UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NÚMERO DOMÁTICO DE LAS GRÁFICAS BLOCK-CACTUS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ALEJANDRO RODRÍGUEZ ALMAZÁN

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MUCUY-KAK DEL CARMEN GUEVARA AGUIRRE

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2018

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno
Rodríguez
Almazán
Alejandro
5522501960
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
413047449

2. Datos del tutor
Dra.
Mucuy-Kak del Carmen
Guevara
Aguirre

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Juan José
Montellano
Ballesteros

4. Datos del sinodal 2
Dra.
María del Pilar
Valencia
Saravia

5. Datos del sinodal 3
Mat.
Laura
Pastrana
Ramírez

6. Datos del sinodal 4
Dra.
Martha Gabriela
Araujo
Pardo

7. Datos del trabajo escrito
Número domático de las gráficas block-cactus
64
2018

Índice General.

1. Introducción.

La Teoría de Gráficas o Teoría de Grafos (en inglés, *Graph Theory*) es una rama matemática que estudia estructuras llamadas gráficas o grafos, usadas para modelar relaciones dos a dos entre objetos de cierto conjunto. Se considera que el matemático suizo nacido en Basilea en 1707 Leonhard Paul Euler es quien inició el desarrollo de este campo. A finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII existía, en Rusia, la ciudad de Königsberg, actualmente conocida como Kaliningrado. Se cuenta que en aquella época existía entre los habitantes de dicha población el siguiente ”reto” o pregunta (más adelante se conocerá como el primer problema planteado en teoría de gráficas):

La ciudad de Königsberg es atravesada por un río que se bifurca en dos brazos y cada uno de estos vuelve a bifurcarse de tal forma que, por un lado se unen y por el otro se separan. La figura 1 ilustra la distribución de este río. Entre esta forma del río, el terreno firme queda dividido en 4 regiones, por las cuales pasaban 7 puentes: 2 en cada primera bifurcación, uno en el requiebro siguiente y uno en cada segunda bifurcación. La pregunta era sencilla. ¿Existe una forma de recorrer las cuatro regiones pasando sólo una vez por cada uno de los puentes y regresando al lugar de partida?

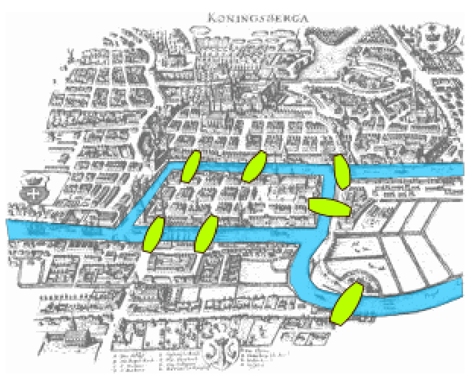

Figure 1: Distribución de los puentes de la ciudad de Königsberg.

La respuesta que dio Euler fue producto de la abstracción siguiente: cada región representaría un punto y cada puente una línea. Así, tenemos que Euler redujo el problema físico a un problema meramente abstracto. La figura resultante es la que se aprecia en la figura 2.

Para resolver el problema, Euler dedujo que para entrar y salir de una región culaquiera era forzoso que a esa región llegaran un número par de líneas (puentes). Como dentro de las restricciones está que se debe regresar al mismo lugar donde

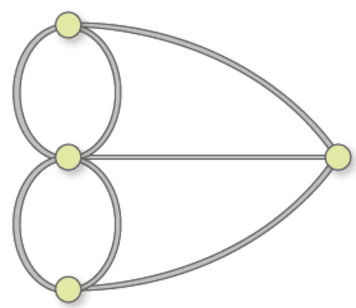

Figure 2: Abstracción del problema de los puentes de Königsberg

se inicia el recorrido, entonces ningún punto puede tener un número impar de líneas. Así, Euler demostró que no era posible llevar a cabo tal recorrido. Después de esto, tuvieron que pasar más de 100 años para que alguien retomara formalmente el trabajo de Euler. A partir de 1878, año en que Sylvester [4] introdujo el término *gráficas*, se comenzó a estudiar cada vez más esta disciplina.

Uno de los temas que mayor estudio ha tenido es el de *dominación*. Respecto al tema de conjuntos dominantes se sabe que su estudio inició de manera formal en 1960. Sin embargo existen temas relacionados desde aproximádamente 1862 cuando de Jaenisch [4] se preguntó cómo determinar el mínimo número de reinas necesarias para cubrir (o dominar) todas las casillas de un tablero de ajedrez de n x n. En el siglo XIX ya se sabía que la menor cantidad posible de reinas para dominar (es decir, cubrir todas las casillas) un tablero de 8 x 8 eran 5. En la figura 3 tenemos un ejemplo de cómo se puede dominar un tablero de ajedrez con 5 reinas.

Según W. W. Rouse Ball [4], algunos estudiosos del ajedrez de finales del siglo XIX estudiaron, entre otros, los siguientes tres tipos de problemas:

1. Cobertura: ¿Cuál es el menor número de reinas necesarias para atacar/cubrir todas las casillas de un tablero de n x n? Este es un ejemplo acerca de encontrar el conjunto dominante más pequeño de reinas para un tablero de n x n. La figura 3 muestra una ejemplificación de esto en un tablero de 8 x 8.

2. Independencia: ¿Cuál es el máximo número de reinas que pueden ser colocadas en un tablero de n x n de tal forma que éstas no se ataquen mutuamente? Este es un ejemplo que requiere encontrar la máxima cardinalidad posible de un conjunto independiente, es decir, un conjunto cuyos elementos no estén relacionados entre sí. La figura 4 muestra una ejemplificación de esto en un tablero de 8 x 8.

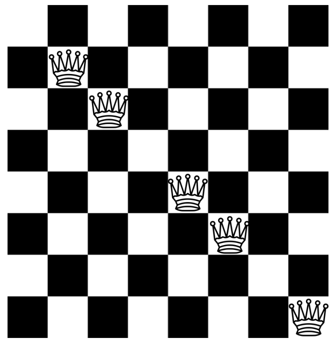

Figure 3: El mínimo número de reinas para dominar todo un tablero de ajedrez de 8 x 8 es 5.

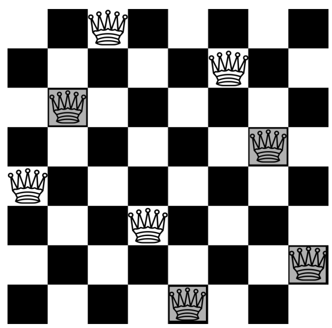

Figure 4: El máximo número de reinas que se pueden colocar en un tablero de ajedrez de 8 x 8 sin que éstas se ataquen mutuamente es 8.

3. Cobertura independiente: ¿Cuál es el menor número de reinas necesarias para atacar/cubrir todas las casillas de un tablero de n x n sin que éstas se ataquen mutuamente? Este es un ejemplo de lo que posteriormente se conocerá como dominación independiente y lo que requiere es encontrar la menor cardinalidad posible de un conjunto dominante independiente, es decir, un conjunto dominante cuyos elementos no estén relacionados entre sí. La figura 5 muestra una ejemplificación de esto en un tablero de 8 x 8.

Estos tres problemas fueron estudiados por Yaglom y Yaglom [4] en 1964. En 1950, Claude Berge [4] escribió un libro sobre teoría de gráficas donde se define por primera vez el concepto de número de dominación de una gráfica. Sin embargo, este nombre aún no fue el que ocupó Berge, sino que él lo llamó *coeficiente de estabilidad externa.* Para 1962, Oystein Ore [4] publicó un libro donde se usaron por primera vez los términos conjunto dominante y número de dominación. Actualmente se conocen muchos tipos de dominación y se trabaja continuamente en estos.

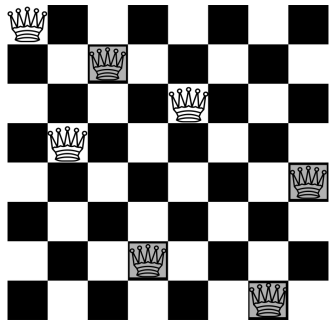

Figure 5: El mínimo número de reinas para dominar todo un tablero de ajedrez de 8 x 8 sin que éstas se ataquen mutuamente es 6.

La idea de este trabajo es estudiar un tipo específico de dominación: la dominación domática. El *número domático* de una gráfica es la máxima cardinalidad de una partición de su conjunto de vértices en conjuntos dominantes. Una gráfica se dice que es domáticamente completa si su número domático es igual al grado mínimo de la gráfica más 1. Una gráfica es llamada block-cactus si sus bloques son ciclos o gráficas completas.

Concretamente, la motivación de esta tesis surge del trabajo de Rautenbach y Volkmann [5]. En éste, se estudió cómo caracterizar las gráficas block-cactus domáticamente completas y cómo encontrar el número domático de las gráficas block-cactus que no son domáticamente completas. Para esto, dividiremos a la famila de gráficas block-cactus en 3 tipos y estudiaremos cada tipo por separado. En el capítulo 2 abordaremos los conceptos básicos necesarios para la comprensión de los demás capítulos. En el capítulo 3 abordaremos el primer tipo de gráficas block-cactus para, en los capítulos 4 y 5, abordar, respectivamente, los tipos dos y tres.

2. Conceptos Básicos.

En este capítulo el lector encontrará los conceptos básicos que se usarán a lo largo del trabajo. Estos y otros conceptos se encuentran en [1].

Una **gráfica** G es un conjunto finito no vacío de objetos llamados **vértices** junto con un conjunto, posiblemente vacío, de parejas no ordenadas de vértices distintos de G llamadas **aristas**. El conjunto de vértices de G lo denotamos por $V(G)$, mientras que al conjunto de aristas lo denotamos por $E(G)$. El **orden** de una gráfica es la cardinalidad de $V(G)$ y el **tamaño** de una gráfica es la cardinalidad de $E(G)$.

La arista $e = \{u, v\}$ se dice que **une** los vértices u y v y decimos que entonces u y v son vértices **adyacentes** (o que u es **vecino** de v e igualmente, que v es **vecino** de u), mientras que e **incide** en u, como también e **incide** en v. De aquí en adelante es conveniente denotar la arista $\{u, v\}$ por (u, v). Es claro ver que por la propiedad de simetría de la definición de arista, (u, v) es lo mismo que (v, u).

Para un vértice v de la gráfica G, la **vecindad** de v en G la denotaremos por $N_G(v)$ y es el conjunto $N_G(v) = \{u \in V(G) | u \text{ es vecino de } v\}$. La **vecindad cerrada** de v en G la denotaremos por $N_G[v]$ y es el conjunto $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. El **grado** de v en G es la cardinalidad de $N_G(v)$ y lo denotaremos por $\delta_G(v)$. Diremos que un vértice $u \in V(G)$ es **aislado** si $\delta(u) = 0$. Para un subconjunto A del conjunto de vértices $V(G)$ definimos $N_G(A) = \bigcup_{v \in A} N_G(v)$ y $N_G[A] = \bigcup_{v \in A} N_G[v]$. Al **grado mínimo** de una gráfica G lo denotaremos por $\delta(G) = \text{mín}\{\delta(v) | v \in V(G)\}$ y se define como el menor grado de los vértices de G.

Sean u, v dos vértices distintos de una gráfica G. Un ***uv*-camino** de G es una secuencia finita de vértices

$$(u = u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k = v),$$

empezando con el vértice u y finalizando con el vértice v, tal que $(u_{i-1}, u_i) \in E(G)$ para $i = 1, \ldots, k$. Para cualquier uv-camino, T, el número k (el número de ocurrencias de aristas) es llamado la **longitud** del camino y la denotaremos por $long(T)$. Si además ocurre que para toda $i \neq j$, $u_i \neq u_j$, entonces a la secuencia la llamaremos una ***uv*-trayectoria**. Un vértice interno de una uv-trayectoria es cualquier vértice diferente de u ó de v. Una colección $\{P_1, \ldots, P_k\}$ de trayectorias es llamada **internamente ajena** si ningún vértice interno de P_i, con $i = 1, \ldots, k$, está en P_j, $j \neq i$.

Existen dos clases muy comunes de gráficas que para este trabajo merecen mención especial. Una gráfica **completa** es una gráfica G tal que cada vértice es adyacente a todos los vértices restantes de la gráfica. A la gráfica completa de orden n, la denotaremos por K_n. Por otro lado, un **ciclo** es un camino cerrado(es decir, un camino que empieza y termina en el mismo vértice) de longitud mayor o igual 3, $(v_1, \ldots, v_n, v_1)$, donde los n vértices son distintos. A un ciclo de orden n lo denotaremos por C_n. En la figura 6 tenemos ejemplos de estas gráficas.

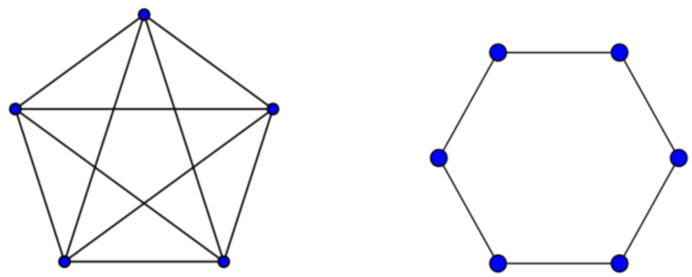

Figure 6: Una gráfica K_5 y un ciclo C_6.

Diremos que una gráfica H es una **subgráfica** de G si $V(H) \subset V(G)$. Para cualquier subconjunto $V \subset V(G)$ ($E \subset E(G)$, respectivamente) de una gráfica G, denotaremos por $G[V]$ ($G[E]$, respectivamente) a la gráfica con conjunto de vértices V (conjunto de aristas E, respectivamente) que contiene todas las aristas de G que unen vértices en V (y conjunto de vértices aquellos donde inciden las aristas de E en G). A esta gráfica se le llama **subgráfica inducida** de G por el conjunto V (por el conjunto E, respectivamente).

Sean G y H dos gráficas, definimos $G \cup H$ como la gráfica con conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ (posiblemente $V(G)$ y $V(H)$ no son ajenos) y con conjunto de aristas $E(G) \cup E(H)$. Por otro lado, para $u \in V(G)$ ($e \in E(G)$, respectivamente) definimos $G - u$ ($G - e$, respectivamente) como la gráfica $G[V(G) \backslash \{u\}]$ (como la gráfica $G[E(G) \backslash \{e\}]$, respectivamente).

Ahora, pasemos a un tema que imperará en gran parte de las condiciones del trabajo actual: la conexidad. Diremos que una gráfica G es **conexa** si y sólo si para todo $\{u, v\} \subset V(G)$ existe una uv-trayectoria. De esta forma, se dice que una gráfica G es **disconexa** si no es conexa. Así, una **componente conexa** de G es una subgráfica conexa maximal de G, es decir, que no está contenida en otra subgráfica de G conexa. Al número de componentes conexas de una gráfica G lo denotaremos por $k(G)$.

Sean G una gráfica conexa y $\{u, v\} \subset V(G)$. La **distancia** en G entre u y v, denotada por $d_G(u, v)$, es la mínima longitud de una uv-trayectoria en G. Un vértice v es llamado **vértice de corte** de G si $k(G) < k(G - v)$, es decir, si al remover el vértice v, al menos una componente se desconecta. Una arista $e \in E(G)$ de una gráfica G es llamada **puente** de G si $k(G) < k(G - e)$. Veamos a continuación una caracterización de las aristas que son puentes.

Proposición 2.1: Sea G una gráfica. Una arista e es un puente de G si y sólo si e no está en ningún ciclo de G.

Demostración

Supongamos que G es una gráfica conexa. Supongamos que $e = (u, v) \in E(G)$ es una arista que no es puente. Así $G - e$ es conexa. De esta forma, existe una uv-trayectoria, P, en $G-e$. Claramente, P junto con la arista e forman un ciclo en G.

Para la necesidad, supongamos que la arista $e = (u, v)$ está en un ciclo $C = (u, u_1, \dots, u_r, v, u)$ de G. Observemos que este ciclo contiene la trayectoria $(u, \dots, v)$ en $G - e$, llamémosle Q.

Probemos que $G - e$ es conexa. Sean $\{x, y\} \subset V(G - e)$. Como G es conexa, existe una trayectoria P que los conecta. Ahora, si la trayectoria P pasa por la arista e, simplemente reemplazamos esta arista por la trayectoria Q, construyendo así, una xy-trayectoria en $G - e$. Si P no pasa por e, esta misma trayectoria es una xy-trayectoria en $G - e$. De esta forma, $G - e$ es conexa, por lo que e no es puente.

$\square$

Ahora bien, nos podemos preguntar qué tan "pegadas" o conectadas están las gráficas, es decir, si una gráfica G es conexa y podemos desconectarlaquitando un vértice, diremos que es 1-conexa y diremos que una gráfica G de orden al menos 3 es **2-conexa** si G no tiene vértices de corte. Pasemos a demostrar una proposición que relaciona vértices de corte con puentes.

Proposición 2.2: Sea G una gráfica no trivial de orden al menos 3. Si G es 2-conexa, entonces G no tiene puentes.

Demostración

Haremos la demostración por contrapositiva. Supongamos que G tiene puentes. Sea $e = (u, v)$ una arista que es puente, así, $k(G) < k(G - e)$. Como G tiene al menos tres vértices, al menos dos se encuentran en una componente conexa de $G - e$. Sea ésta, A. Supongamos sin pérdida de generalidad que u está en A. De esta forma, como los vecinos de u en G quedan desconectados de v en $G-e$, entonces u es vértice de corte. Así, G tiene al menos un vértice de corte, por lo que G no es 2-conexa.

$\square$

Una vez vista esta proposición, pasemos a dar una caracterización de las gráficas 2-conexas.

Proposición 2.3: Sea G una gráfica conexa de orden al menos 3. Así, G es 2-conexa si y sólo si para todo $\{u,\} \subset V(G)$ u y v están en un mismo ciclo en G.

Demostración

Sean G una gráfica 2-conexa de orden al menos 3 y $u \in V(G)$. Sea

$$U = \{x \in V(G) |\ x \text{ está en un ciclo con } u \text{ en } G\}.$$

Demostraremos que $U = V(G)$. Para esto, supongamos que no es así, es decir, que existe $v \in V(G)$ tal que $v \notin U$. Como G es una gráfica 2-conexa, no tiene vértices de corte y por la proposición 2.2, G no tiene puentes. Así, ninguna arista de G es puente, en particular, las aristas entre u y sus vecinos no son puentes. Ahora, bien, por la proposición 2.1, si una arista no es puente, está en un ciclo, de donde tenemos que los vecinos de u están en U.

Como G es conexa existe una uv-trayectoria $P = (u = u_1, u_2, \dots, u_k = v)$ en G. Sea i el menor entero, $2 \leq i \leq k$, tal que $u_i \notin U$. Así, $u_{i-1} \in U$ y sea C un ciclo que contenga a u y a u_{i-1}. Llamemos P_1 y P_2 a las 2 uu_{i-1}-trayectorias definidas por C.

Ahora bien, como u_i no es vértice de corte de G, existe en G una u_iu-trayectoria, $P' = (u_i = v_1, \dots, v_l = u)$, que no pasa por u_{i-1}. Si el único vértice en común entre P' y C es u, entonces existe, como se ve en la figura 7, un ciclo que contiene a u y u_i, lo que lleva a una contradicción.

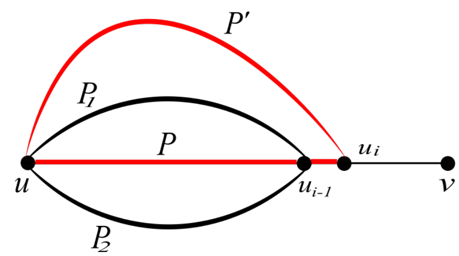

Figure 7: En rojo, el ciclo que se forma entre u y u_i si el único vértice en común entre P' y C es u.

De aquí que P' y C compartan un vértice en común distinto de u. Sea v_j el vértice de P' tal que j es el menor entero que cumple que v_j pertenece también a C. Sin pérdida de generalidad, supongamos v_j está en la trayectoria P_1. La figura 8 muestra la ubicación del vértice v_j.

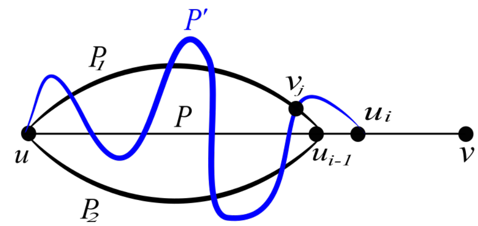

Figure 8: Ubicación de v_j.

A continuación describimos un ciclo que contiene a u y a u_i (en la figura 9 ilustramos este ciclo): iniciamos en u_i, seguimos por la u_iv_j-subtrayectoria de P', después por P_1, desde v_j hasta u, y luego por P_2, desde u hasta u_{i-1}, y finalmente regresamos a u_i mediante la arista (u_{i-1}, u_i), contradiciendo que u_i no esté en U, de esta forma concluimos que v pertenece a U.

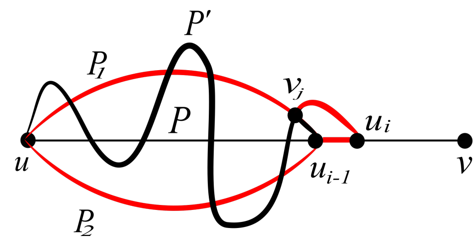

Figure 9: En rojo, el ciclo que se forma entre u y u_i.

Concluimos de esta forma que todos los vértices de G están en U, es decir, para todo $\{u, v\} \subset V(G)$ u y v están en un mismo ciclo en G.

Para la suficiencia, supongamos por contradicción que G no es 2-conexa, es decir, que existe un $z \in V(G)$ tal que en $G[V(G) - \{z\}]$ existen vértices u, v desconectados. Sin embargo, como en G, para todo $\{u, v\} \subset V(G)$ u y v están en un mismo ciclo y esto implica que para todo u y v existen al menos dos uv-trayectorias internamente ajenas en G, entonces en G existe una uv-trayectoria que no pasa por z, lo que contradice que z sea vértice de corte. Así, G es 2-conexa.

□

Ahora pasemos a demostrar un lema que utilizaremos posteriormente. Este lema aborda el concepto de 2-conexidad en gráficas que cumplen ciertas características.

Un **bloque** de una gráfica G es una subgráfica 2-conexa maximal de G(es decir, que no está contenida en otra gráfica 2-conexa) o bien una gráfica completa K_2 que no pertenezca a ninguna otra subgráfica de G. Un **clan** de una gráfica G es una subgráfica completa maximal.

A continuación veremos que los bloques de una gráfica pueden ser abordados a partir de una relación de equivalencia definida sobre su conjunto de aristas. Esta manera de verlos nos simplificará las demostraciones de algunas propiedades de estos.

Proposición 2.4: Sea G una gráfica conexa no trivial. Sea R una relación definida en $E(G)$, tal que para $\{e, f\} \subset E(G)$, eRf si y sólo si $e = f$ ó las aristas e y f se encuentran en un mismo ciclo de G. R definida de esta forma es una relación de equivalencia.

Demotración

Claramente, si $e \in E(G)$, eRe pues $e = e$. Ahora bien, si $\{e, f\} \subset E(G)$ y eRf, entonces ocurre que $e = f$ ó e y f se encuentran en un mismo ciclo en G. En cualquiera de los dos casos se cumple que $f = e$ ó f y e están en un mismo ciclo en G, por lo que fRe. De esta forma quedan probadas la simetría y la reflexividad.

Para probar la transitividad sean $\{e, f, g\} \subset E(G)$ tales que eRf y fRg. Si $e = f$ ó $f = g$, por simetría o reflexividad, eRg. Sea $C = (u_1, \ldots, u_k, u_1)$, con $e = (u_1, u_k)$, el ciclo que contiene a e y a f y $C' = (v_1, \ldots, v_l, v_1)$, con $g = (v_1, v_l)$ el que contiene a g y a f. Si $C = C'$, eRg. Así supongamos que $C \neq C'$, es decir, e y g están en diferentes ciclos.

Sea $1 \leq i \leq k$ el menor entero tal que u_i está también en C' y $1 \leq j \leq k$ el mayor entero tal que u_j está también en C'. Claramente, $u_i = v_r$ y $u_j = v_s$, $1 \leq r, s \leq l$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $r < s$. Sea P' la u_iu_j-subtrayectoria de C que contiene a f y Q' la u_ru_s-subtrayectoria de C' que contiene a f, es decir, fuera de P' no hay vértices en C' y fuera de Q' no hay vértices en C.

A partir de esto sean ,P, la trayectoria resultante de quitar P' al ciclo C, y Q, la trayectoria resultante de eliminar de C' la trayectoria Q'. Claramente, P junto con Q forman un ciclo que contiene a e y a g pues son trayectorias internamente ajenas. Así eRg, con lo que queda demostrada la transitividad. De esta forma, R es una relación de equivalencia.

$\square$

La relación de equivalencia mostrada en la proposición anterior induce una partición en el conjunto de aristas de una gráfica conexa no trivial. Más aún, cada clase de equivalencia de esta relación representa las aristas de un bloque de la gráfica. A continuación, estudiaremos un corolario del teorema anterior que nos proporcionará propiedades de los bloques.

Corolario 2.5: Sea G una gráfica conexa no trivial. Sean B_1 y B_2 dos bloques de G. Entonces ocurre lo siguiente:

(a) $|V(B_1) \cap V(B_2)| \leq 1$.

(b) Si $V(B_1) \cap V(B_2) \neq \emptyset$, entonces la intersección es un vértice de corte.

Para probar (a) supongamos que $|V(B_1) \cap V(B_2)| \geq 2$. Sean $\{u, v\} \subset V(B_1) \cap V(B_2)$. Como B_1 es 2-conexo, existe una uv-trayectoria, P, en B_1. Análogamente, en B_2 existe una uv-trayectoria, P'. Como B_1 y B_2 son dos clases de equivalencia distintas, entonces P y P' son ajenas en aristas.

Sea w el primer vértice en común que tienen ambas trayectorias (posiblemente $w = v$). Sea $Q = (u, \ldots, w)$ la subtrayectoria de P y sea $Q' = (u, \ldots, w)$ la subtrayectoria de P'. De esta forma, las aristas de Q forman un ciclo en G con las aristas de Q'. Es decir, las aristas de Q' (que son aristas de B_2) pertenecen a la clase de Q (que es el bloque B_1), lo que es una contradicción.

Para probar (b) supongamos que los bloques B_1 y B_2 tienen intersección en un vértice v. De esta forma, en v incide, por un lado, una arista $e_1 = (v, v_1)$ en B_1, y por otro lado, una arista $e_2 = (v, v_2)$ en B_2. Supongamos que v no es vértice de corte de G. Esto implica que en G existe una $v_1 v_2$-trayectoria, P, que no pasa por v. Así, P junto con v y las aristas e_1 y e_2 forman un ciclo en G, lo que implicaría que e_1 y e_2 están en un mismo bloque en G, contradiciendo que pertenecen a distintos bloques. Así, v es vértice de corte.

$\square$

Ahora, sea G una gráfica conexa no trivial. Definamos la **gráfica de bloques y vértices de corte**, $BC(G)$, de G como la gráfica cuyos vértices son los bloques y vértices de corte de G, de tal forma que dos vértices en $BC(G)$ son adyacentes si y sólo si un vértice es un bloque en G y el otro es un vértice de corte (también en G) que pertenece al bloque. Probemos una característica de estas gráficas.

Proposición 2.6: Si G es conexa, entonces la gráfica $BC(G)$ es un árbol.

Demostración

Sea G una gráfica conexa no trivial. Recordemos que una gráfica T es un **árbol** si y sólo si T es una gráfica conexa que no tiene ciclos. Observemos que toda trayectoria en $BC(G)$ es una secuencia alternada de vértices de corte y bloques de G. Más aún, en toda trayectoria en $BC(G)$, todo vértice de corte pertenece a los bloques que son adyacentes a él en la trayectoria. Dicho esto, procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $BC(G)$ tiene al menos un ciclo y sea éste, sin pérdida de generalidad, $C = (x_1, B_1, \ldots, x_k, B_k, x_1)$.

Probemos que la existencia de este ciclo en $BC(G)$ implicaría que las subgráficas $B_1, \ldots, B_k$ de G no son bloques en G, lo cual es una contradicción. Sea $H = G[V(B_1) \cup V(B_2) \cup \ldots \cup V(B_k)]$. La figura 10 ilustra como se ve la subgráfica H.

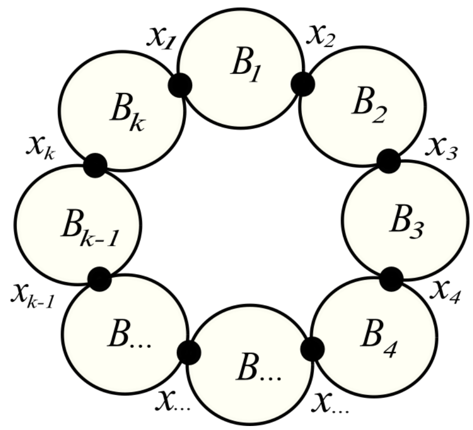

Figure 10: Subgráfica H.

Demostremos que H es una gráfica 2-conexa, es decir, mostremos que H no tiene vértices de corte. Para esto es suficiente con mostrar que $H - x$ es conexa para todo $x \in V(H)$. Sean $x \in V(H)$ y $\{u, v\} \subset V(H) \backslash \{x\}$. Procedamos por casos:

a) $u, v \in B_i$ para alguna $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Como en H, B_i es una gráfica 2-conexa, existen 2 uv-trayectorias internamente ajenas en H. Como x puede estar a lo más en una de estas dos uv-trayectorias, en $H - x$ existe una uv-trayectoria.

b) $u \in B_i$, $v \in B_j$ para alguna $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$.

Notemos que en B_i existe al menos una $x_i x_{i+1}$-trayectoria (los índices se toman módulo k). Nombremos por P_i a una de estas $x_i x_{i+1}$-trayectorias. Para este caso, sin pérdida de generalidad, supongamos que $B_i = B_1$ (si no ocurriera así, simplemente reetiquetamos en $BC(G)$ los bloques B_i). Nuevamente procedamos por casos:

Subcaso 1. $x \in B_1$ ó $x \in B_j$.

Si $x \in B_1$, x sería x_1 ó x_2. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \neq x_1$, en B_1 existe una ux_2-trayectoria, Q_1, que no pasa por x. Como B_j es conexa existe una $x_j v$-trayectoria, Q_j. De esta forma, tenemos una uv-trayectoria en

$H - x$ definida por:

$$(u, Q_1, x_2, P_2, x_3, P_3, x_4, \ldots, x_j, Q_j, v).$$

La figura 11 ilustra la uv-trayectoria.

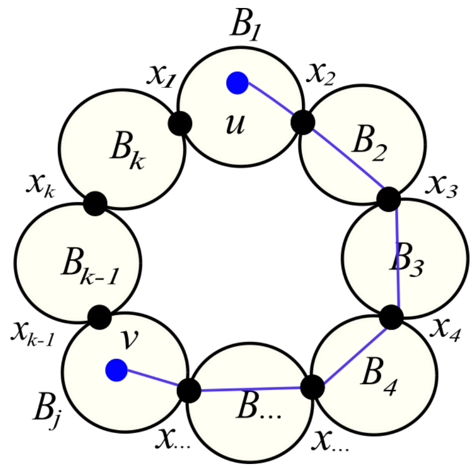

Figure 11: uv-trayectoria en $H - x$.

El caso $x \in B_j$ es análogo.

Subcaso 2. $x \notin B_1$ y $x \notin B_j$. Podemos tener 2 posibilidades: $x \in B_l$, con $1 < l < j$ ó con $j < l$.

Supongamos $x \in B_l$, con $1 < l < j$. En B_1 existe una ux_1-trayectoria, nombrada Q_1, y en B_j existe una x_{j+1}-trayectoria, nombrada Q_j (por ser B_1 y B_j conexas). De esta forma, tenemos una uv-trayectoria en $H - x$ definida por:

$$(u, Q_1, x_1, P_k, x_k, P_{k-1}, x_{k-1}, \ldots, x_{j+1}, Q_j, v).$$

La figura 12 ilustra la uv-trayectoria.

El caso $j < l$ es análogo.

Ambos casos demuestran que $H - x$ es una gráfica conexa para todo $x \in V(H)$, es decir, H es una gráfica 2-conexa. Pero $B_i \subset H$, lo cual contradice que B_i es bloque. Así $BC(G)$ no tiene ciclos.

Probemos ahora que $BC(G)$ es una gráfica conexa. Sean $\{a, b\} \subset V(BC(G))$. Probaremos que existe una ab-trayectoria en $BC(G)$. Observemos que a y b pueden ser bloques de G o vértices de corte de G. Si ambos son bloques

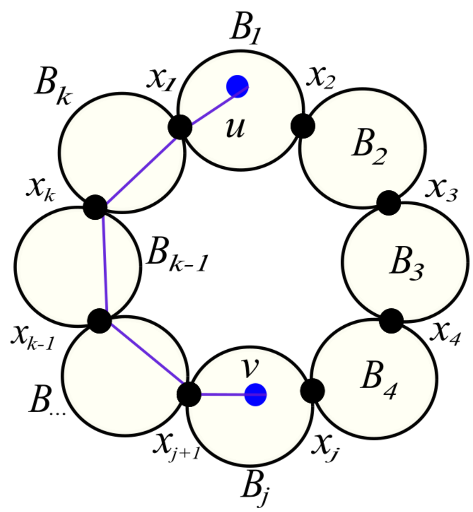

Figure 12: uv-trayectoria en $H - x$.

entonces, si $B_1, \ldots, B_r$ son los bloques de G, $a = B_i$ y $b = B_j$ para alguna $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$. Sean $u \in V(B_i)$ y $v \in V(B_j)$.

Como G es conexa, en G existe una uv-trayectoria,

$$P = (u, x_{i+1}, \ldots, x_{i+2}, \ldots \ldots, x_{j-2}, \ldots, x_{j-1}, v),$$

donde los x_s, $s \in \{i+1, i+2, \ldots, j-1\}$, son vértices de corte de G y B_s es el bloque que contiene a la subtrayectoria $(x_s, \ldots, x_{s+1}) \subset P$. Sea

$$Q = (B_i, x_{i+1}, B_{i+1}, x_{i+2}, \ldots \ldots, x_{j-1}, B_{j-1}, x_j, B_j).$$

Claramente Q existe en $BC(G)$ y es una ab-trayectoria. Más aún, como en $BC(G)$ todo vértice de corte es adyacente al bloque al cual pertenece, para todo $\{a, b\} \subset BC(G)$ existe una ab-trayectoria. Así, $BC(G)$ es conexa y como $BC(G)$ no tiene ciclos, entonces es un árbol.

□

Saber que la gráfica $BC(G)$ de una gráfica G conexa es un árbol, nos ayudará, junto con la proposición siguiente, a enunciar fácilmente un resultado referente a la existencia de cierto tipo de bloques en una gráfica.

Proposición 2.7: Todo árbol T no trivial tiene al menos dos vértices finales, es decir, dos vértices u, v tales que $\delta_T(u) = \delta_T(v) = 1$. A estos vértices se les llama **hojas**.

Demostración

Sean T un árbol no trivial y P una trayectoria maximal en T (es decir, P no está contenida en otra trayectoria de T). Supongamos que P es una uv-trayectoria. Como P es una trayectoria maximal, ni u ni v son adyacentes a ningún otro vértice que no esté en P. Como T no tiene ciclos, u es adyacente solamente al vértice que le sigue en P, y v es adyacente solamente al vértice que le precede en P. De esta forma, $\delta_T(u) = \delta_T(v) = 1$, por lo que u y v son dos hojas de T.

$\square$

A partir de esto, si G es una gráfica conexa no trivial, podemos definir un **bloque terminal** de G como aquel bloque de G que es una hoja en la gráfica de bloques y vértices de corte. Alternativamente, y como resultado también de la última proposición, se puede definir a un bloque terminal como aquel que contiene exactamente un vértice de corte de G. A partir de esto se tiene el siguiente corolario de las proposiciones 2.7 y 2.8, que nos asegura la existencia de bloques terminales en gráficas conexas

Corolario 2.8: Si G es una gráfica conexa no trivial, G tiene al menos dos bloques finales.

El Corolario 2.8 finaliza nuestro estudiio acerca de propiedades de conexidad en gráficas. Sin embargo, aún nos falta definir conceptos relativos a la dominación en una gráfica. Un **conjunto dominante** de una gráfica G es un subconjunto D de $V(G)$ tal que $N_G[D] = V(G)$, es decir, todo vértice de G está en D o es adyacente a un vértice en D.

Una **partición domática**, $\mathcal{D}$, de G es una partición de $V(G)$ en conjuntos dominantes. A los elementos de la partición D los llamaremos **conjuntos domáticos**. El **número domático**, $d(G)$, de G es la máxima cardinalidad de una partición domática de G. Se dice que una gráfica G es **domáticamente completa** si $d(G) = \delta(G) + 1$.

Observación: Se puede ver que si G es una gráfica no conexa, entonces $d(G) = \text{mín}\{d(G_i) | G_i \text{ es componente conexa de } G\}$, ya que los conjuntos domáticos de G tienen que dominar en cada G_i.

Una **coloración** f de los vértices de una gráfica G con s número de colores es una función $f : V(G) \to \{1, \ldots, s\}$. Visto de esta manera, una partición domática de una gráfica G en l conjuntos dominantes la podemos pensar como una coloración $f : V(G) \to \{1, \ldots, l\}$ del conjunto de vértices $V(G)$ con l colores tal que $f(N_G[x]) = \{1, \ldots, l\}$ para todo $x \in V(G)$ (es decir, cada vértice junto con sus vecinos son coloreados usando todos los colores).

Una gráfica G cuyos bloques son ciclos o gráficas completas K_2 es llamada **gráfica cactus**. Las gráficas cuyos bloques son todos clanes son llamadas **gráficas bloque**, y las gráficas cuyos bloques son clanes o ciclos son llamadas **gráficas block-cactus**.

3. Número domático.

En este capítulo abordaremos el concepto de número domático, sus principales propiedades y además encontraremos el número domático de cierto tipo de gráficas block-cactus. Para esto, iniciemos mostrando que en una coloración domática podemos intercambiar las "etiquetas" de las clases cromáticas sin que ésta deje de perder la propiedad de ser domática, es decir, si tenemos una coloración domática que colorea unos vértices de color verde y otros de color rojo, la función nueva, obtenida a partir de reetiquetar los verdes por rojos y los rojos por verdes, sigue siendo domática. Esto se demuestra en la proposición siguiente.

Proposición 3.1: Sean G una gráfica y $f : V(G) \to \{1, \ldots, t\}$ una coloración y sea $f' : V(G) :\to \{1, \ldots, t\}$ con

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \neq i, j \\ j & \text{si } f(x) = i \\ i & \text{si } f(x) = j \end{cases}$$

Entonces, si f es domática, f' también lo es.

Demostración:

Para $l = 1, \ldots, t$, sean $S_l(z) = \{y \in N_G[z] | f(y) = l\}$. Sea $x \in V(G)$. Como f es domática, $f(N_G[x]) = \{1, \ldots, t\}$, es decir, $S_l(x) \neq \emptyset$ para toda $l = 1, \ldots, t$. Así, $l = f(S_l(x)) \in f'(N_G[x])$ para toda $l = 1, \ldots, t$ ya que, por la definición de f' tenemos que $f(S_i(x)) = f'(S_j(x))$ y $f(S_j(x)) = f'(S_i(x))$ y, además, $f(S_k(x)) = f'(S_k(x))$ para toda k distinta de i, j, lo que implica que $f'(N_G[x]) = \{1, \ldots, t\}$, es decir, f' es una coloración domática de los vértices de G.

En la Figura 13 tenemos un ejemplo de lo que refiere la proposición 3.1 :

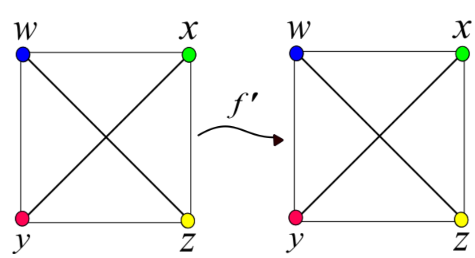

Figure 13: Ejemplificación de cómo funciona la proposición 3.1.

□

La proposición anterior nos será de utilidad cuando queramos reetiquetar coloraciones domáticas a nuestra conveniencia sin preocuparnos por la domaticidad de la reetiquetación. Ahora pasemos a exhibir una cota superior para el número domático.

Teorema 3.2: $d(G) \leq \delta(G) + 1$.

Demostración:

Supongamos lo contrario, es decir, que existe una gráfica H tal que $d(H) > \delta(H) + 1$. Sea $f : V(H) \to A$ una coloración que realiza el número domático y $x_0 \in V(H)$ un vértice que realiza $\delta(H)$. Como f es domática,

$$|f(N_H[x_0])| = d(H) > \delta(H) + 1 = \delta_H(x_0) + 1.$$

Como f es función,

$$|N_H[x_0]| \geq |f(N_H[x_0])|.$$

Juntando ambas desigualdades tenemos que $|N_H[x_0]| > \delta_H(x_0) + 1$ lo cual es una contradicción. De esta manera queda demostrado que no existe tal gráfica H.

□

Vista una cota superior del número domático para cualquier tipo de gráfica, pasaremos a dar una cota inferior para las gráficas conexas.

Proposición 3.3: Si G es una gráfica conexa no trivial, entonces $d(G) \geq 2$.

Demostración:

Sea G una gráfica conexa no trivial. Partimos al conjunto $V(G)$ en dos conjuntos, a saber, D_1 y D_2, de la siguiente manera:

Sea u_1 un vértice de G. Coloquemos a u_1 en D_1 y a $N_G(u_1)$ en D_2.

Sea u_2 un vértice de $G - N_G[u_1]$. Coloquemos a u_2 en D_1 y a $N_G(u_2)$ en D_2.

Sea u_3 un vértice de $G - N_G[\{u_1, u_2\}]$. Coloquemos a u_3 en D_1 y a $N_G(u_3)$ en D_2.

Sigamos con este procedimiento hasta terminar con los vértices de G. Como $V(G)$ es un conjunto finito, este proceso termina. Además, es claro que todos los vértices de G se encuentran en D_1 o en D_2.

Supongamos que tenemos $u \in V(G)$ tal que $u \notin D_1$, es decir, $u \in D_2$. Por construcción de D_1 y D_2 existe $u_j \in D_1$ tal que $u \in N_G(u_j)$. Esto prueba que

D_1 es un conjunto dominante de G. Probemos que D_2 es también un conjunto dominante. Sea $u \in D_1$. Como G es conexa, G es distinta de K_1. Así existe $v \in V(D_2)$ tal que $v \in N_G(v)$. Así, D_2 es un conjunto dominante. Como tenemos dos conjuntos dominantes para G, entonces $d(G) \geq 2$.

$\square$

A partir del teorema 3.2 nos podemos preguntar cuándo una gráfica alcanza la cota superior de su número domático. A las gráficas que alcanzan esta cota las llamamos **domáticamente completas**. En el trabajo actual calcularemos el número domático de las gráficas block-cactus y mostraremos cuáles de ellas son domáticamente completas.

Esto lo haremos por partes, primero demostraremos que las gráficas block-cactus con grado mínimo igual a 1 son domáticamente completas, después mostraremos que las gráficas block-cactus con grado mínimo mayor o igual a 4, así como las que tienen grado mínimo 2 y cumplen ciertas propiedades, y las que tienen grado mínimo igual a 3 y cumplen otras ciertas propiedades, son también domáticamente completas. Posteriormente regresaremos a los casos faltantes, es decir, de aquellas que no cumplen las condiciones para ser domáticamente completas, de gráficas block-cactus con grado mínimo igual a 2, para terminar con las faltantes que tienen grado mínimo igual a 3.

Comencemos, como hemos dicho, por las gráficas block-cactus con $\delta(G) = 1$.

Teorema 3.4: Sea G una gráfica block-cactus conexa. Si $\delta(G) = 1$ entonces G es domáticamente completa.

Demostración

Como G es conexa y no tivial, por el teorema 3.2 y 3.3, $d(G) = 2$.

$\square$

Pasemos a enunciar un lema que nos será de utilidad para demostrar que, como ya hemos dicho anteriormente, las gráficas block-cactus con grado mínimo mayor o igual a 4, así como las que tienen grado mínimo 2 y cumplen ciertas propiedades, y las que tienen grado mínimo igual a 3 y cumplen otras ciertas propiedades, son domáticamente completas.

Lema 3.5: Sean C un ciclo de longitud l y k un número natural. En cada uno de los siguientes casos, existe una coloración $f : V(C) \to \{1, \ldots, k+1\}$ de los vértices de C con $k+1$ colores, de tal forma que cualesquiera tres vértices consecutivos tienen tres colores diferentes:
1. $k \geq 4$.

2. $k = 2$ y $l \equiv 0 \pmod 3$.
3. $k = 3$ y $l \neq 5$.

Demostración

Sea $C = (v_1, v_2, \ldots, v_l, v_1)$ un ciclo y k un número natural.

1. Supongamos que $k \geq 4$. Definimos $f : V(C) \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de la siguiente manera:

Si $l \equiv 0 \pmod 3$, $f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 0 \pmod 3 \\ 2 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$

Si nos tomamos cualesquiera tres vértices consecutivos es claro que estos tendrán tres colores diferentes pues entre tres números consecutivos siempre habrá uno que sea congruente módulo 3 con 0, otro con 1 y uno más con 2.

Si $l \equiv 1 \pmod 3$, $f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ y } i \neq l \\ 2 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i \equiv 0 \pmod 3 \\ 4 & i = l. \end{cases}$

Como en el caso anterior, y con la variante de que dentro de los tres vértices consecutivos podemos tomar al vértice v_l. Nos podemos dar cuenta que, si no tomamos a v_l, estamos en el caso anterior y que si tomamos a v_l, los tres vértices tienen colores diferentes pues ninguno tiene el color de v_l.

Si $l \equiv 2 \pmod 3$, $f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ y } i \neq l-1 \\ 2 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3 \text{ y } i \neq l \\ 3 & \text{si } i \equiv 0 \pmod 3 \\ 4 & i = l-1 \\ 5 & i = l. \end{cases}$

Este caso es muy similar al anterior sólo que con un vértice más. Pero así como en el primer caso, y debido a que el vértice restante tiene un color único que ningún otro vértice tiene, cualesquiera tres vértices consecutivos que tomemos tendrán colores diferentes.

2. Supongamos que $k = 2$ y $l \equiv 0 \pmod 3$. Definimos $f : V(C) \to \{1, 2, 3\}$ de la siguiente manera: $f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 0 \pmod 3 \\ 2 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$

Podemos notar que este caso es igual al primer caso de 1.

3. Supongamos $k = 3$ y $l \neq 5$. Si $l < 5$, entonces coloreamos cada vértice

de color diferente. Para $l > 5$ definimos $f : V(C) \to \{1, 2, 3, 4\}$ de la siguiente manera:

$$\text{Si } l \equiv 0 \pmod 3\text{, definimos } f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \\ 2 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Este caso es análogo al primer caso de 1.

$$\text{Si } l \equiv 1 \pmod 3\text{, definimos } f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ y } i \neq l \\ 2 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i \equiv 0 \pmod 3 \\ 4 & i = l. \end{cases}$$

Igualmente este caso es análogo al segundo caso de 1.

Si $l \equiv 2 \pmod 3$, definimos

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \text{ y } i < l-4 \text{ ó } i = l-3 \\ 2 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3 \text{ y } i < l-4 \text{ ó } i = l-2 \\ 3 & \text{si } i \equiv 0 \pmod 3 \text{ y } i < l-4 \text{ ó } i = l-1 \\ 4 & i = l-4 \text{ ó } i = l. \end{cases}$$

Aquí observemos que si en los tres vértices consecutivos no están los vértices v_{l-4} y v_l, estos tienen tres colores diferentes pues estaríamos en un caso muy similar al primer caso de 1. Los vértices v_{l-4} y v_l no pueden estar en una terna de vértices consecutivos pues entre ellos hay tres vértices de distancia. Y se tiene que las tercias $\{v_{l-6}, v_{l-5}, v_{l-4}\}$, $\{v_{l-5}, v_{l-4}, v_{l-3}\}$, $\{v_{l-4}, v_{l-3}, v_{l-2}\}$, $\{v_{l-2}, v_{l-1}, v_l\}$, $\{v_{l-1}, v_l, v_1\}$, $\{v_l, v_1, v_2\}$ no tienen colores repetidos.

Una ejemplificación de lo que ocurre con esta coloración viene dada en la figura 14:

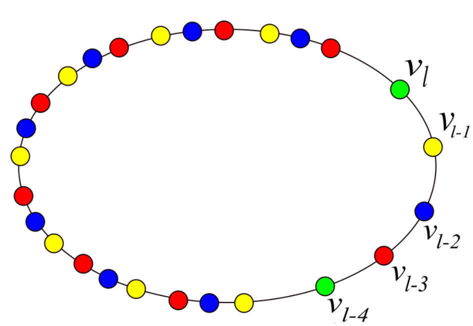

Figure 14: Ejemplificación de cómo funciona el lema 3.5.

De esta manera queda demostrado el lema.

□

Este lema lo utilizaremos en la demostración del teorema siguiente que, como dijimos anteriormente, tiene como objetivo enunciar que cierto tipo de gráficas block-cactus son domáticamente completas. Para la demostración del teorema necesitaremos dos definiciones y los siguientes resultados, los cuales vienen enunciados en [2] y [3]:

Una gráfica G se dice que es una **gráfica cordal** si G no contiene ciclos de longitud mayor que 3 como subgráficas inducidas. Un ordenamiento, $v_1, \ldots, v_k$, de los vértices de una gráfica G se dice que es de **eliminación fuerte** si para toda i, j, k, l el ordenamiento satisface las dos condiciones siguientes:

(a) Si $i < j < k$ y (v_i, v_j), $(v_i, v_k) \in E(G)$, entonces $(v_j, v_k) \in E(G)$.

(b) Si $i < j < k < l$ y (v_i, v_k), (v_i, v_l), $(v_j, v_k) \in E(G)$, entonces $(v_j, v_l) \in E(G)$.

Una gráfica G se dice que es **fuertemente cordal** si admite un ordenamiento de eliminación fuerte.

Por otro lado, un **trampolín incompleto** es una gráfica cordal G con $2n$ vértices, $n \geq 3$, cuyo conjunto de vértices puede ser partido en dos conjuntos, $W = \{w_i, \ldots, w_n\}$ y $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, tales que W es un conjunto independiente y, para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, w_i es adyacente a u_j si y sólo si $i = j$ ó $i \equiv j+1 \pmod{n}$. Un **trampolín** es un trampolín incompleto G en el que $G[U]$ es una gráfica completa. Estas definiciones se ilustran en la figura 15:

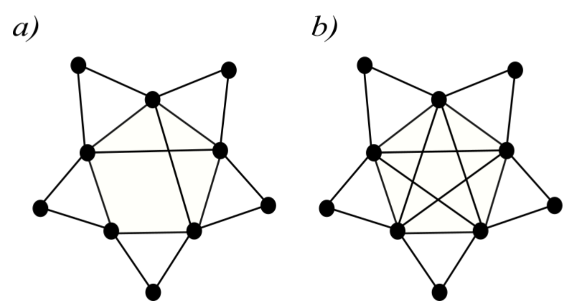

Figure 15: a) Ejemplo de un trampolín incompleto. b) Ejemplo de un trampolín.

Teorema 3.6 [2]: Una gráfica cordal es fuertemente cordal si y sólo si no contiene trampolines como subgráficas inducidas.

Teorema 3.7 [3]: Si G es fuertemente cordal entonces $d(G) = \delta(G) + 1$.

Una vez vistas estas definiciones y estos resultados, pasemos a enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.8: Sea G una gráfica block-cactus conexa. Si alguna de las siguientes ocurre,
1) $\delta(G) \geq 4$,
2) $\delta(G) = 2$ y G no contiene ningún ciclo C_l de longitud $l \not\equiv 0 \pmod 3$ como bloque,
3) $\delta(G) = 3$ y G no contiene ciclos C_5 como bloque,
entonces G es domáticamente completa.

Demostración Sean $B_1 \ldots, B_r$ los bloques de G que no son clanes, es decir, los que son ciclos. Procedamos por inducción sobre r.

Caso base. Si $r = 0$, entonces todos los bloques de G son clanes (pues en una gráfica block-cactus, los bloques son o ciclos o clanes), por lo que G es una gráfica bloque. Así, si es C un ciclo de G, C debe estar contenido en un bloque de G. Como los bloques de G son gráficas completas, C induce una gráfica completa. De esta forma, G es cordal.

Por otro lado, si G contiene un trampolín H, entonces H está contenido en un bloque de G puesto que el ciclo externo C del trampolín

$$C = (u_1, w_1, \ldots, u_i, w_i, \ldots, u_n, w_n, u_1)$$

debe estar contenido en un bloque de G. Ya que todos los bloques de G son gráficas completas, H no es inducido. De esta forma, por el teorema 3.6, G es *fuertemente cordal* y por el teorema 3.7, G es domáticamente completa. Así, si G es una gráfica bloque, G es domáticamente completa.

Hipótesis de inducción. Sea H una gráfica block-cactus tal que cumple alguna de las siguientes condiciones:
1) $\delta(H) \geq 4$,
2) $\delta(H) = 2$ y H no contiene ciclos C_l de longitud $l \not\equiv 0 \pmod 3$ como bloque,
3) $\delta(H) = 3$ y H no contiene ciclos C_5 como bloque
Sean $B_1, \ldots, B_k$ los bloques de H que no son clanes. Si ocurre que $1 \leq k < r$, entonces H es domáticamente completa.

Consideremos $G' = G - E(B_1)$. Notemos que las componentes conexas triviales de G' son vértices de grado 2 en G pues B_1 es ciclo. Ahora bien, si un vértice v de B_1 no es una componente trivial en G', entonces $\delta_G(v) \geq 3$, lo que implica que existe una arista que incide en v que no está en B_1 y ésta debe estar en una componente conexa no trivial de G'. Sean $J_1 \ldots, J_s$ estas componentes.

Notemos que B_1 es un ciclo que cumple las hipótesis requeridas por el lema 3.5. Así, existe una coloración $f : V(B_1) \to \{1, \ldots, \delta(G) + 1\}$ de los vértices de B_1, de tal forma que tres vértices consecutivos en el ciclo B_1 obtienen tres diferentes colores.

Afirmación: Para cada $i = 1, \ldots, s$, $|V(J_i) \cap V(B_1)| = 1$.

Demostración de la afirmación: Supongamos que $|V(J_i) \cap V(B_1)| > 1$. Sean $x_i, y_i \in V(J_i) \cap V(B_1)$, con $x_i \neq y_i$. Sean $D_1^i, \ldots, D_k^i$ los bloques de G que conforman la componente conexa J_i. Tenemos dos casos:

(a) $x_i, y_i \in D_j^i$ para alguna $j \in \{1 \ldots, k\}$.

Esto no puede oucrrir pues tendríamos que los bloques B_1 y D_j^i comparten dos vértices, lo cual, por el corolario 2.5, es falso.

(b) $x_i \in D_j^i$, $y_i \in D_l^i$ para algunas $j, l \in \{1 \ldots, k\}$, $l \neq j$.

Sea P una $x_i y_i$-trayectoria en J_i. Los bloques de G por lo cuales pasa la trayectoria P junto con B_1 forman un ciclo en la gráfica de bloques y vértices de corte de G, lo cual, por la proposición 2.6, es falso pues $BC(G)$ es un árbol. Así, para cada $i = 1, \ldots, s$, $|V(J_i) \cap V(B_1)| = 1$.

En seguida construiremos nuevas gráficas J_i' a partir de las gráficas J_i. Sea $\{x_i\} \in V(J_i) \cap V(B_1)$. Sean J_1^i, J_2^i dos gráficas completas de orden $\delta(G) + 1$. Hacemos adyacente x_i con exactamente un vértice de cada una de las gráficas J_1^i, J_2^i. Sean y_1^i en J_1^i y y_2^i en J_2^i estos vértices. Ver figura 16.

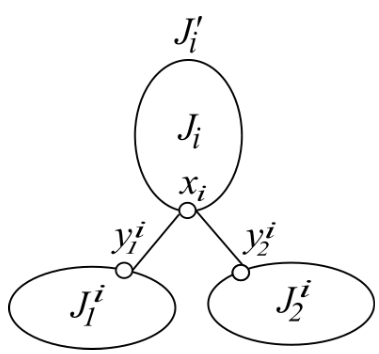

Figure 16: Construcción de J_i'.

Observemos que las gráficas J_i', para $i = 1, \ldots, s$, satisfacen las siguientes condiciones,
a) J_i' es una gráfica block-cactus con menos de r bloques no clanes, ya que J_i' tiene sus bloques no clanes contenidos en J_i. Claramente, $J_i \subset G - B_1$, que tiene $r - 1$ bloques no clanes; de donde, J_i tiene a lo más $r - 1$ bloques no clanes, y, entonces, J_i' tiene menos de r bloques no clanes.

b) J_i' no contiene ninguno de los ciclos no permitidos (en las hipótesis del teorema) como bloque. Las $K_{\delta(G)+1}$ son bloques en sí, por lo que no pueden tener estos ciclos prohibidos como bloques. Análogamente con las aristas $x_iy_1^i$, $x_iy_2^i$. Así, si J_i' tuviera estos ciclos no permitidos, deberían encontrarse contenidos en $J_i \subset G$, de donde G también los tendría, contradiciendo las hipótesis del teorema.

De esta forma, J_i' cumple la hipótesis de inducción. Así, J_i' es domáticamente completa, por lo que existe una coloración domática $f_i : V(J_i') \to \{1, \ldots, \delta(J_i')+1\}$.

Ahora bien, mostremos que $\delta(G) = \delta(J_i')$. Recordemos que J_i' está formada por J_i y dos $K_{\delta(G)+1}$ unidas a J_i mediante dos aristas incidentes en $x_i \in V(J_i)$. En J_i' el grado de x_i es el grado que tenía en G, ya que recupera las dos aristas que perdió al quitarle las dos aristas del ciclo B_1 que incidían en él; los demás vértices de J_i quedan con el mismo grado que tenían en G pues no les quitamos aristas. Así, $\delta_{J_i}(x) = \delta_G(x)$ para todo x en J_i. Por otra parte, los vértices restantes que están en J_i' pero no están en J_i son aquellos que están en una de las dos $K_{\delta(G)+1}$. Tomemos J_1^i y notemos que todos sus vértices, excepto y_1^i que tiene grado $\delta(G)+1$, tienen grado $\delta(G)$. Análogamente con los vértices de J_2^i. Así, $\delta(J_i') = \delta(G)$.

Como tenemos la igualdad entre los grados mínimos de G y J_i', podemos sustituir $\delta(J_i') + 1$ por $\delta(G) + 1$ en el codominio de la coloración domática, resultando, $f_i : V(J_i') \to \{1, \ldots, \delta(G) + 1\}$. Si $x \in V(J_1^i)$ con $x \neq y_1^i$, entonces $|N[x]| = \delta(G) + 1$, por lo que todos los vértices de J_1^i tienen colores diferentes. Lo mismo ocurre con los vértices de J_2^i.

Sin pérdida de generalidad, asumamos, para $i = 1, \ldots, s$, que x_i, y_1^i, y_2^i tienen tres colores diferentes. De lo contrario, cambiemos los colores como en el lema 3.1. Observemos que f_i define aún una partición domática de J_i'. Sean x_i^- y x_i^+ los vecinos de x_i en el ciclo B_1. Para $i = 1, \ldots, s$, supongamos sin pérdida de generalidad que:
1. $f_i(x_i) = f(x_i)$,
2. $f_i(y_1^i) = f(x_i^-)$,
3. $f_i(y_2^i) = f(x_i^+)$.

De otra forma, un cambio en los colores nos lleva a esta situación. Por la proposición 3.1, f_i sigue siendo domática. Definamos f^* sobre $V(G)\backslash V(B_1)$ como $f^*(x) = f_i(x)$ si x está en $V(J_i)\backslash\{x_i\}$. La coloración está bien definida pues los conjuntos $V(J_i)\backslash\{x_i\}$ son conjuntos disjuntos y contienen todos los vértices de $V(G)\backslash V(B_1)$.

Afirmación: f^* define una partición domática sobre G.

Demostración de la afirmación:

Mostremos que para cualquier $x \in V(G)$, $f^*(N_G[x]) = \{1, \ldots, \delta(G)+1\}$. Vamos a dividir el problema en los siguientes casos:

1) Si $x \in V(J_i)\backslash\{x_i\}$ para alguna $i = 1, \ldots, s$, entonces x tiene la misma vecindad en G que en J_i', es decir, $f^*(N_G[x]) = f_i(N_{J_i}[x])$ y, ya que f_i es domática, $f^*(N_G[x]) = \{1, \ldots, \delta(G) + 1\}$.

2) Si $x = x_i$ para alguna $i = 1, \ldots, s$. Cuando pasamos de J_i' a G, x_i pierde dos vecinos. Estos son sustituidos por x^+ y por x^- que tienen los mismos colores, bajo f^*, que y_1^i y y_2^i bajo f_i. Así, $f^*(N_G[x_i]) = f_i(N_{J_i'}[x_i])$; y de nuevo, $f^*(N_G[x]) = \{1, \ldots, \delta(G) + 1\}$.

3) Si $x \in V(B_1)\backslash V(J_i)$, tenemos que $\delta(G) = 2$ y x es dominado por tres colores debido a la definición de f sobre el ciclo B_1.

De esta manera, G es domáticamente completa.

□

Si tenemos una gráfica block-cactus con $\delta(G) = 4$, por el teorema anterior sabremos que ésta es domáticamente completa. Sin embargo, no podemos asegurar cuál es el número domático de una gráfica block-cactus con $\delta(G) = 2$ ó con $\delta(G) = 3$, pues el teorema anterior requiere de ciertas condiciones en las gráficas que tienen estos grados mínimos. En el capítulo siguiente abordaremos las gráficas block-cactus con $\delta(G) = 2$ que no quedaron abarcadas en el teorema anterior y diremos cuál es su número domático

4. Número domático de las gráficas block-cactus con $\delta(G) = 2$.

En el capítulo anterior faltó encontrar el número domático de ciertas gráficas block-cactus con $\delta(G) = 2$. En este capítulo encontraremos el número domático de esas gráficas que no quedaron comprendidas en el teorema 3.8. Para llevar a cabo esto necesitaremos una nueva notación que utilizaremos para probar un lema más adelante, la cual viene explicada a continuación:

Notación 4.1: Sena $C = (x_1, \ldots, x_l, x_1)$ un ciclo y $S \subset V(C)$ con $S = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}\}$. S **descompone a** C en las s trayectorias siguientes (ver figura 17):

$$P_j = x_{i_j} \mathcal{C} x_{i_{j+1}}, \text{ con } j \in \{1, \ldots, s-1\}.$$
$$P_s = x_{i_s} \mathcal{C} x_{i_1}.$$

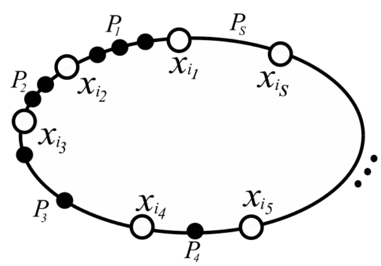

Figure 17: Descomposición del ciclo C.

Usando esta notación enunciemos el lema siguiente, que exhibe la existencia de cierto tipo de coloraciones de ciclos.

Lema 4.2: Sea C_l un ciclo de longitud l, tal que $l \not\equiv 0 \pmod 3$. Sea $S \subset V(C_l)$ con $|S| = s$, tal que S **descompone a** C_l en s trayectorias $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$. Observemos las siguientes condiciones:

1. El conjunto $\mathcal{P}$ contiene una trayectoria de longitud 1.
2. El número de trayectorias en $\mathcal{P}$ de una longitud k con $k \not\equiv 0 \pmod 3$ es diferente de 1, es decir, $|\{P | P \in \mathcal{P}, (|V(P)| - 1) \not\equiv 0 \pmod 3\}| \neq 1$.

1.1. Entonces, si ocurre alguna de las condiciones 1 y 2, existe una coloración $f : V(C_l) \to \{1, 2, 3\}$ tal que:

a) $|f(N_{C_l}[x])| = 3$ si $x \notin S$.

b) $|f(N_{C_l}[x])| \geq 2$ si $x \in S$.

1.2. Entonces, si no ocurre 1 ni 2, para toda coloración $g : V(C_l) \to \{1, 2, 3\}$ existe un vértice $y \notin S$ tal que

$|g(N_{C_l}[y])| < 3$.

Demostración:

Sea $C_l = (x_1, x_2, \ldots, x_l, x_1)$ un ciclo de longitud l, tal que $l \not\equiv 0 \pmod 3$. Sea $S = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}\} \subset V(C_l)$ tal que S **descompone a** C_l en s trayectorias $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$. Asumamos sin pérdida de generalidad que $x_1 = x_{i_1}$. Ver figura 18.

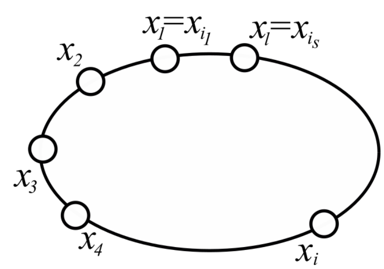

Figure 18: Descomposición de C_l.

Procedamos a demostrar 1.1. Para esto, supongamos primero que se cumple 1, esto es que el conjunto $\mathcal{P}$ contiene una trayectoria de longitud 1 y sin pérdida de generalidad supongamos que $long(P_s) = 1$.

Definamos $f : V(C_l) \to \{1, 2, 3\}$ de la siguente manera (ver figura 19):

$$f(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \\ 2 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

Observemos que para $i \in \{2, \ldots, s-1\}$, tenemos que $|f(N_{C_l}[x_i])| = 3$, por lo tanto, si $x_i \notin S, |f(N_{C_l}[x_i])| = 3$ y si $x_i \in S$, entonces $|f(N_{C_l}[x_i])| \geq 2$. Ahora bien, $|f(N_{C_l}[x_1])| \geq 2$ ya que $f(x_1) = 1, f(x_2) = 2 \in f(N_{C_l}[x_1])$. Análogamente, $|f(N_{C_l}[x_s])| \geq 2$ pues $f(x_{s-1}) \neq f(x_s)$ y $f(x_{s-1}), f(x_s) \in f(N_{C_l}[x_s])$.

Ahora supongamos que se cumple 2, esto es, el número de trayectorias en $\mathcal{P}$ de una longitud k con $k \not\equiv 0 \pmod 3$ es diferente de 1. Observemos que no puede haber cero de estas trayectorias porque contradiría que $long(C_l) \not\equiv 0 \pmod 3$.

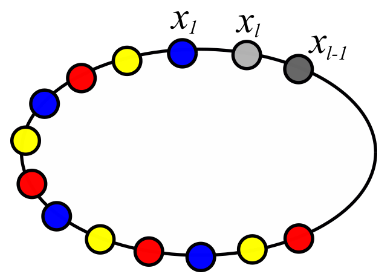

Figure 19: Coloración de C_l bajo f. Los colores de los vértices x_l y x_{l-1} se encuentran en escala de grises para resaltar que, a pesar de que se ignora su color bajo f, tienen diferente color entre sí.

Así, hay al menos dos trayectorias, P_a y P_j, cuyas longitudes no son congruentes con 0 módulo 3. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $P_j = P_s$, es decir, P_j tiene como extremos a x_{i_1} y x_{i_s}. Además, podemos suponer que $x_{i_1} = x_1$ (si no reetiquetamos). Sea P_a de tal forma que si $b \in \{1, \ldots, a-1\}$, $long(P_b) \equiv 0 \pmod 3$. Notemos que los vértices x_{i_a}, $x_{i_{a+1}}$, x_{i_s}, x_1 parten a C_l en 4 trayectorias:

$P = (x_1, \ldots, x_{i_a})$, $P_a = (x_{i_a}, x_{i_a+1}, \ldots, x_{i_{a+1}})$, $Q = (x_{i_{a+1}}, \ldots, x_{i_s})$ y $P_s = (x_{i_s}, x_{i_s+1}, \ldots, x_1)$. Para fines de la demostración veremos a la trayectoria P_s en el orden siguiente: $P_s = (x_1, x_{l-1}, \ldots, x_{i_s+1}, x_{i_s})$. Observemos la figura 20.

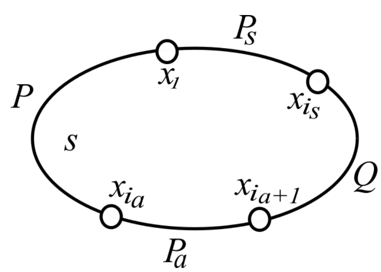

Figure 20: Las trayectorias P, P_a, Q y P_s en C_l.

Definamos una coloración f_p sobre la trayectoria P.

Sea $f_p : \{x_1, \ldots, x_{i_a}\} \to \{1, 2, 3\}$ (ver figura 21),

$$f_p(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \\ 2 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i \equiv 3 \pmod 3 \end{cases}$$

Observación 1: $|f_p(N_P[x_i])| = 3$, si $i \in \{2, \ldots, i_a - 1\}$ y $|f_p(N_P[x_i])| = 2$,

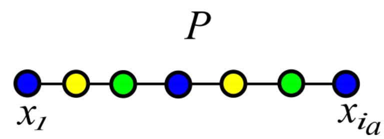

Figure 21: Coloración de la trayectoria P.

si $i \in \{1, i_a\}$. Además $f_p(x_{i_a}) = 1$, pues $long(P) \equiv 0 \pmod 3$.

Ahora, recordemos que $long(P_a) \not\equiv 0 \pmod 3$.

Si $long(P_a) \equiv 1 \pmod 3$, sea $f_a^1 : \{x_{i_a}, \ldots, x_{i_{a+1}}\} \to \{1, 2, 3\}$ (ver figura 22),

$$f_a^1(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3 \\ 2 & \text{si } i \equiv 3 \pmod 3 \end{cases}$$

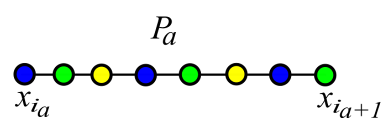

Figure 22: Coloración de la trayectoria P_a.

Si $long(P_a) \equiv 2 \pmod 3$, sea $f_a^2 : \{x_{i_a}, \ldots, x_{i_{a+1}}\} \to \{1, 2, 3\}$ (ver figura 23),

$$f_a^2(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1 \pmod 3 \\ 2 & \text{si } i \equiv 2 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i \equiv 3 \pmod 3 \end{cases}$$

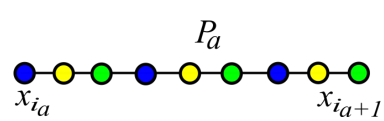

Figure 23: Coloración de la trayectoria P_a.

Observación 2: Sin importar la longitud de P_a, existe una coloración f_a (f_a^1 ó f_a^2) de P_a tal que $|f_a(N_{P_a}[x_i])| = 3$ si $i \in \{i_a+1, \ldots, i_{a+1}-1\}$ y $|f_a(N_{P_a}[x_i])| = 2$ si $i \in \{i_a, i_{a+1}\}$. Además, $f_a(x_{i_a}) = 1$ y $f_a(x_{i_{a+1}}) = 3$.

Recordemos que $long(P_s) \not\equiv 0 \pmod 3$. Vamos a dar coloraciones de P_s de tal manera que sin importar la longitud de P_s se pueda tener que el color de x_1 sea 1 y el color de x_{i_s} sea 2 ó 3 a nuestra conveniencia.

Si $long(P_s) \equiv 1 \pmod 3$,

Sea $f_s^1 : \{x_1, \ldots, x_{i_s}\} \to \{1, 2, 3\}$ (ver figura 24),

$$f_s^1(x_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } l - i + 1 \equiv 1 \pmod 3,\ i \neq 1 \\ 3 & \text{si } l - i + 1 \equiv 2 \pmod 3,\ i \neq 1 \\ 1 & \text{si } l - i + 1 \equiv 3 \pmod 3,\ i \neq 1 \text{ ó } i = 1 \end{cases}$$

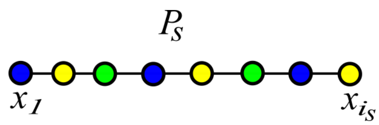

Figure 24: Coloración de la trayectoria P_s.

Observemos que $f_s^1(x_s) = 2$.

Sea $f_s^2 : \{x_1, \ldots, x_{i_s}\} \to \{1, 2, 3\}$ (ver figura 25),

$$f_s^2(x_i) = \begin{cases} 3 & \text{si } l - i + 1 \equiv 1 \pmod 3,\ i \neq 1 \\ 2 & \text{si } l - i + 1 \equiv 2 \pmod 3,\ i \neq 1 \\ 1 & \text{si } l - i + 1 \equiv 3 \pmod 3,\ i \neq 1 \text{ ó } i = 1 \end{cases}$$

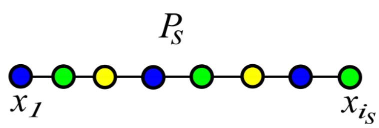

Figure 25: Coloración de la trayectoria P_s.

Observemos que $f_s^2(x_s) = 3$.

Si $long(P_s) \equiv 2 \pmod 3$,

Sea $f_s^3 : \{x_1, \ldots, x_{i_s}\} \to \{1, 2, 3\}$ (ver figura 26),

$$f_s^3(x_i) = \begin{cases} 3 & \text{si } l - i + 1 \equiv 1 \pmod 3,\ i \neq 1 \\ 2 & \text{si } l - i + 1 \equiv 2 \pmod 3,\ i \neq 1 \\ 1 & \text{si } l - i + 1 \equiv 3 \pmod 3,\ i \neq 1 \text{ ó } i = 1 \end{cases}$$

Observemos que $f_s^3(x_s) = 2$.

Sea $f_s^4 : \{x_1, \ldots, x_{i_s}\} \to \{1, 2, 3\}$ (ver figura 27),

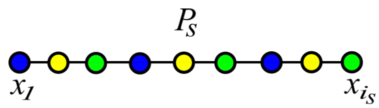

Figure 26: Coloración de la trayectoria P_s.

$$f_s^4(x_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } l-i+1 \equiv 1 \pmod 3,\ i \neq 1 \\ 3 & \text{si } l-i+1 \equiv 2 \pmod 3,\ i \neq 1 \\ 1 & \text{si } l-i+1 \equiv 3 \pmod 3,\ i \neq 1 \text{ ó } i = 1 \end{cases}$$

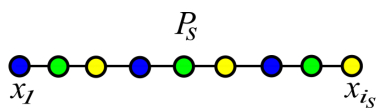

Figure 27: Coloración de la trayectoria P_s.

Observemos que $f_s^4(x_s) = 3$.

Observación 3: Obsérvese que para $j = 1,2,3,4$, $|f_s^j(N_{P_s}[x_i])| = 3$ si $i \in \{l, l-1 \ldots, i_s+1\}$ y $|f_s^j(N_{P_s}[x_i])| = 2$ si $i \in \{1, i_s\}$. Además, notemos que siempre podemos elegir una coloración f_s (f_s^1, f_s^2, f_s^3 ó f_s^4) de P_s tal que $f_s(x_1) = 1$ y $f_s(x_{i_s})$ tenga el color 2 ó 3 (a nuestra conveniencia).

Ahora, supongamos que $long(Q) \equiv 0 \pmod 3$.
Definamos $f_q^1 : \{x_{i_{a+1}}, \ldots, x_{i_s}\} \to \{1,2,3\}$ (ver figura 28),

$$f_q^1(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i - i_{a+1} \equiv 1 \pmod 3 \\ 2 & \text{si } i - i_{a+1} \equiv 2 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i - i_{a+1} \equiv 3 \pmod 3 \end{cases}$$

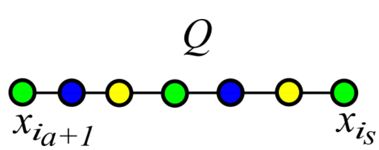

Figure 28: Coloración de la trayectoria Q.

Observemos que $f_q^1(x_{i_{a+1}}) = f_q^1(x_{i_s}) = 3$.

Supongamos $long(Q) \equiv 1 \pmod 3$.
Definamos $f_q^2 : \{x_{i_{a+1}}, \ldots, x_{i_s}\} \to \{1,2,3\}$ (ver figura 29),

$$f_q^2(x_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i - i_{a+1} \equiv 1 \pmod 3 \\ 1 & \text{si } i - i_{a+1} \equiv 2 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i - i_{a+1} \equiv 3 \pmod 3 \end{cases}$$

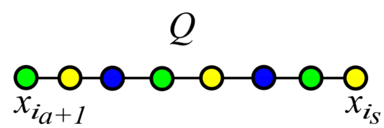

Figure 29: Coloración de la trayectoria Q.

Observemos que $f_q^2(x_{i_{a+1}}) = 3$ y $f_q^2(x_{i_s}) = 2$.

Supongamos $long(Q) \equiv 2 \pmod 3$.
Definamos $f_q^3 : \{x_{i_{a+1}}, \ldots, x_{i_s}\} \to \{1, 2, 3\}$ (ver figura 30),

$$f_q^3(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i - i_{a+1} \equiv 1 \pmod 3 \\ 2 & \text{si } i - i_{a+1} \equiv 2 \pmod 3 \\ 3 & \text{si } i - i_{a+1} \equiv 3 \pmod 3 \end{cases}$$

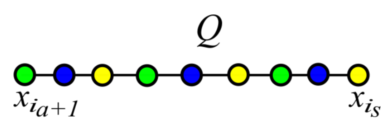

Figure 30: Coloración de la trayectoria Q.

Observemos que $f_q^3(x_{i_{a+1}}) = 3$ y $f_q^3(x_{i_s}) = 2$.

Observación 4: Observemos que para $j = 1, 2, 3$, $|f_q^j(N_Q[x_i])| = 3$ si $i \in \{i_{a+1} + 1, \ldots, i_s - 1\}$ y $|f_q^j(N_Q[x_i])| = 2$ si $i \in \{i_{a+1}, x_{i_s}\}$.

Por las observaciones 1,2,3 y 4 podemos dar una coloración f para todo el ciclo C_l con las convenientes coloraciones definidas sobe P, P_a, Q, P_s (f_p, f_a^j, f_q^h, f_s^i). Obsérvese que f está bien definida en x_1, x_{i_a}, $x_{i_{a+1}}$, x_{i_s}. Además, como se vio en las observaciones, $|f(N_{C_l}[x_i])| = 3$ si $i \in \{1, \ldots, l\} \backslash \{1, i_a, i_{a+1}, i_s\}$ y $|f(N_{C_l}[x_i])| \geq 2$ si $i \in \{1, i_a, i_{a+1}, i_s\}$. Así, si $x \notin S$ $|f(N_{C_l}[x])| = 3$ y si $x \in S$ $|f(N_{C_l}[x])| \geq 2$.

Ahora demostraremos 1.2. Para esto supongamos que no ocurre 1 y 2. Así, por 1, no tenemos trayectorias en $\mathcal{P}$ de longitud 1 y, por 2, el número de trayectorias en $\mathcal{P}$ de longitud k con $k \not\equiv 0 \pmod 3$ es igual a 1. De esta forma, en $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ hay una única trayectoria P_j tal que $long(P_j) \not\equiv 0 \pmod 3$, $long(P_j) \neq 1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $j = s$, es decir, $long(P_i) \equiv 0 \pmod 3$ para toda $i \neq s$, ver figura 31.

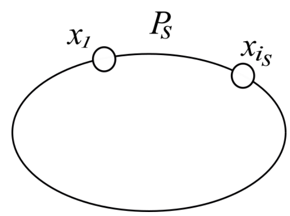

Figure 31: $long(P_s) \not\equiv 0 \pmod 3$, $long(P_s) \neq 1$.

Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe una coloración

$$g : V(C_l) \to \{1, 2, 3\} \text{ tal que } |g(N_{C_l}[x])| = 3 \text{ para todo } x \notin S.$$

Sea $T = (x_1, \ldots, x_{i_s})$. Es claro que si suponemos que $g(x_1) = 1$, entonces $g(x_{i_j}) = 1$ para toda $j = 1, \ldots, s$ pues $long(P_i) \equiv 0 \pmod 3$ para toda $i = 1, \ldots, s-1$, ver figura 32.

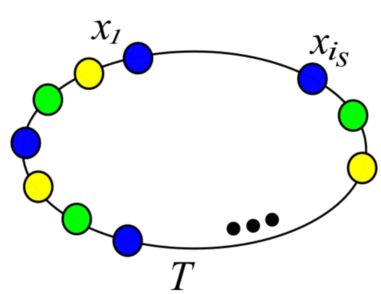

Figure 32: Coloración de T bajo g.

Ahora, observemos que si $long(P_s) \equiv 1 \pmod 3$, $g(x_l) = g(x_1)$ y si $long(P_s) \equiv 2 \pmod 3$, $g(x_{l-1}) = g(x_1)$ (ver figuras 33 y 34). En ambos casos, $|g(N_{C_l}[x_l])| = 2$, lo cual contradice que g sea domática.

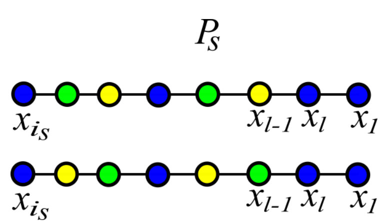

Figure 33: Coloraciones posibles para P_s si $long(P_s) \equiv 1 \pmod 3$.

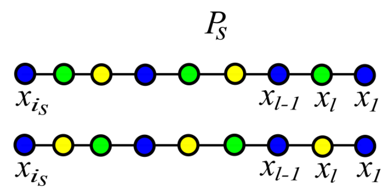

Figure 34: Coloraciones posbiles para P_s si $long(P_s) \equiv 2 \pmod 3$.

Así, queda demostrado 1.2.

□

Procedamos a demostrar el teorema que enuncia las condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica block-cactus con grado mínimo 2 que contenga ciclos de longitud $s_i \not\equiv 0 \pmod 3$ como bloques sea domáticamente completa. Para demostrar este teorema usaremos el lema anterior.

Teorema 4.3: Sea G una gráfica block-cactus conexa con $\delta(G) = 2$. Sean $B_1, \ldots, B_l$ los bloques de G que son ciclos de longitud $s_i \not\equiv 0 \pmod 3$ y sea para cada $i = 1, \ldots, l$, S_i, el conjunto de los vértices de corte de G en $V(B_i)$. S_i descompone a B_i en el conjunto de trayectorias $\mathcal{P}_i = \{P_i^1, P_i^2, \ldots, P_i^{j_i}\}$ para $i = 1, \ldots, l$.

G es domáticamente completa si y sólo si para cada $i = 1, \ldots, l$ al menos una de las siguientes condiciones se cumple:

1. El conjunto $\mathcal{P}_i$ contiene una trayectoria de longitud 1.
2. El número de trayectorias en $\mathcal{P}_i$ de una longitud k con $k \not\equiv 0 \pmod 3$ es diferente de 1, es decir, $|\{P | P \in \mathcal{P}_i, (|V(P)| - 1) \not\equiv 0 \pmod 3\}| \neq 1$.

Demostración:

Supongamos que cada bloque B_i, $i = 1, \ldots, l$, de la gráfica block-cactus G satisface 1 ó 2 para demostrar que G es domáticamente completa. Procedamos por inducción sobre l, el número de bloques en G cuya longitud no es múltiplo de 3.

Caso base: $l = 0$.
Entonces G no tiene ciclos C_l como bloques con $l \not\equiv 0 \pmod 3$. Así, por el teorema 3.8, G es domáticamente completa.

Hipótesis de inducción:
Sea H una gráfica block-cactus con $\delta(H) = 2$ tal que tiene k bloques que son

ciclos de longitud no congruente con 0 módulo 3. Así, si $k < l$ y los conjuntos $\mathcal{P}_i$ satisfacen 1 ó 2, entonces H es domáticamente completa.

Sea G una gráfica con l bloques, $B_1, \ldots, B_l$, que son ciclos de longitud no congruente con 0 módulo 3 donde, además, los conjuntos $\mathcal{P}_i$ cumplen 1 ó 2. Consideremos la gráfica $G - E(B_1)$ y sean $J_1, \ldots, J_r$ las componentes conexas no tiriviales de $G - E(B_1)$.

Afirmación: Para cada $i = 1, \ldots, r$, $V(J_i) \cap V(B_1) = \{y_i\}$, con y_i vértice de corte de G.

Demostración de la Afirmación: Supongamos que $|V(J_i) \cap V(B_1)| > 1$. Sean $x_i, y_i \in V(J_i) \cap V(B_1)$, con $x_i \neq y_i$. Sean $D_1^i, \ldots, D_k^i$ los bloques de G que conforman la componente conexa J_i. Tenemos dos casos:

(a) $x_i, y_i \in D_j^i$ para alguna $j \in \{1 \ldots, k\}$.

Esto no puede oucrrir pues tendríamos que los bloques B_1 y D_j^i comparten dos vértices, lo cual, por el corolario 2.5, es falso.

(b) $x_i \in D_j^i$, $y_i \in D_l^i$ para algunas $j, l \in \{1 \ldots, k\}$, $l \neq j$.

Sea P una $x_i y_i$-trayectoria en J_i. Los bloques de G por lo cuales pasa la trayectoria P junto con B_1 forman un ciclo en la gráfica de bloques y vértices de corte de G, lo cual, por la proposición 2.6, es falso pues $BC(G)$ es un árbol. Así, para cada $i = 1, \ldots, s$, $|V(J_i) \cap V(B_1)| = 1$.

Ahora, construiremos la gráfica J_i' a partir de J_i y de un K_3 de la siguiente manera (ver figura 35):

$J_i' = (V(J_i'), E(J_i'))$.
$V(J_i') = V(J_i) \cup \{y_1^i, y_2^i, y_3^i\}$.
$E(J_i') = E(J_i) \cup \{y_1^i y_2^i, y_2^i y_3^i, y_3^i y_1^i, y_i y_1^i\}$.

Observemos que B_1 satisface las hipótesis del lema 4.2, inciso (1.1) (con $S_1 = \{y_1, \ldots, y_r\}$). Así, existe $f_0 : V(B_1) \to \{1, 2, 3\})$ que satisface:

a) $|f_0(N_{B_1}[x])| = 3$ si $x \notin S_1$.

b) $|f_0(N_{B_1}[x])| \geq 2$ si $x \in S_1$.

Observemos, por otro lado, que cada J_i' satisface la hipótesis de inducción ya que J_i hereda las propiedades de G y la cantidad de bloques que son ciclos de longitud no congruente con 0 módulo 3 en J_i es menor a la cantidad que hay en G pues el bloque B_1 no está en J_i. Además, en J_i', los bloques que son ciclos

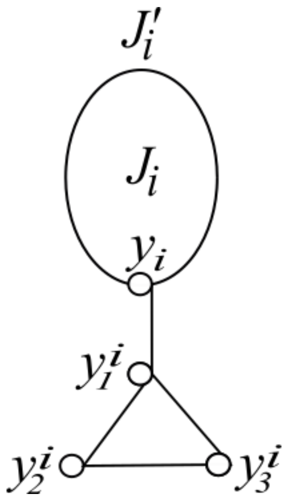

Figure 35: Construcción de J_i'.

son los de J_i más la gráfica K_3 pero este ciclo tiene longitud 3.

Así, J_i' es domáticamente completa para toda $i = 1, \ldots, l$. Sea $f_i : V(J_i') \to \{1,2,3\}$ una coloración domática de los vértices de J_i'. Por el lema 2.1 asumamos que $f_i(y_i) = f_0(y_i)$.

Sabemos que $|f_i(N_{J_i'}[y_i])| = 3$ pues f_i es una coloración domática. Esto implica que $|f_i(N_{J_i}[y_i])| \geq 2$ pues y_i tiene un vecino menos en J_i que en J_i'. Por otro lado, sabemos que $|f_0(N_{B_1}[y_i])| \geq 2$ ya que $y_i \in S_1$.

Observación 1: Si $|f_0(N_{B_1}[y_i])| = 2$, existe $c_1 \in \{1,2,3\}$ tal que $c_1 \notin f_0(N_{B_1}[y_i])$. Si además, $|f_i(N_{J_i}[y_i])| = 2$ existe $w \in N_{J_i}(y_i)$ tal que $f_i(y_i) \neq f_i(w)$. Sin pérdida de generalidad, por el lema 2.1, podemos suponer que $f_i(w) = c_1$ (ver figura 36).

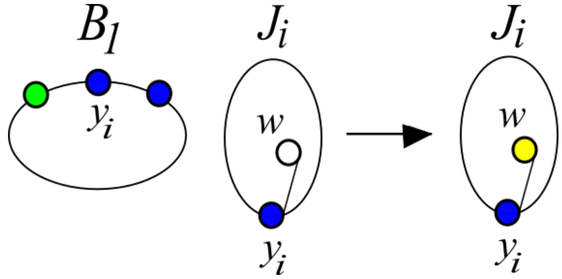

Figure 36: Ejemplo de la coloración del vértice w: coloreamos a w con el color que no encontramos en $f_0(N_{B_1}[y_i])$.

Definamos $f : V(G) \to \{1,2,3\}$,

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{si } x \in V(B_1) \\ f_i(x) & \text{si } x \in V(J_i) \end{cases}$$

Demostremos que f define una coloración domática sobre G, es decir, que $|f(N_G[x])| = 3$ para toda $x \in V(G)$. Analicemos los siguientes casos:

1. $x \in V(J_i)\backslash\{y_i\}$.
En este caso, por definición de f, $|f(N_G[x])| = |f_i(N_{J_i'}[x])| = 3$, por ser f_i domática.

2. $x \in V(B_1)\backslash\{y_i\}$.
En este caso, por definición de f, $|f(N_G[x])| = |f_0(N_{B_1}[x])| = 3$, pues $x \notin S_1$.

3. $x = y_i$.
En este caso, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f(N_G[x])| &= |f(N_{B_1}[x] \cup (N_{J_i'}[x])\backslash\{y_1^i\}))| \\ &= |f_0(N_{B_1}[x]) \cup f_i(N_{J_i'}[x]\backslash\{y_1^i\})| \\ &= |f_0(N_{B_1}[x]) \cup f_i(N_{J_i}[x])|. \end{aligned}$$

Observemos que si $|f_0(N_{B_1}[x])| = 3$ ó $|f_i(N_{J_i}[x])| = 3$, entonces automáticamente $|f_0(N_{B_1}[x]) \cup f_i(N_{J_i}[x])| = 3$. De aquí que el caso conflictivo ocurra cuando ambas cardinalidades sean iguales a 2 (tenemos $|f_i(N_{J_i}[y_i])| \geq 2$ y $|f_0(N_{B_1}[y_i])| \geq 2$). Por la observación 1, se tiene que existe un color $c_1 \in \{1,2,3\}$ tal que $c_1 \notin f_0(N_{B_1}[y_i])$ y existe un vértice $w \in N_{J_i}(y_i)$ con $f_i(w) = c_1$. Por lo que, $\{c_2, c_3\} \subset f_0(N_{B_1}[y_i])$ y $c_1 \in f_i(N_{J_i}[y_i])$. Así, $\{c_1, c_2, c_3\} \subset f(N_G(y_i))$, es decir, $|f(N_G[x])| = 3$.

De esta forma, concluimos que G es domáticamente completa.

Para demostrar la necesidad de las condiciones 1 y 2, supongamos que G es domáticamente completa. Sea $g : V(G) \to \{1,2,3\}$ una coloración domática de los vértices de G. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que existe un conjunto de trayectorias $\mathcal{P}_i$ que no cumple las condiciones 1 y 2. Sea B_i el bloque de G al cual pertenece el conjunto de trayectorias $\mathcal{P}_i$. Observemos que el ciclo B_i satisface el lema 4.2 en su parte 1.2. De esta forma, existe un vértice $y \notin S_i$ tal que

$$|g(N_{B_i}[y])| < 3.$$

Como $N_{B_i}[y] = N_G[y]$, entonces $|g(N_G[y])| < 3$, lo que contradice que g era domática. Así, queda demostrada la necesidad de las condiciones 1 y 2.

□

Los teoremas 3.8 y 4.3 caracterizan las gráficas block-cactus con grado mínimo 2 que son domáticamente completas. Sin embargo, aún no sabemos qué ocurre con las que no son domáticamente completas. En el teorema siguiente damos el número domático de estas gráficas.

Teorema 4.4: Sea G una gráfica block-cactus conexa tal que $\delta(G) = 2$. Si G no es domáticamente completa, entonces $d(G) = 2$.

Demostración:

Por la proposición 2.2 sabemos que $d(G) \leq \delta(G) + 1$ y por la proposición 2.3 sabemos que $d(G) \geq 2$. Juntando ambas desigualdades tenemos que $2 \leq d(G) \leq 3$ y como G no es domáticamente completa, es decir, $d(G) \neq 3$, entonces $d(G) = 2$.

□

El teorema 4.4 exhibe el número domático de las gráficas block-cactus con $\delta(G) = 2$. Así, podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 4.5: Si G es una gráfica block-cactus conexa tal que $\delta(G) = 2$, entonces, $d(G) = 2$ ó $d(G) = 3$.

Demostración:

Por el teorema 3.8, si G no contiene ningún ciclo C_l de longitud $l \not\equiv 0 \pmod 3$ como bloque, G es domáticamente completa.

Por el teorema 4.3, si G contiene ciclos C_l de longitud $l \not\equiv 0 \pmod 3$ como bloques, G es domáticamente completa si y sólo si cada conjunto de trayectorias $\mathcal{P}_i$ contiene al menos una trayectoria de longitud 1 o el número de trayectorias en $\mathcal{P}_i$ de una longitud k con $k \not\equiv 0 \pmod 3$ es diferente de 1.

Por el teorema 4.4, si G no es domáticamente completa, entonces $d(G) = 2$.

□

El corolario anterior enuncia cual es el número domático de una gráfica block-cactus con $\delta(G) = 2$, cualquiera sea ésta. En el capítulo siguiente haremos lo mismo pero ahora con las gráficas block-cactus con $\delta(G) = 3$.

5. Número domático de las gráficas block-cactus con $\delta(G) = 3$.

En este capítulo finalizaremos la búsqueda del número domático de todas las gráficas block-cactus. Esto lo haremos encontrando el número domático de las gráficas que no quedaron comprendidas ni en el capítulo 3 ni en el capítulo 4, es decir, las gráficas block-cactus con grado mínimo 3 que no fueron estudiadas en el teorema 3.8. Comenzaremos enunciando un lema que nos servirá para la prueba de un teorema posterior.

Lema 5.1: Sea G una gráfica conexa cuyos bloques son todos ciclos de longitud 5. Entonces, los dos enunciados siguientes son válidos:
1. Sea x_0 un vértice arbitrario fijo de G. Entonces existe una coloración $f_{x_0} : V(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ que satisface:

(a) $|f_{x_0}(N_G[x])| = \begin{cases} 3 & \text{si } \frac{|N_G(x)|}{2} = 1 \\ 4 & \text{si } \frac{|N_G(x)|}{2} \geq 2 \end{cases}$

para todo $x \in V(G) - \{x_0\}$ y

(b) $|f_{x_0}(N_G[x_0])| = \text{mín}\left\{\frac{|N_G(x_0)|}{2} + 1, 4\right\}$.

2. Para toda coloración $f : V(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ hay al menos un vértice x_f en $V(G)$ tal que

$|f(N_G[x_f])| \leq \text{mín}\left\{\frac{|N_G(x_f)|}{2} + 1, 4\right\}$.

Demostración:

Observación 1: Notemos que en G todo vértice tiene grado par pues todo vértice se encuentra en ciclos.

Para demostrar (1) procedamos por inducción sobre el número de ciclos de longitud 5 en G.

Caso base: $n = 1$, es decir, G es un ciclo C_5. Claramente, una coloración como en la figura 37 cumple las condiciones.

Procedamos a asumir la hipótesis de inducción, es decir: Para toda gráfica H que tiene $k - 1$ bloques que son C_5 y un vértice arbitrario y_0, existe una coloración f_{y_0} que cumple (a) y (b).

Ahora, supongamos que tenemos una gráfica G con $k \geq 2$ bloques que son

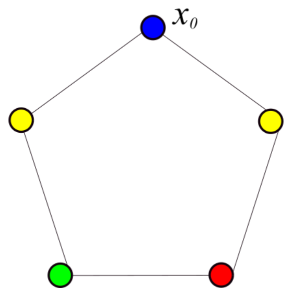

Figure 37: Coloración de un C_5 que cumple la proposición.

ciclos C_5 y x_0 un vértice arbitrario de G. Sea B un bloque terminal de G y sea y el vértice de corte contenido en B. Sean $V(B) = \{y, y_1, y_2, y_3, y_4\}$ como en la figura 38.

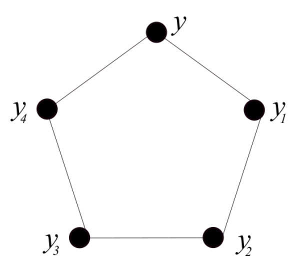

Figure 38: Etiquetas de los vértices de B.

Consideremos $G' = G - (B - \{y\})$. De esta forma, G' tiene $k-1$ bloques que son C_5. Por hipótesis de inducción, para todo $y \in V(G')$ existe $f'_y : V(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ que satisface (a) y (b). Procedamos por casos:

(1.1) $x_0 \notin V(B)$.
Si $x_0 \notin V(B)$, $x_0 \in V(G')\backslash\{y\}$. Entonces, existe $f'_{x_0} : V(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ tal que:

(a) $|f'_{x_0}(N_{G'}[x])| = \begin{cases} 3 & \text{si } \frac{|N_{G'}(x)|}{2} = 1 \\ 4 & \text{si } \frac{|N_{G'}(x)|}{2} \geq 2 \end{cases}$

para todo $x \in V(G')\backslash\{x_0\}$ y

(b) $|f'_{x_0}(N_{G'}[x_0])| = \text{mín}\left\{\frac{|N_{G'}(x_0)|}{2} + 1, 4\right\}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $f'_{x_0}(y) = 1$, y ya que $x_0 \notin V(B)$,

$x_0 \neq y$. Entonces, por (a) sabemos que

$$|f'_{x_0}(N_{G'}[y])| = \begin{cases} 3 & \text{si } \frac{|N_{G'}(y)|}{2} = 1 \\ 4 & \text{si } \frac{|N_{G'}(y)|}{2} \geq 2 \end{cases}$$

de donde podemos notar que en la vecindad cerrada de y en G', $N_{G'}[y]$, se están usando al menos 3 colores distintos. Entonces existen $u, v \in N_{G'}(y)$ tales que podemos sin pérdida de generalidad, suponer que $f(u) = 2$ y $f(v) = 3$. Ahora, definimos $f_{x_0} : V(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ de la siguiente manera (ver figura 39):

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} f'_{x_0}(x) & \text{si } x \in V(G') \\ 4 & \text{si } x = y_1, y_4 \\ 2 & \text{si } x = y_2 \\ 3 & \text{si } x = y_3 \end{cases}$$

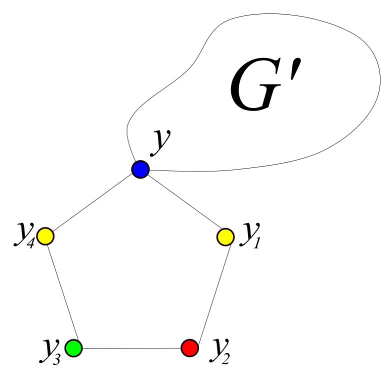

Figure 39: Acción de f_{x_0} sobre G vista con colores.

Comprobemos que f_{x_0} cumple con (a) y (b). Recordemos que estamos en el caso en el que $x_0 \in V(G')\backslash\{y\}$. Además, observemos que para todo $x \in V(G')\backslash\{y\}$, $N_{G'}(x) = N_G(x)$ pues a los vértices en $V(G')\backslash\{y\}$ no les quitamos ningún vecino, en particular para x_0. Así,

$$\begin{aligned} |f_{x_0}(N_G[x_0])| &= |f_{x_0}(N_{G'}[x_0])| \\ &= |f'_{x_0}(N_{G'}[x_0])| = \text{mín}\left\{\frac{|N_{G'}(x_0)|}{2} + 1, 4\right\} \\ &= \text{mín}\left\{\frac{|N_G(x_0)|}{2} + 1, 4\right\}. \end{aligned}$$

De esta forma, f_{x_0} cumple con (b).

Veamos ahora que f_{x_0} cumple (a) para todo $x \in V(G)\backslash\{x_0\}$. Si $x \in V(G')\backslash\{y\}$, sabemos que $N_G(x) = N_{G'}(x)$. Entonces,

$$f_{x_0}(N_G[x]) = f_{x_0}(N_{G'}[x])$$

$$= \quad f'_{x_0}(N_{G'}[x]) = \begin{cases} 3 & \text{si } \frac{|N_{G'}(x)|}{2} = 1 \\ 4 & \text{si } \frac{|N_{G'}(x)|}{2} \geq 2 \end{cases}$$

$$= \quad \begin{cases} 3 & \text{si } \frac{|N_G(x)|}{2} = 1 \\ 4 & \text{si } \frac{|N_G(x)|}{2} \geq 2. \end{cases}$$

Observación 2: Sabemos que $N_G(y) = N_{G'}(y) \cup \{y_1, y_4\}$ y además $N_{G'}(y) \neq \emptyset$ ya que no hay vértices aislados.

Ahora bien, si $x = y$ por la Observación 2, $|N_G(y)| \geq 4$, es decir, $\frac{|N_G(y)|}{2} \geq 2$. Así basta probar que $|f_{x_0}(N_G[y])| = 4$. Notemos que y, u, v, y_1 tienen todos colores diferentes entre sí, de donde podemos asegurar que $|f_{x_0}(N_G[y])| = 4$ (pues $|f_{x_0}(N_G[x])| \leq 4$ para todo $x \in V(G)$ ya que f_{x_0} es una coloración de 4 colores). Entonces, y también cumple (a).

Si $x \in V(B)\backslash\{y\}$, tenemos que $\frac{|N_G(y)|}{2} = 1$ de donde basta probar que $|f_{x_0}(N_G[x])| = 3$. Como la coloración de B es la del caso base es fácil comprobar que los vértices que están en $B\backslash\{y\}$ cumplen (a). Así, (a) se cumple para todo $x \in V(G)\backslash\{x_0\}$.

(1.2) $x_0 \in V(B)$
Por hipótesis de inducción para el vértice $y \in V(G')$ existe $f'_y : V(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ tal que:

(a) $|f'_y(N_{G'}[x])| = \begin{cases} 3 & \text{si } \frac{|N_{G'}(x)|}{2} = 1 \\ 4 & \text{si } \frac{|N_{G'}(x)|}{2} \geq 2 \end{cases}$

para todo $x \in V(G')\backslash\{y\}$ y

(b) $|f'_y(N_{G'}[y])| = \text{mín}\left\{\frac{|N_{G'}(y)|}{2} + 1, 4\right\}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos $f'_y(y) = 1$. Por la observación 2, $|N_G(y)| \geq 4$ de donde podemos asegurar que hay un vértice $u \in N_{G'}(y)$ tal que, sin pérdida de generalidad, $f'_y(u) = 2$, es decir, bajo f'_y, u tiene un color diferente a y. Observemos los siguientes casos:

(1.2.1) $x_0 = y$

Definimos f_{x_0} de la siguiente manera (ver figura 40):

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} f'_y(x) & \text{si } x \in V(G') \\ 4 & \text{si } x = y_1, y_4 \\ 2 & \text{si } x = y_2 \\ 3 & \text{si } x = y_3 \end{cases}$$

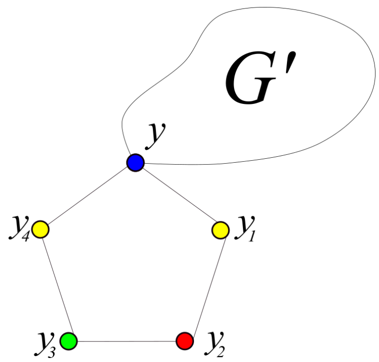

Figure 40: Acción de f_{x_0} sobre G vista con colores.

Observemos que todos los vértices $x \in V(G')\backslash\{y\}$ cumplen (a) porque f'_y lo cumplía y porque $\delta_G(x) = \delta_{G'}(x)$. Los vértices de $B\backslash\{y\}$ también cumplen a) pues es la misma coloración del caso de la base de inducción.

Por la observación 1 tenemos los siguientes casos:

(1.2.1.1) $|N_G(y)| = 4$.
Como $|f'_y(N_{G'}[y])| = \text{mín}\left\{\frac{|N_{G'}(y)|}{2} + 1, 4\right\} = \frac{|N_{G'}(y)|}{2} + 1 = 2$ y además, $\{1,2\} \subset f'_y(N_{G'}[y])$, entonces, $f'_y(N_{G'}[y]) = \{1,2\}$. Así, tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
|f_{x_0}(N_G[y])| &= |f_{x_0}(N_{G'}[y] \cup \{y_1, y_4\})| \\
&= |f_{x_0}(N_{G'}[y]) \cup f_{x_0}(\{y_1, y_4\})| \\
&= |f'_y(N_{G'}[y]) \cup \{4\}| \\
&= |\{1,2\} \cup \{4\}| = |\{1,2,4\}| = 3 \\
&= \frac{|N_G(y)|}{2} + 1 = \text{mín}\left\{\frac{|N_G(y)|}{2} + 1, 4\right\}.
\end{aligned}
$$

Así, f_{x_0} cumple con (b).

(1.2.1.2) $|N_G(y)| = 6$.
Tenemos que $|N_{G'}(y)| = 4$ y como $|f'_y(N_{G'}[y])| = \text{mín}\left\{\frac{|N_{G'}(y)|}{2} + 1, 4\right\}$, entonces $|f'_y(N_{G'}[y])| = 3$. Es decir, hay $v \in N_{G'}(y)$ tal que, sin pérdida de generalidad, $f'_y(v) = 3$ y, entonces $f'_y(N_{G'}[y]) = \{1,2,3\}$. De aquí es fácil ver que:

$$
\begin{aligned}
|f_{x_0}(N_G[y])| &= |f_{x_0}(N_{G'}[y] \cup \{y_1, y_4\})| \\
&= |f_{x_0}(N_{G'}[y]) \cup f_{x_0}(\{y_1, y_4\})| \\
&= |f'_{x_0}(N_{G'}[y]) \cup \{4\}| \\
&= |\{1,2,3\} \cup \{4\}| \\
&= |\{1,2,3,4\}| = 4
\end{aligned}
$$

$$= \quad \text{mín}\left\{\frac{|N_G(y)|}{2}+1,4\right\}.$$

Así, f_{x_0} cumple con (b).

(1.2.1.3) $|N_G(y)| \geq 8$.
Entonces, $|N_{G'}(y)| = 6$ y como $|f'_y(N_{G'}[y])| = \text{mín}\left\{\frac{|N_{G'}(y)|}{2}+1,4\right\}$, entonces $|f'_y(N_{G'}[y])| = 4$, es decir, la vecindad cerrada en G' de y usa ya los 4 colores. Así, $|f_{x_0}(N_G[y])|$ sigue siendo 4, que es igual al mín $\left\{\frac{|N_G(y)|}{2}+1,4\right\}$ por lo que para y nuevamente f_{x_0} cumple (b).

(1.2.2) $x_0 \neq y$.
Entonces, $x_0 = y_i$ para alguna $i \in \{1,2,3,4\}$.

(1.2.2.1) $x_0 = y_1$.
Definimos $f_{x_0} : V(G) \to \{1,2,3,4\}$ de la siguiente manera (ver figura 41):

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} f'_y(x) & \text{si } x \in V(G') \\ 4 & \text{si } x = y_4 \\ 3 & \text{si } x = y_1 \\ 2 & \text{si } x = y_3 \\ 1 & \text{si } x = y_2 \end{cases}$$

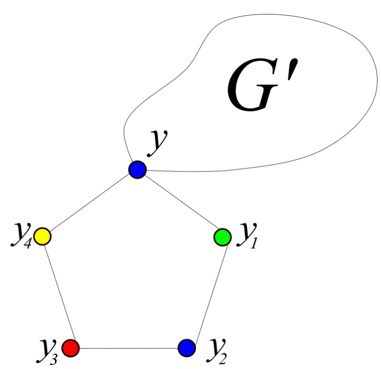

Figure 41: Acción de f_{x_0} sobre G vista con colores.

Observemos que todos los vértices $x \in V(G')\backslash\{y\}$ siguen cumpliendo (a) porque f'_y lo cumplía y porque $\delta_G(x) = \delta_{G'}(x)$. Los vértices de $B\backslash\{y, y_1\}$ también cumplen (a) pues es la misma coloración del caso de la base de inducción.

Por la observación 1 tenemos que $|N_G(y)| = 4$. Veamos ahora que f_{x_0} cumple (a) para y. Por un lado, tenemos que $\frac{|N_G(y)|}{2} \geq \frac{4}{2} \geq 2$. Por otro, observemos que $|N_{G'}(y)| \geq 2$ y como $|f'_y(N_{G'}[y])| = \text{mín}\left\{\frac{|N_{G'}(y)|}{2}+1,4\right\}$, entonces

$|f'_y(N_{G'}[y])| \geq 2$. Así, podemos asegurar que $\{1,2\} \subset f'_y(N_{G'}[y])$ De aquí, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}|f_{x_0}(N_G[y])| &= |f_{x_0}(N_{G'}[y] \cup \{y_1, y_4\})| \\ &= |f_{x_0}(N_{G'}[y]) \cup f_{x_0}(\{y_1, y_4\})| \\ &= |f'_y(N_{G'}[y]) \cup \{3,4\}| \\ &= |\{1,2,3,4\}| = 4.\end{aligned}$$

Por lo que f_{x_0} cumple (a) para y.

Tenemos que

$$|f_{x_0}(N_G[y_1])| = 2 = \frac{2}{2} + 1 = \text{mín}\left\{\frac{|N_G(y_1)|}{2} + 1, 4\right\}.$$

Por lo que f_{x_0} cumple con (b) para y_1 .

(1.2.2.2) $x_0 = y_2$.
Definimos $f_{x_0} : V(G) \to \{1,2,3,4\}$ de la siguiente manera (ver figura 42):

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} f'_y(x) & \text{si } x \in V(G') \\ 2 & \text{si } x = y_2 \\ 4 & \text{si } x = y_1, y_3 \\ 3 & \text{si } x = y_4. \end{cases}$$

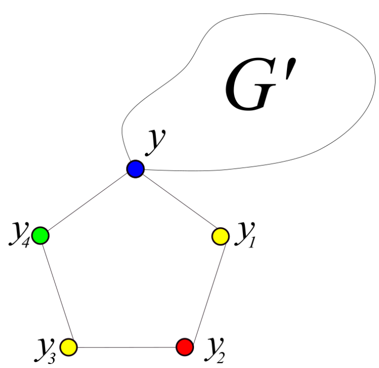

Figure 42: Acción de f_{x_0} sobre G vista con colores.

Observemos que todos los vértices $x \in V(G')\backslash\{y\}$ cumplen (a) porque f'_y lo cumplía y porque $\delta_G(x) = \delta_{G'}(x)$. Los vértices de $B\backslash\{y, y_2\}$ también cumplen (a) pues es la misma coloración del caso de la base de inducción.

Por la observación 1 tenemos que $|N_G(y)| \geq 4$. Además, como $\{1,2\} \subset f'_y(N_{G'}[y])$, obtenemos lo siguiente:

$$|f_{x_0}(N_G[y])| = |f_{x_0}(N_{G'}[y] \cup \{y_1, y_4\})|$$

$$
\begin{aligned}
&= |f'_y(N_{G'}[y]) \cup \{3,4\}| \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Por lo que f_{x_0} cumple (a) en y. Es fácil notar que

$$|f_{x_0}(N_G[y_2])| = 2 = \frac{2}{2} + 1 = \text{mín}\left\{\frac{|N_G(y_2)|}{2} + 1, 4\right\},$$

por lo que f_{x_0} cumple (b) en y_2.

(1.2.2.3) $x_0 = y_3$.
Definimos $f_{x_0} : V(G) \to \{1,2,3,4\}$ de la siguiente manera (ver figura 43):

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} f'_y(x) & \text{si } x \in V(G') \\ 2 & \text{si } x = y_3 \\ 4 & \text{si } x = y_2, y_4 \\ 3 & \text{si } x = y_1 \end{cases}$$

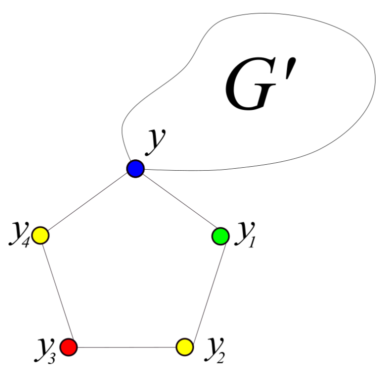

Figure 43: Acción de f_{x_0} sobre G vista con colores.

(1.2.2.4)$x_0 = y_4$.
Definimos $f_{x_0} : V(G) \to \{1,2,3,4\}$ de la siguiente maner (ver figura 44):

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} f'_y(x) & \text{si } x \in V(G') \\ 2 & \text{si } x = y_1 \\ 3 & \text{si } x = y_4 \\ 4 & \text{si } x = y_2 \\ 1 & \text{si } x = y_3 \end{cases}$$

Es fácil ver que en los casos (1.2.2.3), (1.2.2.4), f_{x_0} cumple el punto 1) del lema. La prueba es de manera análoga a los casos (1.2.2.2), (1.1.2.1). De esta manera, al probar todos los casos posibles, probamos la parte 1) del lema.

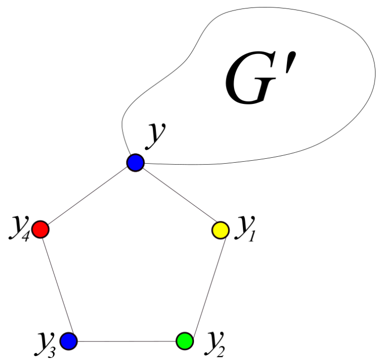

Figure 44: Acción de f_{x_0} sobre G vista con colores.

Para demostrar el punto 2) del lema, sea $f : V(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ una coloración. Veamos primero qué pasa cuando G es un C_5. Observemos que $\frac{|N_G(x)|}{2} + 1 = 2$, por lo que $\text{mín}\left\{\frac{|N_G(x)|}{2} + 1, 4\right\} = 2$ para todo $x \in V(G)$. Por demostrar que existe un vértice $x_f \in V(G)$ tal que $|f(N_G[x_f])| \leq 2$, es decir que existe un vértice tal que él y sus vecinos están coloreados por a lo más dos colores.

Ahora bien, como la coloración es de 4 colores y tenemos 5 vértices en G, entonces al menos dos vértices, digamos u y v, tendrán el mismo color. Si estos dos vértices son adyacentes, cualquiera de ellos es el vértice x_f buscado. Si no son adyacentes, entonces existe entre ellos un vértice w de color diferente; en este caso, $w = x_f$ sería el vértice buscado (ver figura 45).

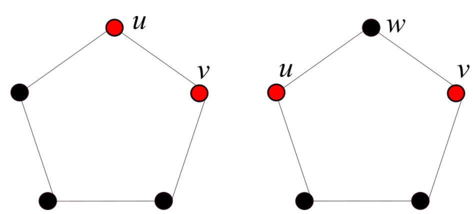

Figure 45: Casos posibles de la ubicación de los dos vértices con el mismo color.

Ahora, supongamos que la parte 2) del lema no es cierta y tomemos una gráfica H con el menor número de bloques, todos ellos C_5, que no la cumpla. Como C_5 ya vimos que cumple la proposición, entonces H tiene al menos dos C_5 como bloques. Sean F un bloque final de H y x_0 el vértice de corte de H en F. Consideremos H' la gráfica resultante de quitar F a H, es decir, $V(H') = V(H) \backslash (V(B) \backslash \{x_0\})$. De esta forma, por la minimalidad de H, para la f restringida en H' existe $x'_f \in V(H')$ tal que

$$|f(N_{H'}[x'_f])| \leq \text{mín}\left\{\frac{|N_{H'}(x'_f)|}{2} + 1, 4\right\}.$$

Notemos que x'_f debe ser x_0, de lo contrario x'_f funcionaría para f en H pues observemos que el único vértice de H' que gana vecinos en H es justamente x_0.

Por otro lado, recordemos que supusimos que H no cumplía 2) del lema, es decir, para todo $x \in V(H)$,

$$|f(N_H[x])| > \text{mín}\left\{\frac{|N_H(x)|}{2} + 1, 4\right\}. \tag{1}$$

Por otro lado, $4 \geq |f(N_H(x))|$ (pues el codominio de f tiene cardinalidad 4). Juntando las dos desigualdades, tenemos que

$$4 > \text{mín}\left\{\frac{|N_H(x)|}{2} + 1, 4\right\} = \frac{|N_H(x)|}{2} + 1.$$

A partir de esto obtenemos que $4 > \frac{|N_H(x)|}{2} + 1$. Despejando $|N_H(x)|$, obtenemos que para todo $x \in V(G)$ debe ocurrir que $|N_H(x)| < 6$, a partir de lo cual inferimos que todo vértice puede estar a lo más en 2 bloques de H.

De lo anterior y dado que hemos quitado un ciclo en H' al cual pertenece x_0, a saber, el bloque F, obtenemos que x_0 está en exactamente un ciclo en H', es decir, $|N_{H'}(x_0)| = 2$, de donde, $\frac{|N_{H'}(x_0)|}{2} + 1 = 2$.

Ahora, recordemos que x_0 cumplía que

$$|f(N_{H'}[x_0])| \leq \text{mín}\left\{\frac{|N_{H'}(x_0)|}{2} + 1, 4\right\}.$$

Por lo anterior, tenemos que

$$|f(N_{H'}[x_0])| \leq 2. \tag{2}$$

Por otro lado, todo vértice $x \in V(H)$ cumple

$$4 \geq |f(N_H[x])| > \frac{|N_H(x)|}{2} + 1$$

y como $|N_H(x_0)| = 4$, entonces, tenemos que

$$|f(N_H[x_0])| > 3. \tag{3}$$

De (2) y (3) tenemos que $|f(N_{H'}[x_0])| \leq 2$ y $|f(N_H[x_0])| > 3$. Esto implicaría que los dos vecinos de x_0 en F tienen colores diferentes a los colores que tienen x_0 y los dos vecinos de x_0 en G'. Entonces, tendríamos una coloración de G y, específicamente de F, como la de la figura 46:

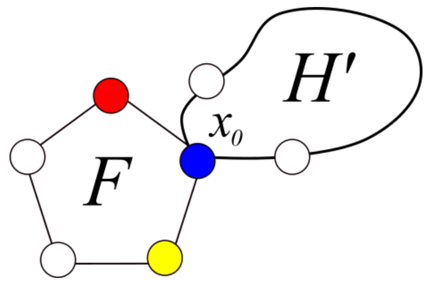

Figure 46: Coloración de F.

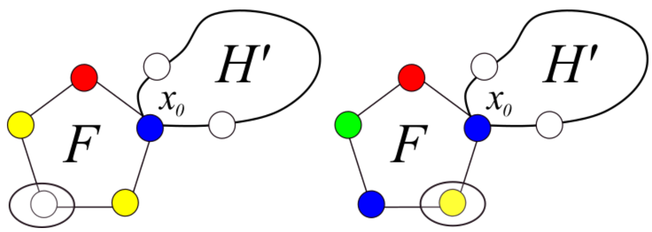

Figure 47: Casos conflictivos con la coloración de F.

Es claro ver que F no puede ser coloreado de tal forma que sus vértices cumplan la condición (1). En la figura 47 se muestran los posibles casos de coloración y se resalta en dónde no se cumple la condición.

Así, dado que de suponer la proposición como falsa llegamos a una contradicción, obtenemos que la parte 2) de la proposición es verdadera.

$\square$

La extensión de la demostración del lema anterior nos simplificará y hará más clara y sencilla la demostración del siguiente teorema que da condiciones necesarias y suficientes para que las gráficas block-cactus con grado mínimo 3 y que cuentan con ciclos C_5 como bloques sean domáticamente completas.

Teorema 5.2: Sea G una gráfica block-cactus conexa con $\delta(G) = 3$. Sean $B_1, \ldots, B_l$ los bloques de G que son C_5 y $F_1, \ldots, F_r$ las componentes conexas de $G[\bigcup_{j=1}^{l} E(B_j)]$.

G es domáticamente completa si y sólo si para toda $i = 1, \ldots, r$ al menos una de las siguientes tres condiciones se cumple:

1. En F_i existe un vértice x que pertenece al menos a tres ciclos B_j.
2. En F_i existe un vértice x que pertenece a exactamente dos ciclos B_j y $d_G(x) \geq 5$.

3. En F_i existe un vértice x que pertenece a exactamente un ciclo B_j y $d_G(x) \geq 4$.

Demostración:

Primero supongamos que para toda $i = 1, \ldots, r$ la gráfica F_i cumple alguna de las condiciones 1, 2 ó 3. Por demostrar que G es domáticamente completa. Procedamos por inducción sobre r.

Caso base: $r = 0$.
La ausencia de componentes conexas de $G[\bigcup_{j=1}^{l} E(B_j)]$ implica que no hay C_5 que sean bloques en G. Recordemos que $\delta(G) = 3$, por lo que por el teorema 3.8, G es domáticamente completa.

Hipótesis de Inducción: $r < k$.
Supongamos que G' es una gráfica block-cactus conexa con $\delta(G') = 3$. Sean $B'_1, \ldots, B'_t$ los bloques de G' que son C_5 y $F'_1, \ldots, F'_r$ las componentes conexas de $G'[\bigcup_{j=1}^{t} E(B'_j)]$. Si para toda $i = 1, \ldots, r$ la gráfica F'_i cumple alguna de las condiciones 1, 2 ó 3, entonces G' es domáticamente completa.

Sea G una gráfica block-cactus con $\delta(G) = 3$. Sean $B_1, \ldots, B_l$ los bloques de G que son C_5 y $F_1, \ldots, F_r$ las componentes conexas de $G[\bigcup_{j=1}^{l} E(B_j)]$. Asumamos $r = k \geq 1$ y sea $x_0 \in V(F_1)$ un vértice que satisface una de las tres condiciones. Consideremos ahora la gráfica $H = G - E(F_1)$ y sean $L_1, \ldots, L_s$ las componentes conexas no triviales de H.

Afirmación: Para cada $i = 1, \ldots, s$, $V(L_i) \cap V(F_1) = \{x_i\}$, con x_i vértice de corte de G.

Demostración de la afirmación: Supongamos que $V(L_i) \cap V(F_1) = \{x_i, y_i\}$, con $x_i \neq y_i$. Sean $D^i_1, \ldots, D^i_t$ los bloques de G que forman la componente conexa J_i. Observemos que F_1 es una subgráfica de G que está formada por bloques de G que son ciclos C_5. Sean $\{B^1_1, \ldots, B^1_r\}$ los ciclos C_5 que forman F_1. Así, procederemos por casos:

(a) $x_i, y_i \in B^1_j$ para alguna $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Aquí tenemos dos posibles subcasos: que $x_i, y_i \in D^i_h$ ó que $x_i \in D^i_h$ y $y_i \in D^i_l$ para algunas $h, l \in \{1, \ldots, t\}$, $h \neq l$. Por el corolario 2.5, no puede ocurrir que $x_i, y_i \in D^i_h$, ya que tendríamos que dos bloques, a saber B^1_j y D^i_h, se intersectan en más de un vértice.

Así, supongamos que ocurre que $x_i \in D^i_h$ y $y_i \in D^i_l$ para algunas $h, l \in \{1, \ldots, t\}$, $h \neq l$. Sea Q una x_iy_i-trayectoria en J_i. Los bloques en G por los cuales pasa Q junto con B_j^1 estarían en un ciclo en la gráfica de bloques y vértices de corte de G. Sin embargo, por la proposición 2.6, $BC(G)$ es un árbol, por lo que tenemos una contradicción.

(b) $x_i \in B_j^1$, $y_i \in B_k^1$ para alguna $j, k \in \{1, \ldots, r\}$, $j \neq k$.

Sea P una $x_i y_i$-trayectoria en B_1. Nuevamente tenemos los mismos subcasos: que $x_i, y_i \in D_h^i$ ó que $x_i \in D_h^i$ y $y_i \in D_l^i$ para algunas $h, l \in \{1, \ldots, t\}$, $h \neq l$. Si $x_i, y_i \in D_h^i$, los bloques en G por los cuales pasa P junto con D_h^i estarían en un ciclo en la gráfica de bloques y vértices de corte de G. Si $x_i \in D_h^i$ y $y_i \in D_l^i$ para algunas $h, l \in \{1, \ldots, t\}$, $h \neq l$, sea nuevamente Q una $x_i y_i$-trayectoria en J_i. Los bloques en G por los cuales pasan P y Q estarían en un ciclo en la gráfica de bloques y vértices de corte de G. En ambos subcasos, y como por la proposición 2.6 $BC(G)$ es un árbol, tenemos una contradicción.

Definimos ahora para cada $j \in \{1, \ldots, s\}$:

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i = x_0 \text{ y } x_0 \text{ cumple 3} \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A partir de esto, a cada componente L_i añadimos n_i gráficas J_j^i (con $J_j^i \cong K_4$, $1 \leq j \leq n_i$) de la siguiente manera: uniremos cada J_j^i a L_i mediante una arista $y_j^i x_i$, con $y_j^i \in J_j^i$. Llamaremos L_i' a la gráfica obtenida con esta construcción (ver figura 48).

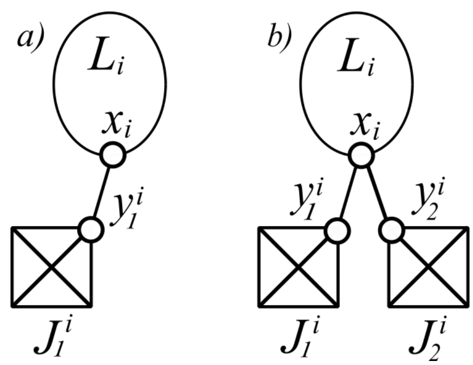

Figure 48: Construcción de las gráficas L_i'. a) $n_i = 1$. b) $n_i = 2$.

Observemos que estas L_i' satisfacen la hipótesis de inducción:

1. L_i' es una gráfica block-cactus pues $L_i \subset G$ y las gráficas J_j^i junto con las aristas $y_j^i x_i$ son gráficas completas. Claramente, L_i' es una gráfica conexa. Además, $d_{L_i'}(x) = d_G(x) \geq 3$ para todo $x \in V(L_i) \backslash \{x_i\}$. Si $x \in V(J_j^i)$, $d_{L_i'}(x) = 3$. Ahora bien, si $x_i = x_0$ y x_0 cumple 3, es decir, en F_1 x_0 pertenece a

exactamente un ciclo C_5 y $d_G(x) \geq 4$, entonces tenemos que $\delta_{L'_i}(x) = \delta_G(x) - \delta_{F_1}(x) + n_i = \delta_G(x) - 2 + 1 = \delta_G(x) - 1 \geq 3$.

2. Observemos que para toda F_i con $i = 2, \ldots, r$, $F_i \subset L_j \subset L'_j$. Así, L'_j contiene r' copias de F_i con $r' < r$. Es claro que estas F_i siguen manteniendo un vértice que cumpla una de las tres condiciones del teorema.

De esta manera, al aplicar la hipótesis de inducción a L'_i obtenemos que L'_i es domáticamente completa.

Sea $f_i : V(L'_i) \to \{1, 2, 3, 4\}$ una coloración domática de L'_i. Por otro lado, aplicando el inciso 1) de la proposición 5.1 a F_1 y a x_0, obtenemos una función $f_{x_0} : V(F_1) \to \{1, 2, 3, 4\}$ que satisface:

(a) $|f_{x_0}(N_{F_1}[x])| = \begin{cases} 3 & \text{si } \frac{|N_{F_1}(x)|}{2} = 1 \\ 4 & \text{si } \frac{|N_{F_1}(x)|}{2} \geq 2 \end{cases}$

para todo $x \in V(F_1) - \{x_0\}$ y

(b) $|f_{x_0}(N_{F_1}[x_0])| = \text{mín}\left\{\frac{|N_{F_1}(x_0)|}{2} + 1, 4\right\}$.

Sin pérdida de generalidad, asumamos que

$$f_i(x_i) = f_{x_0}(x_i) \text{ para toda } i = 1, \ldots, s.$$

Así mismo, sin pérdida de generalidad supongamos que para $i = 1, \ldots, s$, los vértices x_i, y^i_j, $1 \leq j \leq n_i$ bajo f_i tienen n_i+1 colores diferentes, de lo contrario, reacomodemos los colores repetidos. Ver figura 49.

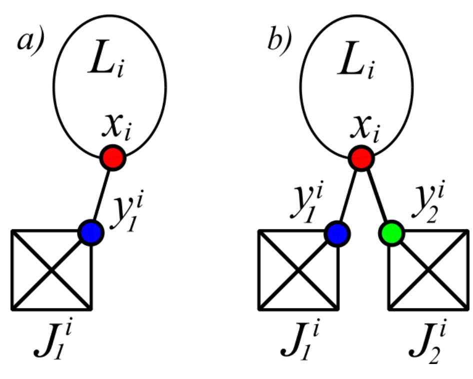

Figure 49: Colores de los vértices señalados bajo f_i. a) $n_i = 1$. b) $n_i = 2$.

Ahora, veamos dos casos posibles para $i = 1 \ldots, s$:

(a) $n_i = 1$.

Entonces $x_i = x_0$ y cumple 3 en F_1, es decir, x_0 está en un único ciclo en F_1 y $\delta_G(x_0) \geq 4$. Además, por el inciso b) del lema 5.1, se tiene que:

$$|f_{x_0}[N_{F_1}(x_i)]| = \text{mín}\left\{\frac{|N_{F_1}(x_0)|}{2} + 1, 4\right\} = 2.$$

Sin pérdida de generalidad, asumamos que los colores $f_i(x_i), f_i(y_1^i)$ son los colores de la imagen de $N_{F_1}(x_0)$ bajo f_{x_0}, es decir,

$$f_{x_0}[N_{F_1}(x_i)] = \{f_i(x_i), f_i(y_1^i)\}.$$

Si no fuera así, reacomodamos los colores de f_i con el lema 2.1.

(b) $n_i = 2$.

En este caso, el lema 5.1 implica que:

$$|f_{x_0}[N_{F_1}(x_i)]| \geq 3.$$

Sin pérdida de generalidad, asumamos que al menos los colores $f_i(x_i)$, $f_i(y_1^i)$, $f_i(y_2^i)$ están contenidos en la imagen de $N_{F_1}(x_i)$ bajo f_{x_0}, es decir,

$$\{f_i(x_i), f_i(y_1^i), f_i(y_2^i)\} \subset f_{x_0}[N_{F_1}(x_i)].$$

En otro caso, un cambio de colores en la función f_i como en el lema 2.1, nos lleva a esta situación.

Ahora, definimos $f : V(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \in V(L_i) \\ f_{x_0}(x) & \text{si } x \in V(F_1). \end{cases}$$

Como primera observación, notemos que f está bien definida en $V(G)$ pues el único caso donde podría haber problemas es cuando $x = x_i \in V(F_1) \cap V(L_i)$ para alguna $i = 1, \ldots, s$. Pero como ya habíamos asumido que $f_i(x_i) = f_{x_0}(x_i)$ para toda $i = 1, \ldots, s$, entonces no hay ningún problema.

Lo que ahora vamos a probar es que f define una coloración domática sobre G, es decir, que para todo vértice $x \in V(G)$ y toda $j = 1, 2, 3, 4$ hay un vértice $y_j \in N_G[x]$ tal que $f(y_j) = j$. Para probar esto consideremos tres casos diferentes y usemos el hecho de que f_i definía una coloración domática sobre L_i'.

1. $x = x_i$ para alguna $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Tenemos que $y_j^i \notin N_G[x_i]$ pero $f_i(y_j^i) \in f(N_G[x_i])$ lo que implica que

$$|f(N_G[x_i])| = 4.$$

2. $x \in V(L_i) - \{x_i\}$.

En este caso, la vecindad de x en G es la misma que en L_i' y por lo tanto,

$$|f(N_G[x])| = |f_i(N_{L_i'}[x])| = 4$$

pues f_i es domática.

3. $x \in V(F_1) \backslash \{x_1, \ldots, x_s\}$.

Primero notemos que estos vértices cumplen que $d_G(x) = d_{F_1}(x)$ pues no tienen vecinos fuera de F_1. A partir de aquí dividamos este tercer caso en dos subcasos:

(a) $x = x_0$: En este caso recordemos que x_0 cumple una de las propiedades 1,2 ó 3. De esta forma, como x no puede cumplir las propiedades 2 y 3, x cumple la propiedad 1, es decir, x está en al menos tres ciclos B_j. Esto implica que $\delta_G(x) = \delta_{F_1}(x) \geq 6$ por lo que, por la propiedad (b) de f_{x_0},

$$|f(N_G(x))| = |f_{x_0}(N_{F_1}[x])| = \text{mín}\left\{\frac{|N_{F_1}(x_0)|}{2} + 1, 4\right\} = 4.$$

(b) $x \neq x_0$: Ya que $\delta_{F_1}(x) = \delta_G(x) \geq 3$ y $\frac{|N_{F_1}(x)|}{2} \geq 2$ entonces por la propiedad (a) de f_{x_0}, $|f(N_G[x])| = |f_{x_0}(N_{F_1}[x])| = 4$.

A partir de esto, podemos asegurar que f define una coloración domática sobre G, por lo que G es domáticamente completa.

Para probar la necesidad de las condiciones 1, 2 y 3 procedamos por contradicción. Asumamos la existencia de una gráfica block-cactus G domáticamente completa con $\delta(G) = 3$ para la cual F_1 no satisface ninguna de las tres condiciones. De esta manera, es necesario que todos los vértices de F_1 estén a lo más en dos ciclos B_j; así, para cualquier vértice x en exactamente dos ciclos B_j tenemos que $d_G(x) = 4$ y para cualquier vértice y en exactamente un ciclo B_j tenemos que $d_G(y) = 3$ (recordemos que $\delta(G) = 3$).

Sea $f : V(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ una coloración domática de G en $\delta(G) + 1 = 4$ conjuntos. F_1 satisface las hipótesis del lema 5.1 y la restricción $f|_{V(F_1)}$ satisaface el inciso 2) de dicho lema. Así, existe un vértice $x_f \in V(F_1)$ tal que:

$$|f(N_G[x_f])| = |f(N_{F_1}[x_f])| \leq \text{mín}\left\{\frac{|N_{F_1}(x_f)|}{2} + 1, 4\right\} = 3.$$

1. Si x_f está en dos ciclos en F_1, $\delta_G(x_f) = 4 = \delta_{F_1}(x_f)$. Entonces tenemos que

$$|f(N_{F_1}(x_f))| = |f(N_G(x_f))| = 3,$$

o que contradice que f era una coloración domática de G.

2. Si x_f está exactamente en un ciclo de F_1, tenemos que $\delta_{F_1}(x_f) = 2$ y $\delta_G(x_f) = 3$. Así,

$$|f(N_{F_1}[x_f])| \leq \text{mín}\left\{\frac{|N_{F_1}(x_f)|}{2} + 1, 4\right\} = 2.$$

Así,

$$|f(N_G[x_f])| \leq |f(N_{F_1}[x_f]) + 1 \leq 3,$$

lo que nuevamente contradice la suposición de que f definía una coloración domática en G.

Esto completa la prueba.

$\square$

El teorema 3.8 y el teorema 5.2 caracterizan todas las gráficas block-cactus con $\delta(G) = 3$ que son domáticamente completas. Sin embargo, aún desconocemos el número domático de aquellas que no son domáticamente completas. El teorema siguiente enuncia el número domático de estas gráficas. Para su demostración recurriremos al teorema 4.3.

Teorema 5.3: Sea G una gráfica block-cactus conexa tal que $\delta(G) = 3$. Si G no es domáticamente completa, entonces $d(G) = 3$.

Demostración:

Sean $B_1, \ldots, B_l$ los bloques que son ciclos de G de longitud $s_i \not\equiv 0 \pmod 3$ (como G no es domáticamente completa, por el teorema 3.8, G tiene al menos ciclos C_5 como bloques). Ahora observemos que todos los vértices de cada B_i tienen vecinos fuera de B_i, es decir, son vértices de corte de G.

Sean B_0 un bloque final de G y $x_0 \in V(B_0)$ un vértice que no es el vértice de corte en B_0 (ya que es un bloque final sólo contiene un vértice de corte). Observemos que por lo anterior, B_0 no puede ser un ciclo, y como en G, los bloques son o ciclos o gráficas completas, entonces B_0 es una gráfica completa de orden al menos 4.

Definamos una nueva gráfica G':

$$V(G') = V(G) \cup \{x_1, x_2\}.$$
$$E(G') = E(G) \cup \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_0)\}.$$

Observemos que G' es una gráfica block-cactus (pues G lo era y sólo agregamos un K_3) con $\delta(G') = 2$. Además, los bloques de G' que son ciclos de longitud $s_i \not\equiv 0 \pmod 3$ son los mismos que tenía G, es decir, $B_1, \ldots, B_l$. Pensando en el teorema 4.3, se puede observar que en cada bloque B_i ($i = \{1, \ldots, l\}$), $S_i = V(B_i)$ descompone a B_i en un conjunto de trayectorias $\mathcal{P}_i$ donde todas las trayectorias son de longitud 1. De esta forma, G' satisface las hipótesis del teorema 4.3, por lo que G' es domáticamente completa, es decir, $d(G') = 3$.

Sea f una coloración domática con 3 colores del conjunto de vértices $V(G')$. Como B_0 tiene al menos 4 vértices, supongamos sin pérdida de generalidad que para cada $i = 1, 2, 3$ existen vértices $v_i \in V(B_0)$ tales que $f(v_i) = i$.

Ya que G no es domática, entonces $d(G) \leq 3$. Además, como la coloración de $V(G)$ dada por $f|_{V(G)}$ es una coloración domática de G en 3 conjuntos dominantes, entonces $d(G) = 3$.

$\square$

Con este último teorema hemos logrado obtener, como se verá en el corolario próximo, el número domático de todas las gráficas block–cactus con $\delta(G) = 3$.

Corolario 5.4: Si G es una gráfica block-cactus conexa tal que $\delta(G) = 3$, entonces $d(G) = 3$ ó $d(G) = 4$.

Demostración:

Por el teorema 3.8, si G no contiene ciclos C_5 como bloques, G es domáticamente completa.

Por el teorema 5.2, si G contiene ciclos C_5 como bloques, G es domáticamente completa si y sólo si para toda $i = 1, \ldots, r$ al menos una de las siguientes tres condiciones se cumple:

1. En F_i existe un vértice x que pertenece al menos a tres ciclos B_j.
2. En F_i existe un vértice x que pertenece a exactamente dos ciclos B_j y $d_G(x) \geq 5$.

3. En F_i existe un vértice x que pertenece a exactamente un ciclo B_j y $d_G(x) \geq 4$.

Por el teorema 5.3, si G no es domáticamente completa, entonces $d(G) = 3$.

$\square$

El corolario anterior establece cuál es el número domático de una gráfica block-cactus con $\delta(G) = 3$, cualquiera sea ésta.

Con esto se completa la búsqueda del número domático de toda la familia de las gráficas block cactus, por lo que conocemos ya el número domático de cualquier gráfica de este tipo.

Bibliografía

[1] G. Chartrand, P. Zhang; A first course in graph theory; Dover Publications Inc.; 2012.

[2] M. Farber; Characterizations of strongly chordal graphs; Discrete Mathemathics 43 (1983) 173-189, North-Holland Publishing Company.

[3] M. Farber; Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs, Discrete Applied Mathemathics 7 (1984) 115-130, North-Holland.

[4] T. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. Slater; Fundamentals of domination in graphs; Marcel Dekker Inc.; 1998.

[5] D. Rautenbach, L. Volkmann; The domatic number of block-cactus graphs; Discrete Mathemathics 187 (1998) 185-193.

Glosario de Símbolos

Símbolo	*Significado*	*Página*
$BC(G)$	Gráfica de bloques y vértices de corte	16
C_n	Ciclo de orden n	9
$d(G)$	Número domático de G	20
$d_G(u,v)$	Distancia entre los vértices u y v	10
$E(G)$	Conjunto de aristas de una gráfica	9
G	Gráfica	9
$G[V]$	Subgráfica inducida por un conjunto de vértices	10
$G[E]$	Subgráfica inducida por un conjunto de aristas	10
K_n	Gráfica completa de orden n	9
$k(G)$	Número de componentes conexas de una gráfica	10
$long(T)$	Longitud de un camino	9
$N_G(x)$	Vecindad de X	9
$N_G[x]$	Vecindad cerrada de x	9
(u,v)	Arista uv	9
V(G)	Conjunto de vértices de una gráfica	9
$\delta_G(v)$	Grado de un vértice	9
$\delta(G)$	Grado mínimo de una gráfica	9
$G \cup H$	Unión	10
$G - e$	Eliminación de una arista	10
$G - u$	Eliminación de un vértice	10

”Trabajo realizado gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigacioón e Innovación Tecnoloógica (PAPIIT) de la UNAM <<IN115816>>. ”