UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MÓNADAS INDUCIDAS POR LA EQUIVALENCIA DE STONE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

JOSEPH CHRISTIAN SIERRA GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. LUIS ÁNGEL ZALDÍVAR CORICHI

CIUDAD DE MÉXICO, 2017

1.Datos del alumno

Apellido paterno	Sierra
Apellido materno	Gutiérrez
Nombre(s)	Joseph Christian
Teléfono	5534236356
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	311120095

2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre(s)	Luis Ángel
Apellido paterno	Zaldívar
Apellido materno	Corichi

3. Datos del sinodal 1

Grado	Dr.
Nombre(s)	José
Apellido paterno	Ríos
Apellido materno	Montes

4. Datos del sinodal 2

Grado	M. en C.
Nombre(s)	Luis Jesús
Apellido paterno	Turcio
Apellido materno	Cuevas

5. Datos del sinodal 3

Grado	Mat.
Nombre(s)	Luis Eduardo
Apellido paterno	García
Apellido materno	Hernández

6. Datos del sinodal 4

Grado	M. en C.
Nombre(s)	Alma Violeta
Apellido paterno	García
Apellido materno	López

7.Datos del trabajo escrito.

Título	Mónadas inducidas por la Equivalencia de Stone
Número de páginas	63 p.
Año	2018

Índice general

Introducción

Dado cualquier espacio topológico S, es conocido que se puede estudiar a través de su retícula de abiertos $\mathcal{O}\,S$, de hecho esta retícula es un *marco* (local o álgebra de Heyting completa), es decir, una retícula completa $(A, \leq, \bigvee, \wedge, 0, 1)$ tal que satisface la siguiente ley distributiva:

$$a \wedge (\bigvee X) = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

para todo $a \in A$ y $X \subseteq A$.
Este análisis es conocido como *topología sin-puntos* (ver por ejemplo [Joh86], [Sim06]). Esto da pie a un funtor de la categoría de espacios topologicos $\mathcal{T}\mathrm{op}$ a la categoría de marcos

$$\mathcal{O}\colon\ \mathcal{T}\mathrm{op} \to \mathcal{F}\mathrm{rm}$$

De hecho, hay una construcción en sentido contrario, en el sentido que a cada marco se le asocia de manera universal su espacio de puntos:

$$pt\colon\ \mathcal{F}\mathrm{rm} \to \mathcal{T}\mathrm{op}$$

De tal manera que estos dos funtores forman una adjunción:
Ahora sobre este entendido, la categoría de marcos es una subcategoría de la categoría de retículas distributivas $\mathcal{DL}\mathrm{at}$ y cada retícula distributiva tiene asociada un espacio, su *espacio de Stone* (o espectro primo), esta construcción tambien resulta funtorial:

$$Spec\colon\ \mathcal{DL}\mathrm{at} \to \mathcal{T}\mathrm{op}$$

El propósito de este trabajo es hacer ver que tambien tenemos una situación adjunta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{DL}\mathrm{at} \arrow[d, bend right, "Spec"'] \\ \mathcal{T}\mathrm{op} \arrow[u, bend right, "\mathcal{O}"'] \end{tikzcd}$$

De tal manera que esta extiende la adjuncion:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{DL}\mathrm{at} \arrow[d, bend right, "pt"'] \\ \mathcal{T}\mathrm{op} \arrow[u, bend right, "\mathcal{O}"'] \end{tikzcd}$$

Además que dada una adjunción podemos considerar la mónandas inducidas en las respectivas categorías, examinamos estas mónadas para este ejemplo particular, siguiendo los pasos del autor en el artículo [Sim82].
A su vez se hacen algunas correciones del mismo artículo y se profundiza en la caractetrización de los llamados esapcios bien compactados.

La organización de este trabajo es como sigue:

En el capítulo 1 se establecen los preliminares para la lectura de este trabajo. Se introducen los espacios de Stone, Álgebras de Boole y se construyen los funtores $Spec$ y Ω.

En el capítulo 2 se dan los antecedentes categóricos en el tema de mónadas y caracterización de álgebras.

Después en el capítulo 3 se construyen los funtores $\mathcal{O}$ y σ que forman nuestra adjunción de interés, además, se observa la relación de estos funtores con los construidos previamente.

El capítulo 4 introduce la categoría de marcos, se construye el funtor de puntos, se observa con un ejemplo no trivial que la construcción del espacio de Stone es *útil* pues no todo marco tiene espacio de puntos no trivial, pero siempre tiene espacio de Stone, esta observación esencialmente muestra la diferencia entre tener algo consturctivo y tener algo que necesite un principio de elección.

Finalmente en 5 se observa que la categoría de espacios espectrales es una subcategoría plena de la categoría de espacios bien compactados, los cuales se caracterizan por sus propiedas espaciales y resultan ser las álgebras de la mónada correspondiente.

Capítulo 1

Equivalencia de Stone

En este capítulo abordaremos el teorema de representación de Stone, demostrado en 1936 por el matemático Marshall Harvey Stone. Este teorema nos da una relación uno a uno entre las Álgebras de Boole completas y los Espacios de Stone, lo cual, como se verá más adelante, se traduce en una equivalencia entre las categorías de Álgebras de Boole completas y morfismos de Álgebras de Boole $\mathcal{CBA}$ y la categoría de espacios de Stone y funciones continuas $\mathcal{S}\mathrm{tone}$.

Comencemos por dar las definiciones necesarias para entender dichas categorías.

1.1. Espacios de Stone

Consideramos $\mathcal{T}\mathrm{op}$ la categoría cuyos objetos son espacios topológicos, dichos objetos son de la forma $(S, \tau_s) \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ donde $\tau_S = \{U \subseteq S \mid U \text{ es abierto de } S\}$; usualmente se denotará $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ omitiendo la escritura de su topología.

Las flechas en esta categoría son funciones continuas entre espacios topológicos, es decir $\varphi \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, S')$ si para cada $U \in \tau_{S'}$ se tiene $\varphi^{-1}(U) \in \tau_S$.

La categoría de espacios de Stone es una subcategoría plena de $\mathcal{T}\mathrm{op}$. Un estudio más profundo de ellos se realiza en [Joh86].

Definición 1.1. *Sea* $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$

1. *Decimos que* S *es totalmente disconexo si sus únicas componentes conexas son los subconjuntos unitarios.*

2. *Decimos que* S *es totalmente separable si para cualesquiera puntos disntintos* $x, y \in S$*, existe* $U \subseteq S$ *abierto y cerrado tal que* $x \in U$ *y* $y \notin U$*.*

3. *Decimos que* S *es cero-dimensional si los subconjuntos* $U \subseteq S$ *tal que* U *es abierto y cerrado forman una base para* S*.*

Veamos la relación de estas definiciones con la separabilidad del espacio.

Lema 1.2. *Sea $S \in \mathfrak{Top}$:*

1. *Si S es totalmente disconexo entonces S es T_1.*
2. *Si S es totalmente separable, entonces S es Hausdorff y totalmente disconexo.*
3. *Si S es cero-dimensional y T_0 entonces S es totalmente separable.*

Demostración.

1. Sean $x, y \in S$ con $x \neq y$ consideremos $\{x, y\} \subseteq S$, como S es totalmente disconexo entonces $\{x, y\}$ es disconexo y así existen abiertos $U, V \subseteq S$ tal que $x \in U, y \in V$ pero $y \notin U, x \notin V$.

2. Sean $x, y \in S$ con $x \neq y$, como S es totalmente separable existe $U \subseteq S$ abierto y cerrado tal que $x \in U$ y $y \notin U$, al ser U cerrado entonces $S \setminus U$ es abierto y $y \in S \setminus U$, así S es Hausdorff.
Ahora, sea $X \subseteq S$ con más de un punto, tomemos $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces existe $U \subseteq S$ abierto y cerrado tal que $x \in U$ y $y \notin U$, como U es cerrado entonces $S \setminus U$ es abierto, además $X \subseteq U \cup (S \setminus U) = S$ pero $X \nsubseteq U$ y $X \nsubseteq S \setminus U$, es decir, X es disconexo y así S es totalmente disconexo.

3. Sean $x, y \in S$ con $x \neq y$, como S es T_0 existe $U \subseteq S$ abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$, como S es cero dimensional tiene una base de abiertos y cerrados, entonces existe $D \subseteq U$ con $x \in D$ y D abierto y cerrado.
Así, S es totalmente separable.

□

Teorema 1.3. *Sea $S \in \mathfrak{Top}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *S es compacto, Hausdorff y totalmente disconexo.*
2. *S es compacto y totalmente separable.*
3. *S es compacto, T_0 y cero-dimensional.*

Este teorema es una aplicación del lema anterior.

Definición 1.4. *Sea $S \in \mathfrak{Top}$, decimos que S es un Espacio de Stone si se cumple alguna de las siguientes:*

1. *S es compacto, Hausdorff y totalmente disconexo.*
2. *S es compacto y totalmente separable.*
3. *S es compacto, T_0 y cero-dimensional.*

Gracias al Teorema 1.3, se tiene que las definiciones para esta clase de espacios son equivalentes.

1.2. Álgebras de Boole

Las Álgebras de Boole, nombradas en honor a George Boole, son un tipo especial de retículas definidas como sigue:

Definición 1.5. *Sea $B \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$, decimos que B es un Álgebra de Boole si:*

1. *B tiene elemento máximo 1 y elemento mínimo 0.*
2. *Todo elemento de B tiene complemento, es decir, para cada $b \in B$ existe $c \in B$ tal que $b \vee c = 1$ y $b \wedge c = 0$.*

Proposición 1.6. *Sea $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ distributiva, si $a \in L$ tiene complemento, este es único.*

Demostración. Sean b y c complementos de $a \in L$ entonces:

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = b \wedge c$$

Por tanto $b \leq c$, analogamente probamos que $c \leq b$ y entonces $b = c$. □

Como un Álgebra de Boole B es en particular distributiva, tenemos que los complementos son únicos, para cada $b \in B$ denotemos $\neg b$ a su complemento.

Definición 1.7. *Sean A, B Álgebras de boole, un morfismo $f \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(A, B)$ es un morfismo de Álgebras de Boole si $f(\neg a) = \neg f(a)$ para cada $a \in A$.*

Podemos definir la categoría $\mathcal{BA}$ cuyos objetos son Álgebras de Boole y sus flechas son morfismos de Álgebras de Boole.

Definición 1.8. *Sea $B \in \mathcal{BA}$, decimos que B es un Álgebra de Boole completa si B es una retícula completa.*

Así $\mathcal{CBA}$ es la subcategoría plena de $\mathcal{BA}$ cuyos objetos son Álgebras de Boole completas.

Proposición 1.9. *Sea $B \in \mathcal{BA}$ y $F \subseteq B$ un filtro, F es máximo si y solo si para cada $a \in B$ se tiene $a \in F$ o $\neg a \in F$.*

Demostración. Sea F un filtro máximo en B y $a \in B \setminus F$, sea G el filtro generado por $F \cup \{a\}$ entonces como F es máximo tenemos $G = B$, así, existe $b \in F$ tal que $a \wedge b = 0$, además $a \vee \neg a = 1 \geq a \vee b$ entonces $\neg a \geq b$ y entonces $\neg a \in F$.

Sea F tal que para cada $a \in B$ se tiene $a \in F$ o $\neg a \in F$.
Supongamos que $F \subseteq G \subseteq B$, si $F \neq G$ entonces existe $a \in G$ tal que $a \notin F$, así $\neg a \in F \subseteq G$ por tanto $\neg a \in G$ y por ello $0 = a \wedge \neg a \in G$, es decir $G = B$.
Así, F es máximo. □

Proposición 1.10. *Sea $B \in \mathcal{BA}$ y $F \subseteq B$ un filtro, entonces F es primo si y solo si es máximo.*

Demostración. Sea F un filtro primo en B, entonces para cada $a \in B$ tenemos $a \vee \neg a = 1 \in F$, como es primo entonces $a \in F$ o $\neg a \in F$, es decir, F es un filtro máximo.

Sea F un filtro máximo y $a \vee b \in F$, supongamos que $a \notin F$ y $b \notin F$, como F es máximo entonces $\neg a, \neg b \in F$, por tanto $(a \vee b) \wedge (\neg a \wedge \neg b) \in F$, pero:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (\neg a \wedge \neg b) &= ((a \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg a)) \wedge \neg b \\ &= (0 \vee (b \wedge \neg a)) \wedge \neg b \\ &= b \wedge \neg b \wedge \neg a = 0 \wedge \neg a = 0\end{aligned}$$

Es decir, $0 \in F$, lo cual no es posible pues F es filtro, entonces $a \in F$ o $b \in F$. $\square$

Ejemplo 1.11. *Para cada $X \in \mathcal{C}\mathrm{on}$, podemos dar las siguientes dos contrucciones que resultan ser álgebras de Boole.*

1. $\mathcal{P}(X) = \{A \subseteq X\}$, *la potencia de X es el ejemplo clásico de un álgebra de Boole completa.* $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \varnothing, X)$ *es una retícula distributiva completa, además, si $A \subseteq X$ entonces $X \setminus A \subseteq X$, es decir, $\mathcal{P}(X)$ tiene complementos y por tanto es un álgebra de Boole.*

2. $FC(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A$ *es finito o* $X \setminus A$ *es finito* $\}$.
Como $FC(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ entonces $(FC(X), \cup, \cap)$ es una retícula distributiva, además $\varnothing, X \in FC(X)$ es decir, tiene elemento máximo y mínimo, y para cada $A \in FC(X)$ como A o $X \setminus A$ es finito entonces $X \setminus A \in FC(X)$.
Así $FC(X) \in \mathcal{BA}$, pero en general no es completa.

3. *Sea $X = \mathbb{N}$ y pongamos $A_n = \{2k \mid k \leq n\}$, claramente cada A_n es finito y así $A_n \in FC(X)$, además:*
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = 2\mathbb{N}$$
Pero $2\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ son numerables, entonces:
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \notin FC(X)$$
Es decir, $FC(\mathbb{N})$ es un álgebra de Boole no completa.

Definición 1.12. *Sea $B \in \mathcal{BA}$, decimos que $a \in B$ es un átomo si $a \neq 0$ tal que si $x \leq a$ entonces $x = 0$ o $x = a$.*

Para $B \in \mathcal{BA}$ denotamos $At(B) = \{a \in B \mid a$ es un átomo$\}$.

Definición 1.13. *Sea $B \in \mathcal{BA}$, decimos que B es atómica si para cada $b \in B$ existe $A_b \subseteq At(B)$ tal que $\vee A_b = b$.*

Ejemplo 1.14. *Sea $X \in \mathcal{C}\mathrm{on}$ entonces:*

1. *$\mathcal{P}(X)$ y $FC(X)$ son álgebras de Boole atómicas cuyos átomos son los conjuntos unitarios, es decir:*
$$At((P)(X)) = \{\{x\} \mid x \in X\}$$

1.3. Teorema de Representación

Para encaminarnos hacia el teorema de representación de Stone, a cada Espacio de Stone (S, τ_S) le asociaremos la retícula de sus subconjuntos abiertos y cerrados. es decir, tenemos la asignación:

$$\Omega\colon \mathcal{T}\mathrm{op} \to \mathcal{DL}\mathrm{at}$$

Donde $\Omega(S) = \{U \subseteq S \mid\ U$ es abierto y cerrado de $S\ \}$.

Observación 1.15. *Sean $U, V \in \Omega S$ entonces:*

1. $U \vee V = U \cup V$
2. $U \wedge V = U \cap V$

Con estas definiciones de ínfimo y supremo, resulta evidente que $\Omega(S) \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$.

Proposición 1.16. *Sea $S \in \mathcal{S}\mathrm{tone}$ entonces $\Omega(S)$ es un Álgebra de Boole.*

Demostración. Para cada $U \in \Omega(S)$ como U es abierto y cerrado entonces $S \smallsetminus U$ tambien lo es, es decir, $S \smallsetminus U \in \Omega(S)$, así $\Omega(S)$ es una reticula complementada, con elemento máximo S y elemento mínimo $\varnothing$, y hereda su distributividad de $\mathcal{P}(S)$ (el conjunto potencia de S) pues las operaciones son las mismas. Por tanto $\Omega(S)$ es un Álgebra de Boole. □

Para cada función continua $\varphi\colon S \to S'$ podemos construir una función $\Omega(\varphi)\colon \Omega(S') \to \Omega(S)$, tal que para cada abierto y cerrado $U \in \Omega(S')$ $\Omega(\varphi)(U) = \varphi^{-1}(U) \in \Omega(S)$ pues φ es continua, además es un morfismo de retículas pues la imagen inversa abre uniones e intersecciones.

Proposición 1.17. *Sea $\varphi \in \mathcal{S}\mathrm{tone}(S, S')$ entonces $\Omega(\varphi)$ es un morfismo de álgebras de Boole.*

Demostración. Sea $U \in \Omega(S')$ entonces:

$$\begin{aligned}
\Omega(\varphi)(\neg U) &= \Omega(\varphi)(S' \smallsetminus U) \\
&= \varphi^{-1}(S' \smallsetminus U) \\
&= S \smallsetminus \varphi^{-1}(U) \\
&= S \smallsetminus \Omega(\varphi)(U) \\
&= \neg\Omega(\varphi)(U)
\end{aligned}$$

□

Con esto hemos definido bien un funtor:

$$\Omega\colon \mathcal{S}\mathrm{tone} \to \mathcal{BA}$$

Para construir el funtor de $\mathcal{BA}$ a $\mathcal{S}\mathrm{tone}$ que completará la equivalencia necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 1.18. *Sea $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ definimos su espectro como:*

$$Spec(L) = \{P \subseteq \mid P \text{ es ideal primo de } L\}$$

Para una reticula $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ hay una topología en el espectro de L.
Definimos $\xi = \{\lambda(a) \mid a \in L\}$ donde $\lambda(a) = \{P \in Spec(L) \mid a \notin P\}$.

Observación 1.19. *Sea $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$, $a, b \in L$ entonces:*

1. $\lambda(1) = Spec(A)$ *y* $\lambda(0) = \varnothing$.
2. $\lambda(a) \cap \lambda(b) = \lambda(a \wedge b)$.
3. $\lambda(a) \cup \lambda(b) = \lambda(a \vee b)$.
4. *Si* $L \in \mathcal{BA}$ *entonces* $\lambda(\neg a) = Spec(A) \setminus \lambda(a)$.

Así, si $\tau_{Spec(L)}$ es la topología generada por ξ, entonces $(Spec(L), \tau_{Spec(L)}) \in \mathcal{T}\mathrm{op}$.

De hecho, si $L \in \mathcal{BA}$ entonces cada elemento de ξ es abierto y cerrado y así, $Spec(L)$ es cero-dimensional.

Para cada morfismo de retículas $f \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, L')$ podemos definir $Spec(f)\colon Spec(L') \to Spec(L)$ dada por $Spec(f)(P) = f^{-1}(P)$.

Veamos que etsa bien definido.

Proposición 1.20. *Sea $f \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, L')$, $Spec(f)\colon Spec(L') \to Spec(L)$ esta bien definida y es continua.*

Demostración. Sea $P \in Spec(L')$,veamos que $Spec(f)(P) = f^{-1}(P) \in Spec(L)$.
Sean $a, b \in L$ tal que $a \vee b \in f^{-1}(P)$ entonces $f(a) \vee f(b) = f(a \vee b) \in P$ así $f(a) \in P$ o $f(b) \in P$ pues $P \in Spec(L)$, entonces $a \in f^{-1}(P)$ o $b \in f^{-1}(P)$, es decir, $f^{-1}(P) = Spec(f)(P)$ es primo.

Veamos que $Spec(f)$ es continua, sea $a \in L$ entonces:

$$\begin{aligned}
Spec(f)^{-1}(\lambda(a)) &= \{P \in Spec(L') \mid Spec(f)(P) \in \lambda(a)\} \\
&= \{P \in Spec(L') \mid f^{-1}(P) \in \lambda(a)\} \\
&= \{P \in Spec(L') \mid a \notin f^{-1}(P)\} \\
&= \{P \in Spec(L') \mid f(a) \notin P\} \\
&= \lambda(f(a))
\end{aligned}$$

Así $Spec(f)$ es continua. □

Tenemos entonces definido un funtor $Spec\colon \mathcal{DL}\mathrm{at} \to \mathcal{T}\mathrm{op}$.
A continuación se presenta un teorema que resulta fundamental para el estudio realizado en los capitulos posteriores, dicho teorema se encuentra en el libro [Grä02] y es conocido como el Teorema de Separación de Stone.

Teorema 1.21. *Sea L una retícula distributiva, $I \subseteq L$ un ideal y $F \subseteq L$ un filtro tal que $F \cap I = \varnothing$ entonces existe $P \subseteq L$ ideal primo tal que $I \subseteq P$ y $F \cap P = \varnothing$.*

Demostración. Sea:

$$\Lambda = \{J \subseteq L \mid J \text{ es ideal }, I \subseteq J \text{ y } J \cap F = \varnothing\}$$

Calaramente $I \in \Lambda$, así $\Lambda \neq \varnothing$.

Sea $C \subseteq \Lambda$ una cadena entonces $\cup C \in \Lambda$ así, por el lema de Zorn Λ tiene elementos máximos.

Sea $P \in \Lambda$ uno de tales elementos, veamos que P es un ideal primo.

Si suponemos que P no es primo, entonces existen $a, b \notin P$ con $a \wedge b \in P$. Definamos:

$$A = \{x \vee z \mid x \in P \text{ y } z \leq a\} \quad B = \{x \vee z \mid x \in P \text{ y } z \leq b\}$$

Por ser P máximo de Λ y $P \subseteq A, B$, tendremos que $A \cap F \neq \varnothing$, así mismo $B \cap F \neq \emptyset$. Sean $p, q \in P$ tal que $a \vee p \in F$ y $b \vee q \in F$ entonces $(a \vee p) \wedge (b \vee q) \in F$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned}(a \vee p) \wedge (b \vee q) &= (p \wedge (q \vee b)) \vee (a \wedge (q \vee b)) \\ &= (p \wedge q) \vee (p \wedge b) \vee (a \wedge q) \vee (a \wedge b) \in P\end{aligned}$$

Lo cual contradice que $P \cap F = \varnothing$, por tanto P es un ideal primo. □

Corolario 1.22. *Sean $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ e $I \subseteq L$ ideal con $a \notin I$ entonces existe $P \subseteq L$ ideal primo tal que $I \subseteq P$ y $a \notin P$.*

Demostración. Sea $F = \{b \in L \mid a \leq b\}$ entonces F es filtro y $F \cap I = \varnothing$, por el teorema anterior existe $P \subseteq L$ ideal primo con $I \subseteq L$ y $F \cap P = \varnothing$, así $a \notin P$. □

Antes de avanzar más, recordemos una conocida equivalencia de compacidad:

Proposición 1.23. *$S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ es compacto si y solo si toda familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita (p.i.f.) tiene intersección no vacía.*

Ahora podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.24. *Sea $B \in \mathcal{CBA}$ entonces $Spec(B) \in \mathcal{S}\mathrm{tone}$.*

Demostración. Previamente vimos que para $B \in \mathcal{BA}$ se tiene que $Spec(B)$ es cero-dimensional, además si $P, P' \in Spec(B)$ y $P \neq P'$, sea $a \in P \setminus P'$ entonces $P \in \lambda(a)$ y $P' \notin \lambda(a)$, así $Spec(B)$ es T_0.

Resta ver que es compacto.

Sea C una familia de cerrados en $Spec(B)$ con la p.i.f. y Γ el filtro generado por C. Definamos:

$$G = \{a \in B \mid F \subseteq \lambda(a) \text{ para algún } F \in \Gamma\}$$

Entonces:

$$\bigcap \Gamma = \bigcap \{\lambda(a) \mid a \in G\}$$

Ahora, si $a_1, a_2 \in G$ entonces existen $F_1, F_2 \in \Gamma$ tal que $F_1 \subseteq \lambda(a_1)$ y $F_2 \subseteq \lambda(a_2)$ por tanto $\lambda(a_1 \wedge a_2) = \lambda(a_1) \cap \lambda(a_2) \supseteq F_1 \cap F_2 \in \Gamma$ pues Γ es filtro, así $a_1 \wedge a_2 \in G$ y entonces G es un filtro en B.

Usando 1.21 podemos contruir un ideal primo P tal que $P \cap G = \varnothing$ y así $P \in \lambda(a)$ para todo $a \in G$, y así

$$a \in \bigcap \{\lambda(a) \mid a \in G\} = \bigcap \Gamma \subseteq \bigcap C \neq \varnothing$$

Así por 1.23 $Spec(B)$ es compacto y por tanto $Spec(B) \in \mathcal{S}\mathrm{tone}$ □

Gracias a la proposición anterior el funtor construido lo podemos ver como:

$$Spec\colon \mathcal{BA} \to \mathcal{S}\mathrm{tone}$$

Proposición 1.25. *Sea $B \in \mathcal{BA}$, si $U \subseteq Spec(B)$ es abierto y cerrado, entonces existe $a \in B$ con $U = \lambda(a)$.*

Demostración. Sea $U \subseteq Spec(B)$ abierto y cerrado, por ser abierto existe $A \subseteq B$ tal que $U = \cup_{b \in A} \lambda(b)$ como $Spec(B)$ es compacto y U es cerrado entonces U es compacto, así existe $F \subseteq A$ finito tal que $U = \cup_{b \in F} \lambda(b) = \lambda(\vee F)$. □

Teorema 1.26. *Los funtores $\Omega\colon \mathcal{S}\mathrm{tone} \to \mathcal{CBA}$ y $Spec\colon \mathcal{CBA} \to \mathcal{S}\mathrm{tone}$ forman una equivalencia.*

Demostración. Podemos definir:

$$\lambda\colon B \to \Omega(Spec(B))$$

Gracias a la proposición 1.25 tenemos que λ es biyectiva.
Además $\Omega(Spec(f))(\lambda(a)) = Spec(f)^{-1}(\lambda(a)) = \lambda(f(a))$ es decir, el diguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda_B"] \arrow[d, "f"'] & \Omega Spec(B) \arrow[d, "\Omega Spec(f)"] \\ B' \arrow[r, "\lambda_{B'}"'] & \Omega Spec(B') \end{tikzcd}$$

Y así, λ es un isomorfismo natural, por tanto:

$$\Omega Spec \cong 1_{\mathcal{BA}}$$

Por otro lado, para $S \in \mathcal{S}\mathrm{tone}$ definamos:

$$\Psi \colon S \to Spec(\bar{\Omega} S)$$

Como $\Psi(x) = \{U \in \bar{\Omega} S \mid x \notin U\}$.

Ψ es continua pues si tomamos un abierto de $Spec(\Omega(S))$, por la proposición 1.25 sabemos que es de la forma $\lambda(U)$ con $U \in \Omega(S)$, además:

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}(\lambda(U)) &= \{x \in S \mid \Psi(x) \in \lambda(U)\} \\
&= \{x \in S \mid U \notin \Psi(x)\} \\
&= \{x \in S \mid x \in U\} \\
&= U
\end{aligned}$$

Además como S es compacto y Haussdorf, es biyectiva. Así

$$Spec \circ \bar{\Omega} \cong 1_{\mathcal{S}\mathrm{tone}}$$

$\square$

Así tenemos que $\mathcal{CBA}$ y $\mathcal{S}\mathrm{tone}$ son categorías equivalentes, lo cual se conoce como la equivalencia de Stone.

Capítulo 2

Mónadas

En este capítulo se dan las definiciones necesarias para entender la generalización a trabajar de la equivalencia vista en el capitulo 1, se concluye caracterizando la categoría $\mathcal{C}^T$ para posteriormente estudiar lo expuesto en el artículo [Sim82].

Lo presentado en este capítulo puede revisarse con mayor profundidad en el libro [ML13].

2.1. Mónadas

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría, una mónada (T, η, μ) sobre $\mathcal{C}$ consiste de lo siguiente:*

1. $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *un endofuntor.*
2. $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to T$ *una transformación natural llamada la* unidad de la mónada.
3. $\mu\colon TT \to T$ *una transformación natural llamada la* multiplicación de la mónada.

Tales que hacen conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} TTT \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & TT \arrow[d, "\mu"] \\ TT \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, equal] & TT \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta_T"'] \arrow[dl, equal] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Las mónadas abstraen las propiedades de los monoides (asociatividad y existencia de neutro), un ejemplo donde se puede observar eso es el siguiente:

Ejemplo 2.2. *Sea $M \in \mathcal{C}\mathrm{on}$ definamos el funtor en conjuntos $M \times \_\colon \mathcal{C}\mathrm{on} \to \mathcal{C}\mathrm{on}$ donde para cada objeto $X \in \mathcal{C}\mathrm{on}$ el funtor le asocia su producto cartesiano $M \times X$*

y a cada función $f \in \mathcal{C}\mathrm{on}(X, Y)$ le asocía la función $(1_M, f)\colon M \times X \to M \times Y$ la cual en cada punto $(m, x) \in M \times X$ se evalua como $(1_M, f)(m, x) = (m, f(x))$.

Definamos la unidad $\eta\colon 1_{\mathcal{C}\mathrm{on}} \to M \times \_$ como la transformación natural que en cada objeto $X \in \mathcal{C}\mathrm{on}$ es la función $\eta_X\colon X \to M \times X$ evaluda en cada $x \in X$ como $\eta_X(x) = (e_M, x)$ donde $e_M \in M$ es el neutro del monoide.

Definamos la multiplicación $\mu\colon M \times M \times \_ \to M \times \_$ como la transformación natural que en cada objeto $X \in \mathcal{C}\mathrm{on}$ es la función $\mu_X\colon M \times M \times X \to M \times X$ evaluada en cada $(m, n, x) \in M \times M \times X$ como $\mu_X(m, n, x) = (mn, x)$ donde mn es la multiplicación en el monoide.

Queremos verificar que $(M \times \_, \eta, \mu)$ es una mónada sobre $\mathcal{C}\mathrm{on}$, para ello necesitamos la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \times M \times M \times X \arrow[r, "M\times\mu_X"] \arrow[d, "\mu_{M\times X}"'] & M \times M \times X \arrow[d, "\mu_X"] \\ M \times M \times X \arrow[r, "\mu_X"'] & M \times X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times X \arrow[r, "M\times\eta_X"] \arrow[dr, equal] & M \times M \times X \arrow[d, "\mu_X"] & M \times X \arrow[l, "\eta_{M\times X}"'] \arrow[dl, equal] \\ & M \times X & \end{tikzcd}$$

Al ser funciones, verificamos la conmutatividad evaluando puntualmente.
Sea $(m, n, s, x) \in M \times M \times M \times X$ entonces:
$\mu_X(M \times \mu_X(m, n, s, x)) = \mu_X(m, ns, x) = (m(ns), x)$ *y*
$\mu_X(\mu_{M\times X}(m, n, s, x)) = \mu_X(mn, s, x) = ((mn)s, x)$.

Así, la conmutatividad de este diagrama se cumple gracias a la asociatividad de la operación en M.

Por otro lado, para el segundo diagrama sea $(m, x) \in M \times X$ entonces:
$\mu_X(M \times \eta_X(m, x)) = \mu_X(m, e_M, x) = (me_M, x) = (m, x)$ *y*
$\mu_X(\eta_{M\times X}(m, x)) = \mu_X(e_M, m, x) = (e_M m, x) = (m, x)$

Esta conmutatividad se sigue del hecho de que $e_M \in M$ es el neutro.

Así $(M \times \_, \eta, \mu)$ es una mónada sobre $\mathcal{C}\mathrm{on}$.

También podemos contruir mónadas a partir de adjunciones como nos muestra la siguiente proposición:

Proposición 2.3. *Sean $L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ y $R\colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ funtores tales que $L \dashv R$ es una adjunción con unidad η y counidad ε, entonces $(RL, \eta, R\varepsilon_L)$ es una mónada sobre $\mathcal{A}$.*

Demostración. Para probar que $(RL, \eta, R\varepsilon_L)$ es una mónada, necesitamos la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} RLRLRL \arrow[r, "RLR\varepsilon_L"] \arrow[d, "R\varepsilon_{LRL}"'] & RLRL \arrow[d, "R\varepsilon_L"] \\ RLRL \arrow[r, "R\varepsilon_L"'] & RL \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} RL \arrow[r, "RL\eta"] \arrow[dr, equal] & RLRL \arrow[d, "R\varepsilon_L"] & RL \arrow[l, "\eta_{RL}"'] \arrow[dl, equal] \\ & RL & \end{tikzcd}$$

Para la conmutatividad del primer diagrama, consideremos un objeto arbitrario $C \in \mathcal{C}$, entonces $LC \in \mathcal{A}$ y así, podemos tomar la componente $\varepsilon_{LC} \colon LRLC \to LC$, como $\varepsilon \colon LR \to 1_{\mathcal{A}}$ es una transformación natural, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} LRLRLC \arrow[r, "\varepsilon_{LRLC}"] \arrow[d, "LR\varepsilon_{LC}"] & LRLC \arrow[d, "\varepsilon_{LC}"] \\ LRLC \arrow[r, "\varepsilon_{LC}"'] & LC \end{tikzcd}$$

Aplicando R al diagrama anterior obtenemos la conmutatividad deseada.

Para el segundo diagrama, recordemos que al ser $L \dashv R$ una adjunción se cumplen las identidades triangulares:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L\eta"] \arrow[dr, equal] & LRL \arrow[d, "\varepsilon_L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\eta_R"] \arrow[dr, equal] & RLR \arrow[d, "R\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Aplicando R a la primer identidad triangular obtenemos el lado izquierdo de la igualdad deseada, así mismo, tomando elementos de la forma $LA \in \mathcal{C}$ con $A \in \mathcal{A}$ en la segunda identidad triangular obtenemos el lado derecho de la igualdad deseada.

□

Así tenemos que toda adjunción nos induce una mónada, lo cual nos hace plantearnos la siguiente pregunta: *"¿Toda mónada es inducida por alguna adjunción?"* cuya respuesta encontraremos con las contrucciones de la categorías de Eilenberg-Moore y Kleisli para una mónada dada.

2.2. T-Álgebras

Para definir la categoría de Eilenberg-Moore o categoría de T-Álgebras, necesitamos lo siguiente:

Definición 2.4. *Sea (T, η, μ) una monada sobre $\mathcal{C}$.*
Una T-Álgebra es un par (C, c) con $C \in \mathcal{C}$ el objeto del álgebra y $c \in \mathcal{C}(TC, C)$ el

morfismo estructual, tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} TTC \arrow[r, "Tc"] \arrow[d, "\mu_C"'] & TC \arrow[d, "c"] \\ TC \arrow[r, "c"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, equal] & TC \arrow[d, "c"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Definición 2.5. *Sea (T, η, μ) una mónada sobre $\mathcal{C}$ y (A, a), (B, b) T-Álgebras, un morfismo de T-Algebras es una flecha $f \in \mathcal{C}(A, B)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "a"'] & TB \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Dada una mónada (T, η, μ) sobre $\mathcal{C}$ podemos entonces definir la categoría de T-*Álgebras* denotada por:

$$\mathcal{C}^T$$

Cuyos objetos son T-Álgebras y sus flechas son morfimos de T-Algebras.

Ejemplo 2.6. *Siguiendo con el ejemplo 2.2, veamos como son las álgebras para dicha mónada.*

Sea $X \in \mathcal{C}\mathrm{on}$ que admita una acción del monoide, digamos $\beta \colon M \times X \to X$, veamos que $(X, \beta) \in \mathcal{C}^{M\times\_}$, para ello necesitamos la conmutatividad de los siguientes digramas:

$$\begin{tikzcd} M \times M \times X \arrow[r, "M\times\beta"] \arrow[d, "\mu_X"'] & M \times X \arrow[d, "\beta"] \\ M \times X \arrow[r, "\beta"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, equal] & M \times X \arrow[d, "\beta"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Sea $(m, n, x) \in M \times M \times X$ entonces:
$\beta(M \times \beta(m, n, x)) = \beta(m, \beta(n, x))$ y
$\beta(\mu_X(m, n, x)) = \beta(mn, x)$.
Luego $\beta(m, \beta(n, x)) = \beta(mn, x)$ pues β es una acción, esto nos da la conmutatividad del primer diagrama.

Sea $x \in X$ entonces $\beta(\eta_X(x)) = \beta(e_M, x) = x$ pues β es una acción.

Así todo conjunto X que admita una acción de M es una $M \times \_$-Álgebra.

Por otro lado, si (X, β) es una $M \times \_$-Álgebra, veamos que β es una acción de M en X.

Como $(X, \beta) \in \mathcal{C}\mathrm{on}^{M\times \_}$ entonces los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \times M \times X \arrow[r, "M\times\beta"] \arrow[d, "\mu_X"'] & M \times X \arrow[d, "\beta"] \\ M \times X \arrow[r, "\beta"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, equal] & M \times X \arrow[d, "\beta"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Del primer diagrama tenemos que para cada $x \in X$ y $m, n \in M$ se cumple que $\beta(m, \beta(n, x)) = \beta(mn, x)$ y del segundo tenemos que $\beta(e_M, x) = x$, asíβ es una acción.

Ahora, tenemos que una función $f\colon (X, \beta) \to (Y, \alpha)$ es un morfismo de $M \times \_$-Álgebras si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \times X \arrow[r, "M\times f"] \arrow[d, "\beta"'] & M \times B \arrow[d, "\alpha"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Es decir, si $f(\beta(m, x)) = \alpha(m, f(x))$ para cada $x \in X$ y $m \in M$, es decir, f es un morfismo de Álgebras si y solo si respeta las acciones, por tanto tenemos:

$$\mathcal{C}\mathrm{on}^{M\times \_} = M - \mathcal{C}\mathrm{on}$$

Donde $M - \mathcal{C}\mathrm{on}$ es la categoría de conjuntos que admiten una acción de M.

El funtor T también puede verse como un funtor $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$ como lo muestran las siguientes proposiciones:

Proposición 2.7. *Sea $C \in \mathcal{C}$ y (T, η, μ) una mónada sobre $\mathcal{C}$, entonces $(TC, \mu_C) \in \mathcal{C}^T$.*

Demostración. Como (T, η, μ) es una monada sobre $\mathcal{C}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} TTTC \arrow[r, "T\mu_C"] \arrow[d, "\mu_{TC}"'] & TTC \arrow[d, "\mu_C"] \\ TTC \arrow[r, "\mu_C"'] & TC \end{tikzcd}$$

Lo cual nos dice que (TC, μ_C) es una T-Álgebra. □

Proposición 2.8. *Sea $f \in \mathcal{C}(C, C')$ entonces $Tf \in \mathcal{C}^T(TC, TC')$.*

Demostración. Como $\mu\colon TT \to T$ es una transformación natural, aplicando la naturalidad para f tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} TTC \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "TTf"'] & TC \arrow[d, "Tf"] \\ TTC' \arrow[r, "\mu_{C'}"'] & TC \end{tikzcd}$$

Lo cual nos dice que Tf es un morfismo de T-Álgebras. $\square$

Veamos ahora que la construcción de esta categoría resuelve la pregunta planteada *"¿Toda mónada es inducida por alguna adjunción?"*.

Proposición 2.9. *Sea (T, η, μ) una mónada sobre $\mathcal{C}$, y los funtores $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$ y $?\colon \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ el funtor que olvida dado por $?(C, c) = C$ y $?(f) = f$, entonces $T \dashv ?$ y esta adjunción induce la mónada T.*

Demostración. Sea $\eta\colon 1_C \to ?T$ la unidad de la mónada y $\varepsilon\colon T? \to 1_{\mathcal{C}^T}$ definida para cada objeto $(C, c) \in \mathcal{C}^T$ como $\varepsilon_{(C,c)} = c$, se tiene que $c \in \mathcal{C}^T(TC, C)$ pues el diagrama que debe conmutar para esto es el mismo que se cumple por ser (C, c) una T-Álgebra.

Veamos ahora que se cumplen las identidades triangulares siendo η la unidad y ε la counidad de la adjunción, es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r, "\eta?"] \arrow[dr, equal] & ?T? \arrow[d, "?\varepsilon"] \\ & ? \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, equal] & T?T \arrow[d, "\varepsilon_T"] \\ & T \end{tikzcd}$$

El primer diagrama se traduce para $(C, c) \in \mathcal{C}^T$ como:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[dr, equal] & TC \arrow[d, "c"] \\ & C \end{tikzcd}$$

El cual conmuta pues $(C, c) \in \mathcal{C}^T$.

El segundo diagrama se traduce para $C \in \mathcal{C}$ como:

$$\begin{tikzcd} TC \arrow[r, "T\eta_C"] \arrow[dr, equal] & TTC \arrow[d, "\mu_C"] \\ & TC \end{tikzcd}$$

El cual conmuta por ser (T, η, μ) una mónada sobre $\mathcal{C}$.

Así $? \dashv T$ es una adjunción.

Acorde a la proposición 2.3 tenemos que la mónada inducida es $(?T, \eta, ?\varepsilon_T)$, pero claramente $?T = T$ y para $C \in \mathcal{C}$ tenemos $?\varepsilon_{TC} = ?(\mu_C) = \mu_C$ es decir, efectivamente esta adjunción induce la mónada (T, η, μ). □

2.3. La categoría de Kleisli

Ya vimos que la categoría de T-Álgebras nos permite construir una adjunción que induzca la mónada (T, η, μ), sin embargo, podemos construir otra solución a nuestra pregunta, lo cual haremos a continuación.

Sea (T, η, μ) una mónada sobre $\mathcal{C}$ definimos la categoría de Kleisli, denotada $\mathcal{C}_T$ de la siguiente manera:

1. $Ob(\mathcal{C}_T) = Ob(\mathcal{C})$.
2. $\mathcal{C}_T(A, B) = \mathcal{C}(A, TB)$ para mayor claridad denotaremos $f_T \in \mathcal{C}_T(A, B)$ para una flecha $f \in \mathcal{C}(A, TB)$.
3. La composición esta dada como sigue:
   Sea $f_T \in \mathcal{C}_T(A, B)$ y $g_T \in \mathcal{C}_T(B, C)$ entonces $g_T \circ f_T = (\mu_C \circ Tg \circ f)_T$.
4. Las identidades estan dadas para cada $C \in \mathcal{C}_T$ como $(\eta_C)_T$.

Veamos que lo definido efectivamente es una categoría.

Proposición 2.10. *La composición definida en $\mathcal{C}_T$ es asociativa.*

Demostración. Sea $f_T \in \mathcal{C}_T(A, B)$, $g_T \in \mathcal{C}_T(B, C)$ y $h_T \in \mathcal{C}_T(C, D)$ entonces:

$$\begin{aligned}
h_T \circ (g_T \circ f_T) &= h_T \circ (\mu_C \circ Tg \circ f)_T \\
&= (\mu_D \circ Th \circ \mu_C \circ Tg \circ f)_T \\
(h_T \circ g_T) \circ f_T &= (\mu_D \circ Th \circ g)_T \circ f_T \\
&= (\mu_D \circ T(\mu_D \circ Th \circ g) \circ f)_T \\
&= (\mu_D \circ T\mu_D \circ TTh \circ Tg \circ f)_T
\end{aligned}$$

Como (T, η, μ) es una mónada, entonces $\mu_D \circ T\mu_D = \mu_D \circ \mu_{TD}$ y al ser μ una transformación natural, tenemos que $\mu_{TD} \circ TTh = Th \circ \mu_C$, así, se cumple que:

$$\mu_D \circ Th \circ \mu_C \circ Tg \circ f = \mu_D \circ T\mu_D \circ TTh \circ Tg \circ f$$

Es decir, la composición es asociativa. □

Proposición 2.11. *Para cada $C \in \mathcal{C}_T$ la identidad esta dada por $(\eta_C)_T$*

Demostración. Sea $f_T \in \mathcal{C}_T(A, C)$ entonces:

$$\begin{aligned}(\eta_C)_T \circ f_T &= (\mu_C \circ T\eta_C \circ f)_T \\ &= (id_{TC} \circ f)_T \\ &= f_T\end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se cumple por ser (T, η, μ) una mónada.

Sea $g_T \in \mathcal{C}_T(C, B)$ entonces:

$$\begin{aligned}g_T \circ (\eta_C)_T &= (\mu_B \circ Tg \circ \eta_C)_T \\ &= (\mu_B \circ \eta_{TB} \circ g)_T \\ &= (id_{TB} \circ g)_T \\ &= g_T\end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se cumple por ser η una transformación natural y la tercera por ser (T, η, μ) una mónada. □

Construyamos ahora la adjunción que inducirá nuestra mónada original.

Definimos $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_T$ tal que para cada objeto se tiene $F(C) = C$ y para cada flecha $f \in \mathcal{C}(C, D)$ se evalua como $F(f)_T = (\eta_D \circ f)_T$.

Proposición 2.12. *$F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_T$ es un funtor.*

Demostración. Sean $f \in \mathcal{C}(A, B)$ y $g \in \mathcal{C}(B, C)$ entonces:

$$\begin{aligned}F(g)_T \circ F(f)_T &= (\eta_C \circ g) \circ (\eta_B \circ f)_T \\ &= (\mu_C \circ T(\eta_C \circ g) \circ (\eta_B \circ f))_T \\ &= (\mu_C \circ T\eta_C \circ Tg \circ \eta_B \circ f)_T \\ &= (id_{TC} \circ Tg \circ \eta_B \circ f)_T \\ &= (Tg \circ \eta_B \circ f)_T \\ &= (\eta_C \circ g \circ f)_T \\ &= F(gf)\end{aligned}$$

Donde la cuarta igualdad se da por ser (T, η, μ) una mónada y la sexta por la naturalidad de η.

Además $F(id_C)_T = (\eta_C \circ id_C)_T = (\eta_C)_T$.

Por tanto F es un funtor. □

Ahora definimos $G \colon \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}$ como $G(C) = TC$ para cada $C \in \mathcal{C}_T$ y para cada flecha $f_T \in \mathcal{C}_T(C, D)$ tenemos $G(f_T) = \mu_D \circ Tf$.

Proposición 2.13. *$G \colon \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}$ es un funtor.*

Demostración. Sean $f_T \in \mathcal{C}_T(A, B)$ y $g_T \in \mathcal{C}_T(B, C)$ entonces:

$$\begin{aligned} G(g_T \circ f_T) &= G(\mu_C \circ Tg \circ f) \\ &= \mu_C \circ T(\mu_C \circ Tg \circ f) \\ &= \mu_C \circ T\mu_C \circ TTg \circ Tf \\ &= \mu_C \circ Tg \circ \mu_B \circ Tf \end{aligned}$$

Donde la cuarta igualdad se da por la naturalidad de μ.

Además $G((\eta_C)_T) = \mu_C \circ T\eta_C = id_C$ por ser (T, η, μ) una mónada.

Así, G es un funtor. $\square$

Proposición 2.14. *Sea (T, η, μ) una mónada sobre $\mathcal{C}$ y los funtores F y G definidos anteriormente, entonces $F \dashv G$ es una adjunción, y esta adjunción induce la mónada T.*

Demostración. Definamos transformaciones naturales $\gamma \colon 1_{\mathcal{C}} \to GF$ y $\varepsilon \colon FG \to 1_{\mathcal{C}_T}$ como sigue:

Para cada $C \in \mathcal{C}$ tenemos $\gamma_C \colon C \to GFC = TC$ dada por $\gamma_C = \eta_C$.

Para cada $C \in \mathcal{C}_T$ tenemos $(\varepsilon_C)_T \colon FGC = TC \to C$ dada por $(\varepsilon_C)_T = (id_C)_T$.

Veamos que definidos así cumplen las identidades triangulares, es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\gamma"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, "\varepsilon_F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\gamma_G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

La conmutatividad del segundo diagrama para un objeto $C \in \mathcal{C}_T$ se traduce en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} TC \arrow[r, "\eta_{TC}"] \arrow[dr, equal] & TTC \arrow[d, "\mu_C"] \\ & TC \end{tikzcd}$$

El cual conmuta pues (T, η, μ) es una mónada.

Para la conmutatividad del primer diagrama, dado un objeto $C \in \mathcal{C}$ se tiene:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "(F\eta_C)_T"] \arrow[dr, equal, "(\eta_C)_T"'] & TC \arrow[d, "(\varepsilon_F C)_T"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{FC})_T \circ (F\eta_C)_T &= (id_{TC})_T \circ (\eta_{TC} \circ \eta_C)_T \\ &= (\mu_{TC} \circ Tid_{TC} \circ \eta_{TC} \circ \eta_C)_T \\ &= (\mu_{TC} \circ id_{TTC} \circ \eta_{TC} \circ \eta_C)_T \\ &= (\mu_{TC} \circ \eta_{TC} \circ \eta_C)_T \\ &= (id_{TC} \circ \eta_C)_T \\ &= (\eta_C)_T\end{aligned}$$

Donde la quinta igualdad se da por ser (T, η, μ) una mónada.

Así $F \dashv G$ es una adjunción, y de acuerdo a la proposición 2.3 la mónada inducida es $(GF, \gamma, G\varepsilon_F)$.

Para cada objeto $C \in \mathcal{C}$ se tiene $GF(C) = TC$ y para cada flecha $f \in \mathcal{C}(C, D)$ se tiene $GF(f) = G((\eta_D \circ f)_T) = \mu_D \circ T\eta_D \circ f = f$ pues (T, η, μ) es una mónada, así $GF = T$.

Por definición se tiene $\gamma = \eta$ y para cada $C \in \mathcal{C}$ se tiene $G\varepsilon_{FC} = G((\varepsilon_C)_T) = G(id_T C) = \mu_C \circ Tid_{TC} = \mu_C \circ id_{TTC} = \mu_C$.

Así, la mónada inducida es efectivamente (T, η, μ). $\square$

2.4. Caracterización de T-Álgebras

En el ejemplo 2.6 caracterizamos a las T-Álgebras para $T = M \times _$como una subcategoría de $\mathcal{C}$on, para dar una caracterización más general necesitamos las siguientes definiciones:

Sea $\mathcal{B}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$ y (T, η, μ) mónada sobre $\mathcal{C}$ definimos:

Definición 2.15. $\mathcal{B}$ *es* T-suficiente *si* $\forall C, f \in \mathcal{C}$ *tenemos que* $TC, Tf \in \mathcal{B}$.

Definición 2.16. η *es* $\mathcal{B}$-epimorfismo *si para cada* $C \in \mathcal{C}$, $f, g \in \mathcal{B}(TC, B)$ *con* $f\eta_C = g\eta_C$ *entonces* $f = g$.

Definición 2.17. $B \in \mathcal{B}$ *es* T*-retractil si* $\exists! h_B \in \mathcal{B}(TB, B)$ *tal que* $h_B\eta_B = 1_B$.

Sea (T, η, μ) mónada sobre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$ T-suficiente, con η un $\mathcal{B}$-epimorfismo y cada $B \in \mathcal{B}$ T-retractil podemos definir:

$$\Psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}^T$$

Para cada $B \in \mathcal{B}$ definimos $\Psi(B) = (B, h_B)$ donde h_B es el único morfimo que hace a B T-retractil.
Para cada flecha $f \in \mathcal{B}$ definimos $\Psi(f) = f$.

Veamos ahora que Ψ es, en efecto, un funtor.

Lema 2.18. *Sea $A \in \mathcal{B}$ y h_A el único morfismo que hace a A T-retractil, entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "Th_A"'] & TA \arrow[d, "h_A"] \\ TA \arrow[r, "h_A"'] & A \end{tikzcd}$$

Es decir, $(A, h_A) \in \mathcal{C}^T$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "\eta_{TA}"] \arrow[d, "h_A"'] & TTA \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "Th_A"] & TA \arrow[d, "h_a"] \\ A \arrow[r, "\eta_A"'] & TA \arrow[r, "h_A"'] & A \end{tikzcd}$$

Como η es una transformación natural, el cuadro de la izquierda conmuta, es decir, $\eta_A \circ h_A = Th_A \circ \eta_{TA}$ y entonces $h_A \circ \eta_A \circ h_A = h_A \circ Th_A \circ \eta_{TA}$.

Por otro lado, $\mu \circ \eta_{TA} = 1_{TA}$ pues (T, η, μ) es una mónada y $h_A \circ \eta_A = 1_A$ pues A es T-retractil con h_A.
Entonces, el cuadro exterior conmuta, es decir, $h_A \circ \mu_A \circ \eta_{TA} = h_A \circ \eta_A \circ h_A$.
Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} h_A \circ \mu_A \circ \eta_{TA} &= h_A \circ \eta_A \circ h_A \\ &= h_A \circ Th_A \circ \eta_{TA} \end{aligned}$$

Y como η es $\mathcal{B}$-epimorfimo, entonces:

$$h_A \circ \mu_A = h_A \circ Th_A$$

Lo cual nos da la conmutatividad deseada.

□

Lema 2.19. *Sean $A, B \in \mathcal{B}$ y h_A, h_B sus morfismos estructurales, entonces, para cada $f \in \mathcal{B}(A, B)$ el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "h_A"'] & TB \arrow[d, "h_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Es decir, f es un T-morfismo.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & TA \arrow[r, "h_A"] \arrow[d, "Tf"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & TB \arrow[r, "h_B"'] & B \end{tikzcd}$$

El cuadro de la izquierda conmuta por la naturalidad de η, es decir $Tf \circ \eta_A = \eta_B \circ f$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} h_B \circ Tf \circ \eta_A &= h_B \circ \eta_B \circ f \\ &= 1_B \circ f = f \circ 1_A \\ &= f \circ h_A \circ \eta_A \end{aligned}$$

Además, como η es $\mathcal{B}$-epimorfimo, entonces:

$$h_B \circ Tf = f \circ h_A$$

Lo cual nos da la conmutatividad deseada. □

Tenemos entonces que:

$$\Psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}^T$$

Esta bien definido y es un funtor "inyectivo" en objetos y fiel gracias a su definición.

Para poder garantizar la "supayectividad" es objetos y la plenitud del funtor necesitaremos pedir las siguientes propiedades:

P 1. *$B \in \mathcal{C}$ es un objeto de $\mathcal{B}$ si y solo si existe $h \in \mathcal{C}(TB, B)$ tal que $h\eta_B = id_B$, más aún, $h \in \mathcal{B}$ y $h = h_B$ con h_B el único morfismo que hace a B T-retractil.*

P 2. *Sea $A, B \in \mathcal{B}$ con morfismos estructurales h_A, h_B respectivamente, entonces una flecha $f \in \mathcal{C}(A, B)$ es una flecha de $\mathcal{B}$ si y solo si el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "h_A"'] & TB \arrow[d, "h_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Con esto se hace evidente que Ψ es un isomorfismo. Tenemos entonces el siguiente teorema de caracterización:

Teorema 2.20. *Sea (T, η, μ) una mónada sobre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$ T-suficiente, con η un $\mathcal{B}$-epimorfismo y cada objeto de $\mathcal{B}$ T-retractil, si además se cumplen las propiedades 1 y 2 entonces hay una equivalencia:*

$$\Psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}^T$$

Capítulo 3

Equivalencia de Stone en funtores representables

En este capítulo construiremos dos funtores representables:

$$\mathcal{O}\colon\ \mathcal{T}\mathrm{op} \to \mathcal{DL}\mathrm{at} \quad \text{ y } \sigma\colon\ \mathcal{DL}\mathrm{at} \to \mathcal{T}\mathrm{op}$$

Veremos que estos funtores son isomorfos a los funtores Ω y $Spec$ definidos en el capítulo 1.

Para realizar esto, usaremos un objeto importante, el objeto $2 \in \mathcal{C}\mathrm{on}$, el cual definimos, de manera usual, como $2 = \{0, 1\}$.
También $2 \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ donde el orden es simplemente $0 < 1$.

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 0 \end{array}$$

De hecho 2 cumple que:

$$a \wedge (\vee X) = \vee\{a \wedge x \mid x \in X\}$$

Por otro lado tenemos $(2, \tau_2) \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ con $\tau_2 = \{\varnothing, \{1\}, 2\}$.

3.1. El funtor $\mathcal{O}$

Definamos:

$$\mathcal{O} = \mathcal{T}\mathrm{op}(\_, 2) : \mathcal{T}\mathrm{op} \to \mathcal{DL}\mathrm{at}$$

Así, para cada $(S, \tau_S) \in \mathcal{T}\mathrm{op}$, tenemos $\mathcal{O}\, S = \mathcal{T}\mathrm{op}(S, 2)$ y para cada función continua $\varphi : S \to S'$ tenemos definido:

$$\mathcal{O}\, \varphi : \mathcal{T}\mathrm{op}(S', 2) \to \mathcal{T}\mathrm{op}(S, 2)$$

Donde para cada $\eta \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S', 2)$ tenemos $\mathcal{O}\,\varphi(\eta) = \eta\varphi \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, 2)$.

Verifiquemos que $\mathcal{T}\mathrm{op}(S, 2)$ es una retícula, de hecho, podremos ver que cumple una propiedad ditributiva adicional.

Para $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ definamos un orden parcial en $\mathcal{O}\,S$ dado por:

$$\eta \leq \varphi \Longleftrightarrow \eta(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in S$$

Sea $\Phi \subseteq \mathcal{O}\,S$, podemos definir un supremo como la función que en cada $x \in S$ se calcula por:

$$\vee\Phi(x) = \bigvee\{\varphi(x) \mid \varphi \in \Phi\}$$

De la definición se sigue que $\vee\Phi(x) = 1$ si y solo si $\exists\varphi \in \Phi$ con $\varphi(x) = 1$.

Verifiquemos que tal función es continua, para esto, observemos que para cualquier función $f : S \to 2$ tenemos $f^{-1}(2) = S$ y $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, los cuales son abiertos en S, por tanto, nuestro único abierto de interés en 2 es $\{1\}$.

Tenemos:

$$(\vee\Phi)^{-1}(1) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} \varphi^{-1}(1)$$

Como cada φ es continua,entonces $\varphi^{-1}(1)$ es un abierto de S, así, $(\vee\Phi)^{-1}(1)$ es abierto en S y por tanto, $\vee\Phi$ es continua.

Sabemos ahora que $\mathcal{O}\,S$ tiene supremos arbitrarios, y por ello podemos definir:

$$\wedge\Phi = \bigvee\{\eta \in \mathcal{O}\,S \mid \eta \leq \varphi \quad \forall\varphi \in \Phi\}$$

Sin embargo, esta defínción se puede simplificar cuando Φ es finito.

Sean $\eta, \varphi \in \mathcal{O}\,S$ tenemos:

$$(\eta \wedge \varphi)(x) = \eta(x) \wedge \varphi(x)$$

El problema cuando Φ no es finito radica en que intersecciones arbitrarias de abiertos no son necesariamente abierto, cosa que en el caso finito si podemos asegurar.

De esta manera, $\mathcal{O}\,S$ es una retícula completa cuyo máximo $1_{\mathcal{O}\,S}$ es la función constante 1 y su mínimo elemento $0_{\mathcal{O}\,S}$ la función constante 0.

Veamos que $\mathcal{O}\,S$ cumple:

$$\eta \wedge (\vee\Phi) = \vee\{\eta \wedge \varphi \mid \varphi \in \Phi\}$$

Sea $\eta \in \mathcal{O}\,S$, $\Phi \subseteq \mathcal{O}\,S$ tenemos:

$$\begin{aligned}(\eta \wedge (\vee\Phi))(x) &= \eta(x) \wedge (\vee\Phi)(x)\\ &= \eta(x) \wedge \bigvee\{\varphi(x) \mid \varphi \in \Phi\}\\ &= \bigvee\{\eta(x) \wedge \varphi(x) \mid \varphi \in \Phi\}\\ &= \bigvee\{(\eta \wedge \varphi)(x) \mid \varphi \in \Phi\}\\ &= \bigvee\{(\eta \wedge \varphi) \mid \varphi \in \Phi\}(x)\end{aligned}$$

La tercer igualdad se da por la propiedad distributiva de 2.

Hemos probado que para cada $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ tenemos $\mathcal{O}\,S \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$.

Ahora veamos que si $\varphi \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, S')$ entonces $\mathcal{O}\,\varphi \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(\mathcal{O}\,S', \mathcal{O}\,S)$.
Sean $\eta, \gamma \in \mathcal{O}\,S'$ y $x \in S$ entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\,\varphi(\eta \vee \gamma)(x) &= (\eta \vee \gamma)(\varphi(x))\\ &= \eta(\varphi(x)) \vee \gamma(\varphi(x))\\ &= \mathcal{O}\,\varphi(\eta)(x) \vee \mathcal{O}\,\varphi(\gamma)(x)\\ &= (\mathcal{O}\,\varphi(\eta) \vee \mathcal{O}\,\varphi(\gamma))(x)\end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{O}(\eta \vee \gamma) = \mathcal{O}\,\varphi(\eta) \vee \mathcal{O}\,\varphi(\gamma)$, y analogamente para el infimo tenemos $\mathcal{O}(\eta \wedge \gamma) = \mathcal{O}\,\varphi(\eta) \wedge \mathcal{O}\,\varphi(\gamma)$, por tanto $\mathcal{O}\,\varphi \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(\mathcal{O}\,S', \mathcal{O}\,S)$.

Hemos comprobado que el funtor $\mathcal{O}$ esta bien definido.
Para la equivalencia de Stone definimos el funtor Ω el cual toma la retícula de conjuntos abiertos y cerrados, el funtor que acabamos de construir resulta ser isomorfo a un funtor similar, Ω el cual definiremos para cada $(S, \tau_S) \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ como $\Omega S = \tau_S$, es decir, simplemente tomamos la retícula de abiertos.

Proposición 3.1. *Los funtores* $\mathcal{O}, \Omega \colon \mathcal{T}\mathrm{op} \to \mathcal{DL}\mathrm{at}$ *son isomorfos.*

Demostración. Sea $\eta \colon \mathcal{O} \to \Omega$, cuya componente para $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ es la función $\eta_S \colon \mathcal{O}\,S \to \Omega S$ definida para cada $\varphi \in \mathcal{O}\,S$ como $\eta_S(\varphi) = \varphi^{-1}(1)$, esta bien definida pues como φ es continua y $\{1\} \in \tau_2$ entonces $\varphi^{-1}(1) \in \tau_S = \Omega S$.

Sean $\varphi, \gamma \in \mathcal{O}\,S$ entonces:

$$\eta_S(\varphi \vee \gamma) = (\varphi \vee \gamma)^{-1}(1) = \varphi^{-1}(1) \cup \gamma^{-1}(1) = \eta_S(\varphi) \cup \eta_S(\gamma)$$

Y analogamente:

$$\eta_S(\varphi \wedge \gamma) = (\varphi \wedge \gamma)^{-1}(1) = \varphi^{-1}(1) \cap \gamma^{-1}(1) = \eta_S(\varphi) \cap \eta_S(\gamma)$$

Así $\eta_S \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(\mathcal{O}\,S, \Omega S)$.

Además, si $\eta_S(\varphi) = \eta_S(\gamma)$ entonces $\varphi^{-1}(1) = \gamma^{-1}(1)$ y como los únicos elementos en el codominio de φ y γ son $\{0, 1\}$ entonces:

$$\varphi^{-1}(0) = S \setminus \varphi^{-1}(1) = S \setminus \gamma^{-1}(1) = \gamma^{-1}(0)$$

Por tanto $\varphi = \gamma$, es decir η_S es inyectiva.

Sea $U \in \Omega S = \tau_S$ definimos la función característica de U:

$$\varphi_U(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in U \\ 0 \text{ si } x \notin U \end{cases}$$

Entonces $\varphi_U^{-1}(1) = U$, por tanto $\varphi_U \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, 2)$ con $\eta_S(\varphi_U) = U$; tenemos entonces que η_S es suprayectiva.

Por tanto η_S es un isomorfismo.

Para ver la naturalidad de η, necesitamos la conmutatividad del siguiente diagrama para cada $\varphi \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, S')$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}\, S \arrow[r, "\eta_S"] \arrow[d, "\mathcal{O}\,\varphi"'] & \Omega S \arrow[d, "\Omega\varphi"] \\ \mathcal{O}\, S' \arrow[r, "\eta_{S'}"'] & \Omega S' \end{tikzcd}$$

Para $\gamma \in \mathcal{O}\, S$ tenemos $\Omega\varphi(\eta_S(\gamma)) = \Omega\varphi(\gamma^{-1}(1)) = \varphi^{-1}(\gamma^{-1}(1))$ y por otro lado $\eta_{S'}(\mathcal{O}\,\varphi(\gamma)) = \eta_{S'}(\gamma\varphi) = (\gamma\varphi)^{-1}(1) = \varphi^{-1}(\gamma^{-1}(1))$.

Por tanto $\eta\colon\ \mathcal{O} \to \Omega$ es un isomorfismo natural. $\square$

Tenemos entonces que el funtor Ω es representable pues $\Omega \cong \mathcal{O} = \mathcal{T}\mathrm{op}(\_, 2)$.

Además como para todo $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ tenemos $\Omega S \cong \mathcal{T}\mathrm{op}(S, 2)$ podemos pensar a los abiertos de un espacio topológico como sus funciones caracteristicas, así, cualquier definición o proposición dada sobre uno de estos espacios puede interpretarse en el otro.

3.2. El Funtor σ

Definamos ahora:

$$\sigma = \mathcal{DL}\mathrm{at}(\_, 2) : \mathcal{DL}\mathrm{at} \to \mathcal{T}\mathrm{op}$$

Para cada $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ tendremos $\sigma L = \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, 2)$ y para cada morfismo de retículas $f : L \to L'$ tenemos definido:

$$\sigma f : \mathcal{DL}\mathrm{at}(L', 2) \to \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, 2)$$

Donde para cada $g \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L', 2)$ tenemos $\sigma f(g) = gf \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, 2)$.

Sea $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$, demos una topología a σL.
Para cada $a \in L$ definimos:

$$s(a) = \{p \in \sigma L | p(a) = 1\}$$

Es fácil verificar que $s(a) \cap s(b) = s(a \wedge b)$ y $s(a) \cup s(b) = s(a \vee b)$.

Demos a σL la topología generada por $\{s(a) \mid a \in L\}$, notemos que cada abierto de esta topología queda caracterizado como uniones arbitrarias de abiertos de la forma $s(a)$, es decir, si U es abierto de σL entonces:

$$U = \bigcup_{a \in A} s(a) \quad \text{para algún } A \subseteq L$$

Veamos ahora que si $f \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, L')$ entonces σf es una función continua:
Sea $a \in L$ entonces:

$$\begin{aligned}(\sigma f)^{-1}(s(a)) &= \{p \in \sigma L' \mid \sigma f(p) = pf \in s(a)\} \\ &= \{p \in \sigma L' \mid 1 = pf(a) = p(f(a))\} \\ &= s(f(a))\end{aligned}$$

Así $\sigma f \in \mathcal{T}\mathrm{op}(\sigma L', \sigma L)$.

Tenemos entonces que σ esta bien definido.

Proposición 3.2. *Los funtores $\sigma, Spec\colon \mathcal{DL}\mathrm{at} \to \mathcal{T}\mathrm{op}$ son isomorfos.*

Demostración. Sea $\alpha\colon \sigma \to Spec$ cuya componente para $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ esta dada por la función $\alpha_L\colon \sigma L \to Spec(L)$ definida como $\alpha_L(p) = p^{-1}(0)$.

Veamos que si $p \in \sigma L$ entonces $p^{-1}(0)$ es un ideal primo.
Sean $x, y \in p^{-1}(0)$ entonces:

1. Si $z \leq x$ como p es monotona entonces $p(z) \leq p(x) = 0$ y así $z \in p^{-1}(0)$.
2. $p(x \vee y) = p(x) \vee p(y) = 0 \vee 0 = 0$ así $x \vee y \in p^{-1}(0)$.

Tenemos entonces que $p^{-1}(0)$ es un ideal, para ver que es primo, sean $x, y \in L$ tal que $p(x \wedge y) = 0$ entonces $p(x) \wedge p(y) = p(x \wedge y) = 0$ y así $p(x)$ o $p(y)$ debe ser cero, lo cual comprueba que es un ideal primo y por tanto las componentes están bien definidas.

Veamos que α_L es una función continua para cada $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$, tomemos un básico de la topología de $Spec(L)$, sabemos que es de la forma $\lambda(a)$ para algún $a \in L$, luego:

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(\lambda(a)) &= \{p \in \sigma L \mid \alpha_L(p) \in \lambda(a)\} \\ &= \{p \in \sigma L \mid a \notin \alpha_L(p)\} \\ &= \{p \in \sigma L \mid a \notin p^{-1}(0)\} \\ &= \{p \in \sigma L \mid p(a) = 1\} = s(a)\end{aligned}$$

Así, cada componente es continua.

Para verificar que α es una tranformación natural, para cada $f \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, L')$ necesitamos la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\sigma L \arrow[r, "\alpha_L"] \arrow[d, "\sigma f"'] & Spec(L) \arrow[d, "Spec(f)"] \\
\sigma L' \arrow[r, "\alpha_{L'}"'] & Spec(L')
\end{tikzcd}$$

Lo cual se cumple pues sea $p \in \sigma L$:

$$Spec(f) \circ \alpha_L(p) = Spec(f)(p^{-1}(0)) = f^{-1}(p^{-1}(0)) = (pf)^{-1}(0) = \alpha_{L'}(pf) = \alpha_{L'} \circ \sigma f(p)$$

Además cada componente es un isomorfismo, como cada $p \in \sigma L$ es un morfismo con codominio 2, si las preimagenes del 0 coniciden entonces los complementos (las imagenes inversas del 1) coinciden y por ello cada α_L es inyectiva.

Por otro lado, para cada ideal primo $P \subseteq L$ podemos definir:

$$p(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin P \\ 0 \text{ si } x \in P \end{cases}$$

Y esto es un morfismo de retículas, es monotona gracias a que P contiene a las secciones inferiores de sus elementos, como P es cerrado bajo supremos entonces p abre supremos y al ser P primo, p abre infimos.

Por todo lo anterior α es un isomorfismo natural.

$\square$

3.3. Las relaciones entre $\mathcal{O}$ y σ

Tenemos un par de funtores contravariantes:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{DL}\mathrm{at} \arrow[r, bend left, "\sigma"] & \mathcal{T}\mathrm{op} \arrow[l, bend left, "\mathcal{O}"]
\end{tikzcd}$$

Podemos definir un endofuntor en $\mathcal{DL}\mathrm{at}$ dado por:

$$\Delta = \mathcal{O}\,\sigma : \mathcal{DL}\mathrm{at} \to \mathcal{DL}\mathrm{at}$$

Y un endofuntor en $\mathcal{T}\mathrm{op}$:

$$\Sigma = \sigma\,\mathcal{O} : \mathcal{T}\mathrm{op} \to \mathcal{T}\mathrm{op}$$

Definamos ahora una transformación natural:

$$s : Id_{\mathcal{DL}\mathrm{at}} \to \Delta$$

De forma que en cada $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ la componente $s_L : L \to \Delta L$ esta definida para cada $a \in L$ como $s_L(a) = \chi_a \in \mathcal{T}\mathrm{op}(\mathcal{DL}\mathrm{at}(L, 2), 2)$, y a su vez, para cada $p \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, 2)$ tenemos $\chi_a(p) = p(a)$.

Para ver que las componentes estan bien definidas, basta verificar que χ_a es continua, tenemos:

$$\chi_a^{-1}(1) = \{p \in \sigma L \mid p(a) = 1\} = s(a)$$

Por tanto, cada χ_a es continua.

Además, necesitamos que s_L sea un morfismo de retículas.
Sean $a, b \in L$, $p \in \sigma L$ entonces:

$s_L(a \wedge b)(p) = \chi_{a\wedge b}(p) = p(a \wedge b) = p(a) \wedge p(b) = \chi_a(p) \wedge \chi_b(p) = (\chi_a \wedge \chi_b)(p) = (s_L(a) \wedge s_L(b))(p)$

Lo cual lo verifica.

Veamos que s es en efecto, una transformación natural, para ello, dado un morfismo de retículas $f : L \to L'$ necesitamos la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "s_L"] \arrow[d, "f"'] & \Delta L \arrow[d, "\Delta f"] \\
L' \arrow[r, "s_{L'}"'] & \Delta L'
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in L$, por un lado tenemos $s_{L'} \circ f(a) = \chi_{f(a)}$, y por el otro $\Delta f \circ s_L(a) = \mathcal{O}\,\sigma f(\chi_a) = \chi_a \circ \sigma f$.

Sea $p \in \sigma L$ entonces:
$(\chi_a \circ \sigma f)(p) = \chi_a(p \circ f) = p(f(a)) = \chi_{f(a)}(p)$.

Así, $\chi_{f(a)} = \chi_a \circ \sigma f$, lo cual nos da la conmutatividad de diagrama.

Observación 3.3. *Usando esta transformación natural, cada $p \in \Delta L$ podemos caracterizarlo como:*

$$p = \bigvee_{a \in A} \chi_a \quad \textit{para algún } A \subseteq L$$

Analogamente, definamos:

$$\varepsilon : Id_{\mathcal{T}\mathrm{op}} \to \Sigma$$

De manera que para cada $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ la componente $\varepsilon_S : S \to \Sigma S$ esta dada por $\varepsilon_S(x) = p_x \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(\mathcal{T}\mathrm{op}(S, 2), 2)$ que a su vez, para cada $\varphi \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, 2)$ se calcula como $p_x(\varphi) = \varphi(x)$.

Para ver que las componentes estan bien definidas, basta revisar que cada p_x sea un morfismo de retículas.

Sean $\eta, \varphi \in \mathcal{O}\,S$ tenemos:
$p_x(\eta \vee \varphi) = (\eta \vee \varphi)(x) = \eta(x) \vee \varphi(x) = p_x(\eta) \vee p_x(\varphi)$.
Analogamente tenemos:
$p_x(\eta \wedge \varphi) = (\eta \wedge \varphi)(x) = \eta(x) \wedge \varphi(x) = p_x(\eta) \wedge p_x(\varphi)$

Así mismo, necesitamos que ε_S sea una función continua.

Sea U abierto de ΣS, digamos $U = \displaystyle\bigcup_{\varphi\in\Phi} s(\varphi)$ para algún $\Phi \subseteq \mathcal{O}\,S$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_S^{-1}(U) &= \{x \in S \mid \varepsilon_S(x) = p_x \in U\} \\
&= \{x \in S \mid p_x \in s(\varphi) \text{ para algún } \varphi \in \Phi\} \\
&= \{x \in S \mid p_x(\varphi) = 1 \text{ para algún } \varphi \in \Phi\} \\
&= \{x \in S \mid \varphi(x) = 1 \text{ para algún } \varphi \in \Phi\} \\
&= \{x \in S \mid \vee\Phi(x) = 1\} \\
&= (\vee\Phi)^{-1}(1)
\end{aligned}
$$

Lo cual es abierto en S, pues $\vee\Phi$ es continua.

Solo resta verificar que ε es realmente una transformación natural, es decir, que para cada $\varphi : S \to S'$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varepsilon_S"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Sigma S \arrow[d, "\Sigma\varphi"] \\
S' \arrow[r, "\varepsilon_{S'}"'] & \Sigma S'
\end{tikzcd}
$$

Sea $x \in S$, por un lado tenemos $\varepsilon_{S'} \circ \varphi(x) = p_{\varphi(x)}$ y por el otro $(\Sigma\varphi \circ \varepsilon_S)(x) = \sigma\,\mathcal{O}\,\varphi(p_x) = p_x \circ \mathcal{O}\,\varphi$

Sea $\eta \in \mathcal{O}\,S$ tenemos:
$(p_x \circ \mathcal{O}\,\varphi)(\eta) = p_x(\eta\varphi) = \eta(\varphi(x)) = p_{\varphi(x)}(\eta)$

Entonces $p_{\varphi(x)} = p_x \circ \mathcal{O}\,\varphi$ lo cual nos da la conmutatividad del diagrama.

Proposición 3.4. *Los funtores $\mathcal{O}$ y σ forman una adjunción, que se puede ver como:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{DL}\mathrm{at} \arrow[d, bend right, "\sigma"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathcal{T}\mathrm{op}^{op} \arrow[u, bend right, "\mathcal{O}"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{T}\mathrm{op} \arrow[d, bend right, "\mathcal{O}"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathcal{DL}\mathrm{at}^{op} \arrow[u, bend right, "\sigma"']
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Definimos:

$$\varphi_{L,S} : \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, S) \to \mathcal{T}\mathrm{op}(S, \sigma L)$$

Donde para cada $f \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, S)$, definimos $\varphi_{L,S}(f) = \sigma(f) \circ \varepsilon_S$.

Para ver que $\varphi_{L,S}$ es una biyección, definamos:

$$\psi_{L,S} : \mathcal{T}\mathrm{op}(S, \sigma L) \to \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, S)$$

Donde para cada $\eta \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, \sigma L)$, definimos $\psi_{L,S}(\eta) = \mathcal{O}(\eta) \circ s_L$.

Veamos que son inversas.

Sea $f \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, S)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\psi_{L,S}(\varphi_{L,S}(f)) &= \psi_{L,S}(\sigma(f) \circ \varepsilon_S) \circ s_L \\
&= \mathcal{O}(\sigma(f) \circ \varepsilon_S) \circ s_L \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon_S) \circ \mathcal{O}(\sigma(f)) \circ s_L \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon_S) \circ s_{\mathcal{O}\, S} \circ f
\end{aligned}$$

Dado que $\mathcal{O}(\varepsilon_S) \circ s_{\mathcal{O}\, S} \circ f \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, S)$ tomemos $a \in L$ y $x \in S$ entonces:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{O}(\varepsilon_S) \circ s_{\mathcal{O}\, S} \circ f(a))(x) &= (\mathcal{O}(\varepsilon_S) \circ \chi_{f(a)})(x) \\
&= \chi_{f(a)} \circ \varepsilon_S(x) \\
&= \chi_{f(a)}(p_x) \\
&= p_x(f(a)) = f(a)(x)
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$\psi_{L,S} \circ \varphi_{L,S} = Id$$

Para la otra composición tomemos $\eta \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, \sigma L)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi_{L,S}(\psi_{L,S}(\eta)) &= \varphi_{L,S}(O(\eta) \circ s_L) \\
&= \sigma(O(\eta) \circ s_L) \circ \varepsilon_S \\
&= \sigma(s_L) \circ \sigma(\mathcal{O}(\eta)) \circ \varepsilon_S \\
&= \sigma(s_L) \circ \varepsilon_{\sigma L} \circ \eta
\end{aligned}$$

Dado que $\sigma(s_L) \circ \varepsilon_{\sigma L} \circ \eta \in \mathcal{T}\mathrm{op}(\mathcal{O}, \sigma L)$ tomemos $a \in L$ y $x \in S$, entonces:

$$\begin{aligned}
(\sigma(s_L) \circ \varepsilon_{\sigma L} \circ \eta(x))(a) &= (\sigma(s_L) \circ p_{\eta(x)})(a) \\
&= p_{\eta(x)} \circ s_L(a) \\
&= p_{\eta(x)}(\chi_a) \\
&= \chi_a(\eta(x)) = \eta(x)(a)
\end{aligned}$$

Entonces tenemos:

$$\varphi_{L,S} \circ \psi_{L,S} = Id$$

Falta ver que $\varphi_{L,S}$ es natural.

Sea $f : L \to L'$, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, S) \arrow[r, "\varphi_{L,S}"] & \mathcal{T}\mathrm{op}(S, \sigma L) \\
\mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}(L', \mathcal{O}\, S) \arrow[r, "\varphi_{L',S}"'] \arrow[u, "\mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}(f, \mathcal{O}\, S)"] & \mathcal{T}\mathrm{op}(S, \sigma L') \arrow[u, "\mathcal{T}\mathrm{op}(S, \sigma f)"']
\end{tikzcd}$$

Sea $g \in \mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}(L', \mathcal{O}\, S)$ entonces tenemos:

$\varphi_{L,S} \circ \mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}(f, \mathcal{O}\, S)(g) = \varphi_{L,S}(gf) = \sigma(gf) \circ \varepsilon_S = \sigma(f) \circ \sigma(g) \circ \varepsilon_S =$
$\mathcal{T}\mathrm{op}(S, \sigma f)(\sigma(g) \circ \varepsilon_S) = \mathcal{T}\mathrm{op}(S, \sigma f) \circ \varphi_{L',S}(g)$

Por tanto, la bitección es natural en $\mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}$.

Ahora, sea $\eta : S \to S'$ consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, S) \arrow[r, "\varphi_{L,S}"] & \mathcal{T}\mathrm{op}(S, \sigma L) \\
\mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, S') \arrow[r, "\varphi_{L,S'}"'] \arrow[u, "\mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, \eta)"] & \mathcal{T}\mathrm{op}(S', \sigma L) \arrow[u, "\mathcal{T}\mathrm{op}(\eta, \sigma L)"']
\end{tikzcd}$$

Sea $f \in \mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, S')$ entonces tenemos:

$\varphi_{L,S} \circ \mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}(L, \mathcal{O}\, \eta)(g) = \varphi_{L,S}(\mathcal{O}\, \eta \circ f) = \sigma(\mathcal{O}\, \eta \circ f) \circ \varepsilon_S = \sigma f \circ \sigma\, \mathcal{O}\, \eta \circ \varepsilon_S =$
$\sigma f \circ \varepsilon_{S'} \circ \eta = \mathcal{T}\mathrm{op}(\eta, \sigma L)(\sigma f \circ \varepsilon_{S'}) = \mathcal{T}\mathrm{op}(\eta, \sigma L) \circ \varphi_{L,S'}(f)$

La cuarta igualdad se da por la naturalidad de ε en η.

Así, tenemos que $\varphi_{L,S}$ es natural en $\mathcal{T}\mathrm{op}$.

$\square$

Usando la proposición 2.3 en las adjunciones definidas en 3.4, tendremos dos mónadas:

$$(\Delta, s, \mathcal{O}\, \varepsilon_\sigma) \quad \text{mónada sobre } \mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}$$

$$(\Sigma, \varepsilon, \sigma s_{\mathcal{O}}) \quad \text{mónada sobre } \mathcal{T}\mathrm{op}$$

En dónde $\Delta = \mathcal{O}\, \sigma$ y $\Sigma = \sigma\, \mathcal{O}$. En los siguientes capítulos calcularemos las álgebras para estas mónadas usando el teorema 2.20, y así introduciremos dos nuevas categorías.

Capítulo 4

$\triangle$ -Álgebras

4.1. Marcos

Definición 4.1. *Sea $F \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ una retícula completa, decimos que F es un marco si satisface la "Ley distributiva para marcos" es decir, para cada $a \in F$ y $X \subseteq F$ se tiene:*

$$a \wedge (\vee X) = \vee\{a \wedge x \mid x \in X\}$$

Sea $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ completa, $X \subseteq L$ y $a \in L$,notemos siempre se cumple:

$$\vee\{a \wedge x \mid x \in X\} \leq a \wedge (\vee X)$$

Así, basta confirmar la desigualdad opuesta para afirmar que cierta retícula es marco.

Definición 4.2. *Sean $F, F' \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ marcos, un morfismo de marcos es una función $f \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(F, F')$ tal que:*

1. $f(\vee X) = \vee f[X] \quad \forall X \subseteq F$.
2. $f(1_F) = 1_{F'}$ *y* $f(0_F) = 0_{F'}$.

Denotamos $\mathcal{F}\mathrm{rm}$ a la subcategoría de $\mathcal{DL}\mathrm{at}$ cuyos objetos son marcos y sus flechas morfismos de marcos.

Definición 4.3. *Sea $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ una retícula completa, definimos la implicación en L como una asignación $\succ : L \times L \to L$ que cumple:*

$$x \leq (a \succ b) \Longleftrightarrow x \wedge a \leq b \quad \forall a, b \in L$$

Teorema 4.4. *Una retícula completa $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ es un marco si y solo si tiene implicación.*

Demostración. Si L tiene implicación, sea $y = \vee\{a \wedge x \mid x \in X\}$ entonces:

$$\begin{aligned} a \wedge x \leq y \quad \forall x \in X &\Longleftrightarrow x \leq (a \succ y) \quad \forall x \in X \\ &\Longleftrightarrow \vee X \leq (a \succ y) \\ &\Longleftrightarrow a \wedge (\vee X) \leq y \end{aligned}$$

Así $\vee\{a \wedge x \mid x \in X\} = \vee X$, es decir $L \in \mathfrak{Frm}$.

Por otro lado, si $L \in \mathfrak{Frm}$, definamos $(a \succ b) = \vee\{y \in L \mid y \wedge a \leq b\}$.
Veamos que efectivamente es una implicación.

Sea $y \in L$ tal que $y \wedge a \leq b$ entonces

$$y \leq \vee\{y \in L \mid y \wedge a \leq b\} = (a \succ b)$$

Por otro lado, supongamos que $y \leq (a \succ b)$, entonces:

$$y \wedge a \leq (a \succ b) \wedge a = \vee\{y \wedge a \in L \mid y \wedge a \leq b\} \leq a$$

La igualdad $(a \succ b) \wedge a = \vee\{y \wedge a \in L \mid y \wedge a \leq b\}$ se cumple pues $L \in \mathfrak{Frm}$.

Así $\succ$ es efectivamente una implicación.

$\square$

La siguiente definición es necesaria para exponer un primer ejemplo de marco:

Definición 4.5. *Sea $X \in \mathfrak{Con}$, $T \subseteq X$ es una sección superior si siempre que $x \geq y \in T$ entonces $x \in T$*

Ejemplo 4.6. *Sea $X \in \mathfrak{Con}$ el conjunto de secciones superiores de X se denota como ΥX.*

Sean $T, R \in \Upsilon X$ entonces $T \cap R \in \Upsilon X$ pues si $x \geq y \in T \cap R$ entonces $y \in T$ y $y \in R$, además como $x \geq y$ entonces $x \in T$ y $x \in R$, así $x \in T \cap R$.

Análogamente podemos verificar que la unión funciona como supremo arbitrario.

Verifcamos la ley ditributiva para marcos:

Sean $A \in \Upsilon X$ y $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \Upsilon X$ entonces:
Sea $x \in A \cap (\bigcup\limits_{i \in I} B_i$ entonces $x \in A$ y $x \in B_i$ para algún $i \in I$, así $x \in A \cap B_i$ y por tanto $x \in \bigcup\{A \cap B_i \mid i \in I\}$.

Hemos probado que ΥX es un marco.

Definición 4.7. *Sea $F \in \mathfrak{Frm}$, decimos que $p \in F$ es un punto de F si $p \neq 1$ y:*

$$x \wedge y \leq p \Rightarrow x \leq p \text{ o } y \leq p$$

Sea $F \in \mathfrak{Frm}$, denotamos $pt(F) = \{p \in F \mid p \text{ es un punto de } F\}$.

Para cada $a \in F$ definamos $U_F(a) = \{p \in pt(F) \mid a \nleq p\}$.

Observación 4.8. *Sea $F \in \mathfrak{Frm}$ entonces:*

1. $U_F(1) = pt(F)$.
2. $U_F(0) = \varnothing$.
3. $U_F(\vee X) = \cup U_F[X]$.
4. $U_F(a) \wedge U_F(b) = U_F(a \wedge b)$.

Gracias a la observación anterior, podemos definir $\tau_{pt(F)} = \{U_F(a) \mid a \in F\}$ y así $(pt(F), \tau_{pt(F)}) \in \mathfrak{Top}$.

Corolario 4.9. *Sea $F \in \mathfrak{Frm}$ entonces:*

$$U_F \colon F \to \Omega pt(F)$$

Es un morfismo de marcos suprayectivo, donde Ω es el funtor definido en 1.3.

Podemos ver ciertas relaciones entre los puntos de un marco y el espectro de este definido en 1.3, a continuación formalizaremos algunas de estas interacciones que nos serán útiles posteriormente.

Definición 4.10. *Sea $L \in \mathcal{DL}\text{at}$ definimos:*

$$\mathcal{I}L = \{I \subseteq L \mid I \textit{ es ideal de } L\}$$

Sabemos que intersección de ideales es ideal, así, $\cap$ es el ínfimo en $\mathcal{I}I$, y como cada $L \in \mathcal{DL}\text{at}$ tiene elemento mínimo, entonces $\mathcal{I}L$ tiene intersecciones arbitrarias y elemento mínimo $\{0\}$.

Definimos el supremo en $\mathcal{I}L$ para $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}L$ como:

$$\vee\mathcal{J} = \{y \in L \mid \exists F \subseteq \cup\mathcal{J} \text{ finito, tal que } y \leq \vee F$$

Claramente $\vee\mathcal{J} \in \mathcal{I}L$ y $\cup\mathcal{J} \subseteq \vee\mathcal{J}$.

Ahora, sea $I \in \mathcal{I}L$ tal que $\cup\mathcal{J} \subseteq I$, veamos que $\vee\mathcal{J} \subseteq I$.

Sea $y \in \vee\mathcal{J}$ entonces $y \leq \vee F$ para algún $F \subseteq \cup\mathcal{J}$ finito, como $F \subseteq \cup\mathcal{J} \subseteq I$ entonces $y \leq \vee F \in I$, así $\vee\mathcal{J} \subseteq I$.

Es decir, $\vee\mathcal{J}$ realmente es el supremo en $\mathcal{I}L$.

Entonces $\mathcal{I}L$ tiene supremos arbitrarios y elemento máximo L.

Así hemos probado que $\mathcal{I}L$ es una retícula completa para cada $L \in \mathcal{DL}\text{at}$.

Proposición 4.11. *Sea $L \in \mathcal{DL}\text{at}$ entonces $\mathcal{I}L \in \mathfrak{Frm}$.*

Demostración. Basta probar ahora que para cada $I \in \mathfrak{I}L$ y $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{I}L$ se tiene:

$$I \wedge \vee\mathfrak{J} \subseteq \vee\{I \wedge J \mid J \in \mathfrak{J}\}$$

Sea $z \in I \wedge \vee\mathfrak{J}$ entonces existe $F \subseteq \cup\mathfrak{J}$ finito tal que $z \leq \vee F$, como L es distributiva y F finito, entonces:

$$z = z \wedge \vee F = \vee\{z \wedge y \mid y \in F\}$$

Además, para cada $y \in F$ tenemos $y \in J$ para algún $J \in \mathfrak{J}$, así $z \cap y \in I \cap J$ para algún $J \in \mathfrak{J}$ y por tanto $z \in \vee\{I \wedge J \mid J \in \mathfrak{J}\}$.

Así $\mathfrak{I}L \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$. □

Definición 4.12. *Para cada $L \in \mathfrak{D}\mathfrak{L}\mathrm{at}$ y $I \in \mathfrak{I}L$ definamos:*

$$V_L(I) = \{P \in Spec(L) \mid I \nsubseteq P\} \subseteq Spec(L)$$

Observación 4.13. *Sea $L \in \mathfrak{D}\mathfrak{L}\mathrm{at}$, $I \in \mathfrak{I}L$ y λ definida en 1.3 entonces:*

1. $V_L(I) = \cup\{\lambda(a) \mid a \in I\} \in \Omega Spec(L)$.
2. $V_L(\downarrow a) = \lambda(a)$

Tenemos entonces:

$$V_L : \mathfrak{I}I \to \Omega Spec(L)$$

Proposición 4.14. *Sea $L \in \mathfrak{D}\mathfrak{L}\mathrm{at}$ entonces V_L es un morfismo de marcos.*

Demostración. Sea $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{I}L$, veamos que $V_L(\vee\mathfrak{J}) \subseteq \vee\{V_L(I) \mid I \in \mathfrak{J}\}$.

Sea $P \in V_L(\vee\mathfrak{J})$ entonces $\vee\mathfrak{J} \nsubseteq P$, así existe $a \in \vee\mathfrak{J} \setminus P$.
Como $a \in \vee\mathfrak{J}$ entonces $a = b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n$ para algunos $b_i \in I_i \in \vee\mathfrak{J}$, como $a \notin P$ entonces $b_i \notin P$ para algún $i \leq n$, es decir $J_i \nsubseteq P$ y entonces:

$$P \in V_L(J_i) \subseteq \vee\{V_L(I) \mid I \in \mathfrak{J}\}$$

Por tanto V_L es un morfismo de marcos. □

Proposición 4.15. *Sea $L \in \mathfrak{D}\mathfrak{L}\mathrm{at}$ entonces V_L es un isomorfismo de marcos.*

Demostración. Sea $U \in \Omega Spec(L)$, por lo visto en 1.3 tenemos:

$$U = \cup\{\lambda(a) \mid a \in A\}$$

Para algún $A \subseteq L$, sea I_A el ideal generado por A entonces:

$$U = V_L(I_A)$$

Así, V_L es suprayectiva.
Para probar la inyectividad veamos que para $I, J \in \mathfrak{I}L$ se tiene:

$$V_L(J) \subseteq V_L(I) \Rightarrow J \subseteq I$$

Supongamos $J \nsubseteq I$, entonces existe $a \in L$ con $a \notin I$ y $a \in J$.

Por 1.22 tenemos $P \subseteq L$ ideal primo tal que $I \subseteq P$ y $a \notin P$, es decir $J \nsubseteq P$, por tanto $P \in V_L(J)$ pero $P \notin V_L(I)$, así $V_L(J) \nsubseteq V_L(I)$.

Por tanto V_L es inyectiva. □

Lema 4.16. *Sea $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ entonces:*

$$Spec(L) = pt(\mathcal{I}A)$$

Como conjuntos.

Demostración. Sea $P \in Spec(L)$ y supongamos $I, J \nsubseteq P$ para $I, J \in \mathcal{I}L$, entonces existen $x, y \in L$ tal que $x, y \notin P$, $x \in I$ y $y \in J$, como P es primo entonces $x \wedge y \notin P$ pero $x \wedge y \leq x, y$ y así $x \wedge y \in I \cap J$, es decir $I \cap J \nsubseteq P$, por tanto $P \in pt(\mathcal{I}A)$.

Ahora sea $P \in pt(\mathcal{I}L)$ y supongamos $x \wedge y \in P$.
Como $x \wedge y \in P$, entonces $\downarrow x \cap \downarrow y = \downarrow (x \wedge Y) \subseteq P$ y asl ser P un punto de $\mathcal{I}L$, entonces $\downarrow x \subseteq P$ o $\downarrow y \subseteq P$, es decir $x \in P$ o $y \in P$, por tanto $P \in Spec(L)$. □

Por la proposición 4.16 tenemos que $Spec(L) = pt(\mathcal{I}A)$ como conjuntos, sin embargo, falta verificar que las topologías definidas para cada uno de estos espacios sean iguales, 4.15 nos da una caracterización para $\tau_{Spec(L)}$ por medio del morfismo V_L y 4.9 nos dice que $U_{\mathcal{I}L}$ es supra, lo cual caracteriza a $\tau_{pt(\mathcal{I}L)}$.

Además, por 4.16 tenemos que para cada $I \in \mathcal{I}L$ se cumple $V_L(I) = U_{\mathcal{I}L}(L)$, con lo cual tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.17. *Sea $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ entonces:*

$$(Spec(L), \tau_{Spec(L)}) = (pt(\mathcal{I}A), \tau_{pt(\mathcal{I}A)}) \quad \textit{en } \mathcal{T}\mathrm{op}$$

4.2. Un marco sin puntos

Aquí se mostrará un ejemplo no trivial de un marco sin puntos, lo cual nos remarca la ventaja de trabajar con los espacios de Stone de una retícula y no con sus puntos.

Este ejemplo se basa en el artículo de Harold Simmons [Sim06].

Sean A,$B \in \mathcal{C}\mathrm{on}$ infinitos tales que el cardinales de B es estrictamente mayor que el cardinal de A.
Definimos:

$$S = \{f \in \mathcal{C}\mathrm{on}(Y, B) \mid Y \subseteq A \text{ finito }\}$$

$$\Sigma = \{\sigma \in \mathcal{C}\mathrm{on}(Y, B) \mid Y \subseteq A\}$$

Notemos que $S \subseteq \Sigma$, así cada construcción dada para Σ la podemos considerar en S.

Para cada $\sigma \in \Sigma$ denotamos D_σ al dominio de σ, es decir, $\sigma \in \mathcal{C}\mathrm{on}(D_\sigma, B)$.

Demos un orden a Σ, para $\sigma, \tau \in \Sigma$, decimos que $\sigma \leq \tau$ si y solo si $D_\sigma \subseteq D_\tau$ y para cada $a \in D_\sigma$ se tiene $\sigma(a) = \tau(a)$.

Así $(S, \leq), (\Sigma, \leq) \in \mathcal{P}\mathrm{os}$, luego, podemos considerar los marcos de las secciones superiores ΥS y $\Upsilon \Sigma$ respectivamente.

Definición 4.18. *Decimos que σ y τ son compatibles si $\sigma(x) = \tau(x)$ para todo $x \in D_\sigma \cap D_\tau$.*

Denotamos $\sigma | \tau$ siempre que σ y τ no sean compatibles.

Definición 4.19. *Sea $\sigma \in \Sigma$, $a \in A \setminus D_\sigma$ y $b \in B$, definimos $\sigma(a \to b) \in \Sigma$ como: $\sigma(a \to b)(x) = \sigma(x)$ para todo $x \in D_\sigma$ y $\sigma(a \to b)(a) = b$.*

Definición 4.20. *Para cada $s \in S$ definimos su sección superior como:*

$$\uparrow s = \{t \in S \mid s \leq t\}$$

Definición 4.21. *Para cada $U \in \Upsilon S$ definimos:*

$$\neg U = \{t \in S \mid \uparrow t \cap U = \varnothing\}$$

$\neg U \in \Upsilon S$ pues si $s \in \neg U$ y $s \leq t$ entonces $\uparrow s \subseteq \uparrow t$ y así $\uparrow t \cap U \subseteq \uparrow s \cap U = \varnothing$ y por tanto $t \in \neg U$.

Observación 4.22. *$r \in \neg \uparrow s$ si y solo si $\uparrow r \cap \uparrow s = \varnothing$ si y solo si $r | s$*

Definición 4.23. *Sea $\sigma \in \Sigma$, definimos:*

$$Q(\sigma) = \{t \in S \mid \sigma | t\} \qquad P(\sigma) = \{t \in S \mid t \nleq \sigma\}$$

Proposición 4.24. *Sea $\sigma \in \Sigma$ entonces $Q(\sigma), P(\sigma) \in \Upsilon S$*

Demostración. Sea $t \in P(\sigma)$ y $t \leq s$, si $s \leq \sigma$ entonces $t \leq \sigma$ lo cual no puede suceder, por tanto $s \nleq \sigma$, es decir $s \in P(\sigma)$.

Sea $t \in Q(\sigma)$ y $t \leq s$, como $t \in Q(\sigma)$ existe $x \in D_t$ tal que $t(x) \neq \sigma(x)$, y como $t \leq s$ entonces $s(x) = t(x) \neq \sigma(x)$, así $s \in Q(\sigma)$. $\square$

Lema 4.25. *Para cada $\sigma \in \Sigma$, $P(\sigma)$ es un punto de ΥS.*

Demostración. Notemos que $P(\sigma) \neq S$ pues dado $a \in D_\sigma$ podemos definir $t \in \mathcal{C}\mathrm{on}(\{a\}, B)$ donde $t(a) = \sigma(a)$, así $t \leq \sigma$ y por tanto $t \notin P(\sigma)$.

Ahora, sean $U, V \in \Upsilon S$ tal que $U, V \nsubseteq P(\sigma)$ tomemos $r \in U$, $s \in V$ tal que $r, s \notin P(\sigma)$ entonces $r, s \leq \sigma$ y así $r, s \leq r \vee s \leq \sigma$, por tanto $r \vee s \in U \cap V$ pero $r \vee s \notin P(\sigma)$, es decir $U \cap V \nsubseteq P(\sigma)$.

Por lo tanto $P(\sigma)$ es un punto de ΥS $\square$

Lema 4.26. *Sea $P \in \Upsilon S$ un punto, entonces $P = P(\sigma)$ para algún $\sigma \in \Sigma$.*

Demostración. $L = S \setminus P$ es una sección inferior de S, además, si $s, t \in L$ entonces $\uparrow S, \uparrow t \nsubseteq P$ y así $\uparrow s \cap \uparrow t \nsubseteq P$ pues P es un punto.

Sea $r \in S$ tal que $t, s \leq r$ y $r \notin P$ entonces $r \in L$, esto nos dice que L es un conjunto dirigido.

Definamos:

$$X = \bigcup_{t \in L} D_t$$

Para cada $a \in X$, si $a \in D_s \cap D_r$, como L es dirigido, existe $t \in L$ con $r, s \leq t$ y entonces $t(a) = s(a) = r(a)$, así podemos definir:

$$\sigma \colon X \to B$$

Donde $\sigma(a) = t(a)$ para cualquier $t \in L$ con $a \in D_t$, y esta definición no depende de la elección de t.

Veamos ahora que $P = P(\sigma)$.

Sea $t \in S$, si $t \notin P(\sigma)$ entonces $t \leq \sigma$ y así existe $s \in L$ tal que $t \leq s$ enonces $t \in L$ y por tanto $t \notin P$, así $P \subseteq P(\sigma)$.

Sea $t \in P(\sigma)$ entonces $t \nleq \sigma$ por tanto $t \notin L$ es decir $t \in P$, por tanto $P(\sigma) \subseteq P$. □

Definamos ahora:

$$\Xi = \{U \in \Upsilon S \mid \forall t \in S \setminus U, \forall b \in B, \exists a \in A \text{ tal que } t(a \to b) \in S \setminus U\}$$

Claramente $\varnothing \in \Xi$, pues $S \setminus \varnothing = S$.

Además Ξ es cerrado bajo uniones arbitrarias pues si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \Xi$, sean $t \in S \setminus \cap_{i \in I} U_i = \cup_{i \in I} S \setminus U_i$ y $b \in B$, entonces $t \in S \setminus U_i$ para alguna $i \in I$ y así existe $a \in A$ tal que $t(a \to b) \notin U_i$ y por tanto $t(a \to b) \notin \cap_{i \in I} U_i$.

Para comprobar que Ξ es un cociente de ΥS nos falta verificar una última propiedad:

Proposición 4.27. *Sea $U \in \Xi$ y $V \in \Upsilon S$ entonces $V \succ U \in \Xi$.*

Demostración. Sea $t \notin V \succ U$ y $b \in B$, entonces $\uparrow T \nsubseteq V \succ U$ y así $\uparrow t \cap V \nsubseteq U$, por tanto existe r tal que $t \leq r \in V$ y $r \notin U$, como $U \in \Xi$ entonces existe $a \in A$ tal que $r(a \to b) \notin U$ y claramente tenemos $t \leq r(a \to b) \in V$ así $t(a \to b) \notin V \succ U$. □

Tenemos entonces que Ξ es un cociente de ΥS.

Teorema 4.28. *Ξ no tiene puntos.*

Demostración. Sea P un punto de Ξ, entonces por **??** P es un punto de ΥS, así, por 4.26 existe $\sigma \in \Sigma$ con $P = P(\sigma)$.
Como $P \subsetneq S$, existe $t \in S \setminus P$ es decir, $t \leq \sigma$.

Veamos que σ es suprayectiva.
Sea $b \in B$, como $t \in S \setminus P$ y $P \in \Xi$ existe $a \in A \setminus D_t$ tal que $t(a \to b) \in S \setminus P$, es decir $t(a \to b) \leq \sigma$, entonces $\sigma(a) = b$.
Así, $\sigma\colon D_\sigma \to B$ es suprayectiva y por tanto $|B| \leq |D_\sigma| \leq |A|$, lo cual es una contradicción pues el cardinal de A es menor estricto que el cardinal de B.

Por tanto Ξ no tiene puntos. □

4.3. Caracterización de Δ-Álgebras

En esta sección verificaremos que la mónada $(\Delta, s, \mathcal{O}\,\varepsilon_\sigma)$ definida al final del capítulo 3 cumple las condiciones del teorema 2.20, para poder encontrar una subcategoría de $\mathcal{DL}\mathrm{at}$ equivalente a las álgebras de la mónada.

Proposición 4.29. *$\mathcal{F}\mathrm{rm}$ es Δ-suficiente.*

Demostración. Previamente habíamos mostrado que para cada $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ tenemos $OS \in \mathcal{F}\mathrm{rm}$.
Sea $\eta \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, S'), \Phi \subseteq OS'$ entonces:

$$\begin{aligned} O\eta(\vee\Phi)(x) &= \vee\Phi \circ \eta(x) \\ &= \vee\{\varphi \circ \eta(x) \mid \varphi \in \Phi\} \\ &= \vee\{\varphi \circ \eta \mid \varphi \in \Phi\}(x) \\ &= \vee\{O\eta(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}(x) \end{aligned}$$

□

Proposición 4.30. *s es $\mathcal{F}\mathrm{rm}$-epimorfismo.*

Demostración. Sea $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ y $f, g \in \mathcal{F}\mathrm{rm}(\Delta L, M)$ tal que $fs_L = gs_L$.

Sea $x \in \Delta L$ digamos $x = \bigvee_{a \in A} s_L(a)$ para algún $A \subseteq L$.
Entonces:

$$f(x) = f(\bigvee_{a\in A} s_L(a)) = \bigvee_{a\in A} fs_L(a) = \bigvee_{a\in A} gs_L(a) = g(\bigvee_{a\in A} s_L(a)) = g(x)$$

Es decir, $f = g$. □

Lema 4.31. *Sea $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$, $a \in L, B \subseteq L$.*
Si $\chi_a \leq \bigvee_{b\in B} \chi_b$ entonces existe $F \subseteq B$ finito tal que $\chi_a \leq \bigvee_{b\in F} \chi_b$

Demostración. Sean $\{F_i\}_{i\in I}$ los subconjuntos finitos de B.
Supongamos que $\chi_a \nleq \bigvee_{b\in F_i} \chi_b \quad \forall i \in I$.
Entonces, para cada i existe $p_i \in \sigma L$ tal que:

$$p_i(a) = \chi_a(p_i) \nleq \bigvee_{b\in F_i} \chi_b(p_i) = \bigvee_{b\in F_i} p_i(b)$$

Entonces $p_i(a) = 1$ y $p_i(b) = 0 \quad \forall b \in F_i$.
Sea $N_i = p_i^{-1}(1)$.
N_i es un filtro primo en L con $a \in N_i$ y $N_i \cap F_i = \varnothing$.

Definamos $N = \cap_{i\in I} N_i$, N es no vacío pues $a \in N$, entonces N es un filtro.
Sea B^* el ideal en L generado por B.

Notemos que $N \cap B^* = \varnothing$, ya que de lo contrario:
Sea $x \in N \cap B^*$, como $x \in B^*$ entonces $x = \vee F_i$ con F_i un subcjto finito de B, entonces $\vee F_i \in N \subseteq N_i$ y por ser N_i filtro primo $F_i \cap N_i \neq \varnothing$.
Lo cual es una contradicción.

Así, el Teorema de Stone 1.21 nos da la existencia de un ideal primo P con $N \subseteq P$ y $P \cap B^* = \varnothing$.
Definamos:

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P \\ 0 & \text{si } x \notin P \end{cases}$$

Como P es primo, entonces $p \in \sigma L$.
Además

$$1 = p(a) = \chi_a(p) \nleq \bigvee_{b\in B} \chi_b(p) = \bigvee_{b\in B} p(b) = 0$$

Es decir:

$$\chi_a \nleq \bigvee_{b\in B} \chi_b$$

□

Lema 4.32. *Sea* $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$, $a, b \in L$. *Si* $\chi_a \leq \chi_b$ *entonces* $a \leq b$.

Demostración. Supongamos que $a \nleq b$ y consideremos la sección superior de a y la sección inferior de b, es decir:

$$A = \{x \in L | a \leq x\} \quad B = \{x \in L | x \leq b\}$$

Notemos que $A \cap B = \varnothing$ pues de no ser así, entonces existe un elemento tal que $a \leq x \leq b$ y entonces $a \leq b$ lo cual es una contradcicción.

Nuevamente, el Teorema de Stone 1.21 nos da la existencia de un filtro primo P con $B \subseteq P$ y $P \cap A = \varnothing$, definamos:

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P \\ 0 & \text{si } x \notin P \end{cases}$$

Entonces:

$$1 = p(a) = \chi_a(p) \nleq \chi_b(p) = p(b) = 0$$

Es decir:

$$\chi_a \nleq \chi_b$$

□

Observación 4.33. *El lema anterior también nos dice que para cada $L \in \mathfrak{Frm}$, s_L es inyectiva.*

Lema 4.34. *Sea $L \in \mathfrak{DLat}$, $A, B \subseteq L$ tal que:*

$$\bigvee_{a \in A} \chi_a = \bigvee_{b \in B} \chi_b$$

entonces $\vee A = \vee B$.

Demostración. Para cada $a \in A$ tenemos:

$$\chi_a \leq \bigvee_{a \in A} \chi_a = \bigvee_{b \in B} \chi_b$$

Entonces, por el lema 4.31, existe $F \subseteq B$ finito tal que:

$$\chi_a \leq \bigvee_{b \in B} \chi_b = \chi_{\vee F}$$

La igual de la derecha se da pues s_L es un morfismo de retículas y F es finito.
Entonces, por el lema 4.32, tenemos que $a \leq \vee F \leq \vee B$ y así $\vee A \leq \vee B$.
Analogamente podemos probar que $\vee B \leq \vee A$ y entonces $A = B$. □

Definición 4.35. *Sea $L \in \mathfrak{Frm}$ definimos el morfismo estructural de L como:*

$$h_L : \Delta L \to L$$

Donde para cada $x = \bigvee_{a \in A} \chi_a \in \Delta L$ definimos $h_L(x) = \vee A$.

Observación 4.36. *Por el lema 4.34 sabemos que h_L esta bien deinida.*

Lema 4.37. *Cada $L \in \mathfrak{Frm}$ es Δ-retractil con h_L.*

Demostración. Sea $B \subseteq \Delta L$, para cada $x \in B$ pongamos $x = \bigvee_{a \in A_x} \chi_a$ con $A_x \subseteq L$

Sea $A = \bigcup_{x \in B} A_x$ entonces:

$$\vee \Phi = \bigvee_{a \in A} \chi_a$$

Entonces:

$$h_L(\vee \Phi) = h_L(\bigvee_{a \in A} \chi_a) = \vee A = \vee \{\vee A_x | x \in \Phi\} = \vee \{h_L(x) | x \in \Phi\}$$

Ahora, sean $x, y \in \Delta L$, digamos $x = \bigvee_{a \in A} \chi_a$ y $y = \bigvee_{b \in B} \chi_b$.
Sea $C = \{a \wedge b | a \in A, b \in B\}$, como $\Delta L \in \mathfrak{Frm}$ tenemos que $\bigvee_{c \in C} \chi_c = x \wedge y$.

Entonces:

$$\begin{aligned} h_L(x) \wedge h_L(y) &= h_L \wedge \vee B \\ &= \vee \{h_L(x) \wedge b \mid b \in B\} \\ &= \vee \{\vee A \wedge b \mid b \in B\} \\ &= \vee \{a \wedge b \mid a \in A, b \in B\} \\ &= \vee C = h_L(x \wedge y) \end{aligned}$$

Por tanto, h_L es un morfismo de marcos.

Por otro lado:

$$h_L s_L(a) = h_L(\chi_a) = a$$

Es decir, $h_L s_L = 1_L$. □

Lema 4.38. *Sea* $(L, h_L) \in \mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}^{\Delta}$ *entonces* $L \in \mathfrak{Frm}$ *y* $h = h_L$.

Demostración. Como $(L, h_L) \in \mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}^{\Delta}$ entonces $hs_L = 1_L$.
Sea $A \subseteq L$, $x = \bigvee_{a \in A} \chi_a$ y $b = h(x)$ entonces:

$$a \in A \Rightarrow s_L(a) \leq x \Rightarrow a = hs_L(a) \leq h(x) = b$$

Entonces b es cota superior para A, veamos ahora que es la mínima.
Sea c cota superior para A entonces:

$$x \leq s_L(c) \Rightarrow b = h(x) \leq hs_L(c) = c$$

Así, b es el supremo de A y entonces L tiene supremos arbitrarios.

Además:

$$\vee A = b = h(x) = h(\bigvee_{a \in A} \chi_a)$$

Es decir, $h = h_L$.

Veamos que L cumple la ley distributiva para marcos
Sea $a \in L$, $B \subseteq L$.
Pongamos $x = \bigvee_{b\in B} \chi_b$ y $y = \bigvee_{b\in B} \chi_{a\wedge b}$.
Como $\Delta L \in \mathfrak{Frm}$ tenemos que:

$$\chi_a \wedge x = \vee\{\chi_a \wedge \chi_b | b \in B\} = y$$

Entonces:

$$a \wedge \vee B = hs_L(a) \wedge h(x) = h(y) = \vee\{a \wedge b | b \in B\}$$

. □

Lema 4.39. *Sean $L, M \in \mathfrak{Frm}$ y h_L, h_M sus morfismos estructurales.*
$f \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, M)$ es un morfismo de marcos si y solo si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Delta L \arrow[r, "h_L"] \arrow[d, "\Delta f"'] & L \arrow[d, "f"] \\
\Delta M \arrow[r, "h_M"'] & M
\end{tikzcd}$$

Demostración. La ida se prueba en 2.19.
Para el regreso:
Sea $x \in \Delta L$ y $A \subseteq L$ con $x = \bigvee_{a\in A} \chi_a$.
Entonces para $g \in \mathcal{DL}\mathrm{at}(L, 2)$:

$$\begin{aligned}
\Delta f(x)(g) &= O(\sigma(f)) \circ \bigvee_{a\in A} \chi_a(g) = \bigvee_{a\in A} \chi_a \circ \sigma(f)(g) \\
&= (\bigvee_{a\in A} \chi_a)(gf) = \bigvee_{a\in A} \chi_a(gf) \\
&= \bigvee_{a\in A} gf(a) = \bigvee_{a\in A} \chi_{f(a)}(g) \\
&= (\bigvee_{a\in A} \chi_{f(a)})(g)
\end{aligned}$$

Es decir, $\Delta f(x) = \bigvee_{a\in A} \chi_{f(a)}$.
Así:

$$f(\vee A) = fh_L(x) = h_M \circ \Delta f(x) = h_M(\bigvee_{a\in A} \chi_{f(a)}) = \vee\{f(a) | a \in A\}$$

Entonces f es un morfismo de marcos. □

Con los lemas anteriores y el teorema 2.20 tenemos la existecia de un isomorfismo:

$$\Psi : \mathcal{F}\mathrm{rm} \to \mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}^{\Delta}$$

Donde $\Psi(L) = (L, h_L)$ y $\Psi(f) = f$.

Es decir, la categoría de Δ-Álgebras es precisamente la categoría $\mathcal{F}\mathrm{rm}$.

Capítulo 5

Σ-Álgebras

Para estudiar la categoría de Σ-Álgebras es necesario introducir una nueva subcategoría de $\mathcal{T}\mathrm{op}$, la categoría de los "espacios bien compactados" denotada por $\mathcal{W}\mathrm{lk}$, cuyos objetos y flechas se describen en este capítulo.

5.1. Puntos límite

Definición 5.1. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ y $p \in \Sigma S$ definimos:*

$$Z_p = \{\varphi \in \mathcal{O}\, S | p(\varphi) = 0\}$$

Definición 5.2. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ y $p \in \Sigma S$ definimos los puntos límite de S como:*

$$l(p) = \bigcap_{\varphi \in Z_p} \varphi^{-1}(0)$$

Observación 5.3. *$l(p)$ es un cerrado de S.*

Proposición 5.4. *$x \in l(p)$ si y solo si $p_x \leq p$.*

Demostración. Sea $x \in l(p)$ y $\varphi \in \mathcal{O}\, S$.
Supongamos $p(\varphi) = 0$, es decir $\varphi \in Z_p$, así tenemos $l(p) \subseteq \varphi^{-1}(0)$.
Por tanto $0 = \varphi(x) = p_x(\varphi)$, entonces $p_x \leq p$.

Por otro lado, supongamos que $p_x \leq p$.
Para cualquier $\varphi \in Z_p$ tenemos:

$$\varphi(x) = p_x(\varphi) \leq p(\varphi) = 0$$

Y así, $\varphi(x) = 0$, entonces $x \in l(p)$ $\square$

Usando lo anterior, podemos definir para $p \in \Sigma S$:

$$l_p(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } p_x \nleq p \\ 0 \text{ si } p_x \leq p \end{cases}$$

Observación 5.5. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$, $p \in \Sigma S$, entonces:*

1. $l_p \in \mathcal{O}\, S$
2. $l_p^{-1}(0) = l(p)$
3. $l_p = \bigvee \{\varphi \in \mathcal{O}\, S | p(\varphi) = 0\} = \bigvee Z_p$

Para probar el siguiente lema usaremos la caracterización 1.23 para compacidad:

Lema 5.6. *$S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ es compacto si y solo si $\forall p \in \Sigma S$ tal que $p(0_{\mathcal{O}\, S}) = 0$ y $p(1_{OS}) = 1$ se tiene $l(p) \neq \varnothing$.*

Demostración. Sea S compacto y $p \in \Sigma S$ tal que $p(0_{OS}) = 0$ y $p(1_{OS}) = 1$.

Consideremos la familia de cerrados $\{\varphi^{-1}(0) | \varphi \in Z_p\}$, y veamos que tiene la p.i.f.

Sean $\gamma, \eta \in Z_p$, si suponemos que $\gamma^{-1}(0) \cap \eta^{-1} = \varnothing$ entonces tendremos $\gamma \vee \eta = 1_{OS}$, así:

$$1 = p(1_{OS}) = p(\gamma \vee \eta) = p(\gamma) \vee p(\eta) = 0 \vee 0 = 0$$

Lo cual es una contradicción, por tanto $\{\varphi^{-1}(0) | \varphi \in Z_p\}$ tiene la p.i.f. y entonces $l(p) \neq \varnothing$.

Por otro lado, supongamos que $l(p) \neq \varnothing \quad \forall p \in \Sigma S$ con $p(0_{\mathcal{O}\, S}) = 0$ y $p(1_{\mathcal{O}\, S}) = 1$. Sea C una familia de cerrados con la p.i.f. digamos $C = \{\varphi^{-1}(0) | \varphi \in \Phi\}$ y sea I el ideal generado por Φ en OS, notemos que $1_{\mathcal{O}\, S} \notin I$, ya que, de lo contrario, existiría $F \subseteq \Phi$ finito tal que $1_{\mathcal{O}\, S} = \vee F$ y así tendríamos $\bigcap\limits_{\varphi \in F} \varphi^{-1}(0) = \varnothing$ lo cual no sucede pues C tiene la p.i.f.

Usando el Teorema de Stone 1.21 podemos construir un ideal primo P tal que $\Phi \subseteq P$ y $1_{\mathcal{O}\, S} \notin P$.

Definamos entonces:

$$p(\varphi) = \begin{cases} 1 \text{ si } \varphi \notin P \\ 0 \text{ si } \varphi \in P \end{cases}$$

Tenemos que $p \in \Sigma S$ pues P es primo, $p(0_{\mathcal{O}\, S}) = 0$ y $p(1_{\mathcal{O}\, S}) = 1$, además, $\Phi \subseteq P = Z_p$ entonces:

$$\varnothing \neq l(p) \subseteq \cap C$$

Y así, S es compacto. $\square$

Proposición 5.7. *$p \in \Sigma S$ es morfimo de marcos si y solo si $p(l_p) = 0$.*

Demostración. Sea $p \in \Sigma S$ morfismo de marcos, usando la observación 5.5 tenemos:

$$p(l_p) = p(\bigvee Z_p) = \bigvee_{\varphi \in Z_p} p(\varphi) = 0$$

Por otro lado, sea $p \in \Sigma S$ tal que $p(l_p) = 0$ y $\Phi \subseteq \mathcal{O}\, S$ queremos ver que $p(\vee\Phi) = \bigvee\{p(\varphi)|\varphi \in \Phi\}$.

Basta probar que $p(\vee\Phi) \leq \bigvee\{p(\varphi)|\varphi \in \Phi\}$, pues la otra desigualdad se da para cualquier p morfismo de retículas.

Supongamos que $\bigvee\{p(\varphi)|\varphi \in \Phi\} = 0$, se sigue que $p(\varphi) = 0 \quad \forall\varphi \in \Phi$ y entonces $\Phi \subseteq Z_p$, luego $\vee\Phi \leq \vee Z_p$, así tenemos:

$$p(\vee\Phi) \leq p(\vee Z_p) = p(l_p) = 0$$

Entonces $p(\vee\Phi) = 0$ y así $p(\vee\Phi) \leq \bigvee\{p(\varphi)|\varphi \in \Phi\}$.
Por tanto p es morfismo de marcos. □

Definición 5.8. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ y $X \subseteq S$ un cerrado irreducible, definimos $c_X : \mathcal{O}\, S \to 2$ donde para cada $\varphi \in \mathcal{O}\, S$ se tiene $c_X(\varphi) = \vee\{\varphi(x)|x \in X\}$.*

Proposición 5.9. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ y $X \subseteq S$ un cerrado irreducible, entonces c_X es un morfismo de marcos y $l(c_X) = X$.*

Demostración. Sea $\Phi \subseteq \mathcal{O}\, S$, supongamos que $\vee\{c_X(\varphi)|\varphi \in \Phi\} = 0$ entonces $0 = c_X(\varphi) = \vee\{\varphi(x)|x \in X\} \quad \forall\varphi \in \Phi$, así tenemos que $\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in X, \forall\varphi \in \Phi$.
Por la definición de supremo en OS tendremos que $\vee\Phi(x) = 0 \quad \forall x \in X$ por lo tanto $0 = \vee\{\vee\Phi(x)|x \in X\} = c_X(\vee\Phi)$, entonces:

$$c_X(\vee\Phi) \leq \vee\{c_X(\varphi)|\varphi \in \Phi\}$$

Y así, c_X es morfismo de marcos.

Veamos ahora que $l(c_X) = X$.

Sea $x \in l(c_X)$ entonces por 5.4 tenemos que $p_x \leq c_X$.
Definamos:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin X \\ 0 \text{ si } x \in X \end{cases}$$

Como X es cerrado, entonces $\varphi \in OS$.
Además tenemos:

$$\varphi(x) = p_x(\varphi) \leq c_X(\varphi) = \vee\{\varphi(x)|x \in X\} = 0$$

Entonces $\varphi(x) = 0$ y por definición, tenemos entonces que $x \in X$.
Así, $l(c_X) \subseteq X$.

Por otro lado, sea $x \in X$ y $\varphi \in OS$ tenemos:

$$p_x(\varphi) = \varphi(x) \leq \vee\{\varphi(x)|x \in X\} = c_X(\varphi)$$

Es decir, $p_x \leq c_X$ y así, $x \in l(c_X)$.
Entonces $X \subseteq l(c_X)$

Entonces $l(c_X) = X$. □

Proposición 5.10. *Sea $p \in \Sigma S$ morfismo de marcos, entonces l_p es $\wedge$-irreducible.*

Demostración. Supongamos que $l_p = \varphi \wedge \eta$ con $\varphi, \eta \in OS$.
Notemos que si $l_p(x) = 1$ entonces $\varphi(x) = \eta(x) = 1$.

Supongamos que $l_p \neq \varphi$ y $l_p \neq \eta$.
Entonces $\exists x_1, x_2 \in S$ tal que $l_p(x_1) = l_p(x_2) = 0$ y $\varphi(x_1) = \eta(x_2) = 1$, entonces $p_{x_1} \leq p$ y $p_{x_2} \leq p$, así tenemos:

$$1 = \varphi(x_1) = p_{x_1}(\varphi) \leq p(\varphi) \quad \text{y} \quad 1 = \eta(x_2) = p_{x_2}(\eta) \leq p(\eta)$$

Se sigue que $p(\varphi) = p(\eta) = 1$.
Además:

$$1 = p(\varphi) \wedge p(\eta) = p(\varphi \wedge \eta) = p(l_p)$$

Sin embargo, por la proposición 5.7, al ser p un morfismo de marcos, tenemos que $p(l_p) = 0$ de esta contradicción se sigue que $l_p = \varphi$ o bien $l_p = \eta$.

Es decir, l_p es $\wedge$-irreducible. □

Proposición 5.11. *Sea $p \in \Sigma S$ morfismo de marcos, entonces $p = c_{l(p)}$.*

Demostración. Sea $\varphi \in OS$.
Supongamos que $p(\varphi) = 0$ entonces $\varphi \in Z_p$.
Sea $x \in l(p) = \bigcap_{\eta \in Z_p} \eta^{-1}(0)$ entonces $\varphi(x) = 0$
Así tenemos que $c_{l(p)}(\varphi) = \vee\{\varphi(x) | x \in l(p)\} = 0$.
Es decir:

$$c_{l(p)} \leq p$$

Por otro lado, si $c_{l(p)}(\varphi) = 0$ entonces $\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in l(p)$, y así tenemos $\varphi \leq l_p$, se sigue que $p(\varphi) \leq p(l_p) = 0$ esta última igualdad se da por ser p un morfismo de marcos.
Tenemos entonces $p(\varphi) = 0$ y así:

$$p \leq c_{l(p)}$$

Entonces:

$$p = c_{l(p)}$$

□

5.2. Espacios Bien Compactados

Algunas de las caracterizaciones, defenciones y propociones expuestas en este capítulo se pueden encontrar en [GL13] y [Sim06].

Definición 5.12. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ y $X \subseteq S$ cerrado irreducible, decimos que $x \in X$ es un punto genérico de X si X es la cerradura de $\{x\}$ en S.*

Definición 5.13. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$, decimos que S es sobrio si cada $X \subseteq S$ cerrado irreducible tiene un único punto genérico.*

El concepto de sobriedad es un concepto no muy común en el estudio de los espacios topológicos, a continuación se muestran algunas de sus interacciones con los axiomas de separación T_0, T_2.

Proposición 5.14. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ T_0, si $X \subseteq S$ tiene un punto genérico, este es único.*

Demostración. Sea $X \subseteq S$ cerrado irreducible y supongamos $x, y \in X$ son puntos genéricos de X, entonces $cl(\{x\}) = X = cl(\{y\})$.
Si $x \neq y$, como S es T_0 existe un abierto $U \in \tau_S$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$, sea $C = S \smallsetminus U$ entonces C es cerrado con $x \notin C$ y $y \in C$.

Como $cl(\{y\}) = \cap\{D \subseteq S \mid D \text{ es cerrado y } y \in C$ entonces $cl(\{y\}) \subseteq C$ y así $x \notin cl(\{y\}) = X$, lo cual es una contradicción.

Por tanto $x = y$. □

Corolario 5.15. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ T_0 tal que cada cerrado irreducible tiene un punto genereico entonces S es sobrio.*

Proposición 5.16. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ T_2, entonces S es sobrio.*

Demostración. Sabemos que en un espacio T_2 los puntos son cerrados y además, estos son los únicos cerrados irreducibles, así, ningún cerrado irreducible podría tener multiples puntos genéricos, y todos son su propio punto genérico. □

Proposición 5.17. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ sobrio, entonces S es T_0.*

Demostración. Supongamos que x y y son puntos distintos que comparten todas sus vecindades, entonces para cada cerrado $C \subseteq S$ se tiene que $x \in C$ si y solo si $y \in C$ por ende $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$ y por ser sobrio se sigue que $x = y$, así S es T_0. □

Las dos propiedades anteriores nos muestran que la sobriedad resulta ser un apropiedad intermedia entre T_0 y T_2, sin embargo es independiente de T_1.

A continuación veremos un ejemplo de espacio sobrio relacionado con lo estudiado en el capitulo anterior.

Ejemplo 5.18. *Sea $F \in \mathfrak{Frm}$ veremos que $pt(F)$ es un espacio sobrio.*

Definamos $k\colon F \to F$ de manera que para cada $a \in F$ se tiene:

$$x \leq k(a) \Leftrightarrow U_F(x) \subseteq U_F(a)$$

Sea X un cerrado irreducible en S, como U_F es suprayectivo, existe $a \in F$ tal que:

$$pt(F) \smallsetminus X = U_F(a)$$

Claramente $a \leq k(a)$ y así $U_F(a) \leq U_F(k(a))$, pues U_F es mofismo de marcos, además notemos que:

$$\begin{aligned} p \notin U_F(a) &\Rightarrow p \leq a \\ &\Rightarrow U_F(p) \subseteq U_F(a) \\ &\Rightarrow p \leq k(a) \\ &\Rightarrow p \notin U_F(k(a)) \end{aligned}$$

Así $X = U_F(a) = U_F(k(a))$.

Por otro lado:

$$x \leq k(k(a)) \Leftrightarrow U_F(x) \subseteq U_F(k(a)) = U_F(a) \Leftrightarrow x \leq k(a)$$

Es decir $k(k(a)) = k(a)$.

Veamos que $k(a)$ es un punto de F.
Si $k(a) = 1$ tendriamos $U_F(k(a)) = pt(F)$ y entonces $X = \varnothing$, por tanto $k(a) \neq 1$.

Notemos que para cada $x \in F$ tenemos:

$$X \cap U_F(x) \neq \varnothing \Leftrightarrow U_F(x) \nsubseteq pt(F) \smallsetminus X = U_F(k(a)) \Leftrightarrow x \nleq k(k(a)) = k(a)$$

Así, sean $x, y \in F$ tal que $x, y \nleq k(a)$ entonces $X \cap U_F(x) \neq \varnothing \neq X \cap U_F(y)$ por tanto $X \cap U_F(x \wedge y) \neq \varnothing$ y así $x \wedge y \nleq k(a)$.
Por lo cual $k(a) \in pt(F)$.

Veamos ahora que X es la cerradura de $k(a)$.

Sea $q \in pt(F)$ entonces:

$$q \in X \Leftrightarrow q \notin U_F(k(a)) \Leftrightarrow k(a) \leq q$$

Dado que todos los abiertos de $pt(F)$ son de la forma $U_F(x)$ para algún $x \in F$ entonces dados $p, q \in pt(F)$ se tiene que $p \leq q$ si y solo si cada cerrado C tal que $p \in C$ cumple que $q \in C$.

Así $X = \{k(\bar{a})\}$.

Además, sean $p, q \in pt(F)$ *tal que* $p \neq q$, *entonces* $p \leq q$, $q \leq p$ *o no estan relacionados, en acualquier caso se cumple que* $p \nleq q$ *en algún orden de* p *y* q.

Entonces $p \in U_F(q)$ *y* $p \notin U_F(p)$, *así* $pt(A)$ *es* T_0 *y por* 5.15 *es sobrio.*

Definición 5.19. *Sean* $\alpha, \beta \in \mathcal{O}\,S$ *decimos que* α *es relativamente compacto en* β, *denotado* $\alpha \ll \beta$, *si siempre que* $\beta \leq \vee\Phi$ *para algún* $\Phi \subseteq OS$ *existe* $F \subseteq \Phi$ *finito tal que* $\alpha \leq \vee F$.

Esta noción se puede interpretar topologicamente de la siguiente forma:

Definición 5.20. *Sean* U, V *abiertos de* S, *decimos que* U *es relativamente compacto en* V *si toda cubierta abierta de* V *tiene una subcubierta finita de* U.

Observación 5.21. *Sean* U, V *abiertos de* S, *si existe* $K \subseteq S$ *compacto con* $U \subseteq K \subseteq V$ *entonces* $U \ll V$.

Demostración. Toda cubierta abierta de V es cubierta abierta de K, por ser compacto existe una subcubierta finita que cubre a K y por tanto cubre a U. □

Proposición 5.22. *Sea* $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ *localmente compacto, entonces* $U \ll V$ *si y solo si existe* $K \subseteq S$ *compacto con* $U \subseteq K \subseteq V$.

Demostración. El regreso se ha probado en 5.21, ahora supongamos que S es localmente compacto y $U \ll V$, para cada $x \in V$ por ser S localmente compacto, existe K_x compacto con $x \in int(K_x)$ y $K_x \subseteq V$.

Claramente $V \subseteq \bigcup_{x \in V} int(K_x)$ y como $U \ll V$ existe $F \subseteq V$ finito tal que $U \subseteq \bigcup_{x \in F} int(K_x)$, sea $K = \bigcup_{x \in F} K_x$ entonces K es cmopacto pues es unión finita de compactos y:

$$U \subseteq K \subseteq V$$

□

Definición 5.23. *Sea* $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$, *decimos que* S *es esencialmente compacto si para cada* $x \in S$ *y* $\varphi \in OS$ *con* $\varphi(x) = 1$ *existe* $\eta \in \mathcal{O}\,S$ *con* $\eta(x) = 1$ *y* $\eta \ll \varphi$.

Proposición 5.24. *Sea* $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ *localmente compacto entonces* S *es esencialmente compacto.*

Demostración. Sea U abierto de S y $x \in U$, como S es localmente compacto, existe $K \subseteq S$ tal que $x \in int(K)$ y $K \subseteq U$, entonces por 5.21 $x \in int(K) \ll U$. □

Proposición 5.25. *Sean* $\eta, \varphi \in \mathcal{O}\,S$, *entonces* $\eta \ll \varphi$ *si y solo si para cada* $p \in \Sigma S$ *con* $p(\eta) = 1$ *se tiene* $l(p) \cap \varphi^{-1}(1) \neq \varnothing$.

Demostración. Supongamos que $\eta \ll \varphi$ y sea $p \in \Sigma S$ tal que $l(p) \cap \varphi^{-1}(1) = \varnothing$, entonces $\varphi \leq l_p = \vee Z_p$, así, $\exists F \subseteq Z_p$ con $\eta \leq \vee F$, por lo tanto:

$$p(\eta) \leq p(\vee F) = 0$$

Esta última igualdad se sigue pues $F \subseteq Z_p$ es finito y p es un morfismo de retículas.

Para la otra implicación supongamos que $\forall p \in \Sigma S$ con $p(\eta) = 1$ se tiene $l(p) \cap \varphi^{-1}(1) \neq \varnothing$.

Sea $\Phi \subseteq \mathcal{O}\,S$ tal que $\varphi \leq \vee\Phi$ y sea I el ideal generado por Φ en $\mathcal{O}\,S$.
Basta ver ahora que $\eta \in I$.

Supongamos que $\eta \notin I$ usando el Teorema de Stone 1.21, tenemos un ideal primo P tal que $I \subseteq P$ y $\eta \notin P$, definamos entonces:

$$p(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin P \\ 0 \text{ si } x \in P \end{cases}$$

Como P es primo $p \in \Sigma S$, además, $p(\eta) = 1$ y $p(\beta)$ para cada $\beta \in P$.
Por hipótesis, como $p(\eta) = 1$ entonces:

$$\varnothing \neq l(p) \cap \varphi^{-1}(1) \subseteq \cup\{l(p) \cap \alpha^{-1}(1) | \alpha \in \Phi\}$$

Entonces existe $\gamma \in \Phi$ tal que $l(p) \cap \gamma^{-1}(1) \neq \varnothing$.

Como $\gamma \in \Phi \subseteq I \subseteq P$ entonces $p(\gamma) = 0$ y así $\gamma \in Z_p$ por tanto $l(p) \subseteq \gamma^{-1}(0)$, es decir $l(p) \cap \gamma^{-1}(1) = \varnothing$ lo cual es una contradicción.

Así, $\eta \in I$ y entonces existe $F \subseteq \Phi$ finito tal que $\eta = \vee F$. □

Definición 5.26. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$, decimos que S es estable si para cualesquiera $\varphi_1, \varphi_2, \eta_1, \eta_2 \in OS$ con $\eta_1 \ll \varphi_1$ y $\eta_2 \ll \varphi_2$ se tiene que:*

$$\eta_1 \wedge \eta_2 \ll \varphi_1 \wedge \varphi_2$$

Definición 5.27. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$, se dice que S es un espacio bien compactado si:*

1. *S es compacto.*
2. *S es esencialmente compacto.*
3. *S es estable.*
4. *S es sobrio.*

Definición 5.28. *Sean $S, T \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ espacios bien compactados, una función $\varphi \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, T)$ es un morfismo de espacios bien compactados si para cualesquiera $\gamma, \eta \in OT$ con $\eta \ll \gamma$ se tiene $\eta \circ \varphi \ll \gamma \circ \varphi$.*

Definimos $\mathcal{W}$lk como la subcateoría de $\mathcal{T}$op cuyos objetos son espacios bien compactados y sus flechas morfismos de espacios bien compactados.

Para concluir esta sección demos un primer ejemplo de espacios bien compactados.

Proposición 5.29. *Sea $S \in \mathcal{T}$op compacto y T_2 entonces $S \in \mathcal{W}$lk.*

Demostración. Ya tenemos que S es compacto y por 5.16 S es sobrio pues es T_2, veamos que en estos espacios se cumple que $U \ll V$ si y solo si $cl(U) \subseteq V$:

Como S es copacto y T_2 es localmente compacto y así si $U \ll$ necesariamente $cl(U) \subseteq V$ pues $cl(U)$ es el cerrado (y por tanto compacto) más pequeño que contiene a U.
Por otro lado, si $U \subseteq cl(U) \subseteq V$ como S es compacto y $cl(U) \subseteq S$ cerrado entonces $cl(U)$ es compacto, así por 5.21 se tiene $U \ll V$.

Luego, el espacio es estable pues si $cl(U_1) \subseteq V_1$ y $cl(U_2) \subseteq V_2$ entonces:

$$cl(U_1 \cap U_2) \subseteq cl(U_1) \cap cl(U_2) \subseteq V_1 \cap V_2$$

Además por ser localmente compacto de 5.24 se sigue que es es esencialmente compacto y así es un espacio bien compactado. □

Así todos aquellos espacios topológicos compactpsy T_2 (de los cuales conocemos bastantes) son espacios bien compactados.

5.3. Espacios Espectrales

Para dar otro ejemplo de espacios bien compactados introduciremos a los espacios espectrales, dichos espacios resultan ser una subcategoría plena de $\mathcal{W}$lk, para probar esto se tomarán resultados del artículo [Hoc69] publicado en 1969 por el matemático estado unidense Melvin Hochster quien realiza un profundo estudio de estos espacios.

Definición 5.30. *Sea $S \in \mathcal{T}$op decimos que S es un espacio espectral si $S \cong Spec(A)$ para algún anillo conmutativo con unidad.*

Definición 5.31. *Sea $\varphi \in \mathcal{T}\text{op}(Spec(A), Spec(B))$ con A, B anillos conmutativos con unidad, decimos que φ es un morfismo espectral si $\varphi = Spec(f)$ para algún $f\colon B \to A$ morfismo de anillos.*

Denotamos Sp a la subcategoría de $\mathcal{T}$op cuyos objetos son espacios espectrales y sus flechas morfismos de espacios espectrales.
El siguiente teorema de caracterización se encuentra en el artículo antes citado:

Teorema 5.32. *$S \in Sp$ si y solo si:*

1. *S es compacto y T_0.*
2. *$K(S) = \{U \subseteq S \mid U$ es abierto y compacto$\}$ es una base de S.*

3. *$K(S)$ es cerrado bajo intersecciones finitas.*

4. *S es sobrio.*

Teorema 5.33. *Sean $S, S' \in Sp$, $\varphi \in Sp(S, S')$ si y solo si $\varphi^{-1}(K) \subseteq S$ es compacto para cada $K \subseteq S'$ compacto.*

Veamos que todo espacio espectral es un espacio bien compactado.

Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ un espacio espectral, por 5.32 tenemos que S es compacto y sobrio, además al ser $K(S)$ una base para S entonces S es localmente compacto y así, por 5.24 es esencialmente compacto.

Basta entonces verificar que S es estable.

Sean $U_1, U_2, V_1, V_2 \in \Omega S$ tal que $U_1 \ll V_1$ y $U_2 \ll V_2$, por 5.22 existen $K_1, K_2 \subseteq S$ compactos tal que:

$$U_1 \subseteq K_1 \subseteq V_1 \quad \text{y} \quad U_2 \subseteq K_2 \subseteq V_12$$

Si $K = K_1 \cap K_2$ entonces K es compacto y:

$$U_1 \cap U_2 \subseteq K \subseteq V_1 \cap V_2$$

Así $U_1 \cap U_2 \ll V_1 \cap V_2$ y por tanto S es estable.

Sean $S, S' \in Sp$ y $\varphi \in Sp(S, S')$.
Si $U \ll V$ para $U, V \in \Omega S'$ entonces existe $K \subseteq S'$ tal que $U \subseteq K \subseteq V$ y entonces:

$$\varphi^{-1}(U) \subseteq \varphi^{-1}(K) \subseteq (V)$$

Y al ser φ espectral, entonces $\varphi^{-1}(K)$ es compacto.

Así $\varphi \in \mathcal{W}\mathrm{lk}$.

Hemos probado que Sp es una subcategoría de $\mathcal{W}\mathrm{lk}$.

5.4. Orden de especialización

A cotinuación definiremos un orden sobre los puntos de un espacio topologico, veremos en que caso lo definido es realmente interesante, dicho orden es llamado “Orden de especialización”.

Definición 5.34. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ y $x, y \in S$, decimos que $x \sqsubseteq y$ si $x \in cl(\{y\})$*

Observación 5.35. *Son equivalentes para $x, y \in S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ los siguientes:*

1. *$x \in cl(\{y\})$.*

2. $cl(\{x\}) \subseteq cl(\{y\})$.
3. *Para todo* $C \subseteq S$ *cerrado, si* $y \in C$ *entonces* $x \in C$.

Podemos notar que esta relación es reflexiva pues para todo $x \in S$ siempre ocurre que $x \in cl(\{x\})$ es decir, $x \sqsubseteq x$ y transitiva pues si $x \sqsubseteq y \sqsubseteq z$ entonces $x \in cl(\{y\}) \subseteq cl(\{z\})$ y así $x \in cl(\{z\})$ es decir $x \sqsubseteq z$.

Ahora, si S es T_0 y se cumplen $x \sqsubseteq y$ y $y \sqsubseteq x$ entonces $cl(\{x\}) = cl(\{y\})$ y así por 5.14 se tiene $x = y$.
Podemos entonces enunciar la siguiente proposición:

Proposición 5.36. *Sea* $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$*, si* S *es* T_0 *entonces* $\sqsubseteq$ *es un orden parcial.*

Además este orden tiene una buena relación con las funciones continuas como nos lo dice la sigiente proposición:

Proposición 5.37. *Sea* $\varphi \in \mathcal{T}\mathrm{op}(S, S')$ *si* $x \sqsubseteq y$ *entonces* $\varphi(x) \sqsubseteq \varphi(y)$.

Demostración. Sea $C \subseteq S'$ tal que $\varphi(y) \in C$ entonces $y \in \varphi^{-1}(C)$ como φ es continua, entonces $\varphi^{-1}(C) \subseteq S$ es cerrado y como $x \sqsubseteq y$ entonces $x \in \varphi^{-1}(C)$ por tanto $\varphi(x) \in C$ y así $\varphi(x) \sqsubseteq \varphi(y)$. □

A continuación veremos que este orden esta intimamente relacionado con el orden previamente definido en σL para $L \in \mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}$.

Proposición 5.38. *Sea* $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ *y* $p, q \in \Sigma S$ *con* $p \leq q$ *entonces* $p \sqsubseteq q$.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{O}\,\Sigma S$ tal que $\varphi(q) = 0$, pongamos $\varphi = \vee_{\alpha \in \Phi} \chi_\alpha$ para algún $\Phi \subseteq \mathcal{O}\, S$, entonces $0 = \chi_\alpha(q) = q(\alpha) \geq p(\alpha)$ para todo $\alpha \in \Phi$, entonces $0 = p(\alpha) = \chi_\alpha(p)$ para todo $\alpha \in \Phi$ y así $\varphi(p) = 0$.
Por tanto $p \sqsubseteq p$. □

5.5. Caracterización de las Σ-Álgebras

En esta sección verificaremos que la mónada $(\Sigma, \varepsilon, \sigma s_{\mathcal{O}})$ definida al final del capítulo 3 cumple las condiciones del teorema 2.20, para poder encontrar una subcategoría de $\mathcal{T}\mathrm{op}$ equivalente a las álgebras de la mónada.

Proposición 5.39. $\mathcal{W}\mathrm{lk}$ *es* Σ*-suficiente.*

Demostración. Veremos que $\sigma(L)$ es un espacio espectral para cada $L \in \mathcal{D}\mathcal{L}\mathrm{at}$, así $\Sigma S = \sigma\,\mathcal{O}\, S$ será espectral y por lo visto en 5.3 será un espacio bien compactado.

Por 4.31 cada χ_a es un abierto compacto, y por construcción $\{\chi_a \mid a \in L\}$ forman una base de σS, y cumplen que $\chi_a \wedge \chi_b = \chi_{a \wedge b}$ pues s_L definido en 3.3 es un morfismo de retículas.

Por 3.2 y 4.17 tenemos $\sigma(L) \cong Spec(L) = pt(\mathcal{I}L)$, entonces por 4.11 y 5.18 $\sigma(L)$ es sobrio y T_0.
Basta entonces verificar que $\sigma(L)$ es compacto.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ cubierta abierta de $\sigma(L) \cong Spec(L)$, usando 4.12 pongamos $U_i = V_L(J_i)$ con $J_i \in \mathcal{I}L$.

Al ser cubierta abierta tenemos:

$$Spec(L) = \bigcup_{i\in I} V_L(J_i)$$

Como V_L es morfismo de marcos entonces $\bigcup\limits_{i\in I} V_L(J_i) = V_L(\bigvee\limits_{i\in I} J_i)$ y al ser un isomorfismo, entonces:

$$L = \bigvee_{i\in I} J_i$$

Así, para $1 \in L$ el elemento máximo, tenemos $1 = \vee F$ para algún $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} J_i$, como F es finito existe $K \subseteq I$ finito tal que $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in K} J_i$ entonces $1 \in \bigvee\limits_{i\in K} J_i$, por tanto:

$$L = \bigvee_{i\in K} J_i$$

Y así $\{U_i\}_{i\in K}$ es una subcubierta finita.
Es decir, $Spec(L)$ es compacto y como $\sigma(L) \cong Spec(L)$ entonces $\sigma(L)$ es compacto.

Así, para cada $L \in \mathcal{DL}\mathrm{at}$ tenemos que $\sigma(L)$ es un espacio espectral. $\square$

Proposición 5.40. *Sean $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$, $T \in \mathcal{W}\mathrm{lk}$ y $\varphi \in \mathcal{W}\mathrm{lk}(\Sigma S, T)$ para cada $p \in \Sigma S$, $\eta \in \mathcal{O}\,T$ tenemos $\eta(\varphi(p)) = 1$ si y solo si $l(pf) \cap \eta^{-1}(1) \neq \varnothing$ donde $f = \mathcal{O}\,\varepsilon_S \circ \mathcal{O}\,\varphi = \mathcal{O}(\varphi\varepsilon_S)$*

Demostración. Sea $p \in \Sigma S$, $\eta \in OT$.
Supongamos que $\eta(\varphi(p)) = 1$, como T es esencialmente compacto, existe $\gamma \in OT$ tal que $\gamma \ll \eta$ y $\gamma(\varphi(p)) = 1$, además, como φ es morfismo de espacios bien compactados, tenemos que $\gamma \circ \varphi \ll \eta \circ \varphi$.

Para $\gamma \circ \varphi \in \mathcal{O}\,\Sigma S = \mathcal{O}\,\sigma\,\mathcal{O}\,S$ pongamos:

$$\gamma \circ \varphi = \bigvee_{\alpha\in A} s_{OS}(\alpha)$$

Con $A \subseteq \mathcal{O}\,S$.

Como $\gamma \circ \varphi(p) = 1$ debe existir $\alpha \in A$ tal que $1 = s_{\mathcal{O}\,S}(\alpha) = \chi_\alpha(p) = p(\alpha)$.
Y claramente $s_{\mathcal{O}\,S}(\alpha) \leq \gamma \circ \varphi$.

Notemos además que $\mathcal{O}\,\varepsilon_S \circ s_{\mathcal{O}\,S}(\alpha) = \alpha$, pues dado $x \in S$ entonces:

$$(\mathcal{O}\,\varepsilon_S \circ s_{OS}(\alpha))(x) = (\mathcal{O}\,\varepsilon_S \circ \chi_\alpha)(x) = \chi_\alpha \circ \varepsilon_S(x) = \chi_\alpha(p_x) = p_x(\alpha) = \alpha(x)$$

Como $\mathcal{O}\,\varepsilon_S$ es un morfismo de retículas, tendremos que:

$$\alpha = \mathcal{O}\,\varepsilon_S \circ s_{OS}(\alpha) \leq \varepsilon \circ \gamma \circ \varphi = \mathcal{O}\,\varepsilon_S \circ \mathcal{O}\,\varphi(\gamma) = f(\gamma)$$

Entonces:

$$1 = p(\alpha) \leq pf(\gamma)$$

y así, $pf(\gamma) = 1$ y por 5.25, tendremos que $l(pf) \cap \eta^{-1}(1) \neq \varnothing$.

Iversamente, supongamos $l(pf) \cap \eta^{-1} \neq \varnothing$.
Por 5.25 $\exists \gamma \in OT$ tal que $pf(\gamma) = 1$ y $\gamma \ll \eta$, entonces $\gamma \circ \varphi \ll \eta \circ \varphi$ pues φ es un morfismo de espacios bien compactados.

Pongamos

$$\eta \circ \varphi = \bigvee_{\alpha \in A} s_{\mathcal{O}\,S}(\alpha)$$

para algún $A \subseteq \mathcal{O}\,S$.

Como $\gamma \circ \varphi \ll \eta \circ \varphi$, $\exists F \subseteq A$ finito tal que:

$$\gamma \circ \varphi \leq \bigvee_{\alpha \in F} s_{\mathcal{O}\,S}(\alpha) = s_{\mathcal{O}\,S}(\vee F)$$

Así tendremos que:

$$f(\gamma) = \mathcal{O}\,\varepsilon_S \circ \mathcal{O}\,\varphi(\gamma) = \mathcal{O}\,\varepsilon_S \circ \gamma \circ \varphi \leq \mathcal{O}\,\varepsilon_S \circ s_{\mathcal{O}\,S}(\vee F) = \vee F$$

Como p es morfismo de retículas, se sigue que $1 = pf(\gamma) \leq p(\vee F)$, entonces $1 = p(\vee F) = \chi_{\vee F}(p) = s_{OS}(\vee F)(p)$.
Además, $s_{OS}(VF) \leq \eta \circ \varphi$ entonces $\eta \circ \varphi(p) = 1$. $\square$

Proposición 5.41. *ε es $\mathcal{W}$lk-epimorfismo.*

Sea $S \in \mathcal{T}$op, $T \in \mathcal{W}$lk y $\psi, \varphi \in \mathcal{W}\text{lk}(\Sigma S, T)$ tal que $\varphi\varepsilon_S = \psi\varepsilon_S$.

Supongamos que $\psi \neq \varphi$ entonces existe $p \in \Sigma$ tal que $\psi(p) \neq \varphi(p)$.
Como $T \in \mathcal{W}$lk es en particular T_0, $\exists \eta \in OT$ tal que $\eta(\psi(p)) = 1$ y $\eta(\psi(p)) = 0$.

Sea $f = O(\varphi\varepsilon_S) = O(\psi\varepsilon_S)$, usando la Proposición 5.40, como $\eta(\psi(p)) = 1$ tenemos que $l(pf) \cap \eta^{-1}(1) \neq \varnothing$ y así, $\eta(\psi(p)) = 1$ lo cual es una contradicción.

Por tanto, $\varphi = \psi$.

Proposición 5.42. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ un espacio compacto, esencialmente compacto y estable, entonces $\forall p \in \Sigma S$ $l(p)$ es un cerrado irreducible.*

Demostración. Sea $p \in \Sigma S$, como S es compacto, por 5.6 tenemos que $l(p) \neq \varnothing$, además por definición, $l(p)$ es cerrado, basta ver que es un cerrado irreducible.

Sean C_1, C_2 cerrados de S tal que $l(p) \nsubseteq C_1, C_2$, sean $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ los cerrados relativos en $l(p)$.

Para $i \in \{1, 2\}$ definamos:

$$\eta_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin C_i \\ 0 \text{ si } x \in C_i \end{cases}$$

Así, $\eta_i \in OS$.

Como $l(p) \nsubseteq C_1, C_2$ entonces $\exists x_1, x_2 \in l(p)$ tal que $\eta_1(x_1) = \eta_2(x_2) = 1$, además, al ser S esencialmente compacto $\exists \gamma_1, \gamma_2 \in OS$ tal que $\gamma_i \ll \eta_i$ y $\gamma_1(x_1) = \gamma_2(x_2) = 1$.

Por otro lado, como $x_i \in l(p)$ entonces $p_{x_i} \leq p$ y entonces:

$$1 = \gamma_i(x_i) = p_{x_i}(\gamma_i) \leq p(\gamma_i)$$

Y así, $p(\gamma_i) = 1$.

Además, como p es morfismo de retículas, tenemos:

$$p(\gamma_1 \wedge \gamma_2) = p(\gamma_1) \wedge p(\gamma_2) = 1 \wedge 1 = 1$$

Al ser S un espacio estable, también tenemos que $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \ll \eta_1 \wedge \eta_2$ y así por 5.25 $l(p) \cap (\gamma_1 \wedge \gamma_2)^{-1}(1) \neq \varnothing$.

Es decir, $l(p) \nsubseteq C_1 \cup C_2$.

□

Sea $S \in \mathcal{W}\mathrm{lk}$, para cada $p \in \Sigma S$, por la proposición 5.42 tenemos que $l(p)$ es un cerrado irreducible, y al ser S sobrio, existe un único punto x_p tal que su cerradura es $l(p)$, definamos entonces la siguiente flecha:

Definición 5.43. *Sea $S \in \mathcal{W}\mathrm{lk}$ definimos el morfismo estructural de S como:*

$$\theta_S : \Sigma S \to S$$

Donde para cada $p \in \Sigma S$ tenemos $\theta_S(p) = x_p$.

Proposición 5.44. *Sea $S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$, $p \in \Sigma S$, $x_p = \theta_S(p)$ y $\eta \in OS$ tal que $\eta(x_p) = 1$ entonces $p(\eta) = 1$.*

Demostración. Supongamos que $p(\eta) = 0$, entonces $\eta \in Z_p$ y como $x_p \in l(p) = \bigcap_{\varphi \in Z_p} \varphi^{-1}(0)$ entonces $\eta(x_p) = 0$ lo cual es una contradicción.

Por tanto $p(\eta) = 1$. □

Proposición 5.45. *Cada $S \in \mathcal{W}\mathrm{lk}$ es Σ-retractil con θ_S.*

Demostración. Sea $U \subseteq S$ abierto, y $\gamma = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in U \\ 0 \text{ si } x \notin U \end{cases}$

Veamos que:

$$\theta_S^{-1}(U) = \bigcup_{\eta \ll \gamma} s_{OS}(\eta)^{-1}$$

Sea $p \in \theta_S^{-1}(U)$ entonces $x_p = \theta_S(p) \in U$, es decir $\gamma(x_p) = 1$.

Como S es esencialmente compacto, existe $\eta \ll \gamma$ con $\eta(x_p) = 1$, por la proposición 5.45 tenemos que $1 = p(\eta) = \chi_\eta(p) = s_{\mathcal{O}\,S}(\eta)(p)$ y así:

$$p \in \bigcup_{\eta \ll \gamma} s_{\mathcal{O}\,S}(\eta)^{-1}$$

Por otro lado, sea $p \in \bigcup_{\eta \ll \gamma} s_{\mathcal{O}\,S}(\eta)^{-1}$ entonces existe $\eta \ll \gamma$ tal que:

$$p(\eta) = s_{\mathcal{O}\,S}(\eta)(p) = 1$$

Por 5.25 $l(p) \cap \gamma^{-1}(1) \neq \varnothing$, es decir $l(p) \cap U \neq \varnothing$ y como $l(p)$ es cerrado irreducible $l(p) \subseteq U$ y así $x_p \in U$, es decir $p \in \theta_S^{-1}(U)$.

Así $\theta_S^{-1}(U)$ es abierto en ΣS. Y $\theta_S \in \mathcal{T}\mathrm{op}$.

Sean $\varphi, \eta \in OS$ tal que $\eta \ll \varphi$.

Veamos que:

$$\eta\theta_S \leq s_{\mathcal{O}\,S}(\eta) \leq \varphi\theta_S$$

Sea $p \in \Sigma S$ tal que $\eta\theta_S(p) = 1$ entonces $\eta(x_p) = 1$ y por 5.45 $1 = p(\eta) = s_{\mathcal{O}\,S}(\eta)(p)$, lo cual da la primer desigualdad.

Ahora, si $p(\eta) = s_{\mathcal{O}\,S}(\eta)(p) = 1$ como $\eta \ll \varphi$ por 5.25 y al ser $l(p)$ irreducible $l(p) \subseteq \varphi^{-1}(1)$ entonces $1 = \varphi(x_p) = \varphi\theta_S(p)$, lo cual da la segunda desigualdad.

Sea $\Phi \subseteq \mathcal{O}\,S$ tal que $\varphi\theta_S \leq \vee\Phi$ entonces $s_{\mathcal{O}\,S}(\eta) \leq \vee\Phi$ y así, por 4.31 existe $F \subseteq \Phi$ finito con $s_{\mathcal{O}\,S}(\eta) \leq \vee F$, por tanto $\eta\theta_S \leq \vee F$.

Tenemos entonces que $\eta\theta_S \ll \varphi\theta_S$, es decir, $\theta_S \in \mathcal{W}\mathrm{lk}$.

Sea $x \in S$, notemos que $Z_{p_x} = \{\varphi \in OS | \varphi(x) = p_x(\varphi) = 0\}$ es decir, $l(p_x)$ es el menor cerrado que contiene a x, se sigue entonces:

$$\theta_S \varepsilon_S(x) = \theta_S(p_x) = x$$

$\square$

Lema 5.46. *Sea* $(S, \theta) \in \mathcal{T}\mathrm{op}^\Sigma$ *entonces* $S \in \mathcal{W}\mathrm{lk}$ *y* $\theta = \theta_S$.

Demostración. Como $(S, \theta) \in \mathcal{T}\mathrm{op}^\Sigma$ entonces $\theta\varepsilon_S = id_S$, así ε_S es inyectiva.

Veamos que S es T_0.

Sean $x, y \in S$ tal que x y y tienen las mismas vecindades, es decir, para todo $\varphi \in OS$ se tiene $\varphi(x) = 1$ si y solo si $\varphi(y) = 1$ entonces $p_x(\varphi) = 1$ si y solo si $p_y(\varphi) = 1$ es decir $\varepsilon_S(x) = p_x = p_y = \varepsilon_S$ y como ε_S es inyectiva, se tiene $x = y$.

Así, S es T_0.

Ahora, sea $\varphi \in \mathcal{O}\, S$, definamos $A_\varphi = \{p_x \in \Sigma S \mid 0 = p_x(\varphi) = \varphi(x)\}$ y $D_\varphi = \{\gamma \in \mathcal{O}\, \Sigma S \mid \gamma(p_x) = 0 \quad \forall p_x \in A_\varphi\}$.

Veamos que para toda $\varphi \in \mathcal{O}\, S$ se tiene $\vee D_\varphi \leq \chi_\varphi$.

Sea $p \in \Sigma S$ con $0 = \chi_\varphi(p) = p(\varphi)$, si $\gamma \in \mathcal{O}\, \Sigma S$ es tal que $\gamma(p) = 1$, como $\{\chi_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{O}\, S\}$ es una base para la topología de ΣS, existe $\Phi \subseteq \mathcal{O}\, S$ tal que $\gamma = \vee\{\chi_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ y entonces existe $\eta \in \Phi$ tal que $\eta(p) = 1$.

Como $p(\varphi) = 0$ y $p(\eta) = 1$ entonces $\eta \nleq \varphi$ y así existe $x \in S$ tal que $\eta(x) = 1$ y $\varphi(x) = 0$, por tanto $p_x \in A_\varphi$ y además:

$$\gamma(p_x) = \vee\{\chi_\alpha(p_x) \mid \alpha \in \Phi\} \geq \chi_\eta(p_x) = p_x(\eta) = \eta(x) = 1$$

Así $\gamma \notin D_\varphi$.

Tenemos entonces que $\gamma(p) = 0$ para toda $\gamma \in D_\varphi$ y entonces:

$$\vee D_\varphi \leq \chi_\varphi$$

Por otro lado, sea $p_x \in A_\varphi$ entonces:

$$\varphi\theta(p_x) = \varphi\theta\varepsilon_S(x) = \varphi(x) = 0$$

Entonces $\varphi\theta \in D_\varphi$ y por tanto:

$$\varphi\theta \leq \vee D_\varphi \leq \chi_\varphi$$

Sea $p \in \Sigma S$ y $\varphi \in Z_p$ arbitrarios, entonces:

$$\varphi\theta(p) \leq \chi_\varphi(p) = p(\varphi) = 0$$

Entonces $\varphi(\theta(p)) = 0$ y así $\theta(p) \in l(p)$.

Como $\theta(p) \in l(p)$ entonces $cl(\{\theta(p)\}) \subseteq l(p)$ además, sea $x \in l(p)$ por 5.4 tenemos $p_x \leq p$ y así por 5.38 $p_x \sqsubseteq p$, como θ es continua entonces por 5.37 $x = \theta(p_x) \sqsubseteq \theta(p)$ es decir $x \in cl(\{\theta(p)\})$.

Por tanto $l(p) = cl(\{\theta(p)\})$ y así
Sea $x \in S$ y $\varphi \in OS$ con $\varphi(x) = 1$.

Como $\theta \in \mathcal{T}\mathrm{op}$ entonces $\varphi\theta \in \mathcal{O}\,\Sigma S$ y $\varphi\theta(p_x) = \varphi(x) = 1$, como $\{\chi_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{O}\,S\}$ es una base para la topología de ΣS existe $\eta \in OS$ tal que $\chi_\eta \leq \varphi\theta$ y $1 = \chi_\eta(p_x) = p_x(\eta) = \eta(x)$.

Sea $p \in \Sigma S$, si $1 = p(\eta) = \chi_\eta(p) \leq \varphi\theta(p)$ entonces $\varphi\theta(p) = 1$ y así $\theta(p) \in \varphi^{-1}(1) \cap l(p) \neq \varnothing$.

Así, por 5.25 se tiene que $\eta \leq \varphi$ y entonces S es esencialmente compacto.

Ahora sean $\eta_1, \eta_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}\,S$ tal que $\eta_i \ll \varphi_i$ con $i \in \{1,2\}$.

Para cada $p \in \Sigma S$ tenemos:

$$\begin{aligned}
1 = p(\eta_1 \wedge \eta_2) = p(\eta_1) \wedge p(\eta_2) &\Rightarrow p(\eta_1) = 1 = p(\eta_2) \\
&\Rightarrow \varphi_1^{-1}(1) \cap l(p) \neq \varnothing \neq \varphi_2^{-1}(1) \cap l(p) \\
&\Rightarrow \varphi_1^{-1}(1) \cap \varphi_2^{-1}(1) \cap l(p) \neq \varnothing \\
&\Rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2)^{-1}(1) \cap l(p) \neq \varnothing
\end{aligned}$$

Así por 5.25 se tiene $\eta_1 \wedge \eta_2 \ll \varphi_1 \wedge \eta_2$ es decir, S es estable.

Hemos visto que para $p \in \Sigma S$, $\theta(p)$ es un punto generico de $l(p)$ y al ser S T_0 este es único.

Así, para cada $X \subseteq S$ cerrado irreducible, $\theta(c_X)$ con c_X definido en 5.9 es el punto generico de X y por tanto S es sobrio.
Sea $X \subseteq S$ cerrado irreducible y $p = c_X$ definido como en 5.8 entonces por 5.9 $l(p) = X$ y así tiene un único punto genérico, es decir, S es sobrio.

Por tanto $S \in \mathcal{W}\mathrm{lk}$. □

Con los lemas anteriores y el teorema 2.20 tenemos la existecia de un isomorfismo:

$$\varXi : \mathcal{W}\mathrm{lk} \to \mathcal{T}\mathrm{op}^{\Sigma}$$

Donde $\Xi(S) = (S, \theta_S)$ y $\Xi(\varphi) = \varphi$.

Es decir, la categoría de Σ-Álgebras es precisamente la categoría $\mathcal{W}$lk.

Bibliografía

[GL13] Jean Goubault-Larrecq, *Non-hausdorff topology and domain theory: Selected topics in point-set topology*, vol. 22, Cambridge University Press, 2013.

[Grä02] George Grätzer, *General lattice theory*, Springer Science & Business Media, 2002.

[Hoc69] Melvin Hochster, *Prime ideal structure in commutative rings*, Transactions of the American Mathematical Society **142** (1969), 43–60.

[Joh86] Peter T Johnstone, *Stone spaces*, vol. 3, Cambridge University Press, 1986.

[ML13] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, vol. 5, Springer Science & Business Media, 2013.

[Sim82] Harold Simmons, *A couple of triples*, Topology and its Applications **13** (1982), no. 2, 201–223.

[Sim06] ______, *The point space of a frame*, 2006.