Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

# SELECCIONES Y BUENOS ÓRDENES EN ESPACIOS TOPOLÓGICOS

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

JORGE ANTONIO CRUZ CHAPITAL

TUTORA:
DRA. NATALIA JONARD PÉREZ

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA104816 Acciones de grupos en variedades de dimensión infinita. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

# Índice general

# Introducción

Sea $L$ un espacio de Banach y $X$ un espacio paracompacto. Si consideramos a $C(L) := \{D \subseteq L \mid D$ es convexo, cerrado y no vacío$\}$, entonces diremos que una función

$$f : X \longrightarrow C(L)$$

es semicontinua inferiormente si para cualquier $A \subseteq L$ abierto, el conjunto $M_A = \{x \in X \mid f(x) \cap A \neq \emptyset\}$ es abierto en $X$. En el año 1956, el matemático Ernest A. Michael demostró que bajo las hipótesis antes mencionadas, siempre existe una función continua $g : X \longrightarrow L$, tal que $g(x) \in f(x)$ para cualquier $x \in X$. Dicho teorema es llamado "Teorema de selección de Michael".

El objetivo principal de esta tesis es darnos cuenta de que las hipotesis del Teorema de selección de Michael no pueden ser debilitadas tan facilmente, sin reducir la gama de espacios a los cuales es aplicable el teorema. En lugar de $L$, consideraremos $Y$ un espacio cualquiera; Además, en lugar de considerar a $C(L)$ consideraremos a $F(Y) = \{A \subseteq Y \mid A \neq \emptyset$ y $A$ es cerrado$\}$ y dotaremos a dicho conjunto de topología muy particular. Demostraremos que cuando $Y$ es un espacio compacto y $T_2$, entonces el Teorema de selección de Michael se cumple para la función $Id_{F(Y)}$ si y solamente si $Y$ es un espacio totalmente ordenado.

En el Capítulo 1 introduciremos las nociones básicas y resultados principales que nos permitirán desarrollar los Capítulos 2 y 3 sin desviar nuestra atención de nuestros principales objetivos. Empezaremos dicho capítulo definiendo conjuntos totalmente ordenados, así como la topología canónica que suele asociarse a tales conjuntos, los cuales, dotados de esa topología les llamaremos espacios ordenables. Posteriormente, demostraremos propiedades básicas sobre espacios ordenables, estudiaremos su conexidad, caracterizaremos su compacidad, y daremos un teorema que nos permitirá contestar parcialmente a la pregunta ¿cuándo un espacio topológico es un espacio ordenable?, el cual será una pieza clave para poder caracterizar a los espacios que admiten selecciones continuas.

Una vez terminado el estudio de los espacios ordenables, empezaremos el estudio de F(X), el conjunto de todos los subconjuntos cerrados de un espacio topológico $(X, \tau)$. Dotaremos a $F(X)$ de dos topologías, la topología de Vietoris y la topología de Fell, para posteriormente investigar sus características, así como funciones continuas en dichas topologías que nos permitirán entender de mejor manera el comportamiento de algunas propiedades dentro de $F(X)$, tales como la convergencia. Cabe resaltar que estudiar estos conceptos es fundamental debido a que, en principio, las selecciones continuas que estudiaremos dependen en gran parte de las topologías antes mencionadas.

Para terminar con este primer capítulo, analizaremos a los espacios topológicos de Mrówka-Isbell, los cuales son espacios definidos a partir de familias de subconjuntos de $\omega$ y serán utilizados en el Capítulo 3. También estudiaremos a los conjuntos parcialmente ordenados comúnmente llamados Forcing, los cuales nos permitirán hacer algunas construcciones de una manera más directa que usando otros métodos tales como el Back and Forth.

Iniciaremos el Capítulo 2 definiendo de manera formal el concepto de selección continua y selección continua débil. Después de dar un par de ejemplos, dedicaremos un espacio para encontrar equivalencias a este concepto, y nos daremos cuenta de que, en algunos casos, la definición de selección continua puede ser sustituida por una en la que no sea necesaria el uso de hiperespacios. Posteriormente, hablaremos sobre las relaciones que hay entre la existencia de selecciones continuas sobre algún espacio $X$, y las propiedades topológicas de dicho espacio, centrando nuestra atención en propiedades tales como la conexidad y la compacidad local.

En este punto, tendremos el material necesario para adquirir una intuición suficiente que nos permita poder entender los parecidos entre los espacios que admiten selecciones continuas débiles y los espacios ordenables. Es entonces cuando estaremos listos para probar el teorema principal de esta tesis, el cual nos dice que es equivalente que un espacio compacto y Hausdorff admita una selección continua, a que dicho espacio sea un espacio ordenable. Por último, analizaremos algunas consecuencias sobre este teorema.

Para terminar, el Capítulo 3 lo dedicaremos al estudio de ejemplos y contraejemplos relacionados a las selecciones continuas. Empezaremos analizando algunos ejemplos de selecciones continuas y demostraremos que $\mathbb{R}$ no admite selecciones continuas. Posteriormente definiremos morfismos entre selecciones, concepto que permitirá formalizar la noción de que dos selecciones sean iguales. Una vez estudiadas las propiedades básicas sobre los morfismos, centraremos nuestra atención en las selecciones sobre $\omega$ y la selección universal, la cual es un objeto muy similar a $\mathbb{Q}$ y a la gráfica aleatoria. Teniendo estudiados todos estos conceptos, y utilizando nuestro conocimiento sobre los espacios de Mrówka-Isbell definidos en el Capítulo 1, podremos construir un contraejemplo que muestre que las hipótesis el teorema principal (Teorema 2.3.1) no pueden ser debilitadas.

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1. Espacios topológicos ordenables

El propósito de esta sección es construir una topología que capture la idea de orden en conjuntos totalmente ordenados, al igual que brindar herramienta suficiente para poder trabajar con dicha topología de manera más cómoda. Empezaremos este recorrido fijando la notación que utilizaremos relacionada a conjuntos totalmente ordenados.

Dado un conjunto $X$, diremos que una relación $\preceq$ es un orden total si satisface:

- (Reflexividad) Para cualquier $x \in X$ se cumple que $x \preceq x$.
- (Antisimetría) Para cualesquiera $x, y \in X$, si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces $x = y$.
- (Transitividad) Para cualesquiera $x, y, z \in X$, si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$.
- (Dicotomía) Para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $x \preceq y$ o $y \preceq x$.

y en este caso diremos que $(X, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Dados $(X, \preceq)$ un conjunto totalmente ordenado y $x, y \in X$, escribiremos $x \prec y$ si $x \preceq y$ y $x \neq y$. Además, si $a, b \in X$, entonces definimos los siguientes conjuntos:

- $(-\infty, a)_{\preceq} = \{x \in X \mid x \prec a\}$,
- $(-\infty, a]_{\preceq} = \{x \in X \mid x \preceq a\}$,
- $(a, \infty)_{\preceq} = \{x \in X \mid a \prec x\}$,
- $[a, \infty)_{\preceq} = \{x \in X \mid a \preceq x\}$,
- $(a, b)_{\preceq} = \{x \in X \mid a \prec x \prec b\}$,
- $(a, b]_{\preceq} = \{x \in X \mid a \prec x \preceq b\}$,
- $[a, b)_{\preceq} = \{x \in X \mid a \preceq x \prec b\}$,
- $[a, b]_{\preceq} = \{x \in X \mid a \preceq x \preceq b\}$.

Adicionalmente diremos que $A \subseteq X$ es un intervalo si y solo si para cualesquiera $a, b \in A$ se cumple que $[a, b]_{\preceq} \subseteq A$; diremos que $A$ es un segmento inicial si para cualquier $a \in A$ se cumple que $(-\infty, a)_{\preceq} \subseteq A$; si para cualquier $a \in A$ se cumple que $(a, \infty)_{\preceq} \subseteq A$, entonces diremos que $A$ es un segmento final. Por último, diremos que $M \subseteq X$ es monótono si existe $S \subseteq X$ un segmento inicial tal que $M \subseteq S$ y para todo $s \in S$ se cumple que $M \cap (-\infty, s)_{\preceq}$ es finito o si existe $B \subseteq X$ un segmento final tal que $M \subseteq B$ y para todo $b \in B$ se cumple que $M \cap (b, \infty)_{\preceq}$ es finito.

Daremos por hecho que el lector ya conoce teoría básica sobre órdenes totales. Si éste no es el caso, entonces podremos encontrar el resto de las definiciones y resultados básicos en [3].

**Definición 1.1.1. (Topología de orden)** *Si $(X, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado, definimos la topología $\tau_{\preceq}$, como la inducida por la siguiente subbase:*

$$\{(-\infty, a)_{\preceq} \mid a \in X\} \cup \{(b, \infty)_{\preceq} \mid b \in X\}.$$

*Además, diremos que un espacio $(X, \tau)$ es ordenable, y lo abreviaremos ETO, si existe un orden total $\preceq$ sobre $X$ tal que $\tau_{\preceq} = \tau$. En este caso, diremos que $\preceq$ es compatible con $\tau$ y reescribiremos al espacio como $(X, \preceq, \tau)$.*

El siguiente lema nos ayudará a encontrar una base para la topología de orden con la que podamos trabajar cómodamente.

**Lema 1.1.2.** *Sea* $(X, \preceq, \tau)$ *un ETO y sea*

$$A \subseteq \{(-\infty, a)_{\preceq} \mid a \in X\} \cup \{(b, \infty)_{\preceq} \mid b \in X\}$$

*no vacío y finito. Entonces* $\bigcap A \in \{(-\infty, a)_{\preceq} \mid a \in X\} \cup \{(b, \infty)_{\preceq} \mid b \in X\}$, *o existen* $c, d \in X$ *tales que* $\bigcap A = (c, d)_{\preceq}$.

*Demostración.* Dividiremos la demostración por casos:

1) Si $A \cap \{(b, \infty)_{\preceq} \mid b \in X\} = \emptyset$, entonces existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$ tales que $A = \{(-\infty, a_i)_{\preceq} \mid i \leq n\}$. Sea $c = \text{mín}_{\preceq}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, notemos que $x \in \bigcap A = \bigcap_{i=1}^{n}(-\infty, a_i)_{\preceq}$ si y solo si para cualquier $i \leq n$ se cumple que $x \prec a_i$, pero esto pasa solamente cuando $x \prec \text{mín}_{\preceq}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, es decir, si $x \in (-\infty, c)_{\preceq}$. Con esto concluimos que $\bigcap A = (-\infty, c)_{\preceq}$ y por lo tanto $\bigcap A \in \{(-\infty, a)_{\preceq} \mid a \in X\}$.

2) Si $A \cap \{(-\infty, a)_{\preceq} \mid a \in X\} = \emptyset$, entonces podemos demostrar de una manera análoga al caso anterior que $\bigcap A \in \{(b, \infty)_{\preceq} \mid b \in X\}$.

3) Si no pasa ninguno de los casos anteriores, entonces concluimos que existen $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m \in X$ tales que $A = \{(-\infty, a_i)_{\preceq} \mid i \leq n\} \cup \{(b_i, \infty)_{\preceq} \mid i \leq m\}$. Sean $b = \text{máx}_{\preceq}\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ y $a = \text{mín}_{\preceq}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, notemos que $x \in \bigcap A$ si y solo si para cualquier $i \leq n$ y $j \leq m$ se cumple que $b_j \prec x \prec a_i$, pero esto solo pasa si $b \prec x \prec a$, es decir, si $x \in (b, a)_{\preceq}$. Así concluimos que $\bigcap A = (b, a)_{\preceq}$.

□

Recordemos que si $\mathcal{A}$ es subbase de una topología $\tau$, entonces el conjunto de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{A}$ forma una base para $\tau$. Así, como consecuencia directa del lema anterior, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.1.3.** *Sea* $(X, \preceq, \tau)$ *un ETO, entonces el conjunto*

$$\{(-\infty, a)_{\preceq} \mid a \in X\} \cup \{(b, \infty)_{\preceq} \mid b \in X\} \cup \{(c, d)_{\preceq} \mid c, d \in X\}$$

*forma una base para* $\tau$.

Una de las propiedades principales de la topología de orden es que sabe distinguir puntos.

**Proposición 1.1.4.** *Si* $(X, \preceq, \tau)$ *es un ETO, entonces es* $T_2$.

*Demostración.* Sean $a, b \in X$ distintos, supongamos sin pérdida de generalidad que $a \prec b$. Notemos que $a \in (-\infty, b)_{\preceq}$ y $b \in (a, \infty)_{\preceq}$ los cuales son abiertos en $\tau$. Si $(-\infty, b)_{\preceq} \cap (a, \infty)_{\preceq} = \emptyset$ entonces ya acabamos. En caso contrario existe $d \in X$ tal que $a \prec d \prec b$, y por lo tanto $a \in (-\infty, d)_{\preceq}$, $b \in (d, \infty)_{\preceq}$ y $(-\infty, d)_{\preceq} \cap (d, \infty)_{\preceq} = \emptyset$. $\square$

La siguiente proposición nos ayuda a aclarar de manera topológica la idea que tenemos acerca de que un conjunto se aproxima a su ínfimo (supremo) en caso de existir.

**Proposición 1.1.5.** *Sean $(X, \preceq, \tau)$ un ETO, $A \subseteq X$ no vacío y $x_0 \in X$. Si $x_0$ es el supremo (ínfimo) de $A$ respecto a $\preceq$, entonces $x_0 \in \overline{A}$ .*

*Demostración.* Sea $x_0 = \sup_{\preceq} A$, entonces para todo $c \prec x_0$ existe $a_c \in A$ tal que $c \prec a_c \preceq x_0$, además, como $A \neq \emptyset$ existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \preceq x_0$. Notemos que para cualesquiera $c, b \in X$, si $x_0 \in (-\infty, c)_{\preceq}$ entonces $a_0 \in (-\infty, c)_{\preceq}$, si $x_0 \in (c, \infty)_{\preceq}$ entonces $a_c \in (c, \infty)_{\preceq}$, y si $x_0 \in (c, b)_{\preceq}$ entonces $a_c \in (c, b)_{\preceq}$. Con esto concluimos que $A$ interseca a cualquier básico que tiene a $x_0$, y por lo tanto $x_0 \in \overline{A}$. El caso en que $x_0$ es el ínfimo de $A$ se demuestra de manera análoga. $\square$

Lamentablemente, la topología de orden de un subconjunto de un conjunto totalmente ordenado $(X, \preceq)$ no siempre coincide con la topología heredada de $(X, \tau_{\preceq})$, por ejemplo; el conjunto $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1\}$, visto como subespacio de $\mathbb{R}$ . Sin embargo, se cumple una propiedad un poco más débil.

**Lema 1.1.6.** *Sean $(X, \preceq, \tau)$ un ETO y $A \subseteq X$ no vacío, entonces $\tau_{(\preceq|_{A\times A})} \subseteq (\tau_{\preceq})|_A$.*

*Demostración.* Dados $a, y \in A$ se tiene que $y \in (-\infty, a)_{(\preceq|_{A\times A})}$ si y solo si $y \prec a$, lo cual es equivalente a decir que $y \in (-\infty, a)_{\preceq}$, pero $y \in A$, entonces esto ocurre si y sólo si $y \in (-\infty, a)_{\preceq} \cap A$. Así,

$$(-\infty, a)_{(\preceq|_{A\times A})} = (-\infty, a)_{\preceq} \cap A$$

por lo que $(-\infty, a)_{(\preceq|_{A\times A})}$ pertenece a $(\tau_{\preceq})|_A$. De manera análoga podemos demostrar que $(a, \infty)_{(\preceq|_{A\times A})}$ pertenece a $(\tau_{\preceq})|_A$. Con esto concluimos que la subbase canónica de $\tau_{(\preceq|_{A\times A})}$ se queda contenida en $(\tau_{\preceq})|_A$, y por lo tanto $\tau_{(\preceq|_{A\times A})} \subseteq (\tau_{\preceq})|_A$. $\square$

**Proposición 1.1.7.** *Sean $(X, \preceq, \tau)$ un ETO y $A \subseteq X$ un intervalo no vacío, entonces $\tau_{(\preceq|_{A\times A})} = (\tau_{\preceq})|_A$.*

*Demostración.* Sabemos que la familia

$$\{(-\infty, a)_{\preceq} \cap A \mid a \in X\} \cup \{(b, \infty)_{\preceq} \cap A \mid b \in X\}$$

forma una subbase para $(\tau_{\preceq})|_A$. Veamos que todo abierto de esa familia pertenece a $\tau_{(\preceq|_{A\times A})}$. Sea $a \in X$, si $(-\infty, a)_{\preceq} \cap A = \emptyset$, entonces ya acabamos. Supongamos que $(-\infty, a)_{\preceq} \cap A \neq \emptyset$, es decir, existe $b \in A$ tal que $b \prec a$. Tenemos entonces dos casos:

1) Si existe $c \in A$ tal que $a \preceq c$, entonces $a \in A$ ya que $b \prec a \preceq c$ y $A$ es un intervalo. En este caso $(-\infty, a)_{\preceq} \cap A = (-\infty, a)_{(\preceq|_{A\times A})}$.

2) Si para todo $c \in A$ se cumple que $c \prec a$ entonces $(-\infty, a)_{\preceq} \cap A = A$.

En cualquier caso concluimos que $(-\infty, a)_{\preceq} \cap A \in \tau_{(\preceq|_{A\times A})}$. De manera análoga, podemos ver que $(a, \infty)_{\preceq} \cap A$ pertenece a $\tau_{(\preceq|_{A\times A})}$, y por lo tanto $(\tau_{\preceq})|_A \subseteq \tau_{(\preceq|_{A\times A})}$. Concluimos por el Lema 1.1.6 que $\tau_{(\preceq|_{A\times A})} = (\tau_{\preceq})|_A$. □

La siguiente definición es la análoga en topología a la de un conjunto bien ordenado, la diferencia aquí es que en principio solo nos interesará como se comporta nuestro orden respecto a los conjuntos cerrados.

**Definición 1.1.8.** *Diremos que $(X, \tau)$ es un espacio topológico bien ordenable y lo abreviaremos ETBO, si existe un orden total $\preceq$ sobre $X$ compatible con la topología de $X$, tal que para todo $F \subseteq X$ cerrado no vacío se cumple que $F$ tiene mínimo respecto a $\preceq$. Si decimos que $(X, \preceq, \tau)$ es un ETBO, estaremos dando por hecho que $\preceq$ satisface esta definición.*

Uno de los objetivos principales de este trabajo es caracterizar a los espacios topológicos bien ordenables, y la siguiente proposición resulta fundamental para lograr nuestro objetivo.

**Proposición 1.1.9.** *Sea $(X, \preceq, \tau)$ un ETBO, entonces cualquier segmento inicial de $X$ es un ETBO.*

*Demostración.* Sea $A \subseteq X$ un segmento inicial no vacío. En particular tenemos que $A$ es un intervalo y por la Proposición 1.1.7 tenemos que $\tau_{(\preceq|_{A\times A})} =$

$(\tau_{\preceq})|_A$. Para terminar demostraremos que todo cerrado no vacío en A tiene un elemento mínimo respecto a $\preceq$.

Consideremos $B \subseteq A$ un cerrado no vacío, entonces existe $C \subseteq X$ cerrado tal que $C \cap A = B$. Sea $c = \min_{\preceq} C$, como $B$ es no vacío entonces existe $d \in B \subseteq A$ y como $B \subseteq C$ entonces $c \preceq d$. Así tenemos que $c \in A$ ya que $A$ es un segmento inicial, lo cual nos lleva a que $c \in B$ y como $B \subseteq C$ y $c = \min_{\preceq} C$, entonces $c = \min_{\preceq} B$. Con esto concluimos que $(X, \preceq|_{A\times A}, \tau|_A)$ es un $ETBO$.

□

**Definición 1.1.10.** *Diremos que $(X, \tau)$ es un espacio topológico debilmente ordenable y lo abreviaremos ETDO, si existe un orden total $\preceq$ sobre $X$ tal que $\tau_{\preceq} \subseteq \tau$. Si decimos que $(X, \preceq, \tau)$ es un ETDO, estaremos dando por hecho que $\preceq$ satisface esta definición.*

**Lema 1.1.11.** *Si $(X, \preceq, \tau)$ es un ETDO compacto, entonces $X$ es un ETO.*

*Demostración.* Como $\tau_{\preceq} \subseteq \tau$, entonces la identidad $id_X : (X\tau) \longrightarrow (X, \tau_{\preceq})$ es continua, pero $(X, \tau_{\preceq})$ siempre es $T_2$ y $(X, \tau)$ es compacto por hipótesis, lo cual garantiza que $id_X$ es un homeomorfismo. Así concluimos que $\tau = \tau_{\preceq}$. □

El siguiente teorema es una herramienta muy útil para saber cuando un espacio topológico es débilmente ordenable.

**Teorema 1.1.12.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, Supongamos que para cada $x \in X$ existen $m_x$ y $M_x$ conjuntos cerrados, tales que:*

- $m_x \cup M_x = X$.
- $m_x \cap M_x = \{x\}$.
- $x \neq y$ *y* $x \in m_y$ *entonces* $m_x \subseteq m_y \backslash \{y\}$.
- $x \neq y$ *y* $x \in M_y$ *entonces* $M_x \subseteq M_y \backslash \{y\}$.

*Entonces la relación $\preceq$ en $X$ dada por:*

$$x \preceq y \text{ si y solo si } x \in m_y$$

*es un orden total sobre $X$ y $\tau_{\preceq} \subseteq \tau$.*

*Demostración.* Primero probaremos que $\preceq$ es un orden total:

1) (Reflexividad) Para todo $x \in X$ se tiene que $x \in m_x \cap M_x \subseteq m_x$, y por lo tanto $x \preceq x$.

2) (Antisimetría) Supongamos que $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces $x \in m_y$ y $y \in m_x$. Notemos que $x = y$, ya que de lo contrario, se tendría por hipótesis que $y \in m_x \subseteq m_y \backslash \{y\}$, lo cual es una contradicción.

3) (Transitividad) Supongamos que $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \in m_y$ y $y \in m_z$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $y \neq z$. Así $m_y \subseteq m_z \backslash \{z\} \subseteq m_z$, por lo que $x \in m_z$, y por lo tanto $x \preceq z$.

4) (Dicotomía) Sean $x, y \in X$, y supongamos que $x \neq y$. Si $x \notin m_y$, como $m_y \cup M_y = X$ entonces $x \in M_y$, y así, $M_x \subseteq M_y \backslash \{y\}$. Lo anterior nos permite llegar a que $y \notin M_x$, y como $m_x \cup M_x = X$, entonces $y \in m_x$. Concluimos que $y \preceq x$.

Para terminar notemos que para cualquier $a \in X$ se tiene que $(-\infty, a)_{\preceq} = X \backslash M_a$ y $(a, \infty)_{\preceq} = X \backslash m_a$, los cuales son abiertos en $X$ ya que por hipótesis $m_a$ y $M_a$ son cerrados. Como la subbase canónica de $\tau_{\preceq}$ se queda contenida en $\tau$, entonces concluimos que $\tau_{\preceq} \subseteq \tau$. □

### 1.1.1. Conexidad en espacios ordenados

**Proposición 1.1.13.** *Sea $(X, \preceq, \tau)$ un ETO y $A \subseteq X$ no vacío. Si $A$ es conexo, entonces $A$ es un intervalo.*

*Demostración.* Supongamos que $A$ no es un intervalo, entonces existen $a, b \in A$ y $x \in X$ tales que $a \prec x \prec b$ pero $x \notin A$. Notemos que

$$(A \cap (-\infty, x)_{\preceq}) \cup (A \cap (x, \infty)_{\preceq}) = A \cap (X \backslash \{x\}) = A$$

$$(A \cap (-\infty, x)_{\preceq}) \cap (A \cap (x, \infty)_{\preceq}) = \emptyset$$

Además ambos conjuntos son abiertos en $A$, y como $A$ es conexo, se debe tener que alguno de los dos es vacío, pero esto es una contradicción ya que $a \in A \cap (-\infty, x)_{\preceq}$ y $b \in A \cap (x, \infty)_{\preceq}$. Así concluimos que $A$ es un intervalo. □

### 1.1.2. Compacidad en espacios ordenados

Ahora estudiaremos la compacidad en espacios topológicos ordenados. Lo interesante de esto, es que podemos caracterizar esta propiedad por medio de propiedades de orden relativamente fáciles de verificar.

**Teorema 1.1.14.** *Sea $(X, \preceq, \tau)$ un ETO. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *$X$ es compacto.*

2) *$X$ tiene máximo, mínimo y cumple el axioma del supremo.*

*Demostración.* $1 \Rightarrow 2$) Supongamos que $X$ no tiene máximo, entonces para todo $a \in X$ existe $b \in X$ tal que $a \prec b$. Sea $\mathcal{A} = \{(-\infty, b)_{\preceq} \mid b \in X\}$, por lo dicho anteriormente concluimos que $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta, por lo tanto tiene una subcubierta finita. Sean $b_1, b_2, \ldots, b_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n}(-\infty, b_i)_{\preceq}$, Sin pérdida de generalidad supongamos que $b_1 \preceq b_2 \cdots \preceq b_n$. Ahora notemos que para todo $i \leq n$ se cumple que $b_i \leq b_n$ y por lo tanto $b_n \notin (-\infty, b_i)_{\preceq}$, pero esto implica que $b_n \notin \bigcup_{i=1}^{n}(-\infty, b_i)_{\preceq}$, lo cual es una contradicción. De manera análoga podemos ver que $X$ tiene mínimo.

Ahora supongamos que $X$ no cumple el axioma del supremo, y consideremos $A \subseteq X$ no vacío y acotado superiormente tal que $A$ no tiene supremo. Notemos que para todo $x \in X$ se cumple que si $x$ no es cota superior de $A$ entonces existe $a \in A$ tal que $x \prec a$, y si $x$ es cota superior de $A$ entonces existe $y \in X$ tal que $y$ es cota superior de $A$ y $y \prec x$. Sea $M$ el conjunto de todas las cotas superiores de $A$, y sea

$$\mathcal{B} = \{(-\infty, a)_{\preceq} \mid a \in A\} \cup \{(b, \infty)_{\preceq} \mid b \in M\}$$

Por lo dicho anteriormente $\mathcal{B}$ es una cubierta abierta de $X$ y por lo tanto existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ y $b_1, b_2, \ldots, b_m \in M$ tales que

$$X = \Big(\bigcup_{i=1}^{n}(-\infty, a_i)_{\preceq}\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{m}(b_i, \infty)_{\preceq}\Big)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b_m \preceq b_{m-1} \preceq \cdots \preceq b_1$. Sea $c \in M$ tal que $c \prec b_m$, entonces para cualquier $i \leq m$ se cumple que

$c \notin (b_i, \infty)_{\preceq}$. Además, como $c$ es cota superior de $A$, para cualquier $i \leq n$ se cumple que $c \notin (-\infty, a_i)_{\preceq}$, y por lo tanto

$$c \notin \big(\bigcup_{i=1}^{n}(-\infty, a_i)_{\preceq}\big) \cup \big(\bigcup_{i=1}^{n}(b_i, \infty)_{\preceq}\big)$$

lo cual es una contradicción. Con esto concluimos que $X$ cumple el axioma del supremo.

$2 \Rightarrow 1$) Basta demostrar que toda cubierta abierta de $X$ formada por subbásicos tiene una subcubierta finita. Sea $\mathcal{A} \subseteq \{(-\infty, a)_{\preceq} \mid a \in X\} \cup \{(b, \infty)_{\preceq} \mid b \in X\}$ una cubierta abierta de $X$, entonces existen $M, N \subseteq X$ tales que

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, a)_{\preceq} \mid a \in M\} \cup \{(b, \infty)_{\preceq} \mid b \in N\}.$$

Notemos que $M \neq \emptyset$ y $N \neq \emptyset$ ya que para cualquier $a \in X$ se cumple que $\min_{\preceq} X \notin (a, \infty)_{\preceq}$ y $\max_{\preceq} X \notin (-\infty, a)_{\preceq}$. Como $X$ tiene máximo entonces $M$ está acotado superiormente, y por lo tanto tiene supremo. Sea $m$ el supremo de $M$, entonces para todo $a \in M$ se tiene que $m \notin (-\infty, a)$. Notemos que existe $c_0 \in N$ tal que $c_0 \prec m$, ya que de lo contrario para cualquier $d \in N$ se tendría que $m \notin (d, \infty)_{\preceq}$, lo que implicaría que

$$c_0 \notin \big(\bigcup_{a \in M}(-\infty, a)\big) \cup \big(\bigcup_{b \in N}(b, \infty)_{\preceq}\big) = \bigcup \mathcal{A} = X$$

lo cual es una contradicción. Como $c_0 \prec m$ y $m$ es el supremo de $M$, entonces existe $a_0 \in M$ tal que $c_0 \prec a_0 \preceq m$. Para terminar notemos que $\{(-\infty, a_0)_{\preceq}, (c_0, \infty)_{\preceq}\} \subseteq \mathcal{A}$ y $(-\infty, a_0)_{\preceq} \cup (c_0, \infty)_{\preceq} = X$.

□

**Corolario 1.1.15.** *Si $(X, \preceq, \tau)$ es un ETO compacto, entonces es un ETBO.*

*Demostración.* Sea $A \subseteq X$ cerrado no vacío, entonces $A$ esta acotado inferiormente por el mínimo de $X$. Como $X$ cumple el axioma del supremo y el ínfimo de un conjunto es igual al supremo de las cotas inferiores de dicho conjunto, entonces $X$ también cumple el axioma del ínfimo, y por lo tanto $A$ tiene ínfimo. Por la Proposición 1.1.5 se tiene que $\inf_{\preceq} A \in \overline{A} = A$, por lo tanto $\inf_{\preceq} A$ también es su mínimo.

□

**Corolario 1.1.16.** *Sea $(X, \preceq, \tau)$ un ETBO. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) *$X$ es compacto.*

2) *$X$ tiene máximo.*

*Demostración.* $1 \Rightarrow 2)$ Es consecuencia directa del Teorema 1.1.14.

$2 \Rightarrow 1)$ Como $X$ es un ETBO y $X$ es cerrado entonces $X$ tiene mínimo. Como por hipótesis $X$ tiene máximo, entonces solo falta ver que $X$ cumple el axioma del supremo. Sea $A \subseteq X$ no vacío y acotado superiormente y sea $M$ el conjunto de cotas superiores de $A$. Notemos que $x \notin M$ si y solo si existe $a \in A$ tal que $x \prec a$, y por lo tanto $M = X \setminus \bigcup_{a \in A} (-\infty, a)_{\preceq}$. De esta manera concluimos que $M$ es cerrado y por lo tanto tiene mínimo. Para terminar notemos que $\min_{\preceq} M$ es el supremo de $A$.

□

## 1.2. Hiperespacios

**Definición 1.2.1.** *Dados $(X, \tau)$ un espacio topológico y $n \in \omega$, definimos los siguientes conjuntos:*

- $F(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}$,
- $F_n(X) = \{A \in F(X) \mid |A| \leq n\}$,
- $[X]^n = \{A \subseteq X \mid |A| = n\}$,
- $[X]^\omega = \{A \subseteq X \mid |A| = \omega\}$,
- $[X]^{<\omega} = \{A \subseteq X \mid |A| < \omega\}$.

*y llamaremos a $F(X)$ el hiperespacio de cerrados de $X$.*

Algo que podemos notar en seguida es que si $(X, \tau)$ es un espacio $T_1$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X) = [X]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$.

**Definición 1.2.2.** *Sean* $(X, \tau)$ *un espacio topológico. Diremos que* $h : F(X) \longrightarrow X$ *es una selección si para todo* $A \in F(X)$ *se cumple que* $h(A) \in A$. *Diremos que* $g : F_2(X) \longrightarrow X$ *es una selección débil si para todo* $A \in F_2(X)$ *se cumple que* $g(A) \in A$. *Por último, diremos que* $f : [X]^2 \longrightarrow X$ *es una selección débil propia si para todo* $A \in [X]^2$ *se cumple que* $f(A) \in A$.

Nuestra intención es dotar a los conjuntos anteriormente definidos de topologías que nos permitan estudiar la continuidad de las funciones que acabamos de definir, y para hacerlo utilizaremos a los siguientes conjuntos.

**Definición 1.2.3.** *Sea* $(X, \tau)$ *un espacio topológico y sean* $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$. *Definimos*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle := \{B \in F(X) \mid B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ y } \forall i \leq n \ B \cap A_i \neq \emptyset\}.$$

*Para aligerar la notación, al conjunto* $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \cap F_n(X)$ *lo abreviaremos como* $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle_{F_n(X)}$.

Ahora estudiaremos algunas propiedades básicas sobre estos objetos.

**Proposición 1.2.4.** *Sea* $(X, \tau)$ *un espacio topológico y sean*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m \subseteq X$$

*entonces*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \cap \langle B_1, B_2, \ldots, B_m \rangle = \langle A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B, B_1 \cap A, \ldots, B_m \cap A \rangle,$$

*donde* $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *y* $B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$.

*Demostración.* $\subseteq$) Sea $F \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \cap \langle B_1, B_2, \ldots, B_m \rangle$, entonces $F \subseteq A$ y $F \subseteq B$. Por lo tanto

$$F \subseteq A \cap B = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \cup \bigcup_{i=1}^{m} (B_i \cap A).$$

Además, para cualesquiera $i \leq n$ y $j \leq m$ se cumple que $\emptyset \neq F \cap A_i = F \cap A_i \cap B$ y $\emptyset \neq F \cap B_j = F \cap B_j \cap A$ ya que $F \subseteq A \cap B$. Con esto concluimos que

$$F \in \langle A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B, B_1 \cap A, \ldots, B_m \cap A \rangle.$$

$\supseteq$) Sea $F \in \langle A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B, B_1 \cap A, \ldots, B_m \cap A\rangle$. Notemos que para todo $i \leq n$ se tiene que $\emptyset \neq F \cap A_i \cap B \subseteq F \cap A_i$, además

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B) \cup \bigcup_{i=1}^{m}(B_i \cap A) \subseteq A$$

y por lo tanto $F \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$. De manera análoga podemos concluir que $F \in \langle B_1, B_2, \ldots, B_m\rangle$, y por lo tanto $F \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle \cap \langle B_1, B_2, \ldots, B_m\rangle$. $\square$

Como consecuencia directa de la proposición anterior tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.2.5.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$, entonces $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle = \langle A_1, X\rangle \cap \langle A_2, X\rangle \cap \ldots \cap \langle A_n, X\rangle \cap \langle \bigcup_{i=1}^{n} A_i\rangle$*

**Proposición 1.2.6.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico y sea $A \subseteq X$, entonces:*

1) $F(X)\backslash\langle A\rangle = \langle X\backslash A, X\rangle$

2) $F(X)\backslash\langle A, X\rangle = \langle X\backslash A\rangle$

*Demostración.* 1) Sea $B \in F(X)$ entonces $B \subseteq X = X \cup (X\backslash A)$ y $\emptyset \neq B = B \cap X$. Notemos que $B \in F(X)\backslash\langle A\rangle$ si y solo si $B \nsubseteq A$, lo cual pasa si y solamente si $B \cap (X\backslash A) \neq \emptyset$, pero debido a la observación anterior, esto último es equivalente a decir que $B \in \langle X\backslash A, X\rangle$. Concluimos que $F(X)\backslash\langle A\rangle = \langle X\backslash A, X\rangle$.

2) Notemos que por el primer inciso tenemos que

$$\langle A, X\rangle = \langle X\backslash(X\backslash A), X\rangle = F(X)\backslash\langle X\backslash A\rangle$$

Tomando complemento obtenemos el resultado deseado.

$\square$

Como los conjuntos $\langle A\rangle$ y $\langle A, X\rangle$ serán muy utilizados a partir de ahora, los llamaremos $A^+$ y $A^-$, respectivamente.

### 1.2.1. Topología de Vietoris

**Definición 1.2.7.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Definimos la topología $\tau_V$ sobre $F(X)$ como la generada por la familia:*

$$\{\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \mid n \in \omega \text{ y } A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau\}.$$

*A esta topología le llamaremos la topología de Vietoris, también conocida como la topología Finita.*

Gracias a la Proposición 1.2.4, tenemos como consecuencia que la familia que crea a la topología de Vietoris, es una base para la misma. Por lo dicho anteriormente y por el Corolario 1.2.5, se sigue directamente que $\{A^+ \mid A \in \tau\} \cup \{B^- \mid B \in \tau\}$ forma una subbase para la topología de Vietoris. Estos hechos quedan plasmados en las siguientes proposiciones.

**Proposición 1.2.8.** *Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico, entonces la familia*

$$\{\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \mid n \in \omega \text{ y } A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau\}$$

*forma una base para $\tau_V$.*

**Proposición 1.2.9.** *$(X, \tau)$ es un espacio topológico entonces la familia*

$$\{A^+ \mid A \in \tau\} \cup \{B^- \mid B \in \tau\}$$

*forma una subbase para $\tau_V$.*

**Proposición 1.2.10.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, y $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado. Los siguientes conjuntos son cerrados en $(F(X), \tau_V)$:*

1) $A^+$

2) $A^-$

*Demostración.* Solo notemos que por la Proposición 1.2.6, tenemos que $F(X) \backslash A^+ = (X \backslash A)^-$ y $F(X) \backslash A^- = (X \backslash A)^+$, los cuales pertenecen a $\tau_V$. $\square$

**Corolario 1.2.11.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$ son cerrados, entonces $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$ es cerrado en $(F(X), \tau_V)$.*

*Demostración.* Tenemos que $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle = A_1^- \cap A_2^- \cap \ldots \cap A_n^- \cap (\bigcup_{i=1}^n A_i)^+$, los cuales son cerrados en $F(X)$ por la proposición anterior. $\square$

**Teorema 1.2.12.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico $T_1$ y $D \subseteq X$ denso, entonces $[D]^{<\omega}$ es denso en $(F(X), \tau_V)$.*

*Demostración.* Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ tales que $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ es no vacío. En particular $A_i$ es no vacío para cualquier $i \leq n$, y por lo tanto existe $x_i \in A_i \cap D$. Definamos $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in [D]^{<\omega}$. Para terminar notemos que $U \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ y que si $i \leq n$ entonces $\{x_i\} \subseteq U \cap A_i$, por lo que $U \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$. Con esto concluimos que $[D]^{<\omega}$ es denso. $\square$

**Proposición 1.2.13.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico $T_1$ y $n \in \omega$. Entonces la función $\pi_n : X^n \longrightarrow F_n(X)$ dada por $\pi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es continua (cuando a $F_n(X)$ lo equipamos con $\tau_V$).*

*Demostración.* Basta ver que la imagen inversa de cualquier subbásico es abierto en $X$. Sea $A \in \tau$, entonces $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in A^+_{F_n(X)}$ si y solo si para cualquier $i \leq n$ se cumple que $x_i \in A$. Con esto concluimos que $\pi_n^{-1}[A^+_{F_n(X)}] = A^n$, el cual es abierto en $X^n$. Para terminar notemos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in A^-_{F_n(X)}$ si y solo si existe $i \leq n$ tal que $x_i \in A$, lo cual nos permite concluir que $\pi_n^{-1}[A^+_{F_n(X)}] = (A \times X \times \ldots \times X) \cup (X \times A \times X \times \ldots \times X) \cup \ldots \cup (X \times \ldots \times X \times A)$, el cual es abierto en $X^n$. $\square$

**Corolario 1.2.14.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico $T_1$, $\{x_i\}_{i\in I}$ y $\{y_i\}_{i\in I}$ dos redes sobre $X$. Si $\{x_i\}_{i\in I}$ converge a un punto $x$ y $\{y_i\}_{i\in I}$ converge a un punto $y$ entonces la red $\{x_i, y_i\}_{i\in I}$ converge a $\{x, y\}$ en $(F(X), \tau_V)$.*

*Demostración.* Como $\{x_i\}_{i\in I}$ converge a $x$ y $\{y_i\}_{i\in I}$ converge a $y$, entonces $\{(x_i, y_i)\}_{i\in I}$ converge a $(x, y)$, y como $\pi_2$ es continua, concluimos que $\{\pi_2((x_i, y_i))\}_{i\in I} = \{x_i, y_i\}_{i\in I}$ converge a $\{x, y\}$. $\square$

**Proposición 1.2.15.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico $T_1$. La función $\pi_1 : (X, \tau) \longrightarrow (F_1(X), \tau_V)$ dada por:*

$$f(x) = \{x\}$$

*es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Evidentemente $\pi_1$ es biyectiva, además es continua por la Proposición 1.2.13. Para ver que $\pi_1$ es abierta solo notemos que si $A \in \tau$, entonces $x \in A$ si y solo si $\{x\} \subseteq A$, pero esto es exactamente lo mismo que decir que $\{x\} \in A^+_{F_1(X)}$. Con esto concluimos que $\pi_1[A] = A^+_{F_1(X)}$ y por lo tanto $\pi_1$ es abierta. $\square$

**Teorema 1.2.16.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, entonces la función $u : F(X) \times F(X) \longrightarrow F(X)$ dada por*

$$u(A, B) = A \cup B$$

*es continua respecto a $\tau_V$.*

*Demostración.* Probaremos la continuidad en un punto arbitrario. Sea $(A, B) \in F(X) \times F(X)$, y sean $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \tau$ tales que $u(A, B) = A \cup B \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle$. Consideramos a $M_A = \{V_i \mid i \leq n \text{ y } V_i \cap A \neq \emptyset\}$ y $M_B = \{V_i \mid i \leq n \text{ y } V_i \cap B \neq \emptyset\}$, notemos que como $A \cup B \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$ entonces $M_A$ y $M_B$ son no vacíos, y como $(A \cup B) \cap V_i \neq \emptyset$ para cualquier $i \leq n$, entonces $M_A \cup M_B = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $M_A = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ y $M_B = \{V_p, V_{p+1}, \ldots, V_n\}$ para $k, p \leq n$. Notemos entonces que $A \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle$ y $B \in \langle V_p, V_{p+1}, \ldots, V_n\rangle$. Además, si $F, J \in F(X)$ son tales que

$$F \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle \text{ y } J \in \langle V_p, V_{p+1}, \ldots, V_n\rangle$$

entonces $F \cup J \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^k V_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=p}^n V_i\right) = \bigcup_{i=1}^n V_i$ y para cada $i \leq n$ se tiene que si $i \leq k$ entonces $\emptyset \neq V_i \cap F \subseteq V_i \cap (F \cup J)$ y si $p \leq i$ entonces $\emptyset \neq V_i \cap J \subseteq V_i \cap (F \cup J)$, por lo que $F \cup J \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle$. Con lo anterior concluimos que

$$(A, B) \in \langle V_1, V_2 \ldots, V_k\rangle \times \langle V_p, V_{p+1}, \ldots, V_n\rangle$$

y

$$u[\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle \times \langle V_p, V_{p+1}, \ldots, V_n\rangle] \subseteq \langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle.$$

Por lo tanto $u$ es continua en $(A, B)$. $\square$

**Corolario 1.2.17.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $A, B \in F(X)$ tales que $B$ es conexo, entonces el conjunto $K = \{A \cup \{x\} \mid x \in B\}$ es un conexo en $(F(X), \tau_V)$.*

*Demostración.* Sea $u$ la función definida en la proposición anterior y $h : X \longrightarrow F(X) \times F(X)$ dada por $h(x) = (A, \{x\})$. Por la proposición anterior tenemos que $u$ es continua y $h$ es continua ya que lo es entrada a entrada; así, $u \circ h$ es continua. Para terminar notemos que como $B$ es conexo entonces $u \circ h[B] = K$ también lo es. $\square$

La siguiente proposición la utilizaremos constantemente, por lo cual es muy importante tenerla siempre en mente.

**Proposición 1.2.18.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $a, b \in X$ distintos y $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ tales que $\{a, b\} \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$. Entonces existen $A, B \in \tau$ tales que $a \in A$, $b \in B$ y $\{a, b\} \in \langle A, B \rangle \subseteq \langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$.*

*Demostración.* Sea $O = \{A_i \mid i \leq n \text{ y } a \in A_i\}$ y $P = \{A_i \mid i \leq n \text{ y } b \in A_i\}$. Entonces $O$ y $P$ son distintos del vacío ya que $\{a, b\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$, además $O \cup P = \{A_i \mid i \leq n\}$ ya que para todo $i \leq n$ se tiene que $A_i \cap \{a, b\} \neq \emptyset$. Sean $A = \bigcap O$ y $B = \bigcap P$, notemos que $a \in A$ y $b \in B$, por lo tanto $\{a, b\} \cap B \neq \emptyset$, $\{a, b\} \cap A \neq \emptyset$ y $\{a, b\} \subseteq A \cup B$ y así, $\{a, b\} \in \langle A, B \rangle$. Ahora tomemos $F \in \langle A, B \rangle$, como $A = \bigcap O$ y $B = \bigcap P$ entonces para cualquier $M \in O$ y $N \in P$ se cumple que $\emptyset \neq F \cap A \subseteq F \cap M$ y $\emptyset \neq F \cap B \subseteq F \cap N$. Como $O \cup P = \{A_i \mid i \leq n\}$, entonces concluimos que $\emptyset \neq F \cap A_i$ para todo $i \leq n$. Por último notemos que $A \subseteq A_i$ y $B \subseteq A_j$ para algunos $i, j \leq n$, por lo tanto $F \subseteq A \cup B \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ y así, $F \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$. De esta manera tenemos que $\{a, b\} \in \langle A, B \rangle \subseteq \langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$. $\square$

### 1.2.2. Topología de Fell

**Definición 1.2.19.** *Sea $(X.\tau)$ un espacio topológico $T_1$. Definimos la topología $\tau_F$ sobre $F(X)$ como la generada por la siguiente subbase:*

$$\{\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \mid n \in \omega,\ A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau \ \text{ y } X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ es compacto}\}$$

*A esta topología le llamaremos la topología de Fell.*

Notemos que $\tau_F \subseteq \tau_V$, y como todo cerrado en un compacto es compacto, entonces si $X$ es compacto tendremos que $\tau_F = \tau_V$.

Al igual que con la topología de Vietoris, resulta que la familia a partir de la cual construimos la topología de Fell es una base para dicha topología. La demostración es básicamente la misma, pero requiere una mayor argumentación debido a la condición de compacidad que imponemos sobre los elementos.

**Proposición 1.2.20.** *Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico entonces la familia*

$$\mathcal{A} = \{\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \mid n \in \omega \text{ y } A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau \text{ y } X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ es compacto}\}$$

*forma una base para $\tau_F$.*

*Demostración.* Basta mostrar que la intersección de dos elementos de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m \subseteq X$ tales que $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son compactos, donde $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$. Por la Proposición 1.2.4 tenemos que

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \cap \langle B_1, B_2, \ldots, B_m \rangle = \langle A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B, B_1 \cap A, \ldots, B_m \cap A \rangle$$

También notemos que

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \cup \bigcup_{i=1}^{m} (B_i \cap A) = (A \cap B) \cup (A \cap B) = A \cap B$$

y por lo tanto

$$X \setminus \big( \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \cup \bigcup_{i=1}^{m} (B_i \cap A) \big) = X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

el cual es compacto por ser unión de dos compactos. Así, $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle \cap \langle B_1, B_2, \ldots, B_m \rangle \in \mathcal{A}$, y con esto concluimos que $\mathcal{A}$ es una base para $\tau_F$. □

## 1.3. Espacios de Mrówka-Isbell

**Definición 1.3.1.** *Sea $\mathcal{M} \subseteq [X]^\omega$ no vacío, diremos que $\mathcal{M}$ es una familia casi ajena, si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}$ distintos, se tiene que*

$$|A \cap B| < \omega$$

*A estas familias también les llamaremos AD por sus siglas en inglés (Almost disjoint).*

**Definición 1.3.2.** *Sea $\mathcal{M} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia casi ajena. Definimos $\Psi(\mathcal{M}) = \omega \cup \mathcal{M}$. En $\Psi(\mathcal{M})$ definiremos una topología $\tau$ de la siguiente forma:*

*Dado $x \in \omega \cup \mathcal{M}$, si $x \in \omega$ entonces $\{\{x\}\}$ es una base local para $x$; si $x \in \mathcal{M}$ entonces una base local para $x$ será la familia*

$$\{\{x\} \cup x \backslash n \mid n \in \omega\}.$$

*A $\Psi(\mathcal{M})$ equipado con la topología antes mencionada le llamaremos el espacio de Mrówka-Isbell asociado a $\mathcal{M}$.*

**Proposición 1.3.3.** *Sea $\mathcal{M} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia casi ajena, entonces $\Psi(\mathcal{M})$ es $T_2$.*

*Demostración.* Sean $x, y \in \Psi(\mathcal{M})$ distintos. Tenemos tres casos:

1) Si $x, y \in \omega$ entonces $\{x\}$ y $\{y\}$ son dos abiertos que tienen a $x$ y $y$ respectivamente, y tales que $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.

2) Si $x \in \omega$ y $y \in \mathcal{M}$ entonces $\{y\} \cup y \backslash (x+1)$ es un abierto que tiene a $y$ y además $(\{y\} \cup y \backslash (x+1)) \cap \{x\} = \emptyset$.

3) Si $x, y \in \mathcal{M}$ entonces $x \cap y$ es finito, por lo tanto podemos considerar a $n = \min\{m \in \omega \mid x \cap y \subseteq m\}$. Notemos que $\{x\} \cup x \backslash n$ y $\{y\} \cup y \backslash n$ son dos abiertos que tienen a $x$ y $y$ respectivamente y tales que $(\{x\} \cup x \backslash n) \cap (\{y\} \cup y \backslash n) = \emptyset$.

Con esto concluimos que $\Psi(\mathcal{M})$ es $T_2$. □

**Proposición 1.3.4.** *Sea $\mathcal{M} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia casi ajena, entonces $\Psi(\mathcal{M})$ es localmente compacto.*

*Demostración.* Sea $x \in \Psi(\mathcal{M})$. Si $x \in \omega$ entonces $\{x\}$ es una vecindad compacta de $x$. Por otro lado, si $x \in \mathcal{M}$ entonces afirmamos que $\{x\} \cup x$ es una vecindad compacta de $x$. Efectivamente, ya que dada $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de $\{x\} \cup x$, entonces existe $B_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in B_x$, y así, existe $n \in \omega$ tal que $(\{x\} \cup x \backslash n) \subseteq B_x$. Para cada $y \in x$ tal que $y < n$ sea $B_y \in \mathcal{A}$ tal que $y \in B_y$. Notemos entonces que el conjunto $\{B_y \mid y \in x \text{ y } y < n\} \cup \{B_x\}$ es finito y es una subcubierta. □

## 1.4. Forcing

En esta sección definiremos lo que es un forcing. Aunque normalmente los forcings son utilizados para cuestiones de independencia de enunciados en ZFC, en este trabajo solo los utilizaremos para construir estructuras y dar isomorfismos.

**Definición 1.4.1.** *Decimos que $\mathbb{P} = (P, \preceq, 1_{\mathbb{P}})$ es un forcing, si $(P, \preceq)$ es un orden parcial y $1_{\mathbb{P}} \in P$ y es máximo respecto a $\preceq$.*

**Definición 1.4.2.** *Sea $\mathbb{P} = (P, \preceq, 1_{\mathbb{P}})$ un forcing. Decimos que $D \subseteq P$ es denso si y solo si para todo $x \in P$ existe $y \in D$ tal que $y \preceq x$.*

**Definición 1.4.3.** *Sea $\mathbb{P} = (P, \preceq, 1_{\mathbb{P}})$ un forcing, decimos que $G \subseteq P$ es un filtro si cumple las siguientes propiedades:*

- $1_{\mathbb{P}} \in G$.
- *Para cualesquiera $x, y \in G$ existe $z \in G$ tal que $z \preceq x$ y $z \preceq y$.*
- *Si $x \in G$ y $y \in X$ es tal que $x \preceq y$, entonces $y \in G$.*

El siguiente lema lo utilizaremos como substituto de la conocida técnica "back and forth", para construir una selección muy especial en el tercer capítulo.

**Lema 1.4.4.** *(Rasiowa–Sikorski) Sea $\mathbb{P} = (P, \preceq, 1_{\mathbb{P}})$ un forcing, y sea $\{G_i\}_{i\in\omega}$ una familia numerable de densos en $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro $F \subseteq P$, tal que $F \cap G_i \neq \emptyset$ para cualquier $i \in \omega$.*

*Demostración.* Sea $a_0 \in G_0$, como $G_1$ es denso, entonces existe $a_1 \in G_1$ tal que $a_1 \preceq a_0$. Ahora, como $G_2$ es denso, entonces existe $a_2 \in G_2$ tal que $a_2 \preceq a_1$. Si seguimos el procedimiento anterior, de manera recursiva podemos construir un conjunto $\{a_i\}_{i\in\omega}$ tal que $a_i \in G_i$ y $a_{i+1} \preceq a_i$ para cualquier $i \in \omega$, lo cual es equivalente a decir que para cualesquiera $i, j \in \omega$ se tiene que si $i \preceq j$ entonces $a_j \preceq a_i$. Sea $F = \{x \in P \mid \text{existe } i \in \omega \text{ tal que } a_i \preceq x\}$, entonces $a_i \in F$ para cualquier $i \in \omega$. Veamos que $F$ es un filtro:

1) $1_{\mathbb{P}} \in F$ ya que $a_0 \preceq 1_{\mathbb{P}}$.

2) Sean $x, y \preceq F$, entonces existen $i, j \in \omega$ tales que $a_i \preceq x$ y $a_j \preceq y$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $i \preceq j$. Notemos que $a_j \in F$ y como $a_j \preceq a_i$, entonces $a_j \preceq x$ y $a_j \preceq y$.

3) Sea $x \in F$ y $x \preceq y$. Como $x \in F$ entonces existe $i \in \omega$ tal que $a_i \preceq x$, por lo tanto $a_i \preceq y$ y así $y \in F$.

Por lo tanto, $F$ es un filtro y para cualquier $i \in \omega$ se tiene que $\emptyset \neq \{a_i\} \subseteq F \cap G_i$. $\square$

# Capítulo 2

# Selecciones continuas

Empecemos con una definición:

**Definición 2.0.1. (Selección continua)** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $\mu$ una topología en $F(X)$ y $f : F(X) \longrightarrow X$ una selección. Diremos que $f$ es una selección $\mu$-continua si $f$ es continua respecto a $\mu$; y en el caso particular en el que $\mu = \tau_V$ diremos simplemente que $f$ es una selección continua.*

El objetivo principal de este capítulo será el estudio de las selecciones continuas y la caracterización de los $ETO$s compactos como los únicos espacios compactos y $T_2$ que admiten selecciones $\tau_V$-continuas. Así mismo caracterizaremos a los $ETBO$s como los únicos espacios $T_2$ que admiten selecciones $\tau_F$-continuas. Para hacer lo anterior es muy importante poder entender la relación que hay entre los órdenes y las selecciones, por lo tanto el primer ejemplo que daremos será el de una selección $\tau_F$-continua muy especial, la función mínimo.

**Proposición 2.0.2.** *Sea $(X, \leq_\tau, \tau)$ un $ETBO$, entonces la función* $\text{mín}_\leq :$ *$F(X) \longrightarrow X$ es una selección $\tau_F$-continua.*

*Demostración.* Por definición de mín se tiene que para todo $A \in F(X)$, $\text{mín}(A)_\leq \in A$. Para probar la continuidad consideremos $A \in F(X)$ y $a, b \in X$ tales que $\text{mín}_\leq(A) \in (a, b)_\leq$. Notemos que $a < \text{mín}_\leq(A)$. Así, para todo $x \in A$ se tiene que $a < x$ y por lo tanto $A \subseteq (a, \infty)_\leq$. Si $\mathcal{B} = \langle (a, b)_\leq, (a, \infty)_\leq \rangle$, por la observación anterior tenemos que $A \in \mathcal{B}$. Ahora, si $F \in \mathcal{B}$ entonces $F \subseteq (a, b)_\leq \cup (a, \infty)_\leq = (a, \infty)_\leq$, y por lo tanto $a < \text{mín}_\leq(F)$. Por otro lado $F \cap (a, b)_\leq \neq \emptyset$, por lo que existe existe $x \in F$ tal que $x < b$, y por lo tanto $\text{mín}_\leq(F) < b$. Así, $\text{mín}_\leq(F) \in (a, b)_\leq$, lo cual nos permite concluir que $\text{mín}_{\leq}[\mathcal{B}] \subseteq (a,b)_{\leq}$, para terminar notemos que $\mathcal{B} \in \tau_F$ ya que $(a,b)_{\leq}, (a,\infty)_{\leq} \in \tau$ y $X \backslash ((a,b)_{\leq} \cup (a,\infty)_{\leq}) = X \backslash (a,\infty)_{\leq} = (-\infty, a]_{\leq}$ el cual es compacto en $X$ por el Corolario 1.1.16.

$\square$

**Corolario 2.0.3.** *Sea $(X, \leq_{\tau}, \tau)$ un ETBO, entonces la función* $\text{mín} : F(X) \longrightarrow X$ *es una selección $\tau_V$-continua.*

*Demostración.* Como $X$ es un ETBO, en particular es $T_2$. Lo dicho anteriormente implica que $\tau_F \subseteq \tau_V$, y como por la Proposición 2.0.2 tenemos que $\text{mín} : F(X) \longrightarrow X$ es continua respecto a $\tau_F$, también es continua respecto a $\tau_V$. $\square$

**Definición 2.0.4. (Selección continua débil)** *Sean $(X,\tau)$ un espacio topológico, $\mu$ una topología en $F(X)$ y sea $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección débil. Diremos que $f$ es una selección $\mu$-continua débil si $f$ es continua respecto a $\mu$ restringida a $F_2(X)$; y en el caso particular en el que $\mu = \tau_V$ diremos simplemente que $f$ es una selección continua débil.*

Notemos que si $X$ es un espacio Hausdorff y $f : F(X) \longrightarrow X$ es una selección $\mu$-continua, entonces $f|_{F_2(X)}$ es una selección $\mu$-continua débil. Consecuencia de lo anterior tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.0.5.** *Sea $(X, \leq_{\tau}, \tau)$ un ETBO, entonces la función* $\text{mín}_2 : F_2(X) \longrightarrow X$*, dada por* $\text{mín}_2(A) = \text{mín}_{\leq_{\tau}}(A)$ *es una selección continua débil.*

*Demostración.* Basta observar que $\text{mín}_2 = \text{mín}_{\leq_{\tau}}|_{F_2(X)}$.

$\square$

## 2.1. Equivalencias importantes

Si $(X,\tau)$ es un espacio topológico, $x \in X$ y $\{x\} \in F_2(X)$, entonces cualquier selección continua débil $f : F_2(X) :\longrightarrow X$ tiene la propiedad de que $f(\{x\}) = x$, hecho que nos hace pensar que los unitarios no juegan un papel importante en la continuidad de una selección débil. Dicha corazonada se ve reflejada en la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.1.** *Sean $(X,\tau)$ un espacio topológico y $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección débil. Si $x \in X$ es tal que $\{x\} \in F_2(X)$, entonces $f$ es $\tau_V$-continua en $\{x\}$.*

*Demostración.* Sea $A \in \tau$ tal que $x \in A$, notemos que $\langle A \rangle_{F_2(X)}$ es un abierto en $F_2(X)$ que tiene a $\{x\}$ y para cualquier $\{z, w\} \in \langle A \rangle_{F_2(X)}$ se cumple que $\{z, w\} \subseteq A$. Así, al ser $f$ una selección débil, se cumple que $f(\{z, w\}) \in \{z, w\} \subseteq A$. Concluimos que $f[\langle A \rangle_{F_2(X)}] \subseteq A$, y por lo tanto $f$ es $\tau_V$-continua en $\{x\}$. $\square$

Motivados por la proposición anterior llegamos a la siguiente definición.

**Definición 2.1.2. (Selección continua débil propia)** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $\mu$ una topología en $[X]^2$ y sea $f : [X]^2 \longrightarrow X$ una selección débil propia. Diremos que $f$ es una selección $\mu$-continua débil propia si $f$ es continua respecto a $\mu$ restringida a $[X]^2$; en el caso particular en el que $\mu = \tau_V$ diremos simplemente que f es una selección continua débil propia y si no hay riesgo de confusión la llamaremos simplemente una selección continua débil.*

La Proposición 2.1.1 unida con la Definición 2.1.2 nos arroja un resultado básico pero que nos permitirá trabajar de forma más cómoda según la situación.

**Teorema 2.1.3.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico $T_2$ y $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección débil. $f$ es una selección continua débil si y solo si $g = f|_{[X]^2}$ es una selección continua débil propia.*

*Demostración.* $\Rightarrow$) Es directo.

$\Leftarrow$)Supongamos que $g$ es una selección continua débil propia. Gracias a la Proposición 2.1.1 solo falta ver que $f$ es continua en los puntos de la forma $\{x, y\}$ con $\{x, y\} \in [X]^2$. Sean $\{x, y\} \in [X]^2$ y $D \in \tau$ tal que $f(\{x, y\}) \in D$, entonces existen $A, B \in \tau$ ajenos tales que $x \in A, y \in B$ y $g[\langle A, B \rangle_{[X]^2}] \subseteq D$. Notemos que $\{x, y\} \in \langle A, B \rangle_{F_2(X)}$. Ahora tomemos $\{z, w\} \in \langle A, B \rangle_{F_2(X)}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z \in A$ y $w \in B$, como $A \cap B = \emptyset$ entonces $z \neq w$ y por lo tanto $\{z, w\} \in \langle A, B \rangle_{[X]^2}$, así, $f(\{z, w\}) = g(\{z, w\}) \in D$. Concluimos que $f[\langle A, B \rangle_{F_2(X)}] \subseteq D$, y por lo tanto $f$ es continua en $\{x, y\}$. Como $f$ es continua en todos sus puntos, entonces $f$ es una selección continua débil. $\square$

**Corolario 2.1.4.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico $T_2$ y $f : [X]^2 \longrightarrow X$ una selección débil propia. $f$ es una selección continua débil propia si y solo si $g = f \cup \pi_1$ es una selección continua débil propia.*

*Demostración.* $\Rightarrow$) Si $f$ es una selección continua débil propia, entonces $g$ es una selección débil, y cumple que $g|_{[X]^2} = f$ es una selección continua débil propia. Por el Teorema 2.1.3 concluimos que $g$ es una selección continua débil.

$\Leftarrow$) Es directo.

□

Los resultados anteriores nos dicen que en esencia es lo mismo trabajar con selecciones continuas débiles y selecciones continuas débiles propias, es algo así como cuando trabajamos con órdenes parciales u órdenes parciales estrictos. A lo largo de este capítulo trabajaremos con selecciones continuas débiles porque la mayoría de las veces no nos interesará saber si trabajamos con parejas de puntos distintos, en cambio, en el capítulo siguiente, las construcciones que daremos serán más cortas si trabajamos con selecciones continuas débiles propias.

La siguiente sección esta enfocada principalmente a teoremas sobre selecciones continuas débiles (no propias). Varias de las definiciones y resultados que veremos tienen su equivalente para la selecciones continuas débiles propias, pero debido a lo observado anteriormente, trabajaremos principalmente con selecciones continuas débiles, y nos limitaremos a reescribir las que nos sean de utilidad en el siguiente capítulo.

## 2.2. Resultados Básicos

A continuación definiremos lo que es una relación de selección, cosa que nos permitirá hacer más ligero nuestro trabajo mediante el uso de una notación adecuada y también poder seguir comparando la relación entre las selecciones y los órdenes.

**Definición 2.2.1. (Relación de selección)** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, y sea $f$ una selección débil. Definimos la relación $\rightarrow_f \subseteq X^2$, como sigue:*

$$\textit{Dados } x, y \in X,\ x \rightarrow_f y \textit{ si y solo si } f(\{x, y\}) = y.$$

*Si $x \rightarrow_f y$, diremos que $x$ es* **mayor** *que $y$ respecto a $f$ o diremos que $x$* **domina** *a $y$ respecto a $f$.*
*Dada $R \subseteq X^2$ una relación, diremos que $R$ es una relación de selección si*

*existe $f : F_2(X) \longrightarrow X$, una selección débil, tal que $\rightarrow_f = R$. Utilizaremos la misma notación cuando hablemos de selecciones continuas débiles propias.*

Notemos que las relaciones de selección son antisimétricas y cuando $X$ es $T_1$ también son dicotómicas. Esto ya nos está hablando de lo mucho que se parecen las selecciones a los órdenes, pero más allá de eso, la notación nos sugiere otra manera de imaginar (y dibujar) a las selecciones débiles; como gráficas dirigidas.

La siguiente proposición es una importante caracterización de las relaciónes de selección.

**Definición 2.2.2.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección $\tau_V$-continua débil. Dado $x \in X$ definimos los siguientes conjuntos:*

- $(-\infty, x)_f = \{a \in X \mid a \neq x \text{ y } x \rightarrow_f a\}$
- $(x, \infty)_f = \{a \in X \mid a \neq x \text{ y } a \rightarrow_f x\}$
- $(-\infty, x]_f = \{a \in X \mid x \rightarrow_f a\}$
- $[x, \infty)_f = \{a \in X \mid a \rightarrow_f x\}$

Como consecuencia directa de la definición anterior, tenemos que si $(X, \tau)$ es $T_1$ y si $x \in X$ entonces las siguientes igualdades y contenciones se cumplen:

- $X \backslash (-\infty, x)_f = [x, \infty)_f$
- $X \backslash (x, \infty)_f = (-\infty, x]_f$
- $(x, \infty)_f \subseteq [x, \infty)_f$
- $(-\infty, x)_f \subseteq (-\infty, x]_f$
- $(x, \infty)_f \cap (-\infty, x)_f = \emptyset$
- $[x, \infty)_f \cup (-\infty, x]_f = X$
- $[x, \infty)_f \cap (-\infty, x]_f = \{x\}$
- $(-\infty, x) \cup (x, \infty)_f = X \backslash \{x\}$

Cuando empecemos con la tarea de caracterizar a los $ETBO$s como los únicos espacios $T_2$ que admiten selecciones $\tau_F$-continuas, estaremos preguntándole constantemente a las selecciones sobre mínimos y máximos en órdenes "ocultos".

**Definición 2.2.3. (Máximos y mínimos)** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $A \subseteq X$, $x \in X$ y $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección débil. Decimos que $x$ es un $f$-máximo ($f$-mínimo) de $A$ si y solo si $x \in A$ y $A \cap (x, \infty)_f = \emptyset$ ( $A \cap (-\infty, x)_f = \emptyset$ ). Si A=X diremos simplemente que $x$ es un f-máximo (f-mínimo).*

**Definición 2.2.4.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y sea $f$ una selección $\tau_V$-continua débil. Si $A, B \subseteq X$, diremos que $A$ domina a $B$ respecto a $f$ (y lo escribiremos $A \rightrightarrows_f B$) si y solo si para todo $x \in A$ y para todo $y \in B$, $x$ domina a $y$ respecto a f. Utilizaremos la misma notación al hablar de selecciones continuas débiles propias.*

**Proposición 2.2.5.** *Sean $(X, \tau)$ es un espacio topológico, $f$ una selección $\tau_V$-continua débil y $A, B \subseteq X$ tales que $A \rightrightarrows_f B$. Si $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, entonces $C \rightrightarrows_f D$.*

*Demostración.* Dados $x \in C$ y $y \in D$, tenemos en particular que $x \in A$ y $y \in B$ y por lo tanto $x \rightarrow_f y$, lo que por definición quiere decir que $C \rightrightarrows_f D$. $\square$

**Definición 2.2.6.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico $T_1$ y $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección débil. Dados $A, B \subseteq X$, diremos que $A$ esta alineado con $B$ respecto a $f$ si y solo si $A \rightrightarrows_f B$ o $B \rightrightarrows_f A$, dicha relación la denotaremos por $A||_f B$. Utilizaremos la misma notación al hablar de selecciones continuas débiles propias.*

La siguiente proposición es consecuencia directa de la Proposición 2.2.5.

**Proposición 2.2.7.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico $T_1$, $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección débil y $A, B \subseteq X$ tales que $A||_f B$. Si $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, entonces $C||_f D$.*

Al momento de definir una relación de selección, lo que hicimos fue dar una manera de pasar del lenguaje de función al de relación. La siguiente proposición nos permitirá revertir ese proceso y con ello entender mejor a las selecciones débiles.

**Proposición 2.2.8.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico $T_1$ y $\mathcal{S} \subseteq X^2$ una relación dicotómica y antisimétrica. La función $f_{\mathcal{S}} : F_2(X) \longrightarrow X$ dada por:*

$$f_{\mathcal{S}}(\{x,y\}) = \begin{cases} y & si\ (x,y) \in \mathcal{S} \\ x & si\ (y,x) \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{2.1}$$

*está bien definida y es una selección débil. Además $\rightarrow_{f_{\mathcal{S}}} = \mathcal{S}$.*

*Demostración.* Notemos que por ser $\mathcal{S}$ dicotómica entonces para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $(x,y) \in \mathcal{S}$ o $(y,x) \in \mathcal{S}$, entonces $f_{\mathcal{S}}$ está definida para cualquier elemento de $F_2(X)$. Además, por ser $\mathcal{S}$ antisimétrica se tiene que si $(x,y), (y,x) \in \mathcal{S}$ entonces $x = y$. Así, para cualquier $\{x,y\} \in F_2(X)$ tenemos que $f_{\mathcal{S}}(\{x,y\})$ está definida de la misma manera que $f_{\mathcal{S}}(\{y,x\})$, y por lo tanto concluimos que $f_{\mathcal{S}}$ está bien definida. Falta ver que $f_{\mathcal{S}}(\{x,y\}) \in \{x,y\}$, pero esto es consecuencia directa de la definición de $f_{\mathcal{S}}$.

Para ver que $\rightarrow_{f_{\mathcal{S}}} = \mathcal{S}$ notemos que $(x,y) \in \mathcal{S}$ si y solo si $f_{\mathcal{S}}((x,y)) = y$, lo cual sucede si y solo si $(x,y) \in \rightarrow_{f_{\mathcal{S}}}$.

□

A continuación daremos más criterios para verificar la continuidad de una selección, los cuales utilizaremos constantemente en lo que resta del texto.

**Proposición 2.2.9.** *Para $(X, \tau)$ un espacio $T_2$ y $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección débil, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*a) $f$ es continua;*

*b) La relación de selección $\rightarrow_f$ es cerrada en $X^2$;*

*c) Si $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $x \rightarrow_f y$ entonces existen abiertos ajenos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \rightrightarrows_f V$,*

*d) $g = f|_{[X]^2}$ es continua.*

*Demostración.*

a)⇒ b) Demostraremos que $X^2 \setminus \rightarrow_f$ es abierto. Sea $(x,y) \in X^2 \setminus \rightarrow_f$, entonces $f(\{x,y\}) \neq y$, por lo que $f(\{x,y\}) = x$. Lo primero que notamos es que $x \neq y$, ya que de lo contrario se tendría que $f(\{x,y\}) = x = y$, lo cual no sucede. Como $x \neq y$ y $X$ es $T_2$, entonces existen $U, V \subseteq X$

vecindades abiertas de $x$ y $y$ respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$, y como $f$ es continua, entonces existen $P, Q \subseteq X$ abiertos ajenos, tales que $x \in P$, $y \in Q$ y $f[\langle P, Q\rangle_{F_2(X)}] \subseteq U$. Sea $A = P \cap U$ y $B = Q \cap V$, y notemos que $f[\langle A, B\rangle_{F_2(X)}] \subseteq U$. Consideremos al abierto $A \times B$. y observemos que:

1. $x \in A$ y $y \in B$, y por lo tanto $(x, y) \in A \times B$.
2. dado $(z, t) \in A \times B$, como $A \cap B = \emptyset$ entonces $z \neq t$. También se tiene que $\{z, t\} \in \langle A, B\rangle_{F_2(X)}$, por lo que $f(\{z, t\}) \in U$. Como $t \notin U$ entonces $f(\{z, t\}) \neq t$, y por lo tanto $(z, t) \in X^2 \setminus \to_f$. Concluimos que $A \times B \subseteq X^2 \setminus \to_f$, lo cual implica que $X^2 \setminus \to_f$ es abierto.

b)$\Rightarrow$ c) Sean $x, y \in X$ distintos tales que $x \to_f y$, es decir $f(\{x, y\}) = y \neq x$. Entonces $(y, x) \in X^2 \setminus \to_f$, y como ese conjunto es abierto, existen $U, V \in X$ tales que $(y, x) \in V \times U \subseteq X^2 \setminus \to_f$, como $X$ es $T_2$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $U \cap V = \emptyset$. Para terminar tomemos $z \in V$ y $t \in U$, entonces $(z, t) \in V \times U \subseteq X^2 \setminus \to_f$. por lo tanto $f(\{z, t\}) \neq t$. Concluimos que $f(\{z, t\}) = z$, o equivalentemente $t \to_f z$. Esto implica que $U \rightrightarrows_f V$.

c)$\Rightarrow$ d) Sea $\{x, y\} \in [X]^2$, veremos que $g$ es continua en dicho punto. Sin pérdida de generalidad supongamos que $g(\{x, y\}) = f(\{x, y\}) = y$. Sea $A \in \tau$ tal que $g(\{x, y\}) \in A$, por $c$) existen $U, V$ abiertos ajenos tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \rightrightarrows_f V$. Notemos que $y \in A \cap V$, y por lo tanto $\{x, y\} \in \langle U, A \cap V\rangle_{[X]^2}$, además, si $\{z, w\} \in \langle U, A \cap V\rangle_{[X]^2}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z \in U$ y $w \in A \cap V$. Como $w \in V$, entonces $g(\{z, w\}) = w$ y como $w \in A$, entonces $g(\{z, w\}) \in A$. Así $g[\langle U, A \cap V\rangle_{[X]^2}] \subseteq A$, lo cual nos permite concluir que $g$ es continua en $\{x, y\}$.

Como lo anterior lo hicimos para $\{x, y\}$ arbitrario, entonces $g$ es continua.

d)$\Rightarrow$ a) Se probó en el Teorema 2.1.3.

$\square$

La equivalencia más poderosa y utilizada de la proposición anterior es la $c$), pues reduce el trabajo de verificar la continuidad a encontrar abiertos que se comporten bonito dado cualquier par de puntos. Intuitivamente lo que quiere decir dicha equivalencia es que una selección débil $f$ es continua si y solo si se cumple que dados $x$ y $y$ en nuestro espacio, si $x$ es menor que $y$ respecto a $f$ entonces los puntos cercanos a $x$ serán menores a los puntos cercanos a $y$ respecto a $f$.

El siguiente corolario realmente nos está hablando sobre la equivalencia entre la existencia de relaciones dicotómicas, antisimétricas y cerradas, con la existencia de selecciones continuas débiles. La razón por la que no incluimos dicho resultado en la sección anterior es por que no teníamos ni la notación ni las herramientas adecuadas para dar una prueba limpia.

**Corolario 2.2.10.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico $T_2$, si $\mathcal{S} \subseteq X^2$ es una relación dicotómica, antisimétrica y cerrada en $X^2$, entonces $f_{\mathcal{S}}$ es una selección continua débil.*

*Demostración.* Notemos que $x \to_{f_{\mathcal{S}}} y$ si y sólo si $f_{\mathcal{S}}(\{x, y\}) = y$ y esto pasa si y solo si $(x, y) \in \mathcal{S}$. Concluimos que $\to_{f_{\mathcal{S}}} = \mathcal{S}$, $\to_{f_{\mathcal{S}}}$ es cerrada y por lo tanto $f_{\mathcal{S}}$ es continua.

$\square$

El siguiente resultado es fundamental para probar casi todos los teoremas que siguen en este capítulo. Es bueno también resaltar que con este resultado se justifica más nuestra notación tan parecida a la de un intervalo abierto y un intervalo cerrado.

**Proposición 2.2.11.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio $T_1$, $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección $\tau_V$-continua débil y $x \in X$. Entonces los siguientes enunciados siempre se cumplen:*

1) *$(-\infty, x)_f$ es abierto y $[x, \infty)_f$ es cerrado.*

   *Además, si $(X, \tau)$ es $T_2$, entonces también se cumplirán:*

2) *$(x, \infty)_f$ es abierto y $(-\infty, x]_f$ es cerrado.*

*Demostración.* 1) Sea $y \in (-\infty, x)_f$ entonces $x \to_f y$ y $x \neq y$. Como $X$ es $T_1$ y $y \neq x$ entonces $X \backslash \{x\}$ es abierto y $y \in X \backslash \{x\}$. Ahora, como $f$ es continua entonces existen abiertos $U, V \subseteq X$ los cuales cumplen que $x \in U$, $y \in V$ y $f[\langle U, V \rangle_{F_2(X)}] \subseteq X \backslash \{x\}$. Notemos que para todo $z \in V$

se tiene que $\{x,z\} \in \langle U,V\rangle_{F_2(X)}$, y por lo tanto $f(\{x,z\}) \in X\backslash\{x\}$. Como $f$ es una selección concluimos que $f(\{x,z\}) = z$ y que $z \neq x$. Así $z \in (-\infty,x)_f$, y por lo tanto $V \subseteq (-\infty,x)_f$. Concluimos que $(-\infty,x)_f$ es abierto y consecuentemente $X\backslash(-\infty,x)_f = [x,\infty)_f$ es cerrado.

2) Sea $y \in (x,\infty)_f$ entonces $y \rightarrow_f x$ y $y \neq x$. Como $X$ es Hausdorff y $f$ es selección continua sabemos que existen $U,V \subseteq X$ tales que $x \in V$, $y \in U$ y $U \rightrightarrows_f V$. Como $X$ en particular es $T_1$, entonces $U\backslash\{x\}$ es abierto y $y \in U\backslash\{x\}$. Para terminar la prueba notemos que si $z \in U\backslash\{x\}$, entonces $z \rightarrow_f x$ y $z \neq x$; por lo tanto, $U\backslash\{x\} \subseteq (x,\infty)_f$. Así, concluimos que $(x,\infty)_f$ es abierto y consecuentemente $X\backslash(x,\infty)_f = (-\infty,x]$ es cerrado. $\square$

La notación de flechas que utilizamos para referirnos a selecciones continuas débiles, nos sugiere una manera de construir una selección débil nueva, a partir de una ya dada. El invertir las flechas, nos dará bajo ciertas condiciones una selección continua débil.

**Lema 2.2.12. (Inversión de flechas)** *Sea $(X,\tau)$ un espacio $T_2$ y sea $\mathcal{S} \subseteq X^2$ una relación de selección cerrada, entonces $\mathcal{S}^{-1}$ es también una relación de selección cerrada.*

*Demostración.* Sabemos que la función $f : X^2 \longrightarrow X^2$ dada por $f((x,y)) = (y,x)$ es un homeomorfismo, y como $\mathcal{S}$ es cerrada tenemos que $f[\mathcal{S}]$ también es cerrada. Notemos que $f[\mathcal{S}] = \{f((x,y)) \mid (x,y) \in \mathcal{S}\} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \mathcal{S}\} = \mathcal{S}^{-1}$. Para ver que $\mathcal{S}^{-1}$ es una relación de selección, gracias a la Proposición 2.2.8 solo queda mostrar que $\mathcal{S}^{-1}$ es dicotómica y antisimétrica. Para probar la dicotomía notemos que dados $(x,y) \in X^2$ se tiene que $(x,y) \in \mathcal{S}$ o $(y,x) \in \mathcal{S}$. Si $(x,y) \in \mathcal{S}$ entonces $(y,x) \in \mathcal{S}^{-1}$ y si $(y,x) \in \mathcal{S}$ entonces $(x,y) \in \mathcal{S}^{-1}$. Por último, para probar la antisimetría tomemos $x,y \in X$ tales que $(x,y),(y,x) \in \mathcal{S}^{-1}$, entonces $(y,x),(x,y) \in \mathcal{S}$ y por lo tanto $x = y$. $\square$

La proposición anterior nos dice algo muy curioso sobre las selecciones en espacios Hausdorff: las selecciones vienen por pares. Utilizando un lenguaje más adecuado podemos escribir el Lema de inversión de flechas como sigue.

**Lema 2.2.13.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio $T_2$ y sea $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección $\tau_V$-continua débil, entonces existe una única $g : F_2(X) \longrightarrow X$ selección $\tau_V$-continua débil tal que $g(\{x,y\}) = x$ si y solo si $f(\{x,y\}) = y$. A dicha $g$ le llamaremos $-f$.*

*Demostración.* Por la continuidad de $f$ sabemos que $\to_f$ es cerrada, por el Lema 2.2.12 tenemos que $\to_f^{-1}$ también lo es, y por lo tanto tenemos que $f_{\to_f^{-1}}$ es una selección débil $\tau_V$-continua. Notemos que

$$\begin{aligned} f_{\to_f^{-1}}(\{x,y\}) = x &\Leftrightarrow (y,x) \in \to_f^{-1} \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in \to_f \\ &\Leftrightarrow f(\{x,y\}) = y \end{aligned}$$

Entonces $f_{\to_f^{-1}}$ cumple las condiciones que buscamos, por lo tanto podemos definir a $g := f_{\to_f^{-1}}$. Para demostrar la unicidad tomemos $h$ una selección débil continua que cumpla las condiciones de la proposición, ahora tomemos $\{x,y\} \in F_2(X)$, entonces $g(\{x,y\}) = x$ si y solo si $f(\{x,y\}) = y$, pero esto pasa solo cuando $h(\{x,y\}) = x$. Así concluimos que $h = g$.

□

Por fin hemos terminado de construir la teoría básica de las selecciones continuas débiles. Ahora estamos listos para probar resultados más interesantes.

### 2.2.1. Selecciones y conexidad.

**Teorema 2.2.14.** *Sean $(X,\tau)$ un espacio $T_2$ y $A \in F(X)$ conexo tal que $|A| \geq 2$. Si $a \in A \cap \overline{X \backslash A}$, entonces no existe ninguna selección continua débil f, tal que a es un f-máximo.*

*Demostración.* Lo haremos por contradicción. Supongamos que $f : F_2(X) \longrightarrow X$ es una selección $\tau_V$-continua tal que $a$ es un $f$-máximo. Por hipótesis existe $b \in A$ tal que $b \neq a$, y por ser $a$ un $f$-máximo tenemos que $a \to_f b$. Como $X$ es $T_2$ podemos usar la Proposición 2.2.9 para encontrar $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U$, $b \in V$ y $U \rightrightarrows_f V$. Como $a \in \overline{X \backslash A}$ entonces existe $c \in (X \backslash A) \cap U$, en particular tenemos que $c \to_f b$, y como $c \in X \backslash A$ entonces $a \neq c$ y $c \neq b$, así $b \in (-\infty, c)_f$ y $a \in (c, \infty)_f$. Entonces $(-\infty, c)_f \cap A$ y $(c, \infty)_f \cap A$ son dos abiertos no vacíos en $A$ tales que $((c,\infty)_f \cap A) \cap ((-\infty, c)_f \cap A) = \emptyset$ y $((c,\infty)_f \cap A)) \cup ((-\infty, c)_f \cap A) = ((c,\infty)_f \cup (-\infty, c)_f) \cap A = (X \backslash \{c\}) \cap A = A$, por lo tanto $A$ es disconexo, lo cual es una contradicción ya que supusimos que A era conexo. Concluimos que no existe una selección continua débil $f$, tal que $a$ es un $f$-máximo. □

**Corolario 2.2.15.** *Sean* $(X,\tau)$ *un espacio* $T_2$ *y* $A \in F(X)$ *conexo tal que* $|A| \geq 2$. *Si* $a \in A \cap \overline{X \setminus A}$, *entonces no existe ninguna selección continua débil* $f$, *tal que* $a$ *es un* $f$-*mínimo.*

*Demostración.* Sea $f$ una selección $\tau_V$-continua débil, basta encontrar un $b \in X$ tal que $b \neq a$ y $a \to_f b$. Consideremos a $-f$, por el teorema anterior $a$ no es $-f$-máximo entonces existe $b \in X$ tal que $b \neq a$ y $b \to_{-f} a$, por definición de $-f$ esto ocurre si y solo si $a \to_f b$.

$\square$

**Corolario 2.2.16.** *Sean* $(X,\tau)$ *un espacio Hausdorff,* $A \in F(X)$ *un cerrado conexo tal que* $|A| \geq 2$. *Si* $a \in A \cap \overline{X \setminus A}$, *y* $f : F(X) \longrightarrow X$ *es una selección* $\tau_V$-*continua entonces* $f^{-1}[\{a\}] \neq \{\{a\}\}$.

*Demostración.* Consideremos a $f|_{F_2(X)}$, por el teorema anterior sabemos que $a$ no es un $f|_{F_2(X)}$-máximo, y por lo tanto existe $b \in X \setminus \{a\}$ tal que

$$f|_{F_2(X)}(\{a,b\}) = a$$

entonces $\{\{a\}\} \subset \{\{a\},\{a,b\}\} \subseteq f|^{-1}_{F_2(X)}[\{a\}] \subseteq f^{-1}[\{a\}]$.

$\square$

**Proposición 2.2.17.** *Sean* $(X,\tau)$ *un espacio topológico* $T_2$, $f : F_2(X) \longrightarrow X$ *una selección* $\tau_V$-*continua débil y sean* $x,y,z \in X$ *tres puntos distintos, tales que* $x \to_f y \to_f z \to_f x$. *Entonces el conjunto* $(-\infty,y]_f \cap [x,\infty)_f$ *es un cerrado abierto en* $X$ *que separa a* $z$ *de* $\{x,y\}$.

*Demostración.* Notemos que como $x \neq y$ y $x \to_f y$ entonces $y \notin [x,\infty)_f$. De manera análoga podemos concluir que $x \notin (-\infty,y]_f$, y por lo tanto $\{x,y\} \subseteq X \setminus ((-\infty,y]_f \cap [x,\infty)_f)$. Así,

$$\begin{aligned}(-\infty,y]_f \cap [x,\infty)_f &= (-\infty,y]_f \cap [x,\infty)_f \setminus \{x,y\} \\ &= ((-\infty,y]_f \setminus \{x,y\}) \cap ([x,\infty)_f \setminus \{x,y\}) \\ &= ((-\infty,y]_f \setminus \{y\}) \cap [x,\infty)_f \setminus \{x\}) \\ &= (-\infty,y)_f \cap (x,\infty)_f\end{aligned}$$

Por lo tanto $(-\infty,y]_f \cap [x,\infty)_f$ es abierto y cerrado. Por útlimo notemos que como $y \to_f z$ y $z \to_f x$ entonces $z \in (-\infty,y]_f \cap [x,\infty)_f$. $\square$

**Proposición 2.2.18.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio $T_2$ y conexo, si $f : F_2(X) \longrightarrow X$ es una selección continua débil entonces $\rightarrow_f$ es un orden total.*

*Demostración.* Ya mencionamos antes que $\rightarrow_f$ es dicotómica y antisimétrica, solo falta ver que es transitiva. Para esto tomemos $x, y, z \in X$ distintos dos a dos tales que $y \rightarrow_f z$ y $z \rightarrow_f x$. Si se diera que $x \rightarrow_f y$, entonces por la Proposición 2.2.17 $(-\infty, y]_f \cap [x, \infty)_f$ sería un abierto cerrado que separa a $z$ de $\{x, y\}$, esto implicaría que X es disconexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se debe dar que $y \rightarrow_f x$. Lo anterior garantiza que $\rightarrow_f$ es transitiva y por lo tanto un orden total.

□

### 2.2.2. Selecciones y compacidad local.

A partir de este momento trabajaremos con la compactación de Alexandroff de espacios localmente compactos. Por lo tanto, si $(X, \tau)$ es un espacio localmente compacto, denotaremos por $\alpha X := X \cup \{\alpha\}$ a su compactación de Alexandroff, donde $\{\alpha\}$ es el residuo de dicha compactación.

Demostraremos un lema previo a la primera proposición de esta sección.

**Lema 2.2.19.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $p \in X$. Si $X$ no es compacto, entonces existe $F \in F(X)$ tal que $F$ no es compacto y $p \notin F$.*

*Demostración.* Supongamos que dicho $F$ no existe, y consideremos $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de $X$. Sea $B \in \mathcal{A}$ tal que $p \in B$. Notemos que $X \backslash B$ no tiene a $p$, y por lo tanto es compacto, por lo que existen $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ tales que $\{B_1, \ldots, B_n\}$ cubren a $X \backslash B$, y así, $\{B_1, \ldots, B_n\, B\}$ es una subcubierta de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ era una cubierta arbitraria, entonces $X$ es compacto, pero esto es una contradicción. Concluimos que existe $F \in F(X)$ tal que $F$ no es compacto y $p \notin F$. □

**Proposición 2.2.20.** *Si $(X, \tau)$ es un espacio $T_2$ y $f$ es una selección $\tau_F$-continua débil, entonces $X$ es localmente compacto.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ no es localmente compacto, entonces existe $p \in X$ tal que $p$ no tiene vecindades compactas. Sea $F \in F(X)$ tal que $F$ no es compacto y $p \notin F$, como $X \backslash F$ es vecindad abierta de $p$ y $f$ es continua respecto a $\tau_F$ entonces $f^{-1}[X \backslash F]$ es una vecindad abierta de $\{p\}$ en $(F_2(X), \tau_F)$, y por lo tanto existen $V_1, V_2, \ldots, V_n \subseteq X$ abiertos tales que:

1. $\{p\} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle_{F_2(X)} \subseteq f^{-1}[X \backslash F]$.

2. $V = X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ es compacto.

Notemos que $F \not\subseteq V$ ya que de lo contrario $F$ sería compacto, entonces $F \cap X \backslash V = F \cap (\bigcup_{i=1}^{n} V_i) \neq \emptyset$, por lo que existe $k \leq n$ tal que $F \cap V_k \neq \emptyset$.

Sea $q \in V_k \cap F$, como $p \notin F$ entonces $p \neq q$. Además, como para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que $\emptyset \neq \{p\} \cap V_j \subseteq \{p, q\} \cap V_j$ y $\{p, q\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ tendremos que $\{p, q\} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle_{F_2(X)} \subseteq f^{-1}[X \backslash F]$, y así $f(\{p, q\}) = p$. Ahora, como $f(\{p, q\}) = p \neq q = f(\{q\})$ y $X$ es $T_2$ entonces existen $U_1, \ldots, U_l, W_1, \ldots, W_r$ abiertos en $X$ tales que $X \backslash (\bigcup_{i=1}^{l} U_i)$ y $X \backslash (\bigcup_{i=1}^{r} W_i)$ son compactos, y cumplen que

$$\{q\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_l \rangle_{F_2(X)},$$

$$\{p, q\} \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_r \rangle_{F_2(X)} \text{ y}$$

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_l \rangle_{F_2(X)} \cap \langle W_1, W_2, \ldots, W_r \rangle_{F_2(X)} = \emptyset.$$

Consideremos el conjunto $W = \bigcap \{W_i | \ 1 \leq i \leq r \text{ y } p \in W_i\}$. Es directo que $p \in W$ y $W$ es abierto. Afirmamos que $W \subseteq X \backslash (\bigcup_{i=1}^{l} U_i)$. En efecto, si no fuera el caso tendríamos que existe $y \in W \cap (\bigcup_{i=1}^{l} U_i)$, como $q \in \bigcup_{i=1}^{l} U_i$ entonces $\{y, q\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} U_i$, además para todo $i$ tal que $1 \leq i \leq l$ se tiene que $\{q\} = U_i \cap \{q\} \subseteq U_i \cap \{y, q\}$, por lo que $\{y, q\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_l \rangle_{F_2(X)}$. Por otro lado tenemos que $\{y, q\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} W_i$, además para todo $j$ tal que $1 \leq j \leq r$ se tiene que $\{y\} \subseteq W_j \cap \{y, q\}$ si $W_j \in \{W_i | \ 1 \leq i \leq r \text{ y } p \in W_i\}$ y $\{q\} \in W_j \cap \{y, q\}$ en otro caso. Así $\{y, q\} \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_r \rangle_{F_2(X)}$, pero esto es una contradicción ya que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_l \rangle_{F_2(X)} \cap \langle W_1, W_2, \ldots, W_r \rangle_{F_2(X)} = \emptyset$.

Para terminar, notemos que como $W \subseteq X \backslash (\bigcup_{i=1}^{l} U_i)$, entonces se tiene que $\overline{W} \subseteq \overline{X \backslash (\bigcup_{i=1}^{l} U_i)} = X \backslash (\bigcup_{i=1}^{l} U_i)$, lo cual implica que $\overline{W}$ es compacto y por lo dicho anteriormente también es una vecindad de $p$, pero esto es una contradicción ya que supusimos que $p$ no tenía vecindades compactas. Concluimos que $X$ es localmente compacto. $\square$

**Teorema 2.2.21.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio $T_2$. Si $X$ tiene una selección $\tau_F$-continua débil entonces $\alpha X$ tiene una selección continua débil $g$, tal que $g^{-1}[\{\alpha\}] = \{\{\alpha\}\}$, es decir, $\alpha$ es un $g$-máximo.*

*Demostración.* Sea $f : F_2(X) \longrightarrow X$ una selección $\tau_F$-continua débil y definamos $g : F_2(\alpha X) \longrightarrow \alpha X$ de la siguiente manera:

$$g(\{x,y\}) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \{\alpha\} = \{x,y\} \\ f(\{x,y\} \cap X) & \text{si } \{y,x\} \cap X \neq \emptyset \end{cases} \tag{2.2}$$

Por construcción tenemos que para todo $\{x,y\} \in \alpha X$ se cumple que $g(\{x,y\}) \in \{x,y\}$ y $g^{-1}[\{\alpha\}] = \{\{\alpha\}\}$. Por la Proposición 2.1.1 sabemos que $g$ es continua en $\{\alpha\}$. Ahora, sea $\{x,y\} \in \alpha X$ tal que $\{x,y\} \cap X \neq \emptyset$ y sea $A \subseteq \alpha X$ abierto tal que $g(\{x,y\}) \in A$. Primero notemos que como $f$ es $\tau_F$-continua entonces existen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ abiertos en $X$ tales que $X \backslash (\bigcup_{i=1}^n V_i)$ es compacto y

$$\{x,y\} \cap X \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle_{F_2(X)} \subseteq f^{-1}[A \cap X]$$

Como $X \backslash (\bigcup_{i=1}^n V_i)$ es compacto entonces es cerrado en $\alpha X$; por lo tanto, $\alpha X \backslash (X \backslash (\bigcup_{i=1}^n V_i)) = (\bigcup_{i=1}^n V_i) \cup \{\alpha\}$ es abierto en $\alpha X$. Notemos además que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ también son abiertos en $\alpha X$. Consideremos

$$V = \langle V_1, V_2, \ldots, V_n, (\bigcup_{i=1}^n V_i) \cup \{\alpha\} \rangle_{F_2(\alpha X)}$$

Entonces $V$ es abierto y $\{x,y\} \in V$. Ahora tomemos $\{a,b\} \in V$, entonces $\{a,b\} \cap X = \{a,b\} \backslash \{\alpha\} \subseteq ((\bigcup_{i=1}^n V_i) \cup \{\alpha\}) \backslash \{\alpha\} = \bigcup_{i=1}^n V_i$, y para todo $i$ tal que $1 \leq i \leq n$ se tiene que $V_i \subseteq X$. De esta manera se tiene que $\emptyset \neq \{a,b\} \cap V_i = \{a,b\} \cap (V_i \cap X) = (\{a,b\} \cap X) \cap V_i$, y por lo tanto $\{a,b\} \cap X \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_n \rangle_{F_2(X)}$. Además, como en particular $\emptyset \neq V_1 \cap \{a,b\} \subseteq X \cap \{a,b\}$ entonces $g(\{a,b\}) = f(\{a,b\} \cap X)$, por lo que $g(\{a,b\}) \in A \cap X$, con esto concluimos que $V \subseteq g^{-1}[A]$ y por lo tanto $g$ es continua en $\{x,y\}$.

□

## 2.3. Teoremas de Caracterización

A continuación enunciaremos el teorema principal de este capítulo, el cual fue demostrado originalmente en [6].

**Teorema 2.3.1.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio $T_2$ y compacto. Si $f : F_2(X) \longrightarrow X$ es una selección $\tau_V-$continua débil y $a \in X$ entonces existe un orden total $\leq_\tau$ compatible con la topología de X, tal que $(-\infty, a]_{\leq_\tau} = (-\infty, a]_f$ y*

$[a, \infty)_{\leq_\tau} = [a, \infty)_f$.

*La demostración del teorema es demasiado larga, por lo tanto la haremos en la siguiente sección.*

El teorema anterior, en particular implica que todo espacio compacto y $T_2$ que admite una selección continua débil, es un espacio topologico ordenable. Recordemos también que si $(X, \tau)$ es un espacio ordenable y compacto, entonces la función mín es una selección continua, y que si un espacio admite una selección continua, entonces la restricción de dicha selección a $F_2(X)$, es una selección continua débil. Lo dicho anteriormente nos brinda una caracterización muy importante de los espacios compactos y $T_2$ que admiten selecciónes continuas.

**Teorema 2.3.2.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio compacto y $T_2$, entonces $X$ tiene una selección $\tau_V$-continua si y solo si $X$ es un ETO.*

*Demostración.* Sea $(X, \tau)$ un espacio compacto y $T_2$, tal que X tiene una selección $\tau_V$-continua $f$. $f|_{F_2(X)}$ es una selección continua débil, y por el Teorema 2.3.1 concluimos que $X$ es un ETO. Por otro lado, si $(X, \tau)$ es un ETO compacto y $T_2$, entonces $X$ es un ETBO, y por lo tanto, gracias al Corolario 2.0.3 tenemos que $X$ admite una selección $\tau_V$-continua. $\square$

Como otro corolario del Teorema 2.3.1, tenemos el siguiente teorema. Dicho teorema nos da un caracterización para los espacios $T_2$ que admiten selecciones $\tau_F$ continuas. Originalmente fue demostrado en [1], pero nosotros daremos una demostración significativamente más corta.

**Teorema 2.3.3.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio $T_2$, entonces $X$ es un ETBO si y solo si $X$ tiene una selección $\tau_F$-continua.*

*Demostración.* $\Rightarrow$) Si $X$ es un ETBO, en la Proposición 2.0.2 probamos que la función mín : $F(X) \longrightarrow X$ es una selección $\tau_F$-continua.

$\Leftarrow$) Sea $f : F(X) \longrightarrow X$ una selección $\tau_F$-continua, entonces $h = f|_{F_2(X)}$ es una selección $\tau_F$-continua débil. Por el Teorema 2.2.21 existe $g : F_2(\alpha X) \longrightarrow \alpha X$ una selección continua tal que $\alpha$ es un $g$-máximo, es decir, $(-\infty, \alpha]_g = \alpha X$. Por el Teorema 2.3.1 existe un orden total $\prec$ sobre $\alpha X$ compatible con su topología y que cumple que $\alpha X = (-\infty, \alpha]_g = (-\infty, \alpha]_\prec$ lo cual nos permite concluir gracias a que $\alpha X$ es compacto y al Corolario 1.1.15 , que $\alpha X$

es un $ETBO$. Para terminar notemos que cualquier segmento inicial sobre $\alpha X$ respecto a $\prec$ también es un $ETBO$, en particular $[-\infty, \alpha)_{\prec} = X$. $\square$

## 2.4. Demostración del Teorema

Sea $\preceq$ un buen orden en $X$ tal que $\min_{\preceq}(X) = a$. Construiremos recursivamente el orden deseado diciendo para cada elemento $x \in X$ qué elementos son mayores y cuáles menores que $x$. Es decir, para cada $x \in X$ construiremos conjuntos $m_x, M_x \subseteq X$ cerrados que cumplan las siguientes propiedades:

$(P_1)$ $m_x \cup M_x = X$ y $m_x \cap M_x = \{x\}$.

$(P_2)$ Si $y \prec x$ y si $x \in m_y$ entonces $m_x \subseteq m_y \backslash \{y\}$.

$(P_3)$ Si $y \prec x$ y si $x \in M_y$ entonces $M_x \subseteq M_y \backslash \{y\}$.

$(P_4)$ Si $z \in m_x$ y $z \notin \bigcup\{m_y \mid y \prec x \text{ y } x \in M_y\}$, entonces $z \in (-\infty, x]_f$ (esto es equivalente a decir que $m_x \subseteq (\bigcup\{m_y \mid y \prec x \text{ y } x \in M_y\}) \cup (-\infty, x]_f$).

$(P_5)$ Si $z \in M_x$ y $z \notin \bigcup\{M_y \mid y \prec x \text{ y } x \in m_y\}$, entonces $z \in [x, \infty)_f$ (esto es equivalente a decir que $M_x \subseteq \bigcup(\{M_y \mid y \prec x \text{ y } x \in m_y\}) \cup [x, \infty)_f$).

La construcción se hará por recursión sobre el buen orden $\preceq$ en $X$.

**Paso base:**
Definimos para $\min_{\preceq} X = a$ a $m_a$ y $M_a$ como sigue:

$$m_a := (-\infty, a]_f \text{ y}$$
$$M_a := [a, \infty)_f.$$

Como $X$ es $T_2$ entonces $m_a$ y $M_a$ son cerrados gracias a la Proposición 1.1.7 y cumplen la propiedad $P_1$, las propiedades $P_2$ y $P_3$ se cumplen por vacuidad ya que $a = \min_{\preceq}(X)$. Las propiedades $P_4$ y $P_5$ se cumplen de manera directa gracias a las equivalencias de dichas propiedades que mencionamos entre paréntesis.

**Paso recursivo:**
Sea $x \in X$ tal que $a \prec x$. Supongamos que para todo $y \prec x$ hemos construido

$m_y$ y $M_y$ cerrados, y dichos conjuntos cumplen las propiedades $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ y $P_5$. Consideramos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
&E := \{y \prec x \mid x \notin m_y\},\\
&F := \{y \prec x \mid x \notin M_y\}\\
&Z := X \backslash ((\bigcup_{y\in E} m_y) \cup (\bigcup_{y\in F} M_y)).
\end{aligned}$$

Consideremos primero el caso en que $E \neq \emptyset$, y tomemos $\Gamma = |E|^+$. Para cualquier $\alpha \in \Gamma$ definimos $y_\alpha$ de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}
y_0 := \text{mín}_{\preceq}(E) \text{ y}\\
y_\alpha := \text{mín}_{\preceq}(\{x\} \cup \{y \in E \mid \forall \mu \in \alpha\ (y_\mu \prec y)\ \wedge\ y \notin \textstyle\bigcup_{\mu\in\alpha} m_{y_\mu}\}).
\end{gathered}$$

Debido a que para todo $y \in E$ se cumple que $y \prec x$ entonces $y_\alpha = x$ si y solo si $\{y \in E \mid \forall \mu \in \alpha\ (y_\mu \prec y)\ \wedge\ y \notin \bigcup_{\mu\in\alpha} m_{y_\mu}\} = \emptyset$. Además, si $\beta \in \alpha$ para algún $\alpha \in \Gamma$ entonces $\bigcup_{\mu\in\beta} m_{y_\mu} \subseteq \bigcup_{\mu\in\alpha} m_{y_\mu}$. Por otro lado, dado $y \in E$, si $y$ cumple que para todo $\mu \in \alpha$ pasa que $y_\mu \prec y$, entonces $y_\mu \prec y$ para todo $\mu \in \beta$. Gracias a estas dos afirmaciones podemos concluir que si $\beta \in \alpha \in \Gamma$ entonces $\{y \in E \mid \forall \mu \in \alpha\ (y_\mu \prec y)\ \wedge\ y \notin \bigcup_{\mu\in\alpha} m_{y_\mu}\} \subseteq \{y \in E \mid \forall \mu \in \beta\ (y_\mu \prec y)\ \wedge\ y \notin \bigcup_{\mu\in\beta} m_{y_\mu}\}$ y por lo tanto si $y_\alpha \neq x$ se tiene que $y_\beta \neq x$. Sea $\epsilon = \text{mín}_{\prec}\{\alpha \in \Gamma \mid y_\alpha = x\}$, lo dicho anteriormente nos permite concluir que para todo $\alpha \in \epsilon$ se cumple que $y_\alpha = \text{mín}_{\prec} A_\alpha$ donde:

$$A_\alpha = \{y \in E \mid \forall \mu \in \alpha\ (y_\mu \prec y)\ \wedge\ y \notin \bigcup_{\mu\in\alpha} m_{y_\mu}\}.$$

Estamos listos para demostrar las siguientes afirmaciones.

**Afirmación 1:** Si $\epsilon_0 \in \epsilon + 1$ entonces $\bigcup\{m_y \mid y \in E \text{ y } y \prec y_{\epsilon_0}\} = \bigcup_{\beta\in\epsilon_0} m_{y_\beta}$.

*Demostración.* Notemos que si $\beta \in \epsilon_0$ entonces directamente de como definimos $y_\beta$ y $y_{\epsilon_0}$ tenemos que $y_\beta \prec y_{\epsilon_0}$ por lo que $\bigcup_{\beta\in\epsilon_0} m_{y_\beta} \subseteq \bigcup\{m_y \mid y \in E$ y $y \prec y_{\epsilon_0}\}$. Ahora, supongamos que existe $y \in E$ tal que $y \prec y_{\epsilon_0}$ y consideremos $\alpha = \text{mín}\{\beta \in \epsilon_0 + 1 \mid y \preceq y_\beta\}$. Si $y = y_\alpha$, entonces $\alpha \in \epsilon_0$ ya que $y \prec y_{\epsilon_0}$ y por lo tanto $m_y = m_{y_\alpha} \subseteq \bigcup_{\beta\in\epsilon_0} m_{y_\beta}$. Por otro lado, si $y \prec y_\alpha$ entonces para todo $\beta \in \alpha$ se tiene que $y_\beta \prec y$, como $y \prec \text{mín}_{\prec} A_\alpha$, en particular $y \notin A_\alpha$. Gracias a lo dicho anteriormente, esto solo puede pasar si $y \in \bigcup_{\mu\in\alpha} m_{y_\mu}$, por lo que podemos tomar $\beta \in \alpha$ tal que $y \in m_{y_\beta}$. Notemos que $\beta \in \alpha \in \epsilon_0 + 1$ y $y_\beta \prec y \prec x$, entonces $\beta \in \epsilon_0$ y por hipótesis de recursión, utilizando la propiedad $P_2$ tenemos que $m_y \subseteq m_{y_\beta} \backslash \{y_\beta\} \subseteq m_{y_\beta} \subseteq \bigcup_{\mu \in \epsilon_0} m_{y_\mu}$. Acabamos de demostrar que para cualquier $y \in E$ tal que $y \prec y_{\epsilon_0}$ se cumple que $m_y \subseteq \bigcup_{\mu \in \epsilon_0} m_{y_\mu}$, por lo tanto $\bigcup\{m_y \mid y \in E \text{ y } y \prec y_{\epsilon_0}\} \subseteq \bigcup_{\mu \in \epsilon_0} m_{y_\mu}$, y con esto concluimos la prueba. □

**Afirmación 2:** Si $\mu_0 \in \mu_1 \in \epsilon$, entonces $m_{y_{\mu_0}} \subseteq m_{y_{\mu_1}} \backslash \{y_{\mu_1}\}$.

*Demostración.* Como $\mu_0 \in \mu_1$ entonces $y_{\mu_0} \prec y_{\mu_1}$. Por definición de $y_{\mu_1}$ tenemos que $y_{\mu_1} \notin m_{y_{\mu_0}}$, gracias a la propiedad $P_1$ podemos concluir que $y_{\mu_1} \in M_{y_{\mu_0}}$, y así, por la propiedad $P_3$ tenemos que $M_{y_{\mu_1}} \subseteq M_{y_{\mu_0}} \backslash \{y_{\mu_0}\}$. De la contención anterior concluimos que:

$$m_{y_{\mu_0}} = X \backslash (M_{y_{\mu_0}} \backslash \{y_{\mu_0}\}) \subseteq X \backslash (M_{y_{\mu_1}}) = m_{y_{\mu_1}} \backslash \{y_{\mu_1}\},$$

justo lo que queríamos demostrar.

□

**Afirmación 3:** Si $\mu_0 \in \mu_1 \in \epsilon$, entonces $m_{y_{\mu_1}} \backslash m_{y_{\mu_0}} \subseteq [y_{\mu_0}, \infty)_f$.

*Demostración.* Sea $t \in m_{y_{\mu_1}} \backslash m_{y_{\mu_0}}$, como $t \notin m_{y_{\mu_0}}$ entonces $t \in M_{y_{\mu_0}}$. Supongamos que $t \in \bigcup\{M_y \mid y \prec y_{\mu_0} \text{ y } y_{\mu_0} \in m_y\}$ y consideremos $y \prec y_{\mu_0}$ tal que $y_{\mu_0} \in m_y$ y $t \in M_y$. Notemos que $y \prec y_{\mu_0} \prec y_{\mu_1}$ y por lo tanto $y_{\mu_1} \notin m_y$, ya que lo contrario, por la propiedad $P_2$ tendríamos que $m_{y_{\mu_1}} \subseteq m_y \backslash \{y\}$ y por lo tanto $t \in M_y = X \backslash (m_y \backslash \{y\}) \subseteq X \backslash m_{y_{\mu_1}}$ lo cual es una contradicción. Así podemos concluir que $y_{\mu_1} \in M_y$. Por lo dicho anteriormente y gracias a la propiedad $P_3$ sabemos que $M_{y_{\mu_1}} \subseteq M_y \backslash \{y\}$ y por lo tanto

$$m_y = X \backslash (M_y \backslash \{y\}) \subseteq X \backslash M_{y_{\mu_1}} = m_{y_{\mu_1}} \backslash \{y_{\mu_1}\}.$$

Como $y_{\mu_1} \in E$, entonces $x \notin m_{y_{\mu_1}}$ y por lo tanto $x \notin m_y$; además $y \prec y_{\mu_1} \prec x$, por lo que $y \in E$. Sea $\alpha = \text{mín}\{\beta \mid y \preceq y_\beta\}$, notemos primero que $\alpha \preceq \mu_0$ ya que $y \prec y_{\mu_0}$; además, para todo $\beta \in \alpha$ se tiene que $y_\beta \prec y$. Ahora consideremos dos casos:

1) Si $y = y_\alpha$ entonces $y_\alpha = y \prec y_{\mu_0}$, por lo que concluimos que $\alpha \in \mu_0$, y por la Afirmación 2 tendremos que $m_y \subseteq m_{y_{\mu_0}} \backslash \{y_{\mu_0}\}$. Así $y_{\mu_0} \in m_{y_{\mu_0}} \backslash \{y_{\mu_0}\}$ lo cual es una contradicción.

2) Si $y \prec y_\alpha$ entonces $y \prec \text{mín}_\prec A_\alpha$, en particular $y \notin A_\alpha$, pero esto puede pasar solamente si $y \in \bigcup_{\mu\in\alpha} m_{y_\mu}$. Así, podemos considerar $\beta \in \alpha$ tal que $y \in m_{y_\beta}$, y como $\beta \in \mu_0$, por la Afirmación 2 tenemos que $m_{y_\beta} \subseteq m_{y_{\mu_0}}$ y por la propiedad $P_2$ tenemos que $m_{y_{\mu_0}} \subseteq m_y \backslash \{y\}$. Concluimos que $y \in m_{y_\beta} \subseteq m_{y_{\mu_0}} \subseteq m_y \backslash \{y\}$ lo cual es una contradicción.

La contradicción vino de suponer que $t \in \bigcup\{M_y \mid y \prec y_{\mu_0}$ y $y_{\mu_0} \in m_y\}$, por lo tanto podemos concluir que esto no pasa, y usando la $P_5$ concluimos que $t \in [y_{\mu_0}, \infty)_f$.

□

Como consecuencia inmediata de las Afirmaciones 2 y 3, tenemos que si $y_\mu \prec y_\beta$ para algunos $\mu, \beta \in \epsilon$ entonces $f(\{y_\mu, y_\beta\}) = y_\mu$. La consecuencia anterior será importante al momento de demostrar la Afirmación 5.

**Afirmación 4:**Si $t \in \overline{\bigcup_{y\in E} m_y} \backslash \bigcup_{y\in E} m_y$ entonces t es un punto de adherencia de la red $\{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\}$.

*Demostración.* Consideraremos dos casos:

1) Si $\epsilon = \alpha + 1$ para algún ordinal $\alpha$, entonces por la Afirmación 2 tenemos que para todo $\beta \in \epsilon$ se cumple que $m_{y_\beta} \subseteq m_{y_\alpha}$. Utilizando este hecho y por la Afirmación 1 concluimos que $\bigcup_{y\in E} m_y = \bigcup_{\beta\in\epsilon} m_{y_\beta} = m_{y_\alpha}$, pero por hipótesis tenemos que $m_{y_\alpha}$ es cerrado, por lo tanto $\overline{\bigcup_{y\in E} m_y} \backslash \bigcup_{y\in E} m_y = \emptyset$. En este caso la Afirmación 4 se cumple por vacuidad.

2) Si $\epsilon$ es un ordinal límite, entonces procederemos por contradicción. Sea $t \in \overline{\bigcup_{y\in E} m_y} \backslash \bigcup_{y\in E} m_y$, supongamos que $t$ no es punto de adherencia de la red $\{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\}$, y de esta manera existe $B \subseteq X$ vecindad abierta de $t$ y existe $\alpha_0 \in \epsilon$ tal que para todo $\beta \in \epsilon$, si $\alpha_0 \in \beta$, entonces $y_\beta \notin B$, y como $X$ es $T_3$, entonces existe $A \subseteq X$ abierto, tal que $t \in A \subseteq \overline{A} \subseteq B$. Notemos que ningún elemento de $A$, puede ser punto de adherencia de la red $\{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\}$.

   Ahora definimos recursivamente los siguientes ordinales y puntos:

   - $c_{\gamma_0} = \text{mín}_\prec A \cap (\bigcup_{y\in E} m_y)$ y $\gamma_0 = \text{mín}\{\mu \in \epsilon \mid c_{\gamma_0} \in m_{y_\mu}\}$.

- Dado $\beta \in \epsilon$, si ya definimos $c_{\gamma_\alpha}$, y $\gamma_\alpha$ para cualquier $\alpha \in \beta$, y además, tenemos que $A \cap (\bigcup_{y\in E} m_y)\backslash(\bigcup_{\alpha\in\beta} m_{y_{\gamma_\alpha}}) \neq \emptyset$ entonces definiremos

$$c_{\gamma_\beta} = \min_{\prec} A \cap (\bigcup_{y\in E} m_y)\backslash(\bigcup_{\alpha\in\beta} m_{y_{\gamma_\alpha}})$$

$$\gamma_\beta = \min\{\mu \in \epsilon \mid c_{\gamma_\beta} \in m_{y_\mu}\}$$

  En caso de que $A \cap (\bigcup_{y\in E} m_y)\backslash(\bigcup_{\alpha\in\beta} m_{y_{\gamma_\alpha}}) = \emptyset$ definimos $c_{\gamma_\beta} = y_{\alpha_0+1}$ y $\gamma_\beta = \epsilon$.

Consideremos ahora a $G = \{\gamma_\beta \mid \beta \in \epsilon \text{ y } c_{\gamma_\beta} \neq y_{\alpha_0+1}\}$. Veamos que $G$ es un subconjunto cofinal en $\epsilon$:

Sea $r = \sup G$, y supongamos que $r \in \epsilon$. Notemos que si

$$\delta = \min\{\beta \in \epsilon \mid c_{\gamma_\beta} = y_{\alpha_0+1}\},$$

entonces tendremos que $G = \{\gamma_\beta \mid \beta \in \delta\}$. Como $r \in \epsilon$, por la Afirmación 2 tenemos que

$$\bigcup_{\alpha\in\delta} m_{y_{\gamma_\alpha}} \subseteq m_{y_r} \subseteq m_{y_{r+1}}\backslash\{y_{r+1}\}$$

De esta manera

$$(A \cap X\backslash m_{y_r}) \cap (\bigcup_{y\in E} m_y) = A \cap (\bigcup_{y\in E} m_y)\backslash m_r \subseteq A \cap (\bigcup_{y\in E} m_y)\backslash(\bigcup_{\alpha\in\delta} m_{y_{\gamma_\alpha}})$$

Pero por hipotesis $t \notin m_r$ y $m_r$ es cerrrado, por lo tanto $A \cap X\backslash m_r$ es un abierto que tiene a $t$, y con esto concluimos que $(A \cap X\backslash m_r) \cap (\bigcup_{y\in E} m_y) \neq \emptyset$. Por definición tendremos que:

$$c_{\gamma_\delta} = \min_{\prec} A \cap (\bigcup_{y\in E} m_y)\backslash(\bigcup_{\alpha\in\beta} m_{y_{\gamma_\delta}})$$

lo cual es una contradicción, puesto que $c_{\gamma_\delta} = y_{\alpha_0+1}$ y $y_{\alpha_0+1}$ no pertenece a $A$.

Además de ser cofinal en $\epsilon$, notemos que para cada $\mu \in G$ existe $\beta \in \epsilon$ tal que $\mu = \gamma_\beta$, por lo cual tenemos que $c_{\gamma_\beta} \in A$ y $\gamma_\beta = \min\{\mu \in \epsilon \mid c_{\gamma_\beta} \in m_{y_\mu}\}$, o dicho de otra manera; $c_\mu \in A \cap m_{y_\mu}$ y $\mu = \min\{\beta \in \epsilon \mid c_\mu \in m_{y_\beta}\}$.

Sea $\mu \in G$, entonces por hipótesis de recursión y gracias a la propiedad $P_5$, tenemos que

$$c_\mu \in m_{y_\mu} \subseteq \bigcup \{m_y \mid y \prec y_\mu \text{ y } y_\mu \in M_y\} \cup (-\infty, y_\mu]_f.$$

Supongamos que existe $y \prec y_\mu$ tal que $y_\mu \in M_y$ y $c_\mu \in m_y$. Como $y \prec y_\mu$ y $y_\mu \in M_y$ entonces por la propiedad $P_3$ tenemos que $M_{y_\mu} \subseteq M_y \backslash \{y\}$, y así, $m_y \subseteq m_{y_\mu} \backslash \{y_\mu\}$. Como por definición $y_\mu \in E$, entonces $x \notin m_{y_\mu}$, lo cual nos permite concluir que $x \notin m_y$ y por lo tanto $y \in E$. Sea $\alpha = \text{mín}\{\beta \in \epsilon \mid y \preceq y_\beta\}$, tenemos entonces dos casos:

*a*) Si $y = y_\alpha$ entonces $\alpha \prec \mu$ y $c_\mu \in m_y = m_{y_\alpha}$, pero esto es una contradicción ya que $\mu = \text{mín}\{\beta \in \epsilon \mid c_\mu \in m_{y_\beta}\}$.

*b*) si $y \prec y_\alpha$ entonces para todo $\beta \in \alpha$ se tiene que $y_\beta \prec y$. Por como definimos $y_\alpha$ debe existir $\beta_0 \in \alpha$ tal que $y \in m_{y_{\beta_0}}$. Notemos que $y_{\beta_0} \prec y$, así, por la propiedad $P_2$ tenemos que $m_y \subseteq m_{y_{\beta_0}}$. Concluimos que $c_\mu \in m_{y_{\beta_0}}$, pero esto es una contradicción.

La contradicción de arriba nos lleva a concluir que $c_\mu \in (-\infty, y_\mu]_f$, es decir $f(\{c_\mu, y_\mu\}) = c_\mu$.

Como $X$ es compacto entonces podemos considerar $(c, y) \in X^2$, un punto de adherencia de la red $\{(c_\mu, y_\mu)\}_{\mu \in G}$. Notemos entonces que $c$ es punto de adherencia de la red $\{c_\mu\}_{\mu \in G}$, $y$ es punto de adherencia de la red $\{y_\mu\}_{\mu \in G}$ y $\{c, y\}$ es punto de adherencia de la red $\{\{c_\mu, y_\mu\}\}_{\mu \in G}$. Como $A$ es cerrado y para todo $\mu \in G$ se tiene que $c_\mu \in A$ entonces $c \in A$. Como $y$ es un punto de adherencia de la red $\{y_\mu\}_{\mu \in G}$ y $G$ es cofinal en $\epsilon$, entonces $y$ también es un punto de adherencia de la red $\{y_\mu\}_{\mu \in \epsilon}$, por lo que $y \notin A$ y en particular $y \neq c$. Notemos que como $f(\{c_\mu, y_\mu\}) = c_\mu$ para cualquier $\mu \in G$, y como f es continua entonces $f(\{c, y\}) = c$. Por otro lado, si $\beta \in G$ es fijo, entonces para todo $\mu \in G \subseteq \epsilon$ tal que $\beta \in \mu$ se cumple que $c_\mu \notin m_{y_\beta}$, y por lo tanto $c_\mu \in m_{y_\mu} \backslash m_{y_\beta}$. Así gracias a la Afirmación 3 tenemos que $f(\{c_\mu, y_\beta\}) = y_\beta$. Al ser $f$ continua y $c$ un punto de adherencia de la red $\{c_\mu\}_{\mu \in G}$, entonces $f(\{c, y_\beta\}) = y_\beta$ para cualquier $\beta \in G$, y como $y$ es un punto de adherencia de la red $\{y_\mu\}_{\mu \in G}$ entonces $f(\{c, y\}) = y$, pero esto es una contradicción ya que antes habíamos concluido que $f(\{c, y\}) = c$ y $c \neq y$. Concluimos que $t$ es un punto de adherencia de la red $\{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\}$.

$\square$

**Afirmación 5:** Si $t$ y $u$ son puntos de adherencia de la red $\{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\}$, entonces $t = u$.

*Demostración.* Tenemos dos casos:

1) Si $\epsilon = \alpha + 1$ para algún $\alpha$, entonces la red $\{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\}$ tiene como elemento máximo a $y_\alpha$, al cual la red necesariamente converge, y al ser $X$ un espacio $T_2$, no puede haber otro punto de adherencia.

2) Si $\epsilon$ es ordinal límite lo haremos por contradicción. Supongamos que existen $t, u \in X$ puntos de adherencia de la red $\{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\}$ tales que $t \neq u$. Como $t \neq u$ entonces existen $T$ y $U$ vecindades cerradas de $t$ y $u$ respectivamente tales que $T \cap U = \emptyset$.

   Definimos $m_0 = \{\delta \in \epsilon \mid y_\delta \in T\}$ y $t_{m_0} = y_{m_0}$. Sea $m'_0 = \text{mín}\{\delta \in \epsilon \mid y_{m_0} \prec y_\delta$ y $y_\delta \in U\}$ y $u_{m_0} = y_{m'_0}$. En general, para cualquier $\alpha \in \epsilon$ mayor que 0, si $\sup\{m'_\beta \mid \beta \in \alpha\} = \epsilon$ entonces definimos $m_\alpha = \epsilon$ y $= t_{m_\alpha} = u_{m_\alpha} = x$; en caso de que $\sup\{m_\beta \mid \beta \in \alpha\} \prec \epsilon$, definiremos

$$m_\alpha = \text{mín}\{\delta \in \epsilon \mid \sup\{u_{m_\beta} \mid \beta \in \alpha\} \prec y_\delta \text{ y } y_\delta \in T\}$$

$$m'_\alpha = \text{mín}\{\delta \in \epsilon \mid y_{m_\alpha} \prec y_\delta \text{ y } y_\delta \in U\}$$

   y definimos $t_{m_\alpha} = y_{m_\alpha}$ y $u_{m_\alpha} = y_{m'_\alpha}$. Ahora consideramos a $\gamma = \text{mín}\{\delta \in \epsilon \mid c_{m_\delta} = x\}$ y $G = \{m_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}$. $G$ es un conjunto cofinal en $\epsilon$ y para cualquier $\alpha, \beta \in G$ se cumple que $t_\alpha \in \{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\} \cap T$ y $u_\beta \in \{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\} \cap U$. Además, si $\alpha \in \beta$, se cumplirá que $t_\alpha \prec u_\alpha \prec t_\beta$.

   Sea $(t', u') \in X^2$ un punto de adherencia de la red $\{(t_\delta, u_\delta)\}_{\delta \in G}$, notemos que $t'$ es un punto de adherencia de la red $\{t_\delta\}_{\delta \in G}$ y $u'$ es punto de adherencia de la red $\{u_\delta\}_{\delta \in G}$. Dado $\delta \in G$, como $t_\delta \prec u_\delta$ y $u_\delta, t_\delta \in \{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\}$ entonces por las Afirmaciones 2 y 3 tenemos que $f(\{u_\delta, t_\delta\}) = t_\delta$ y por la continuidad de $f$ concluimos que $f(\{t', u'\}) = t'$. Por otro lado, dado $\delta \in G$ se tiene que para todo $\beta \in G$ tal que $\delta \in \beta$, se cumple que $u_\delta \prec t_\beta$ y por lo tanto $f(\{u_\delta, t_\beta\}) = u_\delta$, esto nos permite concluir que $f(u_\delta, t'\}) = u_\delta$ para cualquier $\delta \in G$. Usando nuevamente la continuidad de $f$ inferimos que $f(\{u', t'\}) = u'$ y así $t' = u'$. Para terminar notemos que como $\{t_\delta\}_{\delta \in G} \subseteq T$, $\{u_\delta\}_{\delta \in G} \subseteq U$ y $T$ y $U$ son cerrados, entonces $t' = u' \in T \cap U$ , pero esto es una contradicción ya que supusimos que $T \cap U = \emptyset$.

□

La compacidad de $X$ nos permite asegurar la existencia de un punto de adherencia de la red $\{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\}$, y la Afirmación 5 nos aseguró su unicidad. Desde este momento llamaremos $e$ a dicho punto.

**<u>Afirmación 6:</u>** $\bigcup_{y\in E} m_y$ tiene a lo más un punto en su frontera.

*Demostración.* De nuevo consideraremos dos casos:

1) Si $\epsilon = \alpha + 1$ para algún ordinal $\alpha$, entonces para cualquier $\beta \in \epsilon$ por la Afirmación 2 se cumple que $m_{y_\beta} \subseteq m_{y_\alpha}$, por lo tanto $\bigcup_{y\in E} m_y = \bigcup_{\beta\in\epsilon} m_{y_\beta} = m_{y_\alpha}$. Por hipótesis de recursión sabemos que $m_{y_\alpha}$ es cerrado y $m_{y_\alpha}\backslash\{y_\alpha\} = X\backslash M_{y_\alpha}$ es abierto, por lo tanto $bd(\bigcup_{y\in E} m_y) \subseteq \{y_\alpha\}$.

2) Si $\epsilon$ es un ordinal límite entonces para cualquier $x \in \bigcup_{y\in E} m_y = \bigcup_{\beta\in\epsilon} m_{y_\beta}$ existe $\alpha \in \epsilon$ tal que $x \in m_{y_\alpha}$, notemos que $\alpha + 1 \in \epsilon$, $m_{y_{\alpha+1}}\backslash\{y_{\alpha+1}\}$ es abierto y $x \in m_{y_\alpha} \subseteq m_{y_{\alpha+1}}\backslash\{y_{\alpha+1}\} \subseteq \bigcup_{y\in E} m_y$, con esto concluimos que $\bigcup_{y\in E} m_y$ es abierto y por lo tanto $bd(\bigcup_{y\in E} m_y) = \overline{\bigcup_{y\in E} m_y}\backslash \bigcup_{y\in E} m_y$. Lo anterior en combinación con las Afirmaciones 4 y 5 tenemos lo que queremos.

□

Antes de continuar con la siguiente afirmación, notemos que si $\epsilon$ es un ordinal límite entonces $bd(\bigcup_{y\in E} m_y) \neq \emptyset$, ya que $e$ pertenece a $\overline{\bigcup_{y\in E} m_y}$, pero no pertenece a $\bigcup_{y\in E} m_y$. En efecto, si no fuera el caso, existiría $\mu \in \epsilon$ tal que $e \in m_{y_\mu}$, pero entonces por la Afirmación 3, $m_{y_{\mu+1}}\backslash\{y_{\mu+1}\}$ es un abierto al que pertenece $e$ y que cumple que $y_\beta \notin m_{y_{\mu+1}}\backslash\{y_{\mu+1}\}$ para cualquier $\beta$ mayor que $\mu + 1$, lo que contradice que $p$ es un punto de adherencia de la red $\{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\}$, con esto concluimos que $e \in bd(\bigcup_{y\in E} m_y)$. Por otro lado, si $\epsilon = \alpha + 1$ para algún ordinal $\alpha$, entonces $e = y_\alpha$, y en la prueba anterior demostramos que en este caso $bd(\bigcup_{y\in E} m_y) \subseteq \{y_\alpha\}$. Con todo lo que acabamos de decir, podemos llegar a la conclusión de que sea cual sea la naturaleza de $\epsilon$, siempre se cumple que $bd(\bigcup_{y\in E} m_y) \subseteq \{e\}$.

**<u>Afirmación 7:</u>** Si $t \in Z$ y $\mu \in \epsilon$ entonces $t \in [y_\mu, \infty)_f$.

*Demostración.* Como $t \in Z = X\backslash((\bigcup_{y\in E} m_y) \cup (\bigcup_{y\in F} M_y))$, entonces $t \notin m_{y_\mu}$, así, $t \in M_{y_\mu}$. Supongamos por contradicción que $t \notin [y_\mu, \infty)_f$, entonces por la propiedad $P_5$ tenemos que existe $y \prec y_\mu$ tal que $y_\mu \in m_y$ y $t \in M_y$. Si $x \in m_y$ entonces $x \notin M_y$ ( ya que $x \neq y$), por lo que $y \in F$, y así $Z \cap M_y = \emptyset$. Pero esta es una contradicción ya que supusimos que $t \in M_y \cap Z$, con esto concluimos que $x \notin m_y$, en otras palabras $y \in E$. Por la Afirmación 1 tenemos que $\bigcup\{m_{y'} \mid y' \in E \text{ y } y' \prec y_\mu\} = \bigcup_{\beta \in \mu} m_{y_\beta}$. Como $y_\mu \in m_y$ entonces existe $\gamma \in \mu$ tal que $y_\mu \in m_{y_\gamma}$, pero esto es una contradicción a la Afirmación 2. Concluimos que $t \in [y_\mu, \infty)_f$. □

Notemos que en particular $x \in Z$, por lo que $f(\{x, y_\beta\}) = y_\beta$ para cualquier $\beta \in \epsilon$, y por lo tanto, gracias a la continuidad de $f$, tenemos que $f(\{x, e\}) = e$. Haciendo un recuento, encontramos un ordinal $\epsilon$ y un conjunto $\{y_\mu \mid \mu \in \epsilon\} \subseteq E$ que cumple la siguientes propiedades:

- $\bigcup_{y \in E} m_y = \bigcup_{\mu \in \epsilon} m_{y_\mu}$.
- Si $\mu \in \delta \in \epsilon$ entonces $m_{y_\mu} \subseteq m_{y_\delta} \backslash \{y_\delta\}$.
- La red $\{y_\mu\}_{\mu \in \epsilon}$ tiene exactamente un punto de adherencia $e$.
- Si $t \in Z$ y $\mu \in \epsilon$ entonces $t \in [y_\mu, \infty)$.
- $f(\{x, e\}) = e$.
- $bd(\bigcup_{y \in E} m_y) \subseteq \{e\}$.

Gracias a la simetría de las propiedades $P_1$ a $P_5$, en el caso de que $F \neq \emptyset$, podemos encontrar de manera completamente análoga un ordinal $\psi$, y un conjunto $\{z_\mu \mid \mu \in \psi\} \subseteq F$ que cumpla las siguientes propiedades:

- $\bigcup_{z \in F} M_z = \bigcup_{\mu \in \psi} M_{z_\mu}$.
- Si $\mu \in \delta \in \psi$ entonces $M_{z_\mu} \subseteq M_{z_\delta} \backslash \{z_\delta\}$.
- La red $\{z_\mu\}_{\mu \in \psi}$ tiene exactamente un punto de adherencia $r$.
- Si $t \in Z$ y $\mu \in \psi$ entonces $t \in (-\infty, z_\mu]_f$.
- $f(\{x, e\}) = x$.
- $bd(\bigcup_{z \in E} M_z) \subseteq \{r\}$.

Construiremos $m_x$ y $M_x$ por casos.

**Caso 1:** Si $E \neq \emptyset$ y $F = \emptyset$.

En este caso $Z = X \backslash (\bigcup_{y \in E} m_y)$ y por lo tanto $bd(Z) = bd(X \backslash Z) = bd(\bigcup_{y \in E} m_y) \subseteq \{e\}$. Definiremos:

- $m_x = \bigcup_{y \in E} m_y \cup (Z \cap (-\infty, x]_f)$ y
- $M_x = Z \cap [x, \infty)_f$.

**Caso 2:** Si $E = \emptyset$ y $F \neq \emptyset$.

En este caso $Z = X \backslash (\bigcup_{z \in F} M_z)$ y por lo tanto $bd(Z) = bd(X \backslash Z) = bd(\bigcup_{z \in F} M_z) \subseteq \{r\}$. Definiremos:

- $M_x = \bigcup_{z \in F} M_z \cup (Z \cap [x, \infty)_f)$ y
- $m_x = Z \cap (-\infty, x]_f$.

**Caso 3:** Si $E, F \neq \emptyset$.

En este caso $bd(Z) = bd(X \backslash Z) = bd((\bigcup_{y \in E} m_y) \cup (\bigcup_{z \in F} M_z)) \subseteq \{e, r\}$. Definiremos:

- $m_x = \bigcup_{y \in E} m_y \cup (Z \cap (-\infty, x]_f)$ y
- $M_x = \bigcup_{z \in F} M_z \cup (Z \cap [x, \infty)_f)$.

Es sencillo demostrar que $m_x$ y $M_x$ son cerrados y cumplen las propiedades $P_1$ a $P_5$, y así, la recursión termina. Debido a que los conjuntos $m_x$ y $M_x$ satisfacen las condiciones del Teorema 1.1.12, entonces la relación en $X$ dada por:

$$x \leq_\tau y \text{ si y solo si } x \in m_y$$

induce un orden total en $X$ compatible con su topología. Para terminar notemos que $(-\infty, a]_f = m_a = (-\infty, a]_{\leq_\tau}$ y $[a, \infty)_f = M_a = [a, \infty)_{\leq_\tau}$.

# Capítulo 3

# Ejemplos y Contraejemplos

En este capítulo nos dedicaremos a construir ejemplos y contraejemplos relacionados con selecciones continuas.

Empezamos el capítulo anterior definiendo selecciones continuas y ejemplificando con la función mín dicha definición. Más tarde demostramos que dadas ciertas condiciones para un espacio $(X, \tau)$, se cumple que $X$ tiene una selección continua si y solo si $X$ es un ETBO. Dicha caracterización no sería muy útil si dado un espacio topológico $(X, \tau)$, tuviéramos que cualquier selección continua $f$ sobre $X$ está definida a partir de un orden total, en el sentido de que existe un orden $\prec$ sobre $X$ tal que $f = \text{mín}_{\prec}$. Por eso, el primer ejemplo que daremos es el siguiente:

**Ejemplo 3.0.1.** *Sea* $X = \{0, 1\} \cup [2, 3]$. *Definimos* $f : F(X) \longrightarrow X$ *como sigue:*

$$f(A) = \begin{cases} \text{mín}(A) & \text{si } A \neq \{0,1\} \\ 1 & \text{si } A = \{0,1\} \end{cases} \tag{3.1}$$

*Notemos que por definición se tiene que* $f$ *es una selección. Además, usando el lema de pegado podemos concluir que* $f$ *es continua. Si existiera un orden* $\preceq$ *sobre* $X$ *tal que* $f = \text{mín}_{\preceq}$ *entonces tendríamos que* $\text{mín}_{\preceq}(X) = f(X) = \text{mín}(X) = 0$, *y por lo tanto tendríamos que* $0 \prec 1$, *pero por otro lado* $\text{mín}_{\preceq}(\{0, 1\}) = f(\{0, 1\}) = 1$, *lo cual es una contradicción. Con esto concluimos que* $f$ *no está determinada por ningún orden total sobre* $X$. *Es decir, no existe un orden total sobre* $X$, *tal que* $f$ *coincida con la función mínimo inducida por dicho orden.*

Notemos que en el ejemplo anterior, a pesar de que $f$ no está definida a partir de un orden total en X, $f|_{F_2(X)}$ sí lo está. Por lo tanto, si quisiéramos demostrar que no toda selección continua débil esta definida a partir de un orden total, este ejemplo no nos sirve. Sin embargo, podemos sacar otra conclusión importante a partir del ejemplo anterior: si $(X, \tau)$ es un espacio topológico, $h : F_2(X) \longrightarrow X$ es una selección continua débil definida a partir de un orden total sobre $X$ y $g : F(X) \longrightarrow X$ es una selección continua que extiende a $h$, entonces $g$ no necesariamente está definida a partir de un orden total, es decir, no existe un orden total $\preceq$ sobre $X$ tal que $g = \min_{\preceq}$.

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que no toda selección continua débil $f$ está definida a partir de un orden total. Es decir, no siempre existe un orden total $\preceq$ sobre nuestro espacio tal que $f = \min_{\preceq}|_{F_2(X)}$.

**Ejemplo 3.0.2.** *Consideremos $f : F_2(\omega) \longrightarrow \omega$ dada por:*

$$f(\{x,y\}) = \begin{cases} \max(\{x,y\}) & \text{si } x+y \text{ es par} \\ \min(\{x,y\}) & \text{si } x+y \text{ es impar} \end{cases} \tag{3.2}$$

*Notemos que por construcción tenemos que $f$ es una selección continua débil sobre $\omega$, por otro lado tenemos que $f(\{0,1\}) = 0$ y $f(\{1,2\}) = 1$. Si $f$ fuera el mínimo respecto a algún orden total sobre $\omega$, se debería cumplir por transitividad que $f(\{0,2\}) = 0$ pero ese no es el caso. Por lo tanto, $f$ no está definida a partir de un orden total sobre $\omega$.*

El ejemplo anterior surge del hecho de que toda función de $F_2(\omega)$ en $\omega$ es continua. En particular, toda selección débil sobre $\omega$ es continua, hecho que será muy importante al momento de construir el contraejemplo principal de este capítulo.

**Teorema 3.0.3.** *No existe una selección $\tau_V-$continua sobre $\mathbb{R}$ con la topología usual.*

*Demostración.* Supongamos que el teorema es falso. Sea $f : F(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ una selección continua. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(\{0,1\}) = 1$. Demostraremos por inducción que $f(\{0,1,\ldots,k\}) = k$ para todo $k \in \omega$.

Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple que$f(\{0, 1, \ldots, n\}) = n$, notemos que el conjunto $\mathcal{A}_{n+1} = \{\{0, 1, \ldots, n-1, n+t\} \mid t \in [0, 1]\}$ es conexo en $F(\mathbb{R})$ por el Corolario 1.2.17. Por lo tanto, $f[\mathcal{A}_{n+1}]$ es un conexo en $\mathbb{R}$ y además $n \in f[\mathcal{A}_{n+1}]$. Por definición se tiene que $f(\{0, 1, \ldots, n-1, n+1\}) \neq n$. Si se cumpliera para algún $k \in \mathbb{N}$ con $k < n$ que

$$f(\{0, 1, \ldots, n-1, n+1\}) = k,$$

entonces por la conexidad de $f[\mathcal{A}_{n+1}]$ para todo $r$ tal que $k < r < n$ se tendría $r \in f[\mathcal{A}_{n+1}]$, en particular $n - \frac{1}{2} \in f[\mathcal{A}_{n+1}]$ y por lo tanto existiría $t \in [0, 1]$ tal que $n - \frac{1}{2} \in \{0, 1, \ldots, n-1, n+t\}$ pero esto es imposible, así, llegamos a la conclusión de que $f(\{0, 1, \ldots, n-1, n+1\}) = n+1$.

Ahora consideremos al conexo

$$\mathcal{B}_{n+1} = \{\{0, 1, \ldots, n-1, n-1+t, n+1\} \mid t \in [0, 1]\}$$

de nuevo, por la continuidad de $f$ tenemos que $f[\mathcal{B}_{n+1}]$ es conexo en $\mathbb{R}$ y por lo dicho anteriormente tenemos que $n+1 \in f[\mathcal{B}_{n+1}]$. Si se diera que $f(\{0, 1, \ldots, n-1, n, n+1\}) \neq n+1$, entonces en particular se tendría que $f(\{0, 1, \ldots, n-1, n, n+1\}) \leq n$ y por la conexidad de $f[\mathcal{B}_{n+1}]$ para cualquier $n < r < n+1$ se cumpliría que $r \in f[\mathcal{B}_{n+1}]$, en particular para $n + \frac{1}{2}$, pero eso querría decir que $n + \frac{1}{2} \in \{0, 1, \ldots, n-1, n-1+t, n+1\}$ para algún $t \in [0, 1]$, pero esto es imposible, con esto concluimos que

$$f(\{0, 1, \ldots, n-1, n, n+1\}) = n+1.$$

Con lo dicho anteriormente, podemos concluir que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f(\{0, 1, \ldots, n-1, n\}) = n$.

Para terminar notemos que en $F(\mathbb{R})$ se cumple que $lim_{n\to\infty}\{0, 1, \ldots, n\} = \mathbb{N}$, ya que si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son abiertos en $\mathbb{R}$ tales que $\mathbb{N} \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_m\rangle$ entonces podemos considerar para cualquier $i \leq n$ a algún $n_i \in \mathbb{N} \cap A_i$, y para cualquier $n > \text{máx}\{n_1, \ldots, n_m\}$ tendremos que $\{0, 1, \ldots, n\} \in \langle A_1, A_2, \ldots, A_m\rangle$. Gracias a lo dicho anteriormente, y por la continuidad de $f$ tenemos en particular que $lim_{n\to\infty} n$ existe, pero eso es un absurdo. La contradicción vino de suponer que $\mathbb{R}$ admitía una selección continua, por lo tanto, no existen selecciones continuas sobre $\mathbb{R}$. $\square$

## 3.1. Morfismos de selecciones

**Definición 3.1.1. (Isomorfismo de selecciones)** *Dados $X$ y $Y$ conjuntos, y $f : [X]^2 \longrightarrow X$ y $g : [Y]^2 \longrightarrow Y$ dos selecciones debiles, diremos que $f$ es isomorfa a $g$ ($f \approx g$) si existe una función $\gamma : X \longrightarrow Y$ biyectiva tal que para cualesquiera $a, b \in X$ se cumple que:*

$$\gamma(f(\{a, b\})) = g(\{\gamma(a), \gamma(b)\}).$$

*En este caso diremos que $\gamma$ es un isomorfismo entre $f$ y $g$, y lo denotaremos por $f \approx_\gamma g$.*

**Definición 3.1.2. (Encaje de selecciones)** *Dados $X$ y $Y$ conjuntos, y $f : [X]^2 \longrightarrow X$ y $g : [Y]^2 \longrightarrow Y$ dos selecciones débiles, diremos que $f$ se encaja en $g$ si y solo si existe $A \subseteq Y$ tal que $f \approx g|_{[A]^2}$.*

*A las funciones testigos de este hecho les llamaremos encajes.*

**Proposición 3.1.3.** *Sean $X$, $Y$, $Z$ conjuntos y $f : [X]^2 \longrightarrow X$, $g : [Y]^2 \longrightarrow Y$, $h : [Z]^2 \longrightarrow Z$ selecciones débiles. Si $\gamma : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo entre $f$ y $g$, y $\delta : Y \longrightarrow Z$ es un isomorfismo entre $g$ y $h$, entonces:*

1) *$\gamma^{-1}$ es un isomorfismo entre $g$ y $f$.*

2) *$\delta \circ \gamma$ es un isomorfismo entre $f$ y $h$.*

*Demostración.* 1) Como $\gamma$ es una biyección entre $X$ y $Y$, entonces $\gamma^{-1}$ es una biyección entre $Y$ y $X$. Para terminar notemos que dado $\{x, y\} \in [Y]^2$ se tiene que:

$$\gamma^{-1}(g(\{x, y\})) = \gamma^{-1}\big(g(\{\gamma(\gamma^{-1}(x)), \gamma(\gamma^{-1}(y))\})\big) = \\ \gamma^{-1}\big(\gamma(f(\{\gamma^{-1}(x), \gamma^{-1}(y)\}))\big) = f(\{\gamma^{-1}(x), \gamma^{-1}(y)\}).$$

Por lo tanto $\gamma^{-1}$ es un isomorfismo entre $g$ y $f$.

2) Como $\gamma$ es una biyección entre $X$ y $Y$, y $\delta$ es una biyección entre $Y$ y $Z$, entonces $\delta \circ \gamma$ es una biyección entre $X$ y $Z$. Para terminar notemos que dado $\{x, y\} \in [X]^2$ se tiene que:

$$\delta \circ \gamma(f(\{x, y\})) = \delta(\gamma(f(\{x, y\}))) = \delta(g(\{\gamma(x), \gamma(y)\})) = \\ h(\{\delta(\gamma(x)), \delta(\gamma(y))\}) = h(\{\delta \circ \gamma(x), \delta \circ \gamma(y)\}).$$

Por lo tanto $\delta \circ \gamma$ es un isomorfismo entre $f$ y $h$.

$\square$

**Proposición 3.1.4.** *Sean $X$ y $Y$ conjuntos y $f : [X]^2 \longrightarrow X$, $g : [Y]^2 \longrightarrow Y$, selecciones débiles. Si $\gamma : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo entre $f$ y $g$, y $A \subseteq X$, entonces $f|_{[A]^2} \approx_{\gamma|_A} g|_{[\gamma[A]]^2}$.*

*Demostración.* Claramente $\gamma|_A$ es una biyección con su imagen. La segunda condición se cumple debido a que las valuaciones de $f|_{[A]^2}$, $g|_{[\gamma[A]]^2}$ y $\gamma|_A$ coinciden con las de $f$, $g$ y $\gamma$, respectivamente.

$\square$

**Proposición 3.1.5.** *Sean $X$ y $Y$ conjuntos y $f : [X]^2 \longrightarrow X$, $g : [Y]^2 \longrightarrow Y$ selecciones débiles y $h : X \longrightarrow Y$ un encaje entre $f$ y $g$. Dados $A, B \subseteq X$ ajenos, se tiene que $A \rightrightarrows_f B$ si y solo si $h[A] \rightrightarrows_g h[B]$.*

*Demostración.* $\Rightarrow$) Supongamos que $A \rightrightarrows_f B$. Sea $x \in h[A]$ y $y \in h[B]$, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $h(a) = x$ y $h(b) = y$, y por lo tanto $y = h(a) = h(f(\{a, b\})) = g(\{h(a), h(b)\}) = g(\{x, y\})$. Concluimos que $h[A] \rightrightarrows_g h[B]$.

$\Leftarrow$)Supongamos que $h[A] \rightrightarrows_g h[B]$. Sean $a \in A$ y $b \in B$, entonces $h(a) \in h[A]$ y $h(b) \in h[B]$, por lo tanto $h(f(\{a, b\})) = g(\{h(a), h(b)\}) = h(b)$. Así, $f(\{a, b\}) = b$, lo cual nos permite concluir que $A \rightrightarrows_f B$. $\square$

**Proposición 3.1.6.** *Sean $X, Y$ dos conjuntos y $f : [X]^2 \longrightarrow X$ una selección débil. Si $h : X \longrightarrow Y$ es una función biyectiva, entonces la función $f_h : [Y]^2 \longrightarrow Y$ dada por:*

$$f_h(\{x, y\}) = h(f(h^{-1}[\{x, y\}])$$

*es una selección débil isomorfa a $f$. Más aún, $h$ es un isomorfismo entre $f$ y $g$.*

*Demostración.* Notemos que $h$ es una biyección entre $X$ y $Y$, además, para cualquier $\{x, y\} \in [X]^2$ se cumple que

$$f_h(\{h(x), h(y)\}) = h(f(h^{-1}[\{h(x), h(y)\}]) = h(f(\{x, y\})).$$

Concluimos que $h$ es un isomorfismo entre $f$ y $f_h$.

$\square$

**Proposición 3.1.7.** *Sean* $X, Y$ *dos conjuntos y* $f : [Y]^2 \longrightarrow Y$ *una selección débil. Si* $h : X \longrightarrow Y$ *es una función biyectiva, entonces la función* ${}_hf : [X]^2 \longrightarrow X$ *dada por:*

$${}_hf(\{x, y\}) = h^{-1}(f(h[\{x, y\}]))$$

*s una selección débil isomorfa a* $f$*. Más aún,* $h$ *es un isomorfismo entre* ${}_hf$ *y* $f$*.*

*Demostración.* Notemos que $h$ es una biyección entre $X$ y $Y$, además, para cualquier $\{x, y\} \in [X]^2$ se cumple que

$$h({}_hf(\{x, y\})) = h(h^{-1}(f(h[\{x, y\}])) = f(h[\{x, y\}]) = f(\{h(x), h(y)\}).$$

Concluimos que $h$ es un isomorfismo entre ${}_hf$ y $f$. □

## 3.2. Selecciones sobre $\omega$ y la selección universal

En esta sección construiremos a la selección universal. Dicho selección, es una selección débil sobre $\omega$, que cumple que toda selección débil numerable, se encaja en ella. Para empezar nuestra construcción será necesario fijar un poco de notación primero.

**Definición 3.2.1.** *Sea* $f : [\omega]^2 \longrightarrow \omega$ *una selección débil propia, y sean* $A, B \subseteq \omega$ *no vacios. Diremos que* $A \rightrightarrows_f^* B$ *si existen* $n, m \in \omega$*, tales que* $A \backslash n \neq \emptyset$*,* $B \backslash m \neq \emptyset$ *y*

$$A \backslash n \rightrightarrows_f B \backslash m.$$

*Adiciónalmente, diremos que* $A||_f^* B$ *si* $A \rightrightarrows_f^* B$ *o* $B \rightrightarrows_f^* A$*.*

**Lema 3.2.2.** *Sea* $f : [\omega]^2 \longrightarrow \omega$ *una selección débil propia y* $\mathcal{A}$ *una familia casi ajena, entonces* $f$ *se extiende a una selección continua débil propia sobre* $\Psi(\mathcal{A})$ *si y solo si:*

(1) *Para cualesquiera* $A, B \in \mathcal{A}$ *con* $A \neq B$*, se cumple que* $A||_f^* B$ *y*

(2) *para cualquier* $n \in \omega$ *y* $A \in \mathcal{A}$ *se cumple que* $\{n\}||_f^* A$*.*

*Demostración.* $\Rightarrow$) Supongamos que $f$ se puede extender a a una selección continua débil propia $\Psi(\mathcal{A})$. Sea $F : [\Psi(\mathcal{A})]^2 \longrightarrow \Psi(\mathcal{A})$ dicha selección, entonces:

(1) Sean $A, B \in \mathcal{A}$ distintos, y supongamos sin pérdida de generalidad que $F(\{A, B\}) = B$. Como $F$ es una selección continua débil y $\Psi(\mathcal{A})$ es $T_2$ entonces por la Proposición 2.2.9 existen $C_A, C_B \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ abiertos ajenos, tales que $A \in C_A$, $B \in C_B$ y $C_A \rightrightarrows_F C_B$. Por como definimos la topología en $\Psi(\mathcal{A})$, sabemos que existen $n_A, n_B \in \omega$ tales que $A \backslash n_A \subseteq C_A$ y $B \backslash n_B \subseteq C_B$. Sea $n = \max\{n_A, n_B\}$, entonces $A \backslash n \subseteq C_A$ y $B \backslash n \subseteq C_B$, por lo tanto para cualquier $x \in A \backslash n$ y $y \in B \backslash n$ tendremos que $F(\{x, y\}) = f(\{x, y\}) = y$. Así, concluimos que $A \backslash n \rightrightarrows_f B \backslash n$ y por lo tanto $A||^*_f B$.

(2) Sea $n \in \omega$ y $A \in \Psi(\mathcal{A})$, como $F$ es una selección continua débil, entonces existen $C, D \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ abiertos ajenos tales que $n \in C$, $A \in D$ y $C||_F D$, como $D$ es un abierto que tiene a $A$, entonces existe $n_0 \in \omega$ tal que $A \backslash n_0 \subseteq D$. También tenemos que $\{n\} \subseteq C$, por lo que $\{n\}||_F A \backslash n_0$. Notemos por último que para cualquier $x \in A \backslash n_0$ se cumple que $f(\{n, x\}) = F(\{n, x\})$, por lo tanto tendremos que $\{n\}||_f A \backslash n_0$, y así $\{n\}||^*_f A$.

$\Leftarrow$) Definimos $F : [\Psi(\mathcal{A})]^2 \longrightarrow \Psi(\mathcal{A})$ como sigue:

$$F(\{x, y\}) = \begin{cases} f(\{x, y\}) & si\ x, y \in \omega \\ y & si\ x \in \omega,\ y \in \mathcal{A}\ y\ \{x\} \rightrightarrows^*_f y \\ x & si\ x \in \omega,\ y \in \mathcal{A}\ y\ y \rightrightarrows^*_f \{x\} \\ y & si\ x, y \in \mathcal{A}\ y\ x \rightrightarrows^*_f y. \end{cases}$$

Por (1) y (2) tenemos que $F$ está bien definida para cualquier elemento en $[\Psi(\mathcal{A})]^2$. Además, por definición tenemos que $F$ es una selección débil y extiende a $f$.

Sea $\{x, y\} \in [\Psi(\mathcal{A})]^2$ y supongamos que $F\{x, y\} = y$. Para comprobar la continuidad consideraremos 4 casos:

1) ($x, y \in \mathcal{A}$) Por (1) existe $n_1 \in \omega$ tal que $x \backslash n \rightrightarrows_f y \backslash n$, notemos que para cualquier $z \in x \backslash n$ y $w \in y \backslash n$ se cumple que $\{z\} \rightrightarrows_f y \backslash n$ y $x \backslash n \rightrightarrows_f \{w\}$, es decir, $\{z\} \rightrightarrows^*_f y$ y $x \rightrightarrows^*_f \{w\}$, por lo tanto $F(\{z, y\}) = y$ y $F(\{x, w\}) = w$. Además $F(\{z, w\}) = f(\{z, w\}) = w$, con esto podemos concluir que $F(\{a, b\}) = b$ para cualquier $a \in \{x\} \cup x \backslash n$ y $b \in \{y\} \cup y \backslash n$.

Para terminar consideremos a $A = \{x\} \cup x \backslash n$ y $B = \{y\} \cup y \backslash n$, entonces $A$ y $B$ son abiertos que tienen a $x$ y $y$, respectivamente, y además $A \rightrightarrows_F B$.

2) ($x \in \omega$ y $y \in A$) Por (2) sabemos que existe $n \in \omega$ tal que $\{x\} \rightrightarrows_f y \backslash n$, notemos que para todo $z \in y \backslash n$ se cumple que $F(\{x, z\}) = f(\{x, z\}) = z$. Sean $A = \{x\}$ y $B = \{y\} \cup y \backslash n$, entonces A y B son dos abiertos que tienen a $x$ y $y$, respectivamente, y $A \rightrightarrows_F B$.

3) ($y \in \omega$, $x \in A$) Por 2. sabemos que existe $n \in \omega$ tal que $x \backslash n \rightrightarrows_f \{y\}$, notemos que para todo $z \in x \backslash n$ se cumple que $F(\{y, z\}) = f(\{y, z\}) = y$. Sean $B = \{y\}$ y $A = \{x\} \cup y \backslash n$, entonces B y A son dos abiertos que tienen a $y$ y $x$, respectivamente, y $A \rightrightarrows_F B$.

4) ($x, y \in \omega$) Solo notemos que $\{x\}$ y $\{y\}$ son abiertos en $\Psi(\mathcal{A})$ y cumplen que $\{x\} \rightrightarrows \{y\}$.

Así, $F$ es continua.

$\square$

**Definición 3.2.3. (Propiedad $\mathcal{D}$)** *Sean $X$ un conjunto y $f : [X]^2 \longrightarrow X$ una selección débil. Diremos que $f$ cumple la propiedad $\mathcal{D}$ si para cualesquiera $F, G \in [X]^{<\omega}$ ajenos, existe $x \in X \backslash (F \cup G)$ tal que*

$$F \rightrightarrows_f \{x\} \rightrightarrows_f G.$$

**Proposición 3.2.4.** *Existe una selección débil $\Phi : [\omega]^2 \longrightarrow \omega$ que cumple la propiedad $\mathcal{D}$:*

*Demostración.* Sea $X = \{f : [n]^2 \longrightarrow n \mid n \in \omega$ y $f$ es una selección débil propia$\}$, definimos el orden $\prec$ sobre $X$ de la siguiente manera:

$$\text{Dados } f, g \in X,\ f \prec g \text{ si y solo si } g \subseteq f.$$

Sea $\mathbb{P} = (X, \prec, \emptyset)$, entonces $\mathbb{P}$ es un forcing. Dados $F, G \in [\omega]^{<\omega}$ ajenos, consideramos al conjunto

$$D_{(F,G)} = \{f : [k]^2 \longrightarrow k \mid f \in X,\ F \cup G \subseteq k \text{ y existe } n \in k \backslash (F \cup G) \text{ tal que } F \rightrightarrows_f \{n\} \rightrightarrows G\}.$$

Afirmamos que $D_{(F,G)}$ es denso. Para esto, sea $g \in X$ y $n = \text{mín}\{k \in \omega \mid Dom(g) \subseteq [k]^2$ y $F \cup G \subseteq k\}$. Definimos $f : [n+1]^2 \longrightarrow n + 1$ como sigue:

$$f(\{x,y\}) = \begin{cases} g(\{x,y\}) & \text{si } \{x,y\} \in Dom(g) \\ \text{máx}(\{x,y\}) & \text{si } \{x,y\} \notin Dom(g) \; y \; \{x,y\} \cap G = \emptyset \\ \text{mín}(\{x,y\}) & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Por definición se tiene que $f \in X$, $f \prec g$ y $F \cup G \subseteq n+1$. Ahora, notemos que dado $i \in F \cup G$ se cumple que $i < n$, por lo que dado $m \in F$, como $F \cap G = \emptyset$ y $\{n,m\} \notin Dom(g)$, entonces $f(\{m,n\}) = n$ y así $F \rightrightarrows_f \{n\}$. Por otro lado, dado $m \in G$ se cumple que $\{m,n\} \notin Dom(g)$ y $\{m,n\} \cap G \neq \emptyset$, así, $f(\{n,m\}) = m$, y por lo tanto $\{n\} \rightrightarrows_f G$. Concluimos que $f \in D_{(F,G)}$, y con esto comprobamos que $D_{(F,G)}$ es denso.

Como la familia $\mathcal{M} = \{D_{(F,G)} \mid F,G \in [\omega]^{<\omega}$ y $F \cap G = \emptyset\}$ es numerable, entonces podemos tomar un filtro $\mathcal{F}$ que interseque a todo elemento de $\mathcal{M}$. Notemos primero que $\mathcal{F}$ es una familia de funciones compatibles, por lo que $\Phi = \bigcup \mathcal{F}$ es una función. Para verificar que es la función que buscamos, verificaremos las siguientes propiedades:

1) ($Dom(\Phi) = [\omega]^2$ y $\Phi$ es una selección). Sean $m,n \in \omega$ distintos, entonces existe $f \in D_{(\{n\},\{m\})}$ tal que $f \in \mathcal{F}$- Así $f \subseteq \Phi$, por lo tanto $\{n,m\} \in Dom(\Phi)$ y $\Phi(\{n.m\}) = f(\{n,m\}) \in \{n,m\}$. Con esto concluimos que $\Psi$ es una selección y $[\omega]^2 \subseteq Dom(\Phi)$, pero para cualquier $f \in X$ se cumple que $Dom(f) \subseteq [\omega]^2$, por lo tanto $Dom(\Phi) = [\omega]^2$.

2) ($\Phi$ cumple la propiedad $\mathcal{D}$). Sean $F,G \in [\omega]^{<\omega}$ ajenos, entonces existe $f \in D_{(F,G)}$ tal que $f \in \mathcal{F}$, así $f \subseteq \Phi$. Como $f \in D_{(F,G)}$, entonces existe $n \in \omega \backslash (F \cup G)$ tal que $F \rightrightarrows_f \{n\} \rightrightarrows_f G$, pero $\Phi|_{Dom(f)} = f$. Así, $F \rightrightarrows_\Phi \{n\} \rightrightarrows_\Phi G$.

Con esto concluimos la prueba. □

Desde ahora, llamaremos $\Phi$ a la selección descrita anteriormente.

**Proposición 3.2.5.** *Si $f : [\omega]^2 \longrightarrow \omega$ y $g : [\omega]^2 \longrightarrow \omega$ son dos selecciones que cumplen la propiedad $\mathcal{D}$, entonces $f \approx g$.*

*Demostración.* Construiremos recursivamente una familia de funciones $f_i$ de la siguiente manera:

- $f_0 : 1 \longrightarrow \omega$ dada por $f(0) = 0$
- Supongamos que hemos definido para alguna $i \in \omega$ a $f_i : A \longrightarrow \omega$ con $A \subseteq \omega$ finito, y de tal manera que $f_i$ es un encaje de $f|_{[A]^2}$ a $g$ si $i$ es par, y es un encaje de $g|_{[A]^2}$ a $f$ si $i$ es impar. Definimos $f_{i+1}$ considerando los siguientes casos:

  1) Si $i$ es par, sea $n_i = \text{mín}\{k \in \omega \mid k \notin Im(f_i)\}$, y definamos los conjuntos
  $$G_i := \{k \in Im(f_i) \mid k \to_g n_i\}$$
  y
  $$G^i := \{k \in Im(f_i) \, | n_i \to_g k\}.$$
  Notemos que $G_i \cap G^i = \emptyset$ y $G_i \cup G^i = Im(f_i)$, como $f$ es función y cumple la propiedad $\mathcal{D}$, entonces existe
  $$m_i \in \omega \backslash (f_i^{-1}[G_i] \cup f_i^{-1}[G^i]) = \omega \backslash Dom(f_i).$$
  tal que $f_i^{-1}[G_i] \rightrightarrows_f \{m_i\} \rightrightarrows_f f_i^{-1}[G^i]$. Definimos entonces a $f_{i+1} : Im(f_i) \cup \{n_i\} \longrightarrow \omega$ de la siguiente manera:
  $$f_{i+1}(k) = \begin{cases} f_i^{-1}(k) & \text{si } k \in Im(f_i) \\ m_i & \text{si } k = n_i. \end{cases} \tag{3.4}$$
  Notemos que $f_{i+1}$ está bien definida, ya que $f_i$ es inyectiva y por definición $n_i \notin Im(f_i)$.

  2) Si $i$ es impar, sea $n_i = \text{mín}\{k \in \omega \mid k \notin Im(f_i)\}$. Definimos los siguientes conjuntos:
  $$F_i = \{k \in Im(f_i) \mid k \to_f n_i\}$$
  y
  $$F^i = \{k \in Im(F_i) \, | n_i \to_f k\}.$$
  Notemos que $F_i \cap F^i = \emptyset$ y $F_i \cup F^i = Im(f_i)$, como $g$ es función y cumple la propiedad $\mathcal{D}$, entonces existe
  $$m_i \in \omega \backslash (f_i^{-1}[F_i] \cup f_i^{-1}[F^i]) = \omega \backslash Dom(f_i),$$
  tal que $f_i^{-1}[G_i] \rightrightarrows_g \{m_i\} \rightrightarrows_g f_i^{-1}[F^i]$. Definimos entonces a $f_{i+1} : Im(f_i) \cup \{n_i\} \longrightarrow \omega$ de la siguiente manera:
  $$f_{i+1}(k) = \begin{cases} f_i^{-1}(k) & \text{si } k \in Im(f_i) \\ m_i & \text{si } k = n_i. \end{cases} \tag{3.5}$$

Para cada $i \in \omega$, por definición tenemos que $f_i^{-1} \subseteq f_{i+1}$ y por lo tanto $f_i \subseteq f_{i+2}$ y $Im(f_i) \subseteq Dom(f_{i+1})$, así, podemos concluir que $h = \bigcup_{i\in\omega} f_{2i}$ es una función. Las siguientes propiedades también se cumplen:

(a) Dado $i \in \omega$, $i+1 \subseteq Im(f_{2i+1})$ y $i+1 \subseteq Im(f_{2i+2})$.

La propiedad es claramente cierta para $n = 0$. Supongamos ahora que la propiedad es cierta para algún $i \in \omega$, como por definición $n_{2i+1} = \min\{k \in \omega \mid k \notin Im(f_{2i+1})\}$, y por hipotesis $i+1 \subseteq Im(f_{2i+1})$, entonces $n_{2i+1} > k$ para cualquier $k \in i+1$. Por lo tanto $i+1 \leq n_{2i+1}$, y como $n_{2i+1} \in Dom(f_{2i+2}) \subseteq Im(f_{2i+3})$, entonces por la minimalidad de $n_{2i+1}$ tenemos que $i+1 \in Im(f_{2i+3})$.Así

$$\begin{aligned} i+2 = i+1 \cup \{i+1\} &\subseteq Im(f_{2i+1}) \cup \{n_{2i+1}\} \\ &= Dom(f_{2i+2}) \subseteq Im(f_{2i+3}) \\ &= Im(f_{2(i+1)+1}). \end{aligned}$$

De manera completamente análoga concluimos que $i+2 \subseteq f_{2(i+1)+1}$, y así, la propiedad es cierta para $i+1$. Con esto concluimos que la propiedad es cierta para cualquier $i \in \omega$.

(b) Dado $i \in \omega$ entonces $f_{2i}$ es un isomorfismo entre $f|_{[Dom(f_{2i})]^2}$ y $g|_{[Im(f_{2i})]^2}$, y $f_{2i-1}$ es un isomorfismo entre $g|_{[Dom(f_{2i-1})]^2}$ y $f|_{[Im(f_{2i-1})]^2}$.

En efecto, $f_0$ cumple lo que queremos. Supongamos ahora que para algún $i \in \omega$ se cumple que $f_{2i}$ es un isomorfismo entre $f|_{[Dom(f_{2i})]^2}$ y $g|_{[Im(f_{2i})]^2}$, entonces $f_{2i}^{-1} = f_{2i+1}|_{Im(f_{2i})}$ es un isomorfismo entre $g|_{[Im(f_{2i})]^2}$ y $f|_{[Dom(f_{2i})]^2}$. Por construcción tenemos que $f_{2i+1}$ es una función biyectiva sobre su imagen, para ver que es un isomorfismo tomemos $\{x,y\} \in [Dom(f_{2i+1})]^2$, si $\{x,y\} \in [Im(f_{2i})]^2$ entonces por la observación hecha anteriormente tenemos que

$$f_{2i+1}(g(\{x,y\})) = f(f_{2i+1}(x), f_{2i+1}(y)).$$

Por otro lado, si $\{x,y\} \notin [Im(f_{2i})]^2$ entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x = n_{2i}$, por lo que tenemos dos casos:

- Si $y \in G_{2i}$ entonces $g(\{x,y\}) = g(\{n_{2i}, y\}) = n_{2i}$. Además $f_{2i+1}(y) = f_{2i}^{-1}(y) \in f_{2i}^{-1}[G_{2i}]$, por lo tanto $f(\{f_{2i+1}(y), m_{2i}\}) = m_{2i}$, de esta manera concluimos que:

$$f_{2i+1}(g(\{x,y\})) = f_{2i+1}(n_{2i}) = m_{2i} = f(\{f_{2i+1}(y), f_{2i+1}(x)\}).$$

- Si $y \in G^{2i}$, entonces $g(\{x,y\}) = g(\{n_{2i}, y\}) = y$, además $f_{2i+1}(y) = f_{2i}^{-1}(y) \in f_{2i}^{-1}[G^{2i}]$, por lo que $f(\{f_{2i+1}(y), m_{2i}\}) = f_{2i+1}(y)$, de esta manera concluimos que:

$$f_{2i+1}(g(\{x,y\})) = f_{2i+1}(y) = f(\{f_{2i+1}(y), f_{2i+1}(x)\}).$$

Con esto concluimos que $f_{2i+1}$ cumple la propiedad, y utilizando este hecho, podemos concluir de manera completamente análoga que $f_{2i+1}$ también la cumple. Por inducción concluimos que la propiedad se cumple para cualquier $i \in \omega$.

Gracias a la propiedad $(a)$ tenemos que $h$ es una biyección de $\omega$ en $\omega$. Por otro lado, dados $x, y \in \omega$ distintos existe $n \in \omega$ tal que $x, y \in Dom(f_{2n})$, y por lo tanto

$$h(f(\{x,y\})) = f_{2n}(\{x.y\}) = g(\{f_{2n}(x), f_{2n}(y)\}) = g(\{h(x), h(y)\}).$$

Se sigue que $h$ es un isomorfismo. □

Notemos que el único papel que jugó $\omega$ en la proposición anterior es el de ser un conjunto numerable, cosa que nos permitió definir recursivamente las funciones de apoyo. Realmente pudimos enunciar el teorema pidiendo simplemente que $f$ y $g$ fueran dos selecciones débiles sobre conjuntos numerables, la razón por la que no lo hicimos de esta manera es para evitar una carga excesiva de notación que hubiera dificultado la lectura de la prueba. Enunciaremos de nuevo la proposición en su versión más general para enriquecimiento del texto.

**Proposición 3.2.6.** *Sean $X$ y $Y$ conjuntos numerables y $f : [X]^2 \longrightarrow X$ y $g : [Y]^2 \longrightarrow Y$ dos selecciones que cumplen la propiedad $\mathcal{D}$. Entonces $f \approx g$.*

La proposición anterior resulta ser muy importante pues nos permite caracterizar a $\Phi$ como la única selección definida sobre un conjunto numerable que cumple la propiedad $\mathcal{D}$. Dicho formalmente llegamos al siguiente teorema.

**Teorema 3.2.7.** *Sean $X$ un conjunto numerable y $f : [X]^2 \longrightarrow X$ una selección débil, entonces $f \approx \Phi$ si y solo si $f$ cumple la propiedad $\mathcal{D}$.*

*Demostración.* $\Rightarrow$) Sean $h : X \longrightarrow \omega$ un isomorfismo entre $f$ y $\Phi$ y $F, G \in [X]^{<\omega}$ disjuntos. Como $\Phi$ cumple la propiedad $\mathcal{D}$ entonces existe $n \in \omega \backslash (h^{-1}[F] \cup h^{-1}[G])$ tal que $h^{-1}[F] \rightrightarrows_\Phi \{n\} \rightrightarrows_\Phi h^{-1}[G]$, y como $h$ es un isomorfismo entonces $h(n) \in X \backslash (F \cup G)$ y $F \rightrightarrows_f \{h(n)\} \rightrightarrows_f G$. Concluimos que $f$ cumple la propiedad $\mathcal{D}$.

$\Leftarrow$)Esta implicación es directa de la Proposición 3.2.6. $\square$

**Definición 3.2.8.** *Sea $\Phi$ la selección universal. Definimos $\mathcal{R} := \{A \subseteq \omega \mid \Phi|_{[A]^2} \approx \Phi\}$.*

Gracias al Teorema 3.2.7 podemos concluir que $A \in \mathcal{R}$ si y solo si $A$ es numerable y $\Phi|_{[A]^2}$ cumple la propiedad $\mathcal{D}$. Esta equivalencia nos será útil para demostrar la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.9.** *Sea $\Phi$ la selección universal, entonces:*

*a) Cualquier selección débil propia sobre $\omega$ se encaja en $\Phi$.*

*b) Dada $\{P_0, P_1\}$ una partición de $\omega$, se cumple que $P_0 \in \mathcal{R}$ o $P_1 \in \mathcal{R}$.*

*c) Si $F, G \in [\omega]^{<\omega}$ son disjuntos, entonces*

$$\{k \in \omega \backslash (F \cup G) \mid F \rightrightarrows_\Phi \{k\} \rightrightarrows_\Phi G\} \in \mathcal{R}.$$

*Demostración.* a) Sea $f : [\omega]^2 \longrightarrow \omega$ una selección débil, definimos recursivamente las siguientes funciones:

- $f_0 : 1 \longrightarrow \omega$ dada por $f(0) = 0$.
- Suponiendo que hemos definido $f_i : i+1 \longrightarrow \omega$ para alguna $i \in \omega$, consideramos a $G_{i+1} = \{k \in i+1 \mid k \rightarrow_f i+1\}$ y $G^{i+1} = \{k \in +1 \mid i+1 \rightarrow_f k\}$. Como $\Phi$ cumple la propiedad $\mathcal{D}$, entonces existe $m_{i+1} \in \omega$ tal que $f[G_{i+1}] \rightrightarrows_\Phi \{m_{i+1}\} \rightrightarrows_\Phi f[G^{i+1}]$. Definimos entonces $f_{i+1} : i+2 \longrightarrow \omega$ de la siguiente manera:

$$f_{i+1}(x) = \begin{cases} f_i(x) & si\ x \neq i+1 \\ m_{i+1} & si\ x = i+1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Por construcción tenemos que $f_i \subseteq f_{i+1}$ y $Dom(f_i) = i + 1$ para cualquier $i \in \omega$, por lo tanto $h = \bigcup_{i\in\omega} f_i$ es una función de $\omega$ en $\omega$. Además, cada $f_i$ es inyectiva por lo que $h$ también lo es. Para ver que $h$ es un encaje consideremos $m, n \in \omega$ distintos. Sin pérdida de generalidad supongamos que $n > m$, entonces $n = k + 1$ para algún $k \in \omega$. Si $m \in G_{k+1}$ entonces $f(\{m, n\}) = n$ y $f_k(m) \in f_k[G_{k+1}]$, y por lo tanto $\Phi(\{f_k(m), m_{k+1}\}) = m_{k+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} h(f(\{n, m\})) &= f_{k+1}(f(\{n, m\})) \\ &= m_{k+1} \\ &= \Phi(\{f_k(m), m_{k+1}\}) \\ &= \Phi(\{h(m), h(n)\}). \end{aligned}$$

Ahora, si $m \in G^{k+1}$, de manera similar podemos ver que $h(f(\{n, m\})) = \Phi(\{h(m), h(n)\})$ y por lo tanto $h$ es un encaje.

b) Por contradicción, supongamos que existe una partición $\{P_1, P_0\}$ de $\omega$ tal que para cualquier $i \in \{0, 1\}$ se cumple que $P_i \notin \mathcal{R}$. Entonces se debe tener que $\Phi|_{P_i}$ no cumple la propiedad $\mathcal{D}$, y por lo tanto existen $F_i, G_i \in [P_i]^{<\omega}$ ajenos tales que para cualquier $n \in P_i$ se cumple que $F_i$ no domina a $\{n\}$ o $\{n\}$ no domina a $G_i$ respecto a $\Phi|_{P_i}$. Notemos que $(F_0 \cup F_1) \cap (G_0 \cup G_1) = \emptyset$. Además, como $\Phi$ cumple la propiedad $\mathcal{D}$, existe $m \in \omega\setminus(F_0 \cup F_1 \cup G_0 \cup G_1)$ tal que $F_0 \cup F_1 \rightrightarrows_\Phi \{m\} \rightrightarrows_\Phi G_0 \cup G_1$. En particular se tiene que $F_0 \rightrightarrows_\Phi \{m\} \rightrightarrows_\Phi G_0$ y $F_0 \rightrightarrows_\Phi \{m\} \rightrightarrows_\Phi G_0$, pero por ser $\{P_0, P_1\}$ una partición, se tiene que $m \in P_0$ o $m \in P_1$, lo cual es una contradicción.

c) Sean $F, G \in [\omega]^{<\omega}$ ajenos, y supongamos por contradicción que

$$A = \{k \in \omega\setminus(F \cup G) \mid F \rightrightarrows_\Phi \{k\} \rightrightarrows_\Phi G\} \notin \mathcal{R}.$$

Por *b)* tenemos que $\omega\setminus A \in \mathcal{R}$. y $F \cup G \subseteq \omega\setminus A$, existe $n \in (\omega\setminus A)\setminus(F \cup G)$ tal que $F \rightrightarrows_\Phi \{n\} \rightrightarrows_\Phi G$. Pero por definición de $A$ se debe tener que $n \in A$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $A \in \mathcal{R}$.

□

**Corolario 3.2.10.** *Si $X$ es numerable y $f : [X]^2 \longrightarrow X$ es una selección débil, entonces $f$ se encaja en $\Phi$.*

**Lema 3.2.11.** *Sea $X \in \mathcal{R}$ y $\preceq$ un orden total sobre $\omega$, entonces:*

1) *Existen $x, y \in X$ tales que $x \prec y$ y $x \to_\Phi y$.*

2) *Existen $z, w \in X$ tales que $z \prec w$ y $w \to_\Phi z$.*

*Demostración.* 1) Sean $a, b \in X$ distintos, y supongamos sin pérdida de generalidad que $a \prec b$. Como $X \in \mathcal{R}$, entonces existe $c \in X \backslash \{a, b\}$ tal que $\Phi(\{a, c\}) = c$ y $\Phi(\{b, c\}) = b$. Si $a \prec c$, entonces proponemos a $x = a$ y $y = c$. Si $c \prec a$, entonces por transitividad tenemos que $c \prec b$, y en este caso proponemos a $x = c$ y $y = b$.

2) Sean $a, b \in X$ distintos, supongamos sin pérdida de generalidad que $b \prec a$. Como $X \in \mathcal{R}$, entonces existe $c \in X \backslash \{a, b\}$ tal que $\Phi(\{a, c\}) = c$ y $\Phi(\{b, c\}) = b$. Si $c \prec a$, entonces proponemos a $w = a$ y $z = c$. Si $a \prec c$, entonces por transitividad tenemos que $b \prec c$, y en este caso proponemos a $w = c$ y $z = b$.

$\square$

La siguiente proposición resultará fundamental mas adelante.

**Proposición 3.2.12.** *Sea $\preceq$ un orden total sobre $\omega$. Si $X \in \mathcal{R}$ entonces existen $X_0, X_1 \in [X]^\omega$ tales que:*

- $X_0 \cap X_1 = \emptyset$.
- $X_0 \rightrightarrows_\Phi X_1$.
- $X_0 \cup X_1$ *es monótono respecto a $\preceq$.*

*Demostración.* Sea $X \in \mathcal{R}$. Si $X \cap (-\infty, 0)_\preceq \in \mathcal{R}$, definimos $M_0 = X \cap (-\infty, 0)_\preceq$, si no, entonces $X \backslash (X \cap (-\infty, 0)_\preceq) = X \cap [0, \infty)_\preceq \in \mathcal{R}$ y en este caso definamos $M_0 = X \cap [0, \infty)_\preceq$. Notemos que en ambos casos $M_0 \in \mathcal{R}$, después consideramos $x_0, y_0 \in M_0$ tales que $x_0 \prec y_0$ y $x_0 \to_\Phi y_0$ y definimos

$$D_1 = \{n \in M_0 \backslash \{x_0, y_0\} \mid \{x_0\} \rightrightarrows_\Phi \{n\} \rightrightarrows_\Phi \{y_0\}\},$$

el cual, por la Proposición 3.2.9 pertenece a $\mathcal{R}$. Ahora definimos $M_1 = D_1 \cap (-\infty, 1)_\preceq$ si $D_1 \cap (-\infty, 1)_\preceq \in \mathcal{R}$ y $M_1 = D_1 \cap [1, \infty)_\preceq$ en caso contrario. Ahora tomamos $x_1, y_1 \in M_1$, tales que $y_1 \prec x_1$ y $x_1 \to_\Phi y$ (notemos que $\{x_0, x_1\} \rightrightarrows_\Phi \{y_0, y_1\}$), y definimos

$$D_2 = \{n \in M_1 \backslash \{x_1, y_1\} \mid \{x_1\} \rightrightarrows_\Phi \{n\} \rightrightarrows_\Phi \{y_1\}\}.$$

Siguendo el proceso anterior, podemos construir recursivamente $\{M_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{R}$ y conjuntos disjuntos $W_0 = \{x_n \mid n \in \omega\}$ y $W_1 = \{y_n \mid n \in \omega\}$ tales que para cualquier $n \in \omega$ se cumple que:

1) $M_{n+1} \subseteq M_n$.

2) $M_n \subseteq (-\infty, n)_\preceq$ o $M_n \subseteq [n, \infty)_\preceq$.

3) $\{x_0, \dots, x_n\} \rightrightarrows_\Phi \{y_0, \dots, y_n\}$.

4) $x_n \prec y_n$ si $n$ es par.

5) $y_n \prec x_n$ si $n$ es impar.

6) $x_n, y_n \in M_n$.

Consideremos ahora los conjuntos $S = \{n \in \omega \mid M_m \subseteq [n, \infty)_\preceq\}$ y $T = \{n \in \omega \mid M_n \subseteq (-\infty, n)_\preceq\}$. Por 2) tenemos que $S \cup T = \omega$, además notemos que $S$ es un $\preceq$ −segmento inicial. Para ver esto tomemos $n \in S$ y $m \prec n$, entonces $[n, \infty)_\preceq \subseteq [m, \infty)_\preceq$. Si $m > n$ entonces $M_m \subseteq M_n \subseteq [n, \infty)_\preceq \subseteq [m, \infty)_\preceq$, y por lo tanto $m \in S$. Si $m < n$ entonces $M_n \subseteq M_m$, supongamos que $M_m \not\subseteq [m, \infty)_\preceq$, entonces $M_m \subseteq (-\infty, m)_\preceq$ y por lo tanto $M_n \subseteq (-\infty, m)_\preceq \subseteq (-\infty, n)_\preceq$, lo cual es una contradicción. Así, en este caso también se tiene que $m \in S$. De manera análoga podemos ver que $T$ es un segmento final. Tomemos ahora $n \in S$, por 6) tenemos que $(W_0 \cup W_1) \cap (-\infty, n)_\preceq \subseteq \{x_i \mid i < n\}$ y por lo tanto es finito. De manera análoga vemos que $(W_0 \cup W_1) \cap (n, \infty)_\preceq$ es finito para cualquier $n \in T$.

Para concluir la prueba notemos que $S \cap W_0$ y $S \cap W_1$ son ambos infinitos o $T \cap W_0$ y $T \cap W_1$ lo son. En efecto, supongamos que $S \cap W_0$ es finito, entonces como $T \cup S = \omega$ se debe tener que existe $k \in \omega$ tal que para todo $n > k$ se cumple que $x_n \in T$. Esto implica que $W_0 \cap T$ es infinito; además, para cada $j > k$ par, se tiene que $x_j \prec y_j$, como $T$ es un segmento final entonces $y_j \in T$ y por lo tanto $T \cap W_1$ también es infinito. El caso en el que $S \cap W_1$ es finito se analiza de manera análoga. Ahora definimos $X_0 = S \cap W_0$ y $X_1 = S \cap W_1$ si dichos conjuntos son infinitos y $X_0 = T \cap W_0$ y $X_1 = T \cap W_1$ en otro caso; entonces $X_0, X_1 \subseteq [X]^\omega$ y $X_0 \cap X_1 = \emptyset$. Por 3) se cumple que $X_0 \rightrightarrows_\Phi X_1$, y por las aclaraciones hechas en el párrafo anterior se tiene que $X_0 \cup X_1$ es $\preceq$ −monótono. $\square$

## 3.3. Contraejemplo Principal

El Teorema 2.3.2 tiene como requisitos que nuestro espacio topológico $X$ sea compacto. Una pregunta natural es si es posible debilitar dicha hipótesis, y veremos con el contraejemplo de esta sección, que dicha hipótesis no puede ser debilitada, por lo menos, a compacidad local. Este contraejemplo fue mostrado originalmente en [4].

**Lema 3.3.1.** *Existe una familia casi ajena $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ que cumple:*

(1) $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$.

(2) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}$ *donde* $\mathcal{R}$ *es la familia definida en 3.2.8.*

(3) $A||^*_\Phi B$ *para cualesquiera* $A, B \in \mathcal{A}$ *distintos.*

*Demostración.* Vamos a centrar nuestra atención en $2^{<\omega}$. Dados $h, g \in 2^{<\omega}$ escribiremos $h \not\perp g$ si y solo si $h \subseteq g$ o $g \subseteq h$, en caso contrario escribiremos $g \perp h$. Para cada $f \in 2^\omega$ nos fijamos en la rama

$$A_f = \{g \in 2^{<\omega} \mid g \subseteq f\} = \{f|_n \mid n \in \omega\}$$

definida por $f$. Notemos que el conjunto $M = \{A_f \mid f \in 2^\omega\}$ es una familia casi ajena sobre $2^{<\omega}$. Además, dados $h, g \in 2^{<\omega}$ tendremos que $h \not\perp g$ si y solo si existe $f \in 2^\omega$ tal que $h, g \in A_f$. Por último, dados $h, g \in 2^{<\omega}$ tales que $h \perp g$, denotamos por $n_{(h,g)} = \text{mín}\{n \in \omega \mid h(n) \neq g(n)\}$.

Definimos $\gamma : [2^{<\omega}]^2 \longrightarrow 2^{<\omega}$ de la siguiente manera:

$$\gamma(\{f, g\}) = \begin{cases} f & si\ f \not\perp g\ y\ \Phi(\{|f|, |g|\}) = |f| \\ f & si f \perp g\ y f(n_{(f,g)}) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Entonces $\gamma$ es una selección débil, y como $2^{<\omega}$ es numerable, entonces $\gamma$ se encaja en $\Phi$.

Sea $\delta$ un encaje de $\gamma$ en $\Phi$. Para cualquier $f \in 2^\omega$ se cumple que la función cardinalidad $|.|$ sobre $A_f$ es una biyección con $\omega$. Además, como $\gamma|_{[A_f]^2}$ coincide con la función $_{|.|}\Phi$ definida en la Proposición 3.1.7, entonces $\gamma|_{[A_f]^2}$ es isomorfa a $\Phi$, gracias a lo cual podemos concluir que $\delta[A_f] \in \mathcal{R}$ para cualquier $f \in 2^\omega$.

Tomemos ahora $f, g \in 2^\omega$ distintos y

$$j = \text{mín}\{n \in \omega \mid f(m) \neq g(n)\}.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(j) = 0$, entonces para cualquier $i \leq j$ se tiene que $f|_i = g|_i$ y para cualquier $h \in A_f \backslash \{f|_0, \ldots, f|_j\}$ y $h' \in A_g \backslash \{f|_0, \ldots, f|_j\}$ se tiene que $h \perp h'$, $j \in Dom(h)$, $j \in Dom(h')$ y $j = n_{(h,h')}$. Por lo tanto $h(n_{(h,h')}) = f(j) = 0$ y por definición de $\gamma$ tenemos que $\gamma(\{h, h'\}) = h$, con esto concluimos que $A_g \backslash \{f|_0, \ldots, f|_j\} \rightrightarrows_\gamma A_f \backslash \{f|_0, \ldots, f|_j\}$, y por lo tanto $\delta[A_g \backslash \{f|_0, \ldots, f|_j\}] \rightrightarrows_\Phi \delta[A_f \backslash \{f|_0, \ldots, f|_j\}]$. Si consideramos $m \in \omega$ tal que $\{\delta(f|_0), \ldots, \delta(f|_j)\} \subseteq m$, entonces $\delta[A_g] \backslash m \subseteq A_g \backslash \{f|_0, \ldots, f|_j\}$ y $\delta[A_f] \backslash m \subseteq A_f \backslash \{f|_0, \ldots, f|_j\}$. Así, $\delta[A_g] \backslash m \rightrightarrows_\Phi \delta[A_f] \backslash m$, y por lo tanto $h[A_f] ||^*_\Phi h[A_g]$ para cualesquiera $f, g \in 2^\omega$ distintos.

Definamos

$$\mathcal{A} := \{h[A_f] \mid f \in 2^\omega\} = \{h[A] \mid A \in M\}.$$

Por lo dicho anteriormente tenemos que $\mathcal{A}$ cumple (2) y (3). Como $h$ es una biyección, entonces $|\mathcal{A}| = |M| = |2^\omega| = \mathfrak{c}$ y por lo tanto $\mathcal{A}$ cumple (1). $\square$

Ya casi tenemos todo listo para construir el contraejemplo: hemos dado una familia casi ajena $\mathcal{A}$ tal que $\Phi$ se puede extender a $\Psi(\mathcal{A})$: Sin embargo, las propiedades que en principio cumple $\mathcal{A}$ no nos hablan para nada sobre órdenes totales. Si queremos construir un espacio de Mrówka-Isbell que pueda servir de contraejemplo, tendremos que refinar a $\mathcal{A}$ y obligar a sus elementos a "matar" a todos los posibles órdenes totales sobre $\omega$.

Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{c}\}$ la familia casi ajena que construimos en el Lema 3.3.1, y sea $\mathcal{C} = \{\leq_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{c}\}$ el conjunto de todos los órdenes totales sobre $\omega$. Haremos lo que mencionamos en el párrafo anterior por medio del siguiente lema.

**Lema 3.3.2.** *Para cualquier $\alpha \in \mathfrak{c}$ existen $X_0^\alpha, X_1^\alpha \in [A_\alpha]^\omega$ tales que:*

1) $X_0^\alpha \cap X_1^\alpha = \emptyset$.

2) $X_0^\alpha ||^*_\Phi X_1^\alpha$.

3) *Para cualquier* $n \in \omega$ *e* $i \in 2$ *se cumple que* $X_i^\alpha ||_\Phi^* \{n\}$.

4) $X_0^\alpha \cup X_1^\alpha$ *es* $\leq_\alpha$*-monótono.*

*Demostración.* Sea $\alpha \in \mathfrak{c}$, por construcción se tiene que $A_\alpha \in \mathcal{R}$, y por lo tanto, usando la proposición 3.2.12 podemos encontrar $X_0, X_1 \in [A_\alpha]^\omega$ disjuntos tales que:

1) $X_0 ||_\Phi^* X_1$

2) $X_0 \cup X_1$ es $\leq_\alpha$-monótono.

Como $X_0 \subseteq A \subseteq \omega$ es infinito, se debe tener que $X_0 \cap (-\infty, 0]_\Phi$ o $X_0 \cap [0, -\infty)_\Phi$ son infinitos. Definimos ${}_0X_0 = X_0 \cap (-\infty, 0]_\Phi$ si $X_0 \cap (-\infty, 0]_\Phi$ es infinito y ${}_0X_0 = X_0 \cap [0, \infty)_\Phi$ en otro caso. Dado $n \in \omega$, si ya hemos definido ${}_nX_0$ infinito, entonces sabemos de nuevo que ${}_nX_0 \cap (-\infty, n+1]_\Phi$ o ${}_nX_0 \cap [n+1, -\infty)_\Phi$ son infinitos. Así, definimos ${}_{n+1}X_0 = {}_nX_0 \cap (-\infty, n+1]_\Phi$ si ${}_nX_0 \cap (-\infty, n+1]_\Phi$ es infinito y ${}_{n+1}X_0 = {}_nX_0 \cap [n+1, \infty)_\Phi$ en otro caso. Ahora, para cada $n \in \omega$ tomemos $x_n \in {}_nX_0$ de tal manera que $x_n \neq x_i$ para cualquier $i < n$ y definamos $X_0^\alpha = \{x_i \mid i \in \omega\}$. Por construcción tenemos que para cualquier $n \in \omega$ y $k \geq n$ se cumple que $x_k \in {}_kX_0 \subseteq {}_nX_0$ y por como definimos ${}_nX_0$ sabemos que ${}_nX_0 \rightrightarrows_\Phi \{n\}$ o $\{n\} \rightrightarrows_\Phi {}_nX_0$. Con esto concluimos que $X_0^\alpha \setminus n \rightrightarrows_\Phi \{n\}$ o $\{n\} \rightrightarrows_\Phi X_0^\alpha$ y por lo tanto $X_n^\alpha ||_\Phi^* \{n\}$ para cualquier $n \in \omega$. Notemos también que por construcción se tiene que $X_0^\alpha \subseteq X_0$. De manera completamente análoga podemos construir $X_1^\alpha \subseteq X_1$ tal que $X_1^\alpha ||_\Phi^* \{n\}$ para cualquier $n \in \omega$. Para terminar notemos que $X_0^\alpha \cap X_1^\alpha \subseteq X_0 \cap X_1 = \emptyset$ y por lo tanto son disjuntos. Además, por la propiedad (1) tenemos que como $X_0^\alpha \subseteq X_0$ y $X_1^\alpha \subseteq X_1$ entonces $X_0^\alpha ||_\Phi^* X_1^\alpha$, y por (2) , como $X_1 \cup X_0$ es $\leq_\alpha$ $-$monótono y $X_0^\alpha \cup X_1^\alpha \subseteq X_0 \cup X_1$, entonces $X_0^\alpha \cup X_1^\alpha$ también es $\leq_\alpha$-monótono.

□

Denotaremos por $\mathcal{K}$ al conjunto $\{X_i^\alpha \mid i \in 2 \text{ y } \alpha \in \mathfrak{c}\}$. Notemos que $\mathcal{K}$ es una familia casi ajena sobre $\omega$ y gracias al lema anterior y al Lema 3.2.2 también sabemos que $\Phi$ se puede extender de manera única a $\Psi(\mathcal{K})$. Sabiendo esto, ya estamos listos para nuestro ansiado contraejemplo.

**Teorema 3.3.3.** *Existe un espacio* $T_2$ *separable, primero numerable, y localmente compacto que admite una selección continua débil pero no es débilmente ordenable.*

*Demostración.* Sea $X = \Psi(\mathcal{K})$ y $\overline{\Phi} : [X]^2 \longrightarrow X$ la única selección continua débil que extiende a $\Psi$. $X$ es primero numerable, separable, localmente compacto y $T_2$. Para terminar la prueba, solo falta ver que $X$ no es débilmente ordenable.

Supongamos por contradicción que $X$ es débilmente ordenable y consideremos $\preceq$ un orden total sobre $X$ tal que su topología inducida sea más gruesa que la de $X$. Sea $\alpha \in \mathfrak{c}$ tal que $\leq_\alpha = \preceq|_{\omega^2}$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $X_0^\alpha \prec X_1^\alpha$. El conjunto $X_0^\alpha \cup X_1^\alpha$ es $\leq_\alpha$-monótono, supondremos que existe $S \subseteq \omega$ segmento inicial que contiene a $X_0^\alpha \cup X_1^\alpha$ y para cualquier $s \in S$, $(-\infty, s)_{\leq_\alpha} \cap (X_0^\alpha \cup X_1^\alpha)$ es finito (el caso en el que la monotonía se cumpla con un segmento final como testigo se analiza de manera completamente análoga). Tenemos entonces dos casos:

1) Si existe $s \in S$ tal que $X_0^\alpha \prec s$, entonces el conjunto $(-\infty, s)_\preceq$ es un abierto en $X$ que tiene como elemento a $X_0^\alpha$. Por como definimos la topología en $X$ se debería tener que $X_0^\alpha \cap (-\infty, s)_\preceq = X_0^\alpha \cap (-\infty, s)_{\leq_\alpha}$ es infinito, pero ese hecho contradice que $(X_1^\alpha \cup X_0^\alpha) \cap (-\infty, s)_{\leq_\alpha}$ es finito.

2) Si para cualquier $s \in S$ se tiene que $s \prec X_0^\alpha$, entonces $(X_0^\alpha, \infty)_\preceq$ es un abierto en $X$ que tiene como elemento a $X_1^\alpha$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} X_1^\alpha \cap (X_0^\alpha . \infty)_\preceq &= X_1^\alpha \cap (X_0^\alpha, \infty)_{\leq_\alpha} \\ &\subseteq (X_0^\alpha \cup X_1^\alpha) \cap (X_0^\alpha, \infty)_{\leq_\alpha} \\ &\subseteq S \cap (X_0^\alpha, \infty)_{\leq_\alpha} = \emptyset. \end{aligned}$$

Lo que es una contradicción, ya que $X_1^\alpha \cap (X_0^\alpha, \infty)_\preceq$ debería ser infinito.

Ambos casos nos llevan a una contradicción, con lo que concluimos que $X$ no es débilmente ordenable. $\square$

# Bibliografía


[1] V. Gutev and T. Nogura, *Fell continuous selections and topologically well-orderable spaces*, Mathematika, Vol. 51, (2004), pp. 163-196.

[2] K. P. Hart, J. van Mill, P. Simon, *Recent Progress in General Topology III*, Atlantis press, 1975.

[3] K. Hrbacek, T. Jech, *Introduction to Set Theory*, CRC Press, 1999.

[4] M. Hrusák and I. Martínez-Ruiz, *Selections and weak orderability*, Fund. Math, Vol. 203, (2009), pp. 1-20.

[5] D. Repovs, P. Vladimirovic Semenov, *Continuous Selections of Multivalued Mappings*, Kluwer Academic Pub, 1998.

[6] J. van Mill and E. Wattel, *Selections and orderability*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 83, (1981), pp. 601-605.

[7] S. Willard, *General Topology*, Dover, New York, 1989.