UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO DE BLACK-SCHOLES-MERTON PARA VALUAR OPCIONES EUROPEAS MEDIANTE UN ENFOQUE DE CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

PRESENTA:

TANIA LIZETH DUQUE PITA

DIRECTORA DE TESIS:

MARÍA TERESA VERÓNICA MARTÍNEZ PALACIOS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2018

Agradecimientos

Primero, agradezco a las personas que me han apoyado desde mi nacimiento y continúan alentando y aterrizando mis sueños: mi familia. Gracias a mi mamá Ma. Guadalupe por su paciencia y por ser un verdadero ejemplo de perseverancia, fortaleza, excelencia y amor. Gracias a mi papá Fortino por creer en mí y escucharme en los momentos que requería apoyo. Gracias a mis hermanos Oscar y Mario por ser mis amigos y compañeros en esta travesía.

Enseguida, agradezco a mi tutora de tesis María Teresa Verónica por su inmenso apoyo en el tema de mi tesis, por "echarme porras" cuando las cosas no se veían tan fáciles de resolver, por creer en mi e impulsarme a ser una mejor académica y principalmente por su increible atención y disposición a guiarme en la elaboración de mi tesis.

Un gran agradecimiento a mis sinodales: Dr. Carlos Hernández Garciadiego, Dr. Francisco Venegaz-Martínez, Dr. Salvador Cruz Aké, Dr. Ambrosio Ortiz Ramírez, Dra. Patricia Balderas Caña y Dr. Fernando Brambila Paz, por su comprensión y las críticas constructivas que mejoraron y pulieron mi trabajo.

Agradezco también a los profesores que me apoyaron a llegar al punto de elaborar mi tesis: Dra. Ana Meda Guardiola, Act. Javier Fernández García y Dr. Luis Rincón Solís. Gracias por su constante apoyo, atención y por sus consejos.

Gracias a mis amigos, que estuvieron conmigo en aquellos momentos que el estrés se subía a mi cabeza y con los que compartí muchísimos ratos agradables, los cuales también me impulsaron a continuar con mi trabajo.

Finalmente, agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, por toda la enseñanza en las aulas y experiencias inolvidables. Estudiar en la UNAM, más allá de brindar conocimiento de calidad, es toda una experiencia de vida que siempre llevaré en mi corazón. Gracias por los retos y enseñarme a mí misma lo que soy capaz de lograr.

Índice

Glosario

A

Acción. Una acción en el mercado financiero es un título emitido por una sociedad que representa el valor de una de las fracciones iguales en que se divide su capital social. Las acciones, generalmente, confieren a su titular, llamado accionista, derechos políticos, como el de voto en la junta de accionistas de la entidad, y económicos, como participar en los beneficios de la empresa.

Apalancamiento (financiero). El apalancamiento hace referencia a utilizar endeudamiento para financiar una inversión. Esta deuda genera un coste financiero (intereses), pero si la inversión genera un ingreso mayor a los intereses a pagar, el excedente pasa a aumentar el beneficio del agente.

***At the money* (en el dinero).** Una opción sobre un subyacente está en el dinero o *at the money* si el precio de ejercicio, es decir, el precio que el poseedor debe pagar para ejercer su derecho, es el mismo que el precio del subyacente.

C

***Commodities*.** Los *commodities* en economía son cualquier producto destinado al uso comercial. Al hablar de *commodities*, generalmente se hace énfasis en productos genéricos, básicos, y sin mayor diferenciación entre sus variedades (trigo, azúcar, oro, petróleo, carbón, entre otros).

E

Ejercer un contrato. Dada una opción, se dice que se ejerce el contrato si el poseedor del contrato decide ejercer su derecho de comprar o vender el activo subyacente. Para una opción europea, el agente puede ejercer el contrato únicamente en la fecha de vencimiento; para una opción americana, el agente puede ejercer el contrato en cualquier instante de la vida del contrato hasta la fecha de vencimiento.

F

Fecha de vencimiento. La fecha de vencimiento de un contrato derivado es la fecha en la que concluye el contrato. Para una opción europea, es la fecha en la que el poseedor de la opción elige si ejerce la opción o no, de acuerdo a si la transacción le generase una ganancia o una pérdida.

Función objetivo. La función objetivo es la ecuación que será optimizada dadas las limitaciones o restricciones determinadas en el problema de optimización.

I

***In the money* (dentro del dinero).** Una opción sobre un subyacente está dentro del dinero o *in the money* si la diferencia entre el precio de ejercicio, o precio *strike,* y el precio del subyacente le otorgaría al poseedor de la opción una ganancia positiva, es decir, si la opción tiene valor intrínseco.

N

Neutralidad al riesgo. La neutralidad al riesgo es una medida de probabilidad, tal que calcula el precio de un activo como la esperanza descontada del activo bajo esta medida. Esta medida se utiliza frecuentemente en la valuación de derivados financieros. Esta medida existe sí y sólo si el mercado no tiene oportunidades de arbitraje.

O

Opción. Una opción financiera es un contrato estandarizado[1], en el cual el comprador, adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación, de comprar *(call)* o vender *(put)* un activo subyacente a un precio pactado (precio de ejercicio o precio *strike*) en una fecha futura, y el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido.

Opción Americana. Una opción Americana es una opción que se puede ejercer en cualquier instante de la vida del contrato, hasta la fecha de vencimiento.

Opción Europea. Una opción Europea es una opción que se puede ejercer únicamente en la fecha de vencimiento.

Oportunidad de arbitraje. En economía y finanzas, una oportunidad de arbitraje es la posibilidad de tomar ventaja de la diferencia de precios en dos o más mercados, realizando una combinación de negociaciones que capitalicen el desequilibrio en los mercados.

***Out the money* (fuera del dinero).** Una opción sobre un subyacente está fuera del dinero o *out the money* si el valor intrínseco de la opción es nulo.

P

Precio *strike* o precio de ejercicio. En una opción, el precio *strike* es el precio, pactado al inicio del contrato, al que el poseedor del contrato tendrá derecho a comprar o vender en una fecha futura.

Premio al riesgo de mercado. En economía, el precio al riesgo de mercado es la diferencia, en la tasa de interés, que a un inversor se le paga al asumir una determinada inversión con una menor fiabilidad económica que otra inversión.

[1] El contrato de opción es estandarizado en tamaño de contrato, fecha de vencimiento, plazo, monto, cantidad, calidad, forma de liquidación y negociación, entre otros.

Proceso estocástico. Un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias indizadas por un espacio temporal, discreto o continuo, que toma valores en un espacio de estados.

Programación dinámica u optimización dinámica. La programación dinámica estudia la evolución de sistemas en el tiempo. En general, es un método para resolver problemas complejos, dividiéndolos en colecciones de subproblemas simples, para así, resolver cada subproblema y guardar las soluciones.

R

Regla de control. Dado un proceso X que se busca controlar y una función objetivo f, se le llama regla de control al proceso u, si el proceso u depende únicamente de la historia pasada de X. El objetivo de esta variable es que forme parte de los cambios que tendrá X, y su correcta elección optimizará la función objetivo f.

S

Solución de esquina. Una solución de esquina es un concepto económico que define una solución especial al problema de maximización de un agente, en la que uno de los argumentos en la función de maximización se vuelve la constante 0. Una solución de esquina se puede interpretar como una solución extrema, que muestra lo que un agente está dispuesto a pagar con tal de tener un bien, y será útil para dar una interpretación al modelo de optimización estocástica.

Subyacente. El activo subyacente es un activo real o financiero en el que se basa un instrumento derivado. Es el objeto de adquisición o enajenación real o teórica en la liquidación del instrumento derivado.

V

Valor intrínseco. El valor intrínseco de una opción se define como el máximo entre cero y el pago que proporcionaría la opción si se ejerciese.

Venta en corto. Es la práctica especulativa de hacer que los inversores tengan una venta de activos que han sido tomados en préstamo de un tercero con la intención de comprar idénticos valores en una fecha posterior para devolvérselos a ese tercero. El agente que realiza la operación espera obtener un beneficio económico a partir de la hipotética futura bajada del precio de los valores.

Introducción

Los primeros derivados financieros en la historia datan desde 1700 a.C. en la antigua Mesopotamia, y después, en la antigua Grecia y la era Romana. Los derivados fueron creados para asegurar el suministro de *commodities* en tiempo y forma, así como proteger a los negociantes de cambios de precios y mitigar sus riesgos. Con el tiempo, dichos instrumentos promovieron el comercio y sus contratos evolucionaron para satisfacer necesidades específicas de los negociantes. Adicionalmente, los derivados fueron utilizados por granjeros para asegurarse contra pérdidas de cosechas, por mercaderes para financiar futuras actividades comerciales, por exploradores para financiar expediciones, e incluso por el gobierno e iglesias para recaudar dinero. (Kummer & Pauletto, 2012)

En las primeras etapas de su historia, los derivados se utilizaban para generar ganancias rápidas, pero con un riesgo de incumplimiento o fraude. Existen registros sobre abuso en el mercado desde los inicios de las transacciones de derivados. El gobierno tuvo que involucrarse en el mercado para proteger a consumidores e inversionista y para mitigar riesgos sistemáticos. Las regulaciones prohibieron algunos tipos de derivados, o restringieron su uso, e introdujeron una supervisión estricta. (Kummer & Pauletto, 2012)

En la actualidad, los derivados son negociados con varios propósitos, entre los principales están: por cobertura, en el que la persona que negocia buscará eliminar o disminuir su exposición a los movimientos del precio de un subyacente; por especular, donde el negociante tomará una posición en el mercado y apostará a que el precio de un subyacente suba o a que baje; por oportunidades de arbitraje, en el que los agentes buscarán ganancias sin riesgo, mediante la negociación de subyacentes en dos o más mercados. En términos generales, los derivados financieros pueden ser de gran utilidad para comerciantes e instituciones. Con dichos instrumentos, se pueden generar grandes ganancias, pero también se puede incurrir en pérdidas críticas. (Hull, 1993) (MacKenzie, 2006)

Uno de los ‘escándalos financieros’ que ha generado mayor atención, es la crisis financiera de la Comercial Mexicana en 2008. Tras comprar 5 inmuebles de la corporación Auchan por 53.7 millones de pesos en el año 2008, la Comercial Mexicana buscó recuperar la inversión especulando con instrumentos derivados. La Controladora, sin atender las reglas corporativas, apostó a un fortalecimiento del peso comprando deuda monetizada en dólar. Sin embargo, para octubre de 2008 no ocurrió de esta manera, ya que el peso experimentó una caída de poco más del 10%; dejando a la Comercial Mexicana con un incremento de deuda de 1080 millones de dólares y, consecuentemente, con un reporte de pasivos totales aproximados por 2 mil millones de dólares. La mayor consecuencia de esta crisis fue la venta masiva de entes comerciales, la conclusión de grandes alianzas y la escisión legal de la empresa en dos entes distintos. (Jasso, 2008) (Equipo Editorial Explorando México, s.f.)

Para mejorar el desempeño de los mercados de derivados, tanto de los operadores como de los negociantes, se establecen modelos que simulen el precio de los subyacentes y que estimen el 'precio justo' de los derivados.

Un importante modelo que se utiliza para estimar el precio de los derivados financieros, bajo ciertas suposiciones, es el modelo de Black-Scholes. Dicho modelo se desarrolló inicialmente para una clase de derivados: las opciones; pero después se expandió a otras clases de derivados con características similares. El modelo fue publicado en 1973 por Fischer Black y Myron Scholes en "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*", posteriormente, Robert. C. Merton publicó un artículo expandiendo el desarrollo matemáticos del modelo de valuación de opciones. El *Chicago Board Options Exchange,* fue un pionero en adoptar la teoría de Black-Scholes y brindar credibilidad al modelo. Donald McKenzie (2006), profesor de sociología en la Universidad de Edinburgh, afirma que la aparición de una teoría autoritaria para los mercados financieros alteró dichos mercados fundamentalmente. Por ejemplo, en 1970, casi no se negociaban los derivados financieros "futuros", pero en junio de 2004, los contratos de derivados en todo el mundo sumaban una cantidad de 273 trillones de dólares. MacKenzie sugiere que este tipo de crecimiento no hubiera ocurrido sin el desarrollo de teorías que le dieran legitimidad a los derivados y explicaran su complejidad.

Actualmente, sería inusual ver el modelo de Black-Scholes siendo aplicado directamente como guía para negociar opciones: en los mercados de opciones, los departamentos de *trading* de los bancos y los fondos de inversión, el modelo ha sido adaptado y alterado de muchas maneras. (MacKenzie, 2006)

Para el desarrollo del modelo de Black-Scholes, se menciona la importancia de una clase de derivados financieros: las opciones. Una opción es un contrato que le otorga al portador el derecho, más no la obligación, de comprar o vender un subyacente en una fecha futura a un precio previamente pactado. El subyacente sobre el que se emite la opción puede ser una acción, un índice bursátil, un *commodity*, entre otros.

Entre los contratos de opciones negociados en los mercados de derivados organizados en el mundo, los contratos de opciones sobre acciones fueron los más negociados en 2016, y respecto a todos los contratos negociados en dichos mercados, las opciones sobre acciones son los segundos contratos más negociados, representando el 13% del total de contratos derivados. (World Federetion of exchanges, 2017)

Por la importancia que presentan las opciones sobre acciones en el mercado de derivados, es de gran valor desarrollar teoría para la optimización de inversiones sobre estos instrumentos. La optimización dinámica es una rama de estudio de la teoría de optimización, en la cual se busca que un agente tome decisiones de inversión de manera continua, sobre un sistema dinámico. Este enfoque dinámico tiene como ventaja sobre el enfoque determinista, que se apega más a la realidad que enfrenta un inversionista en un mercado lleno de incertidumbre. Richard Bellman, pionero de la teoría de programación dinámica, encontró en 1963 que el método también era aplicable al cálculo de variaciones y a problemas de control óptimo.

Así, el control óptimo estocástico ha encontrado múltiples aplicaciones en Finanzas y Economía, como aquellas presentadas por Björk (2004), en las que se utiliza la teoría de control óptimo estocástico para la modelación del problema de selección de cartera y consumo óptimo. (Martínez Palacios & Venegas-Martínez, Control óptimo estocástico en la enseñanza de la economía matemática, 2011)

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) en el caso continuo es una ecuación diferencial parcial que se utiliza para modelar problemas dinámicos y es clave en la teoría de control óptimo. La solución de la ecuación HJB es una función de valor que obtiene el costo mínimo o ganancia máxima dado un sistema dinámico asociado a una función de costo. (Ross)

De modo que, el propósito de este trabajo es utilizar la teoría de control óptimo estocástico para optimizar un portafolio que incluya una acción, una opción europea sobre la acción y una cuenta de ahorro sin riesgo de incumplimiento. En este proceso, se resolverá la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para dicho sistema dinámico y se encuentran las trayectorias óptimas de inversión en cada instrumento. El análisis de esta tesis puede ser de utilidad a estudiantes y profesionistas que busquen estrategias de optimización de portafolios o que quieran entender el desarrollo y la aplicación de la función de Hamilton-Jacobi-Bellman para la optimización dinámica en tiempo continuo.

Este trabajo está seccionado en cuatro capítulos: En el capítulo 1 se realiza una descripción del instrumento derivado opción financiera, concentrándose en la opción Europea sobre acciones, también se disponen los elementos teóricos característicos intrínsecos a la valuación de estos. Así mismo, se define el procedimiento general de negociación de las opciones en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), las especificaciones generales que rigen su emisión y su valuación. En el capítulo 2 se establece la teoría matemática y económica involucrada en el planteamiento y resolución del problema de control óptimo estocástico que modela el problema de selección de cartera óptima y que es eje en este trabajo de tesis, lo que incluye elementos de teorías de: la medida, cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales, procesos estocásticos, cálculo estocástico, economía y programación dinámica y la ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica y lineal del modelo de Black-Scholes-Merton, que se obtendrá en el capítulo cuarto mediante fundamentos de racionalidad económica. En el capítulo 3 se presenta el marco teórico de modelación, mediante el planteamiento del problema de control optimo estocástico en optimización dinámica en tiempo continuo, se establece la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman (EDP HJB) y se determinan las condiciones de primer orden del modelo, mediante estas, los controles del problema, candidatos a óptimo y el Teorema de Verificación, que garantiza que las trayectorias solución obtenidas a partir de la EDP HJB son los que dan efectivamente la solución óptima del problema de optimización dinámica. En el capítulo 4 se modela mediante control óptimo estocástico en programación dinámica en tiempo continuo un problema de selección de cartera y consumo óptimos que enfrenta un agente económico racional que es dotado con una riqueza inicial y que enfrenta el problema de cómo distribuir su riqueza entre inversión en tres activos, uno de ellos una opción europea de compra y consumo de un bien genérico, de forma tal que optimice su utilidad obtenida presente y descontada, a la vez de no caer en banca rota en su horizonte temporal finito y estocástico. Mediante el análisis de solución de la EDP HJB y a partir de un sistema de ecuaciones que modelan los premios al riesgo de la opción europea y de la acción, es posible caracterizar el modelo de valuación de opciones europeas de compra de Black-Scholes-Merton.

Capítulo 1. Productos financieros derivados: opciones europeas

1.1 Introducción

Los productos derivados son instrumentos financieros cuyo valor deriva de la evolución de los precios de otros activos denominados activos subyacentes. Los subyacentes utilizados pueden ser muy variados: acciones, cestas de acciones, *commodities*, valores de renta fija, divisas, tipos de interés, índices bursátiles, materias primas y productos más sofisticados, tales como otros derivados, la inflación, riesgos operativos, riesgos de liquidez, riesgos de crédito, entre otros. Los derivados son contratos cuyos términos se fijan en una fecha, y su transacción se hace en una fecha futura.

El propósito de los contratos derivados es manejar la incertidumbre sobre cómo se moverá el precio de un activo, principalmente mediante dos maneras:

- Ayudando a reducirlo en operaciones de cobertura, en las que ya se posee el activo y se desea una protección frente a los movimientos adversos de los precios.
- Como una inversión más, en la que el inversor apuesta por la dirección y amplitud del recorrido que va a tomar el precio de un activo durante un periodo determinado.

(Comisión Nacional del Mercado de Valores, 2006)

En los mercados de derivados de México se pueden encontrar principalmente los siguientes tipos de productos derivados

- Futuros
- Opciones
- *Warrants*
- Certificados
- Contratos por diferencias (CFD)

(Comisión Nacional del Mercado de Valores, s.f.)

1.2 ¿Qué es un contrato de opción financiera?

Una opción financiera es un contrato, en el cual el comprador, adquiere del vendedor el derecho, pero no la obligación, de comprar *(call)* o vender *(put)* un activo subyacente a un precio pactado (precio de ejercicio o precio *strike*) en una fecha futura, y el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido. El contrato de opción financiera es estandarizado sólo si se negocia en el mercado bursátil, y no lo será si se negocia en el mercado extrabursátil.

El precio de la opción es lo que el comprador paga por obtener ese derecho y se denomina prima. Llegada la fecha de vencimiento, al comprador le interesará o no ejercer la opción en función de la diferencia entre el precio *strike* y el precio que en ese momento tenga el subyacente. El comprador puede ejercer dicho derecho, según se haya acordado en el contrato respectivo. Si en el contrato de opción se pacta el pago por diferencias, no se realizará la entrega del activo subyacente.

Una tipificación de las opciones es atendiendo al derecho que otorgan o en función de su fecha de vencimiento:

- Según el derecho que otorgan:
  - **Opción de compra o *call***: el comprador tiene el derecho (pero no la obligación) a adquirir el subyacente a un precio determinado.
  - **Opción de venta o *put***: el comprador tiene el derecho (pero no la obligación) a vender el subyacente a un precio fijado.
- En función del momento en que pueden ejercerse:
  - **Opción americana**: se puede ejercer en cualquier momento, desde el inicio del contrato hasta la fecha de vencimiento.
  - **Opción europea**: sólo se puede ejercer en la fecha de vencimiento.

Las opciones se emiten sobre diversos activos subyacentes. En el mercado se encuentran: opciones sobre acciones, opciones sobre índices bursátiles, opciones sobre divisas, opciones sobre contratos de futuros, opciones sobre tasas de interés y opciones sobre *commodities*, entre otros.

En lo siguiente, se hará el análisis para opciones europeas sobre acciones, por lo que cuando se hable de una opción financiera, se referirá a este tipo de opciones. (Comisión Nacional del Mercado de Valores, s.f.)

1.2.1 Posiciones en las opciones financieras

Como se dijo anteriormente, una opción financiera otorga al comprador del contrato el derecho de comprar o vender una acción de precio en el mercado S_t, a un precio *strike* K, en una fecha futura, T, en el cual el comprador paga una prima P por el contrato.

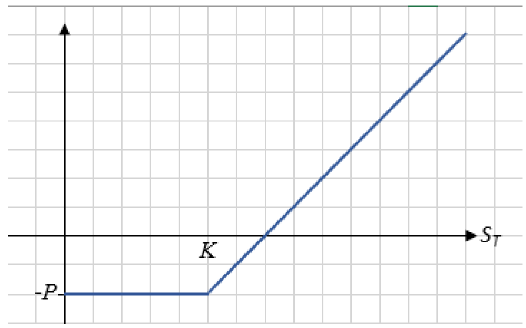
Al hecho de comprar una opción se le conoce como tomar la posición larga en la negociación, y al hecho de vender o emitir la opción se le conoce como posición corta. Por lo que existen cuatro tipos de posiciones en las opciones:

1) Posición larga en una opción *call*: derecho a comprar acciones a un precio fijo, en una fecha previamente pactada.

El agente en esta posición tendrá el derecho, más no la obligación, de comprar la acción al precio *strike* K, en la fecha T. La decisión de ejercer o no la opción en la fecha pactada T estará dada por la diferencia de precios entre S_T y K, donde al agente le conviene comprar la acción si el precio *strike* K es menor que el precio de la acción S_T en el mercado, y le convendrá no ejercer la opción si ocurre lo contrario. Por lo que la ganancia o pérdida (sin descontar) del agente al tiempo T está dada por

$$\max\{S_T - K, 0\} - P,$$

y es ilustrada en la siguiente gráfica, de acuerdo al valor de la acción en el mercado S_T:



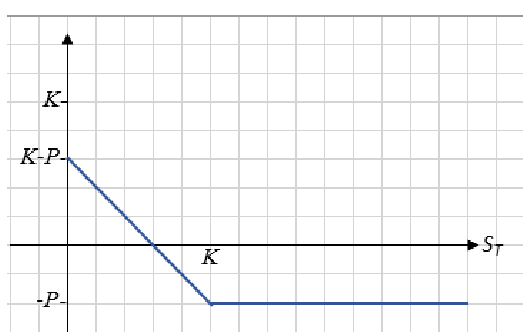
Gráfica 1.1 Posición larga en una opción *call*.

2) Posición larga en una opción *put*: derecho a vender acciones a un precio fijo, en una fecha previamente pactada.

El agente en esta posición tendrá el derecho, más no la obligación, de vender la acción al precio *strike* K, en la fecha pactada T. La elección de ejercer o no la opción en la fecha pactada será determinada por la diferencia de precios entre S_T y K, donde al agente le conviene vender la acción si el precio *strike* K es mayor que el precio de la acción en el mercado S_T, y no le convendrá ejercer la opción si sucede lo contrario. Por lo que la ganancia o pérdida (sin descontar) del agente en la fecha pactada T está dada por

$$\max\{K - S_T, 0\} - P,$$

y se muestra en la siguiente gráfica, de acuerdo al valor de la acción en el mercado S_T:



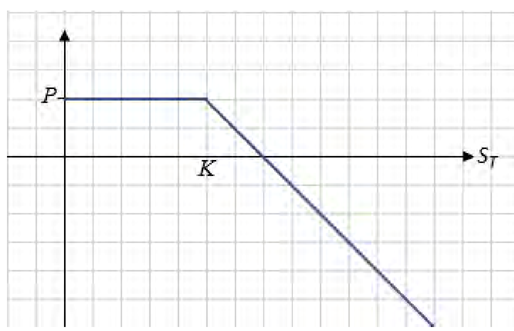
Gráfica 1.2 Posición larga en una opción *put*.

3) Posición corta en una opción *call*: obligación de entregar las acciones al precio previamente establecido, en caso de que la opción sea ejercida.

El agente en esta posición tendrá la obligación de vender la acción al precio *strike* K, en la fecha T, sí así lo decide la contraparte del contrato, es decir, quien toma la posición larga de la opción *call*. Por lo que, el agente estará obligado a vender la acción si el precio *strike* K es menor que el precio de la acción en el mercado S_T, consecuentemente, la ganancia o pérdida (sin descontar) del agente al tiempo T está dada por

$$P - \max\{S_T - K, 0\},$$

y es ilustrada en la siguiente gráfica, de acuerdo al valor de la acción en el mercado S_T:



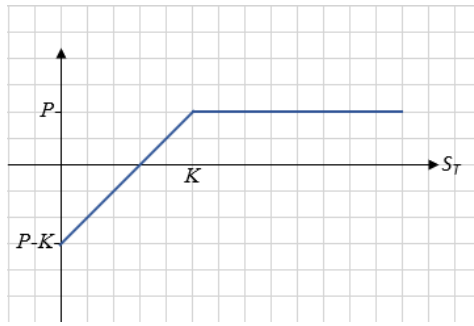
Gráfica 1.3 Posición corta en una opción *call*.

4) Posición corta en una opción *put:* obligación de recibir las acciones al precio previamente pactado, en caso de que la opción sea ejercida.

El agente en esta posición tendrá la obligación, de comprar la acción al precio *strike* K, en la fecha pactada T, sí así lo decide la contraparte del contrato, es decir, quien toma la posición larga de la opción *put*. Por lo que, el agente estará obligado a comprar la acción si el precio *strike* K es mayor que el precio de la acción en el mercado S_T, consecuentemente, la ganancia o pérdida (sin descontar) del agente al tiempo T está dada por

$$P - \max\left\{K - S_T, 0\right\},$$

y se muestra en la siguiente gráfica, de acuerdo al valor de la acción en el mercado S_T :



Gráfica 1.4 Posición corta en una opción *put.*

1.3 Tipos de negociantes de opciones

Los agentes pactan contratos de opciones con distintos propósitos; según el tipo de beneficio que se busque, el agente elegirá la posición en la opción y sus características. Los agentes que negocian productos derivados, en general, se pueden clasificar en coberturistas, especuladores y arbitrajistas.

Los **coberturistas** son los que hacen operaciones de cobertura con futuros, contratos a plazo y de opciones para reducir el riesgo que afrontan ante movimientos potenciales en el mercado variable. Los contratos de opciones, proveen una manera de proteger a los inversores contra los futuros movimientos de precios adversos y permiten un beneficio si hay movimientos favorables de precio.

Los **especuladores** utilizan los instrumentos financieros para apostar acerca de la dirección futura del mercado, bien de que el precio de un activo vaya al alza o a la baja. Las opciones financieras aportan para los especuladores, una vía para obtener apalancamiento; en el contraste sus pérdidas están limitadas al pago de la prima de las opciones.

Los **arbitrajistas** toman posiciones compensadoras en dos o más instrumentos asegurándose un beneficio, al aprovecharse de las posibles discrepancias de precios entre dos mercados distintos. (Hull, 1993)

1.4 Mercados de derivados financieros en México

Las opciones pueden ser negociadas en dos tipos diferentes de mercados, los mercados *over-the-counter* (OTC) y los mercados organizados. La mayor parte de las bolsas de instrumentos financieros derivados son totalmente electrónicas.

Los mercados organizados o listados son aquellos que están regulados y en donde los contratos son estandarizados en términos de su fecha de vencimiento, precio de ejercicio y el tipo de opción: *call* o *put*.

1.4.1 Mercados OTC

Los mercados OTC, o mercados secundarios, se han vuelto cada vez más importantes y actualmente es más grande que las negociaciones en bolsas. Las instituciones financieras, las tesorerías corporativas y los administradores de fondos realizan las negociaciones por teléfono. En el mercado secundario son particularmente usadas las opciones de divisas y de tasas de interés. La mayor ventaja del mercado OTC es que los contratos de opciones pueden ser adaptados por instituciones financieras para satisfacer las necesidades del cliente, por otra parte, la principal desventaja potencial de este mercado es que el emisor de la opción puede incurrir en incumplimiento y el comprador está sujeto a riesgo de crédito. (Hull, 1993)

1.4.2 Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)

MexDer, Merado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V. es la Bolsa de Derivados de México, la cual inició operaciones el 15/12/1998 al listar contratos de futuros sobre subyacentes financieros, siendo constituida como una sociedad anónima de capital variable, autorizada por la Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP).

La creación del Mercado de Derivados listados, inició en 1994 cuando la Bolsa Mexicana de Valores y el Instituto Central para el Depósito de Valores (S.D. Indeval) asumieron el compromiso de crear este mercado. La BMV financió el proyecto de crear la bolsa de opciones y futuros que se denomina MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V. Por su parte Indeval tomó la responsabilidad de promover la creación de la cámara de compensación de derivados que se denomina Asigna, Compensación y Liquidación, realizando las erogaciones correspondientes desde 1994 hasta la fecha de constitución de las empresas. (MexDer, s.f.)

1.4.2.1 Entes partícipes en contratos de opción en MexDer

En el proceso del contrato de una opción, fungirán entes que negociarán y entes que serán responsables de que el contrato se lleve a cabo adecuadamente en cada etapa. Aquellos que son partícipes en el contrato de una opción se pueden clasificar de la siguiente manera:

- **Operadores**

Son instituciones de crédito, casas de bolsa y demás personas morales, que tienen acceso al Sistema Electrónico de Negociación de MexDer, para la celebración de contratos de Futuros, Opciones y Swaps. Existen 3 tipos de operadores:

  - Operador por Cuenta Propia: Opera los recursos de su propia Entidad Financiera o de su propia empresa
  - Operador por Cuenta de Terceros: Opera los recursos de otras Entidades Financieros o empresas
  - Operador por Cuenta Propia y de Terceros: Opera con sus propios recursos y otros recursos de Entidades Financieras y empresas

- **Formadores de Mercado**

Se obligan a presentar posturas de compra o venta para la celebración de un número determinado de Operaciones por Cuenta Propia dentro de un diferencial de precios, a efecto de otorgar mayor liquidez al mercado.

- **Socios liquidadores**

Es el fideicomiso que es miembro de Asigna y participa en su patrimonio. Su finalidad es liquidar y, en su caso, celebrar por cuenta de clientes, contratos de futuro y contratos de opción operados en MexDer.

- **Clientes**

Los clientes pueden operar, invertir y cubrir sus posiciones en MexDer a través de operadores, quienes actúan como intermediarios en la ejecución de operaciones, y Socios liquidadores, quienes son solidarios responsables ante la cámara de compensación Asigna.

1.4.3 Mecánica de los mercados de opciones sobre acciones

Las opciones sobre acciones se negocian sobre varios miles de acciones diferentes. Un contrato otorga al tenedor el derecho de comprar o vender 100 acciones a un precio de ejercicio especificado.

Los mercados regulados en el mundo tienen especificaciones generales mínimas que rigen la emisión de los contratos de opción sobre acciones, tales como: fecha de vencimiento, precio de ejercicio, terminología, dividendos y límites de posición y de ejercicio. Y especificaciones generales de cotización, negociación, garantías, compensación, regulación y fiscalización que varían dependiendo de las políticas, calendarios y horarios de servicio de las instituciones financieras de operación de productos derivados y de las instituciones reguladoras de cada país y de cada estado.

- **Activo**. En estos contratos en general los activos subyacentes están bien definidos. Es importante que la Bolsa estipule la categoría o categorías del satisfactor que son aceptables.
- **Fecha de expiración.** Una de las características que se usan para describir una opción es el mes en el que se fija la fecha de expiración. De modo que una opción sobre una acción con fecha de expiración en enero, expira el sábado posterior al tercer viernes del mes de expiración. El último día que se negocian es el tercer viernes del mes de expiración.
- **Precio de ejercicio**. Por lo general la bolsa de valores elige los precios de ejercicio a los cuales se pueden emitir las opciones, de tal modo que quedan espaciados entre $2.5, $5 o $10.
- **Terminología**. Existen términos que se utilizan para hacer referencia a situaciones específicas en el mercado de opciones, algunos de los que son:

- **Clase de opciones y Serie de opciones**. Para cualquier activo en un momento determinado, se pueden negociar muchos contratos de opciones diferentes. A todas las opciones de un mismo tipo (*call* o *put*) se les llama clase de opciones, y a todas las opciones de una misma clase de opciones con la misma fecha de expiración y precio de ejercicio se les llama serie de opciones.
- ***In the money, At the money*** **y** ***Out of the money***. Una opción *in the money* es aquella que le daría una cantidad positiva de dinero al poseedor si se ejerciera en ese instante. Similarmente, una opción *at the money* no generaría ningún flujo de dinero al poseedor si se ejerciera en ese momento, y una opción *out the money* dejaría un flujo de efectivo negativo al poseedor. De modo que, una opción *call* con posición larga, estaría *in the money* si $S_t > K$, *at the money* si $S_t = K$ y *out the money* si $S_t < K$.
- **Valor intrínseco**. El valor intrínseco de una opción se define como el máximo entre cero y el valor que tendría la opción si se fuera instantáneamente ejercida. Para una opción *call* europea con posición larga, el valor intrínseco sería $\max(S_t - K, 0)$ y para una opción *put* europea con posición larga, el valor intrínseco sería $\max(K - S_t, 0)$.

- **Particiones de acciones**. Las opciones que se negocian en Bolsa por lo general no hacen ajustes a los términos del contrato de opción cuando hay dividendos en efectivo (a menos que sean muy grandes). Las opciones que se negocian en Bolsa se ajustan por las particiones en acciones. En general una partición de acciones de n por m debe ocasionar que el precio de las acciones disminuya a m/n de su valor anterior y el número de acciones que se cubre por un contrato aumenta a n/m de su valor anterior.
- **Dividendos**. Las opciones sobre acciones son ajustadas por los dividendos de las acciones. El dividendo es la distribución de una porción de las ganancias de una compañía a un grupo selecto de sus accionistas, dicha distribución es decidida por la Junta Directiva de la compañía. Los dividendos no tienen efecto sobre los activos o

sobre el poder adquisitivo de la empresa. Usualmente, el precio[2] de una opción baja si se generan dividendos.

- **Tamaño del contrato**. En este se especifica la cantidad del activo que tiene que entregarse en conformidad con el contrato celebrado.
- **Posiciones límite**[3]. Define el número máximo de contratos de opciones que un inversionista puede mantener en un lado del mercado.
- **Ejercicios límite**. Por lo general es igual a las posiciones límite, es el máximo de contratos que puede ejercer cualquier individuo, en cualquier periodo de 5 días hábiles consecutivos. En la mayoría de los contratos, la bolsa especifica los límites y los movimientos diarios del precio, el objetivo es prevenir la ocurrencia de movimientos de precios fuertes debido a exceso de especulación. (Hull, 1993)

1.4.3.1 Mecánica para operar contratos de opciones sobre acciones en MexDer

Enseguida, se muestran especificaciones de MexDer para poder operar contratos de opciones sobre acciones.

Horario

El horario de negociación de los contratos de opción sobre acciones, será en días hábiles de las 7:30 horas a las 15:00 horas tiempo de la Ciudad de México

Activo

En MexDer se pueden negociar opciones sobre las siguientes acciones: ALFA A, ASUR B, América Móvil L, Cemex CPO, FEMSA UBD, KOF L, GAP B, GMéxico B, LALA B, MEXCHEM, Naftrac ISHRS, PE&OLES, PINFRA, Tlevisa CPO y Walmex V.

También se pueden negociar opciones sobre futuros del IPC de la BMV y opciones sobre divisas, específicamente sobre el dólar de los Estados Unidos de América. (MexDer, s.f.)

---

[2] El precio de las acciones es afectado por los dividendos en el periodo de los ex dividendos. El periodo de ex dividendos corresponde al plazo de tiempo comprendido entre la fecha de pago del dividendo y los 10 días hábiles anteriores.

[3] El socio liquidador es el agente que determina el número de acciones en el límite de posiciones, de acuerdo a la liquidez del mercado.

Fecha de expiración o vencimiento

En MexDer las fechas de vencimiento de todas sus opciones listadas son los terceros viernes de los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre, o el día hábil anterior si este día fuera festivo o inhábil.

Precio o prima de la opción

Es el precio pagado por el comprador al vendedor de opciones por adquirir el derecho a comprar o vender un activo subyacente. Las primas de las opciones sobre acciones, se cotizan en pesos por acción, por lo tanto, una prima de 30 significa que el derecho de compra o el derecho de venta vale 3000 pesos por contrato (30 x 100 acciones).

Tamaño del contrato

Cada contrato de opción sobre acciones que se negocia en MexDer representa 100 acciones. En casos excepcionales, algunos contratos pueden tener temporalmente algunos vencimientos pueden tener un valor nominal diferente a 100 acciones por contrato.

En el caso de la opción sobre el Futuro del IPC, el tamaño del contrato corresponderá a multiplicar el IPC por 10, y el resultado será expresado en pesos. Por último, el tamaño del Contrato de Opción sobre el dólar será de 10,000 dólares.

Meses para la entrega

El periodo del contrato será en ciclo trimestral y hasta de un año, durante los meses: Marzo, junio, septiembre y diciembre.

1.5 Métodos de valuación de opciones: Modelo de Black-Scholes

La ecuación diferencial de Black-Scholes es una ecuación que debe satisfacer el precio, f , de cualquier derivado dependiente de un subyacente que no paga dividendos. Dicho modelo fue inicialmente creado por Fischer Black y Myron Scholes, quienes en 1960 probaron que, bajo una revisión dinámica al portafolio de un derivado, se podría eliminar las ganancias o pérdidas esperadas del derivado, inventando así el concepto de *neutralidad al riesgo*.

El modelo de Black-Scholes fue publicado en 1973 en el artículo *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"* en el *Journal of Political Economy*, después, Robert C. Merton publicó un artículo que expandía el razonamiento matemático del modelo de valuación de opciones, acuñando el término "Modelo de valuación de opciones de Black-Scholes". Merton y Scholes recibieron el Premio Nobel en Ciencias Económicas de 1997 por sus trabajos, siendo Black inelegible por su fallecimiento en 1995, pero mencionado por los contribuidores de la Academia.

Los supuestos que se utilizan para deducir la ecuación diferencial de Black-Sholes son los siguientes:

1. El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.
2. El precio del activo subyacente está definido por un movimiento Browniano geométrico.
3. Las ventas en corto del subyacente están permitidas.
4. No existen los costos de transacción o los impuestos.
5. El subyacente se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad.
6. No hay oportunidades de arbitraje.
7. El mercado opera de manera continua, es decir, no hay fines de semana ni días festivos.
8. La tasa libre de riesgo, r , es constante y es la misma para cualquier fecha de vencimiento.

(Hull, 1993)

Se ha encontrado la solución a la ecuación diferencial de Black-Scholes[4] desde distintos planteamientos matemáticos bajo los supuestos mencionados anteriormente. En seguida, se describen las técnicas y supuestos aplicados para obtener el precio de la opción bajo ciertos enfoques matemáticos.

[4] Para ver la definición formal de la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes, véase el subtema "Ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes" del capítulo "Teoría matemática y económica pertinente en la modelación". También se recomienda leer el subtema anterior, "Cálculo estocástico".

Enfoque probabilista

En el enfoque probabilista se supone que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato y que su precio es conducido por un movimiento Browniano geométrico [5]neutral al riesgo. El precio o la prima de la opción se calcula como el valor presente del valor esperado del valor intrínseco. Para ello, se determina primero la función de densidad del precio del subyacente en la fecha de vencimiento. Posteriormente, se calcula la integral que define el valor presente del valor intrínseco esperado, lo cual proporciona el precio teórico de la opción Europea tipo *call*.

Enfoque de ecuaciones diferenciales parciales

En este enfoque, se utiliza el supuesto de ausencia de arbitraje en el mercado para obtener la ecuación diferencial parcial Black-Scholes cuando el precio de la acción es conducido por un movimiento Browniano geométrico. Esta ecuación diferencial parcial es separable de segundo orden, por lo que existe una solución a la ecuación, y al fijar la condición final como el valor intrínseco del derivado, se deduce la solución, es decir, el precio de la opción Europea.

Enfoque de portafolios replicantes

En el enfoque de portafolios replicantes se buscará replicar, en cada instante, el valor de una opción europea mediante un portafolio, dicho portafolio combinará una posición larga de la acción con un depósito bancario. Se supone que el activo subyacente y la opción se negocian en forma continua de tal manera que el riesgo se elimine en todo momento, es decir, la cobertura es dinámica. Bajo este desarrollo, se obtiene la ecuación diferencial parcial separable de Black-Scholes, cuya solución se puede encontrar desde distintos enfoques.

---

[5] Para una definición formal de movimiento Browniano geométrico, véase el subtema “Cálculo estocástico” del capítulo “Teoría matemática y económica pertinente en la modelación”, específicamente la página 44.

Enfoque de la ecuación de calor

En este enfoque se transforma la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en la ecuación de difusión de calor mediante cambios sucesivos de variables. La ecuación de difusión de calor tiene soluciones analíticas explícitas que son sencillas de aplicar. Estas soluciones describen cómo se difunde, al transcurrir el tiempo, el calor en una varilla de longitud infinita después de haber sido calentada en un tiempo inicial. Cuando se obtiene la solución de la ecuación de calor, se invierten los cambios de variable para lograr determinar el precio teórico de una opción Europea de compra. (Venegas-Martínez, 2008)

Capítulo 2. Teoría matemática y económica involucrada en la modelación

2.1 Teoría de la medida

Los conceptos de teoría de la medida serán una base fundamental para la teoría de procesos estocásticos, de la que se derivará la teoría de la integral de Itô y el cálculo estocástico.

Definición. Sigma álgebra (σ-álgebra)

Sea X un conjunto no vacío, una clase no vacía $F \subset X$ se llama σ-álgebra de subconjuntos de X , si:

1. $X \in F.$
2. $E, D \in F \Rightarrow E - D \in F.$
3. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $F,$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in F$

A la pareja (X, F) se le llama espacio medible y a los elementos de F se les llama eventos o conjuntos medibles. (Grabinsky, 2013)

Teorema

Sea F una familia no vacía de σ-álgebras de subconjuntos de X, entonces $\bigcap\{S \mid S \in F\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X. (Grabinsky, 2013)

Definición. σ-álgebra generada

Sea C una colección no vacía de subconjuntos de X. La σ-álgebra generada por C, denotada por $\sigma(C),$ es la colección

$$\sigma(C) = \bigcap \{F \mid F \text{ es σ-álgebra y } C \subset F\}.$$

(Grabinsky, 2013)

Definición. σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$

Sea (X, τ) un espacio topológico. La σ-álgebra B generada por la topología τ se llama la σ-álgebra de Borel. Si $X = \mathbb{R}$ y $\tau \subset P(\mathbb{R})$ es la topología usual de $\mathbb{R}$, entonces a $B_{\mathbb{R}} = \sigma(\tau)$ se la llama la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. (Grabinsky, 2013)

Definición. Espacio medible

Un espacio medible es una pareja (X, F) en la que X es un conjunto no vacío y F es una σ-álgebra de subconjuntos de X. (Grabinsky, 2013)

Definición. Medida

Sea (X, F) un espacio medible. Una medida en (X, F) es una función $\mu : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

1. $\mu(\varnothing) = 0.$
2. $\mu(E) \geq 0,$ para cualquier $E \in F.$
3. Si $\{E_n\}$ es una sucesión de elementos disjuntos entre sí de F, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(Grabinsky, 2013)

Definición. Medida de probabilidad

Sea (X,F) un espacio medible. Una medida de probabilidad es una función $P:F\to[0,1]$ que satisface

1. $P(X)=1.$
2. $P(A)\geq 0,$ para cualquier $A\in F.$
3. Si $A_1,A_2,...\in F$ son ajenos dos a dos, esto es, $A_n\cap A_m=\varnothing$ para $n\neq m$, entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$

(Rincón, Curso intermedio de probabilidad, 2007)

Definición. Espacio de medida

Un espacio de medida es una terna (X,F,μ) en donde (X,F) es un espacio medible y μ es una medida definida sobre F. (Grabinsky, 2013)

Definición. Espacio de probabilidad

Un espacio de probabilidad es una terna (X,F,P), en donde (X,F) es un espacio medible y P es una medida de probabilidad definida sobre F. (Rincón, Curso intermedio de probabilidad, 2007)

Definición. Función medible

Sean (X,F) y (Y,F') dos espacios medibles. Una función $f:X\to Y$ se llama medible relativa a las σ-álgebras F y F' si $f^{-1}(E')\in F\ \ \forall E'\in F'$. (Grabinsky, 2013)

Definición. Variable aleatoria

Sean los espacios medibles (X,F) y $(\mathbb{R},B_{\mathbb{R}})$, una variable aleatoria real es una función $G:X\to\mathbb{R}$ tal que para cualquier conjunto Boreliano B, se cumple que el conjunto $G^{-1}(B)$ es un elemento de F. Es decir, una variable aleatoria es una función medible cuyo codominio es $\mathbb{R}$, con la σ -álgebra de Borel. (Grabinsky, 2013) (Rincón, Curso intermedio de probabilidad, 2007)

2.2 Teoría de cálculo diferencial e integral, y ecuaciones diferenciales

Algunos de los conceptos de la teoría de cálculo diferencial e integral en esta sección se utilizarán en el capítulo 4 para derivar la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, como son: el teorema del valor medio, el teorema de Taylor para funciones $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y la notación de Landau. La teoría de ecuaciones diferenciales sirve como introducción al cálculo estocástico, y se emplea también en la solución de una ecuación diferencial para obtener la solución analítica de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Teorema del valor medio

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumple $f\in C_{[a,b]}$, $f\in C'_{(a,b)}$, entonces $\exists\xi\in(a,b)$ tal que

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Este teorema se puede extender a una función definida por una integral.

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumple $g\in C_{[a,b]}$, entonces utilizando el teorema del valor medio y el 1$^{\text{er}}$ teorema fundamental del cálculo se tiene que $\exists\xi\in(a,b)$ tal que

$$\int_a^b g(x)\,dx=g(\xi)(b-a).$$

(Weistein, s.f.)

Teorema de Taylor para funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Sea $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 punto interior de D. Si f es n veces derivable en $V_\alpha(x_0)$ y la n-ésima derivada de f es continua ahí, entonces $\exists\, R_n:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, llamada también la función residuo, tal que

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

$$\text{donde } \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

y el n-ésimo polinomio $P_n(x)$ está definido por

$$P_n(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

(Apostol, 1967)

Teorema de Taylor para funciones $f:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$

Sea $f:D\subset\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$, x_0 punto interior de D. Si f es n veces derivable en $B_\alpha(x_0)$ y la n-ésima derivada de f es continua ahí, entonces $\exists\, R_n:D\subset\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$, llamada también la función residuo, tal que

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}D^k f(x_0)\bullet(x-x_0)^k+R_n(x),$$

$$\text{donde } \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{\|x-x_0\|^n}=0,$$

D^k es un vector cuyo i-ésimo término está dado por el i-ésimo coeficiente de la suma multinomial

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_2}+\ldots+\frac{\partial}{\partial y_s}\right)^k,$$

y $\left(x-x_0\right)^k$ es un vector cuyo *i*-ésimo término está dado por el *i*-ésimo coeficiente de la suma multinomial

$$\left(\left(x_1-x_{0,1}\right)+\left(x_2-x_{0,2}\right)+\ldots+\left(x_s-x_{0,s}\right)\right)^k.$$

Si se toma el caso particular $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con $n>2,$ se tiene

$$\begin{aligned}
f\left(x,y\right)=&f\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}\left(y-y_0\right)\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x^2}\left(x-x_0\right)^2+\frac{\partial^2 f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y^2}\left(y-y_0\right)^2\right.\\
&\left.+2\frac{\partial^2 f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x\partial y}\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)\right]+\sum_{k=3}^{n}D^k f\left(x_0,y_0\right)\bullet\left(\overline{x}-\overline{x}_0\right)^k\\
&+R_n\left(x,y\right).
\end{aligned}$$

(Rudin, 1987)

<u>Teorema. Máximos y mínimos locales</u>[6]

Sean $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y x_0 punto interior de U. Si f alcanza en x_0 un valor máximo local (mínimo local) sobre U y f es derivable en x_0, entonces $Df\left(x_0\right)$ es la constante cero $\left(Df\left(x_0\right)\equiv\overline{0}\right)$. (Páez Cárdenas, 2012)

[6] Se empleará el teorema de máximos y mínimos locales para obtener las soluciones óptimas de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman en los capítulos 3 y 4. Se utilizará el teorema en la función de utilidad instantánea propuesta, con dominio contenido en $\mathbb{R}^n$ y codominio en $\mathbb{R}$.

Definición. Notación de Landau- o minúscula

Sean f, g funciones, se dice que $f(x) = o\left(g(x)\right)$ cuando $x \to x_0$ si y sólo si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Propiedades de las funciones o minúscula

- $o\left(g(x)\right) + o\left(g(x)\right) = o\left(g(x)\right)$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{o\left(g(x)\right)}{g(x)} = 0$

(Stover, s.f.)

Definición. Ecuación diferencial ordinaria (EDO)

Una ecuación diferencial ordinaria es la ecuación diferencial que relaciona una función desconocida $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con su variable independiente x y sus derivadas respecto a tal variable $f', f'', ..., f^{(n)}$. Siendo F una relación, la EDO se puede plantear como

$$F\left(x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Una función $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada la solución, y su gráfica se llama curva integral de F, si u es n veces derivable en I, y

$$F\left(x, u(x), u'(x), u''(x), ..., u^{(n)}(x)\right) = 0, \qquad x \in I.$$

(Blanchard, Devaney, & Hall, 1999)

Definición. Ecuación diferencial ordinaria de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una EDO en la que se relaciona una función desconocida $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con su variable independiente x y su derivada respeto a tal variable f'. Siendo F una relación, la EDO de primer orden se puede plantear como

$$F\left(x, f(x), f'(x)\right)=0$$

(Blanchard, Devaney, & Hall, 1999)

<u>Teorema de existencia para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden</u>

Supongamos que $F\left(x,y\right)$ es una función continua en un rectángulo de la forma $\left\{(x,y)\middle| a<x<b,\ c<y<d\right\}$ en el plano $x-y$. Si $\left(x_0,y_0\right)$ es un punto en este rectángulo, entonces existe una $\varepsilon>0$ y una función $y\left(x\right)$ definida para $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ que resuelve el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx}=F\left(x,y\right),\qquad y\left(x_0\right)=y_0$$

(Blanchard, Devaney, & Hall, 1999)

<u>Teorema de unicidad para ecuaciones diferenciales de ordinarias de primer orden</u>

Si las funciones $F\left(x,y\right)$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ son funciones continuas en un rectángulo de la forma $\left\{(x,y)\middle| a<x<b,\ c<y<d\right\}$ en el plano $x-y$. Si $\left(x_0,y_0\right)$ es un punto en este rectángulo y si $y_1\left(x\right)$ y $y_2\left(x\right)$ son dos funciones que resuelven el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx}=F\left(x,y\right),\qquad y\left(x_0\right)=y_0,$$

para toda t en el intervalo $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, con $\varepsilon>0$, entonces

$$y_1\left(x\right)=y_2\left(x\right)$$

para $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$. Es decir, la solución al problema de valor inicial es única. (Blanchard, Devaney, & Hall, 1999)

Ecuación diferencial lineal de primer orden

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

donde $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función desconocida y $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas conocidas.

Para encontrar la solución de la ecuación, se busca la función y que sea producto de dos funciones:

$$y(x) = u(x)v(x),$$

con su respectiva derivada

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Si se sustituyen en (1) se tiene

$$\begin{gathered} u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv = Q \\ u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q, \end{gathered}$$

y si se elige v que cumpla

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0, \tag{2}$$

con $v(x) \neq 0 \ \ \forall x$, entonces v será de la forma

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Como v cumple (2), u queda definida por

$$v\frac{du}{dx} = Q$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}.$$

Consecuentemente, u es de la forma

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C = C + \int Q(x)e^{\int P(s)ds}dx.$$

Por lo que la solución a la ecuación (1) es

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\lfloor C + \int Q(x)e^{\int P(s)ds}dx\right\rfloor.$$

(Planet Math, 2013)

Ecuación de Bernoulli[7]

Las ecuaciones de Bernoulli son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} + h(x)y = j(x)y^k, \tag{3}$$

donde $h, j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas y $k \neq 0,1$.

Este tipo de ecuaciones se solucionan al sustituir

$$z := y^{1-k} \tag{4}$$

en la ecuación (3), de donde se obtiene

[7] Se obtendrá la solución a una ecuación de Bernoulli cuando se busque la representación analítica de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, bajo la función de utilidad instantánea propuesta.

$$\frac{dz}{dx}+(1-k)h(x)z=(1-k)j(x),$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Una vez que se obtiene la solución general y se sustituye en (4), se habrá resuelto la ecuación de Bernoulli. (Planet Math, 2013)

Definición. Ecuación diferencial parcial de segundo orden

La forma general de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales es

$$F\left(\bar{x}, y, Dy, D^2 y\right)=0,$$

donde $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, $y:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $Dy\equiv\nabla y$ y $D^2 y$ representa todas las segundas derivadas de y respecto a x. La función F es conocida y depende a lo más $2n+1+n^2$ argumentos. (Miersemann, 2012)

2.3 Teoría de procesos estocásticos

La teoría de procesos estocásticos es un fundamento en el cálculo estocástico, en el cual se basa la modelación del problema de control óptimo estocástico. En este tema, también, se describen conceptos utilizados en el planteamiento del problema de control, como lo son el tiempo de paro y la filtración Browniana aumentada.

Definición. Proceso estocástico

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\left\{X_t \middle| t\in\Lambda\right\}$ parametrizada por un conjunto Λ, llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.

Se dice que el proceso es a tiempo discreto si $\Lambda=\{0,1,2,...\}$ y se dice que el proceso es a tiempo continuo si $\Lambda=[0,\infty)$ o $\Lambda=[a,b]$, con $a<b\in\mathbb{R}$. (Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012)

Definición. Filtraciones

Una filtración a tiempo continuo es una colección no numerable de sub σ-álgebras $\{F_t\}_{t\geq 0}$ tal que $F_s \subset F_t$, cuando $0 \leq s \leq t$. La filtración natural o canónica de un proceso a tiempo continuo $\{X_t | t \geq 0\}$ es la colección de σ-álgebras $\{F_t\}_{t\geq 0}$ dadas por $F_t = \sigma\{X_s | 0 \leq s \leq t\}$, esto es, F_t es la mínima σ-álgebra que hace que cada una de las variables X_s, para valores de s en el intervalo $[0, t]$, sean medibles.

Dada una filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$, se define

$$F_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} F_t\right),$$

la menor σ-álgebra que contiene a F_t $\forall t \geq 0$. (Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012), (Saglietti, 2009)

Definición. Proceso adaptado

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t | t \geq 0\}$ es adaptado a una filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$ si la variable X_t es F_t-medible $\forall t \geq 0$. (Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012)

Definición. Tiempo de paro[8]

Una variable aleatoria τ con valores en $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ es un tiempo de paro respecto a una filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$ si para $t \geq 0$ se cumple que $(\tau \leq t) \in F_t$. La condición $(\tau \leq t) \in F_t$ se puede interpretar de la siguiente manera: la pregunta de si el evento de interés ha ocurrido al tiempo

[8] En el capítulo 4 se emplea un tiempo de paro en el planteamiento del problema de control óptimo estocástico. Dicho tiempo de paro representa el instante en el que la riqueza del agente se vuelve 0, que restringe el problema de control a concluir si ocurre dicho evento.

t o antes, debe poder ser respondida con la información dada por la filtración al tiempo t, es decir F_t. (Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012)

Definición. Martingala

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, se dice que un proceso $\{X_t | t \geq 0\}$ es una martingala respecto de una filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$ si cumple las siguientes condiciones:

1. Es integrable.
2. Es adaptado a la filtración.
3. Para cualesquiera $0 \leq s \leq t$,

$$E(X_t | F_s) = X_s, \quad \text{c.s.}$$

(Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012)

Definición. Movimiento Browniano

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad y $\{F_t\}_{t\geq 0}$ una filtración contenida en F. Se dice que el proceso estocástico $W = \{W_t | t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano si satisface las siguientes condiciones

1. $W_0 = 0$ c.s.
2. Las trayectorias $t \mapsto W_t$ son continuas.
3. W es adaptado a la filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$.
4. Dados $s, t \geq 0$, el incremento $W_{s+t} - W_s \sim N(0, t)$ y es independiente de F_s.

La filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$ es parte de la definición de movimiento Browniano. Sin embargo, si se tiene un proceso W sin filtración asociada, entonces W resulta un movimiento Browniano con respecto a la filtración generada por el proceso. Esta filtración se denota $\{F_t^W\}_{t\geq 0}$ y es definida para cada t como $F_t^W = \sigma\left(W_s \middle| 0 \le s \le t\right)$. (Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012), (Saglietti, 2009)

Definición. Conjuntos P-nulos para F_∞^W

Sea W un movimiento Browniano, dada $\left\{F_t^W\right\}_{t\ge 0}$, la filtración generada por el proceso y F_∞^W la menor σ-álgebra que contiene a $F_t^W \quad \forall t \ge 0,$ se define

$$\mathrm{N} := \left\{L \subseteq \Omega \middle| \exists G \in F_\infty^W \text{ con } L \subseteq G,\ P(G) = 0\right\}$$

como la clase de conjuntos P-nulos para F_∞^W. (Saglietti, 2009)

Definición. Filtración Browniana aumentada[9]

Para cada $0 \le t \le \infty,$ se define

$$\tilde{F}_t^W := \sigma\left(F_t^W \cup \mathrm{N}\right).$$

La filtración $\left\{\tilde{F}_t^W\right\}_{t\ge 0}$ se conoce como la filtración Browniana aumentada. (Saglietti, 2009)

2.4 Integral de Itô y cálculo estocástico

2.4.1 Construcción de la integral de Itô

En este trabajo, se buscará explicar a grandes rasgos la construcción y las propiedades de la integral de Itô, sin demostrar los procedimientos, pero resaltando elementos y cualidades pertinentes en su construcción.

[9] La filtración Browniana aumentada será utilizada en el planteamiento del problema de control óptimo estocástico en los capítulos 3 y 4. Dicha filtración será necesaria para resolver el problema de control. (Venegas-Martínez, 2008)

Dado un espacio de probabilidad (Ω, F, P), se considera un movimiento Browniano estándar $\{W_t | t \geq 0\}$ con su filtración natural $\{F_t\}_{t \geq 0}$ y un proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ con espacio parametral $[0, T]$, con $T > 0$ fijo, que cumple las siguientes condiciones:

1. $X : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ es $F_T \otimes B[0, T]$-medible, donde $F_T \otimes B[0, T]$ es la mínima σ-álgebra generada por el espacio producto $F_T \times B[0, T]$.
2. $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$ es adaptado a $\{F_t\}_{t \geq 0}$

<u>Definición. Espacio</u> $L^2(P)$

Se denota por $L^2(P)$ al espacio vectorial de variables aleatorias X que son cuadrado integrables, es decir, que cumplen la condición

$$\|X\|_{L^2(P)} = \left(E|X|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

donde $\|X\|_{L^2(P)}$ define una norma en $L^2(P)$, y además, $L^2(P)$ es un espacio completo bajo esta norma, es decir, es un espacio de Banach.

<u>Definición. Espacio</u> $L^2(P \times dt)$

Se denota $L^2(P \times dt)$ al espacio vectorial de todos los procesos $X = \{X_t\}_{t \in [0,T]}$, que cumplen la condición

$$\|X\|_{L^2(P \times dt)} = \left(E\left[\int_0^T |X_t|^2 \, dt\right]\right)^{1/2} < \infty,$$

donde $\|X\|_{L^2(P \times dt)}$ es una norma en este espacio, y además $L^2(P \times dt)$ es un espacio completo bajo esta norma, es decir, es un espacio de Banach.

Definición. Espacio $\mathcal{H}^2$

Se denota $\mathcal{H}^2$ al espacio de todos los procesos $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ medibles y adaptados a la filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$, tales que

$$E\left[\int_0^T |X_t|^2\, dt\right] < \infty.$$

El espacio $\mathcal{H}^2$ es un subespacio lineal cerrado de $L^2(P\times dt)$.

Definición. Procesos simples

Sea $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ una partición finita del intervalo $[0,T]$. Un proceso estocástico simple es un proceso de la forma

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t),$$

en donde $X^{(0)},...,X^{(n-1)}$ es una colección de variables aleatorias adaptadas a la filtración $\{F_{t_k}\}_{k=0}^{n-1}$ y que son cuadrado integrables, por otra parte, la expresión $\mathbf{1}_{[a,b)}(t)$ denota la función indicadora del intervalo $[a,b)$.

Se define también a $\mathcal{H}_0^2$ como el espacio vectorial de todos los procesos simples. Como los procesos simples son medibles, adaptados y cumplen que su norma en $L^2(P\times dt)$ es finita, se tienen las contenciones $\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2 \subset L^2(P\times dt)$.

La integral de Itô se define primero para procesos simples, y después, se buscará el límite de estas integrales para obtener la integral de Itô de cualquier proceso en $\mathcal{H}^2$.

Integral estocástica de Itô para procesos simples

Dado un proceso simple $X,$ la integral estocástica de Itô respecto del movimiento

Browniano, denotada por $I(X)$, se define como la variable aleatoria

$$I(X)=\int_0^T X_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)}\left(B_{t_{k+1}}-B_{t_k}\right).$$

Integral estocástica de Itô

Si $X \in \mathcal{H}^2$, entonces existe una sucesión de procesos simples $\{X_n\} \subset \mathcal{H}_0^2$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T \left|X-X_n\right|^2 dt\right)=0,$$

y se define la integral estocástica de Itô en el intervalo $[0,T]$ como

$$I(X)=\int_0^T XdW_t := \lim_{n\to\infty}\int_0^T X_n dW_t.$$

Isometría de Itô

Para cualquier proceso $X \in \mathcal{H}^2$ se cumple

$$\left\|I(X)\right\|_{L^2(P)}=\left\|X\right\|_{L^2(P\times dt)}.$$

(Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012), (Saglietti, 2009)

2.4.2 Cálculo Estocástico

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad y $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano adaptado a la filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$.

Definición. Ecuación estocástica[10]

Dadas $f, g : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$ un proceso, una ecuación estocástica es una ecuación de la forma

$$dX_t = f(t, X_t)\,dt + g(t, X_t)\,dW_t,$$

definida para $t \in [0, T]$, y con condición inicial la variable aleatoria X_0 que se presupone F_0-medible e independiente a $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Esta ecuación se interpreta como la ecuación integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)\,ds + \int_0^t g(s, X_s)\,dW_s,$$

en donde la primera es una integral de Riemann y la segunda es una integral estocástica de Itô. Al proceso $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$ se le llama proceso de Itô. (Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012)

Teorema. Existencia y unicidad de la solución

Si se tiene la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = f(t, X_t)\,dt + g(t, X_t)\,dW_t,$$

y los coeficientes $f(t, x)$ y $g(t, x)$ satisfacen la condición de Lipschitz en la variable x,

$$|f(t,x) - f(t,y)|^2 + |g(t,x) - g(t,y)|^2 \leq K|x - y|^2,$$

y la condición de crecimiento en x,

$$|f(t,x)|^2 + |g(t,x)|^2 \leq K\left(1 + |x|^2\right),$$

[10] En el planteamiento del problema de control óptimo estocástico en los capítulos 3 y 4, la riqueza es modelada por una ecuación diferencial estocástica. Por lo que, en el capítulo 4, se plantean el precio de la acción, el precio de la opción europea sobre la acción y la cuenta de ahorro como ecuaciones diferenciales parciales.

para alguna constante $K > 0$, entonces existe un proceso $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ solución de la ecuación diferencial estocástica que cumple las siguientes condiciones:

1. X es adaptado a la filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$.
2. X tiene trayectorias continuas.
3. X es uniformemente acotado en $L^2(P)$, es decir, $\sup_{0\leq t\leq T} E\left(X_t^{\,2}\right) < \infty$.
4. X es único en el sentido de indistinguibilidad[11].

En este caso, a tal solución se le llama solución fuerte de la ecuación estocástica. (Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012)

Teorema. Fórmula de Itô[12]

Si $X = \{X_t | t \in [0,T]\}$ es un proceso de Itô con ecuación estocástica

$$dX_t = g(t, X_t)dt + h(t, X_t)dW_t$$

y $f(t,x)$ es una función de clase C^1 en t y de clase C^2 en x, entonces el proceso $Y = \{Y_t = f(t, X_t) | t \in [0,T]\}$ es también un proceso de Itô y satisface la ecuación estocástica

$$dY_t = \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial x^2}(dX_t)^2.$$

Dada la tabla de multiplicar de McKean,

$\times$	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

[11] Dados los procesos $\{X_t\}_{t\geq 0}$ y $\{Y_t\}_{t\geq 0}$, se dice que los procesos son indistinguibles si $P\left(X_t = Y_t \text{ para cada } t \geq 0\right) = 1$

[12] El lema de Itô se utiliza en el capítulo 4 para deducir la ecuación estocástica que modela el precio de la opción europea de compra sobre la acción. También es utilizado en los capítulos 3 y 4 para deducir la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

se substituye la ecuación estocástica de X en la ecuación estocástica de Y, y se obtiene que el proceso Y satisface la ecuación estocástica

$$\begin{aligned}dY_t = &\left(\frac{\partial f(t,X_t)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial x} g(t,X_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial x^2} h(t,X_t)^2\right)dt \\ &+ \frac{\partial f(t,X_t)}{\partial x} h(t,X_t)\,dW_t\end{aligned}$$

(Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012)

Definición. Movimiento Browniano geométrico[13]

Sean las constantes $\mu, \sigma, x_0 > 0,$ el movimiento Browniano geométrico es el proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ solución de la ecuación estocástica

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 &= x_0, \end{aligned}$$

la cual está dada por

$$X_t = x_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right].$$

(Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, 2012)

2.4.3 Ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes

Se considera un espacio de probabilidad con una filtración $\left(\Omega, F, \{F_t\}_{t\in[0,T]}, P\right)$ y un movimiento Browniano $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ definido sobre dicho espacio. Se supone que el precio de la acción, S_t, al tiempo t está modelado por un movimiento Browniano geométrico, es decir que para las constantes $\mu, \sigma > 0$, la forma diferencial de S_t está definida como

[13] En el planteamiento del problema de control en el capítulo 4, se modela el precio de la acción como un movimiento Browniano geométrico.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Si $f(t, S_t)$ es el precio del derivado sobre S_t al tiempo t, y $r > 0$ es la tasa fija libre de riesgo en el mercado, la ecuación diferencial de Black-Scholes estará dada por

$$\frac{\partial f(t,S_t)}{\partial t} + rS_t \frac{\partial f(t,S_t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^{\,2} \frac{\partial^2 f(t,S_t)}{\partial S_t^{\,2}} = rf(t,S_t),$$

y su solución será determinada por la condición de frontera del precio del derivado.

En el caso de una opción Europea tipo *call* con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento T, las condiciones de frontera y final son respectivamente

$$f(0,t)=0 \qquad \text{y} \qquad f(T,S_T) = \max(S_T - K, 0).$$

De la ecuación de Black-Scholes se obtiene que al tiempo t el precio de la opción, con precio *strike* K, es

$$c(t,S_t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

donde Φ es la función de densidad acumulada de una variable normal estándar, dada por

$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\ ;$$

y los valores de d_1 y d_2 son

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

(Martínez Palacios M. T., Un análisis comparativo de diversas metodologías para la valuación de opciones (Tesis de maestría), 2008)

2.5 Teoría económica

Definición. Función de utilidad

Dada una economía en que un consumidor puede adquirir n mercancías diferentes (las cuales se suponen infinitamente divisibles), la función de utilidad se define como:

$$f_U : \mathbb{R}^{+,n} \to \mathbb{R}^{+}, \quad (c_1,...,c_n) \mapsto U = f_U(c_1,...,c_n),$$

Donde c_i se interpreta como la cantidad disponible del bien i-ésimo y U se interpreta como la utilidad total de una cierta combinación de bienes.

Adicionalmente, la función de utilidad pertinente en el modelo deberá cumplir las siguientes propiedades:

1. Diferenciabilidad. $f_U \in C^2$
2. Monotonicidad. $f_U(c_1,..,c_i,..,c_n) \leq f_U(c_1,..,c_i',..,c_n)$ si $c_i \leq c_i'$

(Varian, 1978)

Supuesto de racionalidad económica

El supuesto de racionalidad económica argumenta que los agentes que intervienen en la economía van a procurar maximizar sus beneficios, es decir, buscarán llegar a su máxima satisfacción. En este sentido, los consumidores tratarán de lograr la mayor utilidad o beneficio del ingreso que perciben.

Este supuesto es de gran importancia en la teoría de optimización, ya que se requiere suponer un mercado con agentes racionales que busquen optimizar su utilidad o sus ganancias. (Varian, 1978)

Definición. Funciones de utilidad HARA[14]

Dado un consumo C , las funciones de utilidad HARA (*Hyperbolic Absolute Risk Aversion)* son aquellas funciones de utilidad, $V(C)$, cuyo coeficiente de aversión absoluta al riesgo, $R(C)$, es positivo e hiperbólico en el consumo, es decir,

$$R(C) := -\frac{V''}{V'} = \left(\frac{C}{1-\gamma} + \frac{\eta}{\beta}\right)^{-1} > 0,$$

sujeto a las restricciones

$$\gamma \neq 1, \qquad \beta > 0, \qquad \frac{\beta C}{1-\gamma} + \eta > 0, \qquad \eta = 1 \text{ si } \gamma = -\infty.$$

(Merton, 1990)

2.6 Programación dinámica

Sea $(\Omega, \tilde{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano y $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso adaptado a la filtración natural del Browniano $\{F_t\}_{t\geq 0}$.

Definición. Función de utilidad total esperada

Sean las funciones $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que H es una función de utilidad que cumple la propiedad de diferenciabilidad $(H \in C^2)$, y el proceso $\{c_t\}_{t\geq 0}$ definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, F, P) y adaptado a la filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$, entonces se define la función de utilidad total esperada sobre el intervalo $[0, T]$ como

[14] Para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman se supone que la función de utilidad instantánea es miembro de la familia de funciones de utilidad HARA. Merton (1990) afirma que si se supone que el precio de la acción es modelado por un movimiento Browniano geométrico y adicionalmente se considera una función de utilidad instantánea de clase HARA, se puede deducir la expresión analítica de las reglas de control óptimas.

$$E\left[\int_0^T H(c_t,t)\,dt+\Phi(X_T)\middle|F_0\right],$$

donde Φ se interpreta como la función de retiro, es decir, la utilidad de tener recursos al tiempo T y F_0 es la información disponible al tiempo 0. (Björk, 2004)

Definición. Regla de control

Para que un proceso n-dimensional $\{u_t\}_{t\geq 0}$ sea una regla de control del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$, se requiere que al tiempo t, u_t dependa únicamente de valores observables pasados del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$, es decir que $\{u_t\}_{t\geq 0}$ sea adaptado a $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Una forma de que el proceso sea adaptado, es elegir una función $g:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^n$ y definir el proceso $\{u_t\}_{t\geq 0}$ como

$$u_t=g(t,X_t).$$

A la función g se le llama regla de control de retroalimentación. (Björk, 2004)

Relación recursiva en un funcional

Sea Θ un conjunto de procesos estocásticos n-dimensionales en un espacio temporal $[0,T]$, y sea Γ un funcional

$$\Gamma:\Theta\rightarrow\mathbb{R}$$
$$\Gamma(u):\{u_t\}_{t\in[0,T]}\rightarrow\Gamma\left(u_{t|t\in[0,T]}\right).$$

El problema de programación dinámica con un enfoque de recursividad en el funcional poseerá las siguientes características:

1. El estado del sistema será descrito por un conjunto pequeño de parámetros.

2. El efecto de una decisión hará que el conjunto de parámetros se transforme a un conjunto similar.
3. La historia pasada del sistema no será importante para determinar las futuras acciones, es decir, el sistema cumplirá la propiedad de Markov[15].

Además de las características anteriores, se supondrá el siguiente principio:

- Principio de optimización: Una regla óptima tiene la propiedad de que, sin importar el estado inicial y la decisión inicial, las demás decisiones constituirán una regla óptima respecto al estado resultante a la primera decisión.

(Bellman, 1953)

[15] Sean (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso adaptado a la filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$. Se dice que el proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ cumple la propiedad de Markov si $\forall\ A \in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}$ y $\forall\ 0 < s < t$ se tiene que $P\left(X_t \in A \middle| F_S\right) = P\left(X_t \in A \middle| X_S\right)$

Capítulo 3. Marco teórico para la modelación

En este capítulo se plantea el problema de control óptimo estocástico a tiempo continuo, en el cual su restricción es un proceso estocástico observable conducido por el movimiento geométrico browniano. En seguida, se formulará el problema de control óptimo estocástico en optimización dinámica con horizonte temporal finito y se presentará la técnica de programación dinámica para obtener la Ecuación Diferencial Parcial no lineal de Hamilton-Jacobi-Bellman, cuya solución llevará a encontrar el control óptimo y, con ello, las trayectorias óptimas de las variables que optimizan la función objetivo.

3.1 Planteamiento del problema de control óptimo estocástico en optimización dinámica

La optimización dinámica estudia la optimización de sistemas que evolucionan en el tiempo. Dado un sistema que evoluciona en el tiempo, se trata de guiar o controlar el sistema de manera óptima a lo largo de un horizonte temporal dado, de acuerdo a un objetivo previamente fijado. Se puede considerar que la optimización dinámica tiene raíces en el cálculo de variaciones, la teoría clásica de control y la programación lineal y no lineal. (Cerda, 2001)

El control óptimo estocástico es una técnica matemática usada para resolver problemas de optimización de sistemas que evolucionan en el tiempo en un ambiente de incertidumbre. El problema matemático general de optimización intertemporal estocástica se compone de una función objetivo, definida sobre varios periodos (finitos o infinitos) sujeta a restricciones, de las cuales, al menos una de ellas es dinámica, así como a condiciones de frontera (Wickens, 2008), utilizando variables de control que permitan optimizar la función objetivo, a fin de encontrar las sendas óptimas y obtener así la trayectoria óptima de las variables de estado a partir de la ecuación de movimiento que las une. (Cerda, 2001)

Para establecer el problema, primero se hará el planteamiento del problema matemático. Se considera un sistema dinámico en tiempo continuo definido en el horizonte temporal $[0,T]$, y se definen las funciones $\mu(t,x,u)$ y $\sigma(t,x,u)$, dadas por,

$$\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},$$
$$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

Para un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, se considera la siguiente ecuación estocástica de estado:

$$dX_t = \mu(t, X_t, u_t)\,dt + \sigma(t, X_t, u_t)\,dW_t \tag{5}$$

$$X_0 = x_0.$$

Donde el proceso unidimensional X_t es un proceso de estado, al cual buscaremos controlar. El proceso d-dimensional u_t es el proceso de control, cuya correcta elección controlará a X_t y W_t es un movimiento browniano unidimensional, definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $\left(\Omega, F, (F_t^W)_{t\in[0,T]}, \mathrm{P}\right)$. (Björk, 2004)

A continuación se define una **regla de control admisible**; para tal efecto, se considera a la clase de procesos de control admisibles como aquellas reglas de control u_t que al tiempo t se adaptan al proceso de estado X_t y cuyo valor se obtiene mediante la función $\mathrm{u}(t,x)$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \ ,$$

definida por

$$u_t = \mathrm{u}(t, X_t)$$

u es una función, a la que se le llamará regla de control de retroalimentación. Supóngase ahora que se elige una regla de control $\mathrm{u}(t,x)$ fija, y se inserta en (5), de donde se obtiene la Ecuación Diferencial Estocástica

$$dX_t = \mu\left(t, X_t, \mathrm{u}(t, X_t)\right)dt + \sigma\left(t, X_t, \mathrm{u}(t, X_t)\right)dW_t \ . \tag{6}$$

Por otra parte, se le impone a u que, para cada $t, u_t \in \mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, donde U es la clase de controles admisibles, un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ fijo.

<u>Definición 1. Regla de control admisible</u>

Una regla de control $\mathrm{u}(t,x)$ es admisible si (Björk, 2004):

1. $\mathrm{u}(t,x) \in \mathrm{U},\ \forall t \in \mathbb{R}_+$ y $\forall x \in \mathbb{R}$
2. Para cualquier punto inicial (s,x) dado, la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu\left(t, X_t, \mathrm{u}(t, X_t)\right)dt + \sigma\left(t, X_t, \mathrm{u}(t, X_t)\right)dW_t$$
$$X_s = x$$

tiene una única solución.

Ya que el problema de control óptimo por definir se encuentra en el marco estocástico, se definirán las siguientes funciones y se establecerá el lema de Itô.

<u>Definición 2</u>

1. Para cualquier vector fijo $u \in \mathbb{R}^d$, las funciones μ^u y σ^u están definidas por

$$\mu^u(t,x) = \mu(t,x,u)$$
$$\sigma^u(t,x) = \sigma(t,x,u)$$

y se suponen con segundas derivadas continuas.

2. Para cualquier regla de control u las funciones μ^u y σ^u están definidas por

$$\mu^u(t,x) = \mu\left(t,x,u(t,x)\right)$$
$$\sigma^u(t,x) = \sigma\left(t,x,u(t,x)\right)$$

y se suponen con segundas derivadas continuas

<u>Lema de Itô</u>

1. Considere la función $y = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu^{\mathrm{u}}(x,t)dt + \sigma^{\mathrm{u}}(x,t)dW_t$$

y cualquier vector fijo $u \in \mathbb{R}^d$, en donde, como se indicó anteriormente, W_t es un movimiento browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración aumentada $\left(\Omega, \mathrm{F}, \left(\mathrm{F}_t^W\right)_{t\in[0,T]}, \mathrm{P}\right)$. Entonces, si se hace una aplicación estándar en serie de Taylor y se utilizan las reglas de multiplicación para diferenciales estocásticos, se obtiene el lema de Itô,

$$dy = \left[\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial X_t}\mu^{\mathrm{u}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial X_t^{\,2}}\left(\sigma^{u}\right)^2\right]dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial X_t}\sigma^{u}dW_t \ .$$

2. Análogamente, para cualquier regla de control u, se tiene

$$dy = \left[\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial X_t}\mu^{\mathrm{u}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial X_t^{\,2}}\left(\sigma^{\mathrm{u}}\right)^2\right]dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial X_t}\sigma^{\mathrm{u}}dW_t .$$

Ahora se procede a plantear las funciones que serán parte de la función objetivo del problema de control.

Dada una regla de control u con su correspondiente proceso controlado X_t^{u}, algunas veces su utilizará la notación

$$dX_t^{\mathrm{u}} = \mu^{\mathrm{u}}dt + \sigma^{\mathrm{u}}dW_t \tag{7}$$

donde

$$\mathrm{u}_t = \mathrm{u}\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right).$$

Se consideran las funciones (Cerda, 2001):

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad \text{dada por} \quad \left(t, X_t^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_t\right) \to F\left(t, X_t^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_t\right)$$

$$\text{y } \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad X_t^{\mathrm{u}} \to \Phi\left(X_t^{\mathrm{u}}\right)$$

donde F valúa el desempeño del sistema a través del tiempo y Φ es el estado en el que queda el sistema al final del periodo del problema. Se supone que F y Φ son de clase C^2.

Se define ahora el funcional objetivo del problema como la función

$$J_0 : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$$

definida por:

$$J_0(\mathrm{u}) = E\left[\int_0^T F\left(t, X_t^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_t\right)dt + \Phi\left(X_T^{\mathrm{u}}\right)\middle| \mathrm{F}_0\right],$$

donde X^{u} es la solución de (6), con condición inicial $X_0 = x_0$ y donde F_0 representa la información disponible hasta el tiempo $t = 0$. El problema de control puede ser escrito como un problema de maximización del funcional $J_0(\mathrm{u})$, sobre todo u tal que $\mathrm{u}_t \in \mathrm{U}$ con $t \in [0, T]$, por lo que se define el funcional óptimo como

$$\hat{J}_0 = \max_{\mathrm{u}|\mathrm{u}_t \in \mathrm{U}} J_0(\mathrm{u}).$$

Si existe la regla de control admisible $\hat{\mathrm{u}}$ tal que

$$\hat{J}_0 = J_0\left(\hat{\mathrm{u}}\right),$$

entonces $\hat{\mathrm{u}}$ se define como una regla de control óptimo para el problema del funcional.

<u>Definición 3. Problema de control</u>

Se supone una pareja fija, donde $t \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}$. El problema de control $P(t, x)$ se define como:

$$\underset{\mathrm{u}_k|_{k\in[0,T]}}{Maximizar}\, E\left[\int_t^T F\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s\right)ds + \Phi\left(X_T^{\mathrm{u}}\right)\middle| \mathrm{F}_t\right]$$

Sujeto a las ecuaciones dinámicas

$$\begin{gathered} dX_s^{\mathrm{u}} = \mu\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)\right)ds + \sigma\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)\right)dW_t \\ X_t^{\mathrm{u}} = x \end{gathered} \tag{8}$$

y la restricción

$$\mathrm{u}(s,z) \in \mathrm{U}, \ \forall (s,z) \in [t,T] \times \mathbb{R} \tag{9}$$

3.2 Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

Richard Bellman (1921-1984) es nombrado el "Padre de la programación dinámica" por contribuir a la teoría de optimización el método de programación dinámica. La programación dinámica es muy útil en la solución de problemas de optimización en donde se toman decisiones en varias etapas (discretas o continuas). Parece ser que después Rudolph E. Kalman (1960) y (1961) fue quien encontró la relación entre la ecuación de Bellman y la ecuación de Hamilton-Jacobi, que se estudia en mecánica. (Venegas-Martínez, 2008)

Se continua con la regla de control óptimo para el problema de control dado, para lo que, se utilizará la programación dinámica.

Definición 4. Función de valor

1. La función de valor

$$J : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathrm{U} \to \mathbb{R}$$

está definida por

$$J(t,x,\mathrm{u}) = E\left[\int_t^T F\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s\right) ds + \Phi\left(X_T^{\mathrm{u}}\right) \middle| \mathrm{F}_t \right]$$

junto con las ecuaciones dinámicas (8)

2. La función de valor óptimo es

$$\hat{J} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

y está definida por

$$\hat{J}\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) = \max_{\mathrm{u}_s \in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} J(t,x,\mathrm{u})$$

Ahora, se buscará caracterizar la función de valor en el control óptimo y hacer una derivación de su ecuación diferencial parcial, mejor conocida como la Ecuación Diferencial Parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman, para lo que se harán los siguientes supuestos.

Se supone que:

Supuestos

1. Existe una regla de control óptimo $\hat{\mathrm{u}}$
2. La función de valor óptimo $\hat{J}$ es de clase C^2.

Se considera un par $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}$ fijo pero arbitrario y se supone un incremento muy pequeño, de hecho, diferencial $dt\in\mathbb{R}$ tal que $t<t+dt<T$, también se elige una regla de control u fija pero arbitraria. Entonces, dada la definición de la función de valor óptimo y el incremento dt, se tiene la relación recursiva temporal

(Venegas-Martínez, 2008)

$$\begin{aligned}\hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right) &= \max_{\mathrm{u}_s\in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} J(t,x,\mathrm{u}) = \max_{\mathrm{u}_s\in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} E\left[\int_t^T F\left(s,X_s^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_s\right)ds+\Phi\left(X_T^{\mathrm{u}}\right)\middle|\mathrm{F}_t\right]\\
&= \max_{\mathrm{u}_s\in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} E\left[\int_t^{t+dt} F\left(s,X_s^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_s\right)ds+\int_{t+dt}^{T} F\left(s,X_s^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_s\right)ds+\Phi\left(X_T^{\mathrm{u}}\right)\middle|\mathrm{F}_t\right]\\
&= \max_{\mathrm{u}_s\in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} E\left[\int_t^{t+dt} F\left(s,X_s^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_s\right)ds+\hat{J}\left(t+dt,X_t^{\mathrm{u}}+dX_t^{\mathrm{u}}\right)\middle|\mathrm{F}_t\right],\end{aligned}$$

al primer sumando de esta expresión se le aplica el teorema del valor medio de cálculo integral y, en el segundo sumando se aplica la expansión en serio de Taylor, de lo que se obtiene

$$\hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)=\max_{\mathrm{u}_s\in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} E\left[F\left(t,X_t^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_t\right)dt+o(dt)+\hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)+d\hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)+o(dt)\middle|\mathrm{F}_t\right],$$

y al simplificar, se tiene

$$0=\max_{\mathrm{u}_s\in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} E\left[F\left(t,X_t^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_t\right)dt+d\hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)+o(dt)\middle|\mathrm{F}_t\right].$$

Se aplica el lema de Itô a la expresión anterior, así

$$0=\max_{\mathrm{u}_s\in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} E\left[F\left(t,X_t^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_t\right)dt+\left[\frac{\partial \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial t}+\frac{\partial \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x}\mu^{\mathrm{u}}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x^2}\sigma^{u}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)^2\right]dt\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x}\sigma^{u}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)dW_t+o(dt)\middle| F_t\right].$$

Puesto que $dW_t \sim N(0,dt)$, al tomar el valor esperado al término estocástico, se sigue que

$$0=\max_{\mathrm{u}_s\in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} \left[F\left(t,X_t^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_t\right)dt+\left[\frac{\partial \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial t}+\frac{\partial \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x}\mu^{\mathrm{u}}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x^2}\sigma^{u}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)^2\right]dt\right.$$

$$\left.+o(dt)\right]$$

Ahora se divide entre dt y se toma el límite cuando $dt \to 0$

$$0=\lim_{dt\to 0}\left(\max_{\mathrm{u}_s\in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} \left[F\left(t,X_t^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_t\right)+\frac{\partial \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial t}+\frac{\partial \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x}\mu^{\mathrm{u}}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x^2}\sigma^{u}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{o(dt)}{dt}\right]\right)$$

y se obtiene la Ecuación Diferencial Parcial Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$0=\max_{\mathrm{u}_s\in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}} \left[F\left(t,X_t^{\mathrm{u}},\mathrm{u}_t\right)+\frac{\partial \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial t}+\frac{\partial \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x}\mu^{\mathrm{u}}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{J}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x^2}\sigma^{u}\left(t,X_t^{\mathrm{u}}\right)^2\right].$$

Como el análisis al problema se hizo sobre un punto fijo pero arbitrario, la ecuación se sostiene para todo punto $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}$, y se puede establecer el siguiente teorema.

Teorema 1. Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

Bajo los supuestos se afirma lo siguiente:

1) $\hat{J}$ satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$0=\max_{u_s\in U|_{s\in[t,T]}}\left[F\left(t,X_t^{u},u_t\right)+\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{u}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{u}\right)}{\partial x}\mu^{u}\left(t,X_t^{u}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{J}\left(t,X_t^{u}\right)}{\partial x^2}\sigma^{u}\left(t,X_t^{u}\right)^2\right]$$

para toda pareja $(x,t)\in(0,T)\times\mathbb{R}$

$\hat{J}\left(T,X_T^{u}\right)=\Phi\left(X_T^{u}\right)$ para toda $x\in\mathbb{R}$

2) Para cada $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}$, el máximo en la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman es alcanzado por $\hat{u}_t=\hat{u}(t,x)$

3.2.1 Condiciones de primer orden

A partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, se sigue que u es la única variable, pues x y t son fijos, y las funciones $F,\hat{J},\mu^{u}$ y σ^{u} se consideran como dadas. Dados el supuesto que la regla de control $\hat{u}$ maximiza la ecuación, entonces se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden en $\hat{J}$,

$$0=F\left(t,X_t^{u},u_t\right)+\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{u}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{u}\right)}{\partial x}\mu^{u}\left(t,X_t^{u}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{J}\left(t,X_t^{u}\right)}{\partial x^2}\sigma^{u}\left(t,X_t^{u}\right)^2.$$

Al derivar dicha ecuación respecto a la variable de control u, se tiene la condición de primer orden

$$0=\frac{F\left(t,X_t^{u},u_t\right)}{\partial u}+\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{u}\right)}{\partial u\partial t}+\frac{\partial\hat{J}\left(t,X_t^{u}\right)}{\partial u\partial x}\mu^{u}\left(t,X_t^{u}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{J}\left(t,X_t^{u}\right)}{\partial u\partial x^2}\sigma^{u}\left(t,X_t^{u}\right)^2 \quad (10)$$

La ecuación (10), condicionada por las funciones $F,\hat{J}$ (junto con sus derivadas parciales), μ^{u} y σ^{u}, caracteriza al control óptimo $\hat{u}$ en función de x,t y $\hat{J}$; es decir $\hat{u}=\hat{u}(t,x,\hat{J})$.

Para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman y encontrar la trayectoria óptima de control, teóricamente se procede a resolver por el método de funciones en variables separables (en un producto). Para el tipo de aplicaciones que se requieren en las ciencias económicas, existen algunos tipos de funciones en las que, a pesar de no ser triviales, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman tiene una solución analítica.

3.2.2 Teorema de verificación para la programación dinámica

Obsérvese que el teorema 1 muestra que la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es una condición necesaria que satisfará la función de valor óptimo $\hat{J}$, a continuación, se enuncia el teorema que muestra que la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es condición suficiente para resolver el problema de control óptimo.

<u>Teorema 2. Teorema de verificación</u>

Suponga que se tienen las funciones $H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right)$ y $g(t,x)$, tales que

1. H satisface la integral de Itô y es solución de la EDP Hamilton-Jacobi-Bellman, es decir

$$0=\max_{\mathrm{u}_s \in \mathrm{U}|_{s\in[t,T]}}\left[F\left(t, X_t^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_t\right)+\frac{\partial H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial t}+\frac{\partial H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x}\mu^{\mathrm{u}}\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x^2}\sigma^{\mathrm{u}}\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right)^2\right]$$

$$\text{para toda pareja } (x,t)\in(0,T)\times\mathbb{R}$$

$$H\left(T, X_T^{\mathrm{u}}\right)=\Phi\left(X_T^{\mathrm{u}}\right) \text{ para toda } x\in\mathbb{R}$$

2. La función g es una regla de control admisible.
3. Para cada $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}$, (t,x) fijo pero arbitrario, el máximo en la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman es alcanzado por la elección $\mathrm{u}_t = g(t,x)$

Por lo tanto, se sostiene lo siguiente:

1) La función de valor óptimo $\hat{J}$ del problema de control, está dada por

$$\hat{J}\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right)=H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right)$$

2) Existe una regla de control óptima $\hat{\mathrm{u}}$ tal que $\hat{\mathrm{u}}(t,x)=g(t,x)$

La demostración del Teorema de Verificación es la siguiente:

Supóngase que H y g son dadas como se enunció anteriormente. Se elige una regla de control arbitraria u ,tal que $\mathrm{u}(t,x)\in \mathrm{U},\forall(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}$, y un punto fijo (t,x). Se define el proceso X_t^{u} en el intervalo $[t,T]$ como la solución de la ecuación

$$
\begin{aligned}
dX_s^{\mathrm{u}} &= \mu^{\mathrm{u}}(s, X_s^{\mathrm{u}})dt + \sigma^{\mathrm{u}}(s, X_s^{\mathrm{u}})dW_t \\
X_t^{\mathrm{u}} &= x
\end{aligned} \tag{11}
$$

Obsérvese primero que

$$
\begin{aligned}
H\left(T, X_T^{\mathrm{u}}\right) &= H\left(t+(T-t), X_{t+(T-t)}^{\mathrm{u}}\right) = H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) + \vartriangle H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) \\
&= H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) \\
&+\int_t^T \left\{ \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial s} + \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x} \mu^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x^2} \sigma^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)^2 \right\} ds \\
&+\int_t^T \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x} \sigma^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right) dW_s.
\end{aligned}
$$

(12)

Ahora bien, como H es solución de la EDP Hamilton-Jacobi-Bellman, y por el supuesto 1. del Teorema de verificación se tiene

$$
F\left(t, x, \mathrm{u}\right) + \frac{\partial H\left(t, x\right)}{\partial t} + \frac{\partial H\left(t, x\right)}{\partial x} \mu^{\mathrm{u}}\left(t, x\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H\left(t, x\right)}{\partial x^2} \sigma^{\mathrm{u}}\left(t, x\right)^2 \leq 0
$$
$$
\forall\ \mathrm{u} \text{ tal que } \mathrm{u}(s, y) \in \mathrm{U}, \text{ con } (s, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}.
$$

Entonces, para cada s, se cumple que

$$
F\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s\right) + \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial s} + \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x} \mu^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x^2} \sigma^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)^2 \leq 0.
$$

(13)

Dada la condición de frontera de la EDP Hamilton-Jacobi-Bellman y las ecuaciones (12) y (13), se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T F\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s\right) ds + \int_t^T \left\{ \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial s} + \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x} \mu^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x^2} \sigma^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)^2 \right\} ds \\
&+\int_t^T \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x} \sigma^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right) dW_s \leq \int_t^T \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x} \sigma^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right) dW_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_t^T F\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s\right) ds + H\left(T, X_T^{\mathrm{u}}\right) - H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) \leq \int_t^T \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x} \sigma^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right) dW_s \\
&\int_t^T F\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s\right) ds + \Phi\left(X_T^{\mathrm{u}}\right) - H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) \leq \int_t^T \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x} \sigma^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right) dW_s \\
&H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) \geq \int_t^T F\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s\right) ds + \Phi\left(X_T^{\mathrm{u}}\right) - \int_t^T \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial X_s^{\mathrm{u}}} \sigma^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right) dW_s,
\end{aligned}
$$

al tomar valor esperado se tiene

$$
\begin{aligned}
H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) &\geq E\left[\int_t^T F\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s\right) ds + \Phi\left(X_T^{\mathrm{u}}\right)\right] - E\left[\int_t^T \frac{\partial H\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right)}{\partial x} \sigma^{\mathrm{u}}\left(s, X_s^{\mathrm{u}}\right) dW_s\right] \\
&= E\left[\int_t^T F\left(s, X_s^{\mathrm{u}}, \mathrm{u}_s\right) ds + \Phi\left(X_T^{\mathrm{u}}\right)\right] \\
&= J(t, x, \mathrm{u}),
\end{aligned}
$$

como se tomó una regla de control u arbitraria, se concluye que

$$
H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) \geq \max J(t, x, \mathrm{u}) = \hat{J}\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right). \tag{14}
$$

Ahora, suponga que se elige una regla de control $\mathrm{u}(t,x) = g(t,x)$, dado por supuesto el inciso 3. del Teorema de verificación, de manera análoga se obtiene

$$
F\left(t, x, g\right) + \frac{\partial H\left(t, x\right)}{\partial t} + \frac{\partial H\left(t, x\right)}{\partial x} \mu^{g}\left(t, x\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H\left(t, x\right)}{\partial x} \sigma^{g}\left(t, x\right)^2 = 0,
$$

lo cual conduce a la igualdad

$$
H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) = E\left[\int_t^T F\left(s, X_s^{g}, g_s\right) ds + \Phi\left(X_T^{g}\right)\right] = J(t, x, g). \tag{15}
$$

Dado que $\hat{J}\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right)$ es la función de valor óptima se tiene que

$$
\hat{J}\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) \geq J\left(t, x, g\right), \tag{16}
$$

pero al unir las ecuaciones (14), (15) y (16) se sigue

$$H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) \geq \hat{J}\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) \geq J\left(t, x, g\right) = H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right),$$

es decir,

$$H\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) = \hat{J}\left(t, X_t^{\mathrm{u}}\right) = J\left(t, x, g\right)$$

Por tanto, $H = \hat{J}$, lo que significa que la función H que satisface la EDP Hamilton-Jacobi-Bellman es cumplirá también ser la función de valor óptimo y g es la regla de control óptima bajo la que se optimiza la función de valor.

Al unir los resultados del Teorema 1 y del Teorema 2 se concluye que, bajo las condiciones citadas en los teoremas, satisfacer la EDP Hamilton-Jacobi-Bellman es equivalente a definir la función de valor óptimo.

Capítulo 4. Modelo de Black-Scholes-Merton para valuar opciones europeas mediante un enfoque de control óptimo estocástico

4.1 Descripción del problema

Se considera un agente económico que toma decisiones de inversión y consumo en un intervalo de tiempo fijo $[0,T]$. En el tiempo $t=0$ el agente posee la riqueza inicial A_0 , y durante el intervalo de tiempo buscará distribuir su riqueza entre inversión y consumo, de modo que su riqueza permanezca positiva y tal que maximice su utilidad total esperada y descontada por el consumo de un bien genérico

Suponga que la utilidad total del agente económico está dada por:

$$E\left[\int_0^T F(c_t,t)dt+\Phi(A_T)\mid I_0\right],$$

En donde F es la función de utilidad por el consumo, Φ es la función de retiro, que denota la utilidad de tener algún recurso al final del periodo, I_0 es la información relevante para el agente al tiempo $t=0$, y A_T es la riqueza del agente al tiempo fijo T.

Se supone la existencia de un sistema bancario en el que se puede prestar y pedir prestado a la tasa de interés $r>0$ libre de riesgo de incumplimiento y continua en todos los plazos.

4.1.1 Descripción analítica de las hipótesis

El agente invertirá en un portafolio que consta de un activo sin riesgo y dos activos con la misma fuente de riesgo, de modo que una parte de su riqueza la destina a una cuenta de ahorro en un banco, otra parte a una acción que no genera dividendos y otra parte la invierte en un contrato de opción *call* europea, o de compra, sobre dicha acción.

La cuenta de ahorro le paga al agente una tasa de interés constante $r > 0$, libre de riego de incumplimiento. Por lo que el saldo de ahorrar B_0 por un periodo de tiempo t es $B_t = B_0 e^{rt}$, el cual puede expresarse como una ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$dB_t = rB_t dt \quad \text{con } B_0 \text{ dado,}$$

por tanto, el rendimiento de la cuenta de ahorro está dado por:

$$dR_B := \frac{dB_t}{B_t} = rdt \quad . \tag{17}$$

El precio de la acción sigue la dinámica de un movimiento browniano geométrico con tendencia μ y volatilidad σ, lo cual significa que es modelado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad ,$$

de modo que el rendimiento de la acción está dado por:

$$dR_S := \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad , \tag{18}$$

donde W_t es un movimiento browniano unidimensional, definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $\left(\Omega, F, \left(\tilde{F}_t^W\right)_{t\in[0,T]}, \mathrm{P}\right)$.

El contrato de opción *call* europea tiene como precio $V_t(S_t, t)$ al tiempo t. El rendimiento del contrato estará dado por el cambio porcentual de la prima, es decir,

$$dR_V := \frac{dV_t}{V_t} \quad , \tag{19}$$

donde dV_t se obtiene por el lema de Itô de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
dV_t &= \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}dS_t + \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^{\,2}}dS_t dS_t \\
&= \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^{\,2}}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right)^2 \\
&= \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\mu S_t dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^{\,2}}\left(\mu^2 S_t^{\,2} dtdt + 2\mu\sigma S_t^{\,2} dW_t dt + \sigma^2 S_t^{\,2} dW_t dW_t\right) \\
&= \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\mu S_t dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^{\,2}}\sigma^2 S_t^{\,2} dt
\end{aligned}
$$

$$
dV_t = \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^{\,2}}\sigma^2 S_t^{\,2}\right)dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t \ . \qquad (20)
$$

Si se denotan

$$
\mu_V = \frac{1}{V_t}\left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^{\,2}}\sigma^2 S_t^{\,2}\right) \quad \text{y} \quad \sigma_V = \frac{1}{V_t}\left(\frac{\partial V_t}{\partial S_t}\sigma S_t\right), \qquad (21)
$$

se sigue que

$$
dV_t = V_t \mu_V dt + V_t \sigma_V dW_t \quad \text{y} \quad dR_V = \mu_V dt + \sigma_V dW_t \, .
$$

Se supone que la riqueza será invertida únicamente en el portafolio, sin haber otras fuentes de ingresos. Las proporciones de la riqueza que se destinarán a cada activo son: θ_{1t} a la acción, θ_{2t} a la opción *call* europea y $1-\theta_{1t}-\theta_{2t}$ al activo sin riesgo; donde θ_{1t} y θ_{2t} serán procesos estocásticos en el intervalo $[0,T]$. En lo siguiente, c_t será un proceso estocástico en el intervalo $[0,T]$ que denota la tasa de consumo, o el cambio instantáneo en el consumo, y se le impone la restricción $c_t \geq 0$, $\forall t \geq 0$.

Adicionalmente, se supone que todas las estrategias de consumo e inversión son autofinanciables, y también que las negociaciones se llevan a cabo en forma continua (los mercados nunca cierran), sin incurrir en ningún momento en costos por comisiones a agentes de casa de bolsa ni pagos de impuestos a autoridades fiscales, es decir, que las transacciones se harán de manera continua sin incurrir un gasto o bonificación por dichos movimientos. Se supone también que las ventas en corto son permitidas e ilimitadas hasta donde las condiciones de frontera del problema asociado así lo permitan.

4.1.2 Restricción presupuestal intertemporal del agente

Se representa la riqueza del consumidor al tiempo t mediante $A_t = A(S_t, V_t, t)$, y tomando en cuenta las proporciones de riqueza destinadas a cada activo se tiene que la dinámica del proceso de la riqueza A_t está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} dA_t &= \theta_{1t} A_t dR_S + \theta_{2t} A_t dR_V + (1-\theta_{1t}-\theta_{2t}) A_t dR_B - c_t dt \\ &= \theta_{1t} A_t \left(\mu dt + \sigma dW_t\right) + \theta_{2t} A_t \left(\mu_V dt + \sigma_V dW_t\right) + (1-\theta_{1t}-\theta_{2t}) A_t r dt - c_t dt \\ &= A_t \left(\theta_{1t}\mu + \theta_{2t}\mu_V + (1-\theta_{1t}-\theta_{2t}) r - \frac{c_t}{A_t}\right) dt + A_t \left(\theta_{1t}\sigma + \theta_{2t}\sigma_V\right) dW_t, \end{aligned}$$

lo cual se puede expresar como

$$dA_t = A_t \mu_A dt + A_t \sigma_A dW_t, \tag{22}$$

donde

$$\mu_A = \theta_{1t}\mu + \theta_{2t}\mu_V + (1-\theta_{1t}-\theta_{2t}) r - \frac{c_t}{A_t} \quad \text{y} \quad \sigma_A = \theta_{1t}\sigma + \theta_{2t}\sigma_V. \tag{23}$$

4.1.3 Tiempo de paro y problema de control óptimo estocástico

Además de los supuestos anteriores, es necesario agregar una restricción que permita continuar con el problema de inversión únicamente si la riqueza se mantiene positiva, pues si en algún momento la riqueza se hace cero o incluso negativa, se degeneraría el problema en $[0,T]$.

De modo que, τ será el tiempo de paro que indique si la riqueza se vuelve cero antes del tiempo T. En consecuencia, se restringe el dominio a $D = [0,T] \times \left\{A_t \mid A_t > 0\right\}$,y τ se define como

$$\tau = \min\left[\inf\left\{t > 0 \mid A_t = 0\right\}, T\right].$$

La interpretación de esta restricción al modelo es que cuando el proceso de riqueza toque la frontera del dominio *D*, es decir, sea cero, entonces la actividad (el proceso de toma de decisiones) se termina y ya no habrá herencia, de modo que es natural suponer que Φ sea cero.

En consecuencia, se establece formalmente el problema de maximización de utilidad del consumidor como un problema de control óptimo estocástico.

$$\begin{aligned}
&\underset{\theta_{1t},\theta_{2t},c_t}{Maximizar}\, E\left[\int_0^{\tau} F(c_t,t)dt \mid I_0\right] \\
&dA_t = A_t\mu_A dt + A_t\sigma_A dW_t \\
&A_0 = a_0 \\
&c_t \geq 0, \forall t \geq 0
\end{aligned} \qquad (24)$$

donde, como se indicó antes, la función $F(t,c_t)$ es una función de utilidad asociada a la satisfacción del agente por el consumo.

En el problema de control óptimo estocástico, se buscará la secuencia de decisiones óptimas relacionada con el comportamiento de la acción. Es decir que se buscarán los procesos estocásticos θ_{1t} , θ_{2t} y c_t óptimos, que maximicen la utilidad total esperada dada la información inicial I_0 y el comportamiento de la acción, y por ende del derivado.

4.2 Programación dinámica: ecuación diferencial parcial Hamilton-Jacobi-Bellman

Para encontrar la solución al problema (24), las proporciones óptimas en el portafolio de inversión y el consumo óptimo del agente, se define el funcional de valor de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
J(A_t,t) &= \underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,\tau]}}{Max} E\left[\int_t^{\tau} F(c_s,s)ds \mid I_t\right] \\
&= \underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,\tau]}}{Max} E\left[\int_t^{t+dt} F(c_s,s)ds + \int_{t+dt}^{\tau} F(c_s,s)ds \mid I_t\right].
\end{aligned} \tag{25}
$$

Si al primer sumando se le aplica el teorema del valor medio del cálculo integral[16]

$$\int_t^{t+dt} F(c_s,s)ds = F(c_t,t)dt + o(dt)\,.$$

Y al segundo sumando se le aplica recursividad, se obtiene

$$\underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max} E\left[F(c_t,t)dt + o(dt) + J(A_t + dA_t, t+dt) \mid I_t\right].$$

Al emplear la expansión en serie de Taylor al segundo sumando, se tiene

$$J(A_t,t) = \underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max} E\left[F(c_t,t)dt + o(dt) + J(A_t,t) + dJ(A_t,t) + o(dt) \mid I_t\right]$$

$$0 = \underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max} E\left[F(c_t,t)dt + o(dt) + dJ(A_t,t) \mid I_t\right],\text{[17] si } dt \to 0$$

Se calcula $dJ(A_t,t)$ con el lema de Itô

$$0 = \underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max} E\left[F(c_t,t)dt + o(dt) + \frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t}dt + \frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}dA_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2}(dA_t)^2 \mid I_t\right]$$

$$
\begin{aligned}
0 = \underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max} E\Bigg[& F(c_t,t)dt + o(dt) + \frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t}dt + \frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}(A_t\mu_A dt + A_t\sigma_A dW_t) \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2}A_t^2\sigma_A^{\,2}dt \mid I_t\Bigg]
\end{aligned}
$$

---

[16] Por el teorema de valor medio se tiene que

$$\int_t^{t+dt} F(c_s,s)ds = F(c_\xi,\xi)dt = F(c_t,t)dt + \left(F(c_\xi,\xi) - F(c_t,t)\right)dt = F(c_t,t)dt + o(dt) \quad \text{con } \xi \in (t, t+dt)$$

[17] Se utiliza la propiedad de las funciones *o*-minúscula $o(dt) + o(dt) = o(dt)$

$$0=\underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max} E\left[F(c_t,t)dt+o(dt)+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}A_t\sigma_A dW_t\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}A_t\mu_A+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2}A_t^2\sigma_A{}^2\right)dt\mid I_t\right].$$

Ahora se calcula el valor esperado de la ecuación, como $dW_t \sim N(0,dt)$, se elimina el término browniano, y se obtiene

$$0=\underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max}\left[F(c_t,t)dt+o(dt)+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t}dt+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}A_t\mu_A dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2}A_t^2\sigma_A{}^2 dt\right].$$

Dicha expresión se divide entre dt y consecuentemente se toma el limite cuando $dt\to 0$

$$\frac{0}{dt}=\underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max}\left[F(c_t,t)+\frac{o(dt)}{dt}+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}A_t\mu_A+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2}A_t^2\sigma_A{}^2\right]$$
$$\lim_{dt\to 0}0=\lim_{dt\to 0}\underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max}\left[F(c_t,t)+\frac{o(dt)}{dt}+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}A_t\mu_A+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2}A_t^2\sigma_A{}^2\right]$$
$$0=\underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max}\left[F(c_t,t)+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}A_t\mu_A+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2}A_t^2\sigma_A{}^2\right].$$

A esta ecuación se le anexan las condiciones de frontera, y así se obtiene la Ecuación Diferencial Parcial (EDP) Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

$$\begin{cases}0=\underset{\theta_{1t},\theta_{2t}\in\mathbb{R},c_s|_{[t,t+dt]}}{Max}\left[F(c_t,t)+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}A_t\mu_A+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2}A_t^2\sigma_A{}^2\right]\\ J(T,A_T)=0,\forall a\in\mathbb{R}\\ J(t,0)=0\end{cases} \tag{26}$$

La primera condición indica que, si se busca la utilidad total a partir del tiempo final la ecuación será igual a 0, y la segunda condición incorpora el tiempo de paro.

4.2.1 Función de utilidad

La función de utilidad descontada que se propone para la solución del problema es de la forma $F(c_t,t)=e^{-\rho t}L(c_t)$, con $L(c_t)$ miembro de la familia de funciones de utilidad HARA (Merton, 1990), por lo que la función propuesta será:

$$F(c_t,t)=e^{-\rho t}\frac{c_t^{\gamma}}{\gamma} \qquad 0<\gamma<1 \ .$$

Esta función de utilidad posee además la propiedad de que

$$\lim_{c_t^+\to 0} L'(c_t)=\lim_{c_t^+\to 0} c_t^{\gamma-1}=+\infty \ ,$$

lo que forzará a que el consumo sea positivo a través del horizonte de planeación. Como $F(c_t,t)$ es de clase C^2, entonces existen los máximos locales y es posible suponer un máximo interior c_t, por lo que se buscarán θ_{1t}, θ_{2t} y c_t que maximizan la ecuación (26), por lo que se cumple la igualdad de la ecuación, y si se sustituye la función de utilidad en la EDP de HJB, se llega a

$$\begin{aligned}0&=e^{-\rho t}\frac{c_t^{\gamma}}{\gamma}+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}A_t\left[\theta_{1t}\mu+\theta_{2t}\mu_V+(1-\theta_{1t}-\theta_{2t})r-\frac{c_t}{A_t}\right]\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2}A_t^2\left[\theta_{1t}^2\sigma^2+2\theta_{1t}\theta_{2t}\sigma\sigma_V+\theta_{2t}^2\sigma_V^2\right].\end{aligned} \tag{27}$$

4.2.2 Condiciones de primer orden

Ahora se encontrará la expresión de θ_{1t}, θ_{2t} y c_t que maximizan la ecuación (26), por lo que se obtienen las condiciones de primer orden[18], dicho proceso trata sobre derivar la ecuación respecto a la variable que se busca y despejar dicha variable.

[18] En el planteamiento inicial se tiene que F depende únicamente de (c_t,t), y al momento de plantear la función recursiva de Hamilton-Jacobi-Bellman se fijan dentro de la ecuación las variables θ_{1t}, θ_{2t} y c_t. Se pueden extender los parámetros de F a $(\theta_{1t},\theta_{2t},c_t,t)$ y después, se aplica a F el "Teorema de máximos y

Se obtiene c_t

$$
\begin{aligned}
0 &= e^{-\rho t} c_t^{\gamma-1} - \frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t} \\
c_t &= \left(e^{\rho t} \frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Se obtiene θ_{1t}

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t} A_t(\mu - r) + \frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2} A_t^2 \theta_{1t} \sigma^2 + \frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2} A_t^2 \theta_{2t} \sigma \sigma_V \\
\theta_{1t} &= -\frac{\dfrac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}(\mu - r) + \dfrac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2} A_t \theta_{2t} \sigma \sigma_V}{\dfrac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2} A_t \sigma^2}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Se obtiene θ_{2t}

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t} A_t(\mu_V - r) + \frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2} A_t^2 \theta_{1t} \sigma \sigma_V + \frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2} A_t^2 \theta_{2t} \sigma_V^2 \\
\theta_{2t} &= -\frac{\dfrac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t}(\mu_V - r) + \dfrac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2} A_t \theta_{1t} \sigma \sigma_V}{\dfrac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2} A_t \sigma_V^2}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Enseguida, se busca la función $J(A_t,t)$ que satisfaga la EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman. Cada vez que una ecuación diferencial parcial no tenga derivadas mixtas, su solución será un producto de funciones separables, por lo que la función $J(A_t,t)$ será de la forma:

---

mínimos locales", es decir $DF \equiv \overline{0}$. Por un lado, se tiene que $F(\theta_{1t},\theta_{2t},c_t,t) = e^{-\rho t}\frac{c_t^{\gamma}}{\gamma}$, y por otro se tiene que

$$F(\theta_{1t},\theta_{2t},c_t,t) = -\left(\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t} A_t \left[\theta_{1t}\mu + \theta_{2t}\mu_V + (1-\theta_{1t}-\theta_{2t})r - \frac{c_t}{A_t} \right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^2} A_t^2 \left[\theta_{1t}^2\sigma^2 + 2\theta_{1t}\theta_{2t}\sigma\sigma_V + \theta_{2t}^2\sigma_V^2 \right] \right),$$

por lo que al derivar ambas interpretaciones de la función e igualarlas a $\overline{0}$, se obtienen los resultados deseados.

$$J(A_t,t)=e^{-\rho t}h(t)\frac{A_t^{\gamma}}{\gamma}. \tag{31}$$

Dada la condición de frontera $J(A_T,T)=0$, se agrega la condición $h(T)=0$, y se tienen las derivadas parciales de la función:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial t} &= \frac{A_t^{\gamma}}{\gamma}e^{-\rho t}\left(h'(t)-\rho h(t)\right)\\
\frac{\partial J(A_t,t)}{\partial A_t} &= A_t^{\gamma-1}e^{-\rho t}h(t)\\
\frac{\partial^2 J(A_t,t)}{\partial A_t^{2}} &= (\gamma-1)A_t^{\gamma-2}e^{-\rho t}h(t).
\end{aligned} \tag{32}$$

Si se sustituyen las derivadas de (32) en (28), (29) y (30), se obtienen las proporciones óptimas del portafolio:

$$\begin{aligned}
\hat{c}_t &= A_t h(t)^{\frac{1}{\gamma-1}}\\
\hat{\theta}_{1t} &= -\frac{\mu-r+(\gamma-1)\sigma\sigma_V\theta_{2t}}{(\gamma-1)\sigma^2}\\
\hat{\theta}_{2t} &= -\frac{\mu_V-r+(\gamma-1)\sigma\sigma_V\theta_{1t}}{(\gamma-1)\sigma_V^{\,2}}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Observe que $\hat{c}_t$ es lineal a la riqueza A_t. A diferencia del marco determinista, en el que la trayectoria óptima de consumo es fija y prescrita, en el marco estocástico no se puede determinar la trayectoria óptima de consumo, pues el consumo óptimo se convierte una variable aleatoria dependiente de la riqueza, lo cual está más acorde con la realidad.

En conclusión, considerar un modelo con activos riesgosos conlleva a cambios cualitativos y cuantitativos en las decisiones óptimas de consumo. También, se observa que las proporciones óptimas $\hat{\theta}_{1t}$ y $\hat{\theta}_{2t}$ forman un sistema redundante de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{1t}+\frac{\sigma_V\hat{\theta}_{2t}}{\sigma} &= -\frac{\mu-r+(\gamma-1)\sigma\sigma_V\hat{\theta}_{2t}}{\sigma^2}+\frac{\sigma_V\hat{\theta}_{2t}}{\sigma}=\frac{\mu-r}{(1-\gamma)\sigma^2}\\
\hat{\theta}_{2t}+\frac{\sigma\hat{\theta}_{1t}}{\sigma_V} &= -\frac{\mu-r+(\gamma-1)\sigma\sigma_V\hat{\theta}_{1t}}{\sigma_V^{\,2}}+\frac{\sigma\hat{\theta}_{1t}}{\sigma_V}=\frac{\mu_V-r}{(1-\gamma)\sigma_V^{\,2}}.
\end{aligned}$$

Al hacer

$$\lambda = \frac{\mu - r}{(1-\gamma)\sigma^2} \qquad \lambda_V = \frac{\mu_V - r}{(1-\gamma)\sigma_V{}^2} \qquad \zeta = \frac{\sigma_V}{\sigma} \ , \tag{34}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{1t} + \zeta\hat{\theta}_{2t} &= \lambda \\ \frac{\hat{\theta}_{1t}}{\zeta} + \hat{\theta}_{2t} &= \lambda_V \end{aligned} \tag{35}$$

lo cual implica que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta^{-1} & 1 \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{1t} \\ \hat{\theta}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda_V \end{pmatrix}$$

Sin embargo, de (35) se tiene que $\det(D) = 0$, por lo que el sistema tiene una infinidad de soluciones, esto significa que los premios al riesgo de mercado para la acción y para la opción son combinación lineal uno del otro, lo cual es lógico, pues la opción hereda propiedades del proceso de precios de la acción.

4.3 Premio al riesgo de mercado de una opción Europea tipo *call*

Del sistema de ecuaciones (35) se tiene que

$$\lambda = \zeta\lambda_V \ ,$$

lo que quiere decir que, los premios al riesgo del mercado de la acción y de la opción coinciden. Así,

$$\begin{aligned} \frac{\mu - r}{(1-\gamma)\sigma^2} &= \frac{\sigma_V}{\sigma} \frac{\mu_V - r}{(1-\gamma)\sigma_V{}^2} \\ (\mu - r)\frac{\sigma_V}{\sigma} &= \mu_V - r. \end{aligned}$$

Si se sustituyen las definiciones de σ_V y μ_V dadas en (21), se obtiene

$$(\mu - r)\frac{\frac{1}{V_t}\left(\frac{\partial V_t}{\partial S_t}\sigma S_t\right)}{\sigma} = \frac{1}{V_t}\left(\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) - r$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} r S_t - V_t r = 0. \qquad (36)$$

La cual es la Ecuación Diferencial Parcial de Black-Scholes (1973) y Merton (1973), con la que se valúa la opción europea de compra y a la que para tal efecto se le impondrá la condición de frontera correspondiente al valor intrínseco de dicho derivado. Por lo que se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} r S_t - V_t r = 0 \\ V_T(S_T, T) = \max\left\{S_T - K, 0\right\} \end{cases} \qquad (37)$$

en donde K denota el precio de ejercicio de la opción *call* europea en el tiempo de ejercicio T.

4.4 Solución al problema de control óptimo

Para concluir la solución al problema de control óptimo estocástico, se requiere encontrar la función $h(t)$ definida en $J(A_t, t)$, por lo que se aplicará el Teorema de verificación al problema de control. Como se describió antes, la regla óptima de consumo lineal $\hat{c}_t$ es lineal en la riqueza A_t y se supone una solución de esquina para las proporciones óptimas $\hat{\theta}_{1t}$ y $\hat{\theta}_{2t}$ asignadas al activo riesgoso y a su opción europea, de tal forma que $\hat{\theta}_{1t}$=0 y $\hat{\theta}_{2t}$=1. Esto quiere decir que el portafolio constará únicamente del contrato de opción, lo cual se interpreta en el modelo como lo que el agente estaría dispuesto a pagar por la opción europea. Si en la ecuación (27) se sustituyen los valores de $\hat{c}_t$ (33), μ_V, σ_V (21), $\hat{\theta}_{1t} = 0$ y $\hat{\theta}_{2t}$ =1, y las derivadas parciales en μ_V y σ_V se evalúan en el dinero, es decir $S_t = K$, las cuales se denotan mediante

$$\mu_V\Big|_{S_t=K} = \bar{\mu}_V \quad \text{y} \quad \sigma_V\Big|_{S_t=K} = \bar{\sigma}_V,$$

se obtiene

$$0 = e^{-\rho t}\frac{A_t^{\gamma}}{\gamma}h(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + e^{-\rho t}\frac{A_t^{\gamma}}{\gamma}\left(h'(t)-\rho h(t)\right) + e^{-\rho t}A_t A_t^{\gamma-1}h(t)\left(\bar{\mu}_V - h(t)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right)$$
$$+e^{-\rho t}\frac{1}{2}(\gamma-1)A_t^{\gamma}h(t)\bar{\sigma}_V^{\,2}$$

$$0 = A_t^{\gamma}\left[h'(t)+h(t)\left(-\rho+\gamma\bar{\mu}_V+\frac{\gamma}{2}(\gamma-1)\bar{\sigma}_V^{\,2}\right)+(1-\gamma)h(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]. \tag{38}$$

Si se denotan los coeficientes de la ecuación como las siguientes constantes,

$$m_1 = -\rho+\gamma\bar{\mu}_V+\frac{\gamma}{2}(\gamma-1)\bar{\sigma}_V^{\,2} \quad \text{y} \quad m_2 = 1-\gamma\ , \tag{39}$$

se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$0 = A_t^{\gamma}\left[h'(t)+m_1 h(t)+m_2 h(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]. \tag{40}$$

Si esta ecuación se cumple para todas A_t y t, y se considera la condición de frontera descrita en (31), entonces $h(t)$ debe resolver la ecuación

$$h'(t)+m_1 h(t) = -m_2 h(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad h(T)=0\ , \tag{41}$$

la cual es una ecuación de Bernoulli con $p(t)=m_1, q(t)=m_2$ y $n=\gamma/(\gamma-1)$. Para encontrar la solución a la ecuación de Bernoulli, se sustituye $z=h(t)^{1-n}=h(t)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$, de donde se tiene que $h(t)=z^{1-\gamma}$ y $h'(t)=(1-\gamma)z^{-\gamma}z'$. Al sustituir las funciones anteriores en (41) se obtiene

$$(1-\gamma)z^{-\gamma}z' + m_1 z^{1-\gamma} = -m_2 z^{-\gamma},$$

y al multiplicar ambos lados de la ecuación por $\dfrac{z^{\gamma}}{1-\gamma}$,

$$z' + bz = -1 \qquad b = \frac{m_1}{1-\gamma} \qquad z(T) = 0\,, \tag{42}$$

así,

$$\begin{aligned}
&e^{b(t-T)}z' + be^{b(t-T)}z = -e^{b(t-T)}\\
&\left(e^{b(t-T)}z(t)\right)' = -e^{b(t-T)}\\
&\int_t^T \left(e^{b(s-T)}z(s)\right)'ds = -\int_t^T e^{b(s-T)}ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{b(t-T)}z(t) &= \frac{1}{b}\left(1-e^{b(t-T)}\right)\\
z(t) &= \frac{1}{b}\left(e^{b(T-t)}-1\right).
\end{aligned}$$

Por lo que, si se sustituye $z(t)$ en $h(t)$, se tiene

$$h(t) = z(t)^{1-\gamma} = \frac{1}{b^{1-\gamma}}\left(e^{b(T-t)}-1\right)^{1-\gamma}\,, \qquad h(T) = 0\,. \tag{43}$$

Entonces ha sido demostrado que si $J(A_t,t)$ está dada por

$$J(A_t,t) = e^{-\rho t}h(t)\frac{A_t^{\gamma}}{\gamma},$$

con (43) definida como la solución de $h'(t) + m_1 h(t) = -m_2 h(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, y si se definen $\hat{\theta}_{1t}$, $\hat{\theta}_{2t}$ y $\hat{c}_t$ por

$$\begin{aligned}
\hat{c}_t &= A_t h(t)^{\frac{1}{\gamma-1}}\\
\hat{\theta}_{1t} &= -\frac{\mu - r + (\gamma-1)\sigma\sigma_V\theta_{2t}}{(\gamma-1)\sigma^2}\\
\hat{\theta}_{2t} &= -\frac{\mu_V - r + (\gamma-1)\sigma\sigma_V\theta_{1t}}{(\gamma-1)\sigma_V{}^2},
\end{aligned}$$

entonces $J(A_t,t)$ satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman y $\hat{\theta}_{1t}$, $\hat{\theta}_{2t}$ y $\hat{c}_t$ son las proporciones y consumo que optimizan el problema de control óptimo con horizonte temporal de magnitud estocástica.

Para un análisis de la relación entre las reglas de control óptimas y sus variables, véase el análisis de estática comparativa de las soluciones óptimas en el Apéndice.

Conclusiones

La teoría basada en optimización dinámica estocástica ofrece a la economía un análisis sustentado en la incertidumbre presente en la realidad. En especial, la teoría de control óptimo estocástico permite el planteamiento de modelos en los que se puede controlar la dinámica de las proporciones de inversión y el gasto del agente, en un problema de cartera óptima, para que así, se genere la mayor remuneración esperada.

El problema a tratar se plantea mediante la Teoría de Control óptimo estocástico en tiempo continuo y se resuelve mediante programación dinámica estocástica, el objetivo central es encontrar las trayectorias óptimas de los procesos que pueden ser controlados, para maximizar la utilidad total esperada. En el proceso de solución, el problema se modifica cambiando su estructura estocástica a una determinista cuando se deriva la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. En términos generales, es bien sabido que la función HJB no tiene una solución analítica, pero al suponer que el precio de la acción se comporta como un movimiento Browniano geométrico y que la función de utilidad es de la forma $V(c_t,t)=e^{-\rho t}f(c_t)$, con f miembro de la familia de funciones HARA, se puede obtener la expresión de la función objetivo J que resuelve analíticamente la ecuación HJB y por ende el problema de optimización.

Se encuentran las trayectorias que satisfacen la ecuación HJB y, gracias al Teorema de Verificación, se sabe que dichas trayectorias son las trayectorias óptimas del problema de control óptimo estocástico. Al analizar las soluciones, se encuentra que el consumo es lineal en la riqueza pero estocástico, lo cual es natural porque así se presentan las variaciones en los mercados económicos y financieros, y que las proporciones de inversión dirigidas a la acción y a la opción sobre la acción forman un sistema redundante, que no depende de la riqueza (siempre que sea positiva) y con premios al riesgo proporcionales, resultando finalmente ser no estocásticos.

Mediante un análisis de premio al riesgo del sistema de ecuaciones resultante de los controles θ_{1t} y θ_{2t}, se deduce la Ecuación Diferencial Parcial parabólica no lineal de Black-Scholes-Merton (EDP B-S-M) con la que se puede valuar la opción europea de compra, que es instrumento de inversión del agente económico. Es importante resaltar que esta EDP B-S-M se ha obtenido mediante supuestos de racionalidad económica.

Se plantea en una agenda futura de investigación utilizar esta metodología para evaluar diferentes derivados financieros implementando parámetros estocásticos de diferente índole.

Apéndice

Análisis de estática comparativa a las soluciones óptimas del problema de control óptimo estocástico

En el análisis de estática comparativa se derivan las reglas de control óptimas respecto a las variables de las que dependen, para así, analizar el efecto que causa el cambio instantáneo de las variables sobre una regla de control óptima.

Al analizar el consumo óptimo $\hat{c}_t$ se tiene

$$\frac{\partial \hat{c}_t}{\partial A_t} = h(t)^{\frac{1}{\gamma-1}} = b\left(e^{b(T-t)} - 1\right)^{-1} > 0, \qquad t \in [0,T),$$

por lo que se observa que el consumo óptimo tiene una relación directa con la riqueza, A_t, dado que $b > 0$ y $\left(e^{b(T-t)} - 1\right)^{-1} > 0 \ \ \forall t \in [0,T)$

Si se aplica el análisis de estática comparativa a la proporción óptima asignada a la opción, $\hat{\theta}_{1t}$, respecto a la variable μ se tiene que

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{1t}}{\partial \mu} = \frac{-1}{(\gamma-1)\sigma^2} > 0,$$

lo que indica que la proporción óptima $\hat{\theta}_{1t}$ tiene una relación directa con la tendencia de la acción, μ.

Si se realiza el análisis respecto a la tasa libre de riesgo, r, se obtiene

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{1t}}{\partial r} = \frac{1}{(\gamma-1)\sigma^2} < 0,$$

lo que implica una relación inversa entre la proporción óptima $\hat{\theta}_{1t}$ y la tasa de mercado libre de riesgo, r.

Al analizarse respecto a la proporción de inversión destinada a la opción call, $\hat{\theta}_{2t}$, se tiene

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{1t}}{\partial \theta_{2t}} = -\frac{\sigma_V}{\sigma} < 0,$$

por lo que se observa que la proporción óptima destinada a la acción, $\hat{\theta}_{1t}$, tiene una relación con la proporción óptima destinada a la opción, $\hat{\theta}_{2t}$, ya que $\sigma_V, \sigma > 0$. Aunque esto ya se sabía pues $\hat{\theta}_{1t}$ y $\hat{\theta}_{2t}$ forman un sistema redundante con coeficientes positivos, (35).

Se continua con el análisis de estática comparativa de la proporción óptima asignada a la opción, $\hat{\theta}_{2t}$, respecto algunas de sus variables.

Si se realiza un análisis respecto a la tendencia del precio de la opción, μ_V, se obtiene

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{2t}}{\partial \mu_V} = \frac{-1}{(\gamma - 1)\sigma_V{}^2} > 0,$$

que indica una relación directa entre la proporción óptima $\hat{\theta}_{2t}$ y la tendencia del precio de la opción, μ_V.

Al hacer el análisis respecto a la tasa de mercado libre de riesgo, r, se tiene que

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{2t}}{\partial r} = \frac{1}{(\gamma - 1)\sigma_V{}^2} < 0,$$

lo que implica una relación inversa entre la proporción óptima $\hat{\theta}_{2t}$ y la tasa libre de riesgo, r.

Al realizar el análisis respecto a la proporción óptima destinada a la acción, $\hat{\theta}_{1t}$, se tiene

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{2t}}{\partial \theta_{1t}} = -\frac{\sigma}{\sigma_V} < 0,$$

que indica una relación inversa entre la proporción óptima destinada a la opción, $\hat{\theta}_{2t}$, y la proporción óptima destinada a la acción, $\hat{\theta}_{1t}$, lo cual confirma lo encontrado en el análisis de estática comparativa de $\hat{\theta}_{1t}$ respecto a $\hat{\theta}_{2t}$.

Bibliografía

- Apostol, T. M. (1967). *Calculus, One-Variable Calculus, with an introduction to Linear Algebra* (Vol. 1). Waltham, Estados Unidos de América: Blaisdell Publishing Company.
- Bellman, R. (1953). *An introduction to the theory of dynamic programming.* The Rand Corporation.
- Björk, T. (2004). *Arbitrage theory in continuous time.* Estocolmo, Suecia: Oxford University Pres.
- Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales.* Boston University: International Thomson Editores.
- Cerda, E. (2001). *Optimización dinámica.* Madrid, España: Prentice Hall.
- Comisión Nacional del Mercado de Valores. (2006). *Guía informativa de la CNMV: Qué debo saber de... Opciones y Futuros.* Ciudad de México, México: Artegraf, S.A.
- Comisión Nacional del Mercado de Valores. (n.d.). *Productos derivados*. Retrieved from Comisión Nacional del Mercado de Valores: https://www.cnmv.es/portal/inversor/Derivados.aspx
- Comisión Nacional del Mercado de Valores. (n.d.). *Productos derivados*. Retrieved from Comisión Nacional del Mercado de Valores: https://www.cnmv.es/Portal/Inversor/Opciones.aspx
- Equipo Editorial Explorando México. (n.d.). *La crisis de la Comercial Mexicana en 2008*. Retrieved from Explorando México: http://www.explorandomexico.com.mx/about-mexico/6/331
- Grabinsky, G. (2013). *Teoría de la medida.* Ciudad de México, México: Facultad de ciencias, UNAM.

- Hull, J. (1993). *Options, Futures, and Other Derivative Securities.* University of Toronto, Toronto, Canada: Prentice Hall.
- Jasso, M. (2008, Octubre 10). *Comercial Mexicana se declara en quiebra*. Retrieved from Crónica: http://www.cronica.com.mx/notas/2008/390133.html
- Kummer, S., & Pauletto, C. (2012). The History of Derivatives: A few milestones. *EFTA Seminar on Regulation of Derivatives Markets.* Zurich, Suiza: Policy and Trade in Services Division, State Secretariat for Economic Affairs SECO.
- MacKenzie, D. (2006). *An engine, not a camera: How financial models shape markets.* (W. E. Bijker, W. B. Carlson, & P. Trevor, Eds.) Londres, Reino Unido: The MIT Press. doi:ISBN: 9780262134606
- Martínez Palacios, M. T. (2008). *Un análisis comparativo de diversas metodologías para la valuación de opciones (Tesis de maestría).* Ciudad de México, México: Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Martínez Palacios, M. T. (2012). *Modelo Macroeconómico de riesgos de mercado y política fiscal incierta (Tesis de doctorado).* Ciudad de México, México: Escuela Superior de Economía, IPN.
- Martínez Palacios, M. T., & Venegas-Martínez, F. (2011, Diciembre 3). Control óptimo estocástico en la enseñanza de la economía matemática. *Educación Matemática, 23*(3), pp. 147-181.
- Martínez Palacios, M. T., Ortiz-Ramírez, A., & Mártinez-Sánchez, J. F. (2017). Valuación de opciones asiáticas con precio flotante igual a la media aritmética: un enfoque de control óptimo estocástico. *Revista Mexicana de Economía y Finanzas, Vol 12, No. 3*, pp. 389-404.
- Merton, R. C. (1990). *Continuous-time finance.* Cambridge, Reino Unido: Basil Blackwell.
- MexDer. (n.d.). *Contratos listados en MexDer*. Retrieved from MexDer: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/contratos_opcion

- MexDer. (n.d.). *La bolsa de derivados*. Retrieved from MexDer: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/bolsa_derivados
- Miersemann, E. (2012). *Partial Differential Equations, Lecture notes.* Leipzig, Sajonia, Alemania: Leipzig University. Retrieved from http://www.math.uni-leipzig.de/~miersemann/pdebook.pdf
- Páez Cárdenas, J. (2012). *Cálculo diferencial de varias variables.* Ciudad de México, México: Facultad de Ciencias, UNAM.
- Planet Math. (2013, Marzo 22). *Bernoulli equation*. Retrieved from Planet Math: http://planetmath.org/BernoulliEquation
- Planet Math. (2013, Marzo 22). *Linear differential equation of first order*. Retrieved from Planet Math: http://planetmath.org/lineardifferentialequationoffirstorder
- Rincón, L. (2007). *Curso intermedio de probabilidad.* Ciudad de México, México: Facultad de Ciencias, UNAM.
- Rincón, L. (2012). *Introducción a los procesos estocásticos.* Ciudad de México, México: Facultad de Ciencias, UNAM.
- Ross, K. (n.d.). *Stochastic control in continuous time.* Retrieved from Stanford University: http://statweb.stanford.edu/~kjross/Stat220notes.pdf
- Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis* (3ra ed.). McGraw-Hill.
- Saglietti, S. J. (2009). *Pequeñas pertubaciones aleatorias de sistemas dinámicos (Tesis de licencitura).* Buenos Aires, Argentina: Universidad de Buenos Aires.
- Stover, C. (n.d.). *Little-O Notation*. Retrieved from MathWorld--A Wolfram Web Resource: http://mathworld.wolfram.com/Little-ONotation.html
- Varian, H. (1978). *Análisis Microeconómico.* Barcelona, España: Antoni Vosch.
- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre.* Ciudad de México, México: Cengage Lerning.

- Weistein, E. W. (n.d.). *Mean-Value Theorem*. Retrieved from MathWorld--A Wolfram Web Resource: http://mathworld.wolfram.com/Mean-ValueTheorem.html
- Wickens, M. (2008). *Macroeconomic Theory: A dynamic general equilibrium approach.* Woodstock, Inglaterra, Reino Unido: Princeton University Press.
- World Federetion of exchanges. (2017). *WFE IOMA 2016 derivatives report.* Retrieved from https://www.world-exchanges.org/home/index.php/research/wfe-research#d