir, hay 5 aristas que inciden en  $v$ . De esas 5 aristas, necesariamente hay 3 rojas o 3 azules (por principio del palomar). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que hay 3 aristas azules, que conectan a  $v$  con los vértices  $x, y, z$ . Ahora, si las tres aristas entre  $x, y, z$  fueran rojas, la subgráfica inducida por  $x, y, z$  sería isomorfa a  $K_3$  y monocromática de color rojo; entonces, supongamos que al menos una de las aristas  $(x, y), (y, z), (z, x)$  es azul. De este modo, los dos vértices de esa arista, sabemos que están conectados a  $v$  mediante una arista azul, así

que con  $v$ , inducen una subgráfica isomorfa a  $K_3$  monocromática de color azul. Como este argumento funciona para toda 2-coloración de  $E(K_6)$ , tenemos que es inevitable producir un triángulo monocromático al 2-colorear dicha gráfica.  $\square$

**Corolario 2.1.** *Si  $n \geq 6$ , entonces toda 2-coloración de  $E(K_n)$  produce una subgráfica isomorfa a  $K_3$  monocromática.*

*Demostración.* Como  $n \geq 6$ ,  $K_n$  contiene necesariamente una subgráfica isomorfa a  $K_6$ , y por la proposición 2.4, se produce una subgráfica isomorfa a  $K_3$  monocromática.  $\square$

El teorema de Ramsey, en su versión más general, es un resultado que se plantea de manera análoga al resultado anterior, pero para hipergráficas en vez de gráficas, y para un número arbitrario de colores en vez de dos colores. En esta tesis, presentaremos únicamente la versión para dos colores en gráficas.

**Teorema 2.6** (Teorema de Ramsey para dos colores, 1930). *Sean  $k, l \in \mathbb{N}$ , tales que  $k, l \geq 2$ . Entonces, existe un mínimo entero  $R = R(k, l)$  con la propiedad de que toda 2-coloración  $f : E(K_R) \rightarrow \{1, 2\}$  produce, o bien una subgráfica monocromática de color 1 isomorfa a  $K_k$ , o bien una subgráfica monocromática de color 2 isomorfa a  $K_l$ .*

*Demostración.* Primero, mostraremos que  $R(k, 2) = k$  y  $R(2, l) = l$ . Dada una 2-coloración de  $E(K_k)$ , si hay al menos una arista de color 2, esa arista induce una subgráfica isomorfa a  $K_2$  monocromática de color 2, y de lo contrario, todas las aristas serían de color 1 y así toda la gráfica es la subgráfica isomorfa a  $K_k$  monocromática de color 1. Con esto se asegura que  $R(k, 2) \leq k$ . Por otro lado,  $K_{k-1}$  admite una coloración libre, a saber, si coloreamos todas las aristas con color 1, no hay subgráficas de color 2 isomorfas a  $K_2$ , y no hay subgráficas de color 1 isomorfas a  $K_k$ . Por lo tanto  $R(k, 2) = k$ . Por argumento análogo tenemos que  $R(2, l) = l$ .

Ahora, procederemos por inducción sobre  $k + l$ , usando como base que  $R(3, 2)$  y  $R(2, 3)$  existen. De modo que, tomaremos  $k + l \geq 6$  y  $k, l \geq 3$ . Como hipótesis, demos por hecho que  $R(k - 1, l)$  y  $R(k, l - 1)$  existen. Vamos a mostrar que  $R(k, l) \leq R(k - 1, l) + R(k, l - 1)$  y con eso queda demostrado el teorema. Sea  $n = R(k - 1, l) + R(k, l - 1)$ , y sea  $f$  una 2-coloración de  $E(K_n)$ ; veamos que  $f$  produce, o bien una subgráfica monocromática de color 1 isomorfa a  $K_k$ , o bien una subgráfica monocromática de color 2 isomorfa a  $K_l$ . Primero fijemos  $v$ , un vértice de  $K_n$ ; sea  $A$  la cantidad de aristas de color 1 que inciden en  $v$  y  $B$  la cantidad de aristas de color 2 que inciden en  $v$ ; de esta manera sabemos que  $A + B = n - 1$ . A partir de esto podemos afirmar que  $A \geq R(k - 1, l)$  o  $B \geq R(k, l - 1)$ , ya que si  $A < R(k - 1, l)$  y  $B < R(k, l - 1)$  entonces  $A + B < n - 1$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $A \geq R(k - 1, l)$ . Sea  $V =$

$\{x \in V(K_n) \mid (x, v) \text{ es una arista de color 1}\}$ ; como  $|V| = A$  entonces  $V$  induce una subgráfica isomorfa a  $K_A$  y como  $A \geq R(k-1, l)$ , entonces la coloración en dicha subgráfica produce, o bien una subgráfica monocromática de color 1 isomorfa a  $K_{k-1}$ , o bien una subgráfica monocromática de color 2 isomorfa a  $K_l$ . Si sucede la segunda posibilidad, ya acabamos; supongamos que sucede la primera, es decir, que hay una subgráfica monocromática de color 1 isomorfa a  $K_{k-1}$ . Como los vértices de esa subgráfica pertenecen a  $V$ , entonces todos ellos son adyacentes a  $v$  mediante una arista de color 1, así que al agregar a  $v$  tenemos una subgráfica monocromática de color 1 isomorfa a  $K_k$ . Y con esto queda demostrado que  $R(k, l) \leq n = R(k-1, l) + R(k, l-1)$ .  $\square$

## 2.2. Números de Ramsey

Notemos que la mayoría de los teoremas que hemos visto en este capítulo hacen mención ya sea a particiones o a coloraciones, que a fin de cuentas hay equivalencia entre estas; y además, garantizan la existencia de un entero a partir del cual se cumplen ciertas propiedades. Estos parámetros que aparecen definidos implícita o explícitamente en cada resultado de tipo Ramsey son muy interesantes de estudiar.

Por ejemplo, en los teoremas 2.1 (de Schur), 2.2 (de Van der Waerden), 2.3 (de Erdős-Szekeres), 2.5 (de Hales-Jewett), y por supuesto 2.6 (de Ramsey), se definen los parámetros  $S(k)$ ,  $W(k, t)$ ,  $ES(c)$ ,  $HJ(k, t)$ , y  $R(k, l)$ , respectivamente. Encontrar estos números en específico es, de hecho, uno de los problemas primordiales de la teoría de Ramsey. Para ser precisos, veamos las definiciones nuevamente.

### Definición 2.2.

- Dado un entero positivo  $k$ , llamamos  $S(k)$  al mínimo entero con la propiedad de que toda  $k$ -coloración de  $\{1, 2, \dots, S(k)\}$  produce un conjunto  $\{x, y, z\} \subset \{1, 2, \dots, S(k)\}$  monocromático que es solución a la ecuación  $x + y = z$ .
- Dada una pareja de enteros positivos  $k$  y  $t$ , llamamos  $W(t, k)$  al mínimo entero con la propiedad de que toda  $k$ -coloración de  $[W(t, k)]$  produce una progresión aritmética monocromática de longitud  $t$ .
- Dado un entero positivo  $c$ , llamamos  $ES(c)$  al mínimo entero con la propiedad de que cualquier configuración de  $ES(c)$  puntos en el plano, en posición general, contiene  $c$  puntos que son los vértices de un polígono convexo.
- Dada una pareja de enteros positivos  $k$  y  $t$ , llamamos  $HJ(k, t)$  al mínimo entero con la propiedad de que toda  $k$ -coloración de las celdas de  $C_t^{HJ(k, t)}$ , contiene una línea combinatoria monocromática.

- Dada una pareja de enteros  $k, l \geq 2$ , llamamos  $R(k, l)$  al mínimo entero con la propiedad de que toda 2-coloración  $f : E(K_{R(k, l)}) \rightarrow \{1, 2\}$  produce, o bien una subgráfica monocromática de color 1 isomorfa a  $K_k$ , o bien una subgráfica monocromática de color 2 isomorfa a  $K_l$ .

Cada uno de estos parámetros,  $S(k)$ ,  $W(t, k)$ ,  $ES(c)$ ,  $HJ(k, t)$ , o  $R(k, l)$ , se conoce por el nombre del teorema al que se refiere. Por ejemplo, a los enteros  $R(k, l)$  se les conoce como *números de Ramsey para dos colores*, y a los enteros  $W(t, k)$  se les llama *números de Van der Waerden*; notemos que los teoremas homónimos afirman la existencia de dichos enteros, más no hablan de cómo construirlos o cuánto valen.

Por lo general, la manera en que se prueba la existencia de estos números es proporcionando cotas exageradamente grandes; mas, una vez asegurada la existencia, resulta natural intentar conocer los valores exactos, o, al menos, mejorar las cotas. Sin embargo, esto resulta tan difícil que, como veremos más adelante, son muy pocos los números exactos que se conocen a la fecha.

En este trabajo de tesis, particularmente en esta sección, hablaremos únicamente de los números de Ramsey para dos colores y de los números de Van der Waerden.

### 2.2.1. Números de Ramsey para dos colores

Comenzaremos con un ejemplo.

**Ejemplo 2.3.** Consideremos el ejercicio de demostrar que  $R(3, 3) = 6$ . Para esto, debemos mostrar dos desigualdades, a saber,  $R(3, 3) \leq 6$  y  $R(3, 3) \geq 6$ .

Por la definición 2.2, sabemos que  $R(3, 3)$  es el mínimo entero  $n$  con la propiedad de que toda bicoloración de  $E(K_n)$  produce un triángulo monocromático. Entonces, para probar que  $R(3, 3) \geq 6$ , es suficiente ver que no toda bicoloración de  $E(K_5)$  produce un triángulo monocromático, lo cual fue mostrado en la proposición 2.3. Para demostrar que  $R(3, 3) \leq 6$ , basta probar que toda bicoloración de  $E(K_6)$  produce un triángulo monocromático, y esto fue probado en la proposición 2.4. Por lo tanto  $R(3, 3) = 6$ .

Como veremos en el siguiente ejemplo, determinar los valores  $R(2, l)$  y  $R(k, 2)$  es bastante sencillo; por esta razón dichos casos se conocen como los casos triviales.

**Ejemplo 2.4.** Consideremos el ejercicio de probar que  $R(2, l) = l$ . Recordemos que, según la definición,  $R(2, l)$  es el mínimo entero  $n$  tal que toda 2-coloración de  $K_n$  produce una subgráfica isomorfa a  $K_2$  de color 1, o una subgráfica isomorfa a  $K_l$  de color 2. Con que exista una arista coloreada con color 1, ya está la subgráfica isomorfa a  $K_2$ , esto implica que para evitarla, todas las aristas deben

ser de color 2. En  $K_{l-1}$ , al colorear todas las aristas de color 2 tampoco se produce la subgráfica isomorfa a  $K_l$  de color 2, entonces  $R(2, l) \geq l$ . Pero en  $K_l$ , al tener todas las aristas del color 2 se tendría la subgráfica isomorfa a  $K_l$  de color 2. Así que  $R(2, l) = l$ . Por un argumento análogo se prueba que  $R(k, 2) = k$ .

En el caso de los números de Ramsey para dos colores, además de los casos triviales que vimos en el ejemplo 2.4, los únicos valores conocidos en la actualidad son los siguientes:

$$\begin{array}{lll} R(3, 3) = 6, & R(3, 4) = 9, & R(3, 5) = 14, \\ R(3, 6) = 18, & R(3, 7) = 23, & R(3, 8) = 28, \\ R(3, 9) = 36, & R(4, 4) = 18, & R(4, 5) = 25. \end{array}$$

Así como fue sencillo probar que  $R(3, 3) = 6$ , también son relativamente sencillos los casos  $R(3, 4) = 9$ ,  $R(3, 5) = 14$  y  $R(4, 4) = 18$ . Usando mucho más ingenio, entre 1961 y 1982, diversos autores contribuyeron a determinar  $R(3, 6) = 18$ ,  $R(3, 7) = 23$  y  $R(3, 9) = 36$ , proporcionando también las cotas inferiores  $R(3, 8) \geq 28$ , y  $R(4, 5) \geq 25$ . Finalmente, en 1992 y 1995, MacKey en colaboración con Radziszowski y Zhang (respectivamente) lograron probar  $R(3, 8) \leq 28$  y  $R(4, 5) \leq 25$  (respectivamente). Estos han sido los últimos logros obtenidos de acuerdo con el “Dinamic Survey” [7]. Vale la pena mencionar que McKay y Radziszowski comentan en su artículo lo siguiente “The two implementations required 3.2 years and 6 years of cpu time on Sun Microsystems computers (mostly Sparcstation SLC). This was achieved without undue delay by employing a large number of computers (up to 110 at once)”.

Más allá de la determinación exacta de los números de Ramsey, el problema de determinar el comportamiento asintótico de dichos parámetros es uno de los problemas más importantes en el área. Por ejemplo, con respecto a los números de Ramsey para dos colores,  $R(k, l)$ , en el caso en que  $k = l$ , las mejores cotas que se conocen actualmente son:

$$[1 + o(1)] \frac{\sqrt{2}k}{e} 2^{\frac{k}{2}} \leq R(k, k) \leq k^{-(c \log k)/(\log \log k)} 4^k. \quad (2.1)$$

Notemos que en ambas cotas el término dominante es exponencial en  $k$ , pero con diferentes bases: la cota inferior se comporta asintóticamente como  $(\sqrt{2})^k$ , mientras que la cota superior se comporta asintóticamente como  $(4)^k$ . La cota inferior en (2.1) fue mostrada por Spencer en 1975, mientras que la cota superior la probó Conlon en 2009.

El teorema de Ramsey en su versión general nos habla de la existencia de números de Ramsey para más de dos colores, sin embargo, en este trabajo no ahondaremos más en ese tema.

### 2.2.2. Números de Van der Waerden

Como veremos en el siguiente capítulo, en esta tesis nos interesamos particularmente por los números de Van der Waerden, pues se usarán para construir matrices de Erickson, (ver definición 3.1) que es el tema principal de este trabajo. Comencemos con un ejemplo.

**Ejemplo 2.5.** *Consideremos el ejercicio de demostrar que  $W(3, 2) = 9$ . Para esto, análogamente al ejemplo anterior, debemos mostrar que  $W(3, 2) \geq 9$  y que  $W(3, 2) \leq 9$ .*

*Para probar que  $W(3, 2) \geq 9$ , es suficiente ver que existe una bicoloración de  $[8]$  libre de  $AP(3)$  monocromáticas, lo cual mostramos en el ejemplo 1.4. Para demostrar que  $W(3, 2) \leq 9$ , vamos a suponer que existe una coloración de  $[9]$  libre de  $AP(3)$  monocromáticas, y llegar a una contradicción. Supongamos que  $f : [9] \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$  es libre de  $AP(3)$  monocromáticas. Consideremos las imágenes de 2 y 4 bajo  $f$ . Si el 2 y el 4 fueran del mismo color, por decir, rojos, esto obligaría a que el 0 fuera azul, por la  $AP(3)$  formada por  $(0, 2, 4)$  pero así mismo están obligados a ser azules el 3 y el 6 por  $(2, 3, 4)$  y por  $(2, 4, 6)$  respectivamente. Mas esto provocaría que  $(0, 3, 6)$  sea una  $AP(3)$  monocromática de color azul. De esto concluimos que 2 y 4 no tienen el mismo color. Por argumentos análogos, podemos afirmar que 3 y 5 no coinciden en color y tampoco 4 y 6. Ahora, sin perder generalidad podemos suponer que el color de 2 es rojo. Dadas estas restricciones existen exactamente dos posibilidades de coloración para el intervalo  $[2, 6]$  bajo la coloración  $f$ , las cuales se muestran a continuación.*

$$(2, 3, 4, 5, 6),$$

$$(2, 3, 4, 5, 6).$$

*Notemos que, por simetría en el intervalo  $[0, 8]$ , ambas posibilidades son equivalentes. Daremos por hecho que se da la primera de ellas. Así, al estar 2 y 3 coloreados de rojo, y recordando que supusimos que  $f$  es libre de  $AP(3)$ , sabemos que 1 debe ser de color azul:*

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

*Ahora con el 1 y el 4 azules, el 7 debe ser rojo:*

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).$$

*El 8 necesariamente es azul, ya que de otra manera  $(6, 7, 8)$  sería una  $AP(3)$  roja:*

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).$$

Ahora veamos que, si el 0 fuera de color azul, se forma  $(0, 4, 8)$  de color azul. Y si el 0 es rojo,  $(0, 3, 6)$  es AP(3) de color rojo. Por lo que la coloración no puede ser libre de AP(3) monocromáticas.

Con respecto a los números de Van der Waerden los casos que se consideran triviales son los correspondientes a  $W(2, k)$ , que se determinan en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.6.** Consideremos el ejercicio de demostrar que  $W(2, k) = k + 1$ , para lo cual tenemos que probar que  $W(2, k) \geq k + 1$  y que  $W(2, k) \leq k + 1$ . Por la definición,  $W(2, k)$  es el mínimo entero  $n$  tal que toda  $k$ -coloración del intervalo  $[n]$  produce una progresión aritmética de longitud 2 monocromática. Consideremos la coloración del intervalo  $[k]$  en que cada elemento tiene asignado distinto color, de esta manera no puede haber AP(2) monocromática, y esto implica que  $W(2, k) \geq k + 1$ . Ahora, al colorear el intervalo  $[k + 1]$  con  $k$  colores, por el principio del palomar, sabemos que habrá dos elementos del mismo color, digamos  $i$  y  $j$ , entonces estos forman una progresión aritmética de longitud 2 (con distancia  $|j - i|$ ) monocromática. De modo que  $W(2, k) \leq k + 1$  y en conclusión,  $W(2, k) = k + 1$ .

Además del caso trivial  $W(2, k) = k + 1$ , visto en el ejemplo 2.6, los únicos valores exactos conocidos en la actualidad para los números de Van der Waerden son los siguientes:

$$\begin{aligned} W(3, 2) &= 9, & W(3, 3) &= 27, & W(3, 4) &= 76, \\ W(4, 2) &= 35, & W(4, 3) &= 293, \\ W(5, 2) &= 178, \\ W(6, 2) &= 1132. \end{aligned}$$

Los casos más sencillos, correspondientes a progresiones aritméticas de longitud tres con dos y tres colores, y progresiones aritméticas de longitud cuatro con dos colores fueron determinados por Chvátal y Vasek en 1970. En esa misma década fueron encontrados  $W(3, 4)$  y  $W(5, 2)$ , mientras que  $W(6, 2)$  y  $W(4, 3)$  no fueron determinados sino hasta 2008 y 2012 respectivamente con ayuda de métodos computacionales. Todo lo anterior se puede consultar en [8].

Los números de Van der Waerden para 2-coloraciones, en ocasiones se escriben con un único parámetro; esto es, se suele escribir  $W(t)$  para referirse a  $W(t, 2)$ . Por ejemplo,  $W(3) = 9$ . En este caso particular las mejores cotas conocidas son:

$$(t - 1)2^{t-1} \leq W(t) \leq 2^{2^{2^{2^{t+9}}}}, \quad (2.2)$$

donde la cota superior fue probada por Gowers en el 2001, mientras que la cota inferior funciona solo cuando  $t - 1$  es primo y fue mostrada por Berlekamp en 1968. Las referencias de estos resultados se pueden consultar en [2].

## 2.3. Variantes a la teoría de Ramsey

Como hemos visto en las últimas páginas, los resultados clásicos de la teoría de Ramsey se ocupan de estudiar condiciones bajo las cuales se pueda garantizar la existencia de alguna subestructura monocromática. Existen diversas variantes interesantes a la teoría de Ramsey que estudian la existencia de subestructuras con otro tipo de patrones de color. En esta tesis, nos interesamos en dos de ellas: el estudio de la existencia de estructuras heterocromáticas, correspondiente a la teoría anti-Ramsey; y el estudio de la existencia de estructuras balanceadas, correspondiente a la teoría de Ramsey balanceada. En esta sección presentaremos resultados prototipo en ambas variantes. Sin embargo, no daremos ninguna prueba, pues nuestro objetivo es únicamente entender el tipo de problemas que se estudian mas no profundizar en las técnicas específicas de cada situación. En el siguiente capítulo, se estudiará el problema de las Matrices de Erickson en sus versiones monocromática, heterocromática y balanceada.

### 2.3.1. Teoría anti-Ramsey

A diferencia de la teoría de Ramsey, en la teoría anti-Ramsey por lo general no se puede garantizar la existencia de estructuras heterocromáticas con solo pedir que el universo sea grande. Es decir, en muchos casos, existen coloraciones sin estructuras heterocromáticas para universos arbitrariamente grandes. Veamos un ejemplo a continuación.

**Ejemplo 2.7.** *Consideremos coloraciones del intervalo inicial de números enteros no negativos,  $[n]$ , y las progresiones aritméticas de longitud 3 como subestructura. Veamos que para todo  $n$  entero positivo existe una 3-coloración de  $[n]$  libre de  $AP(3)$  heterocromáticas. Si  $n$  es par, la coloración*

$$0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$$

*es libre de  $AP(3)$  heterocromáticas. Si  $n$  es impar, la coloración*

$$0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$$

*es libre de  $AP(3)$  heterocromáticas.*

Independientemente de lo grande que sea  $n$ , se puede evitar la existencia de  $AP(3)$  heterocromáticas usando tres colores. Por esta razón, la teoría anti-Ramsey se ocupa de buscar características de la coloración que fueren la existencia de estructuras heterocromáticas. Por ejemplo, un típico resultado en teoría anti-Ramsey tiene la siguiente forma:

**Teorema 2.7** (Axenovich, Fon-Der-Flaass, [1]). *Para toda  $n \geq 3$ , toda 3-coloración de  $[n]$  tal que  $\min\{|C_1|, |C_2|, |C_3|\} > \frac{n}{6}$ , contiene una progresión aritmética heterocromática de longitud 3.*

Los resultados, como el anterior teorema, en que se garantiza la existencia de una estructura heterocromática bajo la condición de que las clases cromáticas sean suficientemente grandes, se conocen como *resultados positivos* en teoría anti-Ramsey, y se consideran los análogos a los clásicos teoremas en teoría de Ramsey.

Lo que sucede en el teorema anterior para progresiones aritméticas de longitud tres, utilizando 3 colores, no sucede para progresiones aritméticas más largas. En otras palabras, no existe un resultado positivo para ninguna  $k \geq 4$  considerando  $k$ -coloraciones y progresiones aritméticas de  $k$  términos.

Para poder aseverar que no existe un resultado positivo (con respecto a un cierto universo, un cierto número de colores, y una cierta estructura a estudiar) requerimos probar un *resultado negativo*. El siguiente teorema es un típico resultado negativo en teoría anti-Ramsey.

**Teorema 2.8** (Conlon, Jungić, Radoičić, [4]). *Para todo entero positivo  $n$ ,  $n \equiv 0 \pmod{8}$  existe una 4-coloración equipartita de  $[n]$  libre de progresiones aritméticas de longitud 4 heterocromáticas.*

Observemos que el teorema anterior imposibilita la existencia de un resultado positivo en el caso de 4-coloraciones y  $AP(4)$ , pues si para una infinidad de valores de  $n$  existe una coloración equipartita libre de  $AP(4)$  heterocromáticas, ya ninguna densidad de las clases cromáticas puede funcionar para obtener un resultado positivo. Es decir, no podemos esperar que un enunciado del tipo “para toda  $n \geq N$ , toda 4-coloración de  $[n]$  tal que  $\min\{|C_1|, |C_2|, |C_3|, |C_4|\} > \frac{1}{q}n$ , donde  $0 < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{4}$ , contiene una  $AP(4)$  heterocromática” sea verdadero; pues, para cualquier  $N$  podemos elegir  $n'$  el mínimo entero que cumple  $n' \geq N$  y  $n' \equiv 0 \pmod{8}$ , y por el teorema 2.8 sabemos que existe  $f$ , una 4-coloración equipartita de  $[n']$  libre de progresiones aritméticas de longitud 4 heterocromáticas, y notemos que una 4-coloración equipartita satisface  $\min\{|C_1|, |C_2|, |C_3|, |C_4|\} > \frac{1}{q}n$  para cualquier fracción  $\frac{1}{q}$  con  $0 < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{4}$ .

Para  $k \geq 5$  y  $n$  arbitrariamente grande, también existen  $k$ -coloraciones equipartitas libres de progresiones aritméticas de longitud  $k$  heterocromáticas de  $[n]$  para infinitos valores de  $n$ .

### 2.3.2. Teoría de Ramsey balanceada

Así como en la teoría de Ramsey se estudia la existencia de estructuras monocromáticas en universos coloreados y en la teoría anti-Ramsey se estudia la existencia de estructuras heterocromáticas, en la teoría de Ramsey balanceada,

naturalmente, estudiaremos la existencia de subestructuras balanceadas bajo diferentes condiciones. Aunque se pueden considerar más colores, en esta tesis solo estudiaremos 2-coloraciones, de modo que una subestructura balanceada es un objeto con un número par de elementos que han sido coloreados la mitad del primer color y la mitad del segundo color. Comenzaremos con un ejemplo.

**Ejemplo 2.8.** *Consideremos coloraciones del intervalo inicial de números enteros no negativos,  $[n]$ , y progresiones aritméticas de longitud 4 como subestructura. Para todo  $n \geq 5$ , veamos que existe una 2-coloración de  $[n]$  libre de  $AP(4)$  balanceada. Si  $n \not\equiv 1 \pmod{3}$ , la coloración*

$$0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$$

*es libre de  $AP(4)$  balanceadas.*

*Si  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , la coloración*

$$0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$$

*es libre de  $AP(4)$  balanceadas.*

Notemos que al igual que en la teoría anti-Ramsey, en la teoría de Ramsey balanceada no podemos garantizar la existencia de estructuras balanceadas con tan solo pedir que el universo sea grande. Del mismo modo que en la teoría anti-Ramsey, en la teoría de Ramsey balanceada estudiaremos la existencia de estructuras balanceadas con la condición de que las clases cromáticas sean suficientemente grandes. En particular, con respecto a 2-coloraciones, un resultado positivo es aquel que garantiza la existencia de subestructuras balanceadas para toda 2-coloración balanceada de un cierto universo. Por ejemplo, el siguiente teorema es un resultado positivo en teoría de Ramsey balanceada, en el cual se establece que, al considerar 2-coloraciones balanceadas de  $[n]$ , las progresiones aritméticas balanceadas de longitud 4 son inevitables.

**Teorema 2.9** (Caro, Hansberg, Montejano, [3]). *Para todo entero  $n \geq 4$  par, toda 2-coloración balanceada de  $[n]$  produce una  $AP(4)$  balanceada.*

El resultado anterior se puede extender a progresiones aritméticas de longitud par,  $k \geq 4$ . Más aún, las progresiones aritméticas balanceadas de longitud par  $k$  y diferencia  $d = 1$  son inevitables siempre y cuando  $n$  sea suficientemente grande en función de  $k$ . A una progresión aritmética de longitud  $k$  y diferencia  $d = 1$  le llamaremos un  $k$ -bloque; es decir, un  $k$ -bloque es un subconjunto de  $[n]$  que consta de  $k$  enteros consecutivos.

**Teorema 2.10** (Caro, Hansberg, Montejano, [3]). *Sea  $k$  un entero positivo par. Toda 2-coloración balanceada de  $[n]$  produce un  $k$ -bloque balanceado (y por lo tanto una  $AP(k)$  balanceada) siempre que:*

- $n \geq \frac{k^2}{4} - \frac{k}{2} + 2$  si  $k \equiv 0 \pmod{4}$ ;
- $n \geq \frac{k^2}{4} + 1$  si  $k \equiv 2 \pmod{4}$ .

Por ejemplo, si  $k = 4$  recuperamos el enunciado del teorema 2.9; si  $k = 6$  lo que nos dice el teorema 2.10 es que toda 2-coloración balanceada de  $[n]$  produce un 6-bloque balanceado siempre que  $n \geq 10$ .

Debemos mencionar que el teorema 2.10 no se puede mejorar en el sentido de que, para  $k \equiv 0 \pmod{4}$ , si  $n < \frac{k^2}{4} - \frac{k}{2} + 2$  entonces existen 2-coloraciones balanceadas de  $[n]$  libres de  $k$ -bloques balanceados; y para  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , si  $n < \frac{k^2}{4} + 1$  entonces existen 2-coloraciones balanceadas de  $[n]$  libres de  $k$ -bloques balanceados. Por ejemplo, para  $k = 6$  la siguiente coloración de  $[8]$  es balanceada y es libre de 6-bloques balanceados:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Para finalizar esta sección diremos que el problema de determinar la  $n$  exacta a partir de la cual toda 2-coloración balanceada de  $[n]$  produce una  $AP(k)$  balanceada es un problema abierto.

# Capítulo 3

## Matrices de Erickson

En este capítulo vamos a hacer uso de las definiciones dadas en la sección 1.2.3, con lo cual ubicaremos dentro de la teoría de Ramsey un problema planteado por Martin J. Erickson, y enunciaremos su solución. A partir de eso consideraremos, en el capítulo 4, las variantes a la teoría de Ramsey expuestas en la sección 2.3, para plantear otros dos problemas modificando las condiciones del primero.

### 3.1. El problema planteado por Erickson

En el año 1996 fue publicado el libro *Introduction to Combinatorics*, de Martin J. Erickson, en el cual el autor plantea el siguiente problema.

**Problema 3.1.** *Encontrar el mínimo entero  $n$  que cumple que si  $n^2$  puntos en arreglo de  $[n] \times [n]$  son coloreados con dos colores, entonces hay cuatro puntos de un mismo color que son vértices de un cuadrado cuyos lados son paralelos a los ejes.*

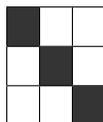
Es claro que es un problema de tipo Ramsey y, de hecho, puede ser pensado como una extensión a dos dimensiones del teorema de Van der Waerden. Haciendo uso de las definiciones de la sección 1.2.3 tenemos que lo que se busca es el mínimo entero para el cual toda 2-coloración de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado monocromático. Notemos que para encontrar la solución a este problema, es útil plantearlo de la siguiente forma equivalente.

**Problema 3.2.** *Encontrar el mínimo entero  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces toda 2-coloración de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado monocromático.*

A partir de este nuevo planteamiento, es pertinente utilizar la siguiente definición, que es además la que da el nombre a esta tesis.

**Definición 3.1.** Una matriz de Erickson es una matriz bicolorada libre de 2-cuadrados monocromáticos.

Por ejemplo, la 2-coloración de  $[3]^2$  dada en el ejemplo 1.7 es una matriz de Erickson.



La pregunta planteada en el problema 3.1 es, pues,

¿qué tan grande puede ser una matriz de Erickson cuadrada?

El propio Erickson sugirió en su libro que no podían existir matrices de Erickson cuadradas arbitrariamente grandes, y planteó como ejercicio probar que si  $[n]^2$  es una matriz de Erickson entonces

$$n \leq 9(2^{81} + 1)(2^{(2^{81}+1)^2} + 1), \quad (3.1)$$

lo cual es una cota exageradamente grande en vista del número exacto que presentaremos más adelante.

Las siguientes dos secciones están enfocadas en la historia de la resolución del problema 3.1.

## 3.2. El teorema de Axenovich y Manske

En 2008, fue publicado por Maria Axenovich y Jacob Manske un artículo en el que se prueba, entre otras cosas, que el mínimo entero  $n_0$  que da solución al problema 3.2, está acotado como sigue.

**Teorema 3.1** (Axenovich, Manske, [2]). *Sea  $n_0$  el mínimo entero tal que para toda  $n \geq n_0$ , toda 2-coloración de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado monocromático. Entonces,*

$$13 \leq n_0 \leq W(8). \quad (3.2)$$

En otras palabras, el teorema 3.1 nos dice por un lado que existen matrices de Erickson de  $12 \times 12$ , y por otro que si  $n \geq W(8)$  no existen matrices de Erickson de  $n \times n$ . Recordemos que  $W(8)$  es el número de Van der Waerden para dos colores, esto es el mínimo entero tal que toda 2-coloración del intervalo  $[W(8)]$  produce una  $AP(8)$  monocromática. Recordemos también que no se conoce el valor exacto de  $W(8)$ , siendo la mejor cota superior la expuesta en (2.2):

$$W(8) \leq 2^{2^{2^{2^{17}}}}.$$

### 3.2.1. La cota inferior

Para afirmar que la cota inferior en (3.2) es válida, se muestra una construcción de una matriz de Erickson de  $12 \times 12$ . De hecho, los autores describen una construcción más general en la que, si  $n = \lceil (W(k, 4) - 1)/3 \rceil$  se obtiene una  $k$ -coloración de  $[n]^2$  libre de 2-cuadrados monocromáticos. En esta tesis, veremos únicamente el caso particular en que  $k = 2$ , usando que  $W(2, 4) = 35$  y entonces  $n = \lceil (35 - 1)/3 \rceil = 12$ . Recordemos que, por definición,  $W(2, 4) = 35$  significa que 35 es el mínimo entero tal que toda 2-coloración de  $[35]$  produce alguna  $AP(4)$  monocromática, es decir, que existe alguna 2-coloración de  $[34]$  libre de  $AP(4)$  monocromáticas.

Sea  $\chi : [34] \rightarrow \{1, 2\}$  una coloración libre de  $AP(4)$  monocromáticas. A partir de esta coloración, definimos  $\chi' : [12]^2 \rightarrow \{1, 2\}$  como

$$\chi'((x, y)) = \chi(x + 2y).$$

Veamos ahora que  $\chi'$  nos da una matriz de Erickson. Por contradicción, supongamos que  $\chi'$  produce un 2-cuadrado monocromático, esto es, que existen  $(x, y)$  y  $d \in \mathbb{N}$  de manera que

$$\chi'((x, y)) = \chi'((x + d, y)) = \chi'((x, y + d)) = \chi'((x + d, y + d)).$$

Por como fue definida  $\chi'$  tendríamos que

$$\chi(x + 2y) = \chi(x + d + 2y) = \chi(x + 2y + 2d) = \chi(x + d + 2y + 2d),$$

esto es, que la coloración  $\chi$  les asignó el mismo color a

$$x + 2y, x + 2y + d, x + 2y + 2d, x + 2y + 3d,$$

formando una progresión aritmética, de diferencia  $d$  y longitud 4, monocromática; lo cual contradice la elección de  $\chi$  libre de  $AP(4)$  monocromáticas.

En la siguiente imagen se muestra una matriz de  $12 \times 12$  y en cada casilla colocamos el entero con el cual coincide el color asignado de acuerdo a la igualdad  $\chi'((x, y)) = \chi(x + 2y)$ , con ese acomodo es fácil notar que las 4 esquinas de cualquier submatriz cuadrada siempre coinciden con enteros en progresión aritmética.

0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33

Ahora tomando específicamente una 2-coloración del intervalo [34] libre de  $AP(4)$  monocromáticas:

○ ● ○ ● ● ● ○ ○ ○ ● ○ ○ ● ○ ● ● ● ○ ○ ○ ● ○ ○ ● ○ ● ● ● ○ ○ ○ ● ○ ●

construimos a partir de ella la matriz de Erickson deseada:

	■		■	■	■			■	■		
■			■		■	■	■			■	■
		■		■		■	■	■			
■				■		■		■	■	■	
■		■	■	■			■			■	■
		■		■	■	■				■	
			■		■	■	■		■		
				■		■		■	■	■	
■	■			■		■		■		■	■
	■	■	■	■			■		■		
	■		■	■	■	■			■		

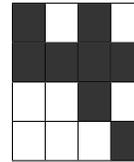
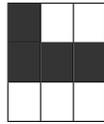
Notemos que toda 2-coloración del intervalo, que sea libre de  $AP(4)$  nos da una 2-coloración adecuada para una matriz de Erickson, pero no de toda matriz de Erickson se puede obtener una coloración del intervalo.

### 3.2.2. La cota superior

Para afirmar que la cota superior en (3.2) es válida, se prueba que si  $n \geq W(8)$  entonces toda 2-coloración de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado monocromático. Equivalentemente, no existen matrices de Erickson,  $f : [n]^2 \rightarrow \{1, 2\}$ , si  $n \geq W(8)$ . La idea principal de Axenovich y Manske fue analizar qué tan grande puede ser una matriz de Erickson con la propiedad adicional de que su renglón central es constante. El *renglón central* de una matriz  $[n]^2$  es el renglón:

$$\left\{ \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 0 \right), \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \right), \dots, \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n-1 \right) \right\}.$$

Por ejemplo, las siguientes son matrices de Erickson de  $3 \times 3$  y  $4 \times 4$  respectivamente, con renglón central constante:



Con una larga prueba exhaustiva de casos (que no reproduciremos en esta tesis), los autores de [2] prueban lo siguiente.

**Lema 3.1** (Axenovich, Manske, [2]). *Si  $f : [n]^2 \rightarrow \{1, 2\}$  es una matriz de Erickson con renglón central constante, entonces  $n \leq 7$ .*

En otras palabras el lema 3.2 nos dice que no existen matrices de Erickson con renglón central constante para  $n \geq 8$ , de lo cual se infiere inmediatamente que no existen matrices de Erickson para  $n \geq W(8)$ . Para ver esto supongamos, por contradicción, que  $f : [n]^2 \rightarrow \{1, 2\}$  es una matriz de Erickson con  $n \geq W(8)$ . Entonces, por el teorema de Van der Waerden, todas las columnas (y renglones) de  $[n]^2$  contienen una progresión aritmética monocromática de longitud 8. En particular, sea

$$\left\{ \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, a \right), \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, a+d \right), \dots, \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, a+7d \right) \right\}$$

una progresión aritmética monocromática en el renglón central. Observemos que así la submatriz

$$\left\{ \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + jd, a + id \right) \mid 0 \leq i \leq 7, -3 \leq j \leq 4 \right\},$$

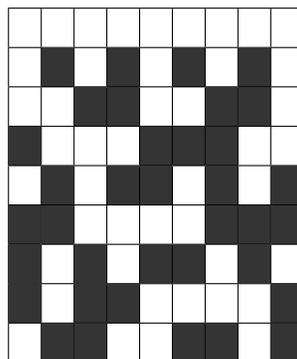
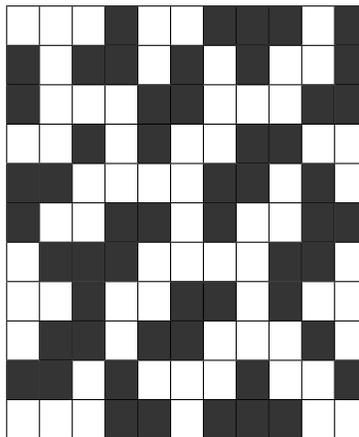
isomorfa a  $[8]^2$ , tiene su renglón central constante, por lo que según el lema 3.2 no puede ser de Erickson, lo cual es una contradicción pues todas las submatrices de una matriz de Erickson deben ser de Erickson.

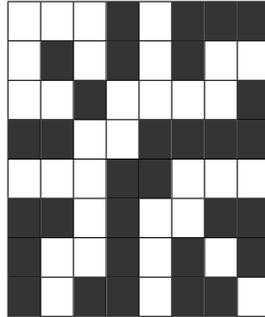
### 3.3. El resultado de Bacher y Eliahou

En 2010, Roland Bacher y Shalom Eliahou resolvieron por completo el problema de las matrices de Erickson (problema 3.2), determinando el valor exacto de  $n_0$ . Usando un ingenioso algoritmo de vuelta atrás (*backtracking algorithm*), los autores prueban (sorprendentemente, en vista de la mejor cota superior conocida hasta entonces) que

$$n_0 = 15. \quad (3.3)$$

En un principio, Bacher y Eliahou pretendían únicamente mejorar la cota inferior dada en (3.2). De modo que se plantearon el problema de construir, con ayuda de la computadora, la matriz de Erickson cuadrada más grande posible, con la esperanza de encontrar alguna de tamaño  $13 \times 13$ . Con el objetivo de reducir el volumen de sus cálculos, e inspirados el lema 3.2 de Axenovich y Manske, los autores comenzaron por estudiar el máximo  $n$  posible tal que existe una matriz  $[n]^2$  de Erickson en los siguientes tres casos particulares: *matrices con diagonal constante*, *matrices con primer renglón constante*, y *matrices simétricas*. Por ejemplo, las siguientes son matrices de Erickson de estos tres tipos, respectivamente:





Las tres matrices antes mostradas son extremas en el sentido del siguiente lema probado por medios computacionales.

**Lema 3.2.** [Bacher, Eliahou, [5]] Si  $f : [n]^2 \rightarrow \{1, 2\}$  es una matriz de Erickson

- con diagonal constante, entonces  $n \leq 11$ ;
- con primer renglón constante, entonces  $n \leq 9$ ;
- simétrica, entonces  $n \leq 8$ .

A partir de este lema, los autores logran probar el siguiente teorema que es el resultado principal en [5].

**Teorema 3.2** (Bacher, Eliahou, [5]). *Existen matrices de Erickson de dimensiones  $13 \times m$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , y  $14 \times 14$ . No existen matrices de Erickson de dimensiones  $14 \times 15$ .*

Así se cierra la historia del problema de las matrices de Erickson.

# Capítulo 4

## Variantes al problema de las matrices de Erickson

En el capítulo 3, hemos visto que si  $n$  es un entero tal que  $n \geq 15$ , entonces toda 2-coloración de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado monocromático. En otras palabras, los 2-cuadrados monocromáticos son inevitables en toda 2-coloración de un tablero siempre que este sea suficientemente grande.

Esto responde exactamente el problema de Erickson, sin embargo, veamos que modificando alguna especificación a dicho planteamiento, surgen más problemas interesantes. Una opción, es la posibilidad de modificar la cantidad de colores o el tipo de *cuadrado*, lo cual no es tema de esta tesis.

Otra posibilidad es cambiar la condición cromática, que es el interés particular de este trabajo. En el presente capítulo nos proponemos estudiar dos problemas análogos al problema de Erickson. El primero, considerando la existencia de 2-cuadrados heterocromáticos, y el segundo considerando la existencia de 2-cuadrados balanceados. Es importante recordar que todas las coloraciones que consideramos en este capítulo son estrictas, es decir, se usan todos los colores disponibles.

### 4.1. Versión heterocromática

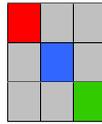
Para estudiar la existencia de 2-cuadrados heterocromáticos vamos a considerar 4-coloraciones de  $[n]^2$ .

**Pregunta 4.1.** *¿Será cierto que existe un mínimo entero  $n_1$ , tal que si  $n \geq n_1$  entonces toda 4-coloración de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado heterocromático?*

Como es natural en la teoría anti Ramsey, la respuesta a la pregunta 4.1 es negativa. No es difícil construir 4-coloraciones (estrictas) de  $[n] \times [n]$  libres de 2-cuadrados heterocromáticos para toda  $n \geq 3$ .

**Ejemplo 4.1.** Sea  $n \geq 3$ , consideremos la coloración  $f : [n]^2 \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  tal que los tres primeros elementos de la diagonal principal son coloreados con los tres primeros colores, y todos los demás elementos del tablero son coloreados con el color 4. Un 2-cuadrado heterocromático, debe contener un elemento de cada color; esto no es posible porque hay un único elemento de color 1, un único elemento de color 2 y un único elemento de color 3 y, al estar los tres en la misma diagonal, es claro que no forman las esquinas de una submatriz cuadrada.

Aquí mostramos el dibujo para  $n = 3$ , pero la coloración funciona para  $n \geq 3$ .



Observemos que en la coloración descrita en el ejemplo 4.1 existen clases cromáticas muy pequeñas, lo cual nos lleva a plantearnos la siguiente pregunta.

**Pregunta 4.2.** ¿Será cierto que existe un mínimo entero  $n_1$ , tal que si  $n \geq n_1$  entonces toda 4-coloración balanceada o cuasibalanceada de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado heterocromático?

La respuesta a la pregunta 4.2 es también negativa, consecuencia del siguiente resultado que es una de las aportaciones originales de esta tesis.

**Teorema 4.1.** Para todo entero  $n \geq 3$ , existe una 4-coloración balanceada o cuasibalanceada de  $[n]^2$  libre de 2-cuadrados heterocromáticos.

*Demostración.* El resultado se infiere directamente de los siguientes lemas.  $\square$

**Lema 4.1.** Para todo entero  $n$ , toda 4-coloración de  $[n]^2$  en la que cada diagonal es monocromática es libre de 2-cuadrados heterocromáticos.

*Demostración.* Todo 2-cuadrado tiene dos esquinas que pertenecen a una misma diagonal, así que en cada 2-cuadrado un color se repite porque toda diagonal es monocromática, y por lo tanto, no hay 2-cuadrados heterocromáticos.  $\square$

**Lema 4.2.** Para todo entero  $n \geq 4$ , par, existe una 4-coloración balanceada de  $[n]^2$  con todas las diagonales monocromáticas.

*Demostración.* Las diagonales de  $[n]^2$  tienen, por orden, los tamaños

$$1, 2, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 2, 1;$$

así que encontrar una 4-coloración balanceada de  $[n]^2$ , en la que cada diagonal sea monocromática, es equivalente a encontrar una 4-coloración del multiconjunto

$$\{1, 2, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 2, 1\},$$

en la que la suma de los elementos de toda clase cromática sea la misma.

Caso (i) Si  $n$  es de la forma  $4k$ .

Notemos que los números del 1 al  $n-1$  aparecen dos veces cada uno, entonces cada  $i$  tal que  $1 \leq i \leq n-1$  se puede emparejar con  $n-i$  formando así  $n-1$  parejas de suma  $n$  y dejando solo al elemento  $n$ , esto implica que tenemos exactamente  $n$  conjuntos de suma  $n$ :

$$\{1, n-1\}, \{2, n-2\}, \dots, \{n-2, 2\}, \{n-1, 1\}, \{n\}$$

.

Como  $n = 4k$ , podemos tomar exactamente  $k$  de esos conjuntos para cada una de las cuatro clases cromáticas, y así los elementos de cada clase cromática suman exactamente  $kn = (n^2)/4$ .

Caso (ii) Si  $n$  es de la forma  $4k+2$ .

El multiconjunto a colorear es de la forma

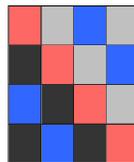
$$\{1, 2, \dots, 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+1, 4k, \dots, 2, 1\},$$

el cual contiene al multiconjunto  $\{1, 2, \dots, 4k-1, 4k, 4k-1, \dots, 2, 1\}$  y este, como se explica en el *Caso (i)* puede ser 4-coloreado de manera que en cada clase cromática, la suma de sus elementos sea  $kn$ . Nos faltarían por colorear los elementos  $4k$ ,  $4k+1$ ,  $4k+2$  y  $4k+1$ ; lo hacemos de la siguiente manera, elegimos una de las clases cromáticas que contenga un elemento 1, y lo intercambiamos por el  $4k+2$  que nos faltaba por colorear, de esta manera, la suma de los elementos de dicha clase cromática aumenta en  $4k+1$ , y nos faltan por colorear los elementos 1,  $4k$ ,  $4k+1$  y  $4k+1$ , así de las tres clases cromáticas restantes (en las que no se ha modificado su suma), en una agregamos el  $4k$  y el 1 y en las otras dos un  $4k+1$  en cada una, de modo que en las cuatro clases la suma total aumentó en  $4k+1$  y por lo tanto, tienen igual suma.

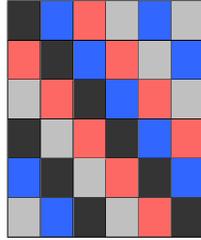
□

En el siguiente ejemplo mostramos las coloraciones descritas en los casos concretos de  $n = 4$  y  $n = 6$ .

**Ejemplo 4.2.**  $n = 4$  :



$n = 6 :$



**Lema 4.3.** *Para todo entero  $n \geq 3$  impar, existe una 4-coloración cuasi-balanceada de  $[n]^2$  con todas las diagonales monocromáticas.*

*Demostración.* Los tamaños de las diagonales de  $[n]^2$  son, en orden,

$$1, 2, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 2, 1.$$

Notemos que si encontramos una 4-coloración del multiconjunto

$$\{1, 2, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 3, 2\},$$

en la que la suma de los elementos de toda clase cromática sea la misma, esto nos daría una 4-coloración de todas las diagonales, excepto una de tamaño 1; si le asignamos a esta alguno (cualquiera) de los cuatro colores, obtenemos una 4-coloración cuasibalanceada de  $[n]^2$  con todas las diagonales monocromáticas.

Caso (i) Si  $n$  es de la forma  $4k + 1$ .

Cada  $i$  tal que  $1 \leq i \leq n-1$  se puede emparejar con  $n+1-i$ , obteniendo así  $n-1$  parejas de suma  $n+1$ :

$$\{1, n\}, \{2, n-1\}, \dots, \{n-2, 3\}, \{n-1, 2\}.$$

Como  $n-1 = 4k$ , podemos seleccionar exactamente  $k$  de esos conjuntos para cada una de las cuatro clases cromáticas, y en cada una de ellas la suma de sus elementos es igual a  $k(n+1)$ .

Caso (ii) Si  $n$  es de la forma  $4k + 3$ .

El multiconjunto a colorear es

$$\{1, 2, \dots, 4k+1, 4k+2, 4k+3, 4k+2, 4k+1, \dots, 3, 2\},$$

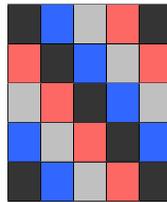
el cual contiene al multiconjunto  $\{1, 2, \dots, 4k, 4k+1, 4k, \dots, 3, 2\}$  y este, como se explica en el *Caso (i)* puede ser 4-coloreado de manera que en cada clase cromática, la suma de sus elementos sea  $k(n+1)$ . Nos faltarían por

colorear los siguientes elementos:  $4k + 2, 4k + 3, 4k + 2, 4k + 1$ . Nuevamente, seleccionamos una clase cromática que contenga a un elemento 1 y lo intercambiamos por el  $4k + 3$ , en otra de las clases cromáticas agregamos ese 1 y el  $4k + 1$ , y en las dos restantes agregamos a los elementos  $4k + 2$ , de esta manera cada una de las clases cromáticas aumentó su suma en exactamente  $4k + 2$  y por lo tanto, tienen igual suma.

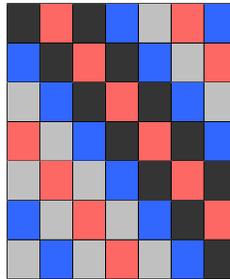
□

En el siguiente ejemplo mostramos las coloraciones descritas en los casos concretos de  $n = 5$  y  $n = 7$ .

**Ejemplo 4.3.**  $n = 5$  :



$n = 7$  :



En conclusión, el problema de las matrices de Erickson en su versión heterocromática para 4 colores no tiene resultados positivos.

## 4.2. Versión balanceada

Consideremos ahora el problema de las matrices de Erickson en su versión balanceada, es decir, cambiando los 2-cuadrados monocromáticos por 2-cuadrados balanceados, sabemos que, como cada 2-cuadrado se compone de cuatro elementos (las esquinas de una submatriz cuadrada), para que sea balanceado tendría que tener uno, dos o cuatro colores. Notemos que un 2-cuadrado balanceado que contenga un solo color es monocromático y uno que contenga cuatro colores es

heterocromático, por lo tanto, asumiremos que es un 2-cuadrado con exactamente dos esquinas de un color y dos de otro. Por ahora, consideraremos únicamente 2-coloraciones estrictas de matrices cuadradas y, al igual que en las versiones anteriores, nos interesamos por saber si al crecer el tamaño de la matriz se puede asegurar la existencia de 2-cuadrados balanceados o si, por el contrario, siempre se pueden evitar. El primer planteamiento se muestra en la siguiente pregunta.

**Pregunta 4.3.** *¿Será cierto que existe un mínimo entero  $n_2$ , tal que si  $n \geq n_2$  entonces toda 2-coloración de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado balanceado?*

La respuesta es negativa y se puede argumentar de forma similar a como se expuso en el ejemplo 4.1, exhibiendo la construcción de 2-coloraciones (estrictas) libres de 2-cuadrados balanceados.

**Ejemplo 4.4.** *Sea  $n \geq 2$ , consideremos una 2-coloración de  $[n]^2$  tal que una de las clases cromáticas tenga cardinalidad 1, de este modo no puede haber algún 2-cuadrado balanceado, ya que este tendría dos elementos de cada clase cromática.*

Por esta razón, nuevamente, nos interesamos en coloraciones balanceadas y cuasibalanceadas.

Naturalmente, toda 2-coloración balanceada de  $[2]^2$  produce un 2-cuadrado balanceado. Con respecto a los siguientes valores pares más pequeños,  $n = 4$  y  $n = 6$ , observamos que se presentan situaciones diferentes.

**Teorema 4.2.**

- (a) *Existe una 2-coloración balanceada de  $[4]^2$  libre de 2-cuadrados balanceados.*
- (b) *Toda 2-coloración balanceada de  $[6]^2$  produce un 2-cuadrado balanceado.*

Probar el inciso (a) del teorema 4.2 es sencillo pues basta con exhibir una 2-coloración balanceada de  $[4]^2$  libre de 2-cuadrados balanceados; como el tablero  $[4]^2$  es pequeño, esto se puede verificar fácilmente. Probar el inciso (b) del teorema 4.2 resulta más complicado pues debemos argumentar la existencia de un 2-cuadrado balanceado en toda 2-coloración balanceada. Observemos que, aún siendo  $n = 6$  un entero relativamente pequeño, un enfoque exhaustivo no parece viable, pues existen más de 9 mil millones de 2-coloraciones balanceadas de  $[6]^2$ . Para probar el resultado, entonces, requerimos de algunos lemas que mencionaremos a continuación.

El tablero  $[6]^2$  tiene exactamente 16 subtableros de  $3 \times 3$ , que llamaremos simplemente subtableros. Numeremos esos 16 subtableros con respecto a su casilla central, como en la siguiente figura:

	1	2	3	4	
	5	6	7	8	
	9	10	11	12	
	13	14	15	16	

A los subtableros numerados con 1, 4, 13 y 16 los llamaremos subtableros principales. Notemos que los subtableros principales son ajenos.

**Lema 4.4.** *En una 2-coloración balanceada de  $[6]^2$  libre de 2-cuadrados balanceados, ninguno de los subtableros principales está coloreado con exactamente 4 o 5 casillas negras.*

*Demostración.* Notemos que el caso en que uno de los subtableros principales tiene 4 casillas negras y 5 blancas es análogo a cuando alguno tiene 5 negras y 4 blancas. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer, para llegar a una contradicción, que uno de los subtableros principales tiene 4 casillas negras y 5 blancas. También, por simetría, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es el subtablero 1 el que cumple esto. Por los tipos de subtableros que existen, libres de 2-cuadrados (mostrados en el ejemplo 1.10) tenemos que el subtablero 1 es:

■	□	■
□	□	□
■	□	■

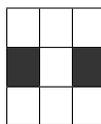
Ahora, veamos cómo se podría completar la coloración de  $[6]^2$  teniendo eso determinado, y buscando que quede balanceada y libre de 2-cuadrados balanceados.

■	□	■	■	■	■
□	□	□	■	■	■
■	□	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■
■	■	■	■	■	■

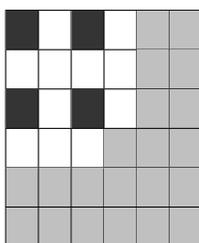
Las dos primeras columnas del subtablero 2 están determinadas y, observando los tipos de subtableros libres (ejemplo 1.10) la única posibilidad para este es:

□	■	□
□	□	□
□	■	□

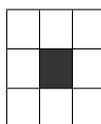
Análogamente, el subtablero 5 debe ser:



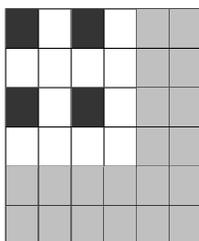
Queda determinado el color de quince casillas:



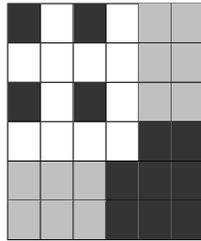
De esta manera, para el subtablero 6, la única posibilidad es:



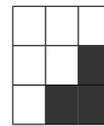
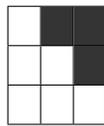
En el tablero completo,  $[6]^2$ , tenemos ya determinado el color de dieciséis casillas:



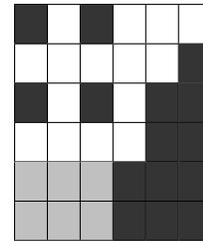
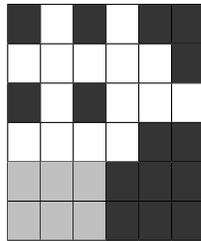
El subtablero 4 tiene determinada su primera columna, de casillas blancas. Observemos que para ser un subtablero libre de 2-cuadrados, este tiene a lo más tres casillas negras. Análogamente, el subtablero 13 tiene a lo más tres casillas negras. Como el total de casillas negras en los cuatro subtableros principales (el 1, el 4, el 13 y el 16) es dieciocho, entonces el subtablero 16 tiene al menos ocho casillas negras. Observemos que su primera casilla ya está determinada, siendo de color blanco, así que las otras ocho son de color negro.



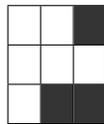
De este modo, sabemos que los subtableros 4 y 13 deben tener exactamente tres casillas negras cada uno. El subtablero 4, como su primera columna es de casillas blancas, solo puede ser alguna de las dos opciones siguientes:



Y estas opciones, vistas en el tablero completo, son:



Esto provoca que el subtablero 8 sea alguno de estos dos:

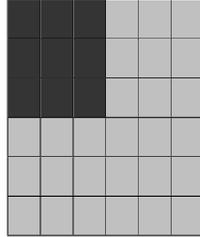


Ninguno de estos dos es libre de 2-cuadrados. Por lo tanto, ninguno de los subtableros principales puede estar coloreado con exactamente cuatro casillas negras. Análogamente, ninguno de los subtableros principales puede estar coloreado con exactamente cuatro casillas blancas.  $\square$

**Lema 4.5.** *En una 2-coloración balanceada de  $[6]^2$  libre de 2-cuadrados balanceados, ninguno de los subtableros principales está coloreado con exactamente 0 o 9 casillas negras.*

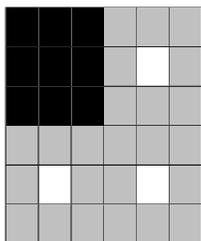
*Demostración.* Que un subtablero tenga nueve casillas negras y cero blancas es análogo a que tenga cero casillas negras y nueve blancas. Para llegar a una contradicción, supongamos que uno de los subtableros principales está coloreado con

exactamente nueve casillas negras; sin pérdida de generalidad, supongamos que es el subtablero 1 el que cumple esto.

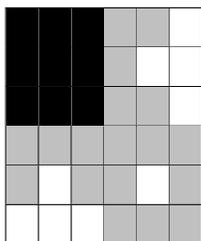


Observemos que el subtablero 2 (respectivamente, el subtablero 5) ha quedado determinado con dos columnas (respectivamente, con dos renglones) cuyas seis casillas son negras. Utilizando la descripción de tableros dada en el ejemplo 1.10, concluimos que los subtableros 2 y 5 tienen ocho o nueve casillas negras cada uno, y por lo tanto la primera columna del subtablero principal 4 (respectivamente, el primer renglón del subtablero principal 13) contiene al menos dos casillas negras. Esto implica que los subtableros principales 4 y 13 deben de tener al menos 3 casillas negras cada uno. Por el lema 4.4 sabemos que ninguno de los subtableros principales está coloreado con exactamente 4 o 5 casillas negras, por lo tanto, las opciones de número exacto de casillas negras para los subtableros principales 4 y 13 son  $\{3, 6, 7, 8, 9\}$ . Como el total de casillas negras debe ser dieciocho, el hecho de que el subtablero 4 tenga al menos tres casillas negras implica que el subtablero 13 tiene a lo más seis y viceversa. Así que el conjunto de posibilidades se reduce a  $\{3, 6\}$ , y entonces quedan dos casos:

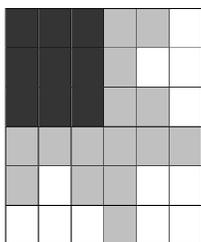
- Caso 1. Supongamos que los subtableros principales 4, 13 y 16 tienen exactamente 3, 6 y 0 casillas negras respectivamente. Notemos que en los tableros mostrados en el ejemplo 1.10 con exactamente 0 y 3 casillas negras, la casilla central es necesariamente blanca, y por el contrario, en los tableros con exactamente 6 o 9 casillas negras, la casilla central es necesariamente negra. De esta manera, los centros de los subtableros principales estarían formando un 2-cuadrado balanceado, por lo que este caso queda descartado.
- Caso 2. Supongamos que los subtableros principales 4, 13 y 16 tienen exactamente 3 casillas negras cada uno. Usaremos nuevamente que los centros de los subtableros libres con exactamente 3 casillas negras (mostrados en el ejemplo 1.10), tienen su casilla central de color blanco.



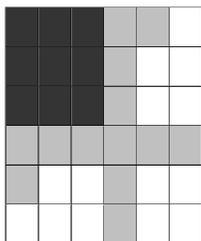
Además, notemos que los subtableros libres con 3 casillas negras tienen una columna completamente blanca y un renglón completamente blanco. Nos fijamos en el subtablero 4 (respectivamente el 13 y su primera columna (respectivamente, renglón) no puede ser totalmente blanca, porque junto a la tercera columna (respectivamente, tercer renglón) del subtablero 1 formaría 2-cuadrados balanceados. Tampoco la columna (respectivamente renglón) central puede ser completamente blanca, ya que las esquinas del subtablero 3 (respectivamente el 9) formarían un 2-cuadrado balanceado. Por lo tanto, en el subtablero 4 la columna blanca debe ser la tercera, y en el subtablero 13 el renglón blanco es el tercero.



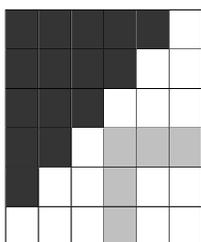
La esquina inferior derecha del tablero y sus dos casillas adyacentes deben ser blancas, de otra manera se formaría algún 2-cuadrado balanceado.



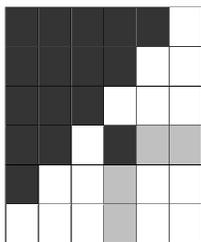
Con estas dos últimas, evitando que los 2-cuadrados a los que pertenecen sean balanceados, se obligan también a ser blancas otras dos casillas.



Esto ya determina a los subtableros 4 y 13 de la siguiente manera:



Y por los subtableros que existen con exactamente 3 casillas negras, notemos que la primera casilla del subtablero 16 necesariamente será negra.



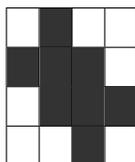
Sin embargo, las cuatro casillas centrales del tablero forman un 2-cuadrado balanceado, contradiciendo que la coloración es libre de ellos.

Por lo tanto, en una coloración balanceada libre de 2-cuadrados balanceados, ninguno de los subtableros principales tiene 9 o 0 casillas negras.

□

#### *Demostración del teorema 4.2*

- (a) Como hemos dicho anteriormente, para probar este inciso basta exhibir una 2-coloración balanceada de  $[4]^2$  libre de 2-cuadrados balanceados:



- (b) Supongamos, por contradicción, que existe una 2-coloración balanceada de  $[6]^2$  libre de 2-cuadrados balanceados. En particular, cada subtablero de  $3 \times 3$  debe ser libre de 2-cuadrados balanceados bajo dicha coloración. Como la coloración de  $[6]^2$  es balanceada, hay 18 casillas negras y 18 casillas blancas. Veamos cuales son las posibilidades de número exacto de casillas negras que puede tener cada uno de los cuatro subtableros principales; recordemos que estos son ajenos dos a dos, entonces, la suma debe ser igual a 18. En principio, cada subtablero principal tiene entre 0 y 9 casillas negras. Las formas de sumar 18 con cuatro sumandos entre 0 y 9 son:

$$\begin{array}{cccc}
 9 + 9 + 0 + 0 & 8 + 8 + 2 + 0 & 7 + 7 + 4 + 0 & 6 + 6 + 6 + 0 \\
 9 + 8 + 1 + 0 & 8 + 8 + 1 + 1 & 7 + 7 + 3 + 1 & 6 + 6 + 5 + 1 \\
 9 + 7 + 2 + 0 & 8 + 7 + 3 + 0 & 7 + 7 + 2 + 2 & 6 + 6 + 4 + 2 \\
 9 + 7 + 1 + 1 & 8 + 7 + 2 + 1 & 7 + 6 + 5 + 0 & 6 + 6 + 3 + 3 \\
 9 + 6 + 3 + 0 & 8 + 6 + 4 + 0 & 7 + 6 + 4 + 1 & 6 + 5 + 5 + 2 \\
 9 + 6 + 2 + 1 & 8 + 6 + 3 + 1 & 7 + 6 + 3 + 2 & 6 + 5 + 4 + 3 \\
 9 + 5 + 4 + 0 & 8 + 6 + 2 + 2 & 7 + 5 + 5 + 1 & 6 + 4 + 4 + 4 \\
 9 + 5 + 3 + 1 & 8 + 5 + 5 + 0 & 7 + 5 + 4 + 2 & \\
 9 + 5 + 2 + 2 & 8 + 5 + 4 + 1 & 7 + 5 + 3 + 3 & 5 + 5 + 5 + 3 \\
 9 + 4 + 4 + 1 & 8 + 5 + 3 + 2 & 7 + 4 + 4 + 3 & 5 + 5 + 4 + 4 \\
 9 + 4 + 3 + 2 & 8 + 4 + 4 + 2 & & \\
 9 + 3 + 3 + 3 & 8 + 4 + 3 + 3 & & 
 \end{array}$$

Por los lemas 4.4 y 4.5 eliminamos todas las sumas que contengan 0, 4, 5 o 9, quedando únicamente:

$$\begin{array}{ccc}
 8 + 8 + 1 + 1 & 7 + 7 + 3 + 1 & 6 + 6 + 3 + 3 \\
 8 + 7 + 2 + 1 & 7 + 7 + 2 + 2 & \\
 8 + 6 + 3 + 1 & 7 + 6 + 3 + 2 & \\
 8 + 6 + 2 + 2 & & 
 \end{array}$$

Notemos que todos los subtableros libres con exactamente 0, 2, 3 o 4 casillas negras, tienen su centro blanco; y análogamente los subtableros (libres de 2-cuadrados balanceados) con exactamente 5, 6, 7 o 9 casillas negras, tienen su centro negro. Como las cuatro casillas correspondientes a los centros de los subtableros principales forman un 2-cuadrado, es claro que no puede haber dos centros blancos y dos negros. Esto descarta las posibilidades:

$$7 + 7 + 2 + 2$$

$$7 + 6 + 3 + 2$$

$$6 + 6 + 3 + 3$$

Veamos que los casos:

$$8 + 8 + 1 + 1$$

$$8 + 7 + 2 + 1$$

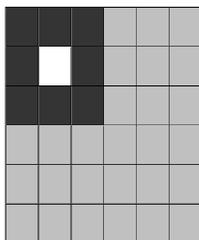
$$8 + 6 + 2 + 2$$

se pueden descartar con un argumento similar.

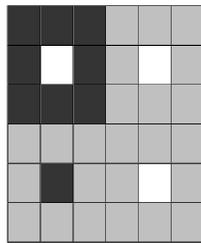
Supongamos que los subtableros principales tienen 8, 6, 2 y 2 casillas negras; como los subtableros con 2 casillas negras tienen centro blanco y el subtablero con 6 negras tiene centro negro, para evitar que el 2-cuadrado formado por los cuatro centros sea balanceado, el subtablero con 8 negras debe tener su centro blanco. Supongamos sin pérdida de generalidad que es el subtablero 1 el que tiene 8 casillas negras.

Ahora supongamos que las cantidades de casillas negras en los subtableros principales son 8, 8, 1, y 1, si ninguno de los subtableros tuviera su casilla central de distinto color al resto de sus casillas, entonces se cumpliría que los subtableros de 8 negras tienen centro negro y los subtableros de 1 negra tienen centro blanco, y esos centros formarían un 2-cuadrado balanceado. Por lo tanto, uno de los subtableros principales debe tener su centro de distinto color, sin pérdida de generalidad supongamos que uno de los que tienen 8 casillas negras tiene su centro blanco y que es el subtablero 1.

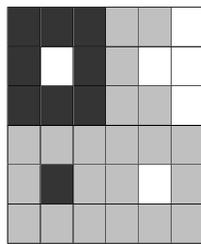
De manera muy similar, si suponemos que los subtableros principales tienen 8, 7, 2 y 1 o 8, 6, 3 y 1 casillas negras, como el de 7 y el de 2 (análogamente el de 6 y el de 3) tienen sus centros negro y blanco respectivamente, entonces los de 8 y 1 no pueden tener negro y blanco, así que alguno de esos dos tiene su casilla central distinta al resto de sus casillas. Sin pérdida de generalidad suponemos nuevamente que el subtablero con 8 negras tiene su centro blanco y es el subtablero 1.



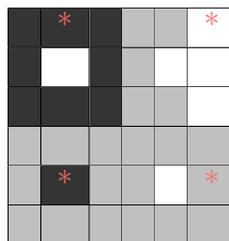
Por los tipos de subtableros que son libres de 2-cuadrados balanceados, notemos que el subtablero 3, al tener una columna negra, debe tener al menos 6 casillas negras. Esto implica que el subtablero 4 tiene al menos tres casillas negras. Por simetría, el mismo argumento implica que el subtablero 13 tiene al menos tres casillas negras, pero esto contradice las cantidades exactas de casillas negras que tienen los subtableros principales en los primeros tres casos. En el último caso, esto implicaría que el subtablero con una sola casilla negra es el 16. Y sin pérdida de generalidad, por simetría, podemos suponer que el 4 tiene tres casillas negras y el 13 tiene seis. Sabemos que los centros ya están determinados.



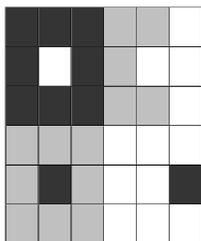
Como sabemos que el subtablero 3 tiene al menos 6 casillas negras, y el subtablero 4 tiene exactamente tres, entonces la tercera columna debe ser totalmente blanca.



Las cuatro casillas marcadas en la siguiente figura forman un 2-cuadrado.



Para evitar que sea balanceado, su esquina inferior derecha debe ser negra, y entonces esta sería la única casilla negra del subtablero 16.



Notemos, que a partir de esto la coloración ya no puede ser libre de 2-cuadrados balanceados, en particular, observemos los subtableros 10 y 12; ambos tienen tres de sus esquinas coloreadas y comparten una esquina que no está coloreada, si esta casilla fuera blanca, las esquinas del subtablero 10 producen un 2-cuadrado balanceado, y si fuera negra lo hacen las esquinas del subtablero 12.

Observemos que la opción en que los subtableros principales tienen 8, 6, 2 y 2 casillas negras, es equivalente (por intercambio de colores) a la opción en que tienen 7, 7, 3 y 1 casillas negras. Esto hace que queden descartadas todas las posibilidades de sumar 18.

Por lo tanto no existen coloraciones balanceadas de  $[6]^2$  libres de 2-cuadrados balanceados.

Los dos casos particulares expuestos en esta sección son una solución parcial al problema de las matrices de Erickson en su versión balanceada, sin embargo no bastan para afirmar un resultado positivo ni negativo en este problema.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

Las conclusiones al presente trabajo de tesis son las siguientes:

- 1.- La historia de la resolución del problema de las matrices de Erickson nos enseña que el ingenio y el trabajo teórico, junto con el apoyo de herramientas computacionales, es una potente combinación para resolver problemas de tipo Ramsey.
- 2.- La variante heterocromática al problema de las matrices de Erickson no requiere del apoyo de la computadora, pues resultó relativamente fácil dar un resultado negativo al respecto. Es decir, la respuesta a la pregunta:

*¿Existirá un mínimo entero  $n_1$ , tal que si  $n \geq n_1$  entonces toda 4-coloración de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado heterocromático?*

es, no.

- 3.- La variante balanceada al problema de las matrices de Erickson queda pendiente. Es decir, no tenemos respuesta a la pregunta:

*¿Existirá un mínimo entero  $n_2$ , tal que si  $n \geq n_2$  entonces toda 2-coloración de  $[n]^2$  produce un 2-cuadrado balanceado?*

Más aún en los casos  $n = 4$  y  $n = 6$  encontramos comportamientos distintos.

Con respecto al trabajo futuro que se puede realizar, proponemos:

- 1.- Aprovechar la experiencia obtenida y la teoría aprendida para idear algoritmos que nos ayuden a resolver el problema de las matrices de Erickson en su versión balanceada con ayuda de la computadora.

2.- Estudiar los siguientes problemas, tanto en su versión heterocromática como balanceada:

- Un 2-cuadrado es una generalización a dos dimensiones de una progresión aritmética de longitud 2, en consecuencia, podríamos definir lo que es un  $t$ -cuadrado y explorar el problema correspondiente en  $[n]^2$ .
- También podríamos pensar en más dimensiones, es decir, explorar el problema para  $t$ -cuadrados en  $[n]^d$  (esto se relaciona con el teorema de Hales-Jewett, teorema 2.5).
- El problema de las matrices de Erickson se corresponde con el teorema de Gallai (teorema 2.4) para  $d = 2$  y  $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ , así podríamos explorar nuestras variantes para diferentes subconjuntos finitos de  $\mathbb{Z}^d$ . Particularmente, manteniendo  $d = 2$ , en la versión heterocromática puede ser interesante  $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ .

# Bibliografía

- [1] M. Axenovich, D. Fon-Der-Flaass. On rainbow arithmetic progressions. *Electron. J. Combin.* (2004), 11:R1.
- [2] M. Axenovich, J. Manske. On monochromatic subsets of a rectangular grid. *Integers: Electron. J. Combin. Number Theory*, 8 (2008) A21.
- [3] Y. Caro, A. Hansberg, A. Montejano. Zero-sum subsequences in bounded-sum  $\{-1, 1\}$ -sequences. <https://arxiv.org/pdf/1612.06523.pdf>
- [4] D. Conlon, V. Jungić, R. Radoičić. On the existence of rainbow 4-term arithmetic progressions. *Graphs and Combinatorics*, 23: 249–254, 2007.
- [5] R. Bacher, S. Eliahou. Extremal binary matrices without constant 2-squares. *J. Of Comb.*, Vol. 1,1 77-100, 2010.
- [6] M. J. Erickson. Introduction to Combinatorics. *Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and optimization.*, 1996. MR1409365
- [7] Stanislaw P. Radziszowski. Small Ramsey Numbers, *The Electronic Journal of Combinatorics* (2017), DS1.
- [8] Bruce M. Landman and Aaron Robertson. Ramsey Theory on the Integers. Second Edition. *Student Mathematical Library 073*, AMS.
- [9] R. L. Graham and J. H. Spencer. Ramsey Theory. *Scientific American*, July 1990.