



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**CAOS EN SISTEMAS ÁTOMO-CAMPO**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

**JORGE CHÁVEZ CARLOS**

TUTOR PRINCIPAL  
DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH (ICN-UNAM)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA (ICN-UNAM)  
DR. CARLOS VILLAREAL LUJÁN (IF-UNAM)

CDMX, JULIO 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

*“A mis padres con mi más profundo aprecio y agradecimiento por su apoyo inquebrantable y constancia, que me han ayudado a forjar los elementos necesarios para alumbrar el camino correcto de la vida con su educación y amor.”*

# Agradecimientos

El trabajo de realización de la tesis es una compilación de los años de investigación y trabajo que se han realizado en mis estudios doctorales. Los cuales han sido enriquecidos con colaboración de grandes investigadores y tengo la fortuna de poder haber publicado algunos de los resultados que se mostrarán en este trabajo. Agradezco en particular el apoyo de mi director de tesis el Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich por todas las enseñanzas que me han hecho crecer como científico y como persona, así por la confianza y amistad que tengo hacia su persona, del mismo modo a los miembros de mi comité tutor, el Dr. Ramón López Peña con quien he tenido la dicha de poder asistir a diversos congresos compartiendo conocimientos y experiencias, y al Dr. Carlos Villareal Lujan, por sus consejos y propuestas que me han ayudado a realizar de forma óptima la investigación en que he participado.

A los doctores Sergio Lerma y Miguel Bastarrachea, les agradezco el que pudiéramos colaborar en investigaciones y trabajos, por las conversaciones científicas que nos dieron ideas para explorar nuevos caminos en la investigación, con resultados muy interesantes que hemos logrado publicar en nuestro grupo de trabajo. Agradezco mucho a la Dra. Lea Santos por compartir con nuestro grupo de investigación, conocimientos que han contribuido sustancialmente en el desarrollo de esta tesis doctoral.

También deseo hacer mención especial a los doctores Pavel Stransky, Pavel Cejnar y Michal Kloc miembros del Institute of Particle and Nuclear Physics, de la Charles University en República Checa, por su tiempo y conocimientos brindados en la estancia que realicé en su Universidad así mismo por la amistad que ahora hemos consolidado.

Dentro de los muchos cálculos realizados, doy también las gracias a Jarvis, quien es un sistema de cómputo que inventé e implementé usando una mezcla de lenguajes de programación en las super-computadoras con las que he trabajado, pues con su inagotable entusiasmo logré calcular muchas cosas que me facilitaron disfrutar de lo que es la vida de un científico, además de poder emular la vida de un personaje de ciencia ficción de cómic.

Finalmente agradezco a las personas que con su amistad, cariño y amor me dieron muchos ánimos de siempre seguir adelante pese a las adversidades que se presentan en la vida, en especial a mis padres Jorge Chávez Contreras, María Guadalupe Carlos Martínez, que con sus palabras y sabiduría en mi corazón estarán por el resto de mi vida.



# Índice general

Agradecimientos	III
Índice de figuras	IX
Introducción	1
<b>I Antecedentes</b>	<b>3</b>
1. Fundamentos	5
1.1. Análisis clásico	5
1.1.1. Caos	5
1.1.2. Exponentes de Lyapunov	6
1.1.3. Flujos Hamiltonianos	8
1.1.4. Espectro de Lyapunov	8
1.2. Análisis cuántico	9
1.2.1. Estadística espectral	10
1.2.2. Redes de Peres	12
1.2.3. Función de Husimi	12
1.2.4. Razón de participación (PR)	13
1.2.5. Probabilidad de Supervivencia	14
1.2.6. OTOC	16
1.2.7. Estados de pseudoespín y estados coherentes $HW(1)$ y $SU(2)$	17
1.3. Campo electromagnético	21
1.3.1. Campo electromagnético clásico	21
1.3.2. Cuantización del campo electromagnético	23
2. El modelo de Dicke	25
2.1. Hamiltoniano extendido de Dicke	27
2.2. Hamiltoniano clásico	27
2.2.1. Simetrías	30
2.2.2. Límites integrables	31
2.3. Solución numérica del Hamiltoniano cuántico	32
2.3.1. Base Coherente Eficiente	32
<b>II Cuantificadores de caos clásico y caos cuántico en el Modelo de Dicke</b>	<b>35</b>
3. Caos clásico en el modelo de Dicke	37

3.1.	Exponente de Lyapunov en el modelo de Dicke . . . . .	37
3.1.1.	Trayectorias regulares y caóticas . . . . .	38
3.1.2.	Evaluación de exponentes de Lyapunov . . . . .	39
3.2.	Secciones de Poincaré y exponentes de Lyapunov . . . . .	42
3.3.	Distribución de los exponentes de Lyapunov . . . . .	44
3.4.	Mapas de caos en espacio $\gamma$ y $\epsilon$ . . . . .	47
3.4.1.	Caos y QPT . . . . .	47
3.4.2.	Caos y ESQPT . . . . .	49
<b>4.</b>	<b>Ruta al caos cuántico</b>	<b>51</b>
4.1.	Bifurcación en las frecuencias fundamentales . . . . .	51
4.2.	Trayectorias en las redes de Peres . . . . .	54
4.3.	Localización de estados coherentes . . . . .	56
4.3.1.	Función de Husimi como función de $j$ . . . . .	56
4.4.	Razón de participación como medida de caos cuántico . . . . .	57
4.4.1.	Escalamiento en la Razón de Participación ( $P_R$ ) . . . . .	59
<b>5.</b>	<b>Evolución temporal de estados coherentes</b>	<b>63</b>
5.1.	Probabilidad de supervivencia de estados coherentes . . . . .	63
5.1.1.	Régimen caótico . . . . .	64
5.1.2.	Caos mixto . . . . .	64
5.1.3.	Régimen regular . . . . .	65
5.2.	Solución analítica en régimen regular . . . . .	65
<b>6.</b>	<b>Exponente de Lyapunov Cuántico</b>	<b>69</b>
6.1.	MOTOC y Caos . . . . .	69
6.1.1.	Dinámica regular a bajas energías . . . . .	70
6.2.	Caos duro . . . . .	71
	<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>
	<b>Publicaciones que reportan resultados de esta tesis</b>	<b>75</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>75</b>
<b>A.</b>	<b>Evaluaciones numéricas y analíticas</b>	<b>77</b>
A.1.	Computo y súper-computo . . . . .	77
A.2.	Frecuencias en el estado base . . . . .	77
A.3.	Condiciones iniciales en $j_z$ . . . . .	78
A.3.1.	Camino azul . . . . .	78
A.3.2.	Camino verde . . . . .	78
A.3.3.	Camino rojo . . . . .	79
A.4.	Elementos de matriz del operador $\hat{q}$ . . . . .	79
<b>B.</b>	<b>Propiedades y relaciones matemáticas</b>	<b>81</b>
B.1.	Superposición de estados coherentes . . . . .	81

<b>C. Códigos en Wolfram Mathematica</b>	<b>83</b>
C.1. Dinámica clásica . . . . .	83
C.2. Hamiltoniano cuántico . . . . .	91
C.3. Estado coherente . . . . .	95
<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>



# Índice de figuras

1.1. Separación entre una trayectoria y una perturbación de si misma en el tiempo. . . . .	7
1.2. Distribuciones $P(s)$ para el modelo de Dicke, en función de los parámetros: $j = \mathcal{N}/2$ y acoplamiento $\lambda$ , donde $\mathcal{N}$ representa el número de partículas, las curvas azules representan un ajuste de la distribución de Poisson y las curvas rojas son las distribuciones de Wigner respectivamente (Imagen tomada del artículo [1]) . . . . .	11
1.3. Red de Peres, para el modelo geométrico colectivo [2], para dos operadores diferentes $L^2$ y $H'$ en función del parámetro $B$ . . . . .	13
2.1. Robert Henry Dicke. . . . .	25
2.2. Representación de una cavidad óptica: $\mathcal{N}$ átomos de dos niveles interactuando con un campo de fotones de un solo modo. . . . .	26
2.3. Curvas de nivel de la superficie de energía de (2.17) para diferentes valores de acoplamiento en el modelo de TC (arriba) y Dicke (abajo). Los tonos oscuros indican valores bajos en la energía. Las variables usadas del pseudoespín $\vec{j}$ son: $\phi$ el ángulo polar y $\theta$ el ángulo azimutal medido respecto al polo sur ( $j_z = -j \cos \theta$ ) [3]. . . . .	30
2.4. Superficies de energía para $\gamma = 2.0 \gamma_c$ , en coordenadas ( $u = \theta \cos \phi, v = \theta \sin \phi, q$ ). Tres energía son mostradas: a) $\epsilon = -1.4 \omega_0$ , b) $\epsilon = -1.1 \omega_0$ y c) $\epsilon = -0.5 \omega_0$ . . . . .	31
2.5. Requerimientos de computo (memoria RAM mínima) necesarios para obtener un determinado numero de eigenestados del Hamiltoniano de Dicke al usar la base coherente eficiente. . . . .	34
3.1. Trayectorias con condición inicial $\mathbf{x}_r$ en las variables canónicas ( $q, p$ ) y ( $Q, P$ ). . . . .	38
3.2. Sección de Poincaré para la trayectoria con condición inicial $\mathbf{x}_r$ en las variables canónicas ( $Q, P$ ). . . . .	39
3.3. Trayectorias con condición inicial $\mathbf{x}_c$ en las variables canónicas ( $q, p$ ) y ( $Q, P$ ). . . . .	39
3.4. Sección de Poincaré para la trayectoria con condición inicial $\mathbf{x}_c$ en las variables canónicas ( $Q, P$ ). . . . .	40
3.5. Distancia geométrica $dx(t)$ (negro) y separación $\delta x(t)$ (rojo) en escalas logarítmicas entre dos trayectorias cercanas, en un régimen regular (izquierdo) y un régimen caótico (derecho). . . . .	40
3.6. Convergencia del LCE como función del tiempo, para trayectoria regular (izquierda) y caótica (derecha). . . . .	41

3.7.	Histogramas de las variaciones hechas sobre la condición inicial $\mathbf{x}_i(0)$ en las variables canónicas al rededor de las condiciones iniciales: $\mathbf{x}_r$ (arriba) y $\mathbf{x}_c$ (abajo). . . . .	41
3.8.	Histograma de los valores obtenidos en el muestreo de los exponentes de Lyapunov, para trayectoria regular (izquierda) y caótica (derecha). . .	42
3.9.	Distribución de probabilidad del exponente de Lyapunov, evaluado en tres tiempos diferentes energías $\epsilon = -1.4\omega_0$ (a), $\epsilon = -1.1\omega_0$ (b) y $\epsilon = -0.5\omega_0$ (c), para tres escalas de tiempo $t_f$ para cada trayectoria con condición inicial $\mathbf{x}(0) = (0, q(\epsilon), 0, 0.948)$ . . . . .	42
3.10.	Soluciones de variables canónicas contra el tiempo para dos trayectorias cercanas entre sí, para $\epsilon = -1.4\omega_0$ , $\gamma = 2\gamma_c$ , con condición inicial $(p_0, q_0, P_0, Q_0) = (0, q_+(\epsilon), 0.648, 1.371)$ . . . . .	43
3.11.	Puntos de análisis (a) para $\gamma = 2\gamma_c$ , $\omega = \omega_0$ y $\epsilon = -1.4\omega_0$ (naranja), $\epsilon = -1.1\omega_0$ (rojo), $\epsilon = -0.5\omega_0$ (verde). La curva azul representa la energía de estado base como función del factor de acoplamiento $\gamma$ . (b) Curvas de nivel de $\epsilon$ en variables canónicas $(Q, P)$ , para valor de acoplamiento $\gamma = 2\gamma_c$ y $\epsilon = -1.4\omega_0$ (naranja), $\epsilon = -1.1\omega_0$ (rojo), $\epsilon = -0.5\omega_0$ (verde). . . . .	44
3.12.	Secciones de Poincaré (arriba) y exponentes de Lyapunov (abajo) en proyección de variables $(Q, P)$ , para $\gamma = 2\gamma_c$ y $\epsilon = -1.4\omega_0$ (a), $\epsilon = -1.1\omega_0$ (b), $\epsilon = -0.5\omega_0$ (c). En las secciones de Poincaré los diferentes colores están asociados a diferentes trayectorias. Para el exponente de Lyapunov el código de colores se encuentra en la barra de abajo de cada imagen. Las zonas azules indican regiones regulares. . . . .	45
3.13.	Porcentaje de caos y promedio del exponente de Lyapunov en espacio fase con acoplamiento $\gamma = 2\gamma_c$ en resonancia. . . . .	45
3.14.	Distribución de probabilidad (arriba) para el LCE de tres diferente superficies de energía en el respectivo espacio fase, (abajo) distribución de probabilidad de tres trayectorias con condición inicial $\bar{x}_1(0) = (p_o, q_o, P_o, Q_o) = (0, q(\epsilon), 0, 0.948)$ , $\bar{x}_2(0) = (0, q(\epsilon), 0, 0.707)$ , $\bar{x}_3(0) = (0, q(\epsilon), 0, 0.547)$ para $\epsilon = -1.4\omega_0$ (a), $\epsilon = -1.1\omega_0$ (b) y $\epsilon = -0.5\omega_0$ (c). . . . .	46
3.15.	Mapeo del exponente de Lyapunov sobre superficie de energía (izquierda), porcentaje de caoticidad (derecha) para diferentes valores de $\omega$ : $\omega = \omega_0/4$ (arriba), $\omega = \omega_0$ (centro), $\omega = 4\omega_0$ (abajo). . . . .	47
3.16.	Promedio del exponente de Lyapunov (izquierda) y porcentaje de caoticidad (derecha), graficas en función de la energía de los fotones $\omega$ para $\gamma = \gamma_c$ y valores diferentes valores de energía de excitación $\epsilon$ cerca del estado base $\epsilon_0$ . . . . .	49
3.17.	Acercamiento del mapeo del exponente de Lyapunov sobre superficie de energía (izquierda), porcentaje de caoticidad (derecha) para diferentes valores de $\omega = \omega_0$ . . . . .	49
4.1.	Frecuencias características en el estado base: Bajas frecuencias (Lineas segmentadas) y Frecuencias altas (Linea sólida) dadas por las ecuaciones (A.2) y (A.4) respectivamente, la linea amarilla representa el parámetro de acoplamiento critico de la QPT. . . . .	52
4.2.	Espectro de potencias en términos de la energía $\epsilon/\omega_0$ , para la variable $q(t)$ con condiciones iniciales dadas por el camino azul en la Fig. 4.3. . . . .	52

4.3.	Valores de la condición inicial $j_z(0)$ , puntos rojos y azules son el mínimo y el máximo del valor $\langle j_z \rangle$ para cada superficie de energía (la expresiones que determinan dichos valores están en el Apéndice A.3), los puntos verdes son para $j_z = -0.25$ , la línea punteada rosa representa la energía de la ESQPT. Todos los caminos sobre la energía tienen un paso de tamaño $\Delta\epsilon/\omega_0 = 0.01$ . . . . .	53
4.4.	Espectro de potencias $PS$ de la variable $q(t)$ con condición inicial dada por (4.3) (puntos azules), con (a) $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ , (b) $\epsilon/\omega_0 = -1.1$ y (c) $\epsilon/\omega_0 = -0.5$ , en el lado derecho la relación entre $PS$ con los exponentes de Lyapunov $\lambda$ . . . . .	54
4.5.	Espectro de potencias $PS$ de la variable $q(t)$ con condición inicial dada por (4.3) (puntos verdes), con (a) $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ , (b) $\epsilon/\omega_0 = -1.1$ y (c) $\epsilon/\omega_0 = -0.5$ , en el lado derecho la relación entre $PS$ con los exponentes de Lyapunov $\lambda$ . . . . .	54
4.6.	Espectro de potencias $PS$ de la variable $q(t)$ con condición inicial dada por (4.3) (puntos rojos), con (a) $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ , (b) $\epsilon/\omega_0 = -1.1$ y (c) $\epsilon/\omega_0 = -0.5$ , en el lado derecho la relación entre $PS$ con los exponentes de Lyapunov $\lambda$ . . . . .	55
4.7.	Los puntos negros constituyen la Red de Peres para el operador $J_z/j$ con $j = 100$ . Los puntos de color representan el valor del promedio temporal de la variable clásica $j_z(t)$ con las condiciones iniciales dadas en la Fig. 4.3, la línea rosa representa la energía de la ESQPT. . . . .	55
4.8.	Función de Husimi $Q$ en el espacio fase clásico accesible en las variables canónicas $(j_z, \phi)$ , para valores diferentes de $j$ , cuyos estados coherentes $ \alpha_0, z_0\rangle$ están construidos con las variables clásicas $(p, q, J_z, \phi) = (0, q_+(\epsilon), -0.145, 0)$ a una energía $\epsilon/\omega_0 = -1.1$ , Las respectivas curvas en color rojo son la curva de nivel para $ \langle \alpha, z   \alpha_0, z_0 \rangle ^2 = e^{-1}$ . . . . .	57
4.9.	Mapas de caos (exponente de Lyapunov $\lambda$ ) en tres zonas de energía (izquierda) $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ , (centro) $\epsilon/\omega_0 = -1.5$ y (derecha) $\epsilon = -1.1$ , con localización de los estados coherentes en el espacio fase. Puntos (de arriba a abajo) indican el estado coherente centrado en la zona baja (rojo), media (verde) y arriba (azul) sobre la red de Peres de la Fig. 4.7. Las curvas cerradas encierran a la función de Husimi correspondientes a $ \langle z; \alpha   \alpha_0, \zeta_0 \rangle ^2 = e^{-1}$ , para tres valores de $j$ , con $j = 40$ (café), $j = 70$ (rosa) y $j = 100$ (naranja). . . . .	58
4.10.	(Arriba) Comparación entre $P_R$ y exponentes de Lyapunov sobre el eje $j_z$ con $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ , $p = 0$ , $\phi = 0$ . Con $j = 80$ y $N_{max} = 100$ . Para $q = q_+$ (izquierda), y $q = q_-$ (derecha). Los puntos negros son el valor del exponente de Lyapunov y los verdes para el valor del $P_R$ . (Abajo) criterio binario para el $P_R$ y el exponente de Lyapunov . . . . .	58
4.11.	Secciones Poincaré (columna izquierda) y exponentes de Lyapunov (columna central) para un amplio muestreo de condiciones iniciales sobre la sección $p = 0$ , en la versión clásica del modelo de Dicke, para tres energías diferentes. Sección de Poincaré proyectada en el plano $\tilde{j}_z$ vs. $\phi$ , con $\tilde{j}_z \equiv j_z/j$ . La columna derecha representa la Razón de Participación ( $P_R$ ) de los estados coherentes del modelo cuántico de Dicke para $j = 80$ ; los parámetros de los estados coherentes son los mismos que han sido tomados en los resultados clásicos. Los parámetros del Hamiltoniano son $\omega = \omega_o = \gamma = 1$ . . . . .	60

4.12.	$P_R$ en función de $j$ (puntos de colores), para el estado coherentes de la Fig Fig. 4.9, con $\epsilon = -1.8$ (izquierda), $\epsilon = -1.5$ (centro) y $\epsilon = -1.1$ (derecha), líneas punteadas representan la relación de la Ec. (4.6) para cada estado coherente en el respectivo camino de la red de Peres, la línea morada expresa el valor crítico cuando $P_R = j$ i.e $\xi = 1$ . . . . .	60
4.13.	(a), (b) y (c) son la comparación del valor del $\xi$ con el exponente de Lyapunov, como función de la energía y de los caminos con estado coherente así como condición inicial centrados en los valores de la Fig. 4.3, (d) Escalamiento de $\xi$ juntas para los tres caminos de $j_z$ . . . . .	61
5.1.	Cuadrado del valor absoluto de las componentes $c_k$ , de dos estados coherentes (a) y (c) con energía $E = -1.1j$ y $j = 120$ . La localización y dispersión de los estados coherentes en el espacio fase clásico se muestra en el panel (b), ambos casos se localizan en una región caótica. Los paneles (d) y (e) muestran la probabilidad de supervivencia de el estado coherente inicial de los paneles (a) y (c) respectivamente. Los recuadros en los paneles (a) y (c) son acercamientos de las componentes de energía en una zona pequeña de energía. . . . .	64
5.2.	Lo mismo que en 5.1 pero para $E = -1.5j$ , donde el caos y la regularidad coexisten. Los estados coherentes (a) y (c) son localizados respectivamente en una zona regular y caótica. Para visualizar los reavivamientos de la SP del estado (c), una escala pequeña fue usada en el panel (e). .	65
5.3.	Las líneas continuas en (a) son ajustes de distribuciones Gaussianas de tres secuencias de estados de energía que participan en el estado coherente. La localización y dispersión de los estados coherentes en el espacio fase clásico se muestra en el panel (b). En el panel (d), las líneas azules son los resultados numéricos y la curva en color naranja la aproximación analítica de la Ec. (5.1), (5.2) y (5.3). . . . .	66
6.1.	(a) Evolución de $c_n(t)$ en escala logarítmica para un eingenestado con $E_n/j \approx -1.1$ ( $n = 1625$ ). El recuadro muestra la misma cantidad en escala semilogarítmica para $c_n(t)$ . Las líneas segmentadas indican la regresión lineal $\ln(c_n(t)) = 0.130981 + 2\Lambda t$ , con $t \in (\pi, t^*)$ y $\Lambda = 0.13957$ . Las líneas punteadas rojas representan las fluctuaciones con $c_n^{(\infty)} \pm \sigma_n$ . (b) $c_n(t)$ para valores diferentes de $j$ y estados excitados con energía escalada similar a $\epsilon/\omega_0 \approx -1.1$ . . . . .	70
6.2.	$c_n(t)$ para diferentes valores de $j$ para el estado base en escala logarítmica. El recuadro muestra el comportamiento oscilatorio del MOTOC en un intervalo corto de tiempo en escala lineal. . . . .	71
A.1.	elementos de matriz $q_{k,s}$ determinado por la relación (6.4) para $\gamma = 2\gamma_c$ . . . . .	79





# Introducción

La presente tesis doctoral, estudia la fenomenología relacionada con el surgimiento, reconocimiento y medición de caos clásico y cuántico, de sistemas cuyo origen es de algún Hamiltoniano de interés con interacciones de muchos cuerpos. En especial se aborda el modelo de Dicke, el cual es un Hamiltoniano que se origina dentro de la óptica cuántica y es estudiado por las aplicaciones que existen en cavidades ópticas, en circuitos superconductores ó QED, etc. Por otro lado se brinda un amplio recorrido sobre el estudio del caos en sus respectivos marcos de estudio, pues en la actualidad no está bien definida alguna relación entre aspectos puramente clásicos con los que son de tipo cuántico.

El modelo de Dicke, brinda un puente de análisis entre estos dos mundos ya que con este modelo se pueden construir estados coherentes que permiten mapear aspectos clásicos a los cuánticos y viceversa. Dicho puente se hace más visible cuando el número de partículas que interactúan en el sistema crece, sin embargo el reto computacional que se presenta también crece, por lo que muchos de los resultados mostrados en esta tesis fueron calculados con el uso de supercómputo, paciencia y tiempo. Pues como se menciona, los aspectos cuánticos de sistemas con espacios de Hilbert grandes tienen una amplia dificultad computacional para resolverse, además por el lado clásico los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales requieren de técnicas numéricas eficientes para optimizar dichos procesos de cálculo. Para brindar al lector un soporte ante algunos conceptos la tesis presenta una primera parte denominada antecedentes, dividida en dos capítulos la cual brinda en el primer capítulo definiciones que posteriormente serán necesarias, además de introducir en el segundo capítulo el modelo de Dicke, el cual describe la interacción de  $\mathcal{N}$  átomos de dos niveles con fotones de un modo interactuando dentro de una cavidad óptica.

La segunda parte muestra resultados de artículos que en colaboración se han publicado, estas investigaciones buscan dar un mejor entendimiento al fenómeno del caos, la relación con las transiciones de fase cuánticas, la forma de localización de estados coherentes y las formas de correlacionar estados evolucionados en el tiempo, con el objeto de dar un atributo al estado cuántico como caótico o regular, y tener una analogía con la forma clásica la cual considera puntos en el espacio fase con características dinámicas que la clasifican de acuerdo a su exponente de Lyapunov. El capítulo tres muestra un estudio al modelo en forma clásica, con ayuda de la mecánica Hamiltoniana y de los sistemas dinámicos, para obtener una relación entre los parámetros del sistema y el exponente de Lyapunov, como cuantificador de caos, con ello mapas de caoticidad fueron obtenidos sobre superficies de energía y para valores de parámetros diferentes. En especial se demuestra que no hay una correspondencia con la denominada transición de fase de estados excitados y el surgimiento del caos, mas bien las rutas del surgimiento del caos, dependen de la elección de los parámetros que sean considerados y en especial

para el caso clásico que se corresponde con el límite termodinámico ( $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ ) es sensible ante la elección de las condiciones iniciales del sistema.

En un entorno puramente cuántico no se pueden tener trayectorias que determinen un exponente de Lyapunov como se define en los sistemas dinámicos continuos, por lo que al tener  $\mathcal{N}$  finito, otras observables inspiradas en la medición de cantidades conservadas, permiten hacer una analogía con la definición de integrabilidad y dar en forma cualitativa una representación gráfica denominada red de Peres, la cual consiste en graficar los valores propios de energía con el valor de expectación de algún operador  $P$ , en base a esta red, caminos clásicos de condiciones iniciales pueden ser seleccionados y el estudio de las series de tiempo de soluciones numéricas de las ecuaciones de Hamilton, mostraron la bifurcación de frecuencias que son consistentes con la complejidad que adquiere el sistema al aumentar la energía ó el acoplamiento entre los átomos y los fotones, mientras que a bajas energías la integrabilidad predominaba y se ve reflejada en la aparición de dos frecuencias fundamentales, las cuales son equivalentes a las que se obtienen en forma cuántica. Para ampliar la comprensión de la asociación entre aspectos clásicos y cuánticos, una herramienta muy útil fue empleada, y consistió en el uso de estados coherentes, los cuales brindan un apoyo muy práctico en la localización de puntos clásicos a un estado cuántico como un puente entre ambas perspectivas, dicha localización mostró ser dependiente de la elección de la condición que se tomara en el espacio fase y resultó ser sensible en su estructura si se consideraba un punto regular ó un punto caótico, además de tener la dependencia de  $\mathcal{N}$ , pues la forma en el escalamiento del valor de la razón de participación del estado coherente mostró un crecimiento lineal para los estados caóticos y un crecimiento en forma de raíz si el estado coherente tomado era regular, esta investigación se presenta en el capítulo cuatro denominado ruta al caos cuántico.

Debido a que los aspectos dinámicos dentro de la teoría cuántica, son muy relevantes en el estudio del caos, en el capítulo cinco se muestra la investigación realizada con la evolución temporal de los estados coherentes, en especial en el contraste de la evolución de un estado coherente comparado consigo mismo al tiempo cero, en la literatura este contraste se llama análisis de autocorrelación y en la perspectiva cuántica se denomina probabilidad de supervivencia. En este capítulo un resultado analítico es mostrado en términos de la función especial de Jacobi, el cual es aplicable en las regiones de baja energía, pues como se mencionó antes, de los diagramas de bifurcación y de los mapas de caos, se muestra que en estas regiones la zona regular predomina.

En el capítulo seis, la investigación se enfoca directamente en el espectro de energía y la evolución temporal de observables, sin la necesidad de acudir a estados coherentes, por tal motivo en este contexto los cálculos tienen un origen puramente cuánticos ya que no necesitan de algún parámetro que designe alguna condición inicial clásica. Al emplear el correlador microcanónico ordenado fuera de tiempo ó también llamado MOTOC (por sus siglas en ingles) la emergencia de un exponente de Lyapunov cuántico puede determinarse, dicho parámetro cuantifica la aparición de caos cuántico de los estados propios del Hamiltoniano, un resultado que es muy interesante y relevante en la concepción de atribuir a un estado cuántico, la propiedad de ser caótico ó regular. Finalmente las conclusiones generales de esta tesis son mostradas, remarcando algunos de los aspectos particulares que definen, y muestran la fenomenología relacionada con la complejidad del sistema en el estudio del caos.

**Parte I**  
**Antecedentes**



# Capítulo 1

## Fundamentos

*“Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber.”*  
*-Albert Einstein-*

### 1.1. Análisis clásico

La teoría del caos es un área de investigación presente en muchos sistemas dinámicos y forma parte intrínseca en cierto tipo de sistemas Hamiltonianos para algunos modelos físicos.

La dinámica de un sistema puede tener básicamente dos tipos de comportamiento en función de los parámetros que lo conforman y de la condición inicial que se considere. Estos tipos de comportamiento son regulares o caóticos, y pueden ser distinguidos entre sí, de formas cualitativas, como lo son las secciones de Poincaré, en análisis de bifurcación etc, o los métodos cuantitativos como el cálculo del exponente de Lyapunov [4] o el método discriminador SALI etc.

El exponente de Lyapunov mide la separación en el espacio tangente del sistema dinámico en cuestión y si el valor de este número es menor a cero ó cero, la dinámica de la trayectoria será regular, si el valor del exponente de Lyapunov es positivo la trayectoria tendrá un comportamiento caótico. Otro factor importante, que por lo general presentan los sistemas caóticos, es que son No-lineales, es decir presentan un grado de complejidad en su estructura y en los sistemas que son Hamiltonianos se presenta cuasiperiodicidad otorgando una simetría en los exponentes de Lyapunov.

#### 1.1.1. Caos

En la actualidad aun no existe un consenso en la definición formal sobre ¿cuando un sistema es caótico?, sin embargo hay características en las que la comunidad coincide al momento de definir un sistema como caótico. Y estas características de acuerdo a Skokos [5] son:

1. El sistema es determinista.
2. Evolución temporal aperiódica.

3. Exponente de Lyapunov positivo (de esta propiedad se hablará de forma más extensa en la siguiente sección).
4. El sistema es confinado, es decir las trayectorias están dentro de una región finita globalmente en el espacio fase accesible.
5. No linealidad del sistema.

El caos determinista se puede producir en sistemas simples y con pocos grados de libertad y la dinámica puede ser increíblemente compleja, un ejemplo común de un sistema Hamiltoniano caótico es el del *péndulo doble* el cual presenta las características mencionadas y ha sido estudiado en la literatura de forma amplia.

### 1.1.2. Exponentes de Lyapunov

Ya que desde el año 1963 se observó la peculiaridad de las trayectorias que formaban una estructura de mariposa, en el conocido sistema de Lorenz, y el famoso efecto que tiene el nombre de *efecto mariposa*, es a partir de este fenómeno que surge con gran fuerza el estudio de lo que ahora se conoce como teoría caótica, y asociado a ello, un ejercicio interesante es medir la caoticidad en la dinámica de una solución. Así se remonta al año 1892 en Rusia el trabajo del matemático Lyapunov sobre estabilidad, quien ya había realizado estudios sobre este comportamiento adelantándose a su época y forjando las herramientas que años después con la ayuda de los procesos computacionales facilitaron el entendimiento de sistemas más complejos que los analizados con anterioridad con solo papel y pluma [4, 5, 6].

El concepto introducido por Lyapunov es el de medir el radio de divergencia con la que dos trayectorias cercanas entre sí se separan, en el caso de un sistema caótico esta separación será exponencial en el tiempo.

#### Ecuaciones variacionales

En sistemas regulares o no caóticos, la distancia  $\|\delta\mathbf{x}(t)\|$  entre una trayectoria y una perturbación a ésta es cercana a cero y esta distancia a través del tiempo se podría incrementar algebraicamente o tender a ser cero. En sistemas caóticos la distancia crece exponencialmente en el tiempo (ver figura 1.1).

$$\|\delta\mathbf{x}(t)\| \sim e^{\lambda t} \|\delta\mathbf{x}(0)\|. \quad (1.1)$$

El parámetro que caracteriza esta inestabilidad a lo largo de una trayectoria puede ser definido tomando el doble límite

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\|\delta\mathbf{x}_0\| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta\mathbf{x}(t)\|}{\|\delta\mathbf{x}_0\|} \quad (1.2)$$

Cuando el límite existe y es positivo, la trayectoria es extremadamente sensible a las condiciones iniciales y la condición inicial es llamada caótica. El parámetro  $\lambda$  es el *Exponente Característico de Lyapunov* (LCE por sus siglas en ingles). Para

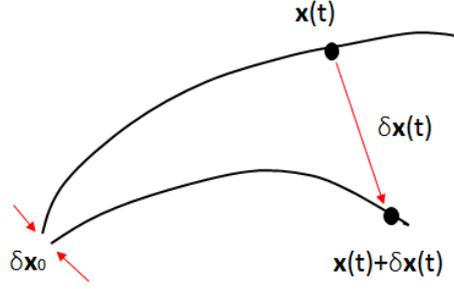


Figura 1.1: Separación entre una trayectoria y una perturbación de sí misma en el tiempo.

obtener el LCE es necesario resolver las ecuaciones dinámicas  $F(\mathbf{x})$  y la *matriz fundamental* simultáneamente  $\Phi$  [5, 6],

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\mathbf{x}) \\ D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x})\Phi \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

donde  $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x})$  es la *matriz Jacobiana* con condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \Phi(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

en esta forma  $\delta\mathbf{x}_0$  como función de  $\mathbf{x}_0$ , está dada como

$$\delta\mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{x}_0) \cdot \delta\mathbf{x}_0. \quad (1.5)$$

### Observaciones

1. De la ecuación 1.3 para  $\Phi$  llamada *ecuación variacional* es una matriz evaluada en el tiempo para la ecuación diferencial lineal del sistema. Esta es la linealización del campo vectorial a lo largo de la trayectoria  $\phi$ : Si la trayectoria cambia la ecuación variacional también cambia.

2. Para una perturbación  $\delta\mathbf{x}_0$  de  $\mathbf{x}_0$  la evolución temporal está dada como se ve en la ecuación (1.5).

La perturbación  $\delta\mathbf{x}_0$  puede ser interpretada en dos maneras: Como una perturbación del sistema o como un vector finito evaluado sobre la linealización del sistema.

3. Para sistemas autónomos, la ecuación variacional se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= D_{\mathbf{x}}F(\phi(\mathbf{x}))\Phi(\mathbf{x}), \\ \Phi(\mathbf{x}_0) &= \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

4. Para sistemas no autónomos con forzamiento añadido,  $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, t) + G(t)$ , la ecuación variacional es

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= D_{\mathbf{x}}F(\phi(\mathbf{x}, t))\Phi(\mathbf{x}, t), \\ \Phi(\mathbf{x}_0, t_0) &= \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Notar que  $G$  no aparece explícitamente, pues está implícita en la trayectoria  $\phi(\mathbf{x}, t)$ .

### 1.1.3. Flujos Hamiltonianos

En un sistema Hamiltoniano con  $d$  grados de libertad se tendrá la función Hamiltoniana en términos de las variables canónicas conjugadas  $q_i$  y  $p_i$  (con  $i = \{1, \dots, d\}$ ) es decir  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , las ecuaciones de Hamilton están dadas por

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{1.8}$$

Donde las ecuaciones (1.8) forman un conjunto de  $2d$  ecuaciones diferenciales  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$  que en general están acopladas entre sí, generando el sistema dinámico  $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , con

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left\{ F_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, F_d = \frac{\partial H}{\partial p_d}; F_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, F_{2d} = -\frac{\partial H}{\partial q_d} \right\}.\tag{1.9}$$

Al calcular la divergencia de (1.9) puede verse claramente que este resultado es cero, es decir

$$\nabla \cdot F = 0.\tag{1.10}$$

Al considerar la función  $\Phi$ , y al tomar el determinante de la matriz  $\Phi$  se puede mostrar que el flujo Hamiltoniano se conserva (debida la conservación del volumen por el teorema de Liouville), esto se puede probar al tomar la ecuación (1.3),  $\nabla \cdot F = \text{Tr} \left( \dot{\Phi}_t \Phi_t^{-1} \right) = \frac{d}{dt} \text{Tr} (\ln \Phi_t)$  por tal motivo  $\text{Tr} (\ln \Phi_t) = \int_0^t \nabla \cdot F d\tau$ . Un flujo arbitrario tendrá un determinante  $\det \Phi_t = e^{\int_0^t \nabla \cdot F d\tau}$ , y como para un flujo es Hamiltoniano  $\nabla \cdot F = 0$ ,

$$\det \Phi_t = 1,\tag{1.11}$$

en efecto el elemento de volumen infinitesimal es constante en el tiempo.

### 1.1.4. Espectro de Lyapunov

El LCE no caracteriza completamente la inestabilidad de un sistema  $d$  dimensional debido a que existen  $d$  exponentes de Lyapunov definiendo lo que se conoce como *espectro de Lyapunov*  $\{\lambda_i\}$  con  $i = 1, \dots, d$ .

Para sistemas continuos en el tiempo se tiene

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i = \langle \nabla \cdot F(\mathbf{x}) \rangle,\tag{1.12}$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  denota el promedio temporal.

Para un sistema Hamiltoniano o un mapeo simpléctico la suma de las componentes del espectro de Lyapunov suman cero ya que  $\nabla \cdot F = 0$ , el espectro de Lyapunov refleja la simetría referida a la regla de paridad [7]. Esta simetría es una consecuencia de la estructura simpléctica y para un sistema con  $d$  grados de libertad (tendrá  $2d$  exponentes de Lyapunov), los exponente de Lyapunov son consistentes con la relación

$$\lambda_i = -\lambda_{2d-i+1} \quad i = 1, \dots, d,\tag{1.13}$$

esto reduce a la mitad el cálculo del espectro de Lyapunov.

En general en un sistema Hamiltoniano existen  $2d$  direcciones  $e$  diferentes en el espacio tangente en el punto  $\mathbf{x}$  del espacio fase.

$$\lambda(\mathbf{x}, e) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln | \Phi_t(\mathbf{x}) \cdot e | \quad (1.14)$$

al etiquetar  $e_i$  la dirección  $i$  del exponente de Lyapunov de las  $2d$  diferentes direcciones en el espacio tangente  $\lambda_i = \lambda(\mathbf{x}, e_i)$ . Al identificar la dirección  $e_1$  perteneciente al exponente de Lyapunov más grande  $\lambda_1$  se obtiene el exponente característico de Lyapunov  $\lambda$ . En base a la ecuación (1.14)

$$| \Phi_t(\mathbf{x}) \cdot e |^2 = \tilde{e} \tilde{\Phi}_t(\mathbf{x}) \Phi_t(\mathbf{x}) e, \quad (1.15)$$

los elementos del *espectro de Lyapunov* son calculados como los eigenvalores  $\sigma_i(\mathbf{x}, t)$  de la matriz real simétrica no-negativa  $\tilde{\Phi}_t(\mathbf{x}) \Phi_t(\mathbf{x})$  como

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \sigma_i(\mathbf{x}, t). \quad (1.16)$$

El exponente de Lyapunov está asociado a una trayectoria dada con una condición inicial  $\mathbf{x}_0$ , si el sistema no es ergódico [8]. Las fluctuaciones en el cálculo del LCE son caracterizadas como un aspecto relevante de sistemas caóticos [9].

## 1.2. Análisis cuántico

A diferencia de los sistemas clásicos en la mecánica cuántica no se puede tener el concepto de trayectoria, ya que el principio de incertidumbre de Heisenberg lo prohíbe. Por otro lado la ecuación de Schrödinger es una ecuación lineal, por lo que la noción clásica de caos no puede ser abordada del mismo modo. Con estas constricciones en la propia teoría cuántica se complica la definición de caos cuántico, sin embargo hay criterios que nos pueden ayudar a analizar comportamientos complejos, que en forma análoga podrían denominarse como comportamientos regulares o caóticos en términos de los parámetros que controlen su estructura.

Dentro de las últimas décadas el estudio del caos cuántico se ha visto analizado por diferentes personalidades como Michel Berry [10] quien en su trabajo relacionó propiedades estadísticas del espectro cuántico con comportamiento caótico o regular en analogía a su forma clásica. Desde entonces numerosos sistemas cuánticos han sido analizados desde este punto de vista, desde billares cuánticos, cavidades en microondas, sistemas atómicos, sistemas moleculares y sistemas nucleares.

La idea intuitiva de caos se basa en la inestabilidad del sistema ante pequeños cambios. La sensibilidad a las condiciones iniciales es lo que utilizamos para definirla matemáticamente, siendo cuantificada con el exponente de Lyapunov. Una caracterización alternativa del caos clásico, es la sensibilidad a pequeños cambios en el Hamiltoniano, en lugar de pequeños cambios a las condiciones iniciales [11]. En la literatura sobre el tema solo existen ejemplo de sistemas concretos pero no una teoría general sobre la inestabilidad del Hamiltoniano ante pequeñas perturbaciones.

Una buena parte de la literatura utiliza la denominación de caos cuántico cuando

su análogo sistema clásico es caótico. Esta definición no incluye a sistemas sin límite clásico claro, como los sistemas de muchas partículas como el modelo de Ising etc.

En este sentido M. Berry propuso una de las definiciones más aceptadas de caos cuántico al que denominó *caología cuántica*. "La caología cuántica es el estudio del comportamiento semiclásico, pero no clásico, característico de los sistemas cuyo movimiento clásico exhibe caos" [12].

En este trabajo se ha efectuado la investigación de forma clásica, además de trabajar en el límite semiclásico en el modelo que se estudia y en su forma cuántica.

El conocimiento entre la relación entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica ha aumentado en gran medida y el propósito de este trabajo es mostrar algunas relaciones que existen entre estos dos mundos de estudio usando algunos cuantificadores que tienen relación entre sí, dando un puente entre la naturaleza de la fenomenología del caos en el modelo que se aborda en este trabajo.

### 1.2.1. Estadística espectral

En 1973, Percival [13] conjeturó que existían dos tipos de espectro de energías para un sistema ligado con más de un grado de libertad. El espectro regular que aparece cuando el movimiento clásico es integrable y el espectro irregular que sucede cuando no existen suficientes constantes de movimiento.

La principal diferencia entre el comportamiento del espectro entre sistemas integrables y aquellos que no lo son es la posibilidad de que los niveles se crucen cuando variamos un parámetro del sistema. Si el sistema es integrable, cada nivel viene caracterizado por tantos números cuánticos como grados de libertad tiene el sistema. En sistemas no integrables los niveles de energía están muy correlacionados si los estados poseen las mismas propiedades de simetría. El espectro de energías constituye un observable puramente cuántico, cuyas propiedades estadísticas nos permiten distinguir entre un sistema regular y caótico.

Históricamente la investigación de las propiedades estadísticas del espectro de energías, ha sido estudiado principalmente por la Teoría de Matrices Aleatorias (RMT por sus siglas en inglés). En 1962 [14], Dyson demostró que existían tres clases de universalidad para las matrices aleatorias dentro de la ecuación de Schrödinger de acuerdo a sus propiedades fundamentales de simetría. Los Hamiltonianos que poseen simetría bajo inversión temporal y simetría ante rotaciones se pueden representar por matrices reales invariantes bajo el grupo de transformaciones ortogonales. Este tipo de matrices también puede representar sistemas con simetría bajo inversión temporal y espín entero, aunque la invarianza bajo rotaciones no se cumpla. Los Hamiltonianos sin la simetría bajo inversión temporal se pueden representar por matrices Hermitianas invariantes bajo el grupo de transformaciones unitarias. Los Hamiltonianos con la simetría temporal, con espín semi entero y con ruptura de la simetría bajo rotaciones pueden ser representados por matrices reales cuaterniónicas invariantes bajo el grupo de transformaciones simplécticas. La observación de que los resultados de la RMT se aplican no sólo a sistemas complejos con muchos grados de libertad, sino también a sistemas con pocos grados de libertad pero con dinámica clásica caótica, en cierto modo, es equivalente al descubrimiento de movimiento irregular en sistemas clásicos sencillos. En 1984 Bohigas, Gioannoni y Schmit (BGS) propusieron en su trabajo [15] la conjetura que enuncia que: "*Las fluctuaciones del espectro de sistemas cuánticos invarian-*

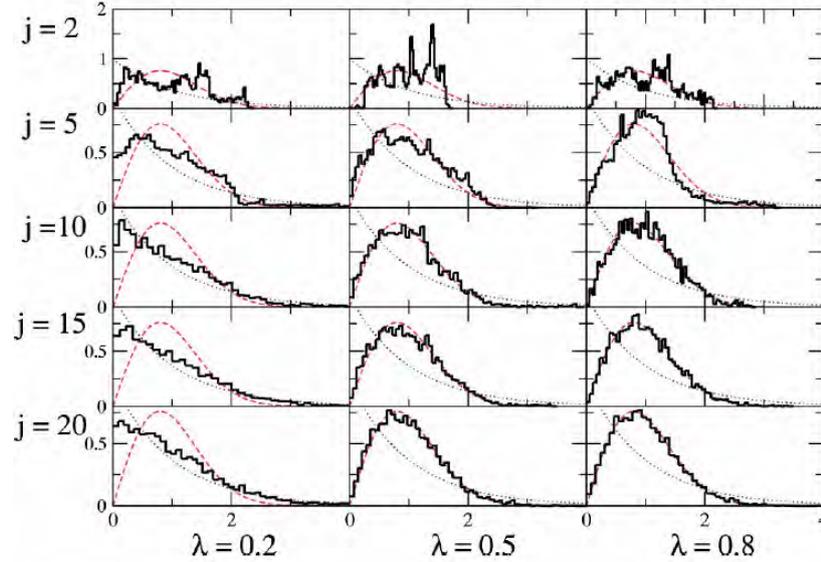


Figura 1.2: Distribuciones  $P(s)$  para el modelo de Dicke, en función de los parámetros:  $j = N/2$  y acoplamiento  $\lambda$ , donde  $N$  representa el número de partículas, las curvas azules representan un ajuste de la distribución de Poisson y las curvas rojas son las distribuciones de Wigner respectivamente (Imagen tomada del artículo [1]).

tes bajo inversión temporal cuyos análogos clásicos son sistemas  $K$  son iguales a los predichos por Ensamblas Ortogonales Gaussianos (GOE por sus siglas en ingles)”, donde los sistemas  $K$  son sistemas cuyo espacio fase es completamente caótico, a estos sistemas no es posible aplicar el teorema KAM ya que la posible perturbación es tan fuerte que podría destruir por completo los toros invariantes, las órbitas periódicas son todas inestables. Todos los sistemas  $K$  son ergódicos. Debido a la conjetura de BGS la medición de las fluctuaciones en el espectro suele realizarse empleando análisis estadísticos como la distribución del espaciamiento  $P(s)$  entre los niveles del espectro de energía: tal que  $s_i = E_{i+1} - E_i$ . La  $P(s)$  mide las correlaciones de corto alcance en el espectro y la repulsión de niveles. Una buena aproximación a la  $P(s)$  para GOE es la distribución de Wigner,

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right), \quad (1.17)$$

la cual corresponde al caso caótico de acuerdo a la conjetura BGS. En este caso  $P(0) = 0$  y para  $s \rightarrow 0$   $P(s) \sim s$ . En el caso regular, los niveles se comportan como si no estuvieran correlacionados. La  $P(s)$  sigue una ley de Poisson  $e^{-s}$ , la estadística de Poisson corresponde con el caso regular, no hay repulsión de niveles,  $P(0) = 1$ .

A modo de ejemplo, la figura 1.2 muestra la tendencia de las distribuciones de  $P(s)$ , para el modelo de Dicke, el cual presenta límites caóticos y regulares en función de algunos de los parámetros que lo conforman. Como se aprecia para valores pequeños de  $\lambda$  la distribución de Poisson predomina, es decir el sistema tiende a comportarse en forma regular de acuerdo a BGS y para valores de  $\lambda$  mayores la distribución de Wigner se ajusta mejor, por lo que se concluye que las propiedades caóticas predominan. Es notable que el ajuste a las distribuciones mencionadas, se ajusta mejor cuando el número de partículas crece, esto se debe a que el límite clásico es más cercano lo cual es consistente con la conjetura de BGS.

### 1.2.2. Redes de Peres

La noción de integrabilidad proviene de la física clásica, donde un sistema integrable tiene tantas cantidades conservadas como grados de libertad. Estas órbitas pueden ser mapeadas en el espacio fase por toros los cuales al emplear secciones de Poincaré mostrarán un comportamiento regular. Si se agrega algún tipo de perturbación en el Hamiltoniano clásico, algunas de las cantidades conservadas comenzarán a dejar de ser integrables, además si la perturbación se incrementa el toro será destruido de acuerdo a la teoría KAM y el caos surgirá.

Sin embargo para un sistema cuántico la definición de integrabilidad no podría ser la misma que la de la física clásica, debido a que no se puede emplear como tal el concepto de trayectoria.

Siguiendo esta idea A. Peres [16] enuncia una analogía en un sistema cuántico cuyo análogo clásico es integrable, debería tener un espectro regular de acuerdo a la estadística de niveles discutida en la sección previa. En esta misma línea, para un sistema no-integrable la ausencia de regularidad puede ser observada. Cuando un sistema cuántico es integrable, se puede asociar a un Hamiltoniano  $H_0$  sin perturbar un gráfico de las energías individuales contra los respectivos eigenvalores de una constante de movimiento  $P$  (llamado operador de Peres), el cuál satisfice  $[H_0, P] = 0$ , dicho gráfico formará una red de puntos distribuidos en forma regular. Cuando el sistema es perturbado,  $H = H_0 + \gamma H_1$ , con  $[H_1, P] \neq 0$  la no-integrabilidad surgirá y  $P$  dejará de ser una cantidad conservada. El efecto producido por la perturbación, desorganizará los puntos de la red en el gráfico llamado *red de Peres*. Peres notó que en un sistema clásico físicamente, el promedio temporal de cualquier cantidad que depende de las variables canónicas es una constante de movimiento, para sistemas cuánticos, esto sería correspondiente a los valores de expectación del operador de Peres. Como se aprecia en las redes de Peres de la Fig. 1.3, del modelo geométrico colectivo [2], el parámetro  $B$  interpreta la perturbación entre la integrabilidad a la no-integrabilidad y al aumentar el parámetro  $B$ , la regularidad se pierde ante los operadores  $L^2$  y  $H'$  en el respectivo modelo. Es notable observar que las perspectivas de la red dependen del operador de Peres que sea considerado en las imágenes que proveen las redes de Peres. Y también es importante resaltar que la visualización de las redes son un resultado cualitativo a la aparición de caos o regularidad cuántica.

### 1.2.3. Función de Husimi

La función de Husimi o también llamada la función  $Q$  [17] es una distribución de quasiprobabilidad en el espacio fase. Su principal función es mantener un acercamiento entre el modelo cuántico y el modelo clásico mediante un mapeo en el espacio fase del sistema. La función  $Q$  es definida como el valor de expectación de la matriz de densidad  $\hat{\rho}$  en un conjunto de estados coherentes  $|z(q, p)\rangle$  o estados Gaussianos que minimizan el principio de incertidumbre, tal que  $\Delta q \Delta p = \hbar/2$ , de este modo:

$$Q = \langle z(q, p) | \hat{\rho} | z(q, p) \rangle, \quad (1.18)$$

si se considera un estado puro la función de Husimi se calcula como,

$$Q(p, q) = |\langle z(q, p) | \Psi \rangle|^2. \quad (1.19)$$

En un contexto la función de Husimi puede considerarse como una convolución de la función de Wigner con una función Gaussiana cuya propiedad es tener un

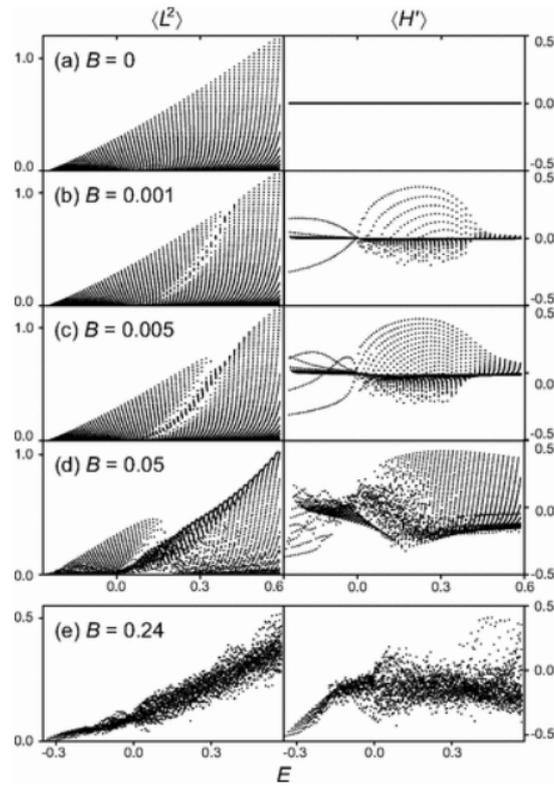


Figura 1.3: Red de Peres, para el modelo geométrico colectivo [2], para dos operadores diferentes  $L^2$  y  $H'$  en función del parámetro  $B$ .

comportamiento suave a diferencia de la función de Wigner y además la función  $Q$  es definida positiva. Estas propiedades permiten una mejor descripción de la correspondencia entre el sistema cuántico y el clásico, sobre todo en sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico, debido a la complicada estructura del espacio de fases clásico en estos sistemas.

Para autoestados  $|E_k\rangle$  con energía  $E_k$  la función  $Q$  es el módulo cuadrado de la proyección de estados coherentes en el estado propio dado. Así la función de Husimi, es

$$Q_k(p, q) = |\langle z(q, p) | E_k \rangle|^2. \quad (1.20)$$

Este puente se hace más directo cuando el factor  $\hbar_{eff}$  se hace más cercano a cero ya que la celda del volumen de la escala de Planck tiende a ser nula. En el modelo descrito en esta tesis el factor de escala  $\hbar_{eff}$  es inversamente proporcional a la cantidad  $\mathcal{N}$  de partículas descritas por el Hamiltoniano considerado, por lo cual entre mayor cantidad de partículas el comportamiento clásico es más claro. el límite clásico se alcanza cuando teóricamente el número de partículas es infinito ( $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ ), en la literatura esta correspondencia es conocida como el *límite termodinámico*.

#### 1.2.4. Razón de participación (PR)

La razón de participación (PR por sus siglas en inglés) es una medida de localización de un estado cuántico que fue introducida hace varios años [18, 19]. Este indicador ha sido aplicado en el estudio de equilibrio de sistemas de muchos cuerpos en modelos cuánticos cerrados [20]. En especial ha sido empleado para mostrar la relación entre caos cuántico y delocalización.

Para un estado cuántico puro  $|\Psi\rangle$ , expandido en alguna base  $\{|\phi\rangle\}$  de dimensión  $N$ , la razón de participación se define como,

$$P_R = \frac{1}{\sum_{k=1}^N |\langle\phi_k|\Psi\rangle|^4}. \quad (1.21)$$

La razón de participación está definida en un intervalo  $P_R \in [1, N]$ . Cuando  $P_R = 1$ , significa que el estado  $|\Psi\rangle$  es idéntico a uno de los estados de la base en la que se expandió el estado puro, y se considera que tiene un máximo de localización. Por otro lado si cada estado de la base expandida contribuye de la misma manera, se tiene que  $\langle\phi_n|\Psi\rangle = 1/\sqrt{N}$ , en este caso,  $P_R = N$ .

En la literatura también es posible encontrarlo como el inverso de la razón de participación ó  $IPR$  (por sus siglas en ingles), que se define literalmente como el recíproco del  $P_R$ , es decir:

$$IPR = \frac{1}{P_R} = \sum_{k=1}^N |\langle\phi_k|\Psi\rangle|^4 \quad (1.22)$$

Debido a la característica cuantitativa que otorga el  $P_R$  una medida de localización, en un sistema cuántico, el  $P_R$  ha dado origen a diversos trabajos como una forma en la que se puede hacer una cuantificación de caos, sin embargo es importante resaltar que dicha medida depende de la base en la que se hace la expansión.

### 1.2.5. Probabilidad de Supervivencia

La probabilidad de supervivencia, se define como la probabilidad de encontrar al tiempo  $t$  un estado inicial evolucionado en el tiempo, por ello en ocasiones se le considera como una función de autocorrelación, la probabilidad de supervivencia ó  $SP$  se define de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} SP(t) &= |\langle\Psi(0)|\Psi(t)\rangle|^2 = \left| \sum_k |c_k|^2 e^{-iE_k t} \right|^2 \\ &= IPR + \sum_{k \neq k'} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 e^{-i(E_k - E_{k'})t}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde  $c_k = \langle E_k | \Psi(0) \rangle$  es la proyección en términos de los autoestados del Hamiltoniano  $|E_k\rangle$ , e  $IPR = \sum_k |c_k|^4$  es el inverso de la razón de participación definido en (1.22), identificando  $\{|\phi_k\rangle\}$  con los autoestados  $\{|E_k\rangle\}$  del Hamiltoniano.

A tiempos muy cortos la  $SP$  muestra un comportamiento universal, el cual hace que decaiga en forma cuadrática y a tiempos muy largos, la  $SP$  se saturará. De acuerdo a (1.23), el  $IPR$  es el valor al que converge la probabilidad de supervivencia cuando el tiempo crece, esto es debido a que si no se presentan muchas degeneraciones en el espectro del sistema, el segundo término se promediaría como cero. Las fluctuaciones temporales de  $SP(t)$  son del orden del  $IPR$  [21], esto se concluye del siguiente desarrollo en el que se muestra explícitamente este cálculo.

Escribiendo  $SP$  como

$$\begin{aligned}
 SP(t) &= \left| \sum_k |c_k|^2 e^{-iE_k t} \right|^2 \\
 &= \sum_k |c_k|^2 e^{iE_k t} \sum_{k'} |c_{k'}|^2 e^{-iE_{k'} t} \\
 &= \sum_k |c_k|^4 + \sum_{k, k' \neq k} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 \exp [i(E_k - E_{k'})t]. \\
 &= \sum_k |c_k|^4 + 2 \sum_{k, k' < k} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 \cos [(E_k - E_{k'})t].
 \end{aligned}$$

Al tomar el promedio temporal a tiempos grandes, la función coseno promedia a cero. Si el sistema no presenta degeneraciones se tiene que,

$$\overline{SP} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t SP(t') dt'}{t} = \sum_k |c_k|^4 = IPR, \quad (1.24)$$

Para calcular las fluctuaciones temporales en la probabilidad de supervivencia, se calcula,

$$\begin{aligned}
 SP(t)^2 &= \left( IPR + 2 \sum_{k, k' < k} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 \cos [(E_k - E_{k'})t] \right)^2 \\
 &= IPR^2 + 4 IPR \sum_{k, k' < k} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 \cos [(E_k - E_{k'})t] \\
 &\quad + 4 \sum_{k, k' < k} \sum_{\substack{\ell \\ \ell' < \ell}} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 |c_\ell|^2 |c_{\ell'}|^2 \times \\
 &\quad \cos [(E_k - E_{k'})t] \cos [(E_\ell - E_{\ell'})t] \\
 &= IPR^2 + 4 IPR \sum_{k, k' < k} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 \cos [(E_k - E_{k'})t] \\
 &\quad + 4 \sum_{k, k' < k} |c_k|^4 |c_{k'}|^4 \cos^2 [(E_k - E_{k'})t] \\
 &\quad + 4 \sum_{k, k' < k} \sum_{\substack{\ell \neq k \\ \ell' < \ell}} |c_k|^2 |c_{k'}|^2 |c_\ell|^2 |c_{\ell'}|^2 \times \\
 &\quad \cos [(E_k - E_{k'})t] \cos [(E_\ell - E_{\ell'})t].
 \end{aligned}$$

Tomando el promedio a tiempos largos, la función coseno y el producto de la función coseno promedia a cero, asumiendo que el sistema no tiene degeneraciones se tiene que,

$$\begin{aligned}
 \overline{SP^2} &= IPR^2 + 4 \sum_{k, k' < k} |c_k|^4 |c_{k'}|^4 \overline{\cos^2 [(E_k - E_{k'})t]} \\
 &= IPR^2 + 2 \sum_{k, k' < k} |c_k|^4 |c_{k'}|^4 \\
 &= IPR^2 + \sum_{k, k'} |c_k|^4 |c_{k'}|^4 - \sum_k |c_k|^8 = 2 IPR^2 - \sum_k |c_k|^8.
 \end{aligned}$$

Como el último término es positivo (y en la mayoría de los casos muy pequeño), se puede escribir

$$\overline{SP^2} \lesssim 2 IPR^2.$$

Por lo tanto la varianza de la fluctuación temporal de la probabilidad de supervivencia es

$$\sigma_{SP}^2 = \overline{SP^2} - \overline{SP}^2 \lesssim 2IPR^2 - IPR^2 = IPR^2,$$

implicando que

$$\sigma_{SP} \lesssim IPR. \quad (1.25)$$

### 1.2.6. OTOC

La dinámica que involucra problemas de muchos cuerpos cuánticos fuera de equilibrio es un objeto de amplio estudio que abarca desde la teoría de cuerdas y agujeros negros hasta la materia condensada, la física atómica y la física nuclear. En especial en la teoría Holográfica se investiga la conexión entre la física de un agujero negro y la dinámica cuántica como formas duales en su tratamiento [22]. En esta vertiente, el caos que se observa dentro de la dinámica de un agujero negro puede estudiarse por medio de un *correlador ordenado fuera de tiempo* (que por sus siglas en ingles se nombra (OTOC)) y la termalización que se produce en este sistema [23], cuyo objetivo es caracterizar escalas de tiempo, en las que el sistema puede arrojar un exponente de Lyapunov análogo al clásico, pero cuyo fundamento nace de la estructura Holográfica que J. Maldacena menciona en 1998, con su propia conjetura, la cual propone una equivalencia entre ciertas teorías de gravedad cuántica y cualquier teoría conforme de campos, bajo determinadas condiciones.

El correlador ordenado fuera de tiempo u OTOC es una función cercanamente relacionada con el conmutador de operadores separados en el tiempo y es definida de la siguiente manera:

$$C(t) = -\langle [W(t), V(0)]^2 \rangle_\beta \quad (1.26)$$

donde  $\langle \cdot \rangle_\beta = Z^{-1} \text{tr} [e^{-\beta H}]$  denota el valor de expectación térmico a temperatura  $T = (k_B \beta)^{-1}$ . En general se asumirán  $V(0)$  y  $W(0)$  como operadores Hermitianos. Esquemáticamente en un límite semiclásico  $V = p$  y  $W(t) = q(t)$ , y el conmutador  $[q(t), p]$  se relacionará directamente con el paréntesis de Poisson  $\{q(t), p\} = \frac{\partial q(t)}{\partial q(0)}$ .

Como se menciona en la sección 1.1.2, para un sistema caótico la sensibilidad ante condiciones iniciales es muy importante y la divergencia entre trayectorias cercanas crecerá en forma exponencial por tal motivo  $\{q(t), p\} \sim e^{\lambda t}$  con  $\lambda$  el exponente de Lyapunov clásico. De este modo en la forma cuántica haciendo esta comparativa, el OTOC crecería en forma exponencial si el sistema es caótico como  $C(t) \sim \hbar e^{2\lambda t}$  hasta algún tiempo  $t^*$  donde  $t^* \sim \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\hbar}$ , en este contexto  $t^*$  es llamado el *tiempo de Ehrenfest*. En sistemas de qubits modelados por matrices de Pauli, un OTOC muy grande indica que la complejidad del operador  $W(t)$  surge del caos que produce la cancelación entre los factores iniciales y finales en  $W(t) = e^{iHt} W e^{-iHt}$  [23].

#### OTOC del ensamble microcanónico

Si se consideran estados arbitrarios  $|S\rangle$  para el valor de expectación del conmutador  $[\hat{q}(t), \hat{p}(0)]$ , tal que,

$$C_S(t) \equiv -\langle S | [\hat{q}(t), \hat{p}(0)]^2 | S \rangle, \quad (1.27)$$

es conveniente, expandir el estado arbitrario en términos de los estados propios del Hamiltoniano tal que  $|S\rangle = \sum_n a_n^{(S)} |E_n\rangle$ , de esta forma el OTOC, se puede expresar como,

$$C_S(t) = \sum_{n'n} a_n^{(S)*} a_n^{(S)} c_{n'n}(t), \quad (1.28)$$

donde los términos  $c_{n'n}(t)$ , toman la siguiente forma:

$$c_{n'n}(t) = -\langle \Psi_{n'} | [\hat{q}(t), \hat{p}(0)]^2 | \Psi_n \rangle. \quad (1.29)$$

En especial el término  $c_{nn}(t) = c_n(t)$  es de interés particular, y será nombrado el correlador ordenado fuera de tiempo microcanónico, o MOTOC por sus siglas en ingles [24]. Usando la relación de completez de los estados propios de energía  $\sum_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| = \mathbb{I}$ , donde  $H|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle$ , el MOTOC puede calcularse así,

$$c_n(t) = \sum_l b_{nl}(t) b_{nl}^*(t) \quad (1.30)$$

donde los elementos de matriz son,

$$b_{nl}(t) = -i\langle \Psi_n | [\hat{q}(t), \hat{p}(0)] | \Psi_l \rangle, \quad (1.31)$$

satisfacen relaciones de Hermiticidad, por definición. Usando la evolución temporal de los operadores  $\hat{q}(t) = e^{iHt}\hat{q}e^{-iHt}$  y la relación de completez de los estados propios de energía, los elementos de matriz se calculan por,

$$b_{nl}(t) = -i \sum_k e^{i\omega_{nk}t} q_{nk} p_{kl} - e^{i\omega_{kl}t} p_{nk} q_{kl}, \quad (1.32)$$

donde  $q_{kl} = \langle \Psi_k | \hat{q} | \Psi_l \rangle$ ,  $p_{kl} = \langle \Psi_k | \hat{p} | \Psi_l \rangle$ , y  $\omega_{kl} = E_k - E_l$ .

Este desarrollo es vital para el desarrollo del cálculo del exponente de Lyapunov cuántico  $\Lambda$ , que se muestra en el capítulo 6.

### 1.2.7. Estados de pseudoespín y estados coherentes $HW(1)$ y $SU(2)$

#### Estados de Pseudoespín

En muchos modelos cuánticos los observables más relevantes forman un álgebra, permitiendo una descripción analítica de muchas de sus propiedades. Un conjunto de operadores muy interesantes por las aplicaciones que tienen en cantidades innumerables de modelos nucleares, atómicos, óptico cuánticos etc, son los operadores colectivos de pseudoespín. Estos operadores se pueden definir a través de las matrices de Pauli de la siguiente manera

$$J_\alpha = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \sigma_\alpha^{(k)} \quad (1.33)$$

donde  $\alpha = \{x, y, z\}$  y  $\mathcal{N}$  es el número de objetos cuánticos (qubits, átomos de dos niveles, electrones, etc) que conforman el sistema. Los operadores  $J_\alpha$  satisfacen el álgebra de Lie del grupo  $SU(2)$  debido a que están definidos en términos de las

matrices de Pauli que forman la base generadora de dicha álgebra. Por lo tanto satisfacen las siguientes relaciones de conmutación,

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i \epsilon_{ijk} J_k \\ [\mathbf{J}^2, J_i] &= 0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo de Levi-Civita. Un eigenestado de  $\mathbf{J}^2$  y  $J_z$  (sabemos que no es eigenestado de  $J_x$  ni de  $J_y$ ) lo escribimos como  $|j m\rangle$ , donde los eigenvalores de los eigenestados están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |j m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle, \\ J_z |j m\rangle &= \hbar m |j m\rangle. \end{aligned} \quad (1.35)$$

donde  $-j \leq m \leq j$  y  $0 \leq j \leq \mathcal{N}/2$ .

Al definir  $J_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_x \pm i J_y)$  se satisfacen las propiedades de conmutación ante estos operadores llamados operadores escalera,

$$\begin{aligned} [J_z, J_{\pm}] &= \hbar J_{\pm}, \\ [J_+, J_-] &= \hbar J_z, \end{aligned} \quad (1.36)$$

### Estados coherentes en la mecánica cuántica

El término *estado coherente* refiere a un estado particular de un sistema cuántico [25], con propiedades inusuales que se pueden discutir en el límite clásico de la teoría cuántica [26, 27]. Uno de los factores que los hace importantes radica en que los estados coherentes, al ser la mejor aproximación cuántica de un estado clásico, permiten construir la aproximación semiclásica cuando el Hamiltoniano es algebraico (se expresa con operadores que forman un álgebra de un grupo). Una base más apropiada para muchos campos es la de los estados coherentes, donde el producto de la incertidumbre en amplitud y fase es el mínimo del principio de incertidumbre de Heisenberg, en este sentido, son los estados cuánticos más cercanos a una descripción del campo clásico [26].

### Estados coherentes de Glauber

Los estados coherentes de Glauber poseen varias propiedades atractivas puesto que son una descripción cuántica de los campos electromagnéticos clásicos y su espacio de Hilbert está dado por el espacio generado por los estados de Fock [27]. Fueron introducidos por Glauber [25], tal que una propiedad útil de los estados coherentes es que en la base de Fock son estados propios del operador de aniquilación  $a$ .

Los estados coherentes se pueden definir de tres maneras distintas,

1. Como una traslación del estado vacío de la base de Fock a través de un operador de desplazamiento  $|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle$ . Donde  $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$  es un operador unitario ya que satisfacen la relación

$$D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha). \quad (1.37)$$

2. Como eigenestados del operador de aniquilación  $a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ .
3. Como estados de mínima incertidumbre  $\Delta q \Delta p = \hbar/2$ . Donde  $\Delta q$  y  $\Delta p$  representan las varianzas de ambos operadores.

### Propiedades de los estados coherentes de Glauber:

Para cualquier número complejo  $\alpha$  se define el estado coherente como

$$|\alpha\rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} |n\rangle, \quad (1.38)$$

donde  $|n\rangle$  es un ket en el estado de ocupación de número  $n$  en el espacio de Fock. Una manera muy útil de expresar los estados coherentes (1.38) es,

$$|\alpha\rangle \equiv e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle, \quad (1.39)$$

donde  $|0\rangle$  se define como el estado de vacío que satisface  $a |0\rangle = 0$ , de modo que  $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$ . Un estado coherente es una superposición de estados de diferentes números de ocupación y la probabilidad de encontrar el número de ocupación  $n$  es,

$$P(E_n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (1.40)$$

donde  $|\alpha|^2$  es el número medio de fotones

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (1.41)$$

La ecuación (1.40) tiene una distribución de Poisson<sup>1</sup> (de donde la utilidad potencial del estado coherente es describir ciertas situaciones estadísticas que implican muchos fotones).

Al derivar parcialmente respecto a  $\alpha$  (1.39), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} |\alpha\rangle &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} \right) |0\rangle \\ &= \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \right) e^{\alpha a^\dagger} + e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( e^{\alpha a^\dagger} \right) \right\} |0\rangle \\ &= \left\{ \left( -\alpha^* e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \right) e^{\alpha a^\dagger} + e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \left( a^\dagger e^{\alpha a^\dagger} \right) \right\} |0\rangle \\ &= -\alpha^* e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle + a^\dagger e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \\ &= -\alpha^* |\alpha\rangle + a^\dagger |\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (1.43)$$

esto es útil debido a que permite calcular valores esperados como derivadas. De (1.43) se obtiene la siguiente relación,

<sup>1</sup>La distribución de Poisson tiene un gran campo de aplicación, es una distribución de probabilidad discreta cuya función de densidad es

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}. \quad (1.42)$$

Esta fórmula está definida para cero y para todo valor entero positivo de  $x$ , la media y varianza de la distribución de Poisson son  $\mu = \lambda$  y  $\sigma^2 = \lambda$ .

$$a^\dagger |\alpha\rangle = \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} + \alpha^* \right) |\alpha\rangle. \quad (1.44)$$

Una propiedad importante es que  $|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}$ . Por lo cual podemos ver que no son ortogonales pero sí están normalizados. Usando la completez de los estados de Fock:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| &= \int d\alpha \frac{1}{\pi} \sum_n \sum_{n'} |n\rangle \langle n| |\alpha\rangle \langle \alpha| |n'\rangle \langle n'| \\ &= \sum_n \sum_{n'} \int \frac{d\alpha}{\pi} |n\rangle \langle n'| \langle n|\alpha\rangle \langle \alpha|n'\rangle \\ &= \sum_n \sum_{n'} \left( \int \frac{d\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n! n'!}} \right) |n\rangle \langle n'| \end{aligned} \quad (1.45)$$

Donde

$$\int \frac{d\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n! n'!}} = \pi n! \delta_{n,n'} \quad (1.46)$$

Por lo tanto el conjunto  $\{|\alpha\rangle\}$  es sobrecompleto y permite expresar la unidad como  $\mathbb{I} = \int \frac{d\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha|$ . De esta manera podemos usar a los estados coherentes como un conjunto generador para expresar otros estados como si fuesen una base, aún cuando no son ortogonales. Entonces un estado u operador cualquiera se puede expresar en términos de los estados coherentes:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int \frac{d\alpha}{\pi} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} f(\alpha^*) |\alpha\rangle, \\ \hat{O} &= \int \frac{d\alpha}{\pi} \frac{d\beta}{\pi} |\beta\rangle \langle \beta| \hat{O} |\alpha\rangle \langle \alpha|, \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$f(\alpha^*) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \langle \alpha | \psi \rangle.$$

Para los operadores de creación y aniquilación se tiene

$$\begin{aligned} \langle \alpha | a | \alpha \rangle &= \alpha, \\ \langle \alpha | a^\dagger | \alpha \rangle &= \alpha^*, \\ \langle \beta | a | \alpha \rangle &= \alpha e^{-\frac{|\alpha - \beta|^2}{2}}, \\ \langle \beta | a^\dagger | \alpha \rangle &= \beta^* e^{-\frac{|\alpha - \beta|^2}{2}}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

### Estados coherentes de Bloch

Los estados coherentes de Bloch [28] pueden definirse en torno a un operador de desplazamiento  $\Omega(z)$  en su respectiva álgebra  $SU(2)$ , que geoméricamente es afín a una esfera  $S^2$  llamada esfera de Bloch. Los estados coherentes de Bloch se definen introduciendo el operador

$$\Omega(z) = e^{z J_+ - z^* J_-}, \quad (1.49)$$

con  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}$ .  $\Omega(z)$  es un operador unitario ya que

$$\Omega^\dagger(z) = \Omega(-z) = \Omega^{-1}(z). \quad (1.50)$$

Los estados coherentes de Bloch en términos del operador de desplazamiento se definen como

$$|z\rangle = \Omega(z)|j, -j\rangle \quad (1.51)$$

y se pueden expresar como

$$|z\rangle = \frac{1}{(1+|z|^2)^j} e^{zJ_+} |j, -j\rangle \quad (1.52)$$

donde  $|j, j\rangle$  es el máximo eigenestado de  $J_z$ , es decir,  $J_z |j, j\rangle = j |j, j\rangle$ . Los valores de expectación para los operadores de pseudoespín  $J_z$ ,  $J_\pm$  y  $J_i$  ( $i = \{x, y, z\}$ ) son

$$\begin{aligned} \langle z | J_z | z \rangle &= -j \cos \phi = -j l_z, \\ \langle z | J_x | z \rangle &= -j \sin \theta \cos \phi = -j l_x, \\ \langle z | J_y | z \rangle &= -j \sin \theta \sin \phi = -j l_y, \\ \langle z | J_\pm | z \rangle &= -j \sin \theta e^{\pm \phi}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

donde  $l_{x,y,z}$  son las tres componentes del vector unitario

$$\mathbf{l} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^T, \quad (1.54)$$

cuya orientación angular es definida a través de los ángulos  $\phi$  y  $\theta$ . Momentos más altos revelan incertidumbre angular mínima, caracterizada por el ángulo sólido  $4\pi/(2j+1)$ . El conjunto de  $\{|z\rangle\}$  es sobre completo y permite expresar la unidad por  $\mathbb{I} = \int dz \frac{2j+1}{\pi(1+|z|^2)^2} |z\rangle \langle z|$ . Dos estados coherentes de espín tienen la superposición  $\langle z | z' \rangle = \frac{(1+z^*z')^{2j}}{(1+|z|^2)^j(1+|z'|^2)^j}$ .

## 1.3. Campo electromagnético

### 1.3.1. Campo electromagnético clásico

El campo electromagnético se puede desarrollar, en términos de los modos en una cavidad, reduciendo el problema a la cuantización de osciladores armónicos correspondientes a los modos individuales de la cavidad [29]. Un conveniente punto de partida de la cuantización del campo electromagnético son las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell, en espacio libre de fuentes obedecen [30]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

donde  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$  son la permeabilidad magnética y permitividad eléctrica del vacío, y  $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$ .

Las ecuaciones de Maxwell son invariantes de norma o invariantes de Gauge. En óptica cuántica es conveniente trabajar en la norma de Coulomb donde los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  pueden ser determinados por el potencial vectorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  [29]

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},\end{aligned}\tag{1.56}$$

con la condición de la norma de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.\tag{1.57}$$

Así  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}.\tag{1.58}$$

La solución general de la ecuación (1.58), para una cavidad tiene la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t} + c.c.],\tag{1.59}$$

*c.c* indica el complejo conjugado del término anterior. Los coeficientes  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$  se determinan a partir de las condiciones iniciales y de la condición de trasversalidad dada por la condición de Coulomb (1.57).

Es útil separar el vector potencial en dos términos complejos como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t),\tag{1.60}$$

donde  $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  contiene todas las amplitudes que van como  $e^{-i\omega t}$  para  $\omega > 0$  y  $\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  contiene todas las amplitudes para  $e^{i\omega t}$ , además  $\mathbf{A}^{(-)} = (\mathbf{A}^{(+)})^*$ , donde las componentes del vector de onda vienen dadas por  $k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$  y  $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  y la frecuencias satisfacen la relación de dispersión

$$\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|.\tag{1.61}$$

La energía para el campo electromagnético [30] esta dado por,

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{H}^2 \right) d\mathbf{r}.\tag{1.62}$$

Sustituyendo (1.59) en (1.56) se obtienen los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  respectivamente, donde,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \sum_{\mathbf{k}} [i c k \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t} + c.c.], \\ \mathbf{B} &= \sum_{\mathbf{k}} [-i(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t} + c.c.],\end{aligned}\tag{1.63}$$

y debido a que

$$\int_V e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = V \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\tag{1.64}$$

la energía del campo electromagnético se simplifica en términos de los coeficientes  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$  de la siguiente manera

$$H = \frac{2V}{\mu_0} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*.\tag{1.65}$$

Como la expresión (1.65) no es una función Hamiltoniana ya que no está definida en términos de variables canónicas, se puede definir,

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}(t) = \alpha [\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega(\mathbf{k})t}], \quad (1.66)$$

donde  $\alpha$  es una constante real a determinar y

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}(t) = \alpha [-i\omega(\mathbf{k})\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + i\omega(\mathbf{k})\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega(\mathbf{k})t}], \quad (1.67)$$

de esta forma se puede expresar

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\alpha} e^{i\omega(\mathbf{k})t} \left( \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega(\mathbf{k})} \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \right). \quad (1.68)$$

Al reemplazar (1.68) en la ecuación (1.65) se tiene

$$H = \frac{V\epsilon_0}{2\alpha^2} \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega^2(\mathbf{k})\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2] \quad (1.69)$$

al tomar  $\alpha = \sqrt{V\epsilon}$  las variables  $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$  y  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$  son variables canónicas entre sí que satisfacen las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}}}, \quad \dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}}, \quad (1.70)$$

por otro lado la condición de transversalidad de los campos impone que  $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0$ , lo cual implica que los vectores son normales a la dirección de propagación de la onda dada por el vector  $\mathbf{k}$ , por lo tanto el Hamiltoniano se puede reescribir como

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},j} [\mathbf{P}_{\mathbf{k},j}^2 + \omega^2(\mathbf{k})\mathbf{Q}_{\mathbf{k},j}^2], \quad (1.71)$$

donde  $\mathbf{P}_{\mathbf{k},j}$  y  $\mathbf{Q}_{\mathbf{k},j}$  son las componentes de  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$  y  $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$  de los vectores de polarización lineal  $\boldsymbol{\epsilon}_j(\mathbf{k})$ , con  $j = 1, 2$ , los cuales satisfacen  $\boldsymbol{\epsilon}_1(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2(\mathbf{k}) = 0$  y  $\boldsymbol{\epsilon}_j(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0$ .

### 1.3.2. Cuantización del campo electromagnético

En 1928 P. Dirac sugirió que el campo electromagnético podía ser cuantizado tratando las variables canónicas clásicas  $P_{\mathbf{k},j}$  y  $Q_{\mathbf{k},j}$  [31] como operadores que obedecen las relaciones de conmutación,

$$[Q_{\mathbf{k},j}, P_{\mathbf{k}',j'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{j,j'}, \quad [P_{\mathbf{k},j}, P_{\mathbf{k}',j'}] = [Q_{\mathbf{k},j}, Q_{\mathbf{k}',j'}] = 0. \quad (1.72)$$

A partir de los resultados de la sección anterior se introducen los operadores de creación y aniquilación,

$$a_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2\hbar}} e^{i\omega(\mathbf{k})t} \left( Q_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega(\mathbf{k})} P_{\mathbf{k}} \right). \quad (1.73)$$

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2\hbar}} e^{i\omega(\mathbf{k})t} \left( Q_{\mathbf{k}} - \frac{i}{\omega(\mathbf{k})} P_{\mathbf{k}} \right). \quad (1.74)$$

los cuales satisfacen las relaciones de conmutación

$$[a_{\mathbf{k},j}, a_{\mathbf{k}',j'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{j,j'}, \quad [a_{\mathbf{k},j}^\dagger, a_{\mathbf{k}',j'}^\dagger] = [a_{\mathbf{k},j}, a_{\mathbf{k}',j'}] = 0. \quad (1.75)$$

En términos de estos operadores el Hamiltoniano cuantizado es,

$$H = \sum_{\mathbf{k},j} \hbar\omega(\mathbf{k}) \left( a_{\mathbf{k},j}^\dagger a_{\mathbf{k},j} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.76)$$

Los operadores  $N_j(\mathbf{k}) = a_{\mathbf{k},j}^\dagger a_{\mathbf{k},j}$  se denominan *operadores de número*, tienen autovalores  $n_j(\mathbf{k}) = 0, 1, 2, \dots$  y autoestados de la forma

$$|n_j(\mathbf{k})\rangle = \frac{(a_{\mathbf{k},j}^\dagger)^{n_j(\mathbf{k})}}{\sqrt{n_j(\mathbf{k})!}} |0\rangle. \quad (1.77)$$

Los autoestados del Hamiltoniano de radiación (1.76) son productos de tales estados, esto es,

$$|\dots n_j(\mathbf{k}) \dots\rangle = \prod_{\mathbf{k},j} |n_j(\mathbf{k})\rangle \quad (1.78)$$

con autoenergías

$$\sum_{\mathbf{k},j} \hbar\omega(\mathbf{k}) \left( n_j(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right). \quad (1.79)$$

El operador de momento lineal del campo electromagnético resulta

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k},j} \hbar\mathbf{k} N_j(\mathbf{k}), \quad (1.80)$$

la interpretación de estos resultados en términos de partículas de energía  $\hbar\omega(\mathbf{k})$  y momento lineal  $\hbar\mathbf{k}$ , esto es fotones, es directa. Un estado con autovalor  $n_j(\mathbf{k})$  posee  $n_j(\mathbf{k})$  con energía  $\hbar\omega(\mathbf{k})$  y momento lineal  $\hbar\mathbf{k}$ .

# Capítulo 2

## El modelo de Dicke

*“La Física es como el sexo: seguro que da alguna compensación práctica, pero no es por eso por lo que la hacemos.”*  
-Richard Feynman-

El Hamiltoniano que modela la interacción entre un conjunto de  $\mathcal{N}$  átomos y un campo, en la norma Gaussiana, es

$$H_{af} = \omega a^\dagger a + \sum_i^{\mathcal{N}} \left[ \frac{1}{2m_i} \left( p_i - \frac{e}{c} A(x_i) \right)^2 + V_i(x_i) \right] + \sum_{i < j}^{\mathcal{N}} V_{ij}(x_i - x_j), \quad (2.1)$$

donde  $a$  y  $a^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación (ver Apéndice 1.2.7),  $A$  es el potencial vectorial,  $m_i$ ,  $x_i$  y  $p_i$  son la masa, posición y momento del  $i$ -ésimo átomo,  $V_i$  es el potencial producido por cada átomo y el último término es la suma de las interacciones entre cada uno de los átomos.

Debido a que el Hamiltoniano (2.1) tiene una complejidad muy grande al momento de ser estudiado, en el año de 1954 el físico estadounidense Robert Henry Dicke propuso una forma de describir el problema en el llamado Hamiltoniano de Dicke.

El Hamiltoniano del modelo de Dicke [32] describe un sistema de  $\mathcal{N}$  átomos de dos niveles que interactúan con radiación electromagnética monocromática en una cavidad (ver figura 2.2). Este Hamiltoniano es útil para describir otros sistemas, como los circuitos superconductores [33].

Las suposiciones que requiere el Hamiltoniano de Dicke en el sistema son:



Figura 2.1: Robert Henry Dicke.

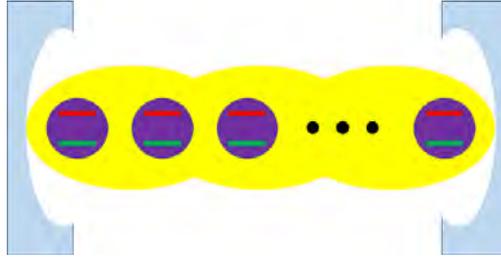


Figura 2.2: Representación de una cavidad óptica:  $\mathcal{N}$  átomos de dos niveles interactuando con un campo de fotones de un solo modo.

1. El campo posee solo un modo en la cavidad.
2. Los átomos  $\mathcal{N}$  poseen dos niveles de energía solamente.
3. El campo no cambia significativamente en el espacio, es el mismo para todos, (aproximación de onda larga).
4. Los términos cuadráticos de  $A$  no se incluyen.
5. La interacción interatómica es débil y es despreciable.

Estas aproximaciones hacen al problema manejable, sin embargo imponen una serie de condiciones, para que sean realizables experimentalmente; se requiere una cavidad óptica perfecta; seleccionar las transiciones electrónicas de tal forma que sólo se tengan dos niveles de energía por átomo; la aproximación de onda larga implica que la región donde están confinados los átomos sea pequeña comparada con la longitud de onda del campo. Usando estas aproximaciones, Dicke encontró que si el estado cuenta con la mitad de los átomos excitados el gas presenta un coeficiente de radiación espontánea proporcional al cuadrado del número de partículas y no una relación lineal que se espera clásicamente, por tal motivo la nombró fase *super-radiante*. Esta fase es resultado de un comportamiento colectivo de los átomos.

El modelo es simple y no es soluble de manera exacta. Una característica importante es que presenta una transición cuántica de fase (QPT por sus siglas en inglés) de segundo orden en el límite termodinámico. El Hamiltoniano consiste de tres partes, una asociada a la cuantización del campo electromagnético, un segundo término atómico y el tercer y último describe la interacción entre ellos.

En general es muy complicada la realización experimental de este modelo tal como fue propuesto por Dicke. En los últimos años se ha encontrado una relación entre el modelo de Dicke con un condensado Bose-Einstein dentro de una cavidad donde se incide un láser de bombeo de forma perpendicular a la cavidad [34], el condensado a cierta potencia particular del bombeo exhibe un auto-ordenamiento en la estructura el cual es equivalente a la transición de fase de un estado normal a uno super radiante en el modelo de Dicke. Dicha transición se ha observado experimentalmente por Baumann y colaboradores [35].

El Hamiltoniano de Dicke puede ser escrito como

$$H_D = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_0 J_z + \hbar \frac{\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} (a + a^\dagger)(J_+ + J_-), \quad (2.2)$$

El modo de radiación, con frecuencia  $\omega$ , está asociado con el operador de número de fotones  $a^\dagger a$ , para la parte atómica  $\hbar\omega_0$  es la energía de excitación,  $J_z$ ,  $J_+$  y  $J_-$ , son los operadores de pseudoespín que obedecen el álgebra  $SU(2)$ , con  $j(j+1)$  los eigenvalores del operador  $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  donde  $j = \mathcal{N}/2$  define la simetría atómica que incluye el estado base y  $\gamma$  es un parámetro de interacción, que para sistemas atómicos depende principalmente del momento dipolar.

La expresión de interacción contiene un término llamado antiresonante  $J_+ a^\dagger + J_- a$ , donde  $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ .

Además  $H_D$  conmuta con el operador de paridad  $\Pi$ ,

$$\Pi = e^{i\pi\Lambda}, \quad \text{con } \Lambda = a^\dagger a + J_z + 1/2(\sqrt{1 + 4\mathbf{J}^2} - 1). \quad (2.3)$$

Los eigenvalores del operador  $\Lambda$  son  $\lambda = n + m + j$  [1], donde  $n$  es el número de fotones y  $n_{exc} = m + j$  es el número de átomos excitados. Cuando el parámetro de interacción toma el valor crítico  $\gamma_c = \sqrt{\omega\omega_0}/2$ , el sistema transita una transición de fase cuántica entre la fase normal ( $\gamma < \gamma_c$ ) y una fase super radiante ( $\gamma > \gamma_c$ ). En la fase normal el espacio fase tiene  $\lambda = 0$ , es decir no hay fotones y todos los átomos están en el estado base. La fase super radiante es caracterizada por una población macroscópica del nivel superior atómico y un número de fotones promedio comparable al número de átomos en el estado base del sistema.

En general, para  $\mathcal{N}$  finita el Hamiltoniano de Dicke no es integrable, sin embargo sí lo es en los límites cuando  $\gamma \rightarrow 0$  y cuando  $\omega_0 \rightarrow 0$  [1].

## 2.1. Hamiltoniano extendido de Dicke

Además cuando el acoplamiento es débil es posible emplear la aproximación de onda rotante al ignorar los términos contra-rotantes, este resultado es otro límite integrable, el Hamiltoniano de Tavis-Cummings

$$H_{TC} = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_0 J_z + \hbar \frac{\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} (aJ_+ + a^\dagger J_-), \quad (2.4)$$

en este caso el Hamiltoniano es integrable debido a que conmuta con el operador  $\Lambda$ .

Se pueden escribir ambos modelos en una expresión,

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_0 J_z + \hbar \frac{\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} [(aJ_+ + a^\dagger J_-) + \delta(a^\dagger J_+ + aJ_-)], \quad (2.5)$$

donde  $\delta = 0$  y  $1$  representan el modelo de TC y Dicke, respectivamente.

Con esta parametrización los valores críticos para la transición de fase (QPT) son  $\gamma = \sqrt{\omega_0\omega}/(1 + \delta)$ .

## 2.2. Hamiltoniano clásico

Considerando el producto directo de estados coherentes, dados por (1.38) y (1.52) pueden escribirse en términos de sumas al expandir las exponenciales correspondientes de los operadores [36] como

$$|\alpha\rangle \otimes |\zeta\rangle = \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{(1 + |\zeta|^2)^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{\alpha^\nu}{\sqrt{\nu!}} \binom{2j}{j+m}^{1/2} \zeta^{j+m} |\nu\rangle \otimes |j, m\rangle. \quad (2.6)$$

De esta manera la superficie de energía semiclassical se encuentra fácilmente tomando el valor esperado del Hamiltoniano de Dicke respecto a la base  $|\alpha, \zeta\rangle$  [36, 3] y es posible obtener la mejor aproximación variacional a la energía del estado fundamental del sistema, así como su correspondiente estado propio. Utilizando las relaciones de la ecuación (1.53) se tiene que en este caso el valor esperado de energía tiene la forma,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(\alpha, \zeta) &= \langle \alpha, \zeta | H | \alpha, \zeta \rangle & (2.7) \\
 &= \langle \alpha, \zeta | \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega_0 J_z + \hbar \frac{\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} (aJ_+ + a^\dagger J_-) + \hbar \frac{\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} \delta (a^\dagger J_+ + aJ_-) | \alpha, \zeta \rangle \\
 &= \hbar\omega |\alpha|^2 + \hbar\omega_0 j l_z + \hbar \frac{\gamma}{\sqrt{\mathcal{N}}} \{ \alpha j l_+ + \alpha^* j l_- + \delta \alpha^* j l_+ + \delta \alpha j l_- \} \\
 &= \hbar\omega |\alpha|^2 + \hbar\omega_0 j l_z + \hbar j \frac{\gamma}{\sqrt{2j}} \{ l_x (1 + \delta) (\alpha + \alpha^*) + i l_y (1 - \delta) (\alpha - \alpha^*) \} & (2.8)
 \end{aligned}$$

donde  $\delta = 0$  y  $1$  representan el modelo de TC y Dicke, respectivamente.

En el límite termodinámico, es equivalente el considerar  $j \rightarrow \infty$  y tomando  $\hbar = 1$ , con  $\alpha(q, p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$  las variables clásicas de oscilador armónico y la orientación angular tal que  $\zeta(\theta, \phi) = e^{i\phi} \tan(\theta/2)$ , de (2.8) se obtiene una expresión clásica

$$H_{cl} = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + \omega_0 \cos \theta + \gamma \sqrt{j} \{ (1 + \delta)q \cos \phi \sin \theta - (1 - \delta)p \sin \phi \sin \theta \}, \quad (2.9)$$

expresando  $j_z = j \cos \theta$ ,  $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{j_z}{j}\right)^2}$ ,

$$H_{cl}(q, p, j_z, \phi) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + \omega_0 j_z + \gamma \sqrt{j} \sqrt{1 - \left(\frac{j_z}{j}\right)^2} \{ (1 + \delta)q \cos \phi - (1 - \delta)p \sin \phi \}. \quad (2.10)$$

Debido a que  $j_z$  y  $\phi = \arctan(l_y/l_x)$  (con  $l_x$  y  $l_y$  definidos en (1.54)), satisfacen un álgebra de Poisson  $\{j_z, \phi\} = -1$ , las ecuaciones clásicas de movimiento son

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H_{cl}}{\partial p} = \omega p - (1 - \delta)\gamma \sqrt{j} \sqrt{1 - \left(\frac{j_z}{j}\right)^2} \sin \phi, \quad (2.11)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_{cl}}{\partial q} = -\omega q - (1 + \delta)\gamma \sqrt{j} \sqrt{1 - \left(\frac{j_z}{j}\right)^2} \cos \phi, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H_{cl}}{\partial j_z} = \omega_0 - \frac{\gamma j_z}{j^{3/2} \sqrt{1 - \left(\frac{j_z}{j}\right)^2}} \{ (1 + \delta)q \cos \phi - (1 - \delta)p \sin \phi \}, \quad (2.13)$$

$$\frac{dj_z}{dt} = -\frac{\partial H_{cl}}{\partial \phi} = 2\gamma \sqrt{j} \sqrt{1 - \left(\frac{j_z}{j}\right)^2} \{ (1 + \delta)q \sin \phi + (1 - \delta)p \cos \phi \}. \quad (2.14)$$

Un primer conjunto de puntos fijos del Hamiltoniano corresponde a los valores  $(q_m, p_m, j_{zm}) = (0, 0, \pm j)$ .

Notar que  $j_z = \pm j$  corresponden al polo norte y al sur de la esfera de Bloch en la que el ángulo azimutal es irrelevante. Si se evalúa el Hamiltoniano en los puntos fijos, se obtiene para cualquier acoplamiento, las energías  $\epsilon = \pm 1$  con,

$$\epsilon \equiv \frac{E}{\omega_0 j}.$$

El punto  $(q_m, p_m, j_{zm}) = (0, 0, +j)$  es un punto inestable para cualquier valor de acoplamiento  $\gamma$ , mientras que el punto  $(q_m, p_m, j_{zm}) = (0, 0, -j)$  es un punto estable para valores de acoplamiento  $\gamma \leq \gamma_c$  que se convierte en inestable para valores de acoplamiento si  $\gamma \geq \gamma_c$ . Esto representa la descripción clásica del estado base en la fase normal en la que no hay fotones ni estados excitados.

Para valores grandes de acoplamiento mayores a  $\gamma_c$ , un nuevo punto estable emerge dependiendo del modelo que se considere, Dicke ( $\delta = 1$ ) o TC ( $\delta = 0$ ). Para el modelo de Dicke emergen dos puntos fijos con degeneración dados por

$$\begin{aligned} (q_m, p_m)_\pm &= \left[ \mp \frac{2\gamma\sqrt{j}}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)^4}, 0 \right], \\ (\cos \phi_m, j_{zm}) &= \left[ \pm 1, -j \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

mientras que el modelo de TC los puntos fijos parametrizados por el ángulo  $\phi \in [0, 2\pi)$  están dados por

$$\begin{aligned} (q_m, p_m) &= \frac{\gamma\sqrt{j}}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)^4} (-\cos \phi, \sin \phi), \\ j_{zm} &= -j \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Este conjunto de puntos continuos en el modelo de TC es una consecuencia de la simetría asociada con la cantidad conservada  $\Lambda$ , en la versión clásica  $\Lambda_c = (q^2 + p^2)/2 + j_z + j$ .

Para una mejor visualización de ambos modelos, se expresan la superficies de energía en términos de las variables de pseudoespín  $j_z$  y  $\phi$ . De (2.11) y (2.12) se obtiene que  $\sqrt{j}\omega p = (1 - \delta)\gamma\sqrt{j^2 - j_z^2} \sin \phi$  y  $\sqrt{j}\omega q = -(1 + \delta)\gamma\sqrt{j^2 - j_z^2} \cos \phi$ ; substituyendo este resultado en el Hamiltoniano, se tiene una expresión semiclásica para la energía en función de  $j_z$  y  $\phi$ ,

$$\frac{E(j_z, \phi)}{\omega_0 j} = \frac{j_z}{j} - \frac{\gamma^2}{2\gamma_c^2} \left(1 - \frac{j_z^2}{j^2}\right) \left[1 - \frac{4\delta}{(1 + \delta)^2} \sin^2 \phi\right]. \quad (2.17)$$

Para el modelo TC ( $\delta = 0$ ) la superficie de energía es independiente del ángulo  $\phi$ . Las curvas de nivel de la superficie de energía dada por (2.17) son mostradas en la figura (2.3) para el modelo de TC y Dicke para valores distintos del parámetro de acoplamiento. Las variables  $\phi$  y  $\theta$  son el ángulo polar y el ángulo azimutal de  $\vec{j}$  medido desde el respectivo polo sur ( $j_z = j \cos \theta$ ). Debido a la simetría de  $\Lambda$  del modelo de TC las curvas de nivel son círculos para cualquier constante de acoplamiento. Para factores de acoplamiento pequeños las curvas de nivel para el modelo de TC y Dicke son prácticamente indistinguibles con curvas circulares que representan globalmente mínimos en el polo sur ( $\theta = 0$ ).

Cuando los valores son superiores a  $\gamma_c$ , el polo sur se transforma en un máximo local para el modelo de TC, mientras que para el modelo de Dicke presenta un punto silla.

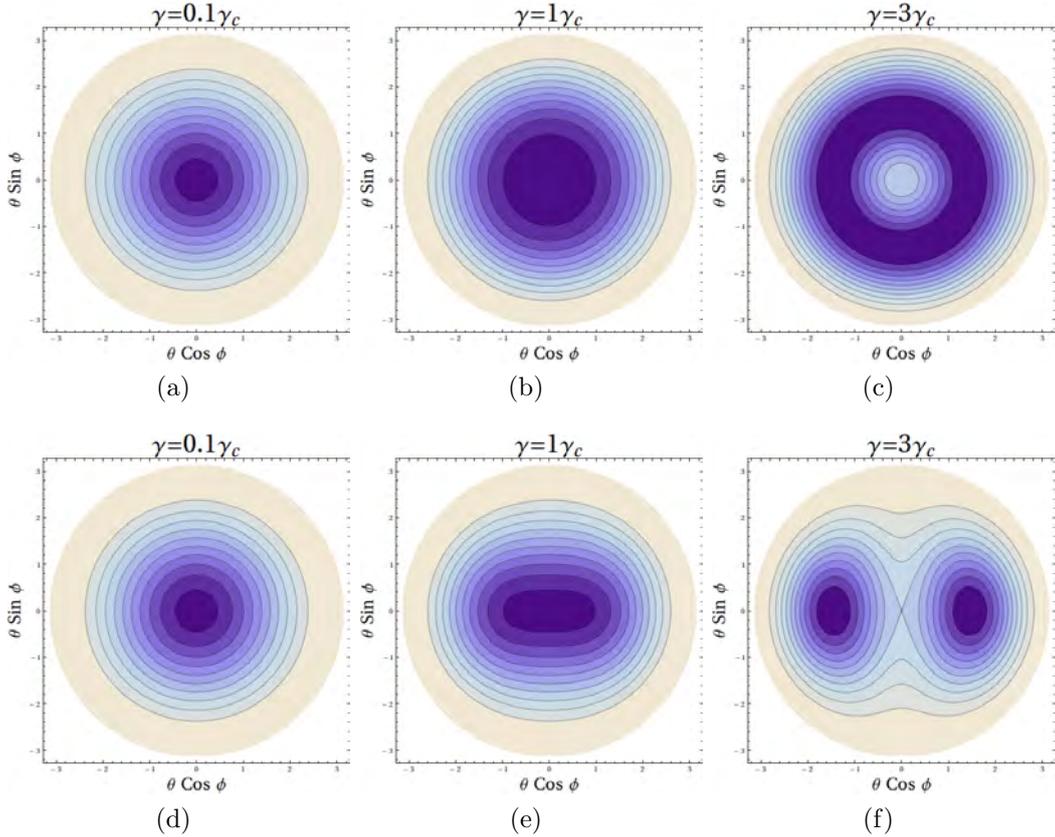


Figura 2.3: Curvas de nivel de la superficie de energía de (2.17) para diferentes valores de acoplamiento en el modelo de TC (arriba) y Dicke (abajo). Los tonos oscuros indican valores bajos en la energía. Las variables usadas del pseudospin  $\bar{j}$  son:  $\phi$  el ángulo polar y  $\theta$  el ángulo azimutal medido respecto al polo sur ( $j_z = -j \cos \theta$ ) [3].

### 2.2.1. Simetrías

La versión cuántica del Hamiltoniano tiene una simetría discreta. El operador asociado es  $\Pi$  dado por la ecuación (2.3) con eigenvalores  $\pm 1$ . Esta simetría se refleja en la versión clásica de la función Hamiltoniana (2.10) en la invarianza bajo la transformación

$$(\phi, q) \rightarrow (\phi + \pi, -q), \quad (2.18)$$

esto ayuda a simplificar el esfuerzo numérico en el estudio de la dinámica clásica. La transición de fase cuántica (QPT por sus siglas en inglés) es asociada con la ruptura de la simetría [37]. En la región super radiante  $\gamma > \gamma_c$ , las trayectorias clásicas asociadas a baja energía (incluyendo el mínimo de energía de los puntos fijos) tienen una degeneración asociada a que existen dos diferentes trayectorias que se pueden obtener mediante una de ellas por la propiedad de paridad (2.18). Moviéndose hacia arriba en energía la simetría de paridad es espontáneamente restaurada al cruzar la transición de fase de estados excitados (ESQPT por sus siglas en inglés) cuando  $\epsilon \geq -\omega_o$ , donde las trayectorias comienzan a ser invariantes bajo la transformación de paridad. En la figura (2.4), la ruptura espontánea y la restauración de la simetría de paridad es ilustrada por las superficies de energía para  $\gamma = 2\gamma_c$  (con  $p = 0$ ), correspondientes a tres energías diferentes  $\epsilon = -1.4\omega_o, -1.1\omega_o$  y  $-0.5\omega_o$  las primeras dos están por debajo la ESQPT y la

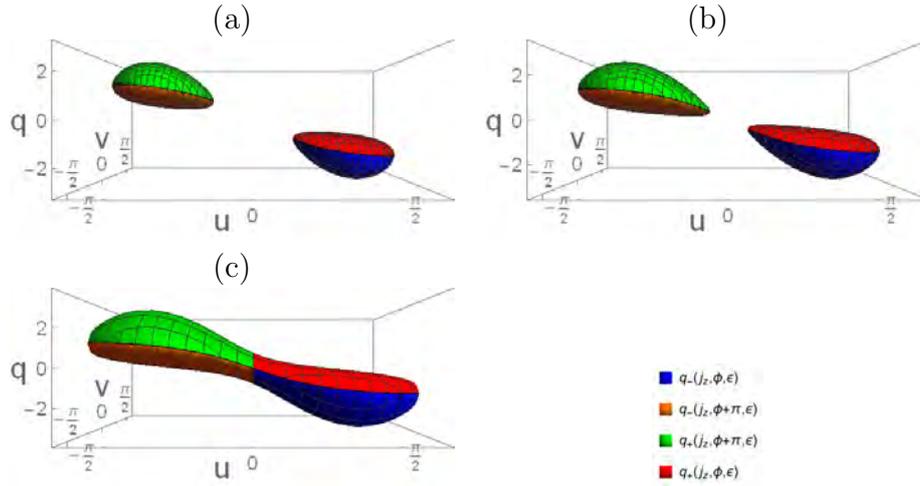


Figura 2.4: Superficies de energía para  $\gamma = 2.0\gamma_c$ , en coordenadas  $(u = \theta \cos \phi, v = \theta \sin \phi, q)$ . Tres energía son mostradas: a)  $\epsilon = -1.4\omega_0$ , b)  $\epsilon = -1.1\omega_0$  y c)  $\epsilon = -0.5\omega_0$ .

última está por encima. Se considerará en la siguientes superficies (con  $p = 0$ ) una exploración de la dinámica del sistema, usando como herramientas la obtención de las secciones de Poincaré y el cálculo de los exponentes de Lyapunov (en la parte II de este trabajo se habla en detalle sobre la forma en que obtiene el valor del exponente de Lyapunov) para un muestreo grande de puntos sobre estas superficies. Las superficies son obtenidas dada la energía  $\epsilon$  para  $p = 0$ . Los valores de la variable  $q$  son obtenidos al resolver la ecuación cuadrática  $h(p = 0, q, \tilde{j}_z, \phi) = \epsilon$  que tendrá dos valores diferentes de  $q$ .

$$q_{\pm}(j_z, \phi, \epsilon) = -\frac{2\gamma}{\omega} \sqrt{1 - \tilde{j}_z^2} \cos \phi + \pm \sqrt{\frac{4\gamma^2}{\omega^2} (1 - \tilde{j}_z^2) \cos^2 \phi + \frac{2}{\omega} (\epsilon - \omega_0 \tilde{j}_z)}. \quad (2.19)$$

por lo tanto la variable  $q$  está descrita en términos de la variable  $\phi, j_z$  para una energía dada [38].

### 2.2.2. Límites integrables

El Hamiltoniano (2.10) es integrable en los límites en los que  $\gamma = 0, \omega_0 = 0$  ó  $\omega = 0$ .

1. Para el acoplamiento ( $\gamma = 0$ ), el Hamiltoniano es independiente de la variable  $\phi$ , *i.e.*  $\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$  por lo que  $j_z$  es una constante de movimiento.
2. En el caso  $\omega = 0$ , el Hamiltoniano es independiente de la variable  $p$ , lo que implica que  $\dot{q} = 0$  y  $q$  es constante de movimiento.
3. Cuando  $\omega_0 = 0$  una transformación canónica  $(j_z, \phi) \rightarrow (j_x, \phi_x)$ , con  $\phi_x$  el ángulo azimutal en el plano  $z$ - $y$  puede ser propuesta. La nueva función Hamiltoniana es

$$H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + 2\gamma q \tilde{j}_x, \quad (2.20)$$

independiente de la variable angular  $\phi_x$ , por lo que  $j_x$  es una constante de movimiento. La función Hamiltoniana es equivalente a realizar un desplazamiento en el oscilador armónico

$$q'^2 + p^2 = \frac{2H}{\omega} + \frac{4\gamma^2 j_z'^2}{\omega^2}, \quad (2.21)$$

donde  $q' = q + \frac{2\gamma j_z'}{\omega}$ .

En todos los casos anteriores el Hamiltoniano efectivo se reduce a un sistema conservativo en una dimensión  $H = H(p, q)$  ó  $H = H(\tilde{j}_z, \phi)$ , de esta forma siempre será integrable y no tendrá ninguna dinámica caótica en estos límites [38].

## 2.3. Solución numérica del Hamiltoniano cuántico

Como se ha mencionado anteriormente el modelo no es integrable en su forma cuántica y no tiene una solución analítica que describa el espectro de autoestados. Sin embargo, en forma numérica es posible abordar este problema, de aquí se puede trabajar directamente empleando estados de Fock  $|n\rangle$  y estados de pseudoespín  $|j, m\rangle$ , lo que resulta ser un problema que se complica al ser llevado a un entorno computacional debido a que la cantidad de estados que se pueden construir requiere recursos extensos de computo y los resultados que muestra esta base son deficientes para los fines buscado en el límite semiclásico (i.e.  $j$  un valor grande). Por ello los resultados expuestos en esta tesis doctoral, fueron calculados usando lo que se conoce como la *base coherente eficiente* [39].

### 2.3.1. Base Coherente Eficiente

Como se ha mostrado en la sección previa, uno de los límites integrables del modelo de Dicke ocurre cuando  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Con el fin de hacer evidente este límite desde el punto de vista cuántico, se tomará la siguiente transformación:

$$A^\dagger = a^\dagger + G J_x \quad \text{y} \quad A = a + G J_x, \quad (2.22)$$

donde  $G = \frac{2\gamma}{\omega\sqrt{N}}$ . Sustituyendo en 2.2, se obtiene:

$$H_D = \omega(A^\dagger A - G^2 J_x^2) + \omega_0 J_z. \quad (2.23)$$

Al rotar los operadores de pseudoespín colectivos sobre el eje  $y$  un ángulo de  $\pi/2$   $(J_x, j_y, J_z) \rightarrow (J'_z, J'_y, -J_x)$ , se tiene

$$H_D = \omega(A^\dagger A - G^2 J_z'^2) - \omega_0 J'_x, \quad (2.24)$$

si ahora de considera  $\omega_0 \rightarrow 0$ :

$$H_D^0 = \omega(A^\dagger A - G^2 J_z'^2). \quad (2.25)$$

Del Hamiltoniano  $H^0$ , se puede construir una base entre los estados de número  $A^\dagger A$  y los estados que corresponden a los operadores de pseudoespín, de forma que los eigenestados de dicho Hamiltoniano son:  $|\Psi^0\rangle = |N; j, m'\rangle$ . Donde

$$\begin{aligned} A^\dagger A |N; j, m'\rangle &= N |N; j, m'\rangle, \\ J'_z |N; j, m'\rangle &= m' |N; j, m'\rangle, \\ \mathbf{J}^2 |N; j, m'\rangle &= j(j+1) |N; j, m'\rangle, \end{aligned} \quad (2.26)$$

tal que  $|N; j, m'\rangle = |N; j, m_x\rangle$ , por otro lado la acción del operador  $A$  sobre el estado con  $N = 0$  es  $A|N; j, m'\rangle = 0$ , pero esto conlleva a la siguiente implicación,

$$a |N; j, m'\rangle = -Gm' |N; j, m'\rangle, \quad (2.27)$$

por lo que el estado de vacío de los operadores  $A^\dagger$  y  $A$  es un eigenestado del operador  $a$  con valor propio  $-Gm'$ , es decir es un estado coherente en la base de Fock. Entonces, los estados Fock se pueden interpretar como excitaciones del operador de número  $A^\dagger A$  sobre un estado coherente. Este resultado permite construir una base nombrada la *base coherente eficiente*, la cual permite realizar procesos de diagonalización mas efectivos que la que produce la base de Fock.

Los elementos de matriz del Hamiltoniano de Dicke en la *base coherente eficiente* se pueden calcular la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle N'; j, m'_x | H_D | N; j, m_x \rangle &= \omega (N - G^2 m_x^2) \delta_{N', N} \delta_{m'_x, m_x} + \\ -\omega_0 \left( \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \delta_{m', m+1} \langle N', m'_x | N, m_x + 1 \rangle_b + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \delta_{m', m-1} \langle N', m'_x | N, m_x - 1 \rangle_b \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Las superposiciones de  $\langle N', m'_x | N, m_x \rangle_b$  se pueden obtener de la relación B.1, de este modo,

$$\langle N'; j, m'_x | N; j, m \rangle_b = \begin{cases} (-1)^{N'} D_{N', N} & \text{si } m > m' \\ (-1)^N D_{N', N} & \text{si } m < m' \\ \delta_{N', N} & \text{si } m = m' \end{cases} \quad (2.29)$$

y de acuerdo a B.2:

$$D_{N', N} = e^{-(G|m-m'|)^2/2} \sum_{k=0}^{\min(N', N)} \frac{\sqrt{N'! N!}}{(N'-k)!(N-k)!k!} \left( (-1)^k (G|m-m'|)^{N+N'-2k} \right). \quad (2.30)$$

La dimensión de las matrices para la *base coherente eficiente* será de dimensión  $((2j+1)(N_{max}+1))^2$ , con  $N_{max}$  el truncamiento que será elegido en función de la cantidad de estados a analizar o calcular para diversos fines como lo es la construcción de estados coherente, etc.

En específico para muchos problemas cuánticos una dificultad que se presenta, es la de calcular efectos de interés para un número de partículas muy grande, ya que computacionalmente se requiere de un esfuerzo muy grande, y por lo general se requieren técnicas de computo de alto nivel o de supercómputo.

En base a la construcción de la diagonalización mostrada por la base coherente eficiente, la cantidad de  $(2j+1)(N_{max}+1)$  eigenestados que se necesiten para realizar algún cálculo requiere una capacidad de memoria RAM para poder ser

calculados.

El programa que se ha implementado para la resolución de  $H_D$ , se puede consultar en el Apéndice C.2. La siguiente imagen muestra los requerimientos de cómputo en función del número de eigenestados construidos, notese que dicha gráfica está en escala logarítmica para la cantidad de memoria RAM necesaria como mínimo.

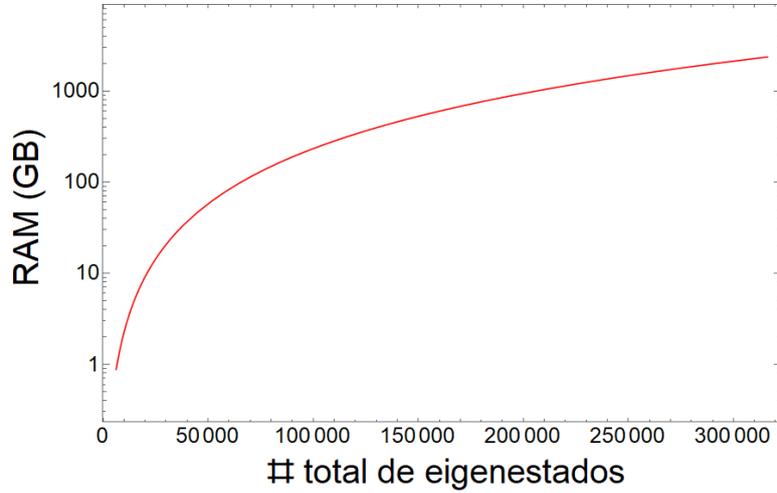


Figura 2.5: Requerimientos de cómputo (memoria RAM mínima) necesarios para obtener un determinado número de eigenestados del Hamiltoniano de Dicke al usar la base coherente eficiente.

## Parte II

# Cuantificadores de caos clásico y caos cuántico en el Modelo de Dicke



# Capítulo 3

## Caos clásico en el modelo de Dicke

*“El azar no es más que la medida de la ignorancia del hombre.”*  
-Henri Poincaré-

### 3.1. Exponente de Lyapunov en el modelo de Dicke

Las variables que se han usando en el análisis de las simetrías y los límites integrables del Hamiltoniano (2.10) son más estables numéricamente al ser integradas las ecuaciones de movimiento en el espacio fase cuando se introduce un conjunto de nuevas variables canónicas en el sector atómico  $\tilde{P} = -j\sqrt{2(1 + \tilde{j}_z)} \sin \phi$  y  $Q = \sqrt{2(1 + \tilde{j}_z)} \cos \phi$ , tales que satisfacen  $\{\tilde{P}, Q\} = -1$ . Definiendo  $P = \tilde{P}/j$ , el Hamiltoniano clásico se puede escribir como

$$h_{cl} = \frac{\omega_0}{2} (Q^2 + P^2) + \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + 2\gamma q Q \sqrt{1 - \frac{1}{4} (Q^2 + P^2)} - \omega_0. \quad (3.1)$$

Debido a que el interés de este trabajo es analizar el caos presente en el modelo de Dicke que es un modelo autónomo Hamiltoniano, para evaluar las propiedades mencionadas anteriormente sobre el espectro de Lyapunov se realizaron muestreos en espacio fase para diferentes parámetros escogidos en el modelo.

En el modelo de Dicke  $\mathbf{x} = (q, Q, p, P)$  donde se tiene un sistema con  $d = 2$  es decir tiene un sistema dinámico con cuatro ecuaciones diferenciales acopladas. Usando (3.1), las ecuaciones dinámicas  $F(\mathbf{x})$  y la matriz Jacobiana  $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x})$ :

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\gamma Q \sqrt{4 - P^2 - Q^2} - q \omega \\ \frac{p \omega}{\sqrt{4 - P^2 - Q^2}} - \gamma q \sqrt{4 - P^2 - Q^2} - Q \omega_0 \\ P \omega_0 - \frac{\gamma P q Q}{\sqrt{4 - P^2 - Q^2}} \end{cases}, \quad (3.2)$$

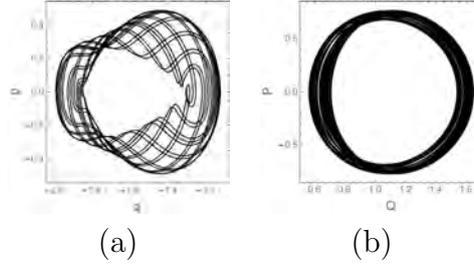


Figura 3.1: Trayectorias con condición inicial  $\mathbf{x}_r$  en las variables canónicas  $(q, p)$  y  $(Q, P)$ .

$$D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & \frac{\gamma PQ}{\sqrt{-P^2-Q^2+4}} & \frac{\gamma(P^2+2Q^2-4)}{\sqrt{-P^2-Q^2+4}} \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma(P^2+2Q^2-4)}{\sqrt{-P^2-Q^2+4}} & -\frac{\gamma P(P^2-4)q}{(-P^2-Q^2+4)^{3/2}} & -\frac{\gamma q Q(3P^2+2(Q^2-6))}{(-P^2-Q^2+4)^{3/2}} - \omega_0 \\ 0 & -\frac{\gamma PQ}{\sqrt{-P^2-Q^2+4}} & \frac{\gamma q Q(Q^2-4)}{(-P^2-Q^2+4)^{3/2}} + \omega_0 & \frac{\gamma P(P^2-4)q}{(-P^2-Q^2+4)^{3/2}} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Utilizando (3.2) y (3.3) se puede encontrar el LCE en base a las ecuaciones dadas por (1.3) con las respectivas sus condiciones iniciales. En el apéndice C.1 se detalla el método empleado para resolver las ecuaciones así como el software utilizado.

### 3.1.1. Trayectorias regulares y caóticas

A continuación se presentan ejemplos representativos de trayectorias con dinámica regular y caótica asociadas con sus respectivas secciones de Poincaré. El caso que se ha seleccionado es  $\epsilon = -1.4\omega_0$  y  $\omega = \omega_0$ . Dos condiciones iniciales son mostradas, una regular con  $\lambda = 0$  y una segunda caótica con  $\lambda \sim 0.5$ .

#### Exponente de Lyapunov $\lambda = 0$

La trayectoria con condición inicial  $\mathbf{x}_r = (0, q(\epsilon), 0, 0.707)$  exhibe dinámica regular como se puede apreciar en la proyección de las variables  $(q, p)$  y  $(Q, P)$  mostrada en la Figura 3.1.

La correspondiente sección de Poincaré para las variables canónicas  $(Q, P)$  es presentada en la Fig. 3.2. Esta está restringida sobre un área en el espacio fase que cualitativamente se identifica como regular. El máximo exponente de Lyapunov a lo largo de esta trayectoria es 0.0007, pequeño respecto al límite numérico  $\lambda_{min} = 0.002$ , y por esta razón es asociada la trayectoria con un exponente de Lyapunov nulo identificándola como una órbita regular.

#### Exponente de Lyapunov $\lambda \sim 0.05$

La trayectoria con condición inicial  $\mathbf{x}_c = (0, q(\epsilon), 0.6481, -1.371)$  tiene un exponente de Lyapunov  $\lambda \sim 0.05$ . En la Fig. 3.3 se observa la tendencia de la trayectoria a cubrir el espacio fase de una forma densa, muy diferente al caso anterior, y corresponde a la sección de Poincaré de esta trayectoria, la cual se puede apreciar en la Fig. 3.4. La sección de Poincaré correspondiente a la trayectoria  $\mathbf{x}_c$  presenta dispersión de la trayectoria en el espacio  $(Q, P)$ , la dispersión

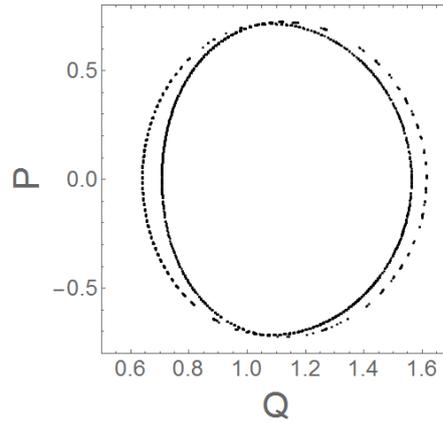


Figura 3.2: Sección de Poincaré para la trayectoria con condición inicial  $\mathbf{x}_r$  en las variables canónicas  $(Q, P)$ .

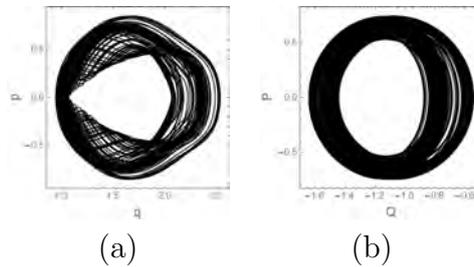


Figura 3.3: Trayectorias con condición inicial  $\mathbf{x}_c$  en las variables canónicas  $(q, p)$  y  $(Q, P)$ .

de puntos en la sección de Poincaré es una forma cualitativa de caracterizar la trayectoria como caótica. El exponente de Lyapunov para esta condición inicial es  $\lambda \sim 0.05$ , que definitivamente es mucho mayor que el valor de corte 0.002, por lo que cuantitativamente la trayectoria es caótica.

### 3.1.2. Evaluación de exponentes de Lyapunov

#### Separación entre trayectorias

En el modelo de Dicke el espacio fase es construido por cuatro coordenadas generalizadas  $(p, q, P, Q)$ . La *distancia geométrica* entre dos trayectorias  $\mathbf{x}_1(t)$  y  $\mathbf{x}_2(t)$ ,  $dx(t) \equiv |\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)|$  puede crecer en el tiempo hasta alcanzar un valor máximo en el que esta distancia oscilará alrededor de este valor. Por otro lado la *separación en el espacio tangente*  $\delta x(t)$ , definida en la Ec. (1.5), no está acotada y es empleada en la evaluación del exponente de Lyapunov.

En la Fig 3.5 ambas separaciones son mostradas, en escala logarítmica, para una trayectoria regular (izquierda) y para otra caótica (derecha). La separación de la condición inicial es  $dx_0 \sim 10^{-6}$ . En el caso regular las dos trayectorias están siempre una cerca de la otra y ambas distancias son muy pequeñas en cualquier tiempo. La distancia en el caso caótico claramente diverge, la distancia geométrica se satura a un tiempo  $t \sim 150$ , mientras la separación en el espacio tangente crece exponencialmente.

La inclinación de la separación en el espacio tangente, en escala logarítmica, define los exponentes de Lyapunov. Los valores numéricos son estimados con una

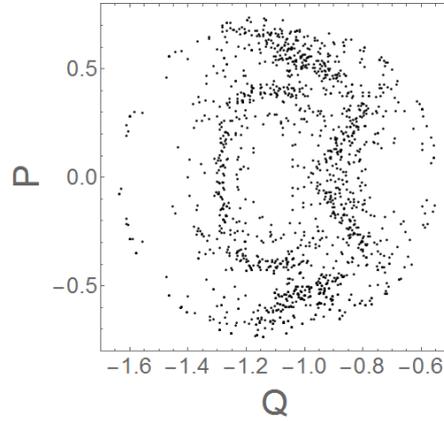


Figura 3.4: Sección de Poincaré para la trayectoria con condición inicial  $\mathbf{x}_c$  en las variables canónicas  $(Q, P)$ .

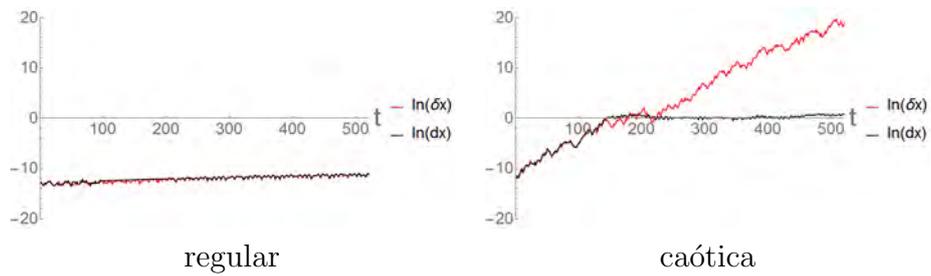


Figura 3.5: Distancia geométrica  $dx(t)$  (negro) y separación  $\delta x(t)$  (rojo) en escalas logarítmicas entre dos trayectorias cercanas, en un régimen regular (izquierdo) y un régimen caótico (derecho).

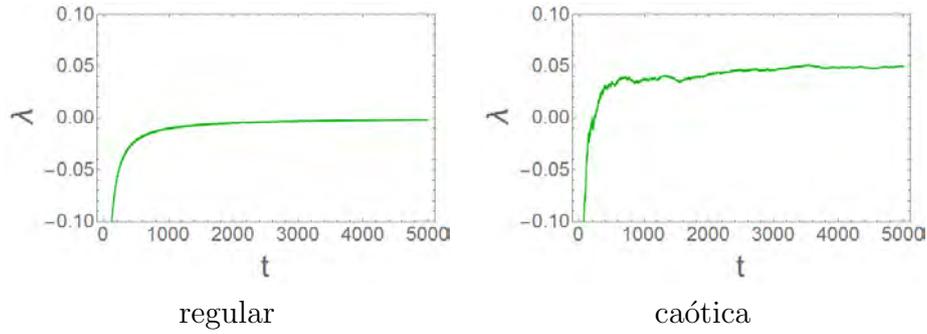


Figura 3.6: Convergencia del LCE como función del tiempo, para trayectoria regular (izquierda) y caótica (derecha).

regresión lineal en el intervalo  $(0, t)$  (ver Fig. 3.6) para tiempos de hasta 5000. El exponente de Lyapunov converge a  $\lambda = 0.0007$  (consistente con Lyapunov nulo), y para la trayectoria caótica converge a  $\lambda = 0.05201$ . Para ambas trayectorias el tiempo de convergencia es del orden de 500 como se aprecia en la Fig. 3.6.

### Muestreo sobre la vecindad dada una condición inicial

En la subsección anterior un par de ejemplo fueron mostrados en los que dos trayectorias cercanas divergían exponencialmente en la evolución del tiempo y las otras dos permanecían cercanas entre sí. Al estimar el exponente de Lyapunov para una condición inicial dada, miles de trayectorias son seleccionadas con condiciones iniciales cercanas en una vecindad muy pequeña de la que se está estudiando. Estas condiciones cercanas a alguna condición de interés se construyen seleccionando 10000 puntos aleatorios en el espacio fase en las variables  $(p, q, P, Q)$  con una distribución normal centrada en la condición inicial de interés  $\mathbf{x}_i(0)$  con dispersión del orden de  $10^{-6}$ , como se muestra en las imágenes de la Fig. 3.7. En

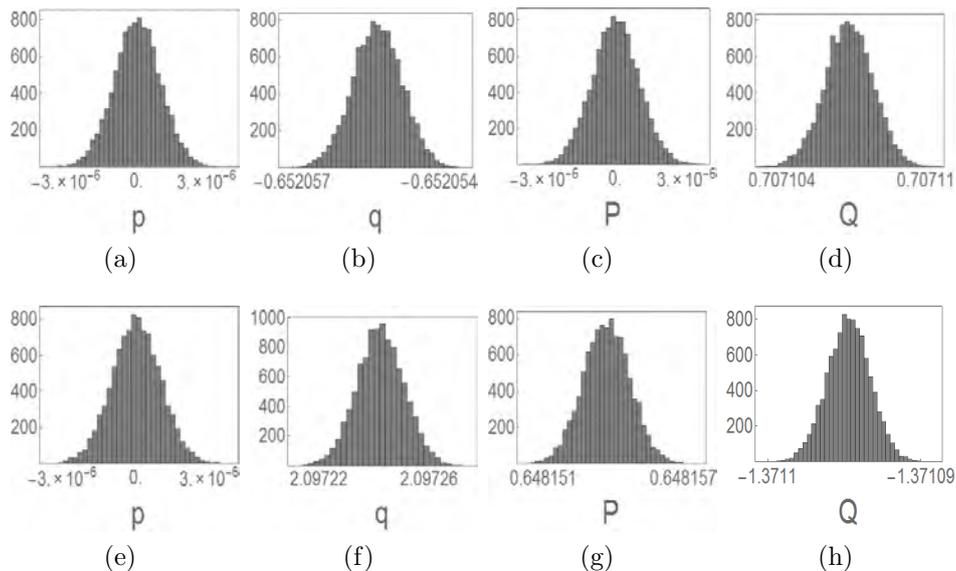


Figura 3.7: Histogramas de las variaciones hechas sobre la condición inicial  $\mathbf{x}_i(0)$  en las variables canónicas al rededor de las condiciones iniciales:  $\mathbf{x}_r$  (arriba) y  $\mathbf{x}_c$  (abajo).

la Fig. 3.8 los histogramas de la distribución del exponente de Lyapunov sobre la

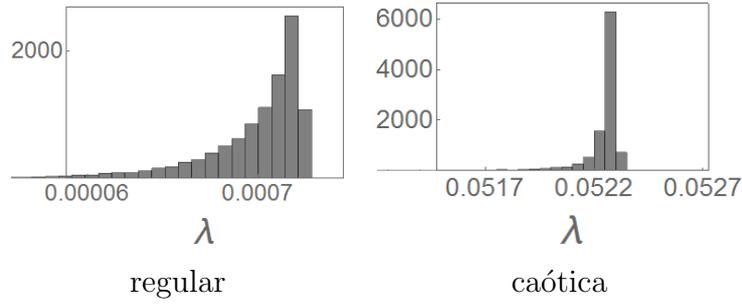


Figura 3.8: Histograma de los valores obtenidos en el muestreo de los exponentes de Lyapunov, para trayectoria regular (izquierda) y caótica (derecha).

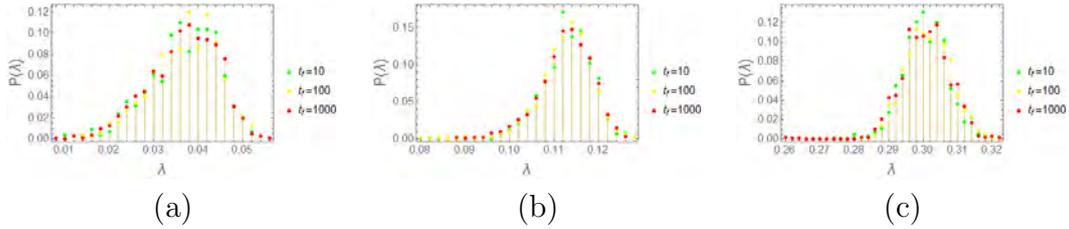


Figura 3.9: Distribución de probabilidad del exponente de Lyapunov, evaluado en tres tiempos diferentes energías  $\epsilon = -1.4\omega_0$  (a),  $\epsilon = -1.1\omega_0$  (b) y  $\epsilon = -0.5\omega_0$  (c), para tres escalas de tiempo  $t_f$  para cada trayectoria con condición inicial  $\mathbf{x}(0) = (0, q(\epsilon), 0, 0.948)$ .

condición inicial  $\mathbf{x}_r$  (izquierda) y  $\mathbf{x}_c$  (derecha) son mostrados en las que la estabilidad del método es claramente confirmada, las distribuciones están confinadas a una pequeña región para el valor del LCE, con dispersión en el cuarto dígito.

### $\lambda$ a lo largo de la trayectoria

Como el valor del LCE depende de la condición inicial, éste puede ser evaluado para diferentes puntos a lo largo de una trayectoria. Los valores obtenidos son en general cercanos, con una distribución como se muestra en la Fig. 3.9. Los tres ejemplos presentados son caóticos, con energías  $\epsilon = -1.4\omega_0$  (a),  $\epsilon = -1.1\omega_0$  (b) y  $\epsilon = -0.5\omega_0$  (c) y exponentes de Lyapunov  $\lambda \approx 0.04 \pm 0.01$ ,  $0.11 \pm 0.01$  y  $0.30 \pm 0.01$ , respectivamente. Los puntos a lo largo de la trayectoria son evaluados en tres escalas de tiempo diferentes, de  $t_i = 0$  a  $t_f = 10$ , 100 ó 1000 mostrados con diferentes colores. Puede verse que las distribuciones son independientes de la escala de tiempo y que su dispersión es de orden de 0.01.

Con el desarrollo del Hamiltoniano clásico del modelo de Dicke (2.10) (ver parte I), un propósito de interés es analizar las diferentes zonas de estabilidad o inestabilidad en función de los diferentes parámetros del modelo. Por lo que se realizó un estudio de secciones de Poincaré y del exponente de Lyapunov a continuación.

## 3.2. Secciones de Poincaré y exponentes de Lyapunov

Al determinar la presencia de regularidad o caos en el sistema clásico, se emplearon secciones de Poincaré como una estimación cualitativa y el exponente de

Lyapunov como una medida cuantitativa del caos [4, 7]. Una descripción detallada del procedimiento para obtener el exponente de Lyapunov está en la sección 1.1.2 de este trabajo. Las trayectorias clásicas son obtenidas mediante integración numérica de las ecuaciones de movimiento.

En la figura 3.10, la sensibilidad de las condiciones iniciales es mostrada mediante dos trayectorias que comienzan a evolucionar con condiciones iniciales muy cercanas entre sí. Estas se comienzan a separar para  $t \sim 50$ , teniendo comportamientos diferentes a tiempos mas grandes.

Cuando la divergencia entre las trayectorias es exponencial en el espacio tangente del espacio fase, el máximo exponente de Lyapunov es asociado con un punto específico del espacio fase (condición inicial) e indica una naturaleza caótica.

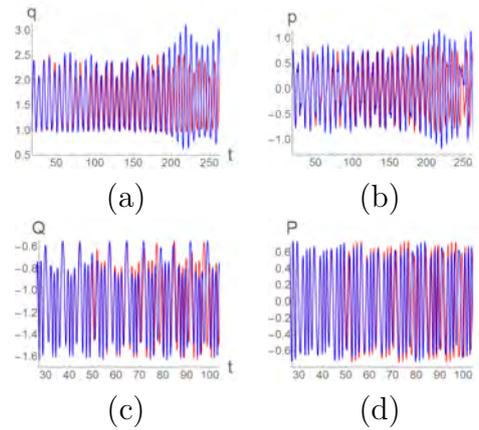


Figura 3.10: Soluciones de variables canónicas contra el tiempo para dos trayectorias cercanas entre sí, para  $\epsilon = -1.4\omega_0$ ,  $\gamma = 2\gamma_c$ , con condición inicial  $(p_0, q_0, P_0, Q_0) = (0, q_+(\epsilon), 0.648, 1.371)$

La superficie de interés es definida por el plano  $p = 0$ , y puede expresarse en términos de las variables  $Q - P$  mediante la conservación de la energía  $h_{cl}(p = 0, q, P, Q) = \epsilon$ . Al escoger un amplio muestreo de órbitas que atraviesan la superficie de energía éstas se intersectan con esta superficie definiendo las secciones de Poincaré.

Las trayectorias clásicas con energías muy cercanas al estado base son regulares, estas trayectorias pueden ser descritas por la aproximación cuadrática, donde el Hamiltoniano es integrable considerando pequeñas oscilaciones alrededor de la configuración de mínima energía [1].

Cuando la energía se incrementa la aproximación cuadrática se rompe y aparecen trayectorias caóticas para alguna energía de excitación  $\epsilon_{ch}$  que depende del factor de acoplamiento, para  $\epsilon > \epsilon_{ch}$  una región de caos suave es caracterizada, y las regiones completamente caóticas se observan a altas energías de excitación tanto en la fase normal como en la fase superradiante [3].

La figura 3.11 a) muestra las regiones de energía en términos del factor de acoplamiento  $\gamma$ . Los tres puntos representan tres valores de energía de excitación,  $\epsilon = -1.4\omega_0$  (naranja),  $\epsilon = -1.1\omega_0$  (rojo) y  $\epsilon = -0.5\omega_0$  (verde), para  $\gamma = 2\gamma_c, \omega = \omega_0$  donde se concentró la primer parte de este análisis. La figura 3.11 b) muestra en un código de colores, las curvas de nivel de cada superficie de energía en variables canónicas  $(Q, P)$ .

En la figura 3.12 se presentan secciones de Poincaré y exponentes de Lyapunov para algunas energías  $\epsilon = -1.4\omega_0, -1.1\omega_0$  y  $-0.5\omega_0$ , para  $\gamma = 2\gamma_c$  en resonancia

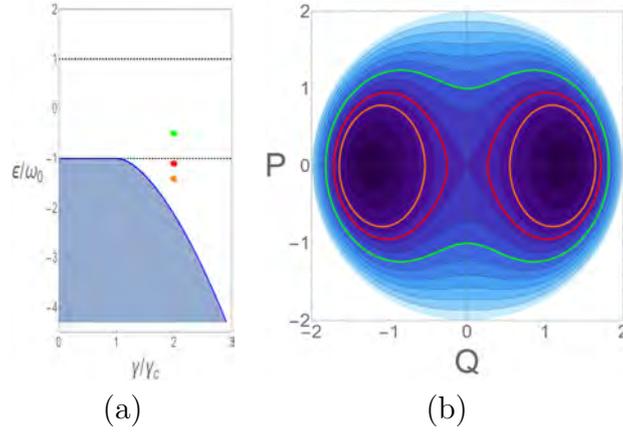


Figura 3.11: Puntos de análisis (a) para  $\gamma = 2\gamma_c$ ,  $\omega = \omega_0$  y  $\epsilon = -1.4\omega_0$  (naranja),  $\epsilon = -1.1\omega_0$  (rojo),  $\epsilon = -0.5\omega_0$  (verde). La curva azul representa la energía de estado base como función del factor de acoplamiento  $\gamma$ . (b) Curvas de nivel de  $\epsilon$  en variables canónicas  $(Q, P)$ , para valor de acoplamiento  $\gamma = 2\gamma_c$  y  $\epsilon = -1.4\omega_0$  (naranja),  $\epsilon = -1.1\omega_0$  (rojo),  $\epsilon = -0.5\omega_0$  (verde).

( $\omega = \omega_0$ ), como función de  $Q$  y  $P$ .

En todos los casos, las secciones de Poincaré caóticas tienen un exponente de Lyapunov diferente de cero, cuantificando de esta manera la presencia de caos del sistema a diferencia de las secciones de Poincaré que dan información cualitativa sobre la dinámica. Para  $\epsilon = -1.4\omega_0$  caos y regularidad coexisten, cuando la energía aumenta las islas de estabilidad se hacen más pequeñas, a energías mayores se muestra que estas islas desaparecen y cada trayectoria atraviesa todo el espacio fase accesible.

El exponente de Lyapunov es calculado para un muestreo grande uniformemente distribuido sobre el espacio fase accesible, y se estima el porcentaje de caoticidad tomando la cantidad de puntos con exponentes de Lyapunov diferentes de cero (en la práctica mayor que  $\lambda_{min} = 0.002$ ) sobre el total de puntos del muestreo. De esta forma se puede calcular el promedio del exponente de Lyapunov para cada valor de energía. Ambas medidas son reflejo del caos presente en el sistema como función de la energía, cuantificando la transición de una región regular de baja energía a un régimen ergódico a energías mayores. En el caso  $\gamma = 2\gamma_c$  en resonancia  $\omega = \omega_0$  en la figura 3.13 se muestran resultados relevantes para este parámetro.

Como era de esperar, para valores cercanos a la energía mínima  $\epsilon_0$  el porcentaje de caoticidad es nulo, para valores cercanos a  $\epsilon \sim -1.7\omega_0$ , este valor incrementa, y cuando el valor de la energía se aproxima a  $\epsilon \sim -1.2\omega_0$  llega a un valor de saturación. El promedio del exponente de Lyapunov presenta un comportamiento semejante: para valores menores a  $\epsilon \sim -1.2\omega_0$  el valor de  $\lambda$  es cercano a cero, y para los demás casos aumenta monotonamente.

### 3.3. Distribución de los exponentes de Lyapunov

El exponente de Lyapunov, es definido por la ecuación 1.2 y depende solo de las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0)$  en el espacio fase. Si se sigue una trayectoria y se recalcula el exponente de Lyapunov considerando una nueva condición inicial al

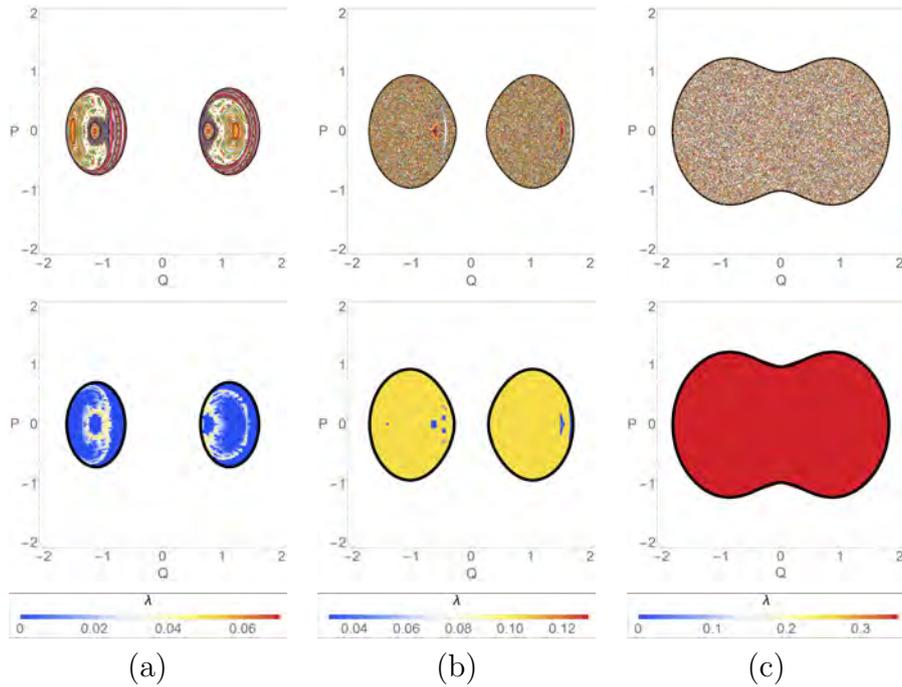


Figura 3.12: Secciones de Poincaré (arriba) y exponentes de Lyapunov (abajo) en proyección de variables  $(Q, P)$ , para  $\gamma = 2\gamma_c$  y  $\epsilon = -1.4\omega_0$  (a),  $\epsilon = -1.1\omega_0$  (b),  $\epsilon = -0.5\omega_0$  (c). En las secciones de Poincaré los diferentes colores están asociados a diferentes trayectorias. Para el exponente de Lyapunov el código de colores se encuentra en la barra de abajo de cada imagen. Las zonas azules indican regiones regulares.

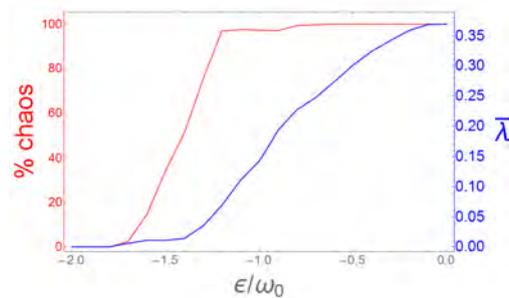


Figura 3.13: Porcentaje de caos y promedio del exponente de Lyapunov en espacio fase con acoplamiento  $\gamma = 2\gamma_c$  en resonancia.

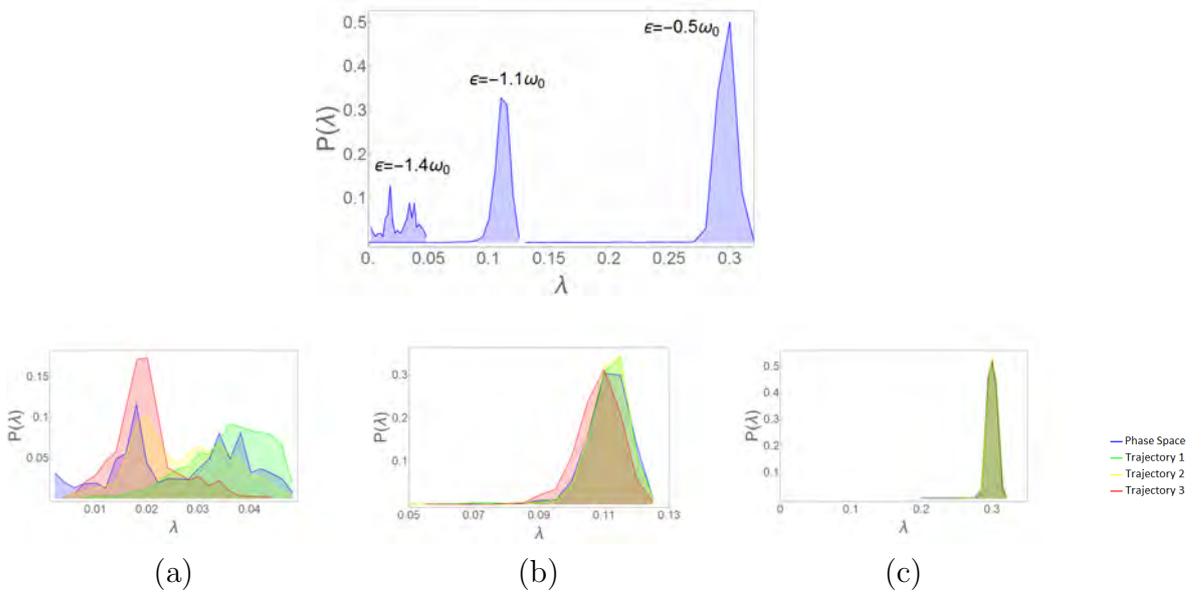


Figura 3.14: Distribución de probabilidad (arriba) para el LCE de tres diferente superficies de energía en el respectivo espacio fase, (abajo) distribución de probabilidad de tres trayectorias con condición inicial  $\bar{x}_1(0) = (p_o, q_o, P_o, Q_o) = (0, q(\epsilon), 0, 0.948)$ ,  $\bar{x}_2(0) = (0, q(\epsilon), 0, 0.707)$ ,  $\bar{x}_3(0) = (0, q(\epsilon), 0, 0.547)$  para  $\epsilon = -1.4\omega_0$  (a),  $\epsilon = -1.1\omega_0$  (b) y  $\epsilon = -0.5\omega_0$  (c).

tiempo  $t$ , se obtiene en general un mismo valor si el sistema es completamente ergódico [8]. En este caso puede asociarse un exponente de Lyapunov a cada punto del espacio fase, y al conjunto de puntos dada una trayectoria.

La distribución de exponentes de Lyapunov en el espacio accesible es mostrada en la Fig. 3.14 las tres energías representativas mencionadas anteriormente. Para las dos últimas energías la distribución es semejante y las varianzas son muy pequeñas. Para la energía mas alta  $\epsilon = -0.5\omega_0$ , el porcentaje de caos es muy cercano al 100% y el promedio del exponente de Lyapunov es  $\bar{\lambda} = 0.301$ . Para energía intermedia  $\epsilon = -1.1\omega_0$ , pequeñas islas de estabilidad están presentes, dado un porcentaje de caoticidad cercano a 97.5% y el promedio del exponente de Lyapunov es  $\bar{\lambda} \sim 0.111$ . Estos resultados son consistentes con el valor de volumen de espacio fase ergódico como puede verse en la Fig. 3.12. Finalmente, para energías muy bajas se muestra en el caso  $\epsilon = -1.4\omega_0$  en el espacio fase una mezcla que contiene regiones regulares y caóticas. Como consecuencia la distribución de los exponentes de Lyapunov presenta varios máximos locales incluyendo  $\lambda = 0$  asociado con las trayectorias que son regulares. Las regiones caóticas cubren el 51.1% del espacio fase accesible y el promedio del exponente de Lyapunov es 0.014.

A altas energías la ergodicidad hace acto de presencia, sobre la distribución de los exponentes de Lyapunov.

Como se aprecia en la figura 3.14 (arriba) los exponentes de Lyapunov tienen diferentes distribuciones para tres trayectorias diferentes en cada energía. Sin embargo para las dos energías mayores, las distribuciones sobre cada trayectoria y sobre el espacio fase son prácticamente idénticas, a energías bajas para el caso con mezcla, las distribuciones varían drásticamente para cada una de las trayectorias sobre el espacio fase accesible.

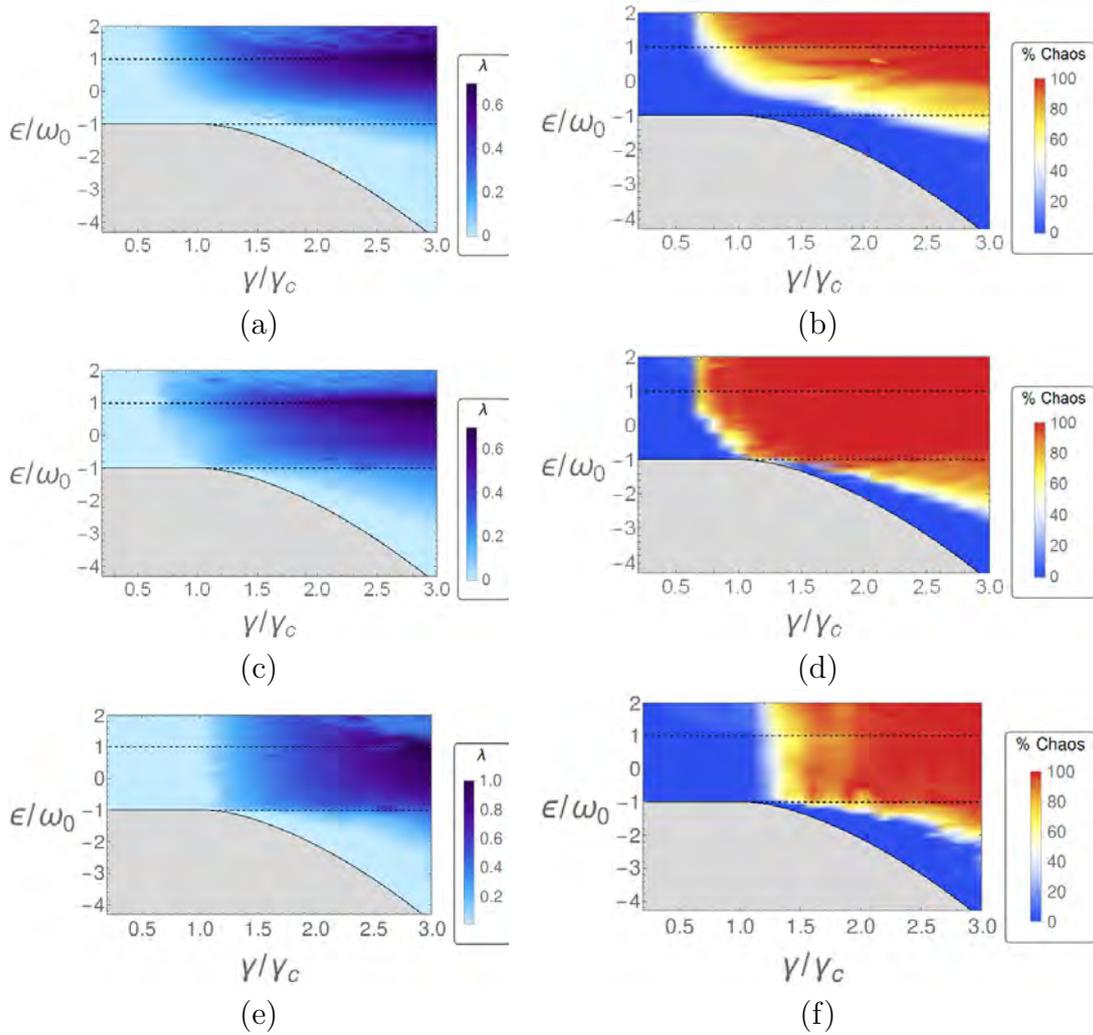


Figura 3.15: Mapeo del exponente de Lyapunov sobre superficie de energía (izquierda), porcentaje de caoticidad (derecha) para diferentes valores de  $\omega$ :  $\omega = \omega_0/4$  (arriba),  $\omega = \omega_0$  (centro),  $\omega = 4\omega_0$  (abajo).

### 3.4. Mapas de caos en espacio $\gamma$ y $\epsilon$

El análisis presentado en la sección previa para  $\gamma = 2\gamma_c$  en resonancia  $\omega = \omega_0$  es extendido en esta sección para un intervalo de acoplamiento  $\gamma \in [0, 3\gamma_c]$  para tres diferentes grupos de frecuencias de q-bits y bosones:  $\omega = \omega_0/4$ ,  $\omega = \omega_0$  y  $\omega = 4\omega_0$ . Se calcula el porcentaje de caos y el valor promedio del exponente de Lyapunov sobre el espacio accesible para energías dadas. Los resultados de estos cálculos son mostrados en mapas completos para el modelo de Dicke y son presentados en la Fig. 3.15, de acuerdo a [38].

#### 3.4.1. Caos y QPT

Una característica en los tres mapeos es la existencia un régimen con el exponente promedio de Lyapunov y porcentaje de caoticidad cero a energías bajas y para cualquier acoplamiento, y de la misma manera a energías altas y acoplamientos cercanos a cero. Como se mencionó anteriormente, estos resultados son esperados debido a que  $\gamma = 0$  es un límite integrable del modelo y por otro lado

en el régimen de energías bajas puede ser aproximado por un límite integrable, ya que las oscilaciones pequeñas están presentes a energías cercanas a la energía mínima.

La aproximación cuadrática es posible para cualquier acoplamiento en una vecindad del estado base excepto para el valor de acoplamiento crítico, donde los términos cuadráticos desaparecen en la aproximación a oscilaciones pequeñas. La región caótica se aproxima a la región del parámetro crítico sin llegar a tocarla como se observa en el acercamiento que se tiene para el caso resonante  $\omega = \omega_0$  de esta forma se ve cuantitativamente que el punto crítico para  $\omega = \omega_0$  no posee dinámica caótica.

El rompimiento de la aproximación cuadrática es una condición necesaria pero no suficiente para la presencia de caos. El caso de la figura  $\omega = \omega_0/4$ , mostrado en la Fig. 3.15 ejemplifica claramente esto. Es interesante que para los otros dos casos, el rompimiento de la aproximación cuadrática en el acoplamiento crítico conduce directamente al régimen caótico, que parece apuntar en la dirección de una conexión entre el fenómeno de caos y QPT. Sin embargo, el caso  $\omega = \omega_0/4$  es un contra ejemplo que indica la relación entre este par de fenómenos, no es como se pensaba [1]. Los resultados presentados muestran que la relación entre caos y QPT en el modelo de Dicke dependen fuertemente de las frecuencias de interacción ( $\omega$  y  $\omega_0$ ): regiones caóticas a bajas energías no son posibles excepto para valores cercanos al acoplamiento crítico, sin embargo esto no implica que en este punto exista, pues depende de las frecuencias de los modos de interacción.

El caso  $\omega = 4\omega_0$  muestra un comportamiento interesante que no se presenta en los otros dos casos. Para  $\omega = \omega_0/4$  y  $\omega = \omega_0$ , el caos aparece en las regiones con valores de energía de excitación altos, en la fase normal ( $\gamma < \gamma_c$ ), pero en el caso  $\omega = 4\omega_0$ , el caos aparece en zonas de energía muy alta para la fase normal tan pronto se acerca al punto de acoplamiento crítico. Por lo tanto, el rompimiento de la aproximación cuadrática en el valor del acoplamiento crítico es exhibido como una condición necesaria pero no suficiente para la presencia de caos.

Para profundizar en la relación entre caos y QPT en el modelo de Dicke se analiza en la Fig. 3.16 la dependencia de las frecuencias de los modos  $\omega$  y  $\omega_0$  para el valor de acoplamiento crítico  $\gamma = \gamma_c$  y diferentes valores de energía de excitación  $\epsilon$  cerca del estado base de energía  $\epsilon_0$ . Los diferentes grupos de puntos representan el caos presente para varias energías en la vecindad de  $\omega = \omega_0$ . La curva superior (roja) muestra que para una energía  $\epsilon = -0.8\omega_0$  el caos está presente en un rango para  $\omega \in (0.8\omega_0, 1.8\omega_0)$ . Al ir más abajo en energía la curva naranja con  $\epsilon = -0.9\omega_0$  muestra que las regiones caóticas están restringidas en un rango  $\omega \in (0.9\omega_0, 1.4\omega_0)$ . Para energías menores que  $\epsilon = -0.95\omega_0$  todas las trayectorias son regulares, no hay caoticidad.

Otra forma de estudiar la presencia de caos cercano a la vecindad de la QPT es fijar una frecuencia de los modos no interactuantes ( $\omega = \omega_0$ ) y dar un estudio detallado en la región de las energías cercanas al estado base y valores de acoplamiento  $\gamma$  cercanos del valor crítico  $\gamma_c$ , estos acercamientos de los mapeos previos son mostrados en la figura 3.17, esto confirma que alrededor de la región de la QPT el sistema es **regular**, y que no hay una relación directa entre QPT y caos en el caso resonante.

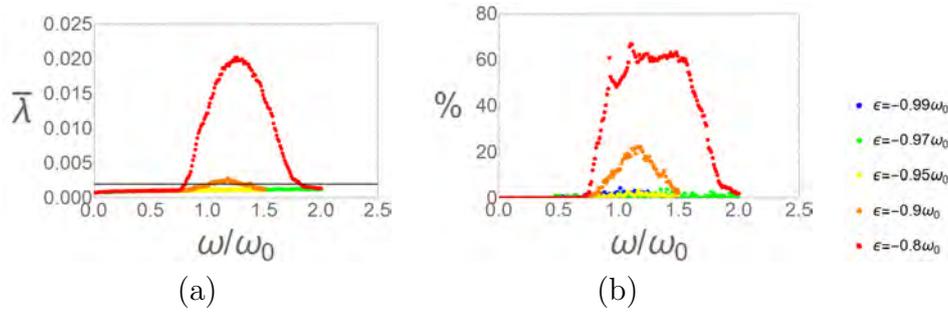


Figura 3.16: Promedio del exponente de Lyapunov (izquierda) y porcentaje de caoticidad (derecha), graficas en función de la energía de los fotones  $\omega$  para  $\gamma = \gamma_c$  y valores diferentes valores de energía de excitación  $\epsilon$  cerca del estado base  $\epsilon_0$ .

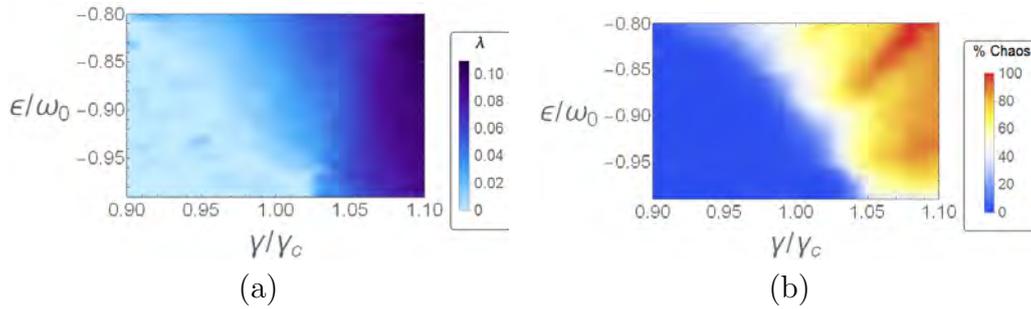


Figura 3.17: Acercamiento del mapeo del exponente de Lyapunov sobre superficie de energía (izquierda), porcentaje de caoticidad (derecha) para diferentes valores de  $\omega = \omega_0$ .

### 3.4.2. Caos y ESQPT

Como se ha mencionado, en [40] se sugiere que el caos presente en el modelo de Dicke está más relacionado con la ESQPT que con la QPT. La ESQPT es indicada en el mapeo de la Fig. 3.15 por las líneas segmentadas horizontales. Como en el caso de la QPT, la relación entre el caos y la ESQPT es realmente débil, aunque en los casos ( $\omega = \omega_0$  y  $\omega = 4\omega_0$ ) parece estar presente. En el caso resonante  $\omega = \omega_0$ , la región caótica aparece antes de la energía de la ESQPT ( $\epsilon < \epsilon_c = -\omega_0$ ) para  $\gamma > \gamma_c$ , donde el caos duro (100% de caoticidad) ocurre a energías cercanas a la energía crítica ( $\epsilon = -\omega_0$ ). Sin embargo en los otros dos casos, particularmente en el caso  $\omega = \omega_0/4$  la presencia de caos en el régimen de caos duro no está relacionada con la ESQPT. En conclusión se muestra que la relación entre caos (y caos duro) y la ESQPT es fuertemente dependiente de los parámetros que se toman en el modelo y no hay entre sí una relación establecida. Como se mencionó anteriormente la ruta al caos amerita un estudio detallado para clarificar por que en algunos casos el caos duro (y ergodicidad) aparecen a energías cercanas a la energía crítica de la ESQPT.



# Capítulo 4

## Ruta al caos cuántico

*“No es la posesión de la verdad, sino el éxito que llega luego de la búsqueda, donde el buscador se enriquece con ella.”*  
-Max Planck-

La ruta al caos puede asociarse al incremento de energía o al cambio de valores en los parámetros del modelo como se observó en el capítulo previo. En este capítulo se hace un análisis entre las formas en que se presenta el caos en las respectivas naturalezas, cuántica y clásica.

### 4.1. Bifurcación en las frecuencias fundamentales

Una forma en la que se puede apreciar la regularidad o el caos es emplear diagramas de bifurcación en especial cuando se analiza el espectro de potencias. En un régimen regular el espectro de potencias presenta la participación de pocas frecuencias representativas las cuales son asociadas a las órbitas regulares en el espacio fase. Por otro lado en el régimen caótico es muy común la aparición de frecuencias que no presentan alguna estructura entre ellas, esto propicia un comportamiento no predecible en las órbitas en el espacio fase, el tiempo en el que el grado de predictibilidad se rompe es conocido como tiempo de Lyapunov  $t_\lambda = 1/\lambda$ .

El espectro de potencias sobre cualquier variable  $o(t)$  es calculado en función de la transformada de Fourier:

$$PS(\Omega) = \left| \int_0^\infty o(t)e^{-i\Omega t} dt \right|^2, \quad (4.1)$$

y esta da información sobre la participación de frecuencias  $\Omega$  asociadas a la dinámica de  $o(t)$ .

El modelo de Dicke presenta dos frecuencias principales en el estado base (ver Fig. 4.1) en términos del parámetro  $\gamma$  [41]. Esto es totalmente consistente con el límite a bajas energías ya que el modelo es integrable como se demostró anteriormente.

A energías superiores la dinámica no-lineal introduce la aparición de otras frecuencias y no es posible encontrarlas en forma analítica como ocurre con el estado

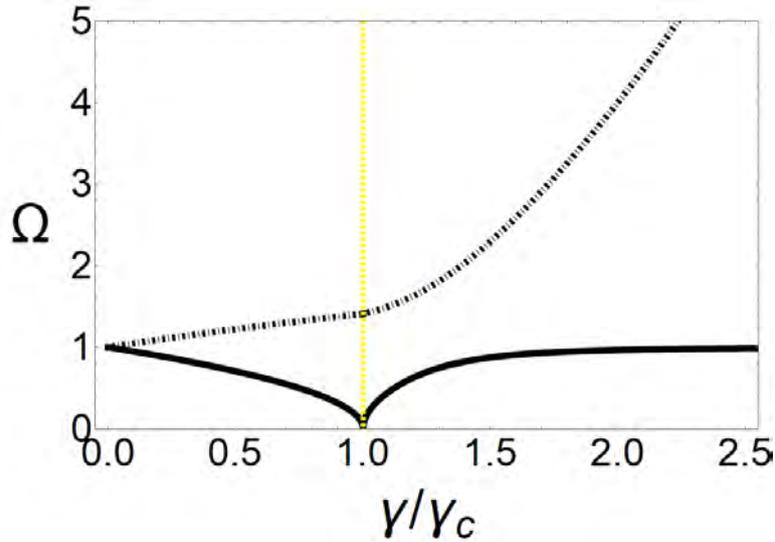


Figura 4.1: Frecuencias características en el estado base: Bajas frecuencias (Lineas segmentadas) y Frecuencias altas (Linea sólida) dadas por las ecuaciones (A.2) y (A.4) respectivamente, la línea amarilla representa el parámetro de acoplamiento crítico de la QPT.

base o a bajas energías. Para ello se recurre a métodos numéricos para calcular la participación de estas frecuencias. En especial se calcula a continuación el espectro de potencias para la variable  $q(t)$  empleando condiciones iniciales específicas en función de la energía y del parámetro de acoplamiento como se aprecia en la figura 4.2. En la figura 4.2, la aparición de nuevas frecuencias cuando  $\epsilon/\omega_0 \simeq -1.2$

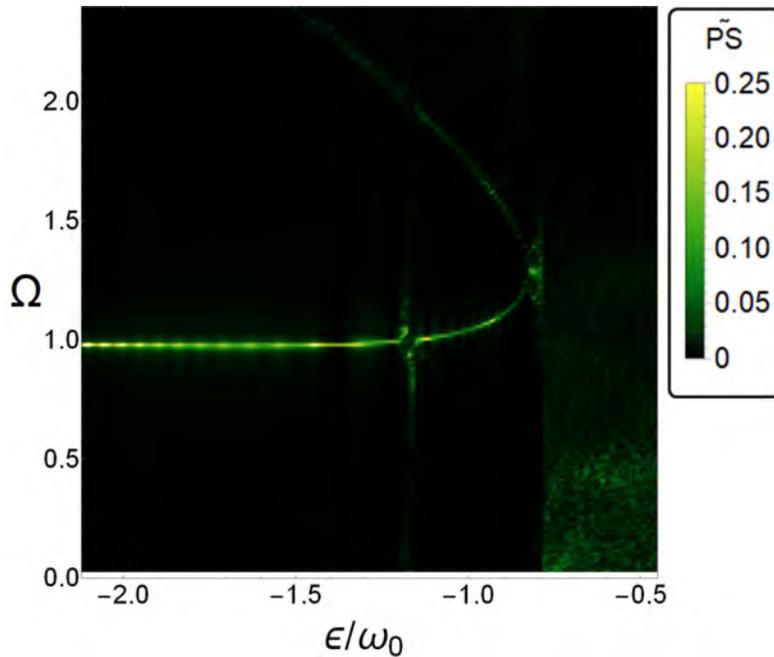


Figura 4.2: Espectro de potencias en términos de la energía  $\epsilon/\omega_0$ , para la variable  $q(t)$  con condiciones iniciales dadas por el camino azul en la Fig. 4.3.

y para energías mayores a  $\epsilon/\omega_0 \simeq -0.8$ , es un comportamiento relacionado con la aparición de caos debido a que las frecuencias principales comienzan a bifurcar en muchas otras y este comportamiento depende de las condiciones iniciales que se

estén considerando debido a su sensibilidad.

La condición inicial dada en términos de la energía específica  $\epsilon$ , está dada por:

$$(p(0), q(0), j_z(0), \phi(0)) = (0, q_+(\epsilon), j_z, 0), \quad (4.2)$$

donde el valor  $q_+(\epsilon)$  es determinado al resolver (3.1). Se consideran tres caminos diferentes en la condición inicial sobre  $j_z$  con  $\gamma = 2\gamma_c$  y resonancia ( $\omega = \omega_0 = 1$ ). Los primeros dos caminos son tomados al considerar el valor máximo y mínimo del valor promedio de la variable clásica  $j_z(t)$  para cada energía  $\epsilon$ , donde el valor promedio de la variable  $j_z(t)$  es obtenido como,

$$\langle j_z \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T j_z(t) dt. \quad (4.3)$$

El tercer camino es considerado para el valor de  $j_z$  constante ( $j_z = -(\gamma_c/\gamma)^2$ ). Los caminos mencionados se pueden apreciar en la figura 4.3.

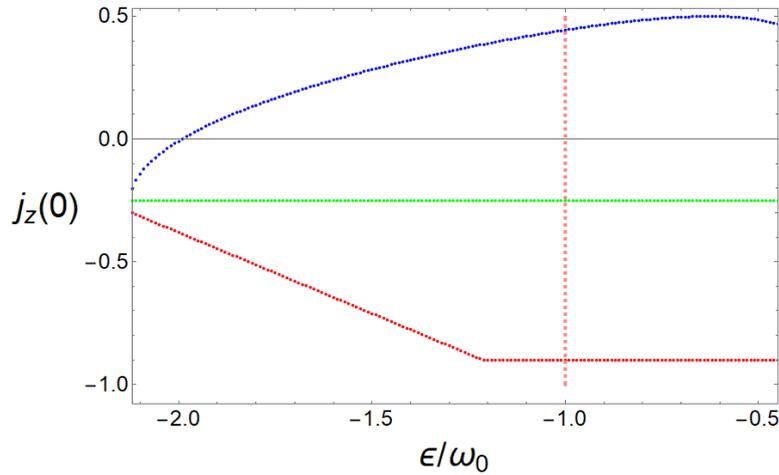


Figura 4.3: Valores de la condición inicial  $j_z(0)$ , puntos rojos y azules son el mínimo y el máximo del valor  $\langle j_z \rangle$  para cada superficie de energía (la expresiones que determinan dichos valores están en el Apéndice A.3), los puntos verdes son para  $j_z = -0.25$ , la línea punteada rosa representa la energía de la ESQPT. Todos los caminos sobre la energía tienen un paso de tamaño  $\Delta\epsilon/\omega_0 = 0.01$ .

Para un estudio extendido en la bifurcación en términos de las frecuencias en función de la energía, se muestran a continuación las gráficas del espectro de potencias (PS) en comparación de la frecuencia para tres energías específicas  $\epsilon/\omega_0 = -1.8, -1.1, -0.5$ .

En la figura 4.4 (camino azul) a una energía  $\epsilon/\omega_0 \simeq -1.2$  aparece un pequeño indicio de un comportamiento caótico que después se sigue con un comportamiento regular y a la energía  $\epsilon/\omega_0 \simeq -0.8$  el caos regrese en forma extensa sobre energías más grandes. Por otro lado el camino verde de la figura 4.5 presenta regularidad a bajas energías y en la zona  $\epsilon/\omega_0 \simeq -1.5 \pm 0.1$  el exponente de Lyapunov fluctúa en una mezcla de regularidad y caoticidad, sin embargo a energías superiores el sistema presenta caos como en el caso anterior. Finalmente el caso que toma el camino rojo exhibe  $\epsilon/\omega_0 \simeq -1.2$  como se puede ver en la figura 4.6.

En general los espectros de potencias son consistentes con una dinámica regular a bajas energías y a altas energías el sistema presenta caos en su dinámica.

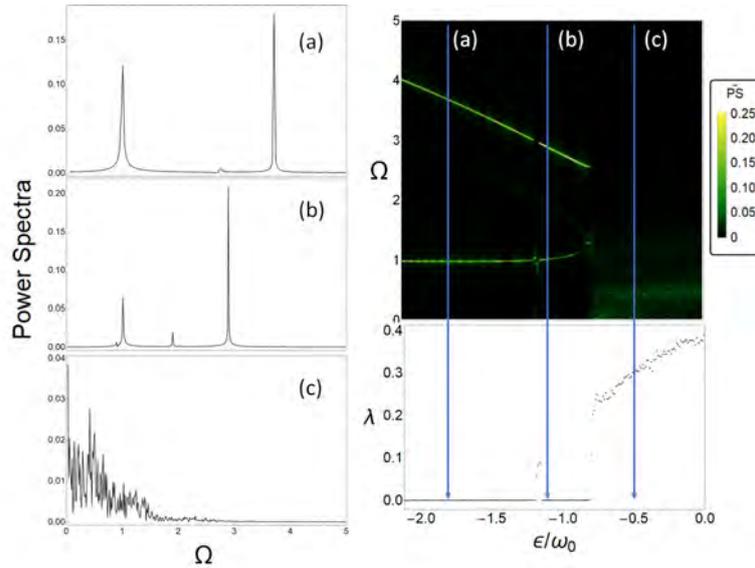


Figura 4.4: Espectro de potencias  $PS$  de la variable  $q(t)$  con condición inicial dada por (4.3) (puntos azules), con (a)  $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ , (b)  $\epsilon/\omega_0 = -1.1$  y (c)  $\epsilon/\omega_0 = -0.5$ , en el lado derecho la relación entre  $PS$  con los exponentes de Lyapunov  $\lambda$ .

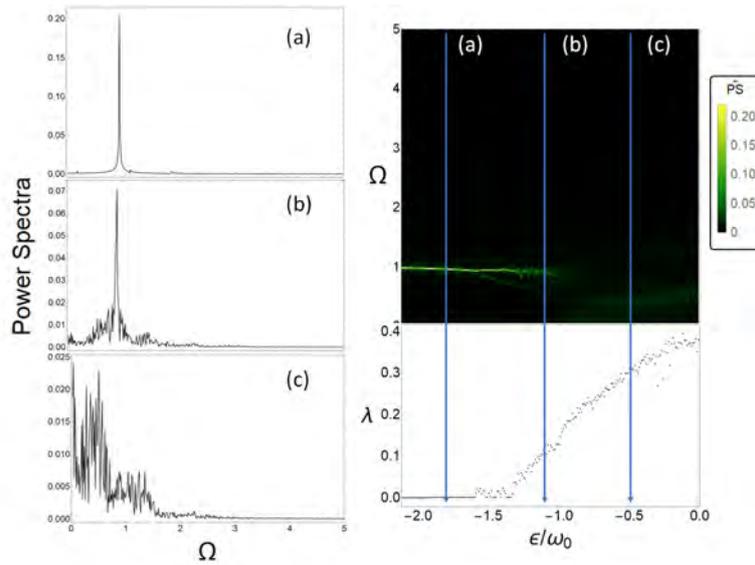


Figura 4.5: Espectro de potencias  $PS$  de la variable  $q(t)$  con condición inicial dada por (4.3) (puntos verdes), con (a)  $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ , (b)  $\epsilon/\omega_0 = -1.1$  y (c)  $\epsilon/\omega_0 = -0.5$ , en el lado derecho la relación entre  $PS$  con los exponentes de Lyapunov  $\lambda$ .

## 4.2. Trayectorias en las redes de Peres

Como se mencionó en la sección 1.2.2, la red de Peres, es una representación visual del espectro de autoestados del Hamiltoniano comparada con alguna observable de interés. Debido a que los caminos marcados en la Fig. 4.3 toman función de la variable  $j_z$ , la red de Peres en forma cuántica se ha construido para el operador  $J_z$ , esta red presenta una forma regular en los límites integrables y desorden en los que el caos cuántico aparece.

La Fig. 4.7 muestra la red de Peres construida sobre el operador  $J_z$ , en ella se aprecia un comportamiento semejante a los límites clásicos, en los que si la energía del

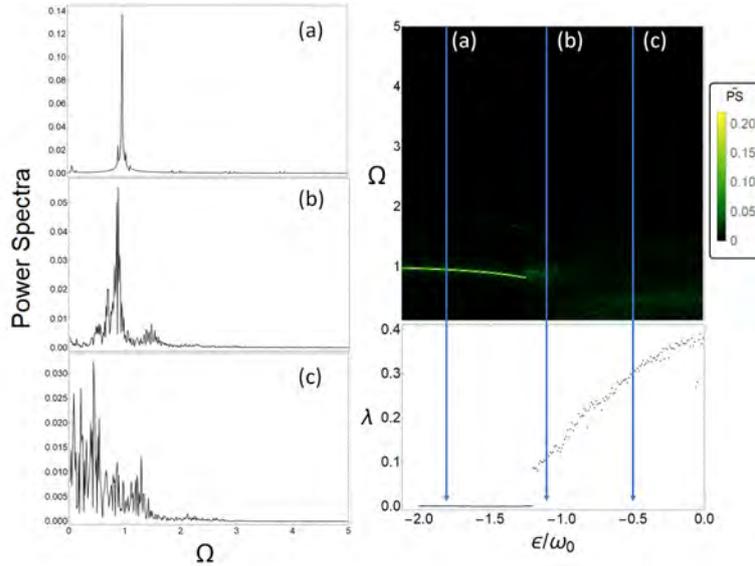


Figura 4.6: Espectro de potencias  $PS$  de la variable  $q(t)$  con condición inicial dada por (4.3) (puntos rojos), con (a)  $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ , (b)  $\epsilon/\omega_0 = -1.1$  y (c)  $\epsilon/\omega_0 = -0.5$ , en el lado derecho la relación entre  $PS$  con los exponentes de Lyapunov  $\lambda$ .

sistema cuántico es cercana a la del estado base, la red es regular y si la energía crece la red se desordena, esta forma de analizar el caos es atractiva visualmente pero en forma cuantitativa no concluye un resultado en especial. En un puente

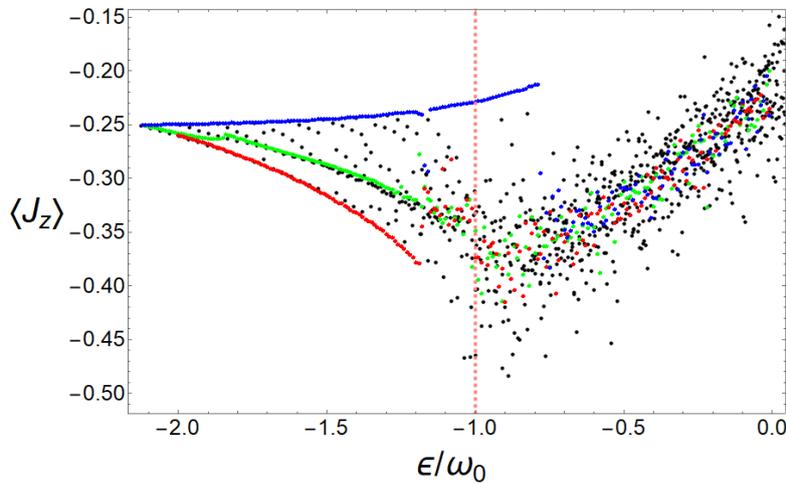


Figura 4.7: Los puntos negros constituyen la Red de Peres para el operador  $J_z/j$  con  $j = 100$ . Los puntos de color representan el valor del promedio temporal de la variable clásica  $j_z(t)$  con las condiciones iniciales dadas en la Fig. 4.3, la línea rosa representa la energía de la ESQPT.

entre el valor de espectación cuántico del operador  $\langle J_z \rangle$  y el valor promedio clásico  $\langle j_z \rangle$ , se han montado las tres rutas clásicas en colores, rojo, verde y azul en la red de Peres, que al ser comparadas muestran el resultado semejante entre sí. Esto nos permite hacer una conexión local en términos de condiciones iniciales y valores que pueden ser mapeados en forma cuántico al usar estados coherentes.

## 4.3. Localización de estados coherentes

### 4.3.1. Función de Husimi como función de $j$

La función de Husimi  $Q$  depende del mapeo explícito de variables canónicas que tengan una correspondencia clásica con el espacio fase al que se tiene acceso. En especial para el modelo de Dicke, los estados coherentes usados para realizar la conexión entre el espacio fase clásico y el sistema cuántico es mediante los estados coherentes de Glauber y los estados de Bloch que se definen en la Ec. (1.38) y (1.52) respectivamente. Al considerar el producto de dichos estados coherentes se puede mapear la estructura completa del espacio fase clásico para el sector de los fotones y el sector atómico, de modo que  $|\alpha, z\rangle = |\alpha(p, q)\rangle \otimes |z(j_z, \phi)\rangle$ , estados con los que se obtiene el Hamiltoniano clásico como se mostró en la sección 2.2. De esta manera al usar el estado coherente  $|\alpha, z\rangle$ , de la relación (1.20) y autoestados del Hamiltoniano  $|E_k\rangle$  con energía  $E_k$ , la función de Husimi es definida por la siguiente expresión,

$$Q_k(\alpha, z) = |\langle z, \alpha | E_k \rangle|^2. \quad (4.4)$$

Como cada estado coherente depende explícitamente de las variables canónicas clásicas por definición ya que  $\alpha_0 = \alpha_0(p_0, q_0)$  y  $z = z(j_{z0}, \phi_0)$ , cada estado va a estar centrado en función de la elección de coordenadas con las que se construya  $|\alpha_0, z_0\rangle$ , así como de la energía con que se tome, la cual depende del número de partículas que es proporcional a  $j$ .

En general la función de Husimi es definida por  $Q = Q(p, q, j_z, \phi, E, j)$  al emplear puntos clásicos en el espacio fase. De este modo se puede asociar en forma directa una conexión con la variables canónicas y se puede representar la función  $Q$  en el espacio fase clásico. La Fig. 4.8 muestra la dependencia de la función de Husimi en términos del valor de  $j$ , es claro que al tender el valor de  $j$  al límite termodinámico la localización de  $Q$  se hace puntual como es de esperarse, ya que en este límite, la correspondencia clásica es mayor. Del mismo modo al tener un valor de  $j$  pequeño el sistema cuántico no presenta una correspondencia directa con el límite clásico en forma puntual esto es totalmente relacionado a que el tamaño de la celda de Planck tiene que ver con el factor que es  $\hbar_{eff} = 1/j$ .

Para una mejor visualización de algunos de los estados coherentes considerados, la Fig. 4.9 muestra el tamaño de la función de Husimi dependiendo del valor de  $j$ , en su respectiva superficie de energía clásica, cuando  $|\langle z; \alpha | \alpha_0, z_0 \rangle|^2 = e^{-1}$ . Los puntos clásicos están seleccionados para los tres valores de  $j_z$  correspondientes a los caminos determinados por la red de Peres. En especial se muestran los casos para energía:  $\epsilon/\omega_0 = -1.8, -1.5$  y  $-1.1$ , en sus respectivos mapas de caos para las variables canónicas  $(j_z, \phi)$ . De la Fig. 4.9 se observa que al considerar  $j$  grande, la función de Husimi tiende a localizarse más. El problema de recurrir a valores de  $j$  grandes, es que la complejidad para resolver el Hamiltoniano de Dicke se incrementa, debido a que el tamaño del espacio crece en forma cuadrática como función del número de eigenestados. Estos eigenestados que sirven para construir el estado coherente a analizar.

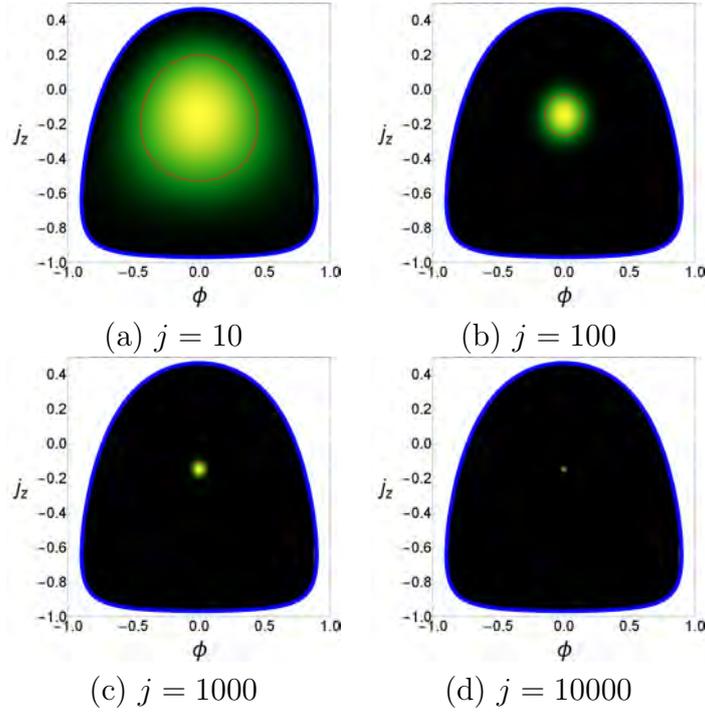


Figura 4.8: Función de Husimi  $Q$  en el espacio fase clásico accesible en las variables canónicas  $(j_z, \phi)$ , para valores diferentes de  $j$ , cuyos estados coherentes  $|\alpha_0, z_0\rangle$  están construidos con las variables clásicas  $(p, q, J_z, \phi) = (0, q_+(\epsilon), -0.145, 0)$  a una energía  $\epsilon/\omega_0 = -1.1$ . Las respectivas curvas en color rojo son la curva de nivel para  $|\langle \alpha, z | \alpha_0, z_0 \rangle|^2 = e^{-1}$ .

#### 4.4. Razón de participación como medida de caos cuántico

Gracias a la correspondencia clásico-cuántica otorgada por los estados coherentes  $|\alpha, z\rangle$ , en términos de caos y regularidad, es conveniente definir la razón de participación de la Ec. (1.21) como:

$$P_R = \frac{1}{\sum_k |\langle E_k | \alpha, z \rangle|^4} = \frac{1}{\sum_k Q_k^2(\alpha, z)}, \quad (4.5)$$

en esta forma el  $P_R$  es obtenido en términos de la función de Husimi de la Ec. (4.4).

Una forma de analizar resultados ante la sensibilidad de una condición inicial clásica y la correspondencia ante el estado coherente en su localización cuántica, es comparar directamente el exponente de Lyapunov y la razón de participación de estados cuánticos como indicadores *cuantitativos* del caos presente en forma clásica y semicuántica respectivamente. Como está reportado en [42], se ha considerado el caso  $\epsilon/\omega_0 = -1.5$  y se ha calculado el  $P_R$  sobre esta superficie de energía usando  $j = 80$  y se ha comparado este valor con el exponente de Lyapunov, para condiciones iniciales y estados coherentes sobre el eje  $j_z$ ,  $\phi = 0$ ,  $p = 0$  con  $q_+(\epsilon)$  y  $q_-(\epsilon)$ . La Fig. 4.10 se muestra una detallada comparación entre el  $P_R$  y el LCE.

Debido a la estructura suave que presenta el  $P_R$  sobre la variable  $j_z$ : Se propone una forma sensible para distinguir si el estado coherente asociado es caótico ó no. La propuesta consiste en llevar la información del  $P_R$  y del exponente de Lyapunov  $\lambda$  a una forma en que ambos puedan relacionarse independientemente del valor

#### 4.4. RAZÓN DE PARTICIPACIÓN COMO MEDIDA DE CAOS CUÁNTICO

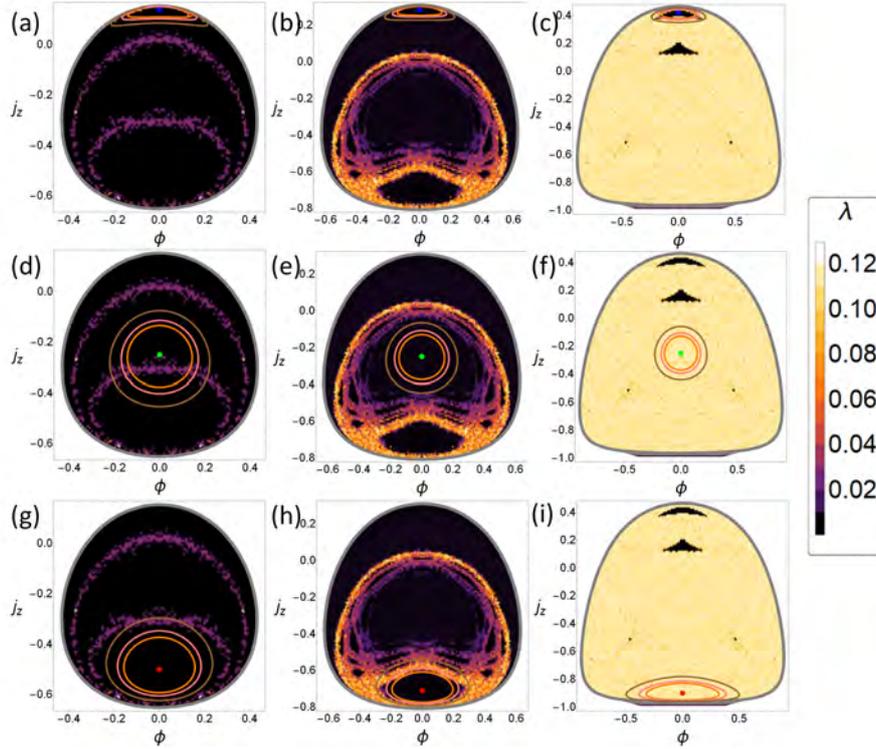


Figura 4.9: Mapas de caos (exponente de Lyapunov  $\lambda$ ) en tres zonas de energía (izquierda)  $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ , (centro)  $\epsilon/\omega_0 = -1.5$  y (derecha)  $\epsilon = -1.1$ , con localización de los estados coherentes en el espacio fase. Puntos (de arriba a abajo) indican el estado coherente centrado en la zona baja (rojo), media (verde) y arriba (azul) sobre la red de Peres de la Fig. 4.7. Las curvas cerradas encierran a la función de Husimi correspondientes a  $|\langle z; \alpha | \alpha_0, \zeta_0 \rangle|^2 = e^{-1}$ , para tres valores de  $j$ , con  $j = 40$  (café),  $j = 70$  (rosa) y  $j = 100$  (naranja).

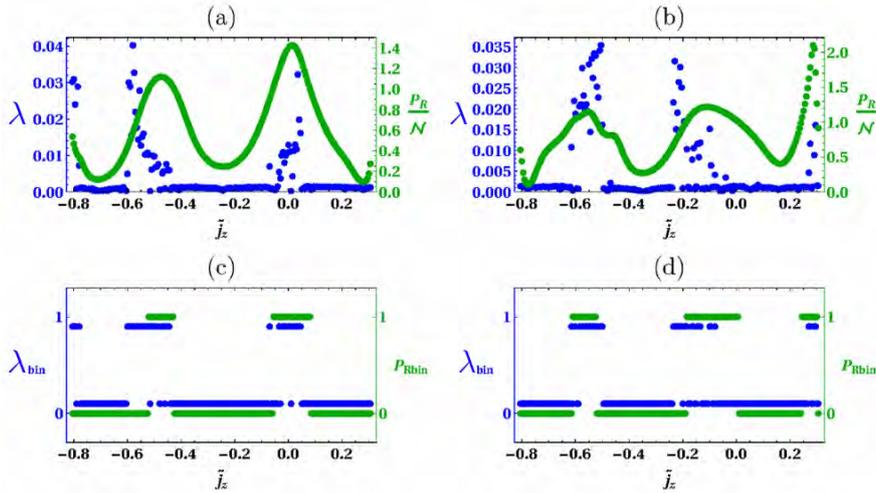


Figura 4.10: (Arriba) Comparación entre  $P_R$  y exponentes de Lyapunov sobre el eje  $j_z$  con  $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ ,  $p = 0$ ,  $\phi = 0$ . Con  $j = 80$  y  $N_{max} = 100$ . Para  $q = q_+$  (izquierda), y  $q = q_-$  (derecha). Los puntos negros son el valor del exponente de Lyapunov y los verdes para el valor del  $P_R$ . (Abajo) criterio binario para el  $P_R$  y el exponente de Lyapunov

numérico, es decir volver ambas medidas a un marco binario. Si el valor numérico de  $\lambda > 0$  la condición inicial será caótica por lo tanto se considerará como  $\lambda_{bin} = 1$

ó  $\lambda_{bin} = 0$  en el caso regular, por otro lado si el valor del  $P_R/j > 1$  se considerará que el estado coherente es caótico por lo tanto  $P_{Rbin} = 1$  y  $P_{Rbin} = 0$  en caso contrario. La Fig. 4.10 muestra una cercanía en criterios cuantitativos entre el LCE y el  $P_R$ , sin embargo debido al tamaño de la localización de los estados coherentes (ver la Fig. 4.8) en función de  $j$ , no se puede realizar un comparativo totalmente eficiente debido a que dicha correspondencia justo se correspondería en el *límite termodinámico*.

#### 4.4.1. Escalamiento en la Razón de Participación ( $P_R$ )

Para hacer un análisis más robusto sobre la localización del estado coherente se procedió a calcular el valor de la razón de participación (PR) como función de la energía y en especial sobre la forma en la que se considere la condición inicial a calcular. En general los estados coherentes con energía baja viven en una región regular en términos de  $\lambda$ . Sin embargo, al aumentar la energía el caos toma mayor presencia.

Como se aprecia en la Fig. 4.11, la correspondencia entre la zona caótica y la zona con un  $P_R$  más grande es muy semejante entre sí cuando se comparan las superficies de energía en las variables  $(j_z, \phi)$  [43].

El  $P_R$  es sensible al tamaño de la localización del estado coherente  $|\alpha, z\rangle$  en el espacio fase de acuerdo a la función de Husimi, en este sentido se ha propuesto una regla de escalamiento que sigue en función del valor  $j$ , esto está asociado a un nivel de fractalidad que tienen los sistemas cuánticos caóticos y se mide en términos de un factor llamado la dimensión multifractal. Esta propiedad de multifractalidad conlleva a expresar la siguiente ley de potencias para el valor de la razón de participación:

$$P_R(\alpha, z; j) = j^{\xi(\alpha, z)} \quad (4.6)$$

donde  $\xi(\alpha, z)$  es un número real y  $\xi > 0$ . Para un estado coherente específico  $|\alpha_0, z_0\rangle$  y  $j$ , es posible tomar  $j \in [j_0, j_n]$  y calcular  $\xi$  de la siguiente manera,

$$\xi(\alpha_0, z_0) = \frac{1}{n} \sum_{j=j_0}^{j_n} \log_j P_R(\alpha_0, z_0; j), \quad (4.7)$$

donde  $j_0$  y  $j_n = n\Delta j$  son el valor inicial y el valor final de  $j$ , en que se realizará el cálculo, con  $\Delta j$  el tamaño del paso.

Para mostrar la relación de escalamiento del  $P_R$  se usaron los puntos rojo, verde y azul de la Fig. 4.9, considerando  $j_0 = 10$ ,  $j_n = 100$ ,  $\Delta j = 5$ , con  $N_{max} = 250$  para garantizar una convergencia óptima al 99% en la solución numérica a altas energías con  $\epsilon_{max} \sim -1.1$  para  $j = 100$  [44]. Los resultados de estos cálculos se aprecian en la Fig. 4.12. Para la energía  $\epsilon/\omega_0 = -1.8$ , el escalamiento del  $P_R$  muestra regularidad respecto al parámetro  $\xi$  ya que este valor siempre es menor, es decir  $\xi < 1$ . Para la energía  $\epsilon/\omega_0 = -1.5$ , el estado coherente centrado en  $j_z = -0.25$  es caótico de acuerdo  $\xi$ , mientras que en el límite clásico es regular, por lo tanto la regla de escalamiento no es completamente operable cuando se tiene una región de regularidad y caos mezclados. En contraste cuando el régimen caótico predomina, si se aumenta la energía del sistema el exponente  $\lambda$  también aumenta y el porcentaje de caos en el volumen en el espacio fase es mayor respecto al espacio fase completo, es decir se tiende a un caos ergódico. Por ello los puntos

#### 4.4. RAZÓN DE PARTICIPACIÓN COMO MEDIDA DE CAOS CUÁNTICO

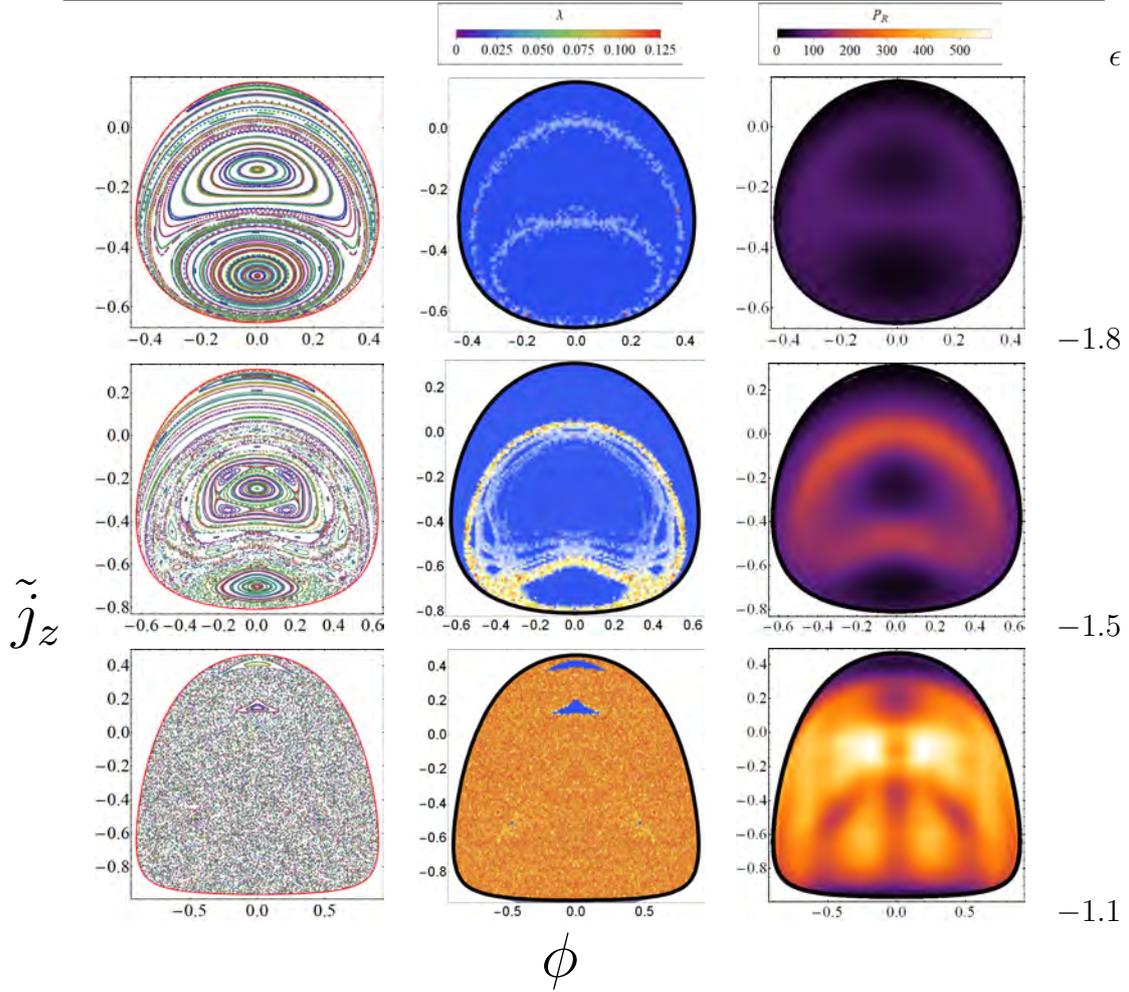


Figura 4.11: Secciones Poincaré (columna izquierda) y exponentes de Lyapunov (columna central) para un amplio muestreo de condiciones iniciales sobre la sección  $p = 0$ , en la versión clásica del modelo de Dicke, para tres energías diferentes. Sección de Poincaré proyectada en el plano  $\tilde{j}_z$  vs.  $\phi$ , con  $\tilde{j}_z \equiv j_z/j$ . La columna derecha representa la Razón de Participación ( $P_R$ ) de los estados coherentes del modelo cuántico de Dicke para  $j = 80$ ; los parámetros de los estados coherentes son los mismos que han sido tomados en los resultados clásicos. Los parámetros del Hamiltoniano son  $\omega = \omega_o = \gamma = 1$ .

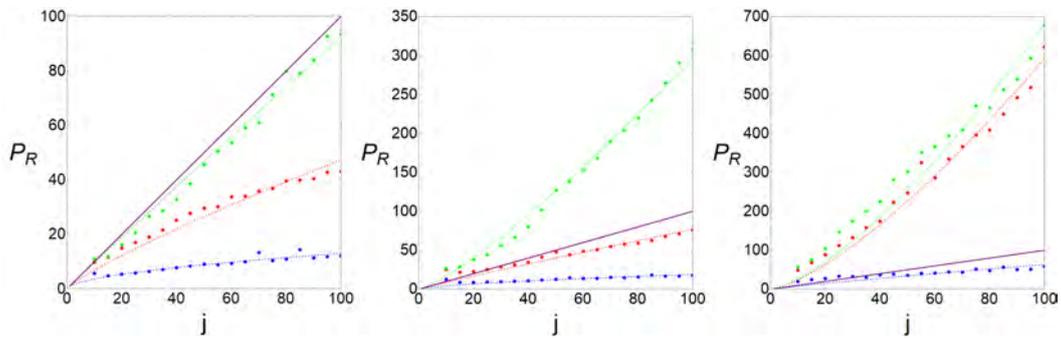


Figura 4.12:  $P_R$  en función de  $j$  (puntos de colores), para el estado coherentes de la Fig Fig. 4.9, con  $\epsilon = -1.8$  (izquierda),  $\epsilon = -1.5$  (centro) y  $\epsilon = -1.1$  (derecha), líneas punteadas representan la relación de la Ec. (4.6) para cada estado coherente en el respectivo camino de la red de Peres, la línea morada expresa el valor crítico cuando  $P_R = j$  i.e  $\xi = 1$ .

que están en la energía  $\epsilon/\omega_0 = -1.1$  son predominantemente caóticos (ya que  $\xi > 1$ ), salvo el que va por el camino azul que corresponde al estado coherente centrado en la isla de estabilidad de la Fig. 4.9 (c).

Para generalizar el análisis del escalamiento del  $P_R$  en función de la energía, y

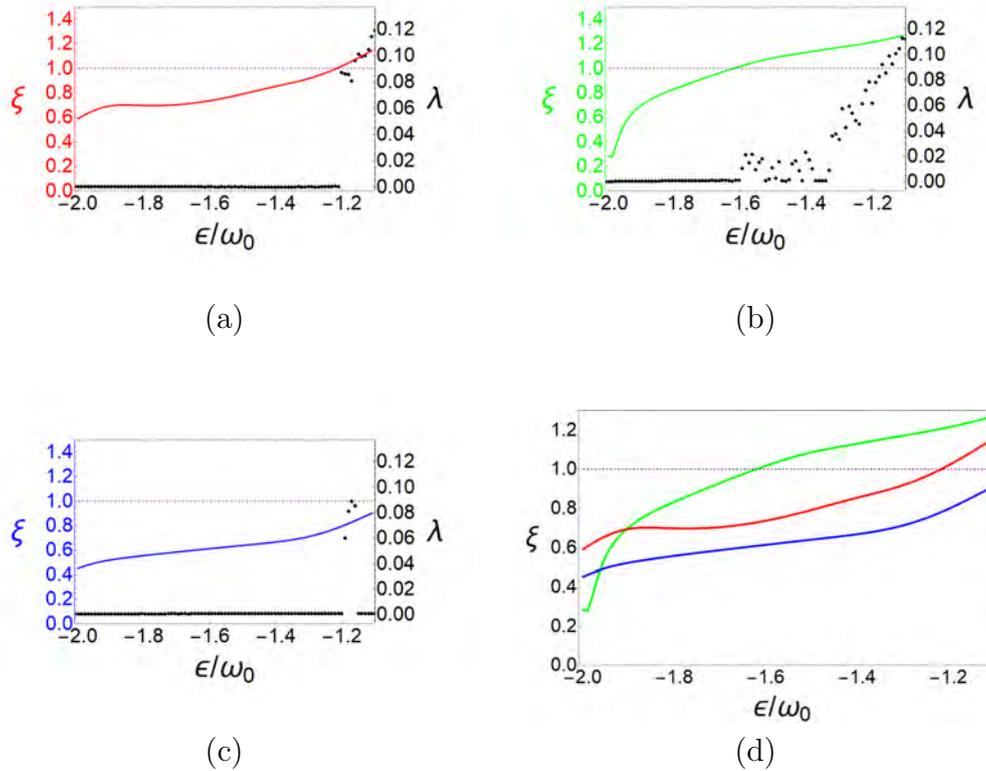


Figura 4.13: (a), (b) y (c) son la comparación del valor del  $\xi$  con el exponente de Lyapunov, como función de la energía y de los caminos con estado coherente así como condición inicial centrados en los valores de la Fig. 4.3, (d) Escalamiento de  $\xi$  juntas para los tres caminos de  $j_z$ .

en especial de la elección de la localización de los estados coherentes, respecto al espacio fase clásico, se han tomado energías que van desde; la energía mínima  $\epsilon/\omega_0 = \epsilon_0$  hasta la energía  $\epsilon/\omega_0 = -1.1$ , con valores de  $j = \{10, 15, \dots, 100\}$ .

De la expresión (4.7) y con los caminos tomados por los valores de  $j_z$  mostrados en la Fig. 4.3, se observa que en comparación con la información cualitativa dada por la red de Peres (ver Fig. 4.7) los resultados obtenidos por el valor de  $\xi$  son más ricos en cuanto a información ya que tienen el atributo de ser especificar un valor cuantitativo que además es comparable a la información de su contraparte clásica  $\lambda$ . Estos resultados se pueden apreciar en la figura 4.13, los cuales muestran en forma clara que el comportamiento caótico aparece con el crecimiento de la energía, los caminos que van por abajo (rojo) y por arriba (azul) de la red de Peres, minimizan la aparición de caos, a diferencia del camino que toma el trayecto medio (verde). Esto demuestra que incluso la sensibilidad de como se elijan tomar las condiciones que definen los estados coherentes es relevante en torno a la perspectiva del análisis de caos y regularidad.



# Capítulo 5

## Evolución temporal de estados coherentes

*“La actitud que mantiene este nuevo hombre frente a la naturaleza será radicalmente diferente a la actitud que mantenía en épocas anteriores.”*  
-Werner Karl Heisenberg-

En los capítulos previos, el análisis de caos cuántico se ha mostrado en forma estática para estados coherentes, y se determinó la relación de la localización de estados coherentes en términos de la cantidad de átomos. Sin embargo también es posible hacer un análisis de la dinámica respectiva a los estados coherentes con los que se ha trabajado. También se investiga la relación de la distribución de las energías propias del sistema que participan en la construcción de algún estado coherente inicial, en especial para estados que son regulares es posible obtener una forma analítica para la probabilidad de supervivencia que fue definida en la relación (1.23).

### 5.1. Probabilidad de supervivencia de estados coherentes

De la expresión (1.23) dada en la sección 1.2.5, la probabilidad de supervivencia (SP por sus siglas en ingles) es definida en términos de estados correlacionados en el tiempo. En especial para los estados coherentes que ya han sido utilizados previamente, consideraremos  $c_k = \langle E_k | \alpha z \rangle$ , es decir la probabilidad de supervivencia es:

$$\begin{aligned} SP(t) &= \left| \sum_k |c_k|^2 e^{-iE_k t} \right|^2 \\ &= \left| \sum_k Q_k e^{-iE_k t} \right|^2. \end{aligned}$$

Como la influencia de las componentes  $c_k$  es relevante en el cálculo de la SP una forma de estudiar la SP es a partir de las distribuciones de dichas componentes para estados coherentes localizados en una zona caótica, regular y mixta para las energías centradas en  $E = -1.1j$ ,  $E = -1.5j$  y  $E = -1.8j$  respectivamente con  $j = 120$ . En especial el caso regular brindará la posibilidad de obtener una expresión analítica para la SP como se detallará mas adelante.

### 5.1.1. Régimen caótico

En la Fig. 5.1 (a) y (c) las componentes de los dos estados coherentes para la energía  $\epsilon = -1.1$  son mostrados. Sus localizaciones en el espacio fase son vistas en la Fig. 5.1 (b). A esta energía, el espacio fase es prácticamente caótico completamente. Esto se ve reflejado por las componentes de los estados coherentes, en donde no se ve ninguna estructura distribuida para las secuencias de energía. Sin embargo en una escala pequeña de energía (ver recuadro en Fig. 5.1 (a) y (c)) se aprecia en el estado (c) hay componentes son regulares y que son ausentes en el estado coherente (a). La  $SP$  decae rápidamente en ambos casos, pero debido a la estructura regular parcial, la  $SP$  del estado coherente (c) muestra ciertos rasgos de periodicidad a tiempos cortos, que a comparación con el estado (a) no se ve. Esta diferencia es relacionada con el fenómeno de cicatrización, que ha sido identificado en [45], lo cual ocurre cuando el estado coherente inicial es localizado cerca de una órbita periódica inestable.

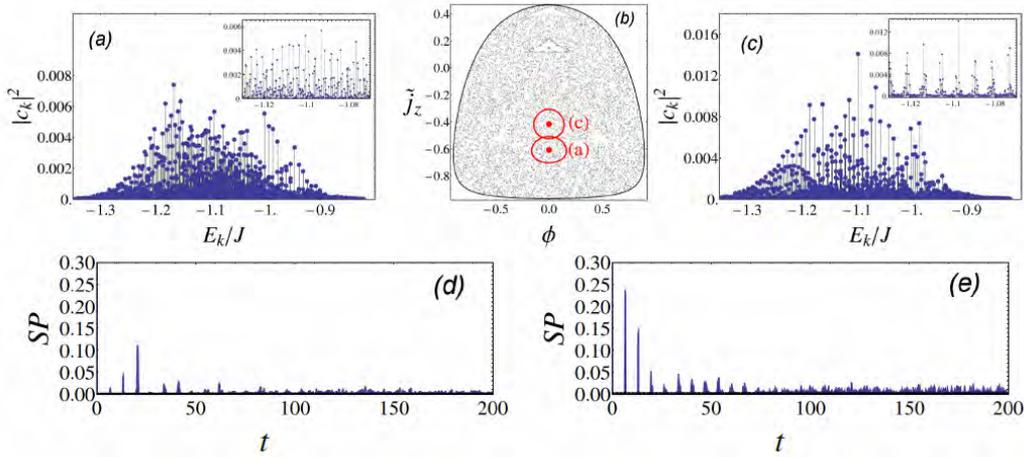


Figura 5.1: Cuadrado del valor absoluto de las componentes  $c_k$ , de dos estados coherentes (a) y (c) con energía  $E = -1.1j$  y  $j = 120$ . La localización y dispersión de los estados coherentes en el espacio fase clásico se muestra en el panel (b), ambos casos se localizan en una región caótica. Los paneles (d) y (e) muestran la probabilidad de supervivencia de el estado coherente inicial de los paneles (a) y (c) respectivamente. Los recuadros en los paneles (a) y (c) son acercamientos de las componentes de energía en una zona pequeña de energía.

### 5.1.2. Caos mixto

El estudio entre la correspondencia entre el valor del  $P_R$  y la evolución de la  $SP$  en estados coherentes es definida en regiones caóticas o regulares es sensible a la elección de la energía en que sea centrado el estado coherente. Pues como se mostró en el caso pasado, si uno selecciona energías altas el régimen caótico es predominante, sin embargo en una zona intermedia del espectro como lo es la energía  $E = -1.5j$ , existe una zona mezclada entre regularidad y caos. En el espacio fase mostrado en el panel (b) de la Fig. 5.2, las secciones de Poincaré siguen caos mixto. Para analizar la dependencia en la localización de  $|\alpha_0, z_0\rangle$ , se han tomado dos estados coherentes, uno en una zona regular Fig. 5.2 (a) y otro en una zona caótica Fig. 5.2 (c). Para el caso regular se es posible dar una expresión analítica

## CAPÍTULO 5. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE ESTADOS COHERENTES

para la evolución temporal de la  $SP$ , que será mostrado en la siguiente sección con los detalles de su obtención. En la Fig. 5.2 (d) se aprecia la comparación entre el

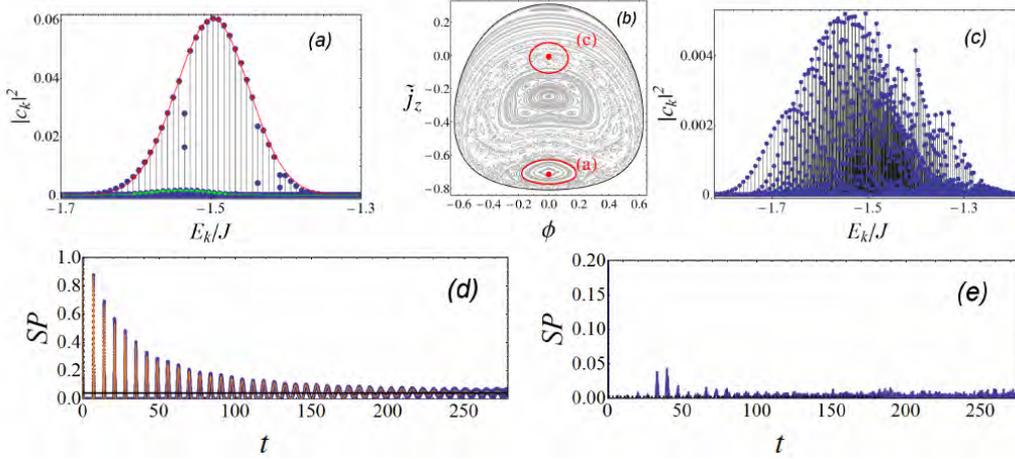


Figura 5.2: Lo mismo que en 5.1 pero para  $E = -1.5j$ , donde el caos y la regularidad coexisten. Los estados coherentes (a) y (c) son localizados respectivamente en una zona regular y caótica. Para visualizar los reavivamientos de la  $SP$  del estado (c), una escala pequeña fue usada en el panel (e).

resultado de la  $SP$  numéricamente calculado y la expresión analítica. A diferencia del comportamiento periódico en Fig. 5.2 (d), el caso (e) confirma un decaimiento rápido que tiende a fluctuaciones centradas en el valor del  $IPR$  como se dedujo en la sección 1.2.5.

### 5.1.3. Régimen regular

Como se ha mencionado en capítulos previos, a bajas energías el modelo de Dicke presenta regularidad tanto en forma clásica como en forma cuántica. Para mostrar la regularidad de la probabilidad de supervivencia, un par de estados coherentes se han construido sobre la energía  $E/j = -1.8$ , donde la dinámica regular predomina en el espacio fase clásico. La descomposición de ambos estados coherentes en términos de los estados propios de energía son mostrados en la Fig. 5.3 (a) y (c).

Para el estado centrado en (a) las componentes son organizadas en varias secuencias, distribuidas cada una acorde a la distribución Gaussiana  $|c_k^{(i)}|^2 \approx g_k^{(i)} = A_i \exp\left[-\frac{(E_k^{(i)} - \bar{E}_i)^2}{2\sigma_i^2}\right]$ , donde la amplitud ( $A_i$ ), ancho ( $\sigma_i$ ) y media ( $\bar{E}_i$ ) pueden ser estimadas por ajustes como se observa en las curvas continuas de las figuras 5.3 (a) y 5.3 (c). El índice  $i$  corre desde 1 a  $M$ , (en el caso particular del mostrado por la figura,  $M = 3$ ). En contraste, para el estado (c) la localización está dada en la separatriz de dos conjuntos de trayectorias (ver Fig. 5.3 (b)).

## 5.2. Solución analítica en régimen regular

Como se ha mencionado anteriormente, para estados coherentes regulares, la estructura de las componentes  $c_k$  que lo conforman, deriva en una expresión

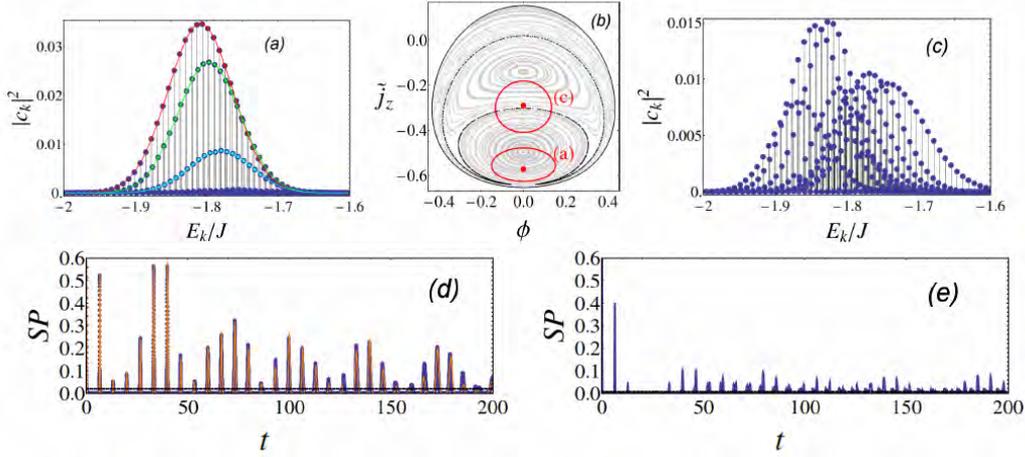


Figura 5.3: Las líneas continuas en (a) son ajustes de distribuciones Gaussianas de tres secuencias de estados de energía que participan en el estado coherente. La localización y dispersión de los estados coherentes en el espacio fase clásico se muestra en el panel (b). En el panel (d), las líneas azules son los resultados numéricos y la curva en color naranja la aproximación analítica de la Ec. (5.1), (5.2) y (5.3).

analítica para la  $SP$ . Para identificar cada una de las componentes y energías propias de cada secuencia de  $c_k^i$  y  $E_k^i$ , la  $SP$  puede escribirse como,

$$\begin{aligned}
 SP(t) &= \left| \sum_{ik} |c_k^{(i)}|^2 e^{-iE_k^{(i)}t} \right|^2 = \sum_i \sum_{kk'} 2|c_k^{(i)}|^2 |c_{k'}^{(i)}|^2 \cos \left[ \left( E_{k'}^{(i)} - E_k^{(i)} \right) t \right] + \\
 &\sum_{i < j} \sum_{kk'} 2|c_k^{(i)}|^2 |c_{k'}^{(j)}|^2 \cos \left[ \left( E_{k'}^{(j)} - E_k^{(i)} \right) t \right] \\
 &= \sum_i SP^{(i)}(t) + \sum_{i < j} SP_I^{(ij)}(t). \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

En la referencia [46], se muestra que para cada secuencia,

$$SP^{(i)}(t) = \frac{A_i^2 \sigma_i \sqrt{\pi}}{\omega_1^{(i)}} \Theta_3(x, y), \tag{5.2}$$

donde  $x = \omega_1^{(i)} t / 2$  y  $y = \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{\omega_1^{(i)}}{\sigma_i} \right)^2 \right] \exp \left[ -\left( \frac{t}{t_D^{(i)}} \right)^2 \right]$ , con  $\Theta_3(x, y) = 1 + 2 \sum_{p=1} y^{p^2} \cos(2px)$ , la función theta de Jacobi. Los parámetros que considera son:

a) La frecuencia  $\omega_1^{(i)} = E_{k_{max}+1}^{(i)} - E_{k_{max}}^{(i)}$  es la diferencia entre energías cercanas de la  $i$ -ésima secuencia a la energía promedio  $\bar{E}_i$  ( $E_{k_{max}}^{(i)} \leq \bar{E}_i \leq E_{k_{max}+1}^{(i)}$ ); b) la anarmonicidad  $e_2^{(i)} = (E_{k_{max}+1}^{(i)} + E_{k_{max}-1}^{(i)}) / 2 - E_{k_{max}}^{(i)}$ ; y c) el tiempo de decaimiento de cada secuencia aislada  $t_D^{(i)} \equiv \frac{\omega_1^{(i)}}{|e_2^{(i)}| \sigma_i}$ .

En la misma referencia, se muestra que la interferencia entre el término de la

CAPÍTULO 5. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE ESTADOS  
COHERENTES

---

secuencia  $i$ -ésima y la  $j$ -ésima es,

$$\begin{aligned} \text{SP}_I^{(ij)}(t) = \frac{2A_i A_j \sqrt{2\pi} \sigma_i \sigma_j}{\omega_{ij} \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \exp \left[ -\frac{(p\omega_{ij} + \delta E_{ij} + \bar{E}_i - \bar{E}_j)^2}{2(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)} \right] \\ \times \exp \left[ -\frac{(\sigma_{ij} p t)^2}{2} \right] \cos[(\delta E_{ij} + p\omega_{ij})t], \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde  $\sigma_{ij} = \frac{2|e_2^{(i)}| \sigma_i \sigma_j}{\omega_{ij} \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}}$ ,  $\delta E_{ij} = \langle E_k^{(i)} - E_k^{(j)} \rangle$  es la energía promedio entre las secuencias de energía  $i$  y  $j$ , y  $\omega_{ij} = E_{k_I+1}^{(i)} - E_{k_I}^{(i)}$  es la diferencia de energía entre los eigenvalores de la secuencia  $i$ -ésima que son cercano a el valor  $E_{ij}^{(I)}$  que maximiza el producto de las Gaussianas  $g_k^{(i)} g_k^{(j)}$ . Esta valor está dado por  $E_{ij}^{(I)} = \frac{\bar{E}_i \sigma_j^2 + \bar{E}_j \sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}$  y satisface  $E_{k_I}^{(i)} \leq E_{ij}^{(I)} \leq E_{k_I+1}^{(i)}$ .



# Capítulo 6

## Exponente de Lyapunov Cuántico

*“Si alguien no queda confundido por la física cuántica, es que no la ha entendido bien.”*  
-Niels Bohr-

Las formas en que se manifiesta el caos cuántico se pueden analizar desde la perspectiva de la estadística de niveles, la forma en que deslocalizan estados coherentes, ó en la propia evolución temporal de estados coherentes autocorrelacionados, como se han presentado en esta tesis. En este capítulo se desarrolla una forma que cuantifica el crecimiento de una cantidad  $\Lambda$ , que es definida en forma análoga al exponente de Lyapunov, además es una cantidad que no involucra la necesidad de tener en su definición algún tipo de característica clásica, como lo han sido los estados coherentes, en este sentido se puede decir que  $\Lambda$  es un parámetro de origen cuántico en forma pura y que será nombrado como el Exponente de Lyapunov Cuántico.

### 6.1. MOTOC y Caos

Como se ha mencionado en la sección 1.2.6, el MOTOC es una cantidad que se define con el conmutador de dos operadores Hermitianos  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ , por lo que para facilitar el cálculo de  $c_n(t)$  en el modelo de Dicke, de la expresión (2.2) una forma alternativa de expresar  $H_D$ , es utilizar las cuadraturas de los operadores del campo de bosones

$$\hat{a} = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad (6.1)$$

donde  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$ , satisfacen la relación de conmutación  $[\hat{q}, \hat{p}] = i$ . Al sustituir (6.1) en (2.2), el Hamiltoniano del modelo de Dicke se lee como,

$$H_D = \frac{\omega}{2}(\hat{p}^2 + \hat{q}^2) + \omega_0 J_z + \frac{\gamma}{\sqrt{j}}(J_+ + J_-)\hat{q} - \frac{\omega}{2}. \quad (6.2)$$

Como se verá a continuación, al expresar el Hamiltoniano de Dicke como función de las observables  $\hat{q}(t)$  y  $\hat{p}(0)$ ,  $H_D$  tiene la forma  $H = \hat{p}^2/2 + V(\hat{q})$ , lo cual simplificará el cálculo del MOTOC, debido al conmutador  $[H, \hat{q}] = -i\omega\hat{p}$ , con esta simplificación los elementos de matriz de  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$  en términos de la base de autoestados están relacionados por  $\omega p_{kl} = i\omega_{kl}q_{kl}$ , donde  $\omega_{kl} = E_k - E_l$ . Sustituyendo en los elementos de matriz de (1.32),

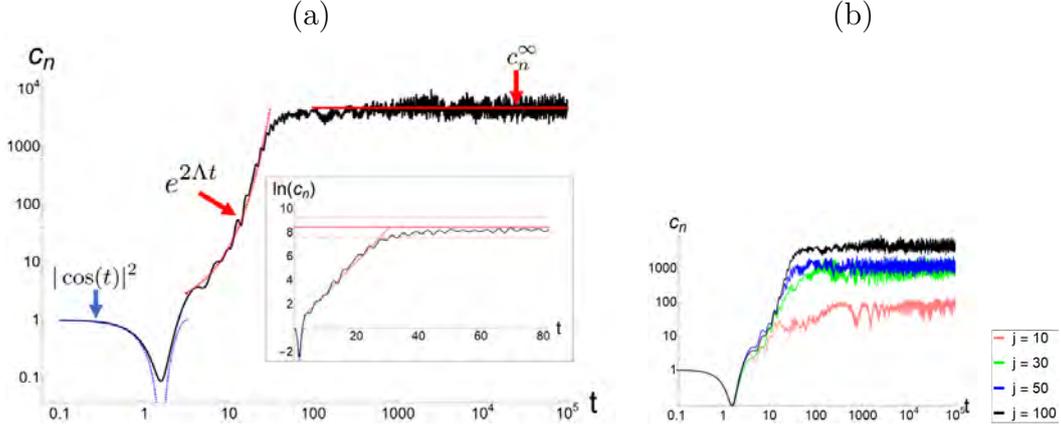


Figura 6.1: (a) Evolución de  $c_n(t)$  en escala logarítmica para un eigenestado con  $E_n/j \approx -1.1$  ( $n = 1625$ ). El recuadro muestra la misma cantidad en escala semi-logarítmica para  $c_n(t)$ . Las líneas segmentadas indican la regresión lineal  $\ln(c_n(t)) = 0.130981 + 2\Lambda t$ , con  $t \in (\pi, t^*)$  y  $\Lambda = 0.13957$ . Las líneas punteadas rojas representan las fluctuaciones con  $c_n^{(\infty)} \pm \sigma_n$ . (b)  $c_n(t)$  para valores diferentes de  $j$  y estados excitados con energía escalada similar a  $\epsilon/\omega_0 \approx -1.1$ .

$$b_{nl}(t) = \frac{1}{\omega} \sum_k q_{nk} q_{kl} (\omega_{kl} e^{i\omega_{nk}t} - \omega_{nk} e^{i\omega_{kl}t}). \quad (6.3)$$

Para calcular el MOTOC, se requiere conocer los eigenvalores del Hamiltoniano de Dicke y evaluar numéricamente los elementos de matriz  $q_{nl} = \langle \Psi_n | \hat{q} | \Psi_l \rangle$  en la base de autoestados de energía. Para ello al emplear la base  $|N, m\rangle$ , mostrada en la sección 2.3.1, los autoestados de energía son expresados como:

$$|\Psi_n\rangle = \sum_{N,m} a_{N,m}^{(n)} |N, m\rangle,$$

donde los  $a_{N,m}^{(n)}$  son evaluados numéricamente. En el Apéndice A.4, se muestran los elementos de matriz  $\hat{q}$ , que pueden ser expresados como,

$$q_{kl} = \sum_{N,m} \left( \sqrt{N+1} a_{N,m}^{*(k)} a_{N+1,m}^{(l)} + \sqrt{N} a_{N,m}^{*(k)} a_{N-1,m}^{(l)} - 2Gm a_{N,m}^{*(k)} a_{N,m}^{(l)} \right) \quad (6.4)$$

donde  $G = \frac{2\gamma}{\omega\sqrt{N}}$ .

En la siguiente sección se presentan los resultados numéricos para el MOTOC [47] usando las ecuaciones (1.30), (6.3) y (6.4).

### 6.1.1. Dinámica regular a bajas energías

Al considerar el MOTOC para el estado base. La dinámica regular domina completamente, y es reflejada ya que no hay ningún crecimiento exponencial de  $c_n(t)$  como puede apreciarse en la Fig. 6.2 y el comportamiento oscilatorio continua en el tiempo, además de que es independiente del valor de  $j$ .

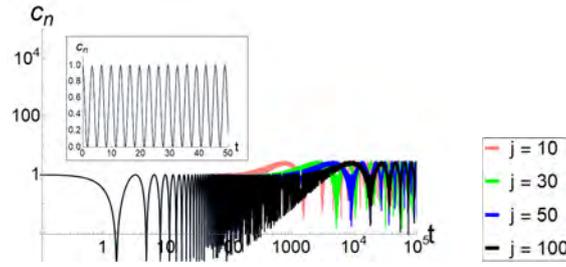


Figura 6.2:  $c_n(t)$  para diferentes valores de  $j$  para el estado base en escala logarítmica. El recuadro muestra el comportamiento oscilatorio del MOTOC en un intervalo corto de tiempo en escala lineal.

## 6.2. Caos duro

Para estudiar el comportamiento del MOTOC y correlacionarlos con el caos en el modelo clásico, se seleccionó  $\omega = \omega_0 = 1$ ,  $\gamma = 2\gamma_c$  y se consideró un número relativamente grande para la variable de pseudoespín  $j = 100$  que corresponde a  $N = 200$  átomos de dos niveles. Para este conjunto de parámetros la Fig. 3.15 (c,d) muestra que el comportamiento regular domina sobre la dinámica para excitaciones a bajas energías, desde el estado de mínima energía  $\epsilon_0 = -2.125$  a energías cercanas de  $\epsilon \approx -1.6$ , y desde  $\epsilon \approx 1.6$  hasta  $\epsilon \approx -1.2$  la regularidad y caos coexiste en las trayectorias, mientras para energías mayores a  $\epsilon > -1.2$  el caos cubre la mayoría del espacio fase accesible. En la siguiente subsección se consideran estados propios del Hamiltoniano para tres intervalos de energías los cuales son:  $E_n/j \simeq \{\epsilon_0, -1.4, -1.1\}$ . Como un ejemplo de un eigenestado del Hamiltoniano a una región en la zona caótica ergódica clásica donde las trayectorias cubren el espacio fase accesible, el estado  $n = 1625$  cuya energía es  $\epsilon_{n=1625}/\omega \approx -1.1$ . El MOTOC como una función del tiempo es mostrada en Fig. 6.1(a) en escala logarítmica y semilogarítmica.

De la Fig. 6.1 se puede apreciar el MOTOC para este estado presenta tres diferentes regímenes temporales: 1) Desde  $t = 0$  hasta  $t \approx \pi$  el MOTOC es muy bien descrito por  $c_n^{(sh)}(t) \approx |\cos(t)|^2$ , 2) desde  $\pi \approx t$  hasta un valor de saturación a el tiempo  $t^*$ , el MOTOC tiene un crecimiento exponencial  $c_n^{(mid)}(t) \sim e^{2\Lambda t}$  y 3) para  $t > t^*$  el MOTOC fluctúa alrededor del valor asintótico  $c_n^\infty$  el cual está dado por

$$c_n^\infty = \frac{1}{\omega^2} \sum_{k,l} q_{nk}^2 q_{kl}^2 (\omega_{kl}^2 + \omega_{nk}^2).$$

El crecimiento exponencial del MOTOC en el intervalo temporal  $[\pi, t^*]$  es caracterizado por el exponente  $\Lambda = 0.13957$ , el cual es semejante al valor del exponente de Lyapunov clásico ( $\lambda \approx 0.12$ ) para esta energía, un resultado que concuerda en el límite clásico de el MOTOC.

El tiempo de saturación  $t^*$  puede ser estimado encontrando numéricamente el tiempo cuando por primera vez el tiempo del MOTOC coincide con

$$c(t^*) = c_n^\infty - \sigma_n,$$

donde  $\sigma_n$  es la desviación estándar de las fluctuaciones del MOTOC  $c(t)$  a tiempos largos para el estado propio  $|\Psi_n\rangle$ .

Nosotros hemos confirmado que un comportamiento similar es obtenido para el MOTOC calculado por  $c_n(t) = -\langle \Psi_n | [\hat{q}(t), \hat{q}(0)]^2 | \Psi_n \rangle$  donde el conmutador  $[q(t), p(0)]$  es substituido por  $[q(t), q(0)]$ , la única diferencia es que a tiempos cortos el comportamiento es descrito por  $c_n^{(sh)}(t) \sim |\sin(t)|^2$  en lugar del coseno cuadrado.

Como el número de átomos se incrementa cuando se acerca al límite clásico, en la Fig.6.1 (b) se muestra la dependencia del MOTOC sobre el valor de  $j$  para autoestados del Hamiltoniano con energía muy cercana a  $\epsilon = -1.1$ . Mientras que a tiempos cortos las oscilaciones son iguales para todo valor de  $j$ , a tiempos largos el valor de la saturación  $c^\infty$  incrementa conforme  $j$  incrementa. Para tiempos intermedios el crecimiento exponencial es observado en forma similar, estos crecimientos son caracterizados por el mismo exponente  $\Lambda$ . Sin embargo, el valor de saturación sí depende del valor de  $j$ , el tiempo de saturación  $t^*$  incrementa como función de  $j$ .

# Conclusiones

La teoría del caos ha sido un área de investigación que ha pasado por manos de grandes científicos a través de la historia y en especial por el auge que se originó en los años 70's con el denominado efecto mariposa. En la búsqueda de la comprensión de la complejidad en los sistemas no lineales una gran variedad de modelos en la literatura han sido investigados. Por otro lado, de la teoría cuántica, en épocas de disturbios y momentos de tensión en la humanidad, muchas preguntas se formularon en la búsqueda de solucionar procesos de estabilidad en materia nuclear, estructura atómica, etc.

En este punto la complejidad de los cálculos hizo que muchas de las mentes de la época formularan modelos accesibles ante los recursos analíticos y computacionales con los que se disponían, creando sistemas emulados con simetrías específicas, o modelos con pocos grados de libertad. En ciertos límites una definición común para el caos cuántico fue la de enunciar un sistema cuánticamente caótico si su correspondiente sistema clásico lo era, sin embargo, no todos los modelos cuánticos tienen un análogo clásico, como lo son los modelos de espines. Forzando a crear análisis estadísticos basados en el estudio del espectro que reflejara la complejidad asociada a lo que bajo ciertas hipótesis sería llamado un ensamble caótico o regular para zonas del espectro.

Los cálculos asociados a este tipo de análisis cuánticos, son costosos computacionalmente y pese a tener una teoría amplia en este sentido, pocos resultados contundentes fueron mostrados para algunos modelos. En este sentido el modelo de Dicke es un Hamiltoniano que tiene características que lo hacen muy amigable por la versatilidad teórica en el estudio de la óptica cuántica, de los circuitos súper conductores, condensados de Bose etc, técnicamente es un modelo sencillo pero muy rico por la información que ofrece en su resolución. La presente tesis muestra un análisis detallado de aspectos que relacionan la teoría caótica cuántica con el marco clásico, en la que se expone la cuantificación de observables que exhiben dicha relación desde diversas perspectivas. Las herramientas principales empleadas fueron mapas de caos y regularidad dados por el exponente de Lyapunov clásico, así como la creación de estados coherentes que fungieron como un puente entre el mundo clásico y el cuántico.

Estos resultados se vieron favorecidos por el acceso a una capacidad computacional amplia y a una forma eficiente en la diagonalización del sistema. Con los recursos tecnológicos de supercómputo y códigos implementados en el desarrollo de esta investigación, muchos aspectos relacionados con la localización de estados coherentes (PR), la evolución temporal del sistema, y medidas de correlación como la probabilidad de supervivencia (SP) y el correlador ordenado fuera de

tiempo (OTOC), tuvieron acceso con resultados publicados en revistas especializadas, contribuyendo de manera significativa en el crecimiento de la comprensión y conocimiento del caos cuántico.

Algunos de los resultados presentados que en lo personal considero mas significativos son el hecho de que el caos cuántico no se relaciona con las transiciones de fase y que más bien es un fenómeno emergente de los parámetros seleccionados en el modelo, considero que es importante resaltar que en la perspectiva cuántica el puente clásico-cuántico se ve favorecido al aumentar la dimensión de la cantidad de estados que participan en los análisis de localización. Con el reciente cálculo del OTOC un atributo es el de poder caracterizar un eigenestado del Hamiltoniano con un exponente de Lyapunov cuántico, lo cual me parece primordial en el desarrollo de lo que se conoce como caos cuántico, pues es una propiedad del estado cuántico y no de un ensamble estadístico como históricamente se ha trabajado en otros modelos. De este modo una definición que caracteriza el caos cuántico puede distinguirse mediante el exponente de Lyapunov cuántico y crear una analogía al Lyapunov clásico.

Así, en la perspectiva clásica, un punto del espacio fase es caótico si  $\lambda > 0$  y en la imagen cuántica, un eigenestado del espectro de energía es caótico si  $\Lambda > 0$ . En este contexto la caracterización de caoticidad se hace particular no a un ensamble de estados que constituyen a un estado coherente o un estado térmico, sino a un estado propio del Hamiltoniano, con esto se espera que la definición de caos cuántico sea más contundente y precisa a la que se tiene en la actualidad.

Finalmente deseo que la investigación expuesta en esta tesis para el modelo de interacción átomo-campo, sea útil, práctica y clara. Además que motive a quienes lean este trabajo en el desarrollo de la teoría caótica en las perspectivas clásicas y cuánticas, que nutra a científicos que tengan el interés por el conocimiento de esta fenomenología presente en muchos modelos, y que de lugar a la explicación del ¿por qué?, en posibles mediciones experimentales que involucren estos resultados. Y que de la mente entre mares de complejas ideas, surjan nuevas definiciones, técnicas ó métodos, por el gusto propio de hacerlo en la diversión y emoción que implica desarrollar esta área de investigación.

# Publicaciones y referencias basadas de esta tesis.

1. J. Chávez-Carlos, B. López-del Carpio, M. A. Bastarrachea-Magnani, Pavel Stránský, S. Lerma-Hernández, Lea F. Santos, and J. G. Hirsch. “A quantum Lyapunov exponent”, In Progress.
2. J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch. “Route of chaos in Atom-Photon systems”, In Progress.
3. J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch. Classical chaos in atom-field systems. *Phys. Rev. E*, 94:022209, Aug 2016.
4. S. Lerma-Hernández, J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, Lea F. Santos and J. G. Hirsch. “Survival Probability of Coherent States in Regular Regimes”, arXiv:1710.05937.
5. M. A. Bastarrachea-Magnani, B. López-del Carpio, J. Chávez-Carlos, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch. Delocalization and quantum chaos in atom-field systems. *Phys. Rev. E*, 93:022215, Feb 2016.
6. M A Bastarrachea-Magnani, A Relaño, S Lerma-Hernández, B López del Carpio, J Chávez-Carlos, and J G Hirsch. Adiabatic invariants for the regular region of the dicke model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(14):144002, 2017.
7. Miguel Angel Bastarrachea-Magnani, Baldemar López del Carpio, Jorge Chávez-Carlos, Sergio Lerma-Hernández, and Jorge G Hirsch. Regularity and chaos in cavity qed. *Physica Scripta*, 92(5):054003, 2017.
8. S. Lerma-Hernández, J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, B. López-del-Carpio and J. G. Hirsch. “Dynamics of Coherent States in Regular and Chaotic Regimes of the Non-integrable Dicke Model”, Proc. of Latin American School of Physics “Marcos Moshinsky” 2017, July 24th to August 4th, 2017, El Colegio Nacional, Mexico City, Mexico, *AIP Conference Proceedings*, 1950 (1): 030002, 2018.
9. Emmanuel Farrera Morales, Un modelo resorte-péndulo: Caos y regularidad. *Tesis de Licenciatura, UNAM*, May 2018.



# Apéndice A

## Evaluaciones numéricas y analíticas

### A.1. Computo y súper-computo

Los procesos de cálculo que se han realizado en los trabajos publicados así como los mismo en esta tesis, han sido hechos usando herramientas computacionales en supercomputadoras o clusters institucionales así como en mi computadora personal en la cual he mezclado lenguajes de programación como Python, Julia para realizar cálculos numéricos y Mathematica para implementar cálculos simbólicos. Estas operaciones se han *paralelizado* para aprovechar de manera total la capacidad de computo a la que se tiene acceso empleando todos los Kernels que tiene el PC, con un procesador: Intel(R) Core(TM) i7-4510 CPU @ 2.00Ghz y con 8 Gb de memoria RAM; y el cluster MARIANA con un procesador: Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2687W v2 @ 3.40GHz con 128Gb de memoria RAM así como el cluster TLAPOA<sup>1</sup>. El proceso de paralelizar es muy importante para ahorrar el tiempo de computo que se utiliza en los cálculos.

### A.2. Frecuencias en el estado base

A bajas energías, el espectro de potencias tiene solo dos frecuencias fundamentales y estas pueden ser obtenidas en términos de expresiones analíticas. Cuando el factor de acoplamiento tiende a ser cero el sistema puede considerarse como dos osciladores desacoplados, esta propiedad hace que se tengan dos frecuencias asociadas a cada modo en la fase normal [1]. Estas frecuencias son calculadas cuando consideramos el tercer término a orden lineal de la ecuación 3.1,

$$h_{cl} = \frac{\omega_0}{2} (Q^2 + P^2) + \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + 2\gamma q Q - \omega_0. \quad (\text{A.1})$$

las frecuencias fundamentales son,

$$f_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \omega^2 + \omega_0^2 \pm \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 16\gamma^2 \omega \omega_0} \right)}, \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>1</sup>Para mas información respecto al cluster TLAPOA: [http://tecalli.nucleares.unam.mx/ganglia/?c=Cluster%20tochtili64&m=load\\_one&r=hour&s=descending&hc=8&mc=2](http://tecalli.nucleares.unam.mx/ganglia/?c=Cluster%20tochtili64&m=load_one&r=hour&s=descending&hc=8&mc=2)

En la fase súper radiante  $\gamma \geq \gamma_c$ , es posible expresar la energía en términos de los puntos críticos  $\mathbf{x}_c$  alrededor de la energía del estado base como se muestra a continuación,

$$h_{cl} = -\omega_0 + \frac{\omega_0}{2} ((Q - Q_c)^2 + P^2) + \frac{\omega}{2} ((q - q_c)^2 + p^2) + 2\gamma q Q \left(1 - \frac{1}{8} ((Q - Q_c)^2 + P^2)\right). \quad (\text{A.3})$$

usando la expresión A.3 se obtienen los modos normales y las frecuencias respectivamente, las cuales son:

$$f'_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma_c^4} \left( \omega^2 \gamma_c^4 + \omega_0^2 \gamma^4 \pm \sqrt{(\omega_0^2 \gamma^4 - \omega^2 \gamma_c^4)^2 + 4\gamma_c^8 \omega^2 \omega_0^2} \right)}. \quad (\text{A.4})$$

### A.3. Condiciones iniciales en $j_z$

#### A.3.1. Camino azul

Las fórmulas para ir por arriba de las redes de Peres  $J_z$  vs  $E/\omega_0 j$ , en el rango de energía

$$-\frac{1}{2} \left( f^2 + \frac{1}{f^2} \right) \leq \epsilon/\omega_0 < -\frac{1}{f^2},$$

son las siguientes

$$q(0) = -\frac{\omega_0}{2\gamma} \sqrt{-2(1 + \epsilon f^2)} \quad (\text{A.5})$$

$$p(0) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\phi(0) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$j_z(0) = -\frac{1}{f^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{2(1 + \epsilon f^2)}{1 + \epsilon f^2}} \sqrt{1 + 2\epsilon f^2 + f^4} \right) \quad (\text{A.8})$$

donde  $f = \frac{\gamma}{\gamma_c}$ . Y para el rango de energía

$$-\frac{1}{f^2} < \epsilon/\omega_0 \leq 1,$$

las condiciones iniciales  $q(0) = p(0) = \phi(0) = 0$  y  $j_z(0) = \epsilon/\omega_0$ .

#### A.3.2. Camino verde

En la zona media de la Red de Peres las condiciones iniciales dependen si el punto está en la fase normal o en la fase super-radiante de la siguiente manera.

Para la fase normal  $\gamma < \gamma_c$ ,

$$q(0) = \sqrt{\frac{2\omega_0}{\omega}} \sqrt{\epsilon + 1} \quad (\text{A.9})$$

$$p(0) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\phi(0) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$j_z(0) = -1 \quad (\text{A.12})$$

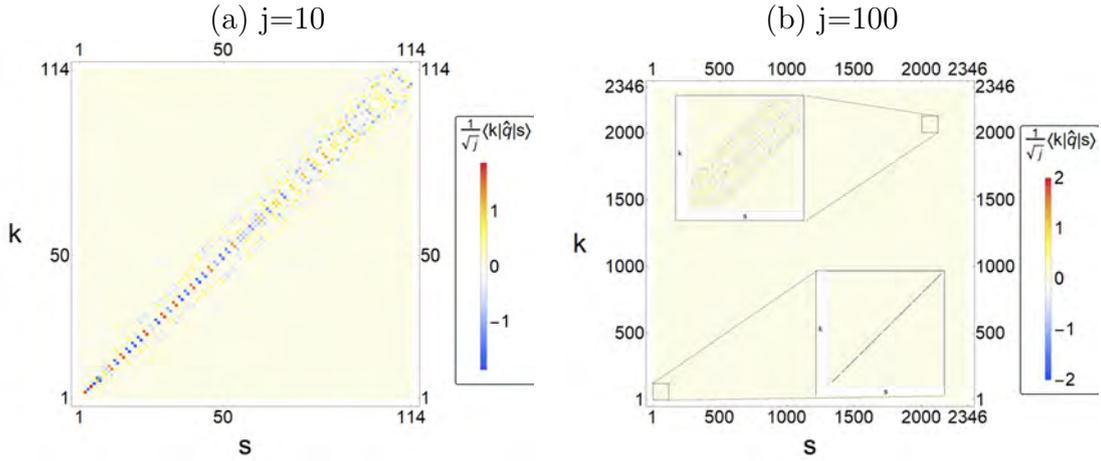


Figura A.1: elementos de matriz  $q_{k,s}$  determinado por la relación (6.4) para  $\gamma = 2\gamma_c$ .

y para la fase súper radiante  $\gamma \geq \gamma_c$ ,

$$q(0) = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}} \left( \sqrt{1 + 2\epsilon f^2 + f^4} - \sqrt{f^4 - 1} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$p(0) = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\phi(0) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$j_z(0) = -\frac{1}{f^2}. \quad (\text{A.16})$$

### A.3.3. Camino rojo

Para el camino que va por la parte de abajo de la red de Peres, las condiciones iniciales consideradas son las siguientes:

$$q(0) = -\frac{2\omega_0}{\omega} \sqrt{\epsilon + f^2 + \sqrt{1 + 2\epsilon f^2 + f^4}} \quad (\text{A.17})$$

$$p(0) = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\phi(0) = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$j_z(0) = -\frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(\epsilon + f^2 + \sqrt{1 + 2\epsilon f^2 + f^4})}} \quad (\text{A.20})$$

esta expresión es válida para  $\epsilon \geq \epsilon_0$ .

## A.4. Elementos de matriz del operador $\hat{q}$

Los elementos de matriz  $q_{ks} = \langle \Psi_k | \hat{q} | \Psi_s \rangle$  por el cálculo del OTOC para  $j = 10$  y  $j = 100$  con acoplamiento  $\gamma = 2\gamma_c$ ,  $\omega = \omega_0$ . Aquí los elementos de matriz son muy cercanos a cero excepto los que se acercan a la banda de la diagonal. Esta propiedad puede ser usada para disminuir el esfuerzo numérico en la evaluación del OTOC.



# Apéndice B

## Propiedades y relaciones matemáticas

### B.1. Superposición de estados coherentes

La superposición entre dos estados coherentes es,

$$\langle n'(\beta)|n(\alpha)\rangle = \langle\beta|\frac{B^{n'}(A^\dagger)^n}{\sqrt{n'!n!}}|\alpha\rangle = \begin{cases} (-1)^{n'}D_{n',n} & \text{si } \beta > \alpha \\ (-1)^nD_{n',n} & \text{si } \beta < \alpha \\ \delta_{\alpha,\beta} & \text{si } \beta = \alpha \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

donde,

$$D_{n',n} = e^{-g^2/2} \sum_{k=0}^{\min(n',n)} \frac{\sqrt{n'!n!}}{(n'-k)!(n-k)!k!} \left( (-1)^k g^{n+n'-2k} \right) \quad (\text{B.2})$$

con  $g = |\alpha - \beta|$ .



# Apéndice C

## Códigos en Wolfram Mathematica

Los códigos mostrados en este Apéndice están escritos en el programa Wolfram Mathematica [48] en las versiones 10 y 11.

Dichos códigos están comentados y desarrollados para que el lector pueda tener un seguimiento óptimo, en algunas líneas están comandos que optimizan la velocidad ó el proceso de dispersión de trabajo en los recursos del equipo, como lo es el paralelizar tablas, sumas etc.

### C.1. Dinámica clásica

In[1]:=

```

Print["====="];
Print["DICKE-CLÁSICO"];
Print["Por: Jorge Chávez Carlos."];
Print["====="];
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
Off[InterpolatingFunction::dmval];
Off[InterpolatingFunction::dprec];
Off[FindRoot::nlnum];
Off[FindRoot::lstol];
Off[NDSolve::ndstf];
(*-----Definimos los parámetros y el tiempo límite.-----*)
 $\omega = 1.0$ ; (*Frecuencia del los fotones*)
 $\omega_0 = 1.0$ ; (*Frecuencia del los átomos*)
 $\epsilon = -1.1$ ; (*Energía intensiva del sistema*)
 $\gamma_c = \sqrt{(\omega \omega_0) / 2}$ ; (*Factor de acomplamiento crítico*)
 $f = 2$ ; (*Acomplamiento*)
 $\gamma = f \gamma_c$ ; (*Acomplamiento respecto al crítico*)
 $\epsilon_0 := -(1/2) \left( (\gamma_c / \gamma)^2 + (\gamma / \gamma_c)^2 \right)$ ; (*Energía mínima del sistema*)
T = 5000; (*Tiempo de integración numérico*)
(*----- HAMILTONIANO CLÁSICO. -----*)
H[p_, q_, P_, Q_] := ( $\omega_0 / 2$ ) (Q2 + P2) -  $\omega_0$  + ( $\omega / 2$ ) (q2 + p2) + 2  $\gamma$  q Q  $\sqrt{1 - ((Q^2 + P^2) / 4)}$ ;
(*----- Ecuaciones de Hamilton -----*)
F[{p_, q_, P_, Q_}] :=
  { - $\partial_q H[p, q, P, Q]$ ,  $\partial_p H[p, q, P, Q]$ , - $\partial_Q H[p, q, P, Q]$ ,  $\partial_P H[p, q, P, Q]$  };
(*----- CONDICIONES INICIALES -----*)
(*Condición dada en variables (p,q,jz,φ)*)
 $\phi_i = 0$ ;  $\pi_i = 0.0$ ;  $jz_i = -0.6$ ;
(*Cambio de variable a (p,q,P,Q)*)
 $\pi_i = -\sqrt{2(1+jz_i)} \text{Sin}[\phi_i]$ ;
 $Q_i = \sqrt{2(1+jz_i)} \text{Cos}[\phi_i]$ ;
qs1 = Solve[H[ $\pi_i$ , x,  $\pi_i$ ,  $Q_i$ ] ==  $\epsilon$ , x];
 $q_i = x /. qs1[[2]]$ ; (*Elección para q.*)
Print["La condicion inicial:  $x_0 = [p, q, jz, \phi](0) = ($ ",
   $\pi_i$ , ", ",  $q_i$ , ", ",  $jz_i$ , ", ",  $\phi_i$ , ")"];
(***** Superficie  $\epsilon$  *****)
Print["Tiene E = H(x0) = ",
  H[ $\pi_i$ ,  $q_i$ ,  $\pi_i$ ,  $Q_i$ ], "  $\omega_0$ , con acomplamiento  $\gamma =$ ", f, " $\gamma_c$ ."];
If[f > 1,
Print["Energía mínima:  $\epsilon_0 =$ ",  $\epsilon_0$ , "  $\omega_0$ ."];,
Print["Energía mínima:  $\epsilon_0 =$ ",  $\epsilon_0 = -1$ , "  $\omega_0$ ."];];
figC = ContourPlot[H[0, q, 0, Q] ==  $\epsilon$ , {Q, -10, 10}, {q, -10, 10},
  PlotPoints -> 100, ContourStyle -> {Red, Thick}];

$$U[jz_, \phi_] = jz - \frac{\gamma^2}{2 \gamma_c^2} (1 - jz^2) (1 - \text{Sin}[\phi]^2)$$
;
jz[x_, y_] = (x2 + y2) / 2 - 1;
 $\phi[x_, y_] = \text{ArcTan}[y / x]$ ;
figCP = ContourPlot[U[x, y] ==  $\epsilon$ , {y, - $\pi$ ,  $\pi$ }, {x, -1, 1}, RotateLabel -> False,

```

```

ContourStyle -> {Red, Thick}, LabelStyle -> Directive[15], ImageSize -> 500];
Print["-----"];
Timing[
  (*----- Sistema de Ecuaciones Diferenciales -----*)
  (*Usando las variables: x(t)= (p(t),q(t),P(t),Q(t))*
  (*x1=p, x2=q, x3=P, x4=Q*)
  xt = Table[D[xk[t], {t, 1}] == F[{x1[t], x2[t], x3[t],
  x4[t]}][[k]], {k, 1, 4}];
  (*Introduzco condiciones iniciales: x(0)*)
  x0 = {x1[0] == pi, x2[0] == qi, x3[0] == Pi, x4[0] == Qi};
  (*..... Método Variacional .....*)
  Print["Resolviendo las ecuaciones variacionales:
  [ẋ, Ȳ] = [F(x), A.Y(x)], con [x(0), Y(0)] = [x0, I],
  con R-K orden 8, ... "];
  (*Matriz Jacobiana*)
  J[f_List, v_List] := Outer[D, f, v];
  A = J[F[{x1[t], x2[t], x3[t], x4[t]}], {x1[t], x2[t], x3[t], x4[t]}];
  (*Matriz del Método Variacional de 4x4*)
  Y = Table[{xk[t], xk+1[t], xk+2[t], xk+3[t]}, {k, 5, 20, 4}];
  (*Derivada de la Matriz Variacional*)
  DY = Flatten[A.Y];
  (* Ecuaciones Diferenciales para la Matriz Variacional*)
  Yt = Table[D[xk[t], {t, 1}] == DY[[k - 4]], {k, 5, 20}];
  (*La condición inicial de la matriz variacional es la identidad*)
  Y0 = Table[xk[0] == If[Mod[k, 5] == 0, 1, 0], {k, 5, 20}];
  (*Resolviendo: (ẋ, Ȳ)=(F(x), A.Y) x(0)=x0, Y(0)=I, con R-K orden 8*)
  sol = NDSolve[Join[xt, x0, Yt, Y0], Table[xk[t], {k, 1, 20}],
  {t, 0, T}, MaxSteps -> 10^6, Method -> {"ExplicitRungeKutta",
  "DifferenceOrder" -> 8}, StepMonitor :> Sow[x], AccuracyGoal -> 20];
  Print["Sistema de ecuaciones diferenciales resuelto."];
  (*Tiempo numérico aceptable con error mínimo*)
  error = 10^-5;
  Do[If[Evaluate[error > Abs[e -
  H[x1[t], x2[t], x3[t], x4[t]] /. sol[[1]]],
  tmax = t], {t, 0, T, 1}];
  Print["La solución numérica aceptable hasta t = ", tmax, ",
  con un error de: 10^", Log10[error], " de tolerancia."];
  T = tmax;
  (*Trayectoria en las variables (q,Q)*)
  figqQ = ParametricPlot[Evaluate[{x4[t], x2[t]} /. sol], {t, 0, tmax/10},
  RotateLabel -> False, ImageSize -> 500, PlotPoints -> 1000, PlotStyle -> Black,
  Axes -> False, Frame -> True, PlotRange -> Automatic,
  FrameLabel -> {Style["Q", 20], Style["q", 20]},
  LabelStyle -> {Directive[15], Black}, AspectRatio -> 1];
  (*Expresando la matriz variacional como funcion del tiempo*)
  YT =
  Table[{xk[t], xk+1[t], xk+2[t], xk+3[t]}, {k, 5, 20, 4}] /. sol[[1]] /. t -> T;
  Print["-----"];

```

```

(***** SALI *****)
R1 = {1, 0, 0, 0};
R2 = {0, 1, 0, 0};
(*ks=Length[Dat]-1;*)
δr1 = YT.R1 / Norm[YT.R1];
δr2 = YT.R2 / Norm[YT.R2];
S11 = Norm[δr2 - δr1];
S12 = Norm[δr2 + δr1];
Print["El método SALI calcula que x0: "];
If[Min[S11, S12] < 10^-10, s1 = 1;, s1 = 0;];
If[Min[S11, S12] < 10^-10, Print["Es CAÓTICA"], Print["Es REGULAR"]];
Print["-----"];
(***** EXPONENTE DE LYAPUNOV *****)
(** ks Variaciones Centradas en la x0 de tamaño δx=10^-6
en la superficie de Energía*)
ks = 10 000;
(*Variaciones Centradas en la x0*)
pii = RandomReal[NormalDistribution[pi, 10^-6], ks];
Pii = RandomReal[NormalDistribution[Pi, 10^-6], ks];
Qii = RandomReal[NormalDistribution[Qi, 10^-6], ks];
Table[{qs2[k] = Solve[H[pii[[k]], x, Pii[[k]], Qii[[k]]] == e, x],
  qiii1[k] = x /. qs2[k][[1]], qiii2[k] = x /. qs2[k][[2]]}, {k, 1, ks}];
If[Norm[qi - qiii1[1]] < 0.001, qiii := qiii1, qiii := qiii2];
Table[
  R[k] = {pii[[k]], qiii[k], Pii[[k]], Qii[[k]]} - {pi, qi, Pi, Qi}, {k, 1, ks};
λCE = Table[Log[Norm[YT.R[k]] / Norm[R[k]]] / T, {k, 1, ks}];
λ = N[Chop[Mean[λCE]]];
Print["Exponente de Lyapunov: λ = ", λ];
Print["Tiempo de Lyapunov: τλ = ", 1 / λ];
Print["-----"];
(***** SECCIÓN DE POINCARÉ *****)
Print["Sección de Poincaré en proceso..."];
(* Ahora se encuentran los tiempos en el que p(t)=0 *)
δt = 0.05; (*Intervalos de tiempo de corte*)
pss = Table[{t, x1[t]} /. sol[[1]] /. t → i, {i, 0, T, δt}];
p0 = {};
Do[If[pss[[k, 2]] pss[[k+1, 2]] < 0, AppendTo[p0, (k + .5) δt]],
  {k, 1, Length[pss] - 1}];
pa = Table[FindRoot[Evaluate[x1[t] /. sol] == 0,
  {t, p0[[k]]}], {k, 1, Length[p0]}; tes = t /. pa;
(*Tabular los cortes de la sección de Poincaré p=0*)
pointc = {};
Do[te = tes[[k]];
  AppendTo[pointc, Evaluate[{Mod[ArcTan[x4[t] / x3[t]], -π, π] - π / 2,
    (x3[t]2 + x4[t]2) / 2 - 1} /. sol[[1]] /. t → te}], {k, 1, Length[tes]};
figP =
  ListPlot[pointc, PlotStyle → Black, FrameLabel → {Style["φ", 30, Black],
    Style["jz", 30, Black]}, PlotRange → {Automatic, Automatic},

```

```

ImageSize → 500,
Frame → True, LabelStyle → {Directive[15], Black},
Ticks → True, RotateLabel → False, AspectRatio → 1];
Print["La sección de Poincaré se ha realizado."];
Print["Ya se ha terminado el cálculo !!!"];
Print["-----"];
(***** ESPECTRO DE POTENCIAS *****)
(*Espectro sobre la variable q(t) *)
dt = 0.05; (*Paso de tiempo para la Transformada de Fourier*)
Tf = tmax;
qt = Table[x2[t] /. sol[[1]] /. t → k, {k, 0, Tf, dt}];
Fqt = Abs[Fourier[qt]][[1 ;; -1]];
l = Length[Fqt];
lim = Max[Fqt[[Round[l/2] ;; -1]]];
freq = {};
figPS = ListPlot[Table[{i * 2 Pi / (l dt), Fqt[[i]] / lim}, {i, 2, Round[l/2]}],
  PlotRange → {{0, 5}, All}, PlotStyle → Black, Joined → True, Frame → True,
  FrameLabel → {Style["Ω", 30], Style["|Fq|", 30]},
  LabelStyle → {Directive[15], Black}, RotateLabel → False, ImageSize → 500];
Do[If[Fqt[[i]] ≥ 0.6 lim, AppendTo[freq, i - 1], {i, Round[l/2], 1}];
wss = l - freq;
ws = N[wss * 2 Pi / (l dt)];
Print["Las frecuencias fundamentales son: ", ws];
Print["-----"];
];
tCPU = %[[1]];
Print["El tiempo de computo fue de ", tCPU/60, " minutos."];
Print["-----"];
(***** GRÁFICAS *****)
Print["ÓRBITA:"];
Show[figqQ, figC]
Print["SECCIÓN DE POINCARÉ:"];
Show[figP, figCP]
Print["ESPECTRO DE FRECUENCIAS:"];
Show[figPS]
Print["-----"];

```

=====

DICKE-CLÁSICO

Por: Jorge Chávez Carlos.

=====

La condicion inicial:  $x_0 = [p, q, j_z, \phi](0) = (0., -0.351-0.6, 0)$

Tiene  $E = H(x_0) = -1.1 \omega_0$ , con acoplamiento  $\gamma = 2\gamma_c$ .

Energía mínima:  $\epsilon_0 = -2.125 \omega_0$ .

-----

Resolviendo las ecuaciones variacionales:

$[\dot{x}, \dot{Y}] = [F(x), A.Y(x)]$ , con  $[x(0), Y(0)] = [x_0, I]$ ,  
con R-K orden 8, ...

Sistema de ecuaciones diferenciales resuelto.

La solución numérica aceptable hasta  $t = 5000$ ,  
con un error de:  $10^{-5}$  de tolerancia.

-----  
El método SALI calcula que  $x_0$ :

Es CAÓTICA

-----  
Exponente de Lyapunov:  $\lambda = 0.0964271$

Tiempo de Lyapunov:  $\tau_\lambda = 10.3705$

-----  
Sección de Poincaré en proceso...

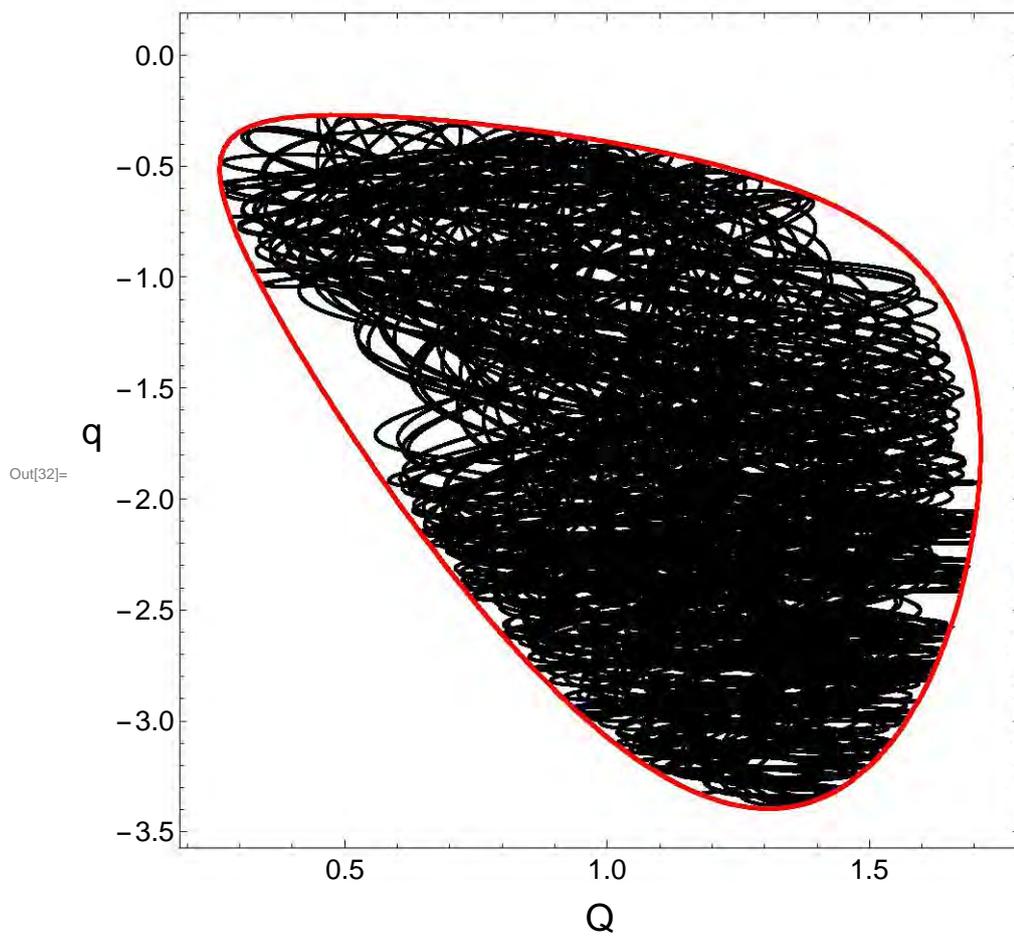
La sección de Poincaré se ha realizado.

Ya se ha terminado el cálculo !!!

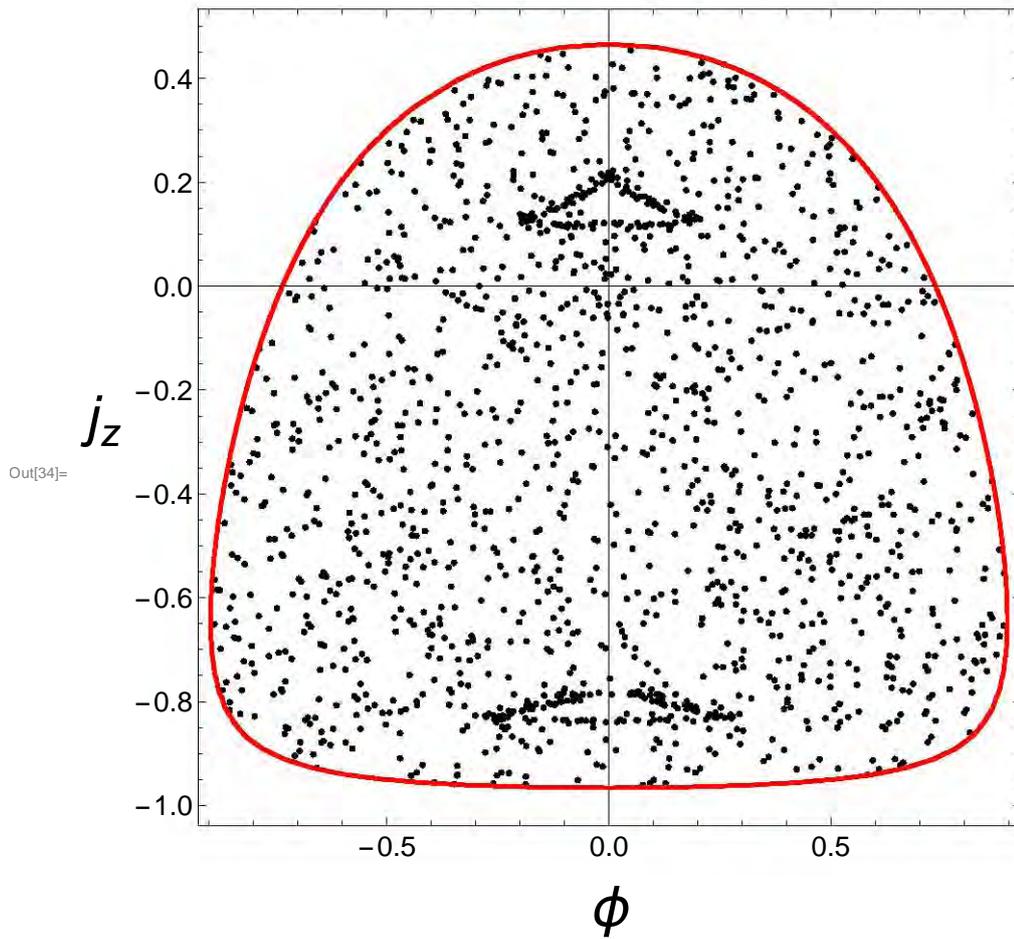
-----  
Las frecuencias fundamentales son: {0.898487, 0.892203, 0.88969, 0.887177, 0.880894}

-----  
El tiempo de computo fue de 0.3739583 minutos.

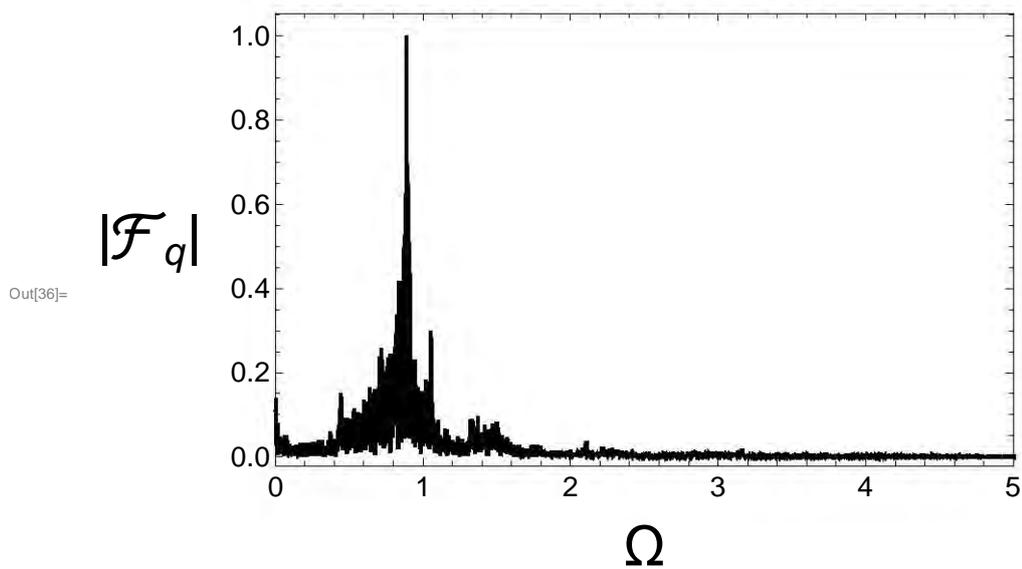
-----  
ÓRBITA:



SECCIÓN DE POINCARÉ:



ESPECTRO DE FRECUENCIAS:



## C.2. Hamiltoniano cuántico

El propósito de este código es el de implementar la diagonalización del Hamiltoniano de Dicke usando la base coherente eficiente (ver sección 2.3.1), para valores fijos de  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $j$ ,  $\gamma$  y de un truncamiento apropiado para el sector correspondiente a los fotones  $nmax$ . Una vez construido el operador  $H_D$  se diagonaliza y para obtener los estados propios del Hamiltoniano así como el espectro de energía, tal que  $H_D|E_i\rangle = E_i|E_i\rangle$ . La información obtenida es guardada en un archivo, el cual da información sobre los parámetros que se usaron así como la información de  $E_i$  y  $|E_i\rangle$ , a modo de ejemplo, el archivo:

`E_f_2_j_50_nmax_100_d_10201_dc_3346`

indica que  $\gamma = 2\gamma_c$ ,  $j = 50$ ,  $nmax = 100$ , con una cantidad total de estados de 10201 de los cuales solo están guardados los primeros 3346 convergidos con cierta precisión numérica. Así las energías del sistema y los estados propios del Hamiltoniano pueden ser operables para los diversos fines al importar dicho archivo de la siguiente manera:

```
dat = ReadList["E_f_2_j_50_nmax_100_d_10201_dc_3346"][[1]];
or = Ordering[dat[[1]]];
ener = dat[[1]][[or]];
evec = dat[[2]][[or]];
```

de este modo  $E_i = \text{ener}[[i]]$  y  $|E_i\rangle = \text{evec}[[i]]$ .

In[1]:=

```

Print["====="];
Print["DICKE-CUÁNTICO"];
Print["Por: Jorge Chávez Carlos."];
Print["====="];
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
Off[Get::noopen];
(*-----Definimos los parámetros -----*)
j = 30; (*Número de átomos N=2j*)
nmax = 70; (*Truncamiento*)
ω = 1.0; (*Frecuencia del los fotones*)
ω₀ = 1.0; (*Frecuencia del los átomos*)
γc =  $\sqrt{\omega \omega_0} / 2$ ; (*Factor de acoplamiento crítico*)
f = 2.0; (*Acoplamiento*)
γ = f γc; (*Acoplamiento respecto al crítico*)
G =  $(2 \gamma) / (\omega \sqrt{2 j})$ ;
(*----- Sistema cuántico -----*)
Print["El sistema cuántico:"];
HD = ωaa† + ω0Jz + (γ/√2j) (J++J-) (a+a†),
con ω = "ω,", ω0 = "ω₀,", γ = "f," γc, j = "j," y truncamiento v = "nmax"];
(* NOMBRE DEL ARCHIVO CODIFICADO *)
nom = ToString[f] <> "_j_" <> ToString[j] <> "_nmax_" <>
ToString[nmax];
(* Índice *)
in[n_, m_] := n (2 j + 1) + m + j + 1;
(* Cantidad de estados en el espacio de Hilbert *)
lp = {};
Do[Do[AppendTo[lp, {m, n}], {m, -j, j}], {n, 0, nmax}];
l = Length[lp];
Print["Tiene ", l, " estados en el espacio de Hilbert"];
Print["-----"];
AbsoluteTiming[
Print["Construcción de HD en la BCE,
en proceso..."];
(* Construcción de H *)
fu[n1_Integer,
n2_Integer] := (Exp[(-(G^2)/2)]) Sqrt[(n1 ! n2 !)] Sum[
1/((n1 - r) ! (n2 - r) ! r !) ((-1)^r) G^(n2 + n1 - 2 r), {r, 0,
Min[n1, n2]}];
fuv = ParallelTable[fu[nu, nd], {nu, 0, nmax}, {nd, 0, nmax}];
Fuf[np_Integer, mp_Integer, n_Integer, m_Integer] :=
If[m + 1 ==
mp, -(ω₀/2) Sqrt[j (j + 1) - ((m) (m + 1))]*((-1)^n)*
fuv[[np + 1, n + 1]],
If[m - 1 ==
mp, -(ω₀/2) Sqrt[j (j + 1) - ((m) (m - 1))]*((-1)^np)*
fuv[[np + 1, n + 1]], 0.]];
(* Aquí se ven los elementos son distintos de cero para J+ + J-. *)
infm = {};
Do[

```

```

indexa = {};
Do[mv = {};
  If[mm - 1 >= -j, AppendTo[mv, mm - 1]];
  If[mm + 1 <= j, AppendTo[mv, mm + 1]];
  AppendTo[indexa, Table[in[kn, km], {km, mv}],
    {kn, 0, nmax}];
index = Flatten[indexa];
AppendTo[infm, index], {mm, -j, j, 1}];
(* Aquí se ven los elementos son distintos de cero para (a+a)Jz *)
infn = {};
Do[indez = {};
  If[lp[[k, 2]] + 1 <= nmax && lp[[k, 1]] != 0,
    AppendTo[indez, in[lp[[k, 2]] + 1, lp[[k, 1]]]];
  AppendTo[infn, indez], {k, 1, 1}];
(* Empieza la construcción de las reglas *)
rulesf = Flatten[
  ParallelTable[{kd, ku} ->
    Fuf[lp[[kd, 2]], lp[[kd, 1]], lp[[ku, 2]], lp[[ku, 1]], {kd, 1,
      1}, {ku, Select[infm[[lp[[kd, 1]] + j + 1]], # > kd &]}]];
rulesfn =
  Flatten[ParallelTable[{kd, ku} ->
    Sqrt[lp[[kd, 2]] + 1] lp[[kd, 1]], {kd, 1, 1}, {ku, infn[[kd]]}]];
(* Empieza la construcción del Hamiltoniano*)
m2ad = SparseArray[rulesf, {1, 1}];
m2bd = Transpose[m2ad];
HND = m2ad + m2bd;
(* Aquí se construye la matriz diagonal *)
HD = DiagonalMatrix[
  Table[ $\omega$  (lp[[k, 2]] - (G^2) (lp[[k, 1]]^2)), {k, 1, 1}];
(* Aquí se construye finalmente la matriz HD*)
Ham = HD +
  HND + (20 j IdentityMatrix[1]); (* Aquí, cambié el nombre *)
Print["Operador HD construido."];
(* Aquí se lleva a cabo la diagonalización *)
Print["Diagonalizando H|Ei⟩=Ei|Ei⟩, ..."];
as = Eigensystem[Ham];
(* Aquí ± 20j y se colocan los Ei y |Ei⟩ en orden *)
or = Ordering[as[[1]]];
ener = as[[1]][[or]] - 20 j;
evec = as[[2]][[or]];
Print["Se han calculado Ei y |Ei⟩ exitosamente!"];
(* Aquí vemos el número de estados convergidos *)
DP[ii_] :=
  Sum[(evec[[ii]][[i]])^2, {i,
    nmax (2 j + 1) + 1, (nmax + 1) (2 j + 1)}];
(*Error de precisión*)
error = 10^-3;
Clear[lc];
lc = 1;
While[Log10[DP[lc]] <= Log10[error], lc++];
Print["Hay ", lc,
  " estados convergidos con precisión de 10^", Log10[error], "."];

```

```

Print["Exportando Ei y |Ei⟩ en el archivo nombrado:"];
Print["E_f_" <> ToString[nom] <> "_d_" <> ToString[l] <> "_dc_" <>
  ToString[lc]];
{ener[[1;;lc]],evec[[1;;lc]]}>>>ham;
RenameFile["ham",
  "E_f_" <> ToString[nom] <> "_d_" <> ToString[l] <> "_dc_" <>
  ToString[lc]];];
tCPU=%[1];
mRAM=N[10^-6MemoryInUse[]/8];
Print["Memoria RAM usada: ",mRAM, " MB."];
Print["El tiempo de computo fue de ",tCPU/60, " minutos."];+
Print["-----"];
Exit[]

```

=====

DICKE-CUÁNTICO

Por: Jorge Chávez Carlos.

=====

El sistema cuántico:

$$H_D = \omega a a^\dagger + \omega_0 J_z + (\gamma/\sqrt{2j})(J_+ + J_-)(a + a^\dagger),$$

con  $\omega = 1.$ ,  $\omega_0 = 1.$ ,  $\gamma = 2.$   $\gamma_c$ ,  $j = 30$  y truncamiento  $v = 70$

Tiene 4331 estados en el espacio de Hilbert

-----

Construcción de  $H_D$  en la BCE,  
en proceso...

Operador  $H_D$  construido.

Diagonalizando  $H|E_i\rangle = E_i|E_i\rangle$ , ...

Se han calculado  $E_i$  y  $|E_i\rangle$  exitosamente!

Hay 1600 estados convergidos con precisión de  $10^{-3}$ .

Exportando  $E_i$  y  $|E_i\rangle$  en el archivo nombrado:

E\_f\_2.\_j\_30\_nmax\_70\_d\_4331\_dc\_1600

Memoria RAM usada: 89.4835 MB.

El tiempo de computo fue de 1.9411797 minutos.

-----

### **C.3. Estado coherente**

In[1]:=

```

Print["====="];
Print["DICKE-CUÁNTICO: ESTADO COHERENTE"];
Print["Por: Jorge Chávez Carlos."];
Print["====="];
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
AbsoluteTiming[
  (*----- Importando  $E_i$  y  $|E_i\rangle$  -----*)
  datEner = ReadList["E_f_2._j_50_nmax_140_d_14241_dc_6500"][[1]];
  or = Ordering[datEner[[1]]]; (* Ordenando datos *)
  ener = datEner[[1]][[or]]; (*  $E_i$  *)
  evec = datEner[[2]][[or]]; (*  $|E_i\rangle$  *)
  (*-----Definimos los parámetros -----*)
  j = 50; (*Número de átomos  $N=2j$ *)
  nmax = 140; (*Truncamiento*)
  lc = 6500;
   $\omega$  = 1.0; (*Frecuencia del los fotones*)
   $\omega_0$  = 1.0; (*Frecuencia del los átomos*)
   $\gamma_c$  =  $\sqrt{\omega \omega_0} / 2$ ; (*Factor de acoplamiento crítico*)
  f = 2.0; (*Acoplamiento*)
   $\gamma$  = f  $\gamma_c$ ; (*Acoplamiento respecto al crítico*)
  G =  $(2\gamma) / (\omega \sqrt{2j})$ ;
  (*Parámetros clásicos*)
   $\epsilon$  = -1.5; (*Energía  $E/(\omega_0 j)$ *)
  jz = -0.4 j;
   $\phi$  = 0.0;
  (*----- Sistema cuántico -----*)
  Print["Parámetros seleccionados:
   $\omega$  = ",  $\omega$ , ",  $\omega_0$  = ",  $\omega_0$ , ",  $\gamma$  = ", f, " $\gamma_c$ , j = ", j,
  " y truncamiento  $v$  = ", nmax];
  (* NOMBRE DEL ARCHIVO CODIFICADO *)
  nom = ToString[f] <> "_j_" <> ToString[j] <> "_nmax_" <>
  ToString[nmax];
  Print["El número de estados convergidos es: lc = ", lc];
  Print["Energía estado base :  $\epsilon_0$  = ", ener[[1]]/j, " j"];
  Print["Energía máxima convergida:  $\epsilon_{\max}$  = ", ener[[lc]]/j, " j"];
  lp = {};
Do[
Do[
AppendTo[lp, {m, n}],
{m, -j, j}],
{n, 0, nmax}];
l = Length[lp];
Ener =  $\epsilon * (\omega_0 j)$ ;

```

```

    Ecl = If[γ >= γc,
    N[-((ωo j)/2) ((1/(f^2)) + f^2)], -ωo j];
    (*----- HAMILTONIANO CLÁSICO. -----*)
    H[qv_, pv_, φv_,
    jzv_] = ωo jzv + (ω/2) (qv^2 + pv^2) +
    2 γ √j √(1 - (jzv/j)^2) qv Cos[φv];
    (* Cálculo de q(E,φ,jz) *)
    sq = Solve[H[q, 0, φ, jz] == Ener, q];
    qf[jz_, φ_] = (q /. sq[[2, 1]]); (*Elección para q+*)
    qf2[jz_, φ_] = (q /. sq[[1, 1]]); (*Elección para q-*)
    qi = qf[jz, φ]/√j;
    Print["Centro de |α z>:
    x0 = {p, q+, jz, φ} = {" , 0, " , " , qi, " , " , jz/j, " , " φ, " }"];
    Print["-----"];
    (*----- ESTADO COHERENTE |αz>. -----*)
    Print["Construcción del estado |αz> = ∑_{k=1}^{Lc} c_k |E_k> en proceso ..."];
    (*----- Estado coherente atómico: |z>. -----*)
    βr[jz_, φ_] :=
    If[jz == 0.0 && φ == 0.0,
    0.0, -(jz/j) 1/(1 - Sqrt[1 - (jz/j)^2] Cos[φ]) ];
    βi[jz_, φ_] :=
    If[jz == 0.0 && φ == 0.0,
    0.0, -Sqrt[1 - (jz/j)^2] Sin[φ] 1/(
    1 - Sqrt[1 - (jz/j)^2] Cos[φ])];
    β = βr[jz, φ] + I βi[jz, φ];
    (*----- Estado coherente fotónico: |α>. -----*)
    α = qf[jz, φ]/Sqrt[2];
    (* El valor de los estados coherentes *)
    Print["α = ", α];
    Print["z = ", β];
    (* Función de Husimi para base Coherente
    SIN separar en paridad en sistema rotado*)
    (*El estado coherente |α_x> es un estado coherente \
    rotado z→x*)
    Qd[N_, m_,
    Z_, α_] := (1/(Sqrt[N!]) (1 + Abs[α]^2)^ ^
    j) (Conjugate[Z] + 2 γ m/(ω Sqrt[2 j])) ^
    N Exp[-(1/
    2) (Abs[Z]^2 + (2 γ m/(ω Sqrt[
    2 j]))^2 + (4 Conjugate[
    Z] γ m/(ω Sqrt[2 j])) )] Sqrt[
    Binomial[2 j, j + m]]] *

```

```

If[ $\alpha == 0$  &&  $m == -j$ , 1, Conjugate[ $\alpha$ ]^( $j + m$ )];
(* Proyección sobre la base coherente eficiente *)
QDp = ParallelTable[
  Qd[lp[[k, 2]], lp[[k, 1]],  $\alpha$ ,  $\beta$ ], {k, 1, lc}];
(*Coeficientes de exapanción ck*)
ck = ParallelTable[Chop[evect[[nes, 1 ;; lc]].QDp], {nes, 1, lc}];
Qks = Abs[ck]^2;
(**** FUNCIÓN DE HUSIMI:  $Q_k(\alpha, z)$  ****)
Qk = ParallelTable[{ener[[k]]/j, Qks[[k]]}, {k, 1, lc}];
figQ = ListPlot[Qk, PlotRange -> All, RotateLabel -> False,
  ImageSize -> 500, PlotStyle -> Black,
  Axes -> False, Frame -> True, Filling -> Axis,
  FrameLabel -> {Style[" $E_k/j$ ", 20], Style[" $|c_k|^2$ ", 20]},
  LabelStyle -> {Directive[15], Black}, AspectRatio -> 1];
Print["-----"];
(* Norma, IPR y PR *)
Norma = Total[Qks];
IPR = Total[Qks^2];
PR = 1 / IPR;
Print[" $\langle \alpha z | \alpha z \rangle =$  ", Norma];
Print["IPR = ", IPR];
Print[" $P_R =$  ", PR];
data = ParallelTable[{ener[[k]], ck[[k]]}, {k, 1, lc}];
Print["Exportando coeficientes  $c_k$  en el archivo nombrado:"];
Print["Cks_f_" <> ToString[nom] <> "_d_" <> ToString[l] <> "_dc_" <>
  ToString[lc] <> "_e_" <> ToString[Chop[ $\epsilon$ ]] <>
  "_jz_" <> ToString[Chop[jz/j]] <> "_j.dat"];
Export["Cks_f_" <> ToString[nom] <> "_d_" <> ToString[l] <> "_dc_" <>
  ToString[lc] <> "_e_" <> ToString[Chop[ $\epsilon$ ]] <>
  "_jz_" <> ToString[Chop[jz/j]] <> "_j.dat", data];];
tCPU = %[[1]];
Print["-----"];
(***** GRÁFICA *****)
Print["FUNCIÓN DE HUSIMI:  $Q_k(\alpha, z) = |\langle \alpha z | E_k \rangle|^2 = |c_k|^2$ "];
Show[figQ]
mRAM = N[10^-6 MemoryInUse[] / 8];
Print["Memoria RAM usada: ", mRAM, " MB."];
Print["El tiempo de computo fue de ", tCPU/60, " minutos."];
Print["-----"];
Exit[]

```

=====

DICKE-CUÁNTICO: ESTADO COHERENTE

Por: Jorge Chávez Carlos.

=====

Parámetros seleccionados:

$\omega = 1.$ ,  $\omega_0 = 1.$ ,  $\gamma = 2.\gamma_c$ ,  $j = 50$  y truncamiento  $\nu = 140$

El número de estados convergidos es:  $lc = 6500$

Energía estado base :  $\epsilon_0 = -2.12526$  j

Energía máxima convergida:  $\epsilon_{max} = 0.5765$  j

Centro de  $|\alpha z\rangle$ :

$x_0 = [p, q_+, j_z, \phi] = (0, -0.755997, -0.40.)$

-----

Construcción del estado  $|\alpha z\rangle = \sum_{k=1}^{lc} c_k |E_k\rangle$  en proceso ...

$\alpha = -3.77999$

$z = 4.79129 + 0. i$

-----

$\langle \alpha z | \alpha z \rangle = 0.999997$

IPR = 0.0121336

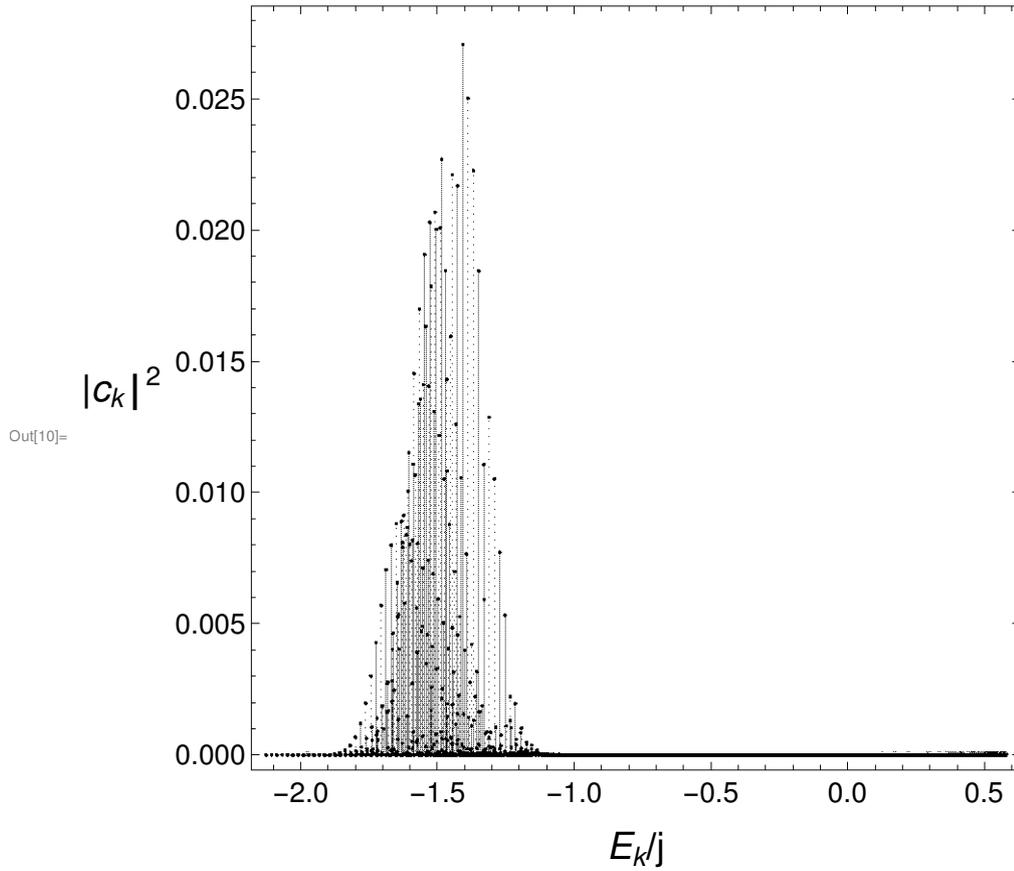
$P_R = 82.4156$

Exportando coeficientes  $c_k$  en el archivo nombrado:

Cks\_f\_2.\_j\_50\_nmax\_140\_d\_14241\_dc\_6500\_e\_-1.5\_jz\_-0.4\_j.dat

-----

FUNCIÓN DE HUSIMI:  $Q_k(\alpha, z) = |\langle \alpha z | E_k \rangle|^2 = |c_k|^2$



Memoria RAM usada: 286.275 MB.

El tiempo de computo fue de 5.33299 minutos.

---

# Bibliografía

- [1] Clive Emary and Tobias Brandes. Chaos and the quantum phase transition in the dicke model. *Phys. Rev. E*, 67:066203, Jun 2003.
- [2] Pavel Stránský, Petr Hruška, and Pavel Cejnar. Quantum chaos in the nuclear collective model. ii. Peres lattices. *Phys. Rev. E*, 79:066201, Jun 2009.
- [3] M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch. Comparative quantum and semiclassical analysis of atom-field systems. i. density of states and excited-state quantum phase transitions. *Phys. Rev. A*, 89:032101, Mar 2014.
- [4] A. M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, 55(3):531–534, 1992.
- [5] Charalampos Skokos. The Lyapunov characteristic exponents and their computation. *Lecture Notes in Physics*, 790:63, 11 2010.
- [6] Thomas S. Parker and Leon O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1989.
- [7] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, Antonio Giorgilli, and Jean-Marie Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, 15(1):9–20, Mar 1980.
- [8] M. Cencini, F. Cecconi, and A. Vulpiani. *Chaos: From Simple Models to Complex Systems*. World Scientific Publishing Co, 2010.
- [9] G. Contopoulos. *Order and chaos in dynamical astronomy*. 2002.
- [10] M.V. Berry. Quantizing a classically ergodic system: Sinai’s billiard and the kkr method. *Annals of Physics*, 131(1):163 – 216, 1981.
- [11] Asher Peres. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems. *Phys. Rev. A*, 30:1610–1615, Oct 1984.
- [12] The bakerian lecture, 1987. quantum chaology. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 413(1844):183–198, 1987.
- [13] I C Percival. Regular and irregular spectra. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 6(9):L229, 1973.

- 
- [14] Freeman J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140–156, 1962.
- [15] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1–4, Jan 1984.
- [16] Asher Peres. New conserved quantities and test for regular spectra. *Phys. Rev. Lett.*, 53:1711–1713, Oct 1984.
- [17] Kôdi Husimi. Some formal properties of the density matrix. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 22(4):264–314, 1940.
- [18] R. J. Bell and P. Dean. Atomic vibrations in vitreous silica. *Discuss. Faraday Soc.*, 50:55–61, 1970.
- [19] M. R. Zirnbauer. Anderson Localization and Nonlinear  $\sigma$  Model With Graded Symmetry. *Nucl. Phys.*, B265:375–408, 1986.
- [20] B. Georgeot and D. L. Shepelyansky. Breit-Wigner width and inverse participation ratio in finite interacting Fermi systems. *Phys. Rev. Lett.*, 79:4365–4368, Dec 1997.
- [21] Marco Távora, E. J. Torres-Herrera, and Lea F. Santos. Inevitable power-law behavior of isolated many-body quantum systems and how it anticipates thermalization. *Phys. Rev. A*, 94:041603, Oct 2016.
- [22] Juan Maldacena. The large- $n$  limit of superconformal field theories and supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4):1113–1133, Apr 1999.
- [23] Juan Maldacena, Stephen H. Shenker, and Douglas Stanford. A bound on chaos. *Journal of High Energy Physics*, 2016(8):106, Aug 2016.
- [24] Koji Hashimoto, Keiju Murata, and Ryosuke Yoshii. Out-of-time-order correlators in quantum mechanics. *Journal of High Energy Physics*, 2017(10):138, Oct 2017.
- [25] Roy J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130:2529–2539, Jun 1963.
- [26] John R. Klauder and Bo-Sture Skagerstam. *Coherent states. Applications in physics and mathematical physics*. World Scientific, 1985.
- [27] Marlan O. Scully and M. Suhail Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [28] F. T. Arecchi, Eric Courtens, Robert Gilmore, and Harry Thomas. Atomic coherent states in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 6:2211–2237, Dec 1972.
- [29] D.F. Walls and Gered J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer, 2008.
- [30] John D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1975.

- [31] N. N. Bogolyubov and D. V. Shirkov. Introduction to the theory of quantized fields. *Intersci. Monogr. Phys. Astron.*, 3:1–720, 1959.
- [32] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93:99, Jan 1954.
- [33] Y Nakamura, Yu A. Pashkin, and J Tsai. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-cooper-pair box. *Nature*, 398, 03 1999.
- [34] D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai, and P. Domokos. Dicke-model phase transition in the quantum motion of a Bose-Einstein condensate in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 104:130401, Apr 2010.
- [35] Kristian Baumann, Christine Guerlin, Ferdinand Brennecke, and Tilman Esslinger. Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity. *Nature*, 464:1301 EP –, Apr 2010. Article.
- [36] Eduardo Nahmad-Achar, Octavio Castañós, Ramón López-Peña, and Jorge G. Hirsch. Mathematical methods in quantum optics: the Dicke model. *Physica Scripta*, 87(3):038114, 2013.
- [37] Ricardo Puebla, Armando Relaño, and Joaquín Retamosa. Excited-state phase transition leading to symmetry-breaking steady states in the dicke model. *Phys. Rev. A*, 87:023819, Feb 2013.
- [38] J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch. Classical chaos in atom-field systems. *Phys. Rev. E*, 94:022209, Aug 2016.
- [39] Miguel Angel Bastarrachea-Magnani and Jorge G. Hirsch. Convergence in numerical solutions of the Dicke Hamiltonian. *AIP Conference Proceedings*, 1488(1):418–421, 2012.
- [40] P. Pérez-Fernández, P. Cejnar, J. M. Arias, J. Dukelsky, J. E. García-Ramos, and A. Relaño. Quantum quench influenced by an excited-state phase transition. *Phys. Rev. A*, 83:033802, Mar 2011.
- [41] Tobias Brandes. Excited-state quantum phase transitions in Dicke superradiance models. *Phys. Rev. E*, 88:032133, Sep 2013.
- [42] M. A. Bastarrachea-Magnani, B. López-del Carpio, J. Chávez-Carlos, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch. Delocalization and quantum chaos in atom-field systems. *Phys. Rev. E*, 93:022215, Feb 2016.
- [43] S. Lerma-Hernández, J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, B. López del Carpio, and J. G. Hirsch. Dynamics of coherent states in regular and chaotic regimes of the non-integrable Dicke model. *AIP Conference Proceedings*, 1950(1):030002, 2018.
- [44] J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández, and J. G. Hirsch. Route of chaos in atom-photon systems. *In progress*.
- [45] Eric J. Heller. Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems: Scars of periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.*, 53:1515–1518, Oct 1984.

- [46] S. Lerma-Hernández, J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, F. L. Santos, and J. G. Hirsch. Survival probability of coherent states in regular regimes. *arXiv:1710.05937*.
- [47] J. Chávez-Carlos, B. López-del Carpio, M. A. Bastarrachea-Magnani, P. Stránský, S. Lerma-Hernández, F. L. Santos, and J. G. Hirsch. A quantum Lyapunov exponent. *In progress*.
- [48] Wolfram Research. Mathematica 10.0, 2010.