Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Filosofía y Letras
Colegio de Filosofía

La venganza de Russell:
los costos de las soluciones no clásicas a las paradojas conjuntistas

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE:

Licenciada en Filosofía

PRESENTA:

Claudia Lucía Tanús Pimentel

TUTOR:

Dr. Luis Estrada González

Ciudad Universitaria, Cd. de México 2018

Índice general

Introducción **3**

1. La paradoja de Russell **9**
1.1. Introducción 9
1.2. La Ley V de Frege y la paradoja de Russell 10
1.3. Las soluciones de Frege y Russell 12
1.4. Otras soluciones clásicas 13
1.5. Conclusiones 15

2. Soluciones no clásicas a la paradoja de Russell **17**
2.1. Introducción 17
2.2. Problemas con las soluciones clásicas 19
2.3. Curry y Moh Shaw-Kwei 22
2.4. Soluciones a las paradojas 24
2.4.1. La estrategia material 25
2.4.2. La estrategia relevantista 26
2.4.3. La estrategia de teoría de modelos 27
2.4.4. La metateoría paraconsistente 28
2.5. Conclusiones 30

3. Las nuevas paradojas conjuntistas **31**
3.1. Introducción 31
3.2. La paradoja de Hinnion-Libert 32
3.3. La paradoja de Grišin 34
3.4. Soluciones a las paradojas 37
3.4.1. La estrategia no contractivista 37
3.4.2. La estrategia no transitivista 40
3.4.3. La estrategia no reflexiva 42

3.4.4. La estrategia sin Debilitamiento 43
3.5. La trivialidad de la teoría intuitiva de conjuntos 44
3.6. Conclusiones 45

Conclusiones **47**

A. Cálculo de Secuentes **53**

Agradecimientos

En primer lugar debo agradecer a mi familia y en particular a mi mamá Carolina ya que sin ella no habría llegado a donde estoy ahora. Gracias mamá por la formación que me diste, por tu amor, tu apoyo incondicional, y por darme un buen ejemplo. Asimismo quiero agradecer a mi tía María Estela y a mi hermano Marco Antonio por su cariño y por cuidarme siempre.

También quiero agradecer a Gabriel Ramos por ser un gran amigo desde que inicié la carrera. Tus consejos, tanto en lo académico como en lo personal, han sido de gran ayuda para mí. Gracias por estar en mis peores ratos y por darme ánimos cuando pasaba por momentos difíciles. También gracias por ser un increíble profesor de lógica. Estoy segura de que mi interés por esta área se debe en gran medida a ti y al cariño con el que das clases. Gracias por el entrenamiento para las Olimpiadas, por el exorcismo y por sacarme de Mordor. Te quiero.

Debo mucho de mi formación académica al seminario Bestias Proposicionales. David, gracias por ser una persona tan dulce y por toda la paciencia que me has tenido en estos 6 años. Sé que sin ti y sin tu familia me hubiera costado más trabajo terminar la licenciatura. En verdad debo buena parte de mis estudios profesionales a ti y estoy enormemente agradecida por ello. Dzahy, agradezco que siempre estuvieras dispuesta a ayudarme y a escucharme. Gracias por ser tan buena colega, espero que sigamos creciendo y aprendiendo juntas. Bosualdo, eres el mejor compañero que existe y te agradezco por escucharme y brindarme tu apoyo siempre que lo necesité. Julio, sé que no hablamos demasiado pero también te agradezco por compartir conmigo estos años en el seminario y por recibirnos siempre en tu casa. Rodolfo, gracias por ser mi maestro y mi amigo. También gracias a los miembros itinerantes del seminario. Todos ustedes tienen un lugar especial en mi corazón.

Este trabajo se realizó en el marco del proyecto PAPIIT IA401117 “Philosophical Aspects of Contra-Classical Logics”. Agradezco al proyecto y al seminario FiCiForTes ya que todos sus integrantes también fueron de gran ayuda para mí. Elisángela, en verdad has sido una de mis amigas más cercanas a lo largo de este proceso. Gracias por leerme y por señalarme mis errores. Te quiero. Gracias Manuel por siempre estar dispuesto a ayudarme con las dudas que tenía y por echarme porras. Aunque parezca sorprendente quiero agradecerle a María por las sugerencias y por haberme llevado a Luis. También gracias a Alejandro, Francisco y a César por escucharme y leerme.

Debo gran parte de mis conocimientos en lógica al profesor Cristian Gutiérrez. Muchas gracias por darme ánimos y por tus enseñanzas, tanto como alumna como adjunta de tus clases. Gracias Samuel y Chucho por alentarme a seguir adelante.

Agradezco también a mis profesores Favio Miranda, Arturo Yáñez, Ivonne Pallares y Axel Barceló, todos ustedes me han dado valiosas enseñanzas tanto dentro como fuera del aula. Gracias Dra. Olbeth Hansberg por la ayuda y por permitirme trabajar con usted.

Este trabajo no hubiera sido posible sin los amigos que estuvieron a mi lado a lo largo de los años como Viviana y toda la TP/Waffles. Gerardo del Mal, gracias por ser un paciente maestro y un gran amigo. Marco Cárcamo, gracias por apoyarme en mis peores momentos y al inicio de mi carrera. Jude, gracias por siempre estar al pendiente. Ivan, gracias por siempre creer en mí y por esa vez que te dormiste y me dejaste trabajar (aunque sé que no la recuerdas). Muchísimas gracias por tu amistad en general, Diego. Eres muy importante para mí y confío en que juntos derrocaremos al capitalismo y al heteropatriarcado o moriremos en el intento. Jez y Rex, gracias por su hospitalidad y por tratar de descifrar las pruebas conmigo. Gracias por tratar de buscar un libro en ruso, Jerry. Gracias por las porras, Moy y Rackso.

Finalmente, pero para nada menos importante, quiero agradecer a mi asesor Luis Estrada González. Te agradezco por ser un excelente profesor, por mostrarme el camino verdadero (o sea el de todo), por tenerme paciencia al momento de enseñarme estos temas y por no dejar que me rindiera. Gracias por impulsarme a participar en congresos, por las críticas y por las muchas risas. Eres, en definitiva, una de las personas que más aprecio y que más admiro.

Introducción

La teoría de conjuntos ingenua incluía al axioma de Comprehensión de forma irrestricta, según el cual toda propiedad determina un conjunto. En adelante y salvo indicación de lo contrario, siempre que mencione "teoría de conjuntos", "teoría de conjuntos ingenua" o "teoría de conjuntos intuitiva" estaré hablando de aquella que tenga como axiomas tanto Comprehensión como Extensionalidad en sus formas irrestrictas. En cálculo de secuentes estos dos axiomas se pueden expresar como sigue

(Comp)

$$\frac{\Gamma, \Phi(\alpha) \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \in \{x : \Phi(x)\} \vdash \Delta}\,(\in I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi(\alpha), \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \in \{x : \Phi(x)\}, \Delta}\,(\in D)$$

(Ext)

$$\frac{\Gamma, x \in \alpha \vdash x \in \beta, \Delta \qquad \Gamma, x \in \beta \vdash x \in \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha = \beta, \Delta}\,(\text{Ext} \in)$$

Como consecuencia del axioma de Comprehensión ingenuo se podía formular una paradoja que se conoce como la paradoja de Russell. Ésta consiste en definir un conjunto $\mathfrak{R}$ al cuál sólo pertenecen los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos, llevando a una contradicción cuando se considera si el conjunto $\mathfrak{R}$ debe pertenecer o no a sí mismo. Encontrar una contradicción en una teoría es preocupante puesto que cualquier proposición puede seguirse de ella.

La pertinencia de esta investigación radica en las dificultades que supone tener una paradoja como consecuencia de una teoría, en este caso de la teoría de conjuntos. Como caso paradigmático se encuentra la paradoja de Russell. Dado que la teoría de conjuntos es muy importante porque permite analizar otras ramas de las matemáticas, evitar las paradojas que llevan a la trivialización podría tener como resultado que la teoría de conjuntos fuese coherente y consistente, además de recuperar las intuiciones que se tenían originalmente. Es por esto que se ha recurrido a diferentes estrategias, tanto clásicas como no clásicas, para solucionarla.

Llamaré *estrategia clásica* a aquella que consiste en evitar la paradoja de Russell restringiendo el axioma de Comprehensión. La estrategia clásica consigue conservar la lógica clásica subyacente a la teoría de conjuntos pero pierde el principio que define la noción de conjunto, lo cual no es un problema menor. En vista de esto surgió una segunda estrategia que tiene como objetivo conservar el principio de Comprehensión. Para lograr esto sin que la teoría sea trivial, la lógica subyacente no puede ser clásica y esta modificación tampoco sucede sin costos. Me referiré a esta solución como *estrategia no clásica*.

Así, algunos teóricos no clásicos han optado por debatir el significado de la negación involucrada en la formulación de esta paradoja, tal como lo explica Restall (2007, p. 2). Sin embargo, existen otras maneras de trivializar la teoría de conjuntos sin tener que derivar una contradicción. La paradoja de Curry (cf. *Íbid.*)es una instancia de esto, al igual que la versión generalizada de ésta: la paradoja de Shaw-Kwei (1954). La paradoja de Curry puede aparecer en la teoría de conjuntos definiendo un conjunto $\mathfrak{C} = \{x : x \in x \supset p\}$ donde p es una proposición cualquiera. Obteniendo p se puede trivializar la teoría aunque no haya una negación involucrada en la formulación de este conjunto, a diferencia de como sucedia en el conjunto de Russell.

La paradoja de Curry no es el único obstáculo que enfrenta la estrategia no clásica. La paradoja de Hinnion-Libert es otra manera de definir a la paradoja de Russell sin utilizar conectitvas, tal como se expone en Restall (2009). Para esto, la prueba incorpora al axioma de Comprehensión, Extensionalidad, las nociones de Pertenencia e Identidad, y las reglas estructurales de Corte, Contracción y Debilitamiento.

El conjunto de Hinnion-Libert se puede expresar como $\mathfrak{H} = \{x : \{y : x \in x\} = \{y : p\}\}$ donde, tal como sucedía con la paradoja de Curry, p es una proposición arbitraria que puede trivializar la teoría. Una característica importante de esta paradoja es que no se vale del uso de conectivas en el lenguaje objeto, haciendo que las soluciones que señalan como culpables a las conectivas o a las reglas para emplearlas sean inútiles en este caso.

Por otra parte, la paradoja de Grišin surge de tomar la teoría de conjuntos BCK y añadir el axioma de Extensionalidad. Debido a que los elementos empleados en las pruebas de las cuatro paradojas mencionadas son diferentes de los utilizados en la de Russell, las soluciones que se podían tener para ésta no son aplicables a las paradojas de la estrategia no clásica.

Como estas cuatro paradojas no comparten las mismas conectivas ni los mismos supuestos, ninguna de las estrategias que se venían empleando hasta el momento para resolver la paradoja de Russell serán de utilidad para solucionar las paradojas de Curry, Moh Shaw-Kwei, Hinnion-Libert y de Grišin. Por esta razón vale la pena investigar qué estrategias podrían desarrollarse para solucionar todas estas paradojas.

Lo que busco, entonces, es saber si existe una solución satisfactoria y unificada para estas paradojas. Una solución *satisfactoria* consiste en bloquear las pruebas de las paradojas, así como en dar cuenta de por qué debe rechazarse alguna regla operacional, estructural, o cualquier otra noción que haya dado lugar a la paradoja en primer lugar. Si además esta solución puede ser aplicada para todas las paradojas, consideraré que es una solución *unificada*. En este caso, habría que analizar si hay estrategias que expliquen qué debe ser modificado en la teoría de conjuntos intuitiva para que no puedan derivarse estas paradojas. Así, la pregunta que abordo en esta investigación es si puede darse una solución satisfactoria y unificada a las paradojas de la teoría de conjuntos no clásicas.

Como alternativa a las soluciones clásicas que surgieron a partir de la paradoja de Russell, algunos teóricos se han dedicado a investigar de qué manera podría rescatarse la teoría de conjuntos intuitiva. En *In Contradiction*, Priest dedica el capítulo 2 a la exposición de las razones por las cuales apostar por una estrategia distinta a la clásica para tratar la teoría de conjuntos es viable. Además, en su capítulo 18 expone estrategias para desarrollar una alternativa no clásica que rescate la teoría intuitiva de conjuntos.

En cuanto a las soluciones, se ha considerado como una opción viable el rechazo de alguna regla estructural. Esto tendría como ventaja que más de una paradoja sería bloqueada y así la solución podría ser unificada. Como prospectos se encuentran las posturas no contractivistas, no transitivistas, no reflexivas y sin Debilitamiento.

En el texto de Mares y Paoli del 2014, "Logical consequence and the paradoxes", se propone una división de las paradojas de teoría de conjuntos en dos grupos: las paradojas conectivas y las estructurales. Las primeras se deben a un error en la manera de interpretar o asignar valores a las conectivas involucradas y que las segundas se deben a un error en la forma de entender lo que la noción de consecuencia lógica permite probar. Mares y Paoli proponen que ambas pueden ser solucionadas utilizando una lógica subestructural que no utilice Contracción.

La estrategia no contractivista ha sido de los enfoques más explorados (véase, por ejemplo, el trabajo de Petersen (2000), Zardini (2015), Mares y Paoli (2014)). Esta estrategia consiste en rechazar la regla estructural de Contracción puesto que es un elemento que tienen en común varias paradojas (como por ejemplo la de Curry). Contracción se expresa en secuentes de la siguiente forma:

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\text{Contr. I}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\text{Contr. D})$$

La postura no contractivista también ha sido objetada en vista de que algunos consideran demasiado costoso rechazar Contracción. Uno de sus detractores, Ripley (2015), defiende que es una mejor opción optar por una postura no transitivista, es decir, que rechace la siguiente regla estructural:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Pi \vdash \Sigma}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}\ (\text{Corte})$$

Además de estas dos posturas, se encuentra la postura que rechaza Debilitamiento. Para este punto, me apoyaré de lo expuesto por Paoli (2013) y consideraré si es una opción viable. Otra alternativa es rechazar Reflexividad, lo cual se expone en el artículo de French (2016) "Structural reflexivity and the paradoxes of self-reference". En ese artículo se exponen tres argumentos a favor de la postura no reflexiva que, de ser aceptados, darían razones para optar por esta estrategia para resolver las paradojas. La postura que rechaza Reflexividad consiste en deshacerse de la siguiente regla estructural:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Gamma}\ (\text{Id})$$

También está la opción de deshacerse de Debilitamiento la cual rechaza estas reglas estructurales:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\text{Deb. I.}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\text{Deb. D.})$$

Paoli (2013) explica alguna de las desventajas de esta estrategia. Si bien hay buenas razones para rechazar Debilitamiento, esta regla estructural no aparece en la paradoja de Curry por lo que no la resolvería.

Las soluciones que he mencionado hasta ahora consisten en deshacerse de alguna de las reglas estructurales. Una posibilidad que ha sido investigada es dejar de lado Extensionalidad pero conservar Comprehensión. Petersen (2000) ha considerado esta opción que forma parte de la estrategia no contractivista.

Mi objetivo es contribuir al estudio acerca de las paradojas que afectan a la teoría de conjuntos no clásica, y al de las soluciones de las paradojas que la afectan. Para ello, me propongo estudiar los componentes que dan lugar a las paradojas de Russell, Curry, Moh Shaw-Kwei, Grišin y Hinnion-Libert, y después analizar cuáles de ellos deberían ser modificados para resolverlas. Inevitablemente, esto le dará protagonismo al axioma de Comprehensión y de Extensionalidad, así como las reglas estructurales de Contracción, Corte, Debilitamiento e Identidad puesto que todos estos ingredientes son comunes a las paradojas que trataré en esta tesis. Teniendo ubicadas las nociones involucradas en el surgimiento de estas paradojas, investigaré si el rechazo de alguna de las reglas estructurales permite solucionar todas las paradojas que menciono en este texto y si se pueden dar razones que no parezcan *ad hoc* para rechazar alguno de sus componentes.

Considero que a primera vista parece que rechazar Identidad, Debilitamiento, Contracción o Corte podría solucionar de forma unificada las paradojas de la teoría de conjuntos intuitiva. Sin embargo, deshacerse de alguna de las reglas estructurales tiene consecuencias que no pueden ser pasadas por alto, por lo que estas estrategias terminan por ser descartadas. Dejar de lado cualquiera de las reglas estructurales también requiere una buena justificación para poder considerar que se llegó a una solución unificada y satisfactoria.

Así, incluso si el rechazo de alguno de estos evitara el surgimiento de las paradojas, podría no ser una solución satisfactoria en tanto que los costos de deshacernos de estos principios podría ser mayor al de optar por abandonar la teoría intuitiva de conjuntos. Si pese a esto se optara por continuar aceptando la teoría intuitiva de conjuntos, esto significaría que se debe aceptar la trivialización de esta teoría, lo cual no es una solución satisfactoria para muchos.

Como su título lo indica, esta tesis está inspirada en el artículo de Restall "Curry's Revenge: the costs of non-classical solutions to the paradoxes of self-reference". En esta tesis utilizaré una estrategia similar a la que él emplea. Empezaré por exponer las paradojas a tratar, después señalaré los pasos involucrados y finalmente discutiré las posibles soluciones.

La estructura de la tesis será la siguiente. En el primer capítulo explicaré en qué consiste la paradoja de Russell y las soluciones clásicas a ésta. El segundo capítulo estará centrado en las alternativas no clásicas y se expondrán las paradojas de Curry y de Moh Shaw-Kwei, así como algunas de las soluciones que parecerían adecuadas a primera vista. En el capítulo tres hablaré de las paradojas de Hinnion-Libert y de Grišin, además de las posibles estrategias para resolverlas. Finalmente, decidiré si las soluciones expuestas resuelven las paradojas tratadas, si se deben desarrollar más a fondo las estrategias que han sido propuestas, o si hay un panorama favorable para la solución de las paradojas en cuestión. Esto último lo lograré analizando las consecuencias que tienen las estrategias de solución y considerando si las modificaciones que se tendrían que hacer están debidamente justificadas.

En esta investigación no planeo defender las maneras en las que la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel podría responder a la estrategia no clásica de quedarse con la teoría intuitiva de conjuntos. Tampoco incluiré la exposición de otras paradojas conjuntistas (como la paradoja de Cantor o la de Burali-Forti) y tampoco de paradojas no conjuntistas, aunque estén estrechamente relacionadas (como las paradojas de validez expuestas por Bacon (2015)).

Presenté versiones preliminares del tercer capítulo. Di una presentación basada en las secciones 3.1 a 3.3 en el "XVII Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática" (Puebla, 29 de junio del 2017), y de las secciones 3.1 a 3.4 en el "Primer Congreso de Historia y Filosofía de las Ciencias Formales"(Ciudad de México, 3 de abril del 2018).

Capítulo 1

La paradoja de Russell

1.1. Introducción

Frege estaba interesado en derivar y definir leyes de la aritmética basándose en leyes de la lógica y esto lo llevó a escribir *Fundamentos de la Aritmética* (cf. Zalta (2017)). Lamentablemente, el descubrimiento de la contradicción que surge a partir de la Ley Básica V tenía consecuencias desafortunadas para su proyecto. La contradicción encontrada es conocida como la paradoja de Russell y ésta representó un problema importante para la teoría de conjuntos debido a que involucraba un axioma esencial de la teoría de Frege. En vista de que este problema se considera emblemático, vale la pena preguntarse por los componentes que dieron origen a esta paradoja así como las soluciones que se dieron.

La investigación acerca de los elementos que dan lugar a esta paradoja podría esclarecer qué nociones resultaban conflictivas y si eran las únicas en juego. Por otra parte, analizar las soluciones que dieron Frege y Russell a esta paradoja podría mostrar qué se consideraba importante en la teoría de conjuntos (al menos desde un punto de vista fregeano), mientras que las soluciones posteriores permiten observar el uso de herramientas más actuales que pueden abordar el problema desde otra perspectiva. Considero que es importante investigar las soluciones de la estrategia clásica para dar cuenta de qué se pretendía expresar con la teoría de conjuntos intuitiva y cómo es que las paradojas que se desarrollarán a lo largo de esta tesis pueden entenderse como problemas de venganza de la paradoja de Russell.

En la actualidad es comúnmente aceptado que la teoría de conjuntos se libró de la paradoja de Russell eliminando el componente que, en ese momento, era evidentemente conflictivo, a saber, el axioma de Comprehensión. No obstante, ésta no ha sido la única manera de abordar el problema ni el único enfoque que ha tenido la teoría de conjuntos. Como parte de la estrategia clásica también está la teoría de tipos de Russell (1903, Apéndice B) y las soluciones de von Neumann (1967) y de Quine (1937) que expondré en las secciones 3 y 4, respectivamente.

A lo largo de la segunda sección de este capítulo expongo cómo surgió la paradoja de Russell en el sistema de Frege así como los componentes de ésta. Posteriormente, en la sección 3, explico las soluciones propuestas por Russell y Frege para mostrar la manera en la que se manejó este problema en un primer momento. Finalmente, en la sección cuatro, hablo de las soluciones posteriores a estas que seguían persiguiendo una solución clásica a la paradoja.

En este capítulo no ahondo en la propuesta fregeana sino que me concentro en los aspectos que atañen al surgimiento de la paradoja de Russell. Tampoco pretendo decidir cuál de las soluciones clásicas a esta paradoja podía haber sido más conveniente. Únicamente me limitaré a exponer este problema que se encontró en la teoría de conjuntos en un primer momento para tener un acercamiento a las complicaciones que ha tenido la teoría de conjuntos intuitiva.

1.2. La Ley V de Frege y la paradoja de Russell

En su obra *Fundamentos de la Aritmética*, Frege consideraba a la Ley Básica V como un axioma en su sistema, del cual intentó derivar teoremas para la teoría de números (cf. Zalta (2017)). Desafortunadamente, el axioma V tuvo como consecuencia la paradoja de Russell la cual trivializaba la teoría debido a la contradicción que se puede concluir. Esto se debe a que la lógica clásica valida el principio de explosión, el cual indica que una relación de consecuencia $\vdash$ es explosiva si valida $\{A, \neg A\} \vdash B$ para cualesquiera A y B. Frege buscaba recuperar nociones que él consideraba fundamentales en la matemática pero que junto con el aparato de la teoría de conjuntos dieron lugar a una teoría inconsistente tal como descubrió Russell. En secuentes, la ley V podría formularze como sigue

$$\frac{}{\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) = \alpha' g(\alpha) \equiv \forall x[f(x) = g(x)]}\ (\mathrm{V})$$

En esta formalización se ha reemplazando la igualdad de la formulación original por un bicondicional. Esta ley puede leerse como “el curso de valores de ε es igual al curso de valores de α si y sólo si todos los argumentos de la función f son iguales a los de la función g”. Esto significa que condiciones que hacen verdadera a ε son las mismas que las de α si y sólo si todas las interpretaciones que hacen verdaderas a las funciones a las que ε está asociada, hacen verdadera a las funciones a las que está asociada α.

De la Ley Básica V se desprenden dos corolarios: la ley de extensiones y el principio de Extensionalidad. La ley de extensiones se define como $\exists F \forall x(x \in \varepsilon F \equiv Fx)$.

Esta ley también se conoce como axioma de Comprehensión e indica que para cualquier fórmula $\phi(x)$, existe un conjunto $\{x : \phi(x)\}$ cuyos miembros son aquellos objetos que cumplan con la propiedad ϕ. Otra manera de entender esto es que las propiedades definen conjuntos. El principio de Extensionalidad, por otra parte, es definido como $\forall z(z \in x \equiv z \in y) \supset x = y$. Es decir, si todos los elementos que pertenecen a x pertenecen también a y y viceversa, x y y son iguales. Retomando a (Restall, 2009, p. 10 y 11), podemos expresar Comprehensión y Extensionalidad en secuentes como

(Comp)

$$\frac{\Gamma, \Phi(\alpha) \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \in \{x : \Phi(x)\} \vdash \Delta} (\in I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi(\alpha), \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \in \{x : \Phi(x)\}, \Delta} (\in D)$$

(Ext)

$$\frac{\Gamma, x \in \alpha \vdash x \in \beta, \Delta \qquad \Gamma, x \in \beta \vdash x \in \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha = \beta, \Delta} (Ext \in)$$

Si bien Frege no anticipó el resultado desafortunado que representaba la inconsistencia derivada a partir de la Ley Básica V, Russell se percató de que ésta tenía como resultado una contradicción. La paradoja surge al considerar el concepto "x es una extensión que no es miembro de sí misma". Si x no se perteneciera a sí misma, cuando se evaluase como argumento del concepto se le asignaría el valor Verdadero. Sin embargo, al ser argumento de ese concepto, pertenece a sí misma por lo que se le debería asignar el valor Falso. Si es así, no pertenecería a sí misma.

Consideremos un conjunto $\mathfrak{R}$ definido por la propiedad de '$x \notin x$', es decir $\mathfrak{R} = \{x : x \notin x\}$. Con esta información, la paradoja de Russell puede ser reconstruída en secuentes de la siguiente manera:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \mathfrak{R} = \{x | x \notin x\}}{\vdash x \in \{x : \mathfrak{R}(x)\} \equiv (x \notin x)} (\in \text{D})}{\vdash \mathfrak{R} \in \mathfrak{R} \equiv (\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}) \text{ (*)}} (\text{E. } \forall)}{\vdash \mathfrak{R} \in \mathfrak{R} \supset (\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R})} (\text{Def. } \equiv)}{\vdash \mathfrak{R} \notin \mathfrak{R} \text{ (**)}} (\text{Contr. D}) \qquad \vdash \mathfrak{R} \in \mathfrak{R} \equiv (\mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}) \text{ (*)}}{\vdash \mathfrak{R} \in \mathfrak{R}} (\text{Sep}) \qquad \vdash \mathfrak{R} \notin \mathfrak{R} \text{ (**)}}{\vdash \bot} (\text{Sep})$$

Debido a que el axioma de Comprehensión permite considerar a *todos* los elementos que cumplan la propiedad como elementos del conjunto que se definió, la paradoja surge cuando se analiza si el conjunto $\mathfrak{R}$ pertenece o no a sí mismo, tal como pasaba con el concepto "x es una extensión que no es miembro de sí misma".

Más allá de que la aparición de una contradicción en una teoría que tenga como base a la lógica clásica representa un problema en tanto que atenta con el principio de no contradicción, un problema potencialmente más desastroso es la trivialización de la teoría debido al principio de explosión que también es aceptado en lógica clásica. Con este principio, una vez derivada la contradicción a la que se llega con la paradoja de Russell, la teoría de conjuntos se volvería trivial puesto que cualquier proposición podría ser derivada como consecuencia.

1.3. Las soluciones de Frege y Russell

La paradoja de Russell fue identificada poco antes de que la obra de Frege fuese publicada y tanto Frege como Russell intentaron dar solución a este resultado. Una vez que Russell hizo notar a Frege la inconsistencia que aparecía en su teoría, Frege decidió añadir un apéndice a la segunda edición de su tratado. En éste se postulaba que debía haber una modificación en el criterio de identidad de la Ley V. Javier Castro recupera la modificación hecha por Frege (cf. Castro Albano (2014), p. 193) que se puede expresar en secuentes de la siguiente forma:

$$\frac{}{\vdash \varepsilon x(F(x)) = \varepsilon x(G(x)) \leftrightarrow \forall x[(x \neq \varepsilon x(F(x))) \wedge x \neq \varepsilon x(G(x)) \leftrightarrow (F(x) \leftrightarrow G(x)]} \text{(V*)}$$

Esta nueva versión puede ser leída como "las extensiones de F son iguales a las extensiones de G si y sólo si los argumentos no son iguales a las extensiones de F ni a las de G cuando éstas son las mismas". Dicho de otro modo, este nuevo principio indica que las evaluaciones de F y G son las mismas si y sólo si cuando F y G son iguales los objetos que cumplen con estas propiedades no son sus evaluaciones.

Desafortunadamente, este intento por evitar la paradoja modificando la Ley Básica V no fue exitoso ya que la tensión se mantenía. La ley V* expresaba que había un único objeto lo cual era incompatible con la idea de que debía haber una infinidad de objetos que correspondieran a los números naturales (cf. (Frege, 1903, p. XV)). En todo caso, esta nueva formulación sólo hacía más complicada la prueba de la inconsistencia pero no se deshacía de ella. Frege no intentó explorar otras alternativas además de esta solución sino que se limitó a señalar el problema que había encontrado Russell y a aceptar la falla en su sistema.

Por su parte, Russell propuso su Teoría de Tipos ramificada para enfrentar la paradoja. Ésta permitía analizar los objetos de acuerdo a una jerarquía en la cual se tenía a los individuos en un primer nivel, a los conjuntos en el segundo, a los conjuntos de conjuntos en el tercero y así sucesivamente. De esta forma, un conjunto sólo puede tener como elementos conjuntos de una jerarquía menor y expresiones como '$x \in x$' o '$x \notin x$' no son consideradas como oraciones correctas ya que el subconjunto (la primera aparición de x) no es de un nivel de jerarquía menor que el conjunto al que pertenece (la segunda aparición). Una ventaja de esta solución es que rescataba la idea de Frege de que los conjuntos son extensiones de conceptos, la cual era importante para el proyecto logicista.

Además de esta propuesta, Russell identificó que la noción de clase era conflictiva puesto que comprendía una multiplicidad demasiado grande. Schindler expone la definición de clase dada por Russell como "todos los términos que pueden satisfacer alguna función proposicional" (Schindler (2014), p. 204). Esta noción, a su vez, involucraba al axioma de Comprehensión y por ello consideró a este último como uno de los posibles problemas a tratar. Una de las maneras en las que se podía solucionar la paradoja era restringiendo el axioma de Comprehensión de tal suerte que no pudiese ser aplicado en instancias conflictivas como en la creación de conjuntos del tipo de Russell.

1.4. Otras soluciones clásicas

Si bien las soluciones propuestas por Russell fueron bien recibidas, ha habido otras alternativas que retoman algunos objetivos de las soluciones russellianas. Incluso puede considerarse que la paradoja de Russell se evade con la formulación de Cantor puesto que el axioma de Comprehensión no formaba parte de las nociones básicas de su teoría (cf. Irvine y Deutsch (2016)). En lugar de que Comprehensión definiera la noción de conjunto, Cantor entendía conjunto como "una colección 'definida por la enumeración de sus términos"' (Lavine, 2009, p. 77). Aunque posteriormente Cantor dice que entiende por conjunto "cualquier multiplicidad que puede ser pensado como una unidad, i.e., cualquier dominio de elementos definidos que por medio de una ley se puede ligar en un todo" (Cantor, 1915, p. 85), es importante explicar que Cantor suele utilizar la palabra "ley" para hablar de una sucesión natural o de un "conteo" (cf. *Íbid*, p. 85).

Antes del descubrimiento de la paradoja de Russell, Cantor había considerado que había propiedades (como la de ser cardinal, por ejemplo) que formaban objetos demasiado grandes como para ser considerados conjuntos y que probablemente llevarían a una inconsistencia (cf. Irvine y Deutsch (2016)) Además de esto, Cantor pensaba que la derivación de la paradoja de Russell en el sistema fregeano sólo mostraba que ese conjunto es una clase propia, es decir, una clase que no es un conjunto. Una definición de clase se puede retomar de Holmes (2017): Una clase x es un conjunto siempre y cuando haya una clase y tal que $x \in y$. Zermelo (2017) había identificado también el problema de incluir el axioma de Comprehensión y por ello decide dejarlo fuera de su teoría por lo que su formulación no se veía afectada por la paradoja de Russell (cf. Castro Albano (2014) p. 185-186). La teoría de conjuntos de Zermelo termina siendo comúnmente aceptada dejando atrás el problema de la paradoja descubierta por Russell. De hecho, Zermelo logró evadir el problema recurriendo a principios diferentes. De esta manera, en vez de recurrir a (Comp), se vale del esquema[1] de separación el cual se formula a continuación:

$$\frac{}{\forall A \exists B \forall x (x \in B \equiv (x \in A \wedge \phi))} \text{(Sep)}$$

donde B no incluye variables libres. Esto se puede leer como "para cualquier conjunto A, existe un conjunto B tal que cualquier objeto pertenece a B si y sólo si pertenece a A y cumple que ϕ" (cf. Irvine y Deutsch (2016)). A simple vista, este axioma se asemeja a (Comp) y no parece evitar el problema de la paradoja puesto que parece que A puede ser sustituido por U (el conjunto Universo) y ϕ por $x \notin x$. Así, se tendría que todas las cosas (en particular B) pertenecen a sí mismas si y sólo si pertenecen al Universo y no pertenecen a sí mismas. Sin embargo, dada la teoría de Zermelo, esto sólo mostraría que los supuestos que se tenían eran incorrectos y que U no es un conjunto. Tal como mencioné anteriormente, Zermelo consideraba que por esta misma razón, la paradoja de Russell únicamente ponía en evidencia que un conjunto como el planteado para esa paradoja no podría existir.

Además de esta propuesta, von Neumann (1967) propone una teoría que no recurre a tipos como la de Russell pero que establece ciertas distinciones entre conjuntos y clases. Para poder decir que un objeto x es miembro de un conjunto y, x tiene que pertenecer a una clase. Si no pertenece a alguna clase, no puede estar en una relación de pertenencia como $x \in y$. Los conjuntos están definidos entonces por sus miembros y todos los objetos que no pertenecen a alguna clase son llamados "clases propias" (cf. Irvine y Deutsch (2016)). Estas distinciones evitan el problema de la paradoja de Russell puesto que la clase de Russell no sería más que una clase propia. De esta forma, aunque parezca que la paradoja podría resurgir para clases, los resultados paradójicos indicarían que se está tratando con clases que no son elementos de una clase, es decir, son clases propias.

Otra solución puede ser encontrada en las teorías de zigzag según las cuales se busca que sólo las estructuras sintácticas simples establezcan una clase. Una instancia de éstas es expuesta por Quine en *New Foundations for Mathematical Logic*, donde se expone la idea de "trabajar con un lenguaje no tipificado, pero al mismo tiempo trabajar con fórmulas

[1]Entiendo un esquema de axioma como una versión general de un axioma. Mientras que el esquema es una fórmula en el metalenguaje, un axioma es una fórmula en el lenguaje de la lógica empleada.

que pueden ser vistas como una 'traducción' de una fórmula tipificada"[2] (Schindler (2014), p. 209). Esto supone, tal como lo plantea Quine en su artículo, que todas las proposiciones que consistan sólo en lenguaje matemático y lógico pueden ser traducidas a proposiciones que únicamente utilicen lenguaje lógico (cf. Quine (1937), p. 71).

Quine hace notar que la teoría de tipos de Russell puede ser ambigua en tanto que no es claro cómo se obtienen los tipos de cada variable pues parecen depender de contextos. Así, las variables involucradas en las relaciones de pertenencia podrían obtener sus tipos de forma casi arbitraria. Con este problema en mente, Quine propone considerar oraciones estratificadas, las cuales otorgan el tipo a las variables tomando en cuenta que la relación de pertenencia sólo ocurra cuando $n \in n + 1$ (cf. *Ibíd*, p. 78). Schindler explica que una fórmula A estará estratificada "si y sólo si hay una función f que asigna números naturales a las variables de A de modo que siempre que $x = y$ es una subfórmula de A, $f(x) = f(y)$, y siempre que $x \in y$ es una subfórmula de A, $f(y) = f(x) + 1$" (Schindler (2014), p. 209).

Dicho de otro modo, las igualdades estarían en un mismo nivel de la estratificación pero no sucederá lo mismo para la relación de pertenencia. Cuando una fórmula esta estratificada, sus variables están en una función que les asigna un número. En el caso de fórmulas como $x = y$, cada lado de la igualdad el número debe ser el mismo. Para $x \in y$, la variable de la izquierda debe estar asignada a un número menor que la de la derecha. Esto tiene como consecuencia que no exista una clase de Russell puesto que $x \in x$ tendría asignado el mismo número para cada variable.

1.5. Conclusiones

Una vez expuestas algunas nociones básicas que dieron lugar a la paradoja de Russell, se puede examinar lo que se ha considerado problemático en la teoría. Las soluciones enunciadas apelan, en su mayoría, a la reformulación de ciertas nociones básicas de la teoría de conjuntos: la modificación de la Ley V por parte de Frege, la revisión de la noción de clase hecha por Russell y posteriormente por von Neumann o la postulación de axiomas que reemplacen Comprehensión como el axioma de separación de Zermelo.

Además de estas estrategias, Russell y Quine plantean distintas maneras de hacer una jerarquización según la cual expresiones conflictivas como la que suscitaba la paradoja de Russell no sean gramaticalmente correctas y, por tanto, no tengan como consecuencia una contradicción.

En general, debido a la gran aceptación de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel,

[2]Ésta y todas las traducciones subsecuentes son traducciones mías de los textos citados a menos que se especifique lo contrario.

parece que la solución estándar es rechazar o limitar el axioma de Comprehensión. Esto no significa que no exista otra manera de solucionar el problema de la trivialización. En el siguiente capítulo hablaré de alternativas a la estrategia clásica.

Capítulo 2

Las soluciones no clásicas a la paradoja de Russell

2.1. Introducción

Aunque la teoría de Zermelo-Fraenkel fue ampliamente aceptada, no es claro que no incluir al axioma de Comprehensión como parte de la teoría de conjuntos haya sido la mejor estrategia posible para tratar el problema de la paradoja de Russell. Más aún, no es del todo claro que el elemento más conflictivo que tiene un rol en la derivación de la paradoja de Russell sea este axioma. El rechazo al principio de Comprehensión y el resto de soluciones tratadas en el capítulo anterior tienen en común que buscan mantener la lógica subyacente a la teoría de conjuntos, es decir, la lógica clásica. Las soluciones tratadas, por tanto, tienen el objetivo de preservar la lógica y modificar algún otro componente que no afecte otros supuestos centrales en la lógica empleada. Muchos filósofos de la lógica se han percatado de esto y han optado por un camino diferente para tratar el problema de la paradoja de Russell. Me referiré a estas alternativas como las *soluciones no clásicas*.

Una de las principales razones que se tiene para querer buscar alternativas a las soluciones ya dadas es que la jerarquía cumulativa tiene objeciones que no pueden ignorarse fácilmente. En *In Contradiction* (2006) Priest defiende que la falta del axioma de Comprehensión es un problema grave, puesto que la definición de conjunto que da la jerarquía cumulativa no es intuitiva ni recupera todo lo que Comprehensión permitía. Debido a que la solución clásica tiene objeciones importantes, se puede considerar que la jerarquía cumulativa no es suficiente para subsanar la falta del axioma de Comprehensión ingenuo. Además de esto, debemos enfrentar *problemas de venganza*, que son aquellos en los que una vez dada una solución para una paradoja, aparece otra con elementos en común pero que de alguna forma deriva de la inclusión de los mecanismos que solucionaban la primera paradoja en cuestión.

En la teoría de conjuntos existen casos de problemas de venganza de la paradoja de Russell. En este capítulo se estudiarán dos paradojas que surgen en la teoría de conjuntos: la paradoja de Curry y la de Moh Shaw-Kwei. Ambas surgen de la posibilidad de definir conjuntos con mecanismos autorreferenciales y, como la paradoja de Russell, tienen como resultado la trivialización de la teoría. Las paradojas de Curry y Moh Shaw-Kwei surgen pese a las soluciones dadas y utilizan el vocabulario de la estrategia con la que se pretendía resolver la paradoja de Russell, por lo que se consideran como problemas de venganza. Además de esto, ambas paradojas ponen en evidencia problemas en la lógica subyacente (*i.e.* lógica clásica) que se habían pasado por alto incluso después de las distintas propuestas para solucionar la paradoja de Russell.

El objetivo principal de este capítulo es mostrar de qué otras maneras la teoría de conjuntos está en riesgo de ser trivializada cuando se opta por una estrategia diferente, es decir, cuando se mantiene el axioma de Comprehensión pero se cambia la lógica. Mostrando a las paradojas de Curry y de Moh Shaw-Kwei como problemas de venganza, será evidente que las soluciones clásicas para la paradoja de Russell son un recurso insuficiente para tratar a estas paradojas y por ello habrá que investigar otras estrategias que impidan la trivialización de la teoría de conjuntos. Todo esto se abordará con el fin de analizar si hay una solución que pueda deshacerse tanto de la paradoja de Russell como de la de Curry y a la de Moh Shaw-Kwei.

Lo anterior podría ser logrado una vez encontrados algunos puntos en común entre estas paradojas y analizando estrategias no clásicas, es decir, estrategias que permitan rechazar principios de la lógica clásica en la medida en la que que esto sea de utilidad para solucionar el problema de las paradojas. Estas soluciones deberían, además, solucionar las tres paradojas que he tratado hasta el momento.

La estructura del capítulo es la siguiente: en la segunda sección trato algunos problemas que han tenido las soluciones clásicas a la paradoja de Russell. Posteriormente en la sección 3, explico en qué consisten las paradojas de Curry y de Moh Shaw-Kwei y los elementos más característicos que están presentes en la prueba de éstas. En la cuarta sección de este capítulo, esbozaré a grandes rasgos las soluciones que pueden tener estas paradojas.

No profundizaré demasiado en todas las estrategias sugeridas hasta el momento sino que procuraré caracterizarlas de manera general para señalar algunos posibles caminos por los que se puede optar para solucionar las paradojas tratadas y observar si hay una solución unificada para ellas. Las soluciones que consideraré serán expuestas hasta el capítulo 3.

2.2. Problemas con las soluciones clásicas

La estrategia que se había empleado con la paradoja de Russell era observar los componentes involucrados en la derivación de esta paradoja y proponer alguna modificación de los componentes involucrados que permitiera mantener la lógica clásica intacta. Sin embargo, existe otra alternativa a la estrategia clásica tal como apunta Priest (2006). Él propone en el capítulo 2 del libro recién citado que, en vez de conservar los principios lógicos de la lógica clásica que se han utilizado en la teoría de conjuntos y restringir el uso del axioma de Comprehensión, se podría conservar el axioma en su versión irrestricta y modificar algunos de los principios lógicos para formular una teoría de conjuntos paraconsistente.

Las soluciones clásicas trataron al axioma de Comprehensión como el principal problema que daba origen a la paradoja de Russell. A primera vista, las estrategias clásicas parecían dar una solución aceptable a esta paradoja pero, debido a que el axioma de Comprehensión servía como una definición de conjunto que era intuitiva, al restringir este principio se dejó de lado la caracterización principal que se tenía de esta noción central en la teoría de conjuntos. Esto es especialmente problemático debido a que los axiomas de Comprehensión y Extensionalidad parecían recuperar adecuadamente las intuiciones acerca de lo que significa la noción de conjunto. Otra razón por la cual vale la pena mantener estos principios intactos es que fueron propuestos antes de que surgiera el debate en torno a la paradoja de Russell y no como una propuesta *ad hoc* una vez encontrado este problema. En otras palabras, tener Comprehensión como definición de conjunto no era resultado de una estrategia para evitar la paradoja de Russell y era una noción intuitiva que son consideraciones importantes para defender que la teoría de conjuntos ingenua debería mantenerse intacta.

En vista de que las soluciones tratadas en el capítulo anterior pueden considerarse como insuficientes para sustituir la noción intuitiva de conjunto, parece que estas opciones no resuelven el problema adecuadamente. Esto se debe a que, aunque las propuestas clásicas evitan la contradicción originada por la paradoja de Russell, sesgan una parte fundamental de la teoría de conjuntos.

Con la modificación al axioma de Comprehensión se perdió la posibilidad de que cualquier propiedad determine un conjunto. No sólo parecía intuitivo que todas las propiedades sirvieran para determinar qué elementos pueden pertenecer a un conjunto sino que, sin la versión ingenua de Comprehensión, no hay otra manera efectiva de definir a los conjuntos. Esto quiere decir que al perder la definición ingenua de Comprehensión, se pierde la noción intuitiva de conjunto definido como "la extensión de una condición arbitraria"(Priest, 2006, p. 29). Dicho de otro modo, un conjunto se formaba con todos los argumentos que satisfacían una propiedad lo cual parece intuitivo, y descartar el axioma de Comprehensión puede parecer una solución insatisfactoria para quien considere que una definición intuitiva de conjunto es prioritaria.

Como una posible objeción a la propuesta de mantener Comprehensión ingenua, Priest considera que la paradoja de Russell tal vez muestre que, aunque Comprehensión es un axioma intuitivo, es una intuición de la que deberíamos deshacernos. Al respecto, Priest argumenta que la carga de la respuesta recae en quien considera que Comprehensión debería ser rechazado y debería proponer una noción para sustituirlo. Una propuesta que surgió para proporcionar una definición de conjunto fue la noción de jerarquía cumulativa. Ésta es una colección que parte del conjunto vacío y “acumula”su potencia, la potencia de su potencia y así sucesivamente. De acuerdo con la jerarquía cumulativa, la definición de conjunto es entendida como aquello que es un elemento perteneciente a esta jerarquía.

Una ventaja de la jerarquía cumulativa es que recupera la mayoría de las reconstrucciones de teoría de conjuntos. Sin embargo, la jerarquía no recupera todas las instancias de Comprehensión. Priest presenta cinco objeciones a la jerarquía cumulativa que enumeraré con el fin de hacer más claro el argumento.

Objeción 1 La primera objeción es que no parece claro que la jerarquía no requiera de otra noción de conjunto diferente a la que mencioné hace un par de párrafos. Para construir la jerarquía, se necesita especificar hasta qué punto seguirá la construcción, es decir, hasta qué ordinal se acumularán las potencias. Notemos que para hablar de ordinales debemos tener ya una noción de conjunto para definirlos. Si los ordinales se definieran apelando a la teoría de Zermelo-Fraenkel, tendríamos un problema de circularidad (cf. *Íbid*, p. 30).

Objeción 2 La segunda objeción es que resulta inexplicable por qué parece tan intuitivo que cualquier condición defina conjuntos. Es decir, no hay buenas razones para que algunas instancias de Comprehensión sean aceptables y otras no si es intuitivo que todas ellas sean permitidas (cf. *[*p. 31]Íbid).

Objeción 3 En tercer lugar, no existe una justificación de por qué los únicos conjuntos que debemos considerar como existentes son aquellos que pertenecen a la jerarquía. Formar conjuntos parece problemático, en primer lugar, porque para definir un conjunto debemos tener los elementos “a la mano” pero para obtener los elementos necesitamos de algún conjunto del cual provengan y así sucesivamente.

Priest objeta que no hay razones para pensar que la jerarquía no puede construirse partiendo del conjunto universo en vez del conjunto vacío. El problema con esta propuesta de Priest es que hay quienes piensan que en la construcción usual, no importaría si no hay un límite ascendiendo en la jerarquía pero en la versión de

Priest sí habría un problema si no hay un primer elemento al fondo de la jerarquía. Habría que asegurar que la jerarquía se detendrá en algún punto, es decir, que está bien definida. Para hacerlo, habría que definir los conjuntos adecuadamente pero los elementos de cada conjunto apelan a otros conjuntos. Así, la definición de un conjunto requiere de la definición de otro y así sucesivamente.

Aunque Priest piensa que eso es un paradigma de validez (a porque a porque a), no es así. Decir "llueve porque llueve porque llueve..."ni siquiera puede ser capturado adecuadamente de manera formal y por ello no puede hablarse de la validez de una oración tal. Más aún, Priest estaba tratando de justificar que el hecho de que un conjunto se definiera por otro y éste a su vez por otro, no es problemático. Más aún, apelar a un argumento de la forma a porque a porque a no da una buena justificación, que es lo que se esperaba obtener de la propuesta de Priest.

Otra opción para justificar la jerarquía que se construya de arriba a abajo es que podría darse una "super premisa" (como el axioma de Comprehensión), del cual se pudiera definir el resto de los conjuntos. Una tercera opción para salvar el argumento es que el hecho de que no se pueda mostrar que un conjunto está determinado, no significa que no lo esté sino que no hemos logrado evidenciarlo (cf. *Íbid*, pp. 31-32).

Aunque se acepte alguna de las defensas anteriores como una buena motivación para construir la jerarquía de arriba hacia abajo, Priest explica que la jerarquía cumulativa tiene problemas con la teoría de categorías también. Al respecto presenta una cuarta objeción.

Objeción 4 En primer lugar, sabemos que hay conjuntos y operaciones que han funcionado anteriormente y que no aparecen en la jerarquía (como el conjunto Universo o Complemento Absoluto). Esto es problemático sólo hasta el punto en el que la teoría de conjuntos se haya identificado con la jerarquía cumulativa, la cual no logra recuperar estos conjuntos y operaciones. Esta objeción tiene dos problemas.

El primer problema es que la teoría de conjuntos basada en la jerarquía no trata con objetos muy grandes, mientras que la teoría de categorías sí (como la clase de los ordinales). Estos objetos no tienen cabida en la jerarquía cumulativa, así que si se identifica a la teoría de conjuntos con la jerarquía cumulativa, la teoría de categorías basada en esta teoría de conjuntos no podría alcanzar sus objetivos. El segundo problema es que también se busca operar con objetos muy grandes desde la teoría de categorías. Para intentar salvar este segundo problema, Priest menciona dos soluciones. Una consiste en considerar a las categorías como clases propias pero, dado que se suponía que la jerarquía incluía a todos los conjuntos, tratar a algunos objetos como clases propias es salirse por la tangente. Además, las clases propias no nos permiten operar con las categorías grandes por lo que tendríamos que considerar que las clases propias son miembros de otras colecciones. Esto significa que, o bien la noción de clase propia está mal definida, o bien la jerarquía no estaba acabada puesto que no incluía a todos los conjuntos ya y, por lo tanto, seguirá creciendo. La segunda solución sería suponer un cardinal accesible y que las categorías de menor rango que éste son las que pueden ser manipuladas. Sin embargo, la teoría de categorías pretendía operar con todas las estructuras grandes. Además, sabemos que la teoría de categorías ya puede operar con objetos grandes aunque esto no pueda ser explicado por la jerarquía cumulativa. Esto significaría, en todo caso, que la teoría de conjuntos basada en la jerarquía está mal (cf. *Íbid*, pp. 32-35).

Objeción 5 La última objeción de Priest a la jerarquía cumulativa es con respecto a la lógica. La noción de validez pretende abarcar todas las interpretaciones por lo que parece que la definición de validez se enfrenta al mismo problema que la teoría de categorías, es decir, a que la jerarquía cumulativa no permite cuantificar sobre objetos muy grandes. Podríamos intetar abordar el problema, por ejemplo, con el teorema de Löwenheim-Skolem[1], el cual dice que las estructuras son equivalentes a estructuras más chicas. Sin embargo, el teorema mismo cuantifica sobre todas las estructuras por lo que no se puede evadir el problema (cf. *Íbid*, pp. 36-37).

Lo expuesto hasta ahora hace evidente que la opción de adoptar a la jerarquía cumulativa como una definición alternativa de conjunto tiene varios problemas que parecen indicar la necesidad de hacer una distinción entre el lenguaje y el metalenguaje. Priest toma esto como evidencia de que el ascenso en la teoría acumulativa parece ser similar a la necesidad de ascender en el metalenguaje y esto muestra que el problema que da lugar a las paradojas conjuntistas es parecido al que da lugar a las paradojas semánticas.

2.3. Las paradojas de Curry y Moh Shaw-Kwei

Si bien la falta de la noción de conjunto no puede dejarse de lado, de cierta forma las soluciones clásicas parecen haber logrado bloquear la aparición de la paradoja de Russell al restringir Comprehensión y, en tanto que se ha logrado evadir la contradicción a la que se llegaba con ella, parecía que se había logrado evitar la trivialización de la teoría de conjuntos.

[1]El teorema de Löwenheim-Skolem indica que si una teoría de primer orden tiene un número infinito de modelos, tiene al menos un modelo con dominio finito (cf. Bays (2014)).

No obstante, hay otra paradoja que permite la trivializar la teoría de conjuntos en la estrategia no clásica: la paradoja de Curry. Ésta representa un caso especial con respecto a otro tipo de paradojas de autorreferencia puesto que, a diferencia de la la paradoja de Russell y de la oración del mentiroso, las cuales permitían llegar a una contradicción, la paradoja de Curry sucede independientemente de la interpretación de negación que se emplee y permite derivar cualquier proposición sin necesidad de recurrir al principio de explosión.

La paradoja de Curry puede formularse extensionalmente como $\mathfrak{C} = \{x|x \in x \supset p\}$ donde p puede ser sustituida por cualquier proposición, volviendo trivial la teoría en la que aparezca. Además del conjunto de Curry, esta paradoja puede representarse como una oración tal como el conjunto de Russell tiene un símil en la oración del mentiroso. Así, la oración de Curry parte de una oración de autorreferencia la cual implica una proposición cualquiera. Por ejemplo: "si esta oración es verdadera, el mundo se acabará mañana".

En el artículo de Restall del 2007 se reconocen los siguientes componentes como elementos básicos que suscitan la aparición de la paradoja de Curry:

Relación transitiva de consecuencia (R.T.): Una relación de consecuencia $\vdash$ en la que se tenga que si $A \vdash B$ y $B \vdash C$ entonces $A \vdash C$.

Conjunción e implicación: Un operador de conjunción $\wedge$ que cumpla con $A \vdash B$ y $A \vdash C$ si y sólo si $A \vdash B \wedge C$. Además, el residuo de la conjunción (R.C.) será una conectiva $\supset$ tal que $A \wedge B \vdash C$ si y sólo si $A \vdash B \supset C$.

Además de esto, la paradoja de Curry se vale del uso de Intercambio a la Izquierda (Int.I) y de Contracción operacional [2]. Con estos elementos, la paradoja surge de la siguiente manera:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash C = \{x|x \in x \supset p\}$}
\RightLabel{(Comp)}
\UnaryInfC{$\vdash x \in C \equiv (x \in x \supset p)$}
\RightLabel{($\forall I$)}
\UnaryInfC{$\vdash C \in C \equiv (C \in C \supset p)$ (*)}
\RightLabel{(Simp)}
\UnaryInfC{$\vdash C \in C \supset (C \in C \supset p)$}
\RightLabel{(Contr. D.)}
\UnaryInfC{$\vdash C \in C \supset p$ (**)}
\AxiomC{$\vdash C \in C \equiv (C \in C \supset p)$ (*)}
\RightLabel{(Sep.)}
\BinaryInfC{$\vdash C \in C$}
\AxiomC{$\vdash C \in C \supset p$ (**)}
\RightLabel{(Sep.)}
\BinaryInfC{$\vdash p$}
\end{prooftree}
$$

[2] Entiendo como regla operacional de contracción la característica (C3) para conectivas contractivas que aparece en el apéndice, es decir,

$$\dfrac{}{\alpha \odot (\alpha \odot \beta) \vdash \alpha \odot \beta}\ \text{(C3)}$$

Un punto importante a considerar es que esta paradoja no requiere de $\perp$ para trivializar. La prueba permite llegar a una conclusión arbitraria p, lo cual muestra que no es necesario llegar a una $\perp$ para poder concluir una proposición cualquiera.

Además de esta versión de la paradoja de Curry, Shaw-Kwei (1954) presentó una formulación que demuestra que el problema de la paradoja de Curry es mucho más profundo de lo que puede parecer a primera vista. Libert (2006) explica que la paradoja de Moh Shaw-Kwei parte de una conectiva para la implicación, digamos $\rightarrow$, para la cual es válida la regla de Separación. Para definir la paradoja, se parte de que hay una *n-derivativa* ($\rightarrow^n$) para la implicación, la cual puede ser definida recursivamente partiendo de que se cumpla $p \rightarrow^0 q \equiv q$ y también $p \rightarrow^{n+1} q \equiv p \rightarrow (p \rightarrow^n q)$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Esta conectiva cumplirá, además, con *n-absorción* si satisface la siguiente regla:

(A_n): $\quad p \rightarrow^{n+1} q \vdash p \rightarrow^n q$

Estas condiciones permiten ver que para cualquier $n > 0$, se puede formar la existencia de un conjunto Curry en el que la implicación cumpla con *n-derivación* y por tanto con A_n. Una demostración de esta paradoja es la mostrada a continuación:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash x \in C \equiv (x \in x \rightarrow^n p)}{\vdash C \in C \equiv (C \in C \rightarrow^n p)\ (*)}\,(\forall I)}{\vdash C \in C \supset (C \in C \rightarrow^n p)}\,(\text{Simp.})}{\vdash C \in C \rightarrow^n p\ (**)}\,(\text{Contr. D.}) \qquad \vdash C \in C \equiv (C \in C \rightarrow^n p)\ (*)}{\vdash C \in C}\,(\text{Sep.}) \qquad \vdash C \in C \rightarrow^n p\ (**)}{\vdash p}\,(\text{Sep. } n \text{ veces})
$$

Con lo expuesto hasta ahora parece que la paradoja de Curry era una versión más general de la paradoja de Russell pero no la más general posible. La paradoja de Moh Shaw-Kwei pone en evidencia que el problema de la paradoja de Curry surge cada que se tenga Separación y Contracción para el condicional. En vista de esto, las soluciones que se tenían hasta el momento para tratar con la paradoja de Russell parecen no ser satisfactorias y una nueva solución debe ser postulada si se quiere evitar la trivialización de la teoría de conjuntos.

2.4. Soluciones a las paradojas

Para conservar las nociones intuitivas de Comprehensión y Extensionalidad, habrá que cambiar la lógica subyacente. En particular, habrá que concentrarse en la definición de implicación que se usará en los axiomas de Comprehensión y Extensionalidad. Una teoría de conjuntos paraconsistente deberá tener como base una lógica que rechace el principio de explosión pero conserve el axioma de Comprehensión en su forma irrestricta y mantenga Extensionalidad.

Como se vio en la sección anterior, teniendo tanto Contracción como Separación estamos en riesgo de que surja la paradoja de Curry por lo que una lógica paraconsistente como la de da Costa o una relevante como R no servirían en este caso. Además, para cumplir con el objetivo de la estrategia no clásica de mantener la mayor parte de la teoría ingenua de conjuntos intacta, la lógica subyacente debe recuperar la mayor cantidad de nociones de la teoría de conjuntos que sea posible. Con esto en mente, Priest presenta en el capítulo 18 de Priest (2006) la estrategia material, la estrategia relevantista y la estrategia de teoría de modelos. Por último, Priest trata el problema de la metateoría de la lógica paraconsistente. Expondré las tres estrategias propuestas por Priest como un primer acercamiento a las posibles soluciones que tendrían las paradojas conjuntistas y abordaré el problema de la metateoría paraconsistente basándome en el capítulo recién citado.

2.4.1. La estrategia material

Esta primera estrategia consiste en invalidar Separación. Para esto, se define el condicional material $\alpha \supset \beta$ como $\neg\alpha \vee \beta$ y el bicondicional $\alpha \equiv \beta$ como $(\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$.

La lógica LP de Priest es un buen candidato para la estrategia material. Entre las ventajas de usar LP como lógica subyacente a una teoría de conjuntos paraconsistente está que se recuperan los axiomas de ZF basados en el axioma de Comprehensión, además de que se puede probar que no es trivial y recupera el axioma de Infinito y el conjunto Universo.

Las desventajas, por otro lado, son que el axioma de Fundación no es válido y que, dado que no permite Separación, muchos argumentos naturales fallan. Por otra parte, los alcances de LP como lógica subyacente no han sido estudiados a profundidad por lo que todavía no es claro qué otros teoremas de ZF se recuperan (cf. *Íbid*, pp. 249-251).

Parte de la motivación de la estrategia no clásica es recuperar buena parte de la teoría de conjuntos ingenua por lo que las desventajas de LP como lógica subyacente recién expuestas no pueden ignorarse. Además, Morgan (antes Nick) Thomas ha explicado en su artículo del 2013 que la teoría ingenua de conjuntos basada en LP no tiene los elementos mínimos para recuperar un fragmento interesante de las matemáticas clásicas ya que, por ejemplo, no permite dar una definición de conjunto unitario, de par cartesiano o de orden lineal. Por esta razón vale la pena explorar otra estrategia.

2.4.2. La estrategia relevantista

La estrategia relevantista pretende validar Separación pero impedir Contracción. Esto se puede lograr utilizando una lógica relevante más débil que el sistema R, el cual define a la disyunción como $A \vee B =_{df} \neg(\neg A \wedge \neg B)$ y para el bicondicional como $A \equiv B =_{df} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$ (cf. Mares (2014)). La propuesta para la definición del condicional en una lógica más débil que R sería $(\alpha \supset \beta) \wedge (\neg\beta \supset \neg\alpha)$ el cual no cumple con Contraposición ni con Contracción.

La ventaja de esta teoría es que recupera muchas nociones básicas de la teoría intuitiva de conjuntos como las operaciones booleanas de intersección, unión y complemento, definiéndolas de las siguiente manera:

$$x \cap y =_{df} \{z : z \in x \wedge z \in y\}$$

$$x \cup y =_{df} \{z : z \in x \vee z \in y\}$$

$$\overline{x} =_{df} \{z : z \notin x\}$$

$$x \subseteq y =_{df} \forall z(z \in x \supset z \in y)$$

Sin embargo, esta estrategia tiene algunos problemas. No explicaré todos ellos pero mencionaré algunos. En primer lugar se pierde la satisfacción vacua, es decir, que una proposición cuantificada universalmente sea verdadera aún si no hay elementos que la satisfagan. Por otra parte no se pueden reconstruir los argumentos que apelen a Reducción. En tercer lugar, no se cumple que haya un conjunto vacío $\emptyset$ tal que:

$$\alpha \cap \overline{\alpha} \subseteq_{df} \emptyset$$

$$\emptyset \subseteq_{df} \beta$$

Sustituyendo α por $\{x : a\}$ y β con $\{x : b\}$, de las fórmulas anteriores se obtiene que $(x \in \{x : a\} \wedge x \in \overline{\{x : a\}}) \supset x \in \{x : b\}$ y por Comprehensión se puede obtener explosión. Esto haría que la lógica ya no fuese paraconsistente.

Otro problema es que no se puede mostrar la unicidad del conjunto vacío ni del conjunto universo. En realidad, todos los conjuntos tendrán el mismo problema.

Por otra parte, pese a extensionalidad, los objetos no son extensionales. Esto se debe a que la definición del condicional es intensional, ya que la identidad está dada en términos de un bicondicional[3], el cual es un operador intensional, haciendo que las entidades involucradas también lo sean y que ciertas igualdades no se cumplan. Sin embargo, aunque la definición del bicondicional se cambiara, digamos, por un condicional material, tendría como consecuencia que sólo existiría un único conjunto. Por otra parte, si el condicional fuese relevantista, la Cuantificación Universal Restringida (CUR) fallaría porque para una fórmula como $\forall x(Ax \supset Bx)$ se necesita tener $\{B(a)\} \vdash A(a) \supset B(a)$, que no es válido en la lógica de la relevancia. La CUR también falla con un condicional material ya que la inferencia $\forall x(Ax \supset Bx) \vdash B(a)$ requiere de Silogismo Disyuntivo $\{A(a), \neg A(a) \vee B(a) \vdash B(A)\}$. Definiendo un condicional como $(A \wedge t) \supset B$ donde t es una constante que representa la conjunción de todas las verdades actuales se recupera la CUR. Además, con este condicional se tiene que $\{\forall x(x \in y)\} \vdash \forall x(x \in z \supset x \in y)$, es decir que hay un conjunto que contiene todo. Una desventaja de esta última definición de condicional es que todavía no se recupera el álgebra booleana y se tiene que $\{x \notin y\} \vdash x \in y \supset x \in z$ (cf. *Íbid*, p. 251-255).

La última definición del condicional parece recuperar más que lo que se lograba con la estrategia material. Sin embargo, todavía tiene ciertos problemas importantes por lo que propone una tercera estrategia.

2.4.3. La estrategia de teoría de modelos

Esta estrategia consiste en una axiomatización de un condicional material empleado uniformemente, a diferencia de lo explorado con la estrategia relevantista. Nombremos a esta axiomatización M cuyo lenguaje contiene conectivas extensionales y cuantificadores (como en ZF). Con esta estrategia en vez de concentrarnos en lo que se puede probar con M, consideraremos cuáles son sus modelos.

Basándose en el lema de colapso[4], la interpretación colapsada, $M^{\sim}$ tiene un modelo con un único elemento que es y no es miembro de sí mismo y que modelaría una teoría trivial. Sin embargo éste no es el único modelo. Suponiendo que hay cardinales inaccesibles y siendo ξ_1 el más pequeño y ξ_2 el más grande, sabemos por el lema de colapso que ambas son estructuras consistentes de $M^{\sim}$. Además, los teoremas de ZF con cuantificación relativizada a ξ_1 son consistentes en $M^{\sim}$ también por lo que sabemos que ξ_1 es un modelo interno consistente de ZF. Hasta ahora las interpretaciones en $M^{\sim}$ son modelos de Extensionalidad y Comprehensión, son modelos de ZF y contienen a la jerarquía

[3]Esto puede darse considerando un tipo de identidad *à la* Leibniz como el presentado por (Cantini, 2003, p. 354) $t = s \vdash \forall x(t \in z \supset s \in z)$.

[4]Este lema indica que "si la interpretación original es modelo de algún conjunto de oraciones, la interpretación colapsada también será un modelo" (cf. Priest (2006), p. 227). Así, en el caso de M tendríamos que $v^{\sim}(a) \supseteq v(a)$ donde $v^{\sim}$ es una interpretación colapsada de v.

cumulativa al menos hasta ξ_1.

Una desventaja de esta estrategia es que $M^{\sim}$ contiene un único conjunto inconsistente que contiene a todos los conjuntos inconsistentes y no bien fundados. Pese a esto, $M^{\sim}$ basta para observar que hay modelos de la teoría ingenua de conjuntos que recuperan mucho de la teoría (cf. *Ibíd*, p. 256-258).

Hasta ahora, esta estrategia parece ser la más exitosa puesto que permite obtener mucho de la teoría de conjuntos ingenua sin demasiadas desventajas. Sin embargo esto no es suficiente para considerar que la estrategia de la teoría de modelos es la mejor opción pues, en primer lugar, requeriría de más estudio y, en segundo lugar, falta considerar si puede haber una metateoría paraconsistente.

2.4.4. La metateoría paraconsistente

Para Priest, la lógica paraconsistente debería servir por lo menos para razonar sobre conjuntos y para esto es importante investigar si la lógica paraconsistente es apta para tal tarea. Un punto importante a considerar es cuál es la lógica empleada en la metateoría de la lógica paraconsistente. Si se tratase de la lógica clásica, esto significaría que la lógica paraconsistente no es la lógica correcta pues de cualquier modo recurre a otro sistema. Ahora bien, ¿cómo podríamos saber si la metateoría de la lógica paraconsistente se vale de un sistema paraconsistente?

Las pruebas para muchas lógicas paraconsistentes se dan informalmente y muchas veces se asume que la formalización es clásica. Esto no es necesariamente así. Dado que muchas lógicas paraconsistentes son generalizaciones de la lógica clásica, coinciden en los modelos consistentes.

Sin embargo, la metateoría se expresa comúnmente en teoría de conjuntos y la teoría de conjuntos paraconsistente no es consistente. Una opción para enmendar esto es hacer una metateoría utilizando ZF y, por lo visto con la estrategia modelo-teórica, sabemos que esto sustentaría un universo de conjuntos construído paraconsistentemente. Bastaría, entonces, con apropiarnos de estos resultados.

No obstante, hay un segundo problema que debe ser abordado. Con las estrategias material y modelo-teórica se expresaba la relación entre premisas y conclusión a través de un condicional. Definiendo validez como que una inferencia de a a b es válida si y sólo si para cada interpretación I se tiene que $I \vdash a \supset I \vdash b$ y tomando en cuenta que el condicional no admita Separación, parecería que la definición de validez se ve afectada con esta estrategia. Esto no sucede, ya que Silogismo Disyuntivo sigue siendo válido en contextos consistentes, por lo que se puede llegar del antecedente al consecuente en la definición recién presentada de validez siempre que no sucede tanto $I \vdash a$ como $I \nvdash a$ (cf. *Ibíd*, p. 258-260).

Con lo expuesto por Priest, parecería que se puede obtener una metateoría adecuada para la lógica paraconsistente y dejando esto de lado podemos analizar la posibilidad de cambiar la lógica subyacente a la teoría de conjuntos, es decir, la viabilidad de la estrategia no clásica.

La primera estrategia parece tener demasiadas objeciones fuertes como para ser considerada como un candidato para dar una teoría de conjuntos paraconsistente. La estrategia relevante, por otra parte, logra recuperar más de la teoría de conjuntos con menos pérdidas. No obstante, la explicación a través de la teoría de modelos para ser la más sólida. Por una parte, con la teoría de modelos se logra recuperar en su totalidad la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

Abordando el problema de la metateoría de la lógica paraconsistente, y en particular la manera en la que se recupera la noción de validez, se muestra que hay una manera de adoptar mucho de lo que se tenía con la estrategia clásica. Así, Priest ha hecho evidente que hay buenas motivaciones para la estrategia no clásica y que vale la pena explorar esta alternativa.

Ahora bien, teniendo una teoría de conjuntos paraconsistente, ¿ha desaparecido completamente el problema de las paradojas? Normalmente sucede que una vez que se identifican los principios involucrados en el surgimiento de alguna paradoja, se pueden postular estrategias que rechacen alguno de estos principios para evadir el problema. Para solucionar la paradoja de Curry, se puede rechazar alguna de los pasos empleadas en la prueba o redefinir las conectivas involucradas; sin embargo todas estas alternativas tienen un costo. En su artículo, Restall (2007) se propone exponer a grandes rasgos los problemas de venganza surgidos de las aproximaciones que han tenido los teóricos no clásicos al momento de intentar solucionar la paradoja de Curry para mostrar cómo estas estrategias no proveen una solución definitiva.

Algunos teóricos de lógicas no clásicas han optado por debatir la definición de negación involucrada en ciertas paradojas, así como los principios de lógica clásica que intervienen en el desarrollo de éstas. Sin embargo, Restall se concentra en la paradoja de Curry puesto que en ella no se puede recurrir a las mismas estrategias no clásicas. Esto se debe a que no hay una negación clara involucrada y no se puede apelar a que haya algún problema con su definición. Así, las nuevas estrategias tendrán que rechazar alguna de las reglas operacionales que intervienen en esta paradoja.

Restall explica en su artículo (cf. *Ibíd*, p. 7) que hay diferentes maneras de entender a $\supset$ como residuo de la conjunción, a saber, utilizando una negación booleana, el condicional de la lógica intuicionista o la noción de disyunción infinitaria. La negación booleana no es un problema para los teóricos no clásicos ya que no aceptan esta definición. El condicional de la lógica intuicionista sufre de paradojas de tipo Curry y por ello no es aceptado explícitamente por los teóricos no clásicos. Sin embargo, puede aparecer implícitamente si se tiene disyunciones infinitarias y la conjunción se distribuye a través de ellas, ya que entonces se tendrá residuo de la conjunción. De esta forma, una manera de evitar la paradoja de Curry será, además de rechazando algún principio empleado en el desarrollo de ésta (como la relación de consecuencia transitiva), optando por rechazar disyunciones grandes o la distribución de la conjunción sobre la disyunción en ciertos contextos. Un desafío adicional consistiría en argumentar correctamente a favor de cualquiera de estas estrategias.

Hasta ahora se han expuesto posibles soluciones a la paradoja de Curry pero no se ha tratado el problema de la paradoja de Moh Shaw-Kwei. Si bien esta última puede entenderse como una versión reforzada de la paradoja de Curry, las soluciones tratadas hasta el momento podrían ser insuficientes para resolver el problema de esta paradoja. Sin embargo, se puede notar que ambas paradojas comparten una estructura en común y el uso de ciertas reglas. Hasta ahora uno de los problemas más evidentes parece ser la regla de Contracción estructural ya que está presente en la derivación de estas paradojas. Una opción a considerar para solucionarlas sería rechazar esta regla.

2.5. Conclusiones

Aunque la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel fue exitosa en tanto que fue aceptada en la práctica lógica y matemática, algo que se le puede criticar es que no incluye una sustitución del axioma de Comprehensión que brinde una definición tan intuitiva de conjunto como la que se obtenía a partir de este axioma. La caracterización que proporcionaba la jerarquía acumulativa tampoco fue del todo exitosa ya que su justificación era problemática. Además de estos problemas, la paradoja de Curry y la de Moh Shaw-Kwei hicieron evidente que la teoría de conjuntos seguía siendo inconsistente pese a la estrategia no clásica, la cual consistía en mantener los axiomas de la teoría intuitiva de conjuntos (Extensionalidad y Comprehensión) y cambiar la lógica clásica por una no clásica (en particular, por una lógica paraconsistente). En vista de esto, se han esbozado algunas estrategias que buscan salvar a la teoría de conjuntos de la trivialidad. Sin embargo, debido al poco desarrollo de algunas, o a los problemas que tienen otras, ninguna opción parece asegurar la solución al problema que se enfrenta. Lo siguiente será considerar los elementos que tienen en común estas paradojas buscando obtener pistas acerca de qué solución se puede dar a estos problemas.

Capítulo 3

Las nuevas paradojas conjuntistas

3.1. Introducción

Las paradojas de Curry y de Moh Shaw-Kwei son evidencia de cómo las soluciones a unas paradojas pueden no ser útiles para otras aunque a primera vista las paradojas de autorreferencia parezcan similares. Además de esto, los problemas de venganza muestran que no es sencillo librarse completamente de las paradojas. Esto quiere decir que incluso restringiendo reglas como Contracción, el problema de la trivialización puede persistir. Así, los problemas de venganza que trataré en este capítulo serán las paradojas de Hinnion-Libert y de Grišin, las cuales afectan la teoría de conjuntos intuitiva. Considerando todas las paradojas tratadas hasta el momento, el objetivo es investigar si hay una solución satisfactoria y unificada para solucionar todas las paradojas conjuntistas tratadas hasta el momento.

La importancia de prestar atención a estas paradojas no sólo radica en intentar salvar a la teoría intuitiva de conjuntos de la trivialización, sino también identificar los componentes comunes a todas las paradojas. El problema parece resurgir debido a que los principios lógicos que están en juego al momento de derivar estas paradojas permanecen vigentes en un nivel estructural y por ello no basta con restringir la regla operacional sino que es viable optar por el rechazo de una regla estructural[1].

Una de las reglas que tienen en común las paradojas consideradas a lo largo de esta investigación es la Contracción y, por tanto, las consecuencias del rechazo de esta regla

[1]Entiendo por regla operacional aquella que es aplicada para el uso de una conectiva que forma parte de un sistema formal. Una regla operacional indica cómo se puede utilizar una conectiva, así como las inferencias que se pueden obtener de una proposición que contenga tal conectiva. Por otra parte, las reglas estructurales "no introducen ningún símbolo lógico en el discurso, pero conciernen a la manipulación de la estructura de los secuentes" (Paoli, 2013, p. 8).

han sido ampliamente estudiadas (véase, por ejemplo, Zardini (2015) y Petersen (2000)). Ésta no es la única regla que comparten las paradojas en cuestión. Otras alternativas que han sido exploradas son el rechazo de Reflexividad o de Corte.

Con esto en mente, buscaré identificar si en verdad deshacerse de Reflexividad, Debilitamiento, Contracción o Corte es una solución satisfactoria a estas paradojas. Considero que, en tanto que estas tres reglas son comunes a todas las paradojas que he tratado, es probable que haya una solución unificada para todas ellas. Dicha modificación no puede realizarse sin costo alguno. Una estrategia que rechace cualquiera de estos tres principios tendrá como consecuencia dejar de lado algunos supuestos. Además de esto, dado que no basta con dejar de lado la regla operacional de cualquiera de estos principios, es probable que haya consecuencias aún más fuertes deshaciéndonos de ellas en un nivel estructural.

En este capítulo empezaré por exponer las paradojas de Hinnion-Libert en la primera sección y la de Grišin en la segunda para después, en la sección 3, hablar de las posibles soluciones a las paradojas tratadas a lo largo de este escrito. Finalmente en la cuarta sección abordaré el problema de la trivialidad de la teoría intuitiva de conjuntos para analizar si en efecto se ha logrado salvarse de ella a través de las estrategias presentadas.

Si bien no planeo exponer a detalle un sistema libre de paradojas para la teoría de conjuntos, al exponer las estrategias para resolver las paradojas, se podrán ver algunos de los costos de las soluciones que se tienen a la mano. Tampoco me concentraré en dar más argumentos a favor de cualquiera de las posturas expuestas en la sección 4. En todo caso, la exposición podría señalar cuál es la propuesta más viable o cuáles son las propuestas que parecen menos atractivas hasta el momento.

3.2. La paradoja de Hinnion-Libert

La paradoja de Hinnion-Libert surge como una manera de recrear la paradoja de Russell sin utilizar negaciones, cuantificadores ni implicaciones en su definición. Algunas lógicas no clásicas han adoptado las nociones de *gaps* y *gluts* como una manera de solucionar el problema de la paradoja de Russell, tomando diferentes posturas con respecto a los compromisos que se tienen frente a la ley básica V. Por ejemplo, si se tiene el compromiso de que las clases con los mismos miembros son las mismas, habrá que clarificar la manera en la que se está entendiendo la noción de identidad, es decir, qué lógica y qué condicional se está tomando en cuenta (cf. Restall (2009), p. 10).

Restall recupera tres axiomas que se desprenden de la ley V de Frege. Los dos primeros son reglas de introducción de la relación de pertenencia para clases y el tercero es una manera de expresar el principio de Extensionalidad. Él formula estas reglas de la siguiente manera (cf. *Ibíd.* p. 10, 11):

$$\frac{\Gamma, \Phi(\alpha) \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \in \{x : \Phi(x)\} \vdash \Delta}\,(\in I) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi(\alpha), \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \in \{x : \Phi(x)\}, \Delta}\,(\in D)$$

$$\frac{\Gamma, x \in \alpha \vdash x \in \beta, \Delta \qquad \Gamma, x \in \beta \vdash x \in \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha = \beta, \Delta}\,(Ext \in)$$

Las reglas de ($\in I$) y ($\in D$) no tratan sobre propiedades sino sobre la igualdad entre clases. Para operar con la igualdad se tienen las siguientes reglas:

$$\frac{\Gamma, \Phi(\alpha) \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha = \beta, \Phi(\beta) \vdash \Delta}\,(= I_i) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi(\alpha), \Delta}{\Gamma, \alpha = \beta \vdash \Phi(\beta), \Delta}\,(= I_d)$$

$$\frac{\Gamma, \Phi(\alpha) \vdash \Delta}{\Gamma, \beta = \alpha, \Phi(\beta) \vdash \Delta}\,(= I_{i_s}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi(\alpha), \Delta}{\Gamma, \beta = \alpha \vdash \Phi(\beta), \Delta}\,(= I_{d_s})$$

$$\frac{\Gamma, X(\alpha) \vdash X(\beta), \Delta \qquad \Gamma, X(\beta) \vdash X(\alpha), \Delta}{\Gamma \vdash \alpha = \beta, \Delta}\,(= D)$$

Ahora bien, la clase de Russell ($\mathfrak{R} = \{x : x \notin x\}$) parece no ser un problema aquí ya que ninguna de las reglas mencionadas arriba involucra negación como sí sucede con esta versión de la clase R. Sin embargo, Restall define la siguiente clase inspirada en el trabajo de Hinnion y Libert:

$$\mathfrak{H} = \{x : \{y : x \in x\} = \{y : p\}\}$$

Esto puede leerse como “el conjunto de todos los conjuntos tales que los conjuntos que se pertenecen a sí mismos son idénticos a los conjuntos que cumplen alguna propiedad p”. La prueba es la siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathfrak{H} \in \mathfrak{H} \vdash \mathfrak{H} \in \mathfrak{H}}\,\text{(Id)}}{\mathfrak{H} \in \mathfrak{H} \vdash x \in \{y : \mathfrak{H} \in \mathfrak{H}\}}\,(\in D) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\,\text{(Id)}}{x \in \{y : p\} \vdash p}\,(\in I)}{x \in \{y : \mathfrak{H} \in \mathfrak{H}\}, \{y : \mathfrak{H} \in \mathfrak{H}\} = \{y : p\} \vdash p}\,(= I_{i_s})}{\mathfrak{H} \in \mathfrak{H}, \{y : \mathfrak{H} \in \mathfrak{H}\} = \{y : p\} \vdash p}\,\text{(Corte)}}{\mathfrak{H} \in \mathfrak{H}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{H} \vdash p}\,(\in I)}{\mathfrak{H} \in \mathfrak{H} \vdash p\ (*)}\,\text{(Contr. I.)}$$

Considérese ahora la siguiente prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{H} \in \mathfrak{H} \vdash p\ (*)}{x \in \{y : \mathfrak{H} \in \mathfrak{H}\} \vdash x \in \{y : p\}, p}\,(\in I) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\,\text{(Id)}}{p \vdash x \in \{\mathfrak{H} \in \mathfrak{H}\}, p}\,\text{(Deb. D.)}}{x \in \{y : p\} \vdash x \in \{y : \mathfrak{H} \in \mathfrak{H}\}, p}\,(\in I)}{\vdash \{y : \mathfrak{H} \in \mathfrak{H}\} = \{y : p\}, p}\,(Ext \in)}{\vdash \mathfrak{H} \in \mathfrak{H}, p\ (**)}\,(\in D)$$

Uniendo ambas pruebas se tiene que:

$$\frac{\vdash \mathfrak{H} \in \mathfrak{H}, p\ (**) \qquad \mathfrak{H} \in \mathfrak{H} \vdash p\ (*)}{\vdash p}\ \text{(Corte)}$$

Estos resultados muestran que, nuevamente, hay una manera de formular un conjunto que tenga como consecuencia la trivialidad de la teoría en la que se presente. Más aún, esto sucede pese a que no se utilizó ninguna conectiva para definir el conjunto, por lo que no hay reglas operacionales en juego. Así, la primera cosa a notar es que las estrategias que recurren a debatir el significado o el uso de alguna conectiva no serán efectivos para combatir esta paradoja.

Otro punto importante que debe ser considerado es que, tal como sucede con la paradoja de Curry, no fue necesario llegar a una contradicción para obtener una proposición cualquiera. Simplemente basta con sustituir p por cualquier proposición. Esto quiere decir que las estrategias que debaten elementos relacionados con las contradicciones y la trivialización resultante a partir de eso no son de utilidad en este caso. La apuesta más sensata parece ser negar alguno de los principios involucrados en la derivación de la paradoja, a saber, $(\in I), (\in D), (Ext_{\in}), (= I_i)$ o alguna de las reglas estructurales, es decir, Identidad, Corte, Contracción o Debilitamiento.

Restall concluye su artículo diciendo que evadir la paradoja puede ayudar a clarificar qué está en juego cuando se defiende la ley V con métodos no clásicos. De cualquier forma, parece claro que la paradoja de Hinnion-Libert muestra que los problemas que se tenían con la paradoja de Russell pueden resurgir incluso sin la presencia de conectivas.

3.3. La paradoja de Grišin

La paradoja de Grišin representa otro problema de trivialización para la teoría de conjuntos intuitiva. Similar a lo que sucede con la paradoja de Hinnion-Libert, esta paradoja tiene como uno de sus componentes principales al principio de Extensionalidad. En este caso, la inconsistencia surge a partr de que se añade Extensionalidad, a diferencia de la paradoja de Russell que parecía señalar como principal problema al axioma de Comprehensión.

Se tomará en cuenta la teoría de conjuntos BCK (o lógica afín), la cual incluye algunas reglas para el condicional y al principio de Comprehensión, todo esto manteniendo la consistencia de la teoría. Los principios de BCK son los siguientes (Terui, 2004, p. 4):

$$\frac{}{(x \supset y) \vdash ((y \supset z) \supset (x \supset z)}\ (\text{B})$$

$$\frac{}{(x \supset (y \supset z)) \vdash (y \supset (x \supset z)}\ (\text{C})$$

$$\frac{}{x \vdash y \supset x}\ (\text{K})$$

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\text{Id}) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A \qquad A, \Gamma_2 \vdash C}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash C}\ (\text{Corte})$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{A, \Gamma \vdash C}\ (\text{Deb}) \qquad \frac{\vdash A \qquad \vdash A \supset B}{\vdash B}\ (\text{Sep.})$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \qquad B, \Gamma_2 \vdash C}{A \supset A, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash C}\ (\supset \text{I}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}\ (\supset \text{D})$$

$$\frac{A[t/x], \Gamma \vdash C}{\forall x(A), \Gamma \vdash C}\ (\forall\ \text{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\forall\ \text{D}) \text{ con } x \text{ no libre en } \Gamma.$$

$$\frac{A[t/x], \Gamma \vdash C}{t \in \{x|A\}, \Gamma \vdash C}\ (\in \text{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash t \in \{x|A\}}\ (\in \text{D})$$

(B) representa la noción de Transitividad, la cual forma parte de la derivación de algunas paradojas mientras que (C) representa Permutación y (K) monotonicidad. Estas reglas junto con Extensionalidad dan lugar a la paradoja de Grišin, la cual termina por trivializar la teoría.

Teniendo Contracción para fórmulas ecuacionales, se debe probar que cualquier fórmula A es equivalente a una fórmula ecuacional $t = u$ donde $t \equiv \{x|x = x\}$ y $u \equiv \{x|(x = x) \wedge A\}$. Considérense las siguientes dos pruebas:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \dashv\vdash ((x = q) \equiv (x = q \wedge A))}{A \vdash ((x = q) \equiv (x = q \wedge A))}}{A \vdash ((x = q) \supset (x = q \wedge A))}\ (\text{Def} \equiv)}{A \vdash ((x = q) \supset x \in u)}\ (\in \text{D}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{x \in t \vdash x \in t}\ (\text{Id})}{x \in t \vdash (x = q)}\ (\in \text{D})}{\dfrac{A, x \in t \vdash x \in u}{A \vdash x \in t \supset x \in u}\ (\supset \text{D})}\ (\text{Sep.})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \dashv\vdash ((x = q) \equiv (x = q \wedge A))}{A \vdash ((x = q) \equiv (x = q \wedge A))}}{A \vdash ((x = q) \wedge A) \supset (x = q)}\ (\text{Def} \equiv)}{A \vdash ((x = q) \wedge A) \supset x \in t}\ (\in \text{D}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{x \in u \vdash x \in u}\ (\text{Id})}{x \in u \vdash ((x = q) \wedge A)}\ (\in \text{D})}{\dfrac{A, x \in u \vdash x \in t}{A \vdash x \in u \supset x \in t}\ (\supset \text{D})}\ (\text{Sep.})$$

Uniendo ambos resultados se puede concluir que

$$\frac{A \vdash x \in t \supset x \in u \qquad A \vdash x \in u \supset x \in t}{A \vdash t = u}\,(Ext \in)$$

La segunda parte de la prueba es como sigue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{t = u \vdash q = q}{t = u \vdash q \in t}\,(\in R)}{t = u, \vdash q \in t \wedge A}\,(\text{Deb. D.})}{t = u \vdash A}\,(\wedge E)$$

Una vez teniendo esto, se ha mostrado que $A \dashv\vdash t = u$, es decir, que cualquier fórmula es equivalente a una fórmula ecuacional. Dados los principios de BCK, se tienen Reflexividad (Id) y Separación. Estas dos reglas coinciden con las dos primeras características de las conectivas contractivas presentadas por Beall y Murzi (2013) donde $\odot$ es cualquier conectiva:

$$\overline{\alpha \supset \beta \vdash \alpha \odot \beta}\,(\text{C1})$$

$$\overline{\alpha, \alpha \odot \beta \vdash \beta}\,(\text{C2})$$

$$\overline{\alpha \odot (\alpha \odot \beta) \vdash \alpha \odot \beta}\,(\text{C3})$$

Como se mencionó anteriormente, Contracción se cumple para fórmulas ecuacionales pero, dado que se ha probado que cualquier fórmula es equivalente a una fórmula ecuacional, se tiene que cualquier fórmula cumplirá también con (C3). Considerando esto, basta con introducir el conjunto de Curry y desarrollar la prueba en la forma habitual.

De la paradoja de Grišin se pueden obtener varias lecciones. En primer lugar, se observa que la teoría de conjuntos BCK incluye al axioma de Comprehensión entre sus principios sin ser una teoría inconsistente. Esto es interesante puesto que hasta el momento se consideraba que Comprehensión era el principal sospechoso de la trivialización de la teoría de conjuntos.

Ahora bien, la prueba de esta paradoja sí utiliza reglas operacionales puesto que sí se presentan conectivas a lo largo de la prueba. En este caso, a diferencia de lo que sucede con la paradoja de Hinnion-Libert, rechazar una de estas reglas es una estrategia plausible. Sin embargo, nuevamente aparecen como componentes de esta paradoja las reglas estructurales de Reflexividad, Contracción y Transitividad, por lo que rechazar una de estas reglas sigue siendo una opción viable para resolver ésta y el resto de las paradojas que he tratado hasta el momento.

3.4. Soluciones a las paradojas

Aunque las paradojas que he presentado a lo largo de esta tesis son diferentes entre sí ya que algunas utilizan, por ejemplo, reglas operacionales y otras no, hay algunos elementos en común a todas ellas. A continuación presentaré una tabla que muestra las reglas estructurales utilizadas en las paradojas de Curry, Moh Shaw-Kwei, Hinnion-Libert y Grišin.

	Curry	**Moh Shaw-Kwei**	**Hinnion - Libert**	**Grišin**
Reflexividad	Autorreferencia	Autorreferencia	(Id)	(Id)
Contracción	(Contr. D)	(Contr. D.)	(Contr. I) $(= D)$	(Contr. D.)
Transitividad	(R. T.)	(Sep.)	(Corte)	(Sep.)
Debilitamiento			(Deb D.)	(Deb D.)

Además de las reglas mostradas en la tabla, hay que tener presente que todas estas paradojas surgen bajo la estrategia no clásica. Esto significa que tanto Comprehensión como Extensionalidad también aparecen en todas ellas aunque no aparezcan explícitamente en alguno de los pasos.

Cualquier teoría resultante de rechazar alguna regla estructural como las que aparecen en la tabla se considera como una lógica subestructural (cf. (Paoli, 2013, p. 3)). Las lógicas no subestructurales deben modificar las reglas para alguna conectiva, y dar buenas razones para ello, si buscan deshacerse de las paradojas, lo cual no garantiza que se libren de problemas de venganza a nivel estructural. La ventaja de optar por una estrategia subestructural es que es menos probable que haya problemas de venganza pero el problema que enfrenta es que los costos de esta alternativa pueden ser muy altos. Esto se debe a que rechazar una regla estructural modifica en gran medida la lógica en cuestión pues las reglas operacionales no funcionan en su modo usual. Como consecuencia de esto, las inferencias que se pueden obtener de cada proposición no serán las mismas.

Lo siguiente entonces es analizar las posibles soluciones. Como mostré en la tabla, algunas reglas operacionales suponen de fondo una regla estructural así que parece que el problema real a tratar no es la definición de una de las conectivas sino que podría provenir de una de las reglas estructurales. En este caso, podríamos optar por una lógica subestructural no contractivista, no transitivista, no reflexiva o sin debilitamiento.

3.4.1. La estrategia no contractivista

Rechazar contracción ha sido una de las opciones más exploradas (véase, por ejemplo, Petersen (2000) o Zardini (2015)) para resolver estos problemas debido a que esta regla aparece en muchas pruebas de paradojas. A pesar de ser una estrategia ampliamente discutida, el debate no ha sido resuelto, sobre todo por los altos costos de tener una lógica subestructural sin contracción. Ripley (2015) ha mostrado algunas de las desventajas de tener una lógica subestructural no contractiva.

La primera objeción es que la postura no contractivista no valida todos los argumentos clásicamente válidos y, dado que la lógica clásica se considera útil pese a ser cuestionada por algunos, alejarse demasiado de ella podría tener como consecuencia que se pierdan argumentos que se consideraban correctos. La segunda objeción es acerca de la desambiguación de las conectivas aditivas y multiplicativas, especialmente en los casos de la oraciones y argumentos del tipo de *Modus Ponens*. Los resultados para cada tipo de interpretación de las conectivas clásicas son diferentes, lo cual no lo vuelve una tarea fácil. Debido a que no es sencillo decidir si cada conectiva debe leerse aditiva o multiplicativamente, las distintas opciones entre las que tiene que decidir el lógico no contractivista parecen ser un punto en contra de esta estrategia.

Tomando en cuenta sólo el caso de la conjunción y de la disyunción, la desambiguación de las conectivas se da de la siguiente manera. La conjunción clásica ($\wedge$) está definida por las reglas ($\wedge I$), ($\wedge D$), ($\wedge I'$) y ($\wedge D'$). La disyunción clásica ($\vee$) está definida por las reglas ($\vee I$), ($\vee D$), ($\vee I'$) y ($\vee D'$). Estas reglas se pueden encontrar en el Apéndice de esta tesis. Al perder Contracción y Debilitamiento, estos pares se separan y se tienen las siguientes conectivas:

Conjunción extensional (aditiva): Definida por ($\wedge I$) y ($\wedge D$).

$$\frac{\Gamma, (A), (B) \vdash \Delta}{\Gamma, \sqcap B \vdash \Delta}\ (\sqcap\ \text{I.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash B \sqcap \Delta}\ (\sqcap\ \text{D.})$$

Disyunción extensional (aditiva): Definida por ($\vee I$) y ($\vee D$).

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \sqcup B \vdash \Delta}\ (\sqcup\ \text{I.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash (A), (B), \Delta}{\Gamma \vdash A \sqcup B, \Delta}\ (\sqcup\ \text{D.})$$

Conjunción intensional (multiplicativa): Definida por ($\wedge I'$) y ($\wedge D'$).

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B \vdash \Delta}\ (\otimes\ \text{I.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash B \otimes \Delta, \Delta'}\ (\otimes\ \text{D.})$$

Disyunción intensional (multiplicativa): Definida por ($\vee I'$) y ($\vee D'$).

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' A \oplus B \vdash \Delta, \Delta'} (\oplus \text{ I.}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \otimes B} (\oplus \text{ I.})$$

Ripley considera dos tipos de *Modus Ponens* metainferencial. El primero es uno con contextos compartidos (MPCC) y el segundo es uno libre de contextos (MPLC):

$$\text{MPCC}\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash A \supset B, \Delta}{\Gamma \vdash B, \Delta} \qquad\qquad \text{MPLC}\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma' \vdash A \supset B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash B, \Delta, \Delta'}$$

Para el no contractivista, cada una de estas reglas tiene dos posibles lecturas dependiendo de la interpretación dada a las conectivas (ya sea aditiva o multiplicativa). Debido a que tener MPCC y Corte permitiría el surgimiento de una oración tipo Curry, el no contractivista no puede admitir MPCC.

Otro problema a tener en cuenta es el de la CUR. Teniendo que todos los A son B (es decir $[A/B]$) y que x es A (es decir Ax), parece intuitivo concluir que x es B (es decir Bx). Desafortunadamente, el no contractivista se enfrenta a problemas con esto ya que este enfoque no permite derivar contracción condicional. Ripley sugiere que el no contractivista admita una interpretación aditiva que le permita inferir $\vdash [A/A], [A/A]$ incluso cuando no se valide $\vdash [A/A]$ (cf. *Ibíd*, p. 311).

El último problema que presenta Ripley es que el no contractivista necesita proceder con cuidado cuando se trata del razonamiento acumulativo. Esto es porque hay riesgo de utilizar premisas repetidas, lo cual es un síntoma de Contracción. Además de esto, Ripley ha mostrado que el no contractivista no puede usar Transitivdad irrestricta. Ripley explica que una relación de consecuencia obedece Corte Cauteloso cuando $\Gamma \vdash B$ se sigue de la validez de $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma, A \vdash B$. El no contractivista no puede aceptar esto como válido ya que los problemas del razonamiento acumulativo aplican a Corte Cauteloso también.

Mares y Paoli retoman esta estrategia para discutir el problema de desambiguación de conectivas que enfrentan los no contractivistas. Debido a que cada conectiva clásica será interpretada o bien extensionalmente (es decir, con una evaluación veritativo-funcional) o bien intensionalmente (con una evaluación que apela a información adicional como contextos), las reglas no pueden ser aplicadas indistintamente en cada caso. Mares y Paoli distinguen dos tipos de relación de consecuencia.

La consecuencia externa es aquella dada por las reglas de introducción de conectivas a la derecha. Con esta noción se da el significado de las conectivas al explicar cuándo se puede inferir algo de proposiciones que las incluyan. Debilitamiento y Contracción se aplican con esta noción de consecuencia pero no con la de consecuencia interna.

La consecuencia interna, por su parte, está dada la regla de introducción del condicional a la derecha. El teorema de la deducción es una consecuencia directa de esta regla de introducción y los lógicos subestructurales no han podido probar este teorema para la relación de consecuencia externa (cf. (Mares y Paoli, 2014, p. 454.)).

Por otra parte, Mares y Paoli explican que, dada la regla ($Ext\ \in$) presentada en la sección 2 de este capítulo, para obtener como resultado la igualdad entre a y b es necesario que partiendo de $x \in a$ se llegue $x \in b$ y viceversa. Según Mares y Paoli, esto es una versión del axioma de Extensionalidad que no va de acuerdo con la noción de identidad subestructural. La razón de esto es que para poder llegar a la conclusión de que $a = b$ se presupone el bicondicional $\forall x(x \in \alpha \equiv x \in \beta)$ el cual tiene residuo para la conjunción extensional ($\otimes$) y no con la intensional ($\sqcup$).

El punto más importante es que si interpretamos la coma en ($Ext\ \in$) como una conjunción intensional, podemos aceptar el bicondicional. Tomando las comas en ($Ext\ \in$) como una conjunción extensional, el bicondicional no puede ser admitido ya que se requiere que el bicondicional sea intensional y $\sqcup$ es un operador extensional.

Ahora bien, para la regla de ($= I_i$), si la relación de consecuencia se interpreta como interna, se puede probar lo siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\phi \vdash \phi}{a = b, \phi \vdash \phi}\,(= I_i)}{a = b \vdash \phi \supset \phi}\,(\supset D)$$

donde a no aparece en ϕ. Al no haber una conclusión relevante, Mares y Paoli consideran que la relación de consecuencia debería ser interpretada como externa. Así, mientras que ($Ext\ \in$) es una regla interpretada intensionalmente, ($= I_i$) es una regla extensional, lo cual significa que la prueba en la paradoja de Hinnion-Libert que mezcla ambos tipos de conectivas quedaría bloqueada (cf. *Ibíd*, p. 460, 461).

La moraleja de la paradoja de Hinnion-Libert es que, según lo señalado por Mares y Paoli, para adoptar la estrategia no contractivista es importante prestar atención a la combinación de las reglas que se utilizan. Debido a que cada conectiva debe ser interpretada ya sea extensional o intensionalmente, hay pasos que quedan bloqueadas en las pruebas de las paradojas.

3.4.2. La estrategia no transitivista

Las características que hacen que el enfoque no transitivista sea una mejor opción que el no contractivista son, sobre todo, lo opuesto de los argumentos presentados en la estrategia anterior contra la postura no contractivista. Primero, todos los argumentos clásicamente válidos son válidos también para la estrategia no transitivista independientemente de si las conectivas son interpretadas aditiva o multiplicativamente (cf. (Ripley, 2015, p. 312.)). Más aún, desambiguar conectivas aditivas y multiplicativas es una tarea más fácil con esta estrategia ya que hay una única lectura válida para las oraciones y argumentos de tipo *Modus Ponens*.

En cuanto a MPCC y MPLC, Ripley argumenta que el no transitivista no puede aceptar ninguna de estas formas ya que el *Modus Ponens* es una forma de expresar Corte, que es precisamente la regla que está siendo rechazada por este enfoque. Si se tiene una premisa $\vdash A$ y otra $A \vdash B$, la única manera de llegar a B es a través de Corte. Una objeción a este punto podría ser que rechazar MPCC y MPLC es una pérdida demasiado grande. Si se considera que permitir el *Modus Ponens* es una de las características más importantes con las que cumple un condicional, perder MPCC y MPLC podría parecer una mala estrategia. Ripley responde que, debido a que el *Modus Ponens* sigue disponible como teorema y regla, existe la posibilidad de tratar a los condicionales utilizando la siguiente regla:

$$\frac{\Gamma \vdash A \supset B, \Delta}{\Gamma, A \vdash B, \Delta}$$

En cuanto a la CUR, la propuesta no transitivista “valida tanto el condicional como la contracción CUR sin mayor problema” (Ripley, 2015, p. 321.) debido a que todas las inferencias clásicamente válidas son recuperadas.

El razonamiento acumulativo podría representar una mayor amenaza. El no transitivista debe ser cuidadoso y evitar usar las conclusiones de un argumento como premisas de otro ya que esto asegura la validez de Corte. Esto significa que el razonamiento acumulativo no es seguro para ninguna de las estrategias exploradas hasta el momento. Sin embargo, Corte Cauteloso resulta ser problemático para ambos enfoques y esto puede entenderse como una muestra de que hay buenas razones para dudar de Transitividad. Así, Corte Cauteloso descarta lo que parece ser el punto de la Transitividad y esto puede ser otro elemento a favor de esta estrategia.

Por otra parte, Restall (2007) expone la propuesta de Tennant quien rechaza la relación transitiva de la consecuencia. Para Tennant, tener una prueba que parte de A y llegue a B y otra que vaya de B a C no significa que hay una prueba directa de A a C. En ese caso debe haber por lo menos una refutación de A (es decir, una prueba que vaya de A a una conclusión vacía) o una prueba de C (es decir, una prueba que parta de premisas vacías y llegue a C). Restall llama *débilmente válidos* a los argumentos que cumplen con tener una prueba del tipo que da Tennant que parta de un superconjunto de las premisas y llegue a un superconjunto de las conclusiones. Debido a que se sigue cumpliendo Transitividad, esto no es suficiente para librarse de un problema de venganza para las paradojas tipo Curry (cf. *Ibíd*, p. 7).

En contra de la estrategia no transitivista, Beall y Restall (2006) dan como objeción a rechazar Transitividad que una relación de consecuencia debe cumplir, al menos, con ser reflexiva y transitiva. Debido a que ellos consideran que estos requisitos deben cumplirse para afirmar que se está tratando con una lógica, la estrategia no transitivista podría no parecer exitosa (cf. p. 91).

Rechazar Transitividad no es una estrategia que se puede motivar fácilmente. Finalmente, tal como lo explica (Paoli, 2013, p. 18.), suele considerarse que la derivabilidad es transitiva. Teniendo una prueba que parte de A y llega a B y otra que parte de B y llega a C, parece claro que se ha mostrado que se puede llegar de A a C.

3.4.3. La estrategia no reflexiva

Hasta ahora Ripley ha inclinado la balanza a favor del enfoque no transitivista pero todavía hay una tercera opción que considerar como candidata para una lógica subestrctural. French (2016) ha sugerido que Reflexividad ha sido ignorada como una alternativa pero es igual de sospechosa que Contracción o Transitividad. Él ofrece los siguientes argumentos para apoyar la estrategia no reflexiva.

El primer punto que expone es que una instancia de irreflexividad es la relación de consecuencia que garantiza la verdad de la conclusión en virtud de la verdad de las premisas. El ejemplo de French es que no es posible obtener $p \wedge q$ solo de p ya que la verdad de p no necesariamente está sostenida de la verdad de la conjunción. Esto quiere decir que el valor de verdad de p podría haber estado dado independientemente de su valor con respecto a la conjunción y de ser este el caso, la verdad de la conclusión p no está garantizada en virtud de la premisa $p \wedge q$ sino de algo más.

El segundo argumento se vale de una oración como “La conclusión de esta inferencia es falsa; por lo tanto, la conclusión de esta inferencia es falsa” la cual parece una instancia de una oración reflexiva que tiene una premisa verdadera y una conclusión falsa. El tercer punto que explica French es que las lógicas heterogéneas han explorado la propuesta de que, tomando en consideración premisas de diferentes lenguajes, se puede decir que una proposición no se sigue de su versión en un lenguaje diferente ya que no hay preservación de verdad en el mismo lenguaje.

Todavía hay espacio para debatir la primera propuesta porque no es claro que las mismas razones que fundamentan la verdad de p no serán aquéllas que fundamenten $p \wedge q$. Independientemente de que no haya una relación de consecuencia que lleve de p a $p \wedge q$ e incluso cuando se puede obtener cada una de estas proposiciones de diferentes premisas, los criterios que hacen verdadera a una de estas proposiciones podrían ser los mismos que hacen verdadera a la otra.

La oración en el segundo punto parece ser similar a la oración del mentiroso. Por supuesto, tener este tipo de oraciones es problemático ya que dan la impresión de que estamos frente a un círculo vicioso en la argumentación. El problema con esto es que no es claro que no se pueda lidiar con este tipo de oraciones con otros mecanismos que no requieran deshacerse de Reflexividad.

El argumento de French acerca de las lógicas heterogéneas puede también ser desafiado si se considera que las traducciones de oraciones conllevan de hecho la misma información. No parece imposible asegurar que una oración que se considera verdadera en un lenguaje permanezca siendo verdadera en otro.

Así, las objeciones que da French a la Reflexividad pueden ser tomadas como instancias interesantes de escenarios problemáticos y puede haber más que decir a favor de este enfoque. Incluso así, la estrategia no reflexiva parece requerir de motivaciones más convincentes para posicionarse como la solución más conveniente hasta el momento.

Tal como sucede con la estrategia no transitivista, Beall y Restall descartan la opción de rechazar Reflexividad puesto que un sistema irreflexivo de consecuencia lógica se aleja de lo que se consideraría como consecuencia lógica (cf. (Beall, Jc y Restall, G., 2006, p. 91)). Para defender la estrategia no reflexiva se necesitaría argumentar a favor de que la consecuencia lógica no requiere reflexividad, lo cual no parece fácil de defender.

3.4.4. La estrategia sin Debilitamiento

Paoli (2013) da tres argumentos a favor de rechazar Debilitamiento. El primero es una objeción desde el punto de vista relevantista. Para éste se considera que la regla de (Deb. I) introduce información que no parece ser relevante para la conclusión como se muestra en seguida:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}\text{(Deb. I)}}{A \vdash B \supset A}(\supset D.)}{\vdash A \supset (B \supset A)}(\supset D.)$$

El resultado es una de las paradojas de la implicación material por lo que no es deseable poder llegar a este resultado. Uno de los objetivos de los lógicos relevantistas ha sido evitar este paso y rechazar Debilitamiento podría impedir realizar la prueba señalada (cf. *Ibíd* p. 21, 22).

La segunda objeción está relacionada con el principio de explosión. Teniendo Debilitamiento se puede realizar la siguiente prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash}(\neg I)}{\neg A, A \vdash B}\text{(Deb. D)}}{\neg A \vdash A \supset B}(\supset D)}{\vdash \neg A \supset (A \supset B)}(\supset D)$$

El último paso es una manera de expresar el principio de explosión, el cual no es validado por la lógica paraconsistente. En este caso, teniendo como lógica subyacente un sistema paraconsistente, poder derivar este resultado no es deseable (cf. *Ibíd* p. 22, 23).

Por último, la tercera objeción involucra la noción de monotonicidad. Paoli explica que este principio puede ser disputado si se acepta, por ejemplo, que la manera en la que pensamos cotidianamente no es monotónica. Una proposición A puede ser asegurada bajo ciertas condiciones y refutada dados contextos adicionales (cf. *Ibíd* p. 24).

Si bien todas estas son buenas razones para rechazar Debilitamiento, adoptar una lógica subestructural que no tenga este principio no resolvería todas las paradojas tratadas. En particular, las paradojas de Curry y Moh Shaw-Kwei seguirían sin ser resueltas. Considero que la mejor opción sería tomar en cuenta el resto de las opciones subestructurales expuestas hasta el momento ya que podrían ser más fructíferas para obtener una solución uniforme.

3.5. La trivialidad de la teoría intuitiva de conjuntos

Hasta ahora da la impresión de que todos los prospectos para solucionar las paradojas conllevan algún inconveniente. Dado que todas las soluciones tienen costos altos, las opciones para la estrategia no clásica para mantener la teoría de conjuntos intacta parecen ser, o bien adoptar una lógica subestructural con las consecuencias que eso conlleve, o aceptar la trivialidad de la teoría.

Øgaard (2016, p. 264) habla de los prospectos para la teoría intuitiva de conjuntos. Sin una lógica subestructural, es decir conservando todas las reglas estructurales, además de las reglas $A \vdash \neg(A \supset \neg A)$ y $A \vdash B \supset A$ se asegura la trivialización. De igual forma, teniendo la disyunción intensional junto con $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$ se asegura la trivialidad de la teoría ingenua de conjuntos. Además de esto, tampoco se puede tener la Ley de Leibniz para la identidad sin restricciones. No poder utilizar permutación o la Ley de Leibniz irrestricta es una pérdida importante para la teoría de conjuntos intuitiva porque sin estas nociones, no se puede definir la noción de par ordenado y sus abstracciones (véase (Øgaard, 2016, Apéndice B)).

Retomando el argumento de Mares y Paoli, Øgaard considera como posible estrategia el no contractivismo. Incluso teniendo en cuenta las distinciones de relación de consecuencia que hacen Mares y Paoli, Øgaard muestra que cualquier lógica subestructural que tenga la constante de Ackermann ($A \dashv\vdash \mathbf{t} \supset A$) y fusión ($(A \circ B) \supset C \dashv\vdash A \supset (B \supset C)$) trivializará la teoría de conjuntos. De acuerdo con esto, Øgaard considera que la mejor opción que se tiene a la mano consiste en optar por una teoría que bloquee Transitividad en la relación de consecuencia, y Corte a nivel estructural (cf. *Ibíd*, p. 265).

Ya desde la sección 4.1 se han expuesto las dificultades de la postura no contractivista.

En vista de esto, parece difícil postular una teoría de conjuntos que se deshaga por completo de todas estas paradojas sin perder una gran parte de sus supuestos. El análisis de Ripley, tal como lo ha notado Øgaard, parece ser la mejor alternativa hasta el momento.

Las pruebas de Ogaard muestran que la teoría de conjuntos ingenua sólo puede mantenerse intacta a un costo muy elevado que es el de tener una lógica demasiado pobre. Si no se acepta la estrategia no transitivista, parece que la teoría de conjuntos no puede librarse de la trivialidad.

3.6. Conclusiones

En este capítulo se expusieron dos paradojas que muestran que las soluciones a las paradojas de Curry y de Moh Shaw-Kwei no son suficientes para prevenir nuevos problemas de venganza. En particular, cualquier estrategia que pretendiera rechazar alguna regla operacional no es de utilidad para la paradoja de Hinnion-Libert. Por otra parte, con la paradoja de Grišin se ha mostrado que el principio de Extensionalidad puede también ser sospechoso de generar trivialidad en la teoría de conjuntos.

Las estrategias exploradas fueron los enfoques subestructurales no contractivistas, no transitivistas, no reflexivos y sin Debilitamiento. El último no parece un buen candidato para solucionar las paradojas ya que, al no aparecer en las cuatro paradojas investigadas, no podría dar una solución unificada. La estrategia no reflexiva, si bien interesante, no parece estar suficientemente motivada. Por esta razón considero que la estrategia no reflexiva no podría ser considerada como una solución satisfactoria.

Así, los dos principales candidatos parecen ser la estrategia no contractivista y la no transitivista. Los argumentos mostrados en la sección 4.1 muestran que rechazar Contracción no es algo que pueda tomarse a la ligera. El rechazo de Corte parece ser la propuesta más sólida hasta el momento pero no por ello está libre de objeciones.

Siendo este el caso, a menos que se acepte la propuesta no transitivista de Ripley, no es claro que haya una manera satisfactoria de evitar la trivialidad de la teoría de conjuntos sin dejar de lado nociones como Extensionalidad o Comprehensión. Sin alguna otra propuesta para sustituir estos principios básicos de la teoría de conjuntos, esta última opción tampoco es satisfactoria.

Conclusiones

En este escrito hablé acerca de las paradojas conjuntistas de la estrategia no clásica, así como de sus posibles soluciones. Estas paradojas surgen como un problema de venganza para la teoría de conjuntos ya que son similares a la paradoja de Russell en algunos componentes. Todas las paradojas tratadas a lo largo de este escrito afectan a la teoría ingenua de conjuntos, la cual se caracteriza por incluir al axioma d Comprehensión irrestricto y al axioma de Extensionalidad. Retomando a Restall (2007) estos principios lucen así

$$\frac{\Gamma, \Phi(\alpha) \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \in \{x : \Phi(x)\} \vdash \Delta} (\in I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Phi(\alpha), \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \in \{x : \Phi(x)\}, \Delta} (\in D)$$

$$\frac{\Gamma, x \in \alpha \vdash x \in \beta, \Delta \qquad \Gamma, x \in \beta \vdash x \in \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha = \beta, \Delta} (Ext \in)$$

donde las primeras dos reglas, ($\in I$) e ($\in D$), representan Comprehensión y la tercera, ($Ext \in$) representa Extensionalidad. Expliqué que la solución de la estrategia clásica a la paradoja d Russell consiste en restringir el axioma de Comprehensión. En contraste, la estrategia no clásica lo mantiene pero modifica la lógica subyacente a la teoría de conjuntos.

En el primer capítulo hablé de la paradoja de Russell y las soluciones en la estrategia clásica. Expuse que el problema que tiene la estrategia clásica con la versión irrestricta de Comprehensión es que, si ϕ es la propiedad de no pertenecerse a sí mismo, cuando se considera un conjunto $\mathfrak{R} = \{x : \phi(x)\}$ podríamos sustituir x en ($\in I$) o ($\in D$) por $\mathfrak{R}$, lo cual da lugar a la paradoja de Russell. Por esta razón, rechazan esta versión del principio y en su lugar se retoma la propuesta de Zermelo que tiene el siguiente esquema de Comprehensión donde B no tiene variables libres $\forall A \exists B \forall x (x \in B \equiv (x \in A \wedge \phi))$.

En el capítulo 2 expliqué como, en comparación, la estrategia no clásica considera que esta no es la mejor estrategia para solucionar la paradoja de Russell. Esto se debe a que no existe una buena alternativa para sustituir a Comprehensión como definición de conjunto. La estrategia no clásica no está conforme con que el enfoque clásico rechace Comprehensión sin dar otra definición que sea tan buena como lo es este axioma. La importancia de esto radica en que, según el punto de vista de la estrategia no clásica, ya se tenía una buena definición con Comprehensión que además era intuitiva. Así, la estrategia clásica adoptó a la jerarquía acumulativa para sustituir la noción de conjunto pero esta construcción no estaba libre de problemas.

Para solucionar esto, la estrategia no clásica optó por mantener la teoría ingenua de conjuntos y cambiar la lógica subyacente por una paraconsistente relevante. Desafortunadamente, pese a que la lógica paraconsistente no admite el principio de explosión ($A, \neg A \vdash B$) y las contradicciones no necesariamente llevan a la trivialidad de la teoría, la estrategia no clásica tiene otros problemas.

En el mismo capítulo hablé de las dos primeras paradojas que surgen en la estrategia no clásica, a saber, la paradoja de Curry y la de Moh Shaw-Kwei. Ambas parecen un caso de problemas de venganza ya que surgen en el contexto de la teoría ingenua de conjuntos y comparten algunas reglas con la paradoja de Russell. Recordemos que la paradoja de Curry surge teniendo un conjunto $\mathfrak{C} = \{c \in x \supset \bot\}$ junto con las reglas de Contracción y Separación. La de Moh Shaw-Kwei es una generalización de la paradoja de Curry. Esta simplemente indica que Separación puede ser aplicada tantas veces como condicionales aparezcan en la definición del conjunto. Así, teniendo un conjunto en el que suceda n veces un condicional, digamos $\mathfrak{C} = \{x \in x \to^n p\}$, se aplicará Separación n número de veces hasta obtener p.

Las primeras soluciones que consideré fueron las presentadas por Priest (2006) en el capítulo 2 de *In Contradiction*. Las estrategias, al estar inscritas en el enfoque no clásico, tienen como base una lógica paraconsistente. Priest considera las estrategias que pueden rechazar Separación o Contracción. La estrategia material invalida Separación recupera los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo Fraenkel pero pierde argumentos en lenguaje natural. La estrategia relevante impide Contracción recuperando operaciones booleanas (como unión e intersección), pero pierde la apelación a la vacuidad, reducción al absurdo, la noción de conjunto vacío, unicidad y cuantificación irrestricta. La estrategia de teoría de modelos recuperaría las interpretaciones en las que se puede tener tanto Comprehensión como Extensionalidad que además sean modelos de ZF pero que tiene un solo conjunto inconsistente el cual representa a cualquier conjunto no bien fundado e inconsistente. Por último, la estrategia metateórica paraconsistente se pregunta si se pude razonar acerca de los conjuntos a partir de una lógica paraconsistente, la cual tiene como ventaja que puede recuperar lo expresado por la lógica clásica. El problema con esta teoría es que la metateoría de la teoría de conjuntos paraconsistente es inconsistente y no es claro que se pueda lograr la reconstrucción. Además de que, como esta estrategia busca rechazar Separación, se tendrá que recurrir al Silogismo Disyuntivo que es una regla refutable.

Las estrategias presentadas por Priest fueron de utilidad para considerar qué alternativas se tiene si se atacan estas dos reglas comunes a las dos paradojas tratadas en el segundo capítulo. Consideró que estas estrategias son un buen primer acercamiento pero no son suficientes para solucionar las paradojas ya que, como desarrollé en el capítulo 3, existen otras paradojas que nuevamente parecen problemas de venganza.

Las siguientes paradojas que traté fueron las de Hinnion-Libert y Grišin. La primera surge de definir un conjunto $\mathfrak{H} = \{x : \{y : x \in x\} = \{y : p\}\}$ que se puede leer como "el conjunto de todos los conjuntos tales que los conjuntos que se pertenecen a sí mismos son idénticos a los conjuntos que cumplen alguna propiedad p". Una de las cosas más importantes que se debe notar es que no se utiliza conectiva alguna para definir el conjunto por lo que las estrategias de Priest que invalidan Separación no son de mucha utilidad para solucionar esta paradoja. Por otra parte se tiene un problema de trivialización similar al que se vio con las paradojas de Curry y Moh Shaw-Kwei, ya que no es necesario llegar a una contradicción para concluir una proposición arbitraria.

En el mismo capítulo hablé de la paradoja de Grišin, la cual surge de tomar la teoría de conjuntos BCK y añadir el axioma de Extensionalidad. Si bien esta paradoja sí utiliza conectivas para definir al conjunto, su peculiaridad es que la paradoja aparece al incorporar Extensionalidad cuando, normalmente, el problema suele ser incluir Comprehensión.

Concluí el tercer capítulo hablando de las posibles estrategias para solucionar las cuatro paradojas. Todas ellas tienen en común el uso de las reglas estructurales de Reflexividad, Contracción y Transitividad. Además, las paradojas de Hinnion-Libert y de Grišin tienen en común el uso de Debilitamiento. Parece una estrategia sensata considerar una lógica subestructural, es decir una lógica que rechace alguna de estas reglas, para solucionar las paradojas en cuestión.

Expuse que las opciones menos viables eran Reflexividad y Debilitamiento. Para la primera estrategia utilicé el trabajo de French (2016) quien da tres puntos a favor de rechazar Reflexividad. El primer argumento a favor es uno que apela a la irreflexividad de la relación de consecuencia, el segundo es la falsedad de una oración aparentemente reflexiva como "la conclusión de esta inferencia es falsa; por lo tanto, la conclusión de esta inferencia es falsa", el tercer argumento es acerca de las lógicas heterogéneas en las que podría decirse que no hay preservación de verdad de un lenguaje al otro porque la relación de consecuencia se da para un lenguaje en particular. Objeté estos tres argumentos diciendo que ninguno de estos puntos parece lo suficientemente fuerte como para dudar de Reflexividad.

En cuanto a la estrategia que rechaza Debilitamiento retomé a Paoli (2013) quien da una objeción desde el punto de vista relevantista, otra desde el punto de vista paraconsistente y una tercera tomando en cuenta monotonicidad. Si bien todas las objeciones tienen sus puntos a favor, rechazar Debilitamiento no parece la mejor opción para una solución unificada porque no está presente en todas las paradojas.

Según la exposición, las estrategias más fuertes son la no contractivista y la no transitivista. Aunque la primera ha sido una opción ampliamente explorada, Ripley (2015) ha señalado algunos puntos en contra de esta estrategia, la mayoría de los cuales parecen ser puntos a favor la estrategia no transitivista.

El primer problema es que la estrategia no contractivista no recupera muchos argumentos que son válidos en la lógica clásica. Además de esto, rechazar Contracción significa que las conectivass tienen que ser desambiguadas en cada oración para saber si las conectivas en juego son aditivas o multiplicativas. Otro punto a considerar es que el no contractivista debe rechazar (MPCC) ya que teniendo esta regla junto con Corte se puede construir una oración tipo Curry. Esta postura también tiene problemas con la cuantificación universal restricta pues teniendo un argumento con las premisas “Todos los A son B” y que “x es A” no se puede concluir que “x es B” aunque parezca una conclusión intuitiva.

Un punto que tienen en común la postura no contractivista y la no transitivista es que el razonamiento acumulativo es riesgoso. Podría utilizarse de nuevo alguna premisa que haya aparecido anteriormente, lo cual sucede cuando hay Contracción, o utilizar la conclusión de un argumento como premisa de otro, que es un síntoma de Transitividad. Además de esto, Ripley explica que ambas estrategias deben evitar Corte Cauteloso puesto que recupera algunos problemas del razonamiento acumulativo. Por esta razón, ni el no contractivista ni el no transitivista pueden considerar una relación de consecuencia que admita Corte Cauteloso y, dado que parece ser una caracterización básica de Transitividad, rechazar esto es un punto más a favor de la postura no transitivista.

También retomé a Mares y Paoli (2014) para hablar del problema que la postura no contractivista enfrenta con respecto a la desambiguación de las conectivas. Teniendo una relación de consecuencia externa es válido utilizar Debilitamiento o Contracción pero no sucede lo mismo con la relación de consecuencia interna. También se tiene que interpretar las conectivas en las fórmulas a cada lado de la relación como extensionales. Debido a que la relación de consecuencia para la paradoja de Hinnion-Libert parece ser externa puesto que “nos permite formular ciertas normas de aserción y negación” (*Ibíd* p. 460.). Además, las comas en la regla de ($Ext\ \in$) debe ser intensional para que el bicondicional que se presupone para la igualdad, es decir $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$, sea aceptado. Este bicondicional tendría residuo para la conjunción intensional y es una regla para la consecuencia interna. Sin embargo, la relación de consecuencia era externa y daba una interpretación extensional por lo que la inferencia queda bloqueada. Por otra parte, la regla de ($= I_i$) es también una regla para la consecuencia externa y no puede ser aplicada al en la misma derivación que ($Ext\ \in$).

En cuanto a la postura no transitivista, consideré la objeción dada por Beall, Jc y Restall, G. (2006) en la que se sostiene que una noción de consecuencia debe ser por lo menos reflexiva y transitiva (cf. *Ibíd* p. 91.). Retomé también a Paoli (2013) quien, en concordancia con lo dicho por Beall y Restall, explica que Transitividad no se puede rechazar fácilmente puesto que se considera que la derivabilidad es transitiva. Así, teniendo una prueba de A a B y otra de B a C, es difícil pensar que no se ha mostrado que de A se puede llegar a C.

De las estrategias que expuse, el rechazo de Contracción y el de Transitividad parecían ser las opciones más viables. Considero que las objeciones de Ripley son suficientemente fuertes como para pensar que el no contractivismo no es la mejor alternativa para resolver las paradojas de la estrategia no clásica. Aunque este enfoque ha sido ampliamente estudiado, los costos de perder Contracción parecen ser demasiado importantes como para ser ignorados.

Por esta razón pienso que de las cuatro estrategias que traté, la más fuerte es rechazar Transitividad. Esto no quiere decir que el no transitivismo se encuentre libre de problemas y los obstáculos que enfrenta tampoco se pueden descartar con facilidad. Asumiendo de cualquier manera que esta estrategia es la que se debería adoptar al tener muchos puntos fuertes a favor, no es claro que las razones por las que se estaría aceptando esta solución se encuentren correctamente motivadas.

Aunque la estrategia de Ripley tenga buenas ventajas con respecto al resto, la solución puede parecer *ad hoc* si no se acepta además que la relación de consecuencia no tiene por qué ser transitiva. Debido a que no es claro que esto se logre, optar por esta opción no puede ser una solución satisfactoria al momento.

Consideré algunas estrategias que podían ser aplicadas para resolver todas las paradojas, y que por lo tanto servían para dar una solución unificada, pero los costos de todas ellas parecen demasiado altos como para ser tomados en serio. En otros casos, la falta de una mejor explicación para motivar esa estrategia sobre las otras que no consista únicamente en mostrar que funciona adecuadamente en donde otras fallan hace que no puedan ser consideradas como una solución satisfactoria.

El capítulo 3 finalizó con un breve resumen del texto de Øgaard en el que habla de las maneras en las que se puede trivializar la teoría ingenua de conjuntos. Øgaard también señala al no transitivismo como la mejor opción hasta el momento. Creo que la estrategia puede dar mejores resultados que el resto pero pienso que las objeciones, aunque parezcan menos que las que Ripley hace al no contractivismo, no son menores.

El objetivo principal de esta tesis fue investigar si existe una solución satisfactoria y unificada para las paradojas de la teoría de conjuntos no clásica. Mi conclusión es que existen soluciones que tratan a todas las paradojas pero ninguna de esas estrategias es satisfactoria en tanto que los costos de todas ellas son demasiado grandes para ser consideradas como una solución definitiva.

Apéndice A

Cálculo de Secuentes

En el cálculo de Gentzen se utilizan principalmente de dos definiciones. En primer lugar, se requiere de un lenguaje lógica el cual consta de variables proposicionales ($p_1, p_2, p_3, \ldots$) y conectivas ($\neg, \wedge, \vee, \supset$) y metavariables (p, q, r, ... para variables proposicionales y A, B, C, ... para fórmulas cualesquiera.). En segundo lugar, se necesitan secuentes. Estos tienen la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$, donde tanto Γ como Δ son proposiciones finitas y la expresión indica lo que se sigue, siendo en este caso Γ el antecedente del secuente del cual se sigue Δ como sucedente. Así, expresiones como $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ tienen el mismo significado que $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B_1 \vee \ldots \vee B_m$. En tercer lugar, se requieren postulados que actúan como los axiomas o reglas. Estos se presentan en cualquiera de las siguientes dos formas:

$$\frac{S_1}{S_2} \qquad\qquad \frac{S_1 \quad S_2}{S_3}$$

Los secuentes encima de la línea horizontal serán llamados *superiores* y los que se encuentran debajo serán llamados *inferiores*. El único axioma es

$$\text{(Id)}\ \frac{}{A \vdash A}$$

Las reglas estructurales que se tendrán en cuenta serán las siguientes:

Intercambio

$$\text{(Int. I)}\ \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Pi}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Pi} \qquad\qquad \text{(Int. D)}\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Pi}$$

Debilitamiento

$$\text{(Deb. I)}\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \text{(Deb. D)}\ \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

Contracción

$$\text{(Contr. I)}\ \frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \text{(Contr. D)}\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}$$

Corte

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Pi \vdash \Sigma}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}$$

Las reglas operacionales son las siguientes:

$$(\neg I)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\neg D)\ \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(\wedge I)\ \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\wedge D)\ \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta}$$

$$(\vee I)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\vee D)\ \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta}$$

$$(\supset I)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Pi \vdash \Sigma}{A \supset B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma} \qquad (\supset D.)\ \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B}$$

Ketonen propuso las siguientes nuevas versiones para las reglas, las cuales se pueden probar a partir de las reglas de Gentzen:

$$(\wedge I')\ \frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\wedge D')\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Pi \vdash \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma, A \wedge B}$$

$$(\vee I')\ \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Pi \vdash \Sigma}{A \vee B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma} \qquad (\vee D')\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\supset I')\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \supset B, \Gamma \vdash \Delta}$$

$$(\supset D')\ \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \supset B}$$

Las fórmulas representadas por las letras griegas se conocen como *fórmulas laterales* o *contexto*, mientras que las apariciones de A y B en los secuentes superiores (premisas) son fórmulas auxiliares y en los secuentes inferiores (conclusión) son fórmulas principales.

La intención de Gentzen para las reglas operacionales era que no hubiera información que se perdiera al pasar de las premisas a la conclusión y es por ello que hay reglas para antecedentes y consecuentes. En cuanto a las reglas estructurales parece que la intención es que no se introduzcan nuevas conectivas pero que se logre manipular la información de la estructura de los secuentes.

Estas nuevas versiones podían ser demostradas con las reglas provistas por Gentzen. En la propuesta de Ketonen, las premisas de ($\supset I$') comparten el mismo contexto mientras que ($\supset I$) no. Considerando esto, se dice las reglas como la de Ketonen son dependientes de contexto mientras que reglas como las de Gentzen son independientes de contexto.

Con estas reglas se pueden probar las tres propiedades que caracterizan a las *conectivas contractivas*. Considerando que en (C1-C3) $\odot$ representa la generalización de una conectiva cualquiera, las siguientes pruebas muestran que ésta puede ser sustituida por el condicional en el cálculo de Gentzen:

(C1) $\alpha \supset \beta \vdash \alpha \odot \beta$

$$\text{(Id)}\ \frac{\alpha \supset \beta \vdash \alpha \supset \beta}{\alpha \supset \beta \vdash \alpha \supset \beta}$$

(C2) $\alpha, \alpha \odot \beta \vdash \beta$

$$\text{(Int. I.)}\ \dfrac{(\supset \text{I.})\ \dfrac{\text{(Id)}\ \dfrac{}{\alpha \vdash \alpha} \qquad \text{(Id)}\ \dfrac{}{\beta \vdash \beta}}{\alpha \supset \beta, \alpha \vdash \beta}}{\alpha, \alpha \supset \beta \vdash \beta}$$

(C3) $\alpha \odot (\alpha \odot \beta) \vdash \alpha \odot \beta$

$$(\supset \text{D.})\ \dfrac{\text{(Contr. I.)}\ \dfrac{\text{(Int. I.)}\ \dfrac{(\supset \text{I.})\ \dfrac{(\supset \text{I.})\ \dfrac{\text{(Id)}\ \dfrac{}{\alpha \vdash \alpha} \qquad \text{(Id)}\ \dfrac{}{\beta \vdash \beta}}{\alpha \supset \beta, \alpha \vdash \beta} \qquad \text{(Id)}\ \dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}}{\alpha \supset (\alpha \supset \beta), \alpha, \alpha \vdash \beta}}{\alpha, \alpha \supset (\alpha \supset \beta) \vdash \beta}}{\alpha \supset (\alpha \supset \beta) \vdash \beta}}{\alpha \supset (\alpha \supset \beta) \vdash \alpha \supset \beta}$$

Bibliografía

Bacon, A. (2015). Paradoxes of logical equivalence and identity. *Topoi*. 34(1):89–98.

Bays, T. (2014). Skolem's paradox. En Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University. Invierno 2014 edición.

Beall, Jc y Murzi, J. (2013). Two flavors of Curry's paradox. *The Journal of Philosophy*. 110(3):143–165.

Beall, Jc y Restall, G. (2006). *Logical pluralism*. Oxford University Press on Demand.

Cantini, A. (2003). The undecidability of Grišin's set theory. *Studia logica*. 74(3):345–368.

Cantor, G. (1915). *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Dover.

Castro Albano, J. (2014). La paradoja de Russell. En Barrio, E., editor, *Paradojas, paradojas y más paradojas*. College Publications.

Frege, G. (1903). Basic laws of arithmetic. Volumen I y II. Oxford University Press.

French, R. (2016). Structural reflexivity and the paradoxes of self-reference. *Ergo, an Open Access Journal of Philosophy*. 3:113–131.

Grišin, V. N. (1982). Predicate and set-theoretic calculi based on logic without contractions. *Izvestiya: Mathematics*. 18:41–59.

Halmos, P. R. (2017). *Naive set theory*. Courier Dover Publications.

Holmes, M. R. (2017). Alternative axiomatic set theories. En Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University. winter 2017 edición.

Irvine, A. D. y Deutsch, H. (2016). Russell's paradox. En Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University. Invierno 2016 edición.

Lavine, S. (2009). *Understanding the infinite*. Harvard University Press.

Libert, T. (2006). Semantics for naive set theory in many-valued logics. En *The Age of Alternative Logics*. pp. 121–136. Springer.

Mares, E. (2014). Relevance logic. En Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University. Primavera 2014 edición.

Mares, E. y Paoli, F. (2014). Logical consequence and the paradoxes. *Journal of Philosophical Logic*. 43(2-3):439–469.

Øgaard, T. F. (2016). Paths to triviality. *Journal of Philosophical Logic*. 45(3):237–276.

Paoli, F. (2013). *Substructural Logics: A Primer*. Volumen 13. Springer Science & Business Media.

Petersen, U. (2000). Logic without contraction as based on inclusion and unrestricted abstraction. *Studia Logica*. 64(3):365–403.

Priest, G. (2006). *In Contradiction*. Oxford University Press. 2 edición.

Quine, W. V. (1937). New foundations for mathematical logic. *The American Mathematical Monthly*. 44(2):70–80.

Restall, G. (2007). Curry's revenge: the costs of non-classical solutions to the paradoxes of self-reference. *Revenge of the Liar: New Essays on the Paradox*. pp. 262–71.

Restall, G. (2009). Assertion, denial and non-classical theories. En *Paraconsistency: Logic and applications*. pp. 81–99. Springer.

Ripley, D. (2015). Comparing substructural theories of truth. *Ergo, an Open Access Journal of Philosophy*. 2.

Russell, B. (1903). *The principles of mathematics*. WW Norton & Company.

Schindler, T. (2014). La paradoja de Cantor. En Barrio, E., editor, *Paradojas, paradojas y más paradojas*. College Publications.

Shaw-Kwei, M. (1954). Logical paradoxes for many-valued systems. *The Journal of Symbolic Logic*. 19(1):37–40.

Terui, K. (2004). Light affine set theory: a naive set theory of polynomial time. *Studia Logica*. 77(1):9–40.

Thomas, N. (2013). *Expressive Limitations of Naïve Set Theory in LP and Minimally inconsistent LP*. The Review of Symbolic Logic.

von Neumann, J. (1967). An axiomatization of set theory. En Van Heijenoort, J., editor, *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Volumen 9. pp. 393–413. Harvard University Press.

Zalta, E. N. (2017). Frege's theorem and foundations for arithmetic. En Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University. Verano 2017 edición.

Zardini, E. (2015). Getting one for two, or the contractors' bad deal. Towards a unified solution to the semantic paradoxes. En *Unifying the Philosophy of Truth*. pp. 461–493. Springer.