



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

NÚMERO DE INTERSECCIÓN EN SUPERFICIES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
IVAN SANCHEZ SILVA

DIRECTOR DE LA TESINA O TESIS
DR. JAWAD SNOUSSI

ENTIDAD DE ADSCRIPCIÓN
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA UNAM

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO, ABRIL 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Le agradezco a mi familia por estar conmigo en este largo camino. En particular a mis padres por ser mi ejemplo a seguir, y con sus consejos y enseñanzas he podido alcanzar mis metas. A mis amigos que con nuestras charlas nos impulsamos siempre seguir adelante. Además, a las personas que han compartido conmigo buenos y malos momentos.

A mi director de tesis, el doctor Jawad Snoussi, por su paciencia y dedicación para desarrollar este trabajo. Quien siempre lograba hacer un espacio para atenderme. Mostrandome así el camino hacia la investigación. Además de integrarme proyecto PAPIIT IN-107614 de nombre “Estudio Topológico y Métrico de Espacios y Mapeos Analíticos”, el cual me permitió continuar con este trabajo. A mis sinodales, por tomarse la molestia de revisar mi trabajo y darme todas las observaciones necesarias para hacer que este sea mejor.

Agradezco también a la UNAM por abrirme las puertas para realizar mis estudios de Maestría, en particular a mis compañeros y maestros del IMATE-Cuernavaca que estuvieron conmigo en este camino. Gracias a sus enseñanzas logré superarme académicamente; su compañía y buenas platicas hicieron más agradables estos años. Al doctor Mark Spivakovsky, por su tiempo e ideas; las cuales me ayudaron a superar algunos retos que se presentaron en este trabajo.

Y mis sinceros agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo económico proporcionado para poder realizar mis estudios de maestría. Finalmente al doctor José Antonio Seade Kuri, por integrarme al proyecto de CONACYT 164447 con el nombre de “Dinámica y geometría compleja”.

Índice

Introducción	v
1 Multiplicidad de Intersección.	1
1.1 Preliminares	1
1.2 Multiciplidad de intersección	4
2 Intersección en Superficies.	19
2.1 Intersección en el plano.	19
2.2 Número de intersección de curvas en una Superficie	34
Bibliografía	50

Introducción.

A lo largo del tiempo los números han permitido el desarrollo y evolución de las matemáticas. Áreas como la topología, la geometría, el análisis o el álgebra, los emplean para describir, clasificar o medir los objetos de estudio de cada una de estas. Un ejemplo de esto es el número de intersección o multiplicidad de intersección.

Para tener una idea de qué mide o calcula el número de intersección, pensemos en el plano complejo y dos curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 que se intersectan en un punto, sin pérdida de generalidad tomemos dicho punto en el origen. Ahora consideremos una de las curvas irreducible, por ejemplo \mathcal{C}_1 . Permittiendonos definir una aplicación, φ_1 , entre \mathbb{C} y la curva $\mathcal{C}_1 \subset \mathbb{C}^2$, de esta manera la curva \mathcal{C}_2 , es determinada por un polinomio g . La composición $g \circ \varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica, donde el orden de $g \circ \varphi_1$ es exactamente el número de intersección.

En el capítulo 1 nos centraremos en las curvas planas. Se expone una definición para el número de intersección y sus propiedades, las cuales se encuentran en [4]. Estas propiedades son una herramienta que permite calcular con mayor facilidad dicho número, creando un algoritmo que evita el uso del cocientes de anillos, donde la parte inicial y el orden de una función analítica juegan un papel muy importante. La mayoría de los conceptos presentes en este capítulo son localizados en cualquier libro de geometría algebraica, en

particular [1], [5], [6], [7] y [8].

En el capítulo 2, se presenta otra definición del número de intersección, la cual relaciona la parametrización de una curva plana y el orden de una función analítica, esta fue empleada para explicar lo que mide el número de intersección. Con la ayuda del Doctor Mark Spivakovsky, se da una prueba que relaciona esta definición y la mostrada en el Capítulo 1, estableciendo que ambas definiciones son equivalentes. En esta prueba, que es totalmente constructiva, se usaron herramientas de algebra lineal.

En la búsqueda de generalizar este concepto a espacios de dimensiones más altas, encontramos problemas como: identificar cuál de las definiciones, presentadas en cada capítulo, es un buen candidato para ser el número de intersección, debido a que no tenemos la equivalencia entre ambas definiciones, o que significa ser el número de intersección en dimensiones mas altas. Tal búsqueda nos llevó al concepto de la multiplicidad de un ideal \mathfrak{m} -primario en un anillo local y la relación que tiene con la longitud de un módulo, presentando una prueba más algebraica sobre la equivalencia entre la definición presentada en el capítulo 1 y la definición enunciada al inicio del capítulo 2.

En el caso de las curvas espaciales irreducibles \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , definidas por ideales primos I_1 e I_2 , dimos ejemplos donde la $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{I_1 + I_2}$ no coincide con el orden del ideal I_2 en la parametrización de \mathcal{C}_1 . Sin embargo, en este capítulo, nos centramos en curvas definidas sobre una superficie S . En particular, tomamos una curva \mathcal{C}_1 irreducible y otra curva \mathcal{C}_2 definida por una función en $\mathcal{O}_{S,0}$. Presentamos un ejemplo con estas condiciones, Ejemplo 2.11, ilustrandonos que el orden de la composición y la dimensión como espacio vectorial del cociente coinciden. Aquí es donde se necesitó entender la relación que tiene la multiplicidad de un ideal \mathfrak{m} -primario sobre un anillo local y la longitud de un módulo. De manera asombrosa, en dicha prueba no se necesitó ninguna condición para la superficie, tomando como hipótesis una curva irreducible y

una función en la superficie. Con este resultado, evitamos la diferencia que hay entre el orden de la composición y la dimensión como espacio vectoriales del cociente en dimensiones altas. Abriendo la posibilidad de pensar en condiciones para poder generalizar unas de las propiedades del número de intersección. Entre las nueve propiedades vistas en el Capítulo 1, se pensó en la propiedad de la suma, es decir, tomando las diferentes componentes irreducibles de \mathcal{C}_2 en S , el número de intersección de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 es igual a la suma del número de intersección de \mathcal{C}_1 en cada componente de \mathcal{C}_2 . Debemos notar que las curvas estarán definidas por funciones en $\mathcal{O}_{S,0}$. Como todo trabajo se presentan ciertas dificultades. Para mayor claridad, mostraremos en el Ejemplo 2.32 que la propiedad de la suma no se cumple en general, en este ejemplo se consideró una superficie en \mathbb{C}^4 irreducible y que no es Cohen-Macaulay. Tomando las componentes de una curva en la superficie, esta pueden presentar una componente encajada, la cual dificulta el cálculo del número de intersección, además de que la propiedad de la suma no se cumpla. Para evitar este problema tomamos S una superficie Cohen-Macaulay, además de suponer que las componentes de una de las curvas fueran analíticamente irreducibles, obteniendo una generalización de la propiedad aditiva del número de intersección. Con estas hipótesis se logró con éxito una prueba para este reto.

Trabajos a desarrollar con esta dirección: es poder establecer el significado de ser un número de intersección en dimensiones mas altas o buscar como generalizar las de más propiedades del número de intersección. Aunque se presentó una generalización de la propiedad aditiva del número de intersección, sin embargo no se consideraron los ideales primarios en la descomposición de un ideal en el anillo local de la superficie.

Capítulo 1

Multiplicidad de Intersección.

1.1 Preliminares

Sea \mathbb{K} un campo algebraicamente cerrado. Consideramos $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ el plano afín y $\mathbb{K}[x, y]$ el anillo de polinomios.

Definición 1.1. *Sea I un ideal de $\mathbb{K}[x, y]$. Se define*

$$\mathbf{V}(I) = \{p \in \mathbb{A}^2 \mid \forall f \in I, f(p) = 0\}$$

que es llamado una variedad algebraica afín o variedad afín (o simplemente variedad). Por otro lado, para $V \subset \mathbb{A}^2$ un subconjunto del plano afín, definimos

$$\mathbb{I}(V) = \{f \in \mathbb{K}[x, y] \mid \forall p \in V \text{ se cumple que } f(p) = 0\}$$

$\mathbb{I}(V)$ *el ideal de V .*

Notemos que cuando nos referimos a un variedad no necesariamente será irreducible, como lo hace [4].

Definición 1.2. *Un subconjunto $V \subset \mathbb{A}^2$ es llamado una curva plana si existe un polinomio $f \in \mathbb{K}[x, y]$ tal que grado f es mayor o igual a 1 y $V = \mathbf{V}(f)$.*

Teorema 1.3. [5, Teorema 3.5.2, pág 237] *Sea I un ideal en $\mathbb{K}[x, y]$. Si $f \in \mathbb{K}[x, y]$ un polinomio tal que cualquier $p \in \mathbf{V}(I)$ se cumple que $f(p) = 0$, entonces $f^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

El Teorema 1.3, es conocido como HILBERT'S NULLSTELLENSATZ. Más referencias a este resultado son [4], [6] y [9].

Sea $p \in \mathbb{A}^2$, definamos $\mathfrak{m}_p(\mathbb{A}^2) = \mathfrak{m}_p = \{f \in \mathbb{K}[x, y] \mid f(p) = 0\}$ el ideal maximal de p en $\mathbb{K}[x, y]$, y $\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2) = \mathcal{O}_p = (\mathbb{K}[x, y])_{\mathfrak{m}_p}$ al anillo local de \mathbb{A}^2 en el punto p . Ahora definamos el anillo local de V en algún punto de él.

Definición 1.4. Para cada $p \in V \subset \mathbb{A}^2$ e $\mathbb{I}(V)$ el ideal de V , definamos al anillo de coordenadas de V como

$$\Gamma[V] = \frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathbb{I}(V)}.$$

El anillo local de V en p es

$$\mathcal{O}_p(V) = (\Gamma[V])_{\mathfrak{m}_p} = \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathbb{I}(V)} \right)_{\mathfrak{m}_p} \simeq \frac{\mathcal{O}_p}{\mathbb{I}(V)\mathcal{O}_p}.$$

El isomorfismo se tiene por [1, Corolario 3.4, pág. 44]

Proposición 1.5. [4, Ejercicio 2.44, pág 26] Sean V una variedad en \mathbb{A}^2 y $p \in V$. Si $\mathbb{I}(V) \subset J$ es un ideal de $\mathbb{K}[x, y]$ y $\pi(J) = J'$, donde $\pi: \mathbb{K}[x, y] \rightarrow \Gamma[V]$ es la proyección canónica. Entonces

$$\frac{\mathcal{O}_p}{J\mathcal{O}_p} \simeq \frac{\mathcal{O}_p(V)}{J'\mathcal{O}_p(V)}.$$

Definición 1.6. Un ideal $I \subset \mathbb{K}[x, y, z]$ es homogéneo si cuando $F \in I$ se descompone en una suma de polinomios homogéneos $F = F_0 + F_1 + \dots$, entonces $F_i \in I$ para todo i .

Por convención, a partir de este momento, a los polinomios homogéneos los denotaremos con una letra mayúscula y a los polinomios usuales con una letra minúscula.

Por último, definamos la **multiplicidad de un polinomio**. Si $f \in \mathbb{K}[x, y]$ y $p \in \mathbf{V}(f)$, entonces mediante un cambio de coordenadas se puede considerar a $p = (0, 0)$.

Definición 1.7. La derivada parcial con respecto a x de un polinomio $f = \sum a_i x^i \in \mathbb{K}[x, y]$ con $a_i \in \mathbb{K}[y]$ es definida como $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \sum i a_i x^{i-1}$. Se define de manera análoga f_y .

Definición 1.8. Sean $f \in \mathbb{K}[x, y]$ y $p \in \mathbf{V}(f)$. Si $p \notin \mathbf{V}(f_x, f_y)$, entonces p es llamado un punto simple, en caso contrario es llamado un punto singular.

Definición 1.9. Sea $f \in \mathbb{K}[x, y]$. Podemos escribir f en la forma $f = \sum_{i=m}^n a_i F_i$, donde cada F_i es un polinomio homogéneo de grado i , $a_i \in \mathbb{C}$ y n es el mayor grado de un monomio de f . Se define la parte inicial de f como $\text{Inl}(f) = F_m$, si m es el primer entero tal que $a_m \neq 0$.

Definición 1.10. Sean $\mathbf{V}(f)$ una curva y $p = (0, 0) \in \mathbf{V}(f)$. La multiplicidad de f en $p = (0, 0)$, la cual denotaremos como $m = m_p(f)$, es el entero m tal que $\text{Inl}(f) = F_m$.

Para cualquier $F \in \mathbb{K}[x, y]$ polinomio homogéneo, donde \mathbb{K} es un campo algebraicamente cerrado, por el Teorema fundamental del algebra, tenemos $F = \prod (a_i x + b_i y)^{r_i}$, es decir, F puede ser vista como producto de factores lineales.

Observación 1.11.

1. $p \in \mathbf{V}(f)$ si y solo si $m_p > 0$.
2. p es un punto simple si y solo si $m_p = 1$.
3. Como F_m es un polinomio homogéneo en $\mathbb{K}[x, y]$, $F_m = \prod (a_i x + b_i y)^{r_i}$ donde $a_i x + b_i y$ son líneas distintas. Las **líneas tangentes** de f en el punto p son las $a_i x + b_i y$ y r_i es la multiplicidad de las tangentes.

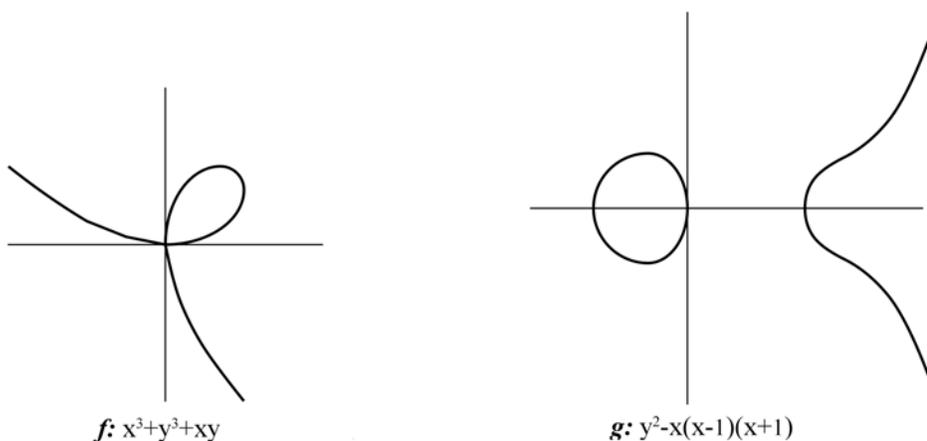


Figura 1

Ejemplo 1.12. Las gráficas presentadas en la Figura 1 son las representaciones de f y g , respectivamente, en el contexto real. Calculando las derivadas de f y g , el punto $p = (0, 0)$ es un punto singular en f y es un punto regular en g . Escribiendo a $f = \sum_{i=2}^3 F_i$, con F_i polinomios homogéneos de grado i ,

y a $g = \sum_{i=1}^3 G_i$, con G_i polinomios homogéneos de grado i , donde $F_2 = xy$ y $G_1 = x$, tenemos que la multiplicidad de f y g en el punto p , respectivamente, son 2 y 1, es decir, $m_p(f) = 2$ y $m_p(g) = 1$.

Por otro lado, F_2 y G_1 determinan, respectivamente, las rectas tangentes de f y g , en el punto p . Así, $V(x)$ y $V(y)$ son las rectas tangentes de f y $V(x)$ es la recta tangente de g .

1.2 Multiplicidad de intersección

En esta sección, hablaremos un poco de la multiplicidad de intersección (o número de intersección). Para mayor detalle de este concepto consultar [4].

Definici3n 1.13. Sean $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$ polinomios, $\mathbf{V}(f)$ y $\mathbf{V}(g)$ las curvas planas respectivas de f y g . Para cada $p \in \mathbb{A}^2$, definamos la multiplicidad de intersecci3n de f y g como.

$$I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)}{(f, g)\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)} \right)$$

Antes de enunciar y probar las propiedades relacionadas a este n3mero, veamos algunos resultados necesarios para su demostraci3n.

Proposici3n 1.14. [4, Proposici3n 7, p3g 28] Si

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3 \xrightarrow{\varphi_3} V_4 \longrightarrow 0$$

es una sucesi3n exacta de espacios vectoriales de dimensi3n finita, entonces

$$\dim V_4 = \dim V_3 - \dim V_2 + \dim V_1.$$

Proposici3n 1.15. [4, Ejercicio 2.46, p3g 26] Si R_d es el espacio vectorial de los polinomios homog3neos de grado d en R , con $R = \mathbb{K}[x, y, z]$, entonces

$$\dim R_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2}.$$

Proposici3n 1.16. [4, Corollary 4, p3g 11] Si I es un ideal de $\mathbb{K}[x, y]$. Tenemos que $\mathbf{V}(I)$ es un conjunto finito si y solo si $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensi3n finita.

Teorema 1.17. Sea I un ideal de $\mathbb{K}[x, y]$ y supongamos que $\mathbf{V}(I) = \{p_1, \dots, p_N\}$ es finito. Si $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{p_i}(\mathbb{A}^n)$ entonces existe un isomorfismo natural de $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$

$$\text{con } \prod_{i=1}^N \frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i}.$$

DEMOSTRACI3N: Sea $\mathfrak{m}_i = \mathbb{I}(\{p_i\}) \subset \mathbb{K}[x, y]$ los distintos ideales maximales respectivos a cada p_i . Observe que \mathfrak{m}_i son los 3nicos ideales maximales que contienen a I ; dado que para \mathfrak{m} un ideal maximal que contiene a I , se tiene que $\mathbf{V}(\mathfrak{m}) \subset \mathbf{V}(I)$ y $\mathbf{V}(\mathfrak{m}) = \{p\}$ para $p \in \mathbb{A}^n$, entonces $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$ para algun

$i \in \{1, \dots, N\}$.

Para cada i podemos definir la función

$$\varphi_i : \frac{\mathbb{K}[x, y]}{I} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i}$$

con el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x, y] & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_i & \xrightarrow{\rho_i} & \frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i} \\ \downarrow \pi & & & \nearrow \varphi_i & \\ \frac{\mathbb{K}[x, y]}{I} & & & & \end{array}$$

Veremos que φ_i está bien definida y que además es un homomorfismo. Observe que π y ρ_i son las proyecciones canónicas, y α se define como $\alpha(g) = \frac{g}{1}$ para cada $g \in \mathbb{K}[x, y]$. Notemos que $\text{Ker}(\rho_i \circ \alpha) = \alpha^{-1}(I\mathcal{O}_i) \supset I$, es decir, $\text{Ker} \pi \subset \text{Ker} \rho_i \circ \alpha$. Entonces existe $\varphi_i : \frac{\mathbb{K}[x, y]}{I} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i}$ tal que el diagrama conmuta, es decir, $\varphi_i \circ \pi = \rho_i \circ \alpha$, obteniendo lo anteriormente mencionado.

Definamos el homomorfismo

$$\varphi : \frac{\mathbb{K}[x, y]}{I} \longrightarrow \prod_{i=1}^N \frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i}$$

tal que para cada $\bar{g} \in \frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$ se tiene $\varphi(\bar{g}) = (\varphi_1(\bar{g}), \varphi_2(\bar{g}), \dots, \varphi_N(\bar{g}))$.

Por Nullstellensatz

$$\sqrt{I} = \mathbb{I}(\{p_1, \dots, p_N\}) = \bigcap_{i=1}^N \mathfrak{m}_i = \prod_{i=1}^N \mathfrak{m}_i.$$

Observemos que $\bigcap_{i=1}^N \mathfrak{m}_i = \prod_{i=1}^N \mathfrak{m}_i$, porque para cada $i, j \in \{1, \dots, N\}$ distintos, \mathfrak{m}_i y \mathfrak{m}_j son comaximales.

Dado que $\bigcap_{i=1}^N \mathfrak{m}_i$ es finitamente generado, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $(\bigcap \mathfrak{m}_j)^d \subset I$. Para cada $i, j \in \{1, \dots, N\}$ distintos \mathfrak{m}_i y \mathfrak{m}_j son comaximales entonces \mathfrak{m}_i^d y \mathfrak{m}_j^d son comaximales con $i, j \in \{1, \dots, N\}$ distintos, así $\bigcap \mathfrak{m}_j^d = (\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_N)^d = (\bigcap \mathfrak{m}_j)^d \subset I$.

Para probar que φ es un isomorfismo construiremos ciertos elementos que nos ayudarán en dicha prueba. Podemos encontrar $f_i \in \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{m}_j$ tal que $f_i(p_i) = 1$; en caso contrario para cada $f \in \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{m}_j$ se cumple que $f(p_i) = 0$, luego $\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{m}_i$, y así existe $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\mathfrak{m}_{j_0} \subset \mathfrak{m}_i$, lo cual contradice al hecho que \mathfrak{m}_{j_0} y \mathfrak{m}_i son maximales. Sea $e_i = 1 - (1 - f_i^d)^d$. Existe $D_i \in \mathbb{K}[x, y]$ tal que $e_i = f_i^d D_i$ y $e_i(p_i) = 1$, luego $e_i \in \left(\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{m}_j \right)^d$. Entonces $1 - \sum_i e_i = (1 - e_i) - \sum_{k \neq i} e_k \in \left(\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{m}_j \right)^d$, porque para cada i se cumple que $1 - e_i \in \mathfrak{m}_i^d$ y $\sum_{k \neq i} e_k \in \mathfrak{m}_i^d$, además $e_i - e_i^2 = e_i(1 - e_i) = e_i(1 - f_i^d)^d \in \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{m}_j^d \cdot \mathfrak{m}_i^d = \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{m}_i^d \subset I$. Sea \bar{e}_i la clase de e_i en $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$. Tenemos $\bar{e}_i^2 = \bar{e}_i$, $\bar{e}_i \bar{e}_j = 0$ si $i \neq j$ y $\sum_i \bar{e}_i = 1$ en $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$. Así, las clases \bar{e}_i nos ayudarán a probar que φ es biyectiva.

Probemos que φ es inyectiva. Antes veamos la siguiente afirmación, la cual probaremos mas adelante,

Afirmación 1.18. *Si $g \in \mathbb{K}[x, y]$ y $g(p_i) \neq 0$, entonces existe $\bar{t} \in \frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$ tal que $\bar{t}\bar{g} = \bar{e}_i$ donde \bar{g} es la clase g en $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$.*

Tomemos un elemento $f \in \mathbb{K}[x, y]$. Si $\varphi(\bar{f}) = 0$, es decir, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ se cumple que $\rho_i(\alpha(f)) = \varphi_i(\bar{f}) = 0$, entonces para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ se tiene que $\alpha(f) \in I\mathcal{O}_i$. Así para toda $i \in \{1, \dots, N\}$, existe g_i con $g_i(p_i) \neq 0$ tal que $f g_i \in I$. Por la Afirmación 1.18, para cada i existe $t_i \in \frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$ tal que $\bar{t}_i \bar{g}_i = \bar{e}_i$. Así $\bar{f} = \sum \bar{e}_i \bar{f} = \sum \bar{t}_i \bar{g}_i \bar{f} = 0$ en $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$.

Veamos que φ es sobreyectiva. Como $e_i(p_i) = 1$, entonces $\varphi_i(\bar{e}_i)$ es una unidad en $\frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i}$, donde $\varphi_i(\bar{e}_i)\varphi_i(\bar{e}_j) = \varphi_i(\bar{e}_i \bar{e}_j) = 0$ si $i \neq j$ y $\varphi_i(\bar{e}_j) = 0$ para

$i \neq j$. Por lo tanto

$$\varphi_i(\bar{e}_i) = \sum_{j=1}^N \varphi_i(\bar{e}_j) = \varphi_i\left(\sum_{j=1}^N \bar{e}_j\right) = \varphi_i(1) = 1.$$

Tomemos $z = \left(\frac{\bar{a}_1}{s_1}, \dots, \frac{\bar{a}_N}{s_N}\right) \in \prod \frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i}$. Por la Afirmación 1.18, para cada \bar{s}_i podemos encontrar $\bar{t}_i \in \mathbb{K}[x, y]$ tal que $\bar{t}_i \bar{s}_i = \bar{e}_i$ en $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$, entonces $\bar{t}_i \bar{a}_i = \frac{\bar{a}_i}{s_i}$ en $\frac{\mathcal{O}_i}{I\mathcal{O}_i}$. Luego para cada i se cumple

$$\varphi_i\left(\sum_j \bar{t}_j \bar{a}_j \bar{e}_j\right) = \varphi_i(\bar{t}_i \bar{a}_i \bar{e}_i) = \varphi_i(\bar{t}_i \bar{a}_i) \varphi_i(\bar{e}_i) = \bar{t}_i \bar{a}_i = \frac{\bar{a}_i}{s_i},$$

es decir, $\varphi\left(\sum_i \bar{t}_i \bar{a}_i \bar{e}_i\right) = z$.

Por lo tanto φ es un isomorfismo. \square

Demostración de la Afirmación 1.18. Supongamos que $g(p_i) = 1$ y sea $h = 1 - g$. Tenemos que $(1 - h)(e_i + h e_i + \dots + h^{d-1} e_i) = e_i - h^d e_i$. Observe que $h \in \mathfrak{m}_i$, entonces $h^d e_i \in I$. Por lo tanto $\bar{g}(\bar{e}_i + \bar{h} e_i + \dots + \bar{h}^{d-1} e_i) = \bar{e}_i$ en $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{I}$. Esto termina la demostración de la Afirmación 1.18.

A continuación mencionaremos propiedades relacionadas al número de intersección.

Proposición 1.19. Sean $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$, $\mathbf{V}(f)$ y $\mathbf{V}(g)$ las curvas planas respectivas de f y g . Sea $p \in \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)$ e $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g))$, multiplicidad de intersección en p . Sea $\mathcal{O} = \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)$. Las siguientes propiedades se cumplen:

1. Si f y g no tienen componentes en común que pasen por p , es decir, f y g se intersectan propiamente en p , entonces $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) \in \mathbb{N}$. En caso contrario $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = \infty$.
2. $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = 0$ si y solo si $p \notin \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)$.
3. Si T es un cambio de coordenadas y $T(p) = q$, entonces

$I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = I(q, \mathbf{V}(f \circ T) \cap \mathbf{V}(g \circ T))$ donde $f \circ T$ y $g \circ T$ denotan a los polinomios con este cambio de coordenadas.

4. $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = I(p, \mathbf{V}(g) \cap \mathbf{V}(f))$

5. $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) \geq m_p(f)m_p(g)$. La igualdad se da cuando $\mathbf{V}(f)$ y $\mathbf{V}(g)$ no tienen tangentes en com3n.

6. Si $f = \prod f_i^{r_i}$ y $g = \prod g_j^{s_j}$, entonces

$$I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = \sum_{i,j} r_i s_j I(p, \mathbf{V}(f_i) \cap \mathbf{V}(g_j)).$$

7. Para cualquier $h \in \mathbb{K}[x, y]$ se cumple que

$$I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g + fh)).$$

8. Si p es un punto simple sobre $\mathbf{V}(f)$, entonces $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = \text{ord}_p^f(g)$.

9. Si f y g no tienen componentes en com3n, entonces

$$\sum_p I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{(f, g)} \right).$$

DEMOSTRACI3N: 1. Supongamos que f y g no tienen componentes en com3n. Entonces $\mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)$ es finito, por la Proposici3n 1.16 se tiene que $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{(f, g)}$ es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensi3n finita. As3 del Teorema 1.17 se concluye que $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g))$ es finito.

Si f y g tienen una componente en com3n h , entonces $(f, g) \subset (h)$, luego existe un homomorfismo sobreyectivo de $\frac{\mathcal{O}}{(f, g)}$ a $\frac{\mathcal{O}}{(h)}$ y $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) \geq \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathcal{O}}{(h)\mathcal{O}} \right)$. Pero $\frac{\mathcal{O}}{(h)}$ es isomorfo a $\mathcal{O}_p(h)$ y $\mathcal{O}_p(h) \leftarrow \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(h)}$, donde $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{(h)}$ es de dimensi3n infinita. De la Proposici3n 1.16 obtenemos que $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g))$ es infinito.

2. Se tiene que $p \notin \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)$ si y solo si $p \notin \mathbf{V}(f)$ o $p \notin \mathbf{V}(g)$ si y solo si f es unidad en \mathcal{O} o g es unidad en \mathcal{O} si y solo si $\frac{\mathcal{O}}{(f, g)\mathcal{O}} \cong (0)$ si y solo si $\dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}}{(f, g)\mathcal{O}} = 0$.

3. Sea $T : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ un cambio de coordenadas con $T(q) = p$. Luego T es un homeomorfismo que define un automorfismo de álgebras, T^* , en el anillo de polinomios $\mathbb{K}[x, y]$. Observemos que $\mathfrak{m}_p = \{h \in \mathbb{K}[x, y] \mid h(p) = 0\} = \{h \in \mathbb{K}[x, y] \mid (h \circ T)(q) = 0\}$ y $\mathfrak{m}_q = \{h \in \mathbb{K}[x, y] \mid h(q) = 0\} = \{h \in \mathbb{K}[x, y] \mid h(T^{-1}(p)) = 0\}$. Entonces $T^*(\mathfrak{m}_p) = \mathfrak{m}_q$. Veamos que $T^*(f, g) = (f \circ T, g \circ T)$, en efecto

$$\begin{aligned} T^*(f, g) &= \{T^*(h) \in \mathbb{K}[x, y] \mid h \in (f, g)\} \\ &= \{h \circ T \in \mathbb{K}[x, y] \mid \text{para algún } a, b \in \mathbb{K}[x, y], h = af + bg\} \\ &= \{(a \circ T) \cdot (f \circ T) + (b \circ T) \cdot (g \circ T) \mid \text{para algún } a, b \in \mathbb{K}[x, y]\} \\ &\subset (f \circ T, g \circ T). \end{aligned}$$

De manera análoga, consideramos a T^{*-1} , pues T^* es un automorfismo, se tiene la otra contención. Definamos $\tilde{T} : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_q$ como $\tilde{T}\left(\frac{h}{s}\right) = \frac{T^*(h)}{T^*(s)} = \frac{h \circ T}{s \circ T}$ donde $s \notin \mathfrak{m}_p$. Veamos que está bien definida. Dado que $T^*(\mathfrak{m}_p) = \mathfrak{m}_q$, es decir, para cada $s \notin \mathfrak{m}_p$ se cumple que $s \circ T \notin \mathfrak{m}_q$, así \tilde{T} es un homomorfismo bien definido. Además, como \tilde{T} depende de T^* , el cual es un automorfismo, entonces \tilde{T} es un isomorfismo entre \mathcal{O}_p y \mathcal{O}_q . Sabemos que $T^*(f, g) = (f \circ T, g \circ T)$, así $\tilde{T}((f, g)\mathcal{O}_p) = (f \circ T, g \circ T)\mathcal{O}_q$. Del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_p & \xrightarrow{\tilde{T}} & \mathcal{O}_q \\ & \searrow \varphi & \downarrow \pi_1 \\ & & \mathcal{O}_q \\ & & \hline & & (f \circ T, g \circ T)\mathcal{O}_q \end{array}$$

y por el primer Teorema de isomorfismo de anillos, obtenemos que $\varphi : \frac{\mathcal{O}_p}{\ker \varphi} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_q}{(f \circ T, g \circ T)\mathcal{O}_q}$ es un isomorfismo, donde el

$$\text{Ker} \varphi = (\pi_1 \circ \tilde{T})^{-1}(0) = \tilde{T}^{-1}(\pi_1^{-1}(0)) = \tilde{T}^{-1}((f \circ T, g \circ T)\mathcal{O}_q) = (f, g)\mathcal{O}_p.$$

Esto concluye la propiedad 3.

Demostremos las propiedades 4 y 7. Sea $h \in \mathbb{K}[x, y]$. Consideremos $(f, g)\mathcal{O} = (g, f)\mathcal{O}$ y $(f, g)\mathcal{O} = (f, g + hf)\mathcal{O}$. De la definición de $I(p, V(f) \cap V(g))$ se

cumplen ambas propiedades.

6. Por inducci3n sobre el n3mero de factores irreducibles, ser3 suficiente probar que

$$I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(gh)) = I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) + I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(h))$$

para cualquier $f, g, h \in \mathbb{K}[x, y]$.

Podemos asumir que f y gh no tienen componentes en com3n, en caso contrario el resultado es obvio. Sea $\varphi: \frac{\mathcal{O}}{(f, gh)\mathcal{O}} \rightarrow \frac{\mathcal{O}}{(f, g)\mathcal{O}}$ el homomorfismo definido por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\pi_2} & \frac{\mathcal{O}}{(f, g)\mathcal{O}} \\ \downarrow \pi_1 & \nearrow \varphi & \\ \mathcal{O} & & \\ \hline & & \frac{\mathcal{O}}{(f, gh)\mathcal{O}} \end{array}$$

donde π_1 y π_2 son las proyecciones can3nicas y $\varphi \circ \pi_1 = \pi_2$, as3 φ est3 bien definida y es un homomorfismo.

Definamos una aplicaci3n \mathbb{K} -lineal $\psi: \frac{\mathcal{O}}{(f, h)\mathcal{O}} \rightarrow \frac{\mathcal{O}}{(f, gh)\mathcal{O}}$ como $\psi(\bar{z}) = \overline{gz}$ con $z \in \mathcal{O}$.

Veamos que ψ est3 bien definida. Tomando $z_1, z_2 \in \mathcal{O}$ representantes de \bar{z} , es decir, $z_1 - z_2 \in (f, g)\mathcal{O}$. Entonces $g(z_1 - z_2) \in (f, gh)\mathcal{O}$, luego $\overline{gz_1} = \overline{gz_2}$, as3 $\psi(\bar{z}_1) = \psi(\bar{z}_2)$. Por lo tanto ψ no depende de los representantes. Por la Proposici3n 1.14, es suficiente mostrar que la sucesi3n

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}}{(f, h)\mathcal{O}} \xrightarrow{\psi} \frac{\mathcal{O}}{(f, gh)\mathcal{O}} \xrightarrow{\varphi} \frac{\mathcal{O}}{(f, g)\mathcal{O}} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Verificaremos que ψ es inyectiva. Supongamos que $\psi(\bar{z}) = 0$ para $z \in \mathcal{O}$, entonces $gz = uf + vgh$ donde $u, v \in \mathcal{O}$. Eligiendo $s \in \mathbb{K}[x, y]$ con $s(p) \neq 0$ y $su = a$, $sv = b$, $sz = c \in \mathbb{K}[x, y]$. Entonces $gc = af + bgh$ en $\mathbb{K}[x, y]$, as3 $g(c - bh) = af$. Como f y g no tienen factores comunes, f debe dividir a $c - bh$, es decir, $c - bh = df$ para $d \in \mathbb{K}[x, y]$, entonces $c = df + bh$. Luego $z = \frac{d}{s}f + \frac{b}{s}h$,

así $z \in (f, h)\mathcal{O}$. Por lo tanto ψ es inyectiva.

Por otro lado, se puede ver que $\text{Ker } \varphi = \text{Im } \psi$ porque $(g)\mathcal{O} \subset (f, g)\mathcal{O}$. Así se tiene que la sucesión es exacta.

9. Supongamos que f y g no tienen componentes en común. Entonces

$\mathbf{V}(f, g) = \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)$ es un conjunto finito de puntos y del Teorema 1.17 se tiene que $\frac{\mathbb{K}[x, y]}{(f, g)}$ es isomorfo a $\prod_{p \in \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)} \frac{\mathcal{O}_p}{(f, g)\mathcal{O}_p}$. Viendo a ambos espacios

como \mathbb{K} -espacios vectoriales se tiene que:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(f, g)} &= \dim_{\mathbb{K}} \prod_{p \in \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)} \frac{\mathcal{O}_p}{(f, g)\mathcal{O}_p} \\ &= \sum_p \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}_p}{(f, g)\mathcal{O}_p} \\ &= \sum_p I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)). \end{aligned}$$

5. Consideremos f y g sin componentes en común y $p = (0, 0) \in \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)$, sea $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p = (x, y)$ el ideal maximal de $\mathbb{K}[x, y]$. Sean $m = m_p(f)$ y $n = m_p(g)$.

La demostración se centra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^n} \times \frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^m} & \xrightarrow{\psi} & \frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^{m+n}} & \xrightarrow{\varphi} & \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(\mathfrak{m}^{m+n}, f, g)} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \alpha & & \\ \mathcal{O} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O} & \longrightarrow & 0. & & \end{array}$$

Aquí φ y π son los homomorfismos naturales y ψ está definida por $\psi(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{af + bg}$. Observe que α está determinado por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x, y] & \xrightarrow{i} & \mathcal{O} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \rho \\ \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(\mathfrak{m}^{m+n}, f, g)} & \xrightarrow{\alpha} & \frac{\mathcal{O}}{(\mathfrak{m}^{m+n}, f, g)\mathcal{O}}. \end{array}$$

Como $\mathbf{V}(\mathfrak{m}^{m+n}, f, g) \subset \{p\}$ y por el Teorema 1.17, α es un isomorfismo.

Además se tiene que φ y π son suprayectivas. Ahora probemos que

$$\frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^n} \times \frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^m} \xrightarrow{\psi} \frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^{m+n}} \xrightarrow{\varphi} \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(\mathfrak{m}^{m+n}, f, g)} \longrightarrow 0$$

es una sucesi3n exacta. Bastar3 probar que $\ker \varphi = \text{Im } \psi$. Observe que $\ker \varphi = \frac{(\mathfrak{m}^{m+n}, f, g)}{\mathfrak{m}^{m+n}} = (\bar{f}, \bar{g}) \frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^{m+n}} = \text{Im } \psi$. Entonces, de las Proposiciones 1.14 y 1.15

$$\begin{aligned}
I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) &= \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathcal{O}}{(f, g)\mathcal{O}} \right) \geq \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathcal{O}}{(\mathfrak{m}^{m+n}, f, g)\mathcal{O}} \right) \\
&= \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{(\mathfrak{m}^{m+n}, f, g)} \right) \\
&= \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^{m+n}} \right) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^n} \right) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^m} \right) \\
&\quad + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker } \psi) \geq \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^{m+n}} \right) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^n} \right) \\
&\quad - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^m} \right) \\
&= \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = mn.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

De esto se sigue que

$$\dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^n} \right) + \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{\mathbb{K}[x, y]}{\mathfrak{m}^m} \right) \geq \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker } \varphi) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im } \psi).$$

Esto muestra que $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) \geq mn$, y que $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = mn$ si y solo si ambas desigualdades de la cadena son igualdades. La primera desigualdad es una igualdad si y solo si π es un isomorfismo, es decir, si $\mathfrak{m}^{m+n} \subset (f, g)\mathcal{O}$. La segunda es una igualdad si y solo si ψ es uno a uno.

Para probar la propiedad 8 se necesitan definir otros conceptos, por lo que se har3 mas adelante. \square

Observe que el siguiente lema forma parte de demostraci3n de la propiedad 5:

Lema 1.20.

a) Si f y g no tienen tangentes en com3n en p , entonces $\mathfrak{m}^t \subset (f, g)\mathcal{O}$ para $t \geq m + n - 1$.

b) La aplicaci3n ψ es uno a uno si y solo si f y g tienen distintas tangentes en p .

DEMOSTRACIÓN: a) Supongamos que f y g no tienen tangentes en común en p . Sean L_1, \dots, L_m las tangentes a f en p y M_1, \dots, M_n las tangentes a g en p , las cuales son diferentes por que f y g no tienen tangente en común, sin embargo pueden haber repeticiones entre los L_i y también entre los M_j . Para cada $i, j \geq 0$ definamos $A_{i,j} = L_1 \cdots L_i M_1 \cdots M_j$ donde $L_i = L_m$ con $i > m$ y $M_j = M_n$ con $j > n$. El conjunto $\{A_{i,j} \mid i + j = t\}$ forma una base para el espacio vectorial de todas los polinomios homogéneos de grado t . Bastará mostrar que $A_{i,j} \in (f, g)\mathcal{O}$ para cada $i + j \geq m + n - 1$.

Si $i + j \geq m + n - 1$ implica que $i \geq m$ o $j \geq n$. Tomando $i \geq m$, se obtiene que $A_{i,j} = A_{m,0}B$ donde B es un polinomio homogéneo de grado $t = i + j - m$. Entonces $f = A_{m,0} + f'$ donde todos los términos de f' son de grado mayor o igual a $m + 1$. Así, $A_{i,j} = Bf - Bf'$, donde cada término de Bf' tiene grado mayor o igual a $i + j + 1$. Como consecuencia tenemos que f y g generan a A_t con $t = i + j \geq m + n - 1$ módulo \mathfrak{m}^{t+1} . Por lo tanto, f y g generan todo polinomio homogéneo de grado t módulo \mathfrak{m}^{t+1} . Inductivamente tenemos que f y g generan todo polinomio homogéneo de grado t módulo \mathfrak{m}^{t+1} para toda $t \geq m + n - 1$.

Para terminar, mostremos que $\mathfrak{m}^t \subset (f, g)\mathcal{O}$ para t suficientemente grande. Del Nullstellensatz: $\mathbf{V}(f, g) = \{p, q_1, \dots, q_s\}$. Elegimos un polinomio h de modo que $h(q_i) = 0$ y $h(p) \neq 0$. Entonces Xh y Yh están en $\mathbb{I}(\mathbf{V}(f, g))$, así $(Xh)^N, (Yh)^N \in (f, g)$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Aquí h^N es unidad en \mathcal{O} , entonces X^N y Y^N están en $(f, g)\mathcal{O}$. Por lo tanto $\mathfrak{m}^{2N} \subset (f, g)\mathcal{O}$.

b) Supongamos que las tangentes son distintas y que $\psi(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{af + bg} = 0$, es decir, $af + bg$ consiste de términos de grado mayor o igual a $m + n$. Escribamos $a = a_r + a_{r+1} + \dots$ y $b = b_s + b_{s+1} + \dots$, podemos suponer que $r < m$ o $s < n$, así $af + bg = a_r f_m + b_s g_n + \dots$. Entonces deberíamos tener que $r + m = s + n$ y $a_r f_m = -b_s g_n$. En caso contrario se tiene que $\min\{r + m, s + n\} \geq m + n$, entonces $r \geq m$ y $s \geq n$, por lo tanto $(\bar{a}, \bar{b}) = (0, 0)$.

Pero f_m y g_n no tiene factores en común, así f_m divide a b_s y g_n divide a a_r . Por lo tanto, $s \geq m$ y $r \geq n$. Así $(\bar{a}, \bar{b}) = (0, 0)$.

Para la última implicación, la haremos por contrarrecíproca. Si L es una tangente común a f y a g en p , escribiremos a $f = Lf_{m-1}$ y a $g = Lg_{n-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} \psi(\overline{g_{n-1}}, \overline{f_{m-1}}) &= \overline{fg_{n-1} - gf_{m-1}} = \overline{fg_{n-1} - Lg_{n-1}f_{m-1}} = \\ &= \overline{fg_{n-1} - g_{n-1}f} = 0. \end{aligned}$$

Así ψ no es uno a uno. □

Para probar la propiedad **8** veamos lo siguiente.

Definición 1.21. Sea R un dominio que no es un campo. Diremos que R es un anillo de valoración discreta (**AVD**) si se cumplen las siguientes condiciones equivalentes:

- 1) R es Noetheriano local, y su ideal maximal es principal.
- 2) Existe un elemento irreducible $t \in R$ tal que todo $z \in R$ no cero puede ser escrito únicamente de la forma $z = ut^n$, con u unidad en R y n un entero no negativo.

Definición 1.22. Un elemento t como en 2) es llamado el parámetro uniformizador para R . Cualquier otro parámetro uniformizador es de la forma ut , con u una unidad en R . El exponente n es llamado el orden de z , y es escrito como $n = \text{ord}(z)$; definiremos $\text{ord}(0) = \infty$.

Por último veamos el siguiente teorema.

Teorema 1.23. [4, Theorem 1, pág 34] Sea $f \in \mathbb{K}[x, y]$. El punto p es un punto simple de $\mathbf{V}(f)$ si y solo si $\mathcal{O}_p(\mathbf{V}(f))$ es un anillo de valoración discreta. En este caso, si $L = aX + bY + c$ es cualquier línea que pasa por p que no es tangente a f en p , entonces la imagen de L en $\mathcal{O}_p(\mathbf{V}(f))$ es un parámetro uniformizador para $\mathcal{O}_p(\mathbf{V}(f))$.

Con las condiciones del Teorema 1.23, para $g \in \mathbb{K}[x, y]$ se puede considerar el orden de g en $\mathcal{O}_p(\mathbf{V}(f))$, denotado como $ord_p^f(g) = ord_p^f(\bar{g})$, donde $\bar{g} = \pi(g)$ con $\pi: \mathbb{K}[x, y] \rightarrow \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(f)}$ la proyección canónica.

Proposición 1.24. *Sea R un **AVD** con \mathfrak{m} su ideal maximal. Supongamos que un campo \mathbb{K} es un subanillo de R y que la composición $\mathbb{K} \hookrightarrow R \rightarrow \frac{R}{\mathfrak{m}}$ es un isomorfismo. Si $(z) = \mathfrak{m}^n$ para $z \in R$, entonces $ord(z) = n$ y por lo tanto $ord(z) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{R}{(z)}$.*

DEMOSTRACIÓN: Como R es un **AVD**, existe $t \in R$ irreducible (elemento uniformizador) tal que $\mathfrak{m} = (t)$. Entonces $\mathfrak{m}^n = (t^n)$, luego $z = ut^n$ para algún $u \in R$. Dado que R es **AVD**, se tiene que u es una unidad en R ; en caso contrario, existen v unidad en R y $k \in \mathbb{N}$ tal que $u = vt^k$, así $z = vt^{k+n}$, es decir, $(z) = \mathfrak{m}^{n+k} \subsetneq \mathfrak{m}^n$ contradiciendo que $(z) = \mathfrak{m}^n$. Por lo tanto, $ord(z) = n$. Ahora veamos que $ord(z) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{R}{(z)}$. Bastará probar que $\{\bar{1}, \bar{t}, \bar{t}^2, \dots, \bar{t}^{n-1}\}$ es una base en $\frac{R}{(z)}$.

Sean $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = 0$ en $\frac{R}{(z)}$, es decir, existe $h \in R$ tal que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = ht^n$. Supongamos que $a_0 \neq 0$, entonces $a_0 = ht^n - (a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1}) = t(ht^{n-1} - a_1 + a_2 t + \dots + a_{n-1} t^{n-2})$, así $a_0 \in \mathfrak{m}$ lo cual es una contradicción, por que a_0 es una unidad de R , así $a_0 = 0$. Si $a_1 \neq 0$, entonces $a_1 t = ht^n - (a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_{n-1} t^{n-1}) = t^2(ht^{n-2} - a_2 + a_3 t \dots + a_{n-1} t^{n-3})$, así $a_1 = t(ht^{n-2} - a_2 + a_3 t \dots + a_{n-1} t^{n-3})$, luego $a_1 \in \mathfrak{m}$ lo cual es una contradicción, por que a_1 es una unidad de R , de esta forma $a_1 = 0$. Inductivamente, se prueba que $a_i = 0$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Por lo tanto, $\{1, \dots, t^{n-1}\}$ es linealmente independiente.

Veamos que $\{1, \dots, t^{n-1}\}$ genera a $\frac{R}{\mathfrak{m}^n}$. Sea $\bar{s} \in \frac{R}{\mathfrak{m}^n}$ distinto del cero, existen u unidad en R y $m \in \mathbb{N}$ tal que $s = ut^m$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq n$ se tiene que $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}^n$, entonces $s \in \mathfrak{m}^m$ para algún $m < n$. Dado u es unidad,

entonces $\bar{s} = \overline{ut^m}$, luego $\{1, \dots, t^{n-1}\}$ genera a $\frac{R}{\mathfrak{m}^n}$ como \mathbb{K} -espacio vectorial. Como la composición $\mathbb{K} \hookrightarrow R \longrightarrow \frac{R}{\mathfrak{m}}$ es un isomorfismo, entonces las unidades en R son elementos en \mathbb{K} .

Por lo tanto $\{1, \dots, t^{n-1}\}$ es una base para $\frac{R}{\mathfrak{m}^n}$.

□

Ahora recordemos la **Propiedad 8**.

8. Si p es un punto simple sobre $\mathbf{V}(f)$, entonces $I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = ord_p^f(g)$.

DEMOSTRACIÓN: Finalmente probemos la propiedad **8**. Podemos suponer que f es irreducible. Si \bar{g} es la imagen de g en \mathcal{O}_p , entonces $ord_p^f(g) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}_p(f)}{(\bar{g})\mathcal{O}_p(f)}$ por la Proposición 1.24. Tenemos que $\frac{\mathcal{O}_p(f)}{(\bar{g})\mathcal{O}_p(f)}$ es isomorfo a $\frac{\mathcal{O}_p}{(f, g)\mathcal{O}_p} = I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g))$, por la Proposición 1.5.

□

Capítulo 2

Intersección en Superficies.

2.1 Intersección en el plano.

En este capítulo desarrollaremos el número de intersección en el sentido anaítico. Aun que este concepto se desarrolló en el lenguaje algebraico, este no depende de la categoría, algebraica o analítica. Esto se debe por que calculamos dimensiones de espacio vectoriales finitos, es decir, si x_1, \dots, x_n son unos variables e I un ideal del anillo de polinomios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ primario al ideal (x_1, \dots, x_n) entonces $IC\{x_1, \dots, x_n\}$ es primario a $(x_1, \dots, x_n)\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{I} \right) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}}{IC\{x_1, \dots, x_n\}} \right)$.

En el capítulo anterior se dió una definición del número de intersección, sin embargo, [10] y [9] presentan una definición un poco diferente a la mostrada en el capítulo anterior.

Definición 2.1. *Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es llamado regular de orden b en y si la serie de potencias en la variable y , definida por $f(0, y)$ tiene un cero de orden b .*

A lo largo de este trabajo se menciona la parametrización de curvas analíticas irreducible. Por lo que se enunciará el siguiente resultado.

Teorema 2.2. [5, Theorem on Puiseux series, pág. 126] *Sea $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$*

regular en y de orden k mayor o igual a 1. Entonces existe un número natural n mayor o igual a 1 y $\varphi \in \mathbb{C}[[t]]$ tal que $\varphi(0) = 0$ y

$$f(t^n, \varphi(t)) = 0 \text{ en } \mathbb{C}[[t]].$$

Para mayor información del Teorema 2.2 se puede consultar también [9] y [10].

Definición 2.3. Sean $\mathcal{C}_1 = \mathbf{V}(f)$ y $\mathcal{C}_2 = \mathbf{V}(g)$ dos curvas planas, donde \mathcal{C}_1 es una curva analíticamente irreducible con parametrización $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $t \mapsto (x(t), y(t))$. Definamos el orden de contacto como

$$\text{ord } g \circ \varphi_1 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(g \circ \varphi_1)}.$$

Veamos el siguiente resultado importante, que está en relación con la Definición 2.3.

Teorema 2.4. [10, Proposition 4.3.2, pág. 80] Si $\mathcal{C} = \mathbf{V}(f)$ es una curva irreducible con parametrización $\varphi_{\mathcal{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, donde denotemos $\frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f)} \simeq \mathbb{C}\{x(t), y(t)\} = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$. Entonces, para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, se cumple que cualquier elemento de $\mathbb{C}\{t\}$ de orden mayor que N pertenece al anillo analítico local de la curva $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$.

El siguiente teorema relaciona la Definición 1.13 con la Definición 2.3

La demostración de dicho Teorema fue desarrollada con las ideas del Doctor Mark Spivakovsky. Antes, veamos el siguiente ejemplo para entender mejor dichas ideas.

Ejemplo 2.5. Sean $\mathcal{C}_1 = \mathbf{V}(f)$ y $\mathcal{C}_2 = \mathbf{V}(g)$ dos curvas planas con $f = y^4 - 2y^2x^3 - 4yx^5 + x^6 - x^7$ y $g = x^2 - y^3$. Tomemos la parametrización de \mathcal{C}_1 , es decir, una aplicación $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}_1$ definida por $t \mapsto (t^4, t^6 + t^7)$. Entonces

$$8 = t^8 - (t^6 + t^7)^3 = \text{ord } g \circ \varphi_1 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(g \circ \varphi_1)}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)} &= \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(y^4(1 - 2yx - 4y^7x + y^9 - y^9x), x^2 - y^3)} \\ &= \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(y^4, x^2 - y^3)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)} = 8.$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f)} \simeq & \mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\} \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}\{t\} \\ & \downarrow \pi_1 & \downarrow \pi_2 \\ \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)} \simeq & \frac{\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}} \xrightarrow{\quad} & \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(g \circ \varphi_1)}. \end{array}$$

Probaremos que

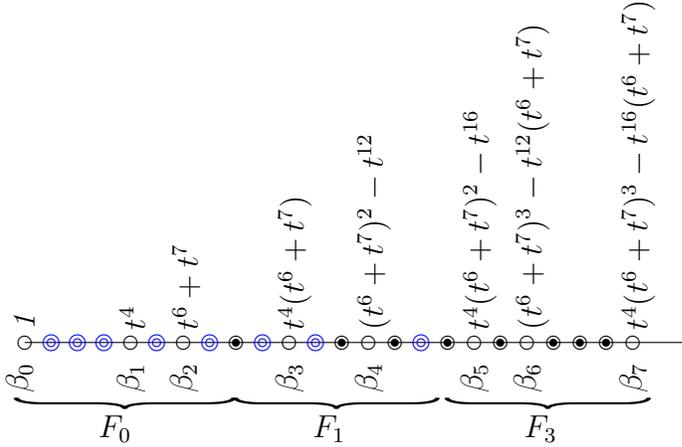
$$\frac{\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}} \simeq \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(g \circ \varphi_1)}$$

como \mathbb{C} -espacios vectoriales. Construiremos una aplicación lineal que mande bases en bases. Bastará en encontrar $B \subset \mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}$ tal que $B \sim \{1, t, t^2, \dots, t^7\} \subset \mathbb{C}\{t\}$. Denotemos por

$$E = \{n \mid \forall h \in \mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}, \text{ord } h \neq n\} \text{ y } D = \{\text{ord } h \mid h \in \mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}\}.$$

Observe que E representa los órdenes que no están en $\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}$ y D los que sí están.

En el siguiente diagrama representaremos los órdenes en intervalos de longitud 8,



$\circ \{n \in D \mid \forall m \in D \text{ con } m < n, n - m \notin \alpha\mathbb{Z}\}$

$\odot E$

$\bullet \{n \in D \mid \exists m \in D \text{ con } m < n, n - m \in \alpha\mathbb{Z}\}$

Con otras palabras, las circunferencias concéntricas que están de color de azul representan los ordenes que no están en $\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}$. La circunferencia representa los ordenes que aparecen por primera vez en $\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}$. Y finalmente, las circunferencias con un círculo pequeño en el centro son los ordenes que se pueden contruir con algún orden del bloque anterior al que se localizan estas.

Por otro lado, cada F_i recolecta una serie por cada orden que aparece por primera vez, ejemplo $F_2 = \{t^4(t^6 + t^7), (t^6 + t^7)^2 - t^{12}\}$. Por último los β_i representan los ordenes que aparecen por primera vez en cada bloque módulo 8. Definamos

$$B = F_0 \cup F_1 \cup F_2.$$

Note que el número de elementos que hay en B es la misma que $\{1, t, t^2, \dots, t^7\}$, esto es por la manera que se fueron eligiendo.

Probemos que $\pi_1(B)$ es un conjunto linealmente independiente en

$\frac{\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}}$. Primero veamos que $0 \notin \pi_1(B)$. Dado $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < 8$ entonces $0 \notin \pi_1(F_0)$.

Probemos que cada $h \in B$ con $\text{ord } h > 8$ se cumple que $h \neq (t^8 - (t^6 + t^7)^3)P$ para toda $P \in \mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}$. Sin pérdida de generalidad, tomemos $t^4(t^6 + t^7)^3 - t^{16}(t^6 + t^7) = 2t^{23} + 3t^{24} + t^{25} \in B$. Si $2t^{23} + 3t^{24} + t^{25} = P(t^8 - (t^6 + t^7)^3)$ para algún $P \in \mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}$, entonces $\text{ord } P = 15$, pero $\text{ord } P = 15 \in E$, lo que es una contradicción.

La prueba de que $\pi_1(B)$ es linealmente independiente es similar para probar que $0 \notin \pi_1(B)$.

Falta ver que $\pi_1(B)$ genera $\frac{\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}}$ como \mathbb{C} -espacio vectorial. Para eso consideremos el siguiente elemento $P = t^{10} + t^{11} + t^{12} \in \mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}$, observe que $t^{10} + t^{11} \in B$, el problema es t^{12} .

Tomemos $t^4(t^8 - (t^6 + t^7)^3) \in \mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}$, entonces

$$\text{ord } t^{12} < \text{ord } t^{12} - t^4(t^8 - (t^6 + t^7)^3) = \text{ord } t^4(t^6 + t^7)^3$$

y

$$\pi_1(t^{12}) = \pi_1(t^{12} - (t^4(t^8 - (t^6 + t^7)^3))) = \pi_1(t^4(t^6 + t^7)^3).$$

De la misma manera

$$t^4(t^6 + t^7)^3 - t^8(t^6 + t^7)(t^8 - (t^6 + t^7)^3) = 2t^{23} + 3t^{24} + t^{25} + t^8(t^6 + t^7)^4,$$

donde $t^8(t^6 + t^7)(t^8 - (t^6 + t^7)^3) \in \mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}$ y $2t^{23} + 3t^{24} + t^{25} \in B$. Entonces

$$\pi_1(t^4(t^6 + t^7)^3) = \pi_1(t^4(t^6 + t^7)^3 - t^8(t^6 + t^7)(t^8 - (t^6 + t^7)^3)) = \pi_1(2t^{23} + 3t^{24} + t^{25} + t^8(t^6 + t^7)^4).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \pi_1(P) &= \pi_1(t^{10} + t^{11}) + \pi_1(t^{12}) \\ &= \pi_1(t^{10} + t^{11}) + \pi_1(t^4(t^6 + t^7)^3) \\ &= \pi_1(t^{10} + t^{11}) + \pi_1(2t^{23} + 3t^{24} + t^{25} + t^8(t^6 + t^7)^4) \\ &= \pi_1(t^{10} + t^{11}) + \pi_1(2t^{23} + 3t^{24} + t^{25}) + \pi_1(t^8(t^6 + t^7)^4) \end{aligned}$$

Se prueba mas adelante que para algún $\mu \in \mathbb{N}$, se cumple que cualquier elemento en $\mathbb{C}\{t\}$ con orden mayor o igual que μ pertenece a $(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}$.

Entonces $\pi_1(t^8(t^6 + t^7)^4) = 0$, de esta manera

$$\pi_1(P) = \pi_1(t^{10} + t^{11}) + \pi_1(2t^{23} + 3t^{24} + t^{25})$$

Por lo tanto esto prueba que $\pi_1(B)$ es una base para $\frac{\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}}$, además de que

$$\frac{\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{t^4, t^6 + t^7\}} \simeq \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(g \circ \varphi_1)}.$$

Estas son las ideas que se utilizan para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.6. Sean $\mathcal{C}_1 = \mathbf{V}(f)$ y $\mathcal{C}_2 = \mathbf{V}(g)$ dos curvas planas. Si \mathcal{C}_1 es una curva analíticamente irreducible con parametrización $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $t \mapsto (x(t), y(t))$, entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(g \circ \varphi_1)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que $\frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f)} \simeq \mathbb{C}\{x(t), y(t)\} \xrightarrow{\varphi_1^*} \mathbb{C}\{t\}$ es un morfismo finito, porque $\mathbb{C}\{t\}$ es la normalización de $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$. Observando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f)} \simeq & \mathbb{C}\{x(t), y(t)\} & \xrightarrow{\quad} \mathbb{C}\{t\} \\ & \downarrow \pi_1 & \downarrow \pi_2 \\ \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)} \simeq & \frac{\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}} & \xrightarrow{\quad} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(g \circ \varphi_1)}, \end{array}$$

tenemos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}.$$

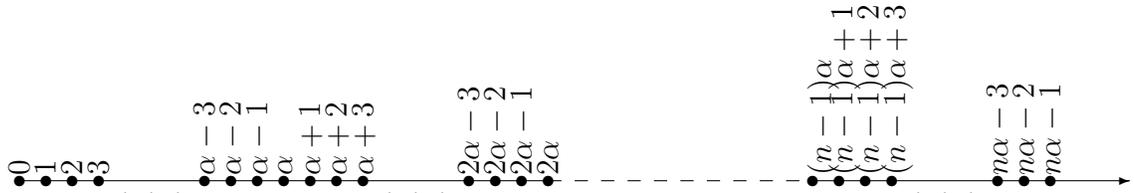
Sean $\alpha = \text{ord } g \circ \varphi_1$ y $H = \{t^i \mid i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}\}$, donde H determina una base para $\frac{\mathbb{C}\{t\}}{(g \circ \varphi_1)}$.

Como $\frac{\mathbb{C}\{t\}}{(g \circ \varphi_1)}$ y $\frac{\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}$ son espacios vectoriales de dimensión finita, bastará con construir $B \subset \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ con B y H biyectivos ($B \sim H$), tal que $\pi_1(B)$ es una base para $\frac{\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}$.

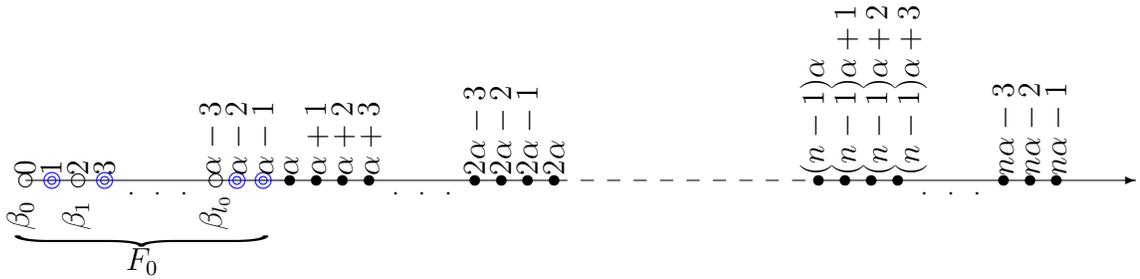
Denotemos por

$$E = \{n \mid \forall h \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}, \text{ord } h \neq n\} \text{ y } D = \{\text{ord } h \mid h \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}\}.$$

Observe que E representa los órdenes que no están en $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ y D los que sí están. Para cada $i \in D$, sea $A_i = \{h \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\} \mid \text{ord } h = i\}$. En el siguiente diagrama representaremos los órdenes en intervalos de longitud α .



Encontremos los órdenes que estén en $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ y $\{0, 1, \dots, \alpha - 1\}$, es decir, $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{l_0}\} = D \cap \{0, 1, \dots, \alpha - 1\}$. Fijando $h_{\beta_i} \in A_{\beta_i}$ para cada $\beta_i \in \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{l_0}\}$, se define $F_0 = \{h_{\beta_i} \mid \beta_i \in \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{l_0}\}\}$.



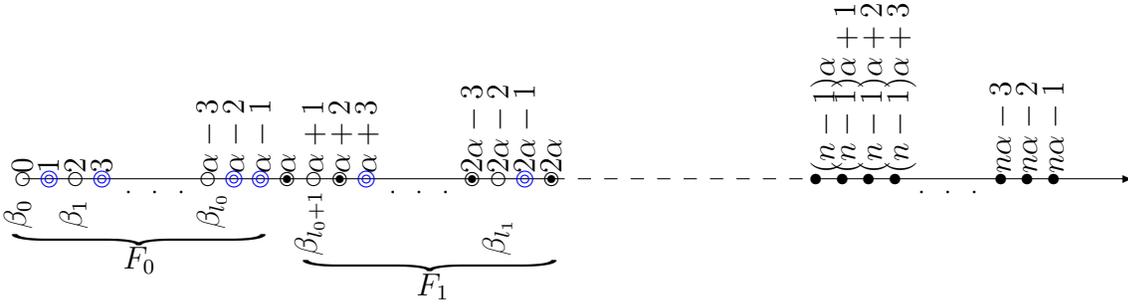
$$\circ \{n \in D \mid \forall m \in D \text{ con } m < n, n - m \notin \alpha\mathbb{Z}\}$$

⊙E

El conjunto $\{n \in D \mid \forall m \in D \text{ con } m < n, n - m \notin \alpha\mathbb{Z}\}$, que son los puntos blancos del esquema, describe los órdenes que aparecen por primera vez

en $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ en cada intervalo de longitud α . Recordemos que el conjunto E , representado por las circunferencias concéntricas azules en dicho esquema, son los órdenes que no aparecen en $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$.

Consideremos los elementos de $D \cap \{\alpha, \dots, 2\alpha - 1\}$ que no son de la forma $\alpha + \beta_i$ para $i \in \{0, \dots, l_0\}$, esto es, $\{\beta_{l_0+1}, \beta_{l_0+2}, \dots, \beta_{l_1}\} = \{\alpha + r_i \mid r_i \in E \cap \{0, 1, 2, \dots, \alpha - 1\}\} \cap D$. Fijemos $h_{\beta_i} \in A_{\beta_i}$ para cada $\beta_i \in \{\beta_{l_0+1}, \dots, \beta_{l_1}\}$ y definamos $F_1 = \{h_{\beta_i} \mid \beta_i \in \{\beta_{l_0+1}, \dots, \beta_{l_1}\}\}$.



$$\circ \{n \in D \mid \forall m \in D \text{ con } m < n, n - m \notin \alpha\mathbb{Z}\}$$

$$\odot E$$

$\bullet \{n \in D \mid \exists m \in D \text{ con } m < n, n - m \in \alpha\mathbb{Z}\}$
 Notemos ahora que el conjunto $\{n \in D \mid \exists m \in D \text{ con } m < n, n - m \in \alpha\mathbb{Z}\}$, que son los puntos blancos con un punto negro en el centro, describe los órdenes en $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ que se escriben como la suma de un orden en $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ y un múltiplo de α .

Continuando, para

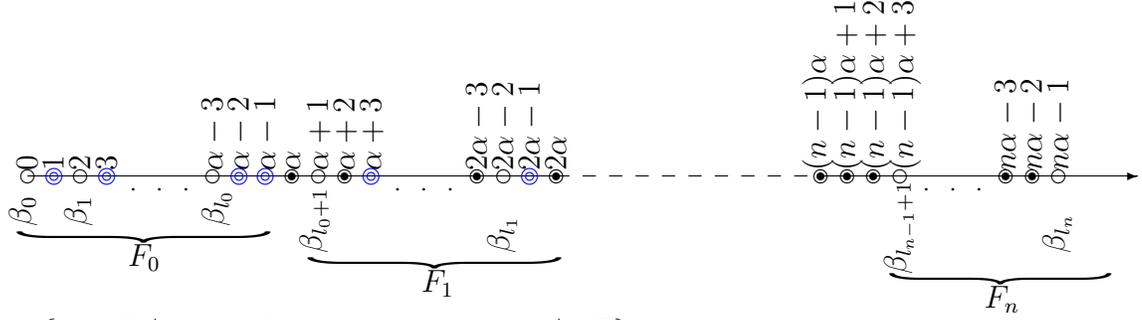
$$\{\beta_{l_1+1}, \beta_{l_1+2}, \dots, \beta_{l_2}\} = \{\alpha + s_i \mid s_i \in E \cap \{\alpha, \alpha + 1, \dots, 2\alpha - 1\}\} \cap D$$

y fijando $h_{\beta_i} \in A_{\beta_i}$ para cada $\beta_i \in \{\beta_{l_1+1}, \dots, \beta_{l_2}\}$, podemos definir $F_2 = \{h_{\beta_i} \mid \beta_i \in \{\beta_{l_1+1}, \dots, \beta_{l_2}\}\}$.

Inductivamente, obtenemos

$$\{\beta_{l_{n-1}+1}, \beta_{l_{n-1}+2}, \dots, \beta_{l_n}\} = \{\alpha + s_i \mid s_i \in E \cap \{(n-1)\alpha, (n-1)\alpha + 1, \dots, n\alpha - 1\}\} \cap D$$

y fijando $h_{\beta_i} \in A_{\beta_i}$ para cada $\beta_i \in \{\beta_{l_{n-1}+1}, \dots, \beta_{l_n}\}$, se define $F_n = \{h_{\beta_i} \mid \beta_i \in \{\beta_{l_{n-1}+1}, \dots, \beta_{l_n}\}\}$.



$$\circ \{n \in D \mid \forall m \in D \text{ con } m < n, n - m \notin \alpha\mathbb{Z}\}$$

$$\odot E$$

$$\bullet \{n \in D \mid \exists m \in D \text{ con } m < n, n - m \in \alpha\mathbb{Z}\}$$

En este punto

$$B = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$$

es un conjunto de series cuya imagen bajo la proyección

$$\pi_1 : \mathbb{C}\{x(t), y(t)\} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}$$

probaremos mas adelante que determinar un conjunto linealmente independiente. Primero veamos que B es la unión finita de F_i . Del Teorema 2.4, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cualquier elemento de $\mathbb{C}\{t\}$ de orden mayor a N pertenece a $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$. Para algún $m, r \in \mathbb{N}$ con $m < r$ se tiene $N = m\alpha + r$. Entonces existe $m_0 \geq m$ tal que

$$E \cap \{m_0\alpha, m_0\alpha + 1, \dots, (m_0 + 1)\alpha - 1\} = \emptyset.$$

Obtenemos $\{\alpha + s_i \mid s_i \in E \cap \{m_0\alpha, m_0\alpha + 1, \dots, (m_0 + 1)\alpha - 1\}\} \cap D = \emptyset$ y $F_{m_0+1} = \emptyset$. Por lo tanto, el proceso anterior es finito, así

$$B = \bigcup_{i=0}^{m_0} F_i.$$

Por construcción, para cada β_{l_k+i} con $k \in \{0, 1, 2, \dots, m_0\}$, la k determina al F_j al que pertenece la serie $h_{\beta_{l_k+i}}$; además, para algún r_{l_k+i} se tiene $\beta_{l_k+i} = (k+1)\alpha + r_{l_k+i}$. Recordemos también que $\beta_{l_k+i} = \alpha + s_{l_k+i}$ con $s_{l_k+i} \in E$. Veamos que existe una biyección entre B y H . Por construcción se obtiene, $l_{m_0} = \alpha - 1$. Denotemos por

$$T = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{l_0}, \beta_{l_0+1}, \dots, \beta_{l_1}, \beta_{l_1+1}, \dots, \beta_{l_2}, \beta_{l_2+1}, \dots, \beta_{l_3}, \dots, \beta_{l_{m_0}} = \beta_{\alpha-1}\}$$

el conjunto de los órdenes de B . Para cada $\beta_{l_k+i} \in T$ con $k \in \{0, 1, \dots, m_0\}$ se cumple que $\beta_{l_k+i} = (k+1)\alpha + r_{l_k+i}$ donde $0 \leq r_{l_k+i} < \alpha$, es decir, r_{l_k+i} es el residuo de β_{l_k+i} módulo α . Sea $\sigma : T \rightarrow \{0, 1, \dots, \alpha - 1\}$ la función definida como $\sigma(\beta_{l_k+i}) = r_{l_k+i}$. Veamos que σ es biyectiva. Supongamos lo contrario, es decir, σ no es inyectiva, entonces existen $k, n \in \{0, 1, \dots, m_0\}$ con $n < k$ tales que $\beta_{l_k+i} \neq \beta_{l_n+j}$ y $r_{l_k+i} = r_{l_n+j}$. Para algún $a \in \mathbb{Z}$ se tiene que $k = a + n$, así $\beta_{l_k+i} = (k+1)\alpha + r_{l_k+i} = (n+a+1)\alpha + r_{l_k+i} = a\alpha + \beta_{l_n+j}$, luego $\text{ord}(g \circ \varphi_1)^a h_{\beta_{l_n+j}} = \beta_{l_k+i}$. Por otro lado, $\text{ord}(g \circ \varphi_1)^{a-1} h_{\beta_{l_n+j}} = (a-1)\alpha + \beta_{l_n+j} = k\alpha + r_{l_k+i} = s_{l_k+i}$, entonces $s_{l_k+i} \in D$, pero esto es una contradicción porque $\beta_{l_k+i} = \alpha + s_{l_k+i}$ con $s_{l_k+i} \in E$. De esta manera cada $\beta_{l_k+i} \in T$ está en relación unívoca con su residuo r_{l_k+i} módulo α . Note que σ es suprayectiva por la forma en que se contruyeron los β_i . Por lo tanto, σ es biyectiva.

Definamos una función $\psi : B \rightarrow H$ como $\psi(h_{\beta_{l_k+i}}) = t^{\sigma(\beta_{l_k+i})} = t^{r_{l_k+i}}$, dado que ψ está en función de σ , entonces ψ es biyectiva, por lo tanto $B \sim H$.

Demostremos que la imagen de B bajo π_1 determina una base para $\frac{\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}$. Probemos que $\pi_1(B)$ es un conjunto linealmente independiente.

Notemos que $0 \notin \pi_1(B)$, es decir, para cualquier $h_{\beta_{l_k+i}} \in B$ y $P \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$

se cumple que $h_{\beta_{l_k+i}} \neq (g \circ \varphi_1)P$.

Dado que $\beta_1 < \dots < \beta_{l_0} < \alpha$ se tiene que $\{\pi_1(h_{\beta_0}), \dots, \pi_1(h_{\beta_{l_0}})\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\frac{\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}$. Entonces $0 \notin \{\pi_1(h_{\beta_0}), \dots, \pi_1(h_{\beta_{l_0}})\}$.

Sea $\beta_{l_k+i} \in T$ con $k \in \{0, 1, 2, \dots, m_0\}$, supongamos que $h_{\beta_{l_k+i}} = (g \circ \varphi_1)P$ para algún $P \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$. Como $\beta_{l_k+i} = \alpha + s_{l_k+i}$ con $s_{l_k+i} \in \{k\alpha, k\alpha + 1, \dots, (k+1)\alpha - 1\} \cap E$, así $\text{ord } P = s_{l_k+i}$. Entonces $P \notin \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$, lo cual es una contradicción al hecho de que $P \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$. De esta manera, para cada $\beta_{l_k+i} \in T$ con $k \in \{0, 1, \dots, m_0\}$ se cumple que $\pi_1(h_{\beta_{l_k+i}}) \neq 0$. Por lo tanto $0 \notin \pi_1(B)$.

Ahora consideremos una combinación lineal de los elementos de $\pi(B)$, Sean $a_0, a_1, \dots, a_{\alpha-1} \in \mathbb{C}$ tales que $\sum_{i=0}^{\alpha-1} a_i \pi_1(h_{\beta_i}) = 0$, probemos que $a_0 = \dots = a_{\alpha-1} = 0$. Como $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{l_0} < \alpha$, entonces $a_0 = \dots = a_{l_0} = 0$, así

$$\sum_{i=0}^{\alpha-1} a_i \pi_1(h_{\beta_i}) = \sum_{i=l_0+1}^{\alpha-1} a_i \pi_1(h_{\beta_i}) = 0.$$

Supongamos que $a_{l_0+1} \neq 0$, luego $\text{ord } \sum_{i=l_0+1}^{\alpha-1} a_i h_{\beta_i} = \beta_{l_0+1} = \alpha + r_{l_0+1}$ con $r_{l_0+1} \in \{0, 1, 2, \dots, \alpha - 1\} \cap E$. Por otro lado, para algún $P \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$, $\sum_{i=l_0+1}^{\alpha-1} a_i h_{\beta_i} = (g \circ \varphi_1)P$ donde $\text{ord } P = r_{l_0+1}$, lo cual es una contradicción, porque $r_{l_0+1} \in \{0, 1, 2, \dots, \alpha - 1\} \cap E$, así $a_{l_0+1} = 0$. Entonces

$$0 = \sum_{i=l_0+1}^{\alpha-1} a_i \pi_1(h_{\beta_i}) = \sum_{i=l_0+2}^{\alpha-1} a_i \pi_1(h_{\beta_i}).$$

Ahora supongamos que $a_{l_0+2} \neq 0$, así $\text{ord } \sum_{i=l_0+2}^{\alpha} a_i h_{\beta_i} = \beta_{l_0+2} = \alpha + s_{l_0+2}$ con $s_{l_0+2} \in \{0, 1, 2, \dots, \alpha - 1\} \cap E$. Como $0 = \sum_{i=l_0+2}^{\alpha-1} a_i \pi_1(h_{\beta_i})$, entonces

$\sum_{i=l_0+2}^{\alpha} a_i h_{\beta_i} = (g \circ \varphi_1)P$ para algún $P \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$. Esto último es una

contradicción, porque $s_{l_0+2} \in \{0, 1, 2, \dots, \alpha - 1\} \cap E$, así $a_{l_0+2} = 0$. Con argumentos parecidos a lo anterior, para cada β_{l_k+i} con $k \in \{0, 1, \dots, m_0 - 1\}$ se cumple que $a_{l_k+i} = 0$. Entonces $a_0 = \dots = a_{\alpha-1} = 0$, por lo tanto $\pi_1(B)$ es linealmente independiente.

Veamos que $\pi_1(B)$ genera $\frac{\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}$ como \mathbb{C} -espacio vectorial. Observemos el siguiente lema, el cual se probará más adelante:

Lema 2.7. *Existe $\mu_0 \in \mathbb{N}$ tal que cualquier serie en $\mathbb{C}\{t\}$, con orden mayor a μ_0 , pertenece al ideal $(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$.*

Por el lema 2.7, existe μ_0 para el cual si $P \in \mathbb{C}\{t\}$ con $\text{ord } P \geq \mu_0$ se tiene que $\pi_1(P) = 0$. Por lo tanto bastará probar que cualquier serie en $\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ de orden menor a μ_0 es generada por los elementos de $\pi_1(B)$ o es cero en $\frac{\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}$. Antes, observemos el siguiente lema, que nos ayudará a probar lo anteriormente mencionado y que se demostrará más adelante:

Lema 2.8. *Si $Q \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ con $\text{ord } Q = \alpha + s_Q$, entonces existe $C \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ tal que $\text{ord } Q < \text{ord } (Q - C(g \circ \varphi_1))$.*

Note que $\pi_1(Q) = \pi_1(Q - C(g \circ \varphi_1))$, y este proceso se puede repetir hasta llegar a

$$\text{ord} \left(Q - \left(\sum_{i=0}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \right) > \mu_0 \text{ ó } \text{ord} \left(Q - \left(\sum_{i=0}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \right) \in T$$

para algunos $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$. En otras palabras, podemos construir series cuya imagen bajo π_1 es cero o su orden es un elemento de T .

Veamos que para cualquier $P \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ con $\text{ord } P = \lambda < \mu_0$ se cumple lo siguiente:

$$\pi_1(P) \in \text{span}(\pi_1(B)) \text{ ó } \pi(P) = 0.$$

Sea $P \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ con $\text{ord } P = \lambda < \mu_0$, entonces $\lambda \in T$ o $\lambda \in D \setminus T$.

Cuando $\lambda \in D \setminus T$, del Lema 2.8 existen $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ tales que

$$\lambda < \text{ord} \left(P - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right), \text{ así}$$

$$\text{ord} \left(P - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \in T \text{ ó } \text{ord} \left(P - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \geq \mu_0.$$

Si $\text{ord} \left(P - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \geq \mu_0$, se tiene

$$\pi_1(P) = \pi_1 \left(P - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) = 0.$$

En el caso de que $\text{ord} \left(P - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \in T$, bastará analizar cuando $\lambda \in T$, porque $\pi_1(P) = \pi_1 \left(P - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right)$.

Cuando $\lambda \in T$, existe $h_\lambda \in B = \left(\bigcup_{i=0}^{m_0} F_i = \{h_{\beta_i} \mid \beta_i \in T\} \right)$, tal que para algún $a_\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene $\lambda_1 = \text{ord} (P - a_\lambda h_\lambda) > \lambda$. Denotando $P_1 = P - a_\lambda h_\lambda$, podemos escribir $P = a_\lambda h_\lambda + P_1$. Observemos que $\lambda_1 \geq \mu_0$ ó $\lambda_1 < \mu_0$.

Si $\lambda_1 \geq \mu_0$, entonces $\pi_1(P) = \pi_1(a_\lambda h_\lambda + P_1) = a_\lambda \pi_1(h_\lambda)$, así $\pi_1(P) \in \text{span}(\pi_1(B))$. En caso contrario, es decir, $\lambda_1 < \mu_0$, se tiene $\lambda_1 \in T$ ó $\lambda_1 \in D \setminus T$.

Primero, analicemos el caso cuando $\lambda_1 \in D \setminus T$. Por el Lema 2.8 existen $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ tales que $\lambda_1 < \text{ord} \left(P_1 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right)$, entonces

$$\text{ord} \left(P_1 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \in T \text{ ó } \text{ord} \left(P_1 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \geq \mu_0.$$

Si $\text{ord} \left(P_1 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \geq \mu_0$, se sigue

$$\begin{aligned} \pi_1(P) &= \pi_1(a_\lambda h_\lambda + P_1) \\ &= a_\lambda \pi_1(h_\lambda) + \pi \left(P_1 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \\ &= a_\lambda \pi(h_\lambda), \end{aligned}$$

por lo tanto, $\pi_1(p) \in \text{span}(\pi_1(B))$.

Ahora si $\text{ord} \left(P_1 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \in T$, será suficiente analizar cuando

$\lambda_1 \in T$.

Si $\lambda_1 \in T$, existen $h_{\lambda_1} \in B$ y $a_{\lambda_1} \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda_2 = \text{ord}(P_1 - a_{\lambda_1} h_{\lambda_1}) > \lambda_1$, así $\lambda_2 \geq \mu_0$ ó $\lambda_2 < \mu_0$. Denotemos $P_2 = P_1 - a_{\lambda_1} h_{\lambda_1}$, entonces $P_1 = a_{\lambda_1} h_{\lambda_1} + P_2$, luego $P = a_\lambda h_\lambda + a_{\lambda_1} h_{\lambda_1} + P_2$.

Si $\lambda_2 \geq \mu_0$, se tiene

$$\begin{aligned} \pi_1(P) &= \pi_1(a_\lambda h_\lambda + a_{\lambda_1} h_{\lambda_1} + P_2) \\ &= a_\lambda \pi_1(h_\lambda) + a_{\lambda_1} \pi_1(h_{\lambda_1}), \end{aligned}$$

así $\pi_1(P) \in \text{span}(\pi_1(B))$. En caso contrario ($\lambda_2 < \mu_0$), o bien $\lambda_2 \in T$ ó $\lambda_2 \in D \setminus T$. Supongamos que $\lambda_2 \in D \setminus T$. Por el Lema 1.16 existen $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ tales que $\lambda_2 < \text{ord}\left(P_2 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1)\right)$, así

$$\text{ord}\left(P_2 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1)\right) \in T \text{ ó } \text{ord}\left(P_2 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1)\right) \geq \mu_0.$$

Si $\text{ord}\left(P_2 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1)\right) \geq \mu_0$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_1(P) &= \pi_1(a_\lambda h_\lambda + a_{\lambda_1} h_{\lambda_1} + P_2) \\ &= a_\lambda \pi_1(h_\lambda) + a_{\lambda_1} \pi_1(h_{\lambda_1}) + \pi_1\left(P_2 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1)\right) \\ &= a_\lambda \pi_1(h_\lambda) + a_{\lambda_1} \pi_1(h_{\lambda_1}), \end{aligned}$$

por lo tanto, $\pi_1(p) \in \text{span}(\pi_1(B))$.

El caso cuando $\text{ord}\left(P_2 - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1)\right) \in T$, se reduce a analizar cuando $\lambda_2 \in T$ repitiendo el proceso anterior.

Por construcción, observe que si $i < j$ se tiene $\lambda_i < \lambda_j$. Observe que el procedimiento anterior se puede repetir una cantidad finita de veces, porque $\lambda_i \in T$ donde T es un conjunto finito. Además, para algún $n \in \mathbb{N}$, $\text{ord}\left(P_{n+1} - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1)\right) > \mu_0$ donde $P_{n+1} - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1)$ es determinado por el procedimiento anterior y el Lema 2.8. Considerando $\{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset$

T como las construidas anteriormente, es decir, $\lambda < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \leq \beta_{l_{m_0}}$ donde $\lambda = \text{ord } P$ y $\lambda_i = \text{ord } P_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, con λ_n el máximo orden que podemos construir en P . Así $\text{ord } P_{n+1} \notin T$, luego $\text{ord } P_{n+1} \geq \mu_0$ ó $\text{ord } P_{n+1} < \mu_0$. Si $\text{ord } P_{n+1} \geq \mu_0$ se terminó la demostración. En caso de que $\text{ord } P_{n+1} < \mu_0$, por el Lema 2.8, existen $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ tales que $\lambda_n < \text{ord} \left(P_{n+1} - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right)$, entonces

$$\text{ord} \left(P_{n+1} - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \in T \text{ ó } \text{ord} \left(P_{n+1} - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \geq \mu_0.$$

Notemos que $\text{ord} \left(P_{n+1} - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \in T$ es imposible, porque $\lambda_n < \text{ord} \left(P_{n+1} - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right)$. Así $\text{ord} \left(P_{n+1} - \sum_{i=1}^n C_i(g \circ \varphi_1) \right) \geq \mu_0$. Por lo tanto los λ_i determinan un conjunto finito en T .

Esto prueba que $\pi_1(P) \in \text{span}(\pi_1(B))$.

Entonces $\pi_1(B)$ es una base para el \mathbb{C} -espacio vectorial $\frac{\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}{(g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}}$.

Por lo tanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(g \circ \varphi_1)}.$$

□

Demostración del **Lema 2.7**. Consideremos $\mu_0 = N + \alpha$ con N como en el Teorema 2.4 y $P \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ con $\text{ord } P = \lambda \geq \mu_0$. Observemos que $g \circ \varphi_1 = t^\alpha u_{g \circ \varphi_1}$ y $P = t^\lambda u_P$ en $\mathbb{C}\{t\}$ donde $u_{g \circ \varphi_1}$ y u_P son unidades en $\mathbb{C}\{t\}$. Así

$$\begin{aligned} P &= t^\alpha t^{\lambda-\alpha} u_P \\ &= t^\alpha u_{g \circ \varphi_1} t^{\lambda-\alpha} \frac{u_P}{u_{g \circ \varphi_1}} \\ &= g \circ \varphi_1 t^{\lambda-\alpha} \frac{u_P}{u_{g \circ \varphi_1}}, \end{aligned}$$

luego $\text{ord} t^{\lambda-\alpha} \frac{u_P}{u_{g \circ \varphi_1}} = \lambda - \alpha \geq N$, de esta manera $t^{\lambda-\alpha} \frac{u_P}{u_{g \circ \varphi_1}} \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$.

Finalmente, $P \in (g \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$.

Ahora probaremos el **Lema 2.8**. Sea $Q \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ con $\text{ord } Q = \alpha + s_Q$ donde $s_Q \in D \cap \{k\alpha, k\alpha + 1, \dots, (k+1)\alpha - 1\}$. Como $s_Q \in D \cap \{k\alpha, k\alpha + 1, \dots, (k+1)\alpha - 1\}$, existe $H \in \mathbb{C}\{x(t), y(t)\}$ tal que $\text{ord } H = s_Q$, entonces $\text{ord } (g \circ \varphi_1)H = \text{ord } Q$. Por otro lado, tomemos $a, b \in \mathbb{C}$ con $a, b \neq 0$ los coeficientes iniciales de Q y $g \circ \varphi_1 H$ respectivamente, definiendo $H' = \frac{aH}{b}$, el coeficiente del monomio inicial de $(g \circ \varphi_1)H'$ es a , así $\text{ord } Q < \text{ord } (Q - H'(g \circ \varphi_1))$.

Observación 2.9. Si las dos curvas planas son analíticamente irreducibles, el número de intersección definido en el capítulo anterior y los órdenes de $g \circ \varphi_{\mathcal{C}_1}$ y $f \circ \varphi_{\mathcal{C}_2}$ son iguales, es decir:

$$\text{ord } g \circ \varphi_{\mathcal{C}_1} = I(p, \mathbf{V}(f) \cap \mathbf{V}(g)) = \text{ord } f \circ \varphi_{\mathcal{C}_2},$$

esto es por la propiedad conmutativa del número de intersección, entonces $\text{ord } g \circ \varphi_{\mathcal{C}_1} = \text{ord } f \circ \varphi_{\mathcal{C}_2}$.

2.2 Número de intersección de curvas en una Superficie

En esta sección se busca generalizar propiedades y resultados sobre el número de intersección en el plano, las cuales vimos en el Capítulo 1 y la sección anterior. Analicemos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.10. Sean $\mathbf{V}(f_1, f_2) = \mathcal{C}_1$ y $\mathbf{V}(g_1, g_2) = \mathcal{C}_2$ dos curvas en \mathbb{C}^3 , donde $f_1 = y^3 - z^5$, $f_2 = x^2 + 2y^3$, $g_1 = z$ y $g_2 = y^2 - x^7$. Observe que:

$$\frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(y^3 - z^5, x^2 + 2y^3, y^2 - x^7)} \simeq \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x^2, y^2 - x^7)} \simeq \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x^2, y^2)}$$

Entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(y^3 - z^5, x^2 + 2y^3, z, y^2 - x^7)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x^2, y^2)} = 4$$

2.2. NÚMERO DE INTERSECCIÓN DE CURVAS EN UNA SUPERFICIE 35

Tomemos la parametrización de \mathcal{C}_1 , es decir, una aplicación $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por $t \mapsto (\sqrt{2}t^{15}, -t^{10}, -t^6)$. Esta parametrización define un morfismo de anillos $\varphi_1^* : \mathbb{C}\{x, y, z\} \rightarrow \mathbb{C}\{t\}$ de la siguiente manera: $g \mapsto \varphi_1^*(g) = g \circ \varphi_1$. Así $\varphi_1^*(g_1) = -t^6$ y $\varphi_1^*(g_2) = t^{20} - \sqrt{2}^7 t^{105}$, luego

$$\min\{\text{ord } g_1 \circ \varphi_1, \text{ord } g_2 \circ \varphi_1\} = 6 \neq 4.$$

Por otro lado, consideremos la parametrización de \mathcal{C}_2 , definida como $\varphi_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ donde $t \mapsto (t^2, -t^7, 0)$. Obtenemos el morfismo de anillos $\varphi_2^* : \mathbb{C}\{x, y, z\} \rightarrow \mathbb{C}\{t\}$ definido por $f \mapsto \varphi_2^*(f) = f \circ \varphi_2$. Entonces $\varphi_2^*(f_1) = t^{21}$ y $\varphi_2^*(f_2) = t^4 - 2t^{21} = t^4(1 - 2t^{17})$, luego

$$\min\{\text{ord } f_1 \circ \varphi_2, \text{ord } f_2 \circ \varphi_2\} = 4.$$

Esto último coincide con $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(f_1, f_2, g_1, g_2)}$.

Este ejemplo dice que el Teorema 2.6 no es válido en \mathbb{C}^n cuando $n > 2$. Esto se debe al espacio “extra” que se tiene. Como la Definición 1.13 y la Definición 2.3 dejan de ser iguales, nos preguntamos

¿qué es un número de intersección en \mathbb{C}^n para $n > 2$?

y

¿cuál de las dos determina un número de intersección?

Para evitar las preguntas anteriores, nos enfocaremos a encontrar condiciones para que el Teorema 2.6 se cumpla.

A diferencia del plano complejo, las curvas de la superficie $S \subset \mathbb{C}^n$ no solo son determinadas por una función, sino por un ideal. Así que nos limitaremos a una función y un ideal primo, es decir, sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ dos curvas en S donde $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,0} = \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{\mathfrak{p}}$ con \mathfrak{p} un ideal primo y $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2,0} = \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(G)}$ con $G \in \mathcal{O}_{S,0}$, donde $\mathcal{O}_{S,0}$ es el anillo analítico local de la superficie S y $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_i,0}$ es el anillo analítico local de la curva \mathcal{C}_i .

Además, consideraremos que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 no tienen componentes en común, es decir, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = 0$. Entonces (\mathfrak{p}, G) es un ideal \mathfrak{m}_S -primario, donde \mathfrak{m}_S es el ideal maximal del anillo $\mathcal{O}_{S,0}$.

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.11. *Tomemos la superficie $V(zx, zy) = S \subset \mathbb{C}^3$. Consideremos el ideal $(x - y, z) \subset \mathcal{O}_{S,0}$ y la función $G = x \in \mathcal{O}_{S,0}$. Note que*

$$\frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(x - y, z)} \simeq \mathbb{C}\{x\}$$

que es un dominio entero, por lo que $(x - y, z)$ es un ideal primo en $\mathcal{O}_{S,0}$. Sea $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}_1$ una parametrización de $\mathcal{C}_1 = V(x - y, z) \subset S$ definida como $\varphi_1(t) = (t, t, 0)$, así el $\text{ord } x(\varphi_1(t)) = \text{ord } t = 1$. Por otro lado

$$\frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(x - y, z, x)} = \mathbb{C}$$

así

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(x - y, z, x)} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\text{ord } x(\varphi_1(t)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(x - y, z)}.$$

Observe que en el Ejemplo 2.11 no se necesitaron condiciones para la superficie, se llegó a la conclusión solo tomando un ideal primo y una función en el anillo asociado a la superficie.

Una de las herramientas que nos ayudarán a probar un resultado similar al Teorema 2.6 es la multiplicidad de un ideal \mathfrak{m} -primario en un anillo. Para entender mejor el Ejemplo 2.11 recordemos algunos conceptos antes.

Definición 2.12. *Decimos que un R -módulo $M \neq 0$ es simple si no tiene submódulos distintos a 0 y M .*

Definición 2.13. *Sea R un anillo y M un R -módulo. Una cadena*

2.2. NÚMERO DE INTERSECCIÓN DE CURVAS EN UNA SUPERFICIE 37

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_r = 0$$

de submódulos de M es llamada una serie de composición de M si todo M_i/M_{i+1} es simple; r es llamado la longitud de la serie de composición, lo cual denotamos como $l(M)$.

Las siguientes observaciones se encuentran en [7].

Observación 2.14.

- a) Si una serie de composición M existe, su longitud es un invariante de M e independiente de la elección de la serie.
- b) Si M no tiene una serie de composición, entonces $l(M) = \infty$.
- c) La existencia de una serie de composición en M es equivalente a que M satisface las condición de cadena ascendente y descendente.
- d) Si $N \subset M$ es un submódulo, tenemos $l(M) = l(N) + l(M/N)$

Continuando, como $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_{S,0}$ es un ideal primo, definamos $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}_1 \subset S$ una parametrización de \mathcal{C}_1 como $\varphi_1(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. Lo cual nos lleva al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{\mathfrak{p}} \simeq & \mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} & \hookrightarrow \mathbb{C}\{t\} \\ & \downarrow \pi_1 & \downarrow \pi_2 \\ \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(\mathfrak{p}, G)} \simeq & \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,0}}{(G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}} & \longrightarrow \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(G \circ \varphi_1)}. \end{array}$$

Note que $\mathbb{C}\{t\}$ es un $\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ -módulo finito, por que $\mathbb{C}\{t\}$ es la normalización de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,0}$. Además, (\mathfrak{p}, G) es un ideal \mathfrak{m}_S -primario con \mathfrak{m}_S el ideal maximal de $\mathcal{O}_{S,0}$, por Nullstellensatz. Así $(G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ es un ideal $\mathfrak{m}_{\mathcal{C}_1}$ -primario, por que $\pi : \mathcal{O}_{S,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,0}$ es la proyección canónica.

Ahora toca definir un concepto que es necesario para poder continuar, la multiplididad de un ideal \mathfrak{m} -primario en un (R, \mathfrak{m}) anillo local Noetheriano. En [7] y [9] desarrollan este concepto con módulos. Como este trabajo no se especializa en dicho concepto, solo usaremos algunos resultados. Todas las hipótesis presentes en dichas referencias se cumplen en nuestro trabajo.

Proposición 2.15. *Si (R, \mathfrak{m}) es un anillo Artiniano local, entonces $l\left(\frac{M}{\mathfrak{q}^{n+1}M}\right) < \infty$, donde l denota la longitud de un R -módulo y \mathfrak{q} es un ideal \mathfrak{m} -primario.*

Definición 2.16. *Considerando las condiciones de la Proposición 2.15. Se define la serie de Hilbert $P(M, t)$ de M por la fórmula:*

$$P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} l\left(\frac{M}{\mathfrak{q}^{n+1}M}\right) t^n \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Teorema 2.17. [1, Teorema 11.1, pág. 132] *La serie de Hilbert $P(M, t)$ es una función racional en t de la forma*

$$\frac{f(t)}{\prod_{i=1}^r (1 - t^{d_i})}$$

donde $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Observación 2.18. *Especialmente simple es el caso $d_1 = \dots = d_r = 1$, tenemos $P(M, t) = f(t)(1 - t)^{-r}$; si $f(t)$ tiene a $(1 - t)$ como un factor, podemos cancelarlo, escribiendo a $P(M, t)$ como*

$$P(M, t) = f(t)(1 - t)^{-d} \text{ con } f \in \mathbb{Z}[t] \text{ y } d \geq 0,$$

y si $d > 0$ entonces $f(1) \neq 0$. Escribiendo $d = d(M)$, así

$$(1 - t)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} t^n. \quad (2.1)$$

Note que el orden del polo $P(M, t)$ en $t = 1$ se designará por $d(M)$. Este proporciona una medida del “tamaño” de M .

2.2. NÚMERO DE INTERSECCIÓN DE CURVAS EN UNA SUPERFICIE 39

Corolario 2.19. [1, Corolario 11.2, pág. 132] *Si cada $d_i = 1$, entonces para todo n suficientemente grande, la longitud de un módulo es un polinomio en “ n ” de grado $d - 1$ con coeficientes racionales.*

Observación 2.20. *Sean (R, \mathfrak{m}) un anillo local d -dimensional, M un R -módulo finito y \mathfrak{q} un ideal \mathfrak{m} -primario de R . Del Corolario 2.19*

$$l\left(\frac{M}{\mathfrak{q}^{n+1}M}\right) = \frac{e}{d!}n^d + (\text{términos de menor orden}),$$

con $e \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.21. *Con las condiciones de la observación anterior, notemos e como $e(\mathfrak{q}, M)$. Ahora $e(\mathfrak{q}, R) = e(\mathfrak{q})$ se define como la multiplicidad de \mathfrak{q} . Además, nos referiremos a la multiplicidad $e(\mathfrak{m})$ del ideal maximal como la multiplicidad del anillo local R .*

Definición 2.22. *Si M es un R -módulo definamos la dimensión de M por*

$$\dim_{krull} M = \dim_{krull}\left(\frac{R}{ann(M)}\right)$$

Este número tiene las siguientes propiedades.

- 1) $e(\mathfrak{q}, M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d!}{n^d} l\left(\frac{M}{\mathfrak{q}^n M}\right)$. En particular si $d = 0$ entonces $e(\mathfrak{q}, M) = l(M)$.
- 2) $e(\mathfrak{q}, M) > 0$ si $\dim_{krull} M = d$, y $e(\mathfrak{q}, M) = 0$ si $\dim_{krull} M < d$;
- 3) $e(\mathfrak{q}^r, M) = e(\mathfrak{q}, M)r^d$;
- 4) si \mathfrak{q} y \mathfrak{q}' son ideales \mathfrak{m} -primarios y $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}'$ entonces $e(\mathfrak{q}, M) \leq e(\mathfrak{q}', M)$.

Una interpretación geométrica de este concepto es tomar un variedad analítica en \mathbb{C}^n de dimensión d y un espacio lineal de codimensión complementaria a este, ambos ubicados en el origen. Consideremos que el espacio lineal no sea tangente a la variedad y para un $\epsilon > 0$, perturbemos dicho espacio

lineal. La intersección de este espacio lineal paralelo al ubicado en el origen y la variedad es un número finito de puntos, el cual coincide con la multiplicidad del ideal maximal en la variedad. Esta interpretación tiene sentido en el ambito local, en particular el analítico local.

El siguiente resultado nos ayudará a probar que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(\mathfrak{p}, G)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(G \circ \varphi_1)}.$$

Definición 2.23. *El rango de un módulo M sobre un dominio entero R es el número maximo de elementos de M linealmente independientes sobre R .*

Teorema 2.24. [7, Teorema 14.8, pág. 109] *Sean (R, \mathfrak{m}) un dominio entero Noetheriano local, \mathfrak{q} un ideal \mathfrak{m} -primario en R y M un R -módulo finito; entonces*

$$e(\mathfrak{q}, M) = e(\mathfrak{q})s$$

donde $s = \text{rank } M$.

Recordemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{\mathfrak{p}} \simeq & \mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \hookrightarrow & \mathbb{C}\{t\} \\ & \downarrow \pi_1 & \downarrow \pi_2 \\ \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(\mathfrak{p}, G)} \simeq & \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_1,0}}{(G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}} \longrightarrow & \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(G \circ \varphi_1)}. \end{array}$$

Tenemos que $\mathbb{C}\{t\}$ es un $\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ -módulo finito, (\mathfrak{p}, G) es un ideal \mathfrak{m}_S -primario y $(G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ es un ideal $\mathfrak{m}_{\mathcal{E}_1}$ -primario.

Del Teorema 2.24 se tiene que

$$e((G \circ \varphi_1), \mathbb{C}\{t\}) = e((G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\})s$$

donde $s = \text{rank } \mathbb{C}\{t\}$.

Veamos que el rango de $\mathbb{C}\{t\}$ es 1. Notemos que t es linealmente independiente en $\mathbb{C}\{t\}$ como $\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ -módulo, porque para cualquier $p \in$

2.2. NÚMERO DE INTERSECCIÓN DE CURVAS EN UNA SUPERFICIE 41

$\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ distinto de cero, $tp \neq 0$ en $\mathbb{C}\{t\}$. Sea $\{t, q\} \subset \mathbb{C}\{t\}$, probemos que no es un conjunto linealmente independiente. Sean $\beta = \text{ord } q$ y para algún $N \in \mathbb{N}$ tenemos que para toda serie de orden mayor a N pertenece a $\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$. Tomemos $f \in \mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ tal que $\text{ord } f = N + 1$. Definamos $h = \frac{fq}{t}$, entonces $\text{ord } h = N + \beta$, luego $h \in \mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$, así

$$t(-h) + fq = -th + fq = -fq + fq = 0,$$

entonces el rango de $\mathbb{C}\{t\}$ como $\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ -módulo es 1. Por lo tanto,

$$e((G \circ \varphi_1), \mathbb{C}\{t\}) = e((G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}).$$

Por Nullstellensatz, $\frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(\mathfrak{p}, G)}$ y $\frac{\mathbb{C}\{t\}}{(G \circ \varphi_1)}$ son espacios vectoriales de dimensión finita, así

$$l\left(\frac{\mathbb{C}\{t\}}{(G \circ \varphi_1)}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(G \circ \varphi_1)} \quad (2.2)$$

y

$$\begin{aligned} l\left(\frac{\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}}{(G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}}\right) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}}{(G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(\mathfrak{p}, G)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Con lo anterior, veamos algunos resultados que relacionan la longitud de un módulo y la multiplicidad de un ideal \mathfrak{m} -primario en un anillo.

Teorema 2.25. *Sean (R, \mathfrak{m}) un anillo Noetheriano local d -dimensional, x_1, \dots, x_d un sistema de parámetros de R y $\mathfrak{q} = (x_1, \dots, x_d)$; entonces*

$$l\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right) \geq e(\mathfrak{q}),$$

y si además $x_i \in \mathfrak{m}^\nu$ para todo i , entonces $l\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right) \geq \nu^d e(\mathfrak{m})$.

Necesitamos la igualdad, para esto veamos los siguientes conceptos.

Definición 2.26. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo Noetheriano local r -dimensional. Si $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$ genera un ideal \mathfrak{m} -primario, $\{a_1, \dots, a_r\}$ se llama un **sistema de parámetros** de R .

Definición 2.27. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo Noetheriano local r -dimensional. Un ideal de R se llama un ideal de parámetros si es generado por un sistema de parámetros.

Para mayor información de los siguientes conceptos se puede encontrar en [2]

Definición 2.28. Sea (R, \mathfrak{m}) es un anillo local

1. Una sucesión f_1, \dots, f_r de elementos en \mathfrak{m} es llamada una sucesión regular si f_1 no es un divisor de cero de R , y f_i no es un divisor de cero de $\frac{R}{(f_1, \dots, f_{i-1})R}$ para $i = 2, 3, \dots, r$.
2. La profundidad de R , $\text{depth}(R)$ es la longitud maximal de una sucesión regular. Está bien definida.
3. Un anillo R es llamado **Cohen-Macaulay**, si la profundidad de R es igual a la dimensión de R .

Teorema 2.29. [2, Teorema 2.1.3, pág. 58] Sean R un anillo Noetheriano local y $f \in R$ no es un divisor de cero de R , entonces

R es Cohen-Macaulay si y solo si $\frac{R}{(f)}$ es un Cohen-Macaulay.

Teorema 2.30. [7, Teorema 17.11, pág. 138] Las siguientes condiciones sobre anillos Noetherianos locales (R, \mathfrak{m}) son equivalentes:

- 1) R es un anillo Cohen-Macaulay;
- 2) $e(\mathfrak{q}) = l\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)$ para cualquier ideal de parámetros \mathfrak{q} de R ;

2.2. NÚMERO DE INTERSECCIÓN DE CURVAS EN UNA SUPERFICIE 43

3) $e(\mathfrak{q}) = l\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)$ para algún ideal de parámetros \mathfrak{q} de R .

Como $(G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ es un ideal $\mathfrak{m}_{\mathcal{C}_1}$ -primario, entonces es un ideal de parámetros en $\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$. Del mismo modo tenemos que $(G \circ \varphi_1)$ es un ideal de parámetros en $\mathbb{C}\{t\}$. Además, $\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ es un anillo Cohen-Macaulay porque $\frac{\mathcal{O}_{S,0}}{\mathfrak{p}} \simeq \mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ con \mathfrak{p} un ideal primo en $\mathcal{O}_{S,0}$ y $\dim_{krull} \mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,0} = 1$. Por el Teorema 2.30, obtenemos que

$$\begin{aligned} l\left(\frac{\mathbb{C}\{t\}}{(G \circ \varphi_1)}\right) &= e((G \circ \varphi_1), \mathbb{C}\{t\}) \\ &= e((G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}) \\ &= l\left(\frac{\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}}{(G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}}\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

De las ecuaciones 2.2, 2.3 y 2.4 tenemos

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(\mathfrak{p}, G)} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,0}}{(G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}} \\ &= l\left(\frac{\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}}{(G \circ \varphi_1)\mathbb{C}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}}\right) \\ &= l\left(\frac{\mathbb{C}\{t\}}{(G \circ \varphi_1)}\right) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(G \circ \varphi_1)}. \end{aligned}$$

Con todo esto hemos probado el siguiente resultado

Teorema 2.31. *Sea $S \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, una superficie y $\mathcal{O}_{S,0}$ el anillo local de S . Tomando $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset S$ curvas en S , donde \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 no tienen componentes en común. Sean $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1,0} = \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{\mathfrak{p}}$ para algún ideal primo $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_{S,0}$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_2,0} = \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(G)}$ con $G \in \mathcal{O}_{S,0}$. Si $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}_1 \subset S$ es una parametrización de \mathcal{C}_1 , entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(\mathfrak{p}, G)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(G \circ \varphi_1)}.$$

Este teorema es más general que el presentado al inicio de este capítulo, es decir, el Teorema 2.6 es un corolario del Teorema 2.31.

Nuestro reto es hacer una generalización de una propiedad del número de intersección, que fue presentada en el Capítulo 1 de este trabajo. Antes veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.32. *Sea S una superficie con el anillo asociado*

$$\mathcal{O}_{S,0} = \frac{\mathbb{C}\{x, y, z, u\}}{(y^2 - zx^2, yz - ux, z^2x - uy, u^2 - z^3)}.$$

Si $x - z, u \in \mathcal{O}_{S,0}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(x - z, u)} &\simeq \frac{\mathbb{C}\{x, y, z, u\}}{(y^2 - zx^2, yz - ux, z^2x - uy, u^2 - z^3, x - z, u)} \\ &\simeq \frac{\mathbb{C}\{y, z\}}{(y^2 - z^3, yz, z^3)} \\ &\simeq \frac{\mathbb{C}\{y, z\}}{(y^2, yz, z^3)}, \end{aligned}$$

así

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z, u\}}{(y^2 - zx^2, yz - ux, z^2x - uy, u^2 - z^3, x - z, u)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{y, z\}}{(y^2, yz, z^3)} = 4$$

Por otro lado, tomando la descomposición primaria de

$$\begin{aligned} (y^2 - zx^2, yz - ux, z^2x - uy, u^2 - z^3, x - z) &= \\ &= (x - z, y - u, x^3 - u^2) \cap (x - z, y^2, x^3, xy, u), \end{aligned}$$

definamos $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}_1$ como $t \mapsto (t^2, t^3, t^2, t^3)$ una parametrización de la componente irreducible $\mathcal{C}_1 = \mathbf{V}((x - z, y - u, x^3 - u^2))$ de $\mathbf{V}((y^2 - zx^2, yz - ux, z^2x - uy, u^2 - z^3, x - z))$.

Así, $\text{ord}(u \circ \psi)(t) = \text{ord } t^3 = 3$, luego $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{t^3} = 3$. Por lo tanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{y, z\}}{(y^2, yz, z^3)} \neq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(t^3)}.$$

La superficie presentada en este ejemplo es desarrollada en [3], donde se prueba que es una superficie irreducible pero que no es Cohen-Macaulay. Uno de los problemas expuestos en este ejemplo, fue cuando tomamos funciones en el anillo asociado a la superficie y la descomposición primaria de alguna de

2.2. NÚMERO DE INTERSECCIÓN DE CURVAS EN UNA SUPERFICIE 45

estas; la componente irreducible puede presentar una componente encajada, lo cual dificulta el cálculo del número de intersección.

Una solución posible es considerar a $S \subset \mathbb{C}^n$ como una superficie Cohen-Macaulay, evitando así a las componentes encajadas que puede presentar una curva. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.33. Sean $S = \mathbf{V}(x^2 + y^2 + z^3) \subset \mathbb{C}^3$ la superficie Cohen-Macaulay y $z, x \in \mathcal{O}_{S,0}$ funciones, además dichas funciones determinan dos curvas $\mathcal{C}_1 = \mathbf{V}(z, x^2 + y^2 + z^3)$ y $\mathcal{C}_2 = \mathbf{V}(x, x^2 + y^2 + z^3)$ en S , respectivamente. Observemos que

$$\frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(x, z)} \simeq \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x, z, x^2 + y^2 + z^3)} \simeq \frac{\mathbb{C}\{y\}}{(y^2)}.$$

Entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(x, z)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{y\}}{(y^2)} = 2.$$

Consideremos la descomposición primaria de

$$(z, x^2 + y^2 + z^3) = (z, x + iy) \cap (z, x - iy).$$

Note que $(z, x + iy)$ y $(z, x - iy)$ son ideales primos.

Por otro lado,

$$\frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x, z, x + iy)} \simeq \frac{\mathbb{C}\{y\}}{(y)} \simeq \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x, z, x - iy)} \simeq \frac{\mathbb{C}\{y\}}{(y)} \simeq \mathbb{C},$$

entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x, z, x + iy)} = 1 \quad \text{y} \quad \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x, z, x - iy)} = 1,$$

así

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x, z, x + iy)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x, z, x - iy)} = 2,$$

por lo tanto

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(x, z)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x, z, x + iy)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x, z, x - iy)}$$

Del ejemplo anterior podemos pensar en un resultado similar a la propiedad de la suma del número de intersección, el cual probaremos a continuación. Sea $S \subset \mathbb{C}^n$ una superficie Cohen Macaulay y $\mathcal{O}_{S,0} = \frac{\mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}{I_S}$ el anillo local de S . Tomando $F, G \in \mathcal{O}_{S,0}$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{C},0} = \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{F}$ el anillo local de la curva $\mathcal{C} \subset S$. Supongamos $(F, I_S) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ la descomposición primaria de (F, I_S) en $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \mathcal{O}_n$ donde $\dim_{krull} \mathcal{O}_{\mathcal{C},0} = \dim_{krull} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_i} = 1$.

Para probar la propiedad de la suma necesitaremos el siguiente resultado:

Teorema 2.34. [1, Teorema 14.6, pág. 108] *Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de R -módulos finitos, entonces*

$$e(\mathfrak{q}, M) = e(\mathfrak{q}, M') + e(\mathfrak{q}, M'').$$

Observemos el siguiente diagrama

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2} \rightarrow 0.$$

Considerando $\pi_i : \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_i}$, para cada i , y $\pi : \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}$ las proyecciones canónicas, entonces cada parte de la sucesión anterior es un $\mathcal{O}_{\mathcal{C},0}$ -módulo.

Veamos que la sucesión es exacta. Notemos que $\varphi : \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}$ se define como $H \mapsto (\pi_1(H), \pi_2(H))$. Probemos que φ es inyectiva. Si $H \in \text{Ker} \varphi$, entonces $(0, 0) = \varphi(H) = (\pi_1(H), \pi_2(H))$, así $\pi_1(H) = 0$ y $\pi_2(H) = 0$, luego $H \in \mathfrak{p}_1$ y $H \in \mathfrak{p}_2$, de esta manera $H \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, por lo tanto φ es inyectiva.

Observemos que $\psi : \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}$ se define como $(\pi_1(H_1), \pi_2(H_2)) \mapsto \pi(H_1) - \pi(H_2)$. Para cada $i = 1, 2$

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2} & \xrightarrow{\pi_i} & \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_i} \\ \downarrow \pi & \swarrow \rho_i & \\ \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2} & & \end{array}$$

2.2. NÚMERO DE INTERSECCIÓN DE CURVAS EN UNA SUPERFICIE 47

con $\rho_i : \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_i} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}$ la proyección canónica, define un diagrama conmutativo, por lo que ψ está bien definida. Veamos que $\text{Ker } \psi = \text{Im } \varphi$. De la manera que se define ψ se puede ver que $\psi \circ \varphi = 0$, entonces $\text{Im } \varphi \subseteq \text{Ker } \psi$. Si $(\pi_1(H_1), \pi_2(H_2)) \in \text{Ker } \psi$, entonces

$$0 = \psi((\pi_1(H_1), \pi_2(H_2))) = \pi(H_1) - \pi(H_2)$$

así $H_1 - H_2 \in \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$, es decir, para $F_i \in \mathfrak{p}_i$ y $Q, P \in \mathcal{O}_n$ se tiene que $H_1 - H_2 = F_1Q + F_2P$, luego $H = H_1 + F_1Q = H_2 + F_2P$, de esta manera

$$\varphi(H) = (\pi_1(H), \pi_2(H)) = (\pi_1(H_1 - F_1Q), \pi_2(H_2 + F_2P)) = (\pi_1(H_1), \pi_2(H_2)),$$

por lo tanto, $\text{Ker } \psi = \text{Im } \varphi$.

Finalmente, probemos que ψ es sobreyectiva. Para cada $(\pi_1(H_1), \pi_2(H_2)) \in \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}$ se tiene que

$$\psi(\pi_1(H_1), \pi_2(H_2)) = \pi(H_1) - \pi(H_2) = \pi(H_1 - H_2)$$

y del diagrama anterior, π es un morfismo sobreyectivo, con lo que ψ es un morfismo sobreyectivo.

Por lo tanto,

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2} \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

Veamos que cada $\mathcal{O}_{\mathcal{E},0}$ -módulo de la sucesión exacta es finitamente generado. Para esto, el siguiente resultado será de mucha ayuda

Proposición 2.35. *Sea $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta de R -módulos. Si M' y M'' son finitamente generados, entonces M también lo es.*

Con esto bastará probar que $\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}$ es un $\mathcal{O}_{\mathcal{E},0}$ -módulo finitamente generado.

Para esto, consideremos el siguiente teorema

Teorema 2.36. [9, Theorem 3.2.10, pág. 89] (*Teorema General de la división de Weierstraß*) Sean R y S \mathbb{C} -álgebras analíticas, $\varphi: R \rightarrow S$ un morfismo de \mathbb{C} -álgebras. Podemos ver a S como un R -módulo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1) S es un R -módulo finitamente generado

2) $\dim_{\mathbb{C}} \frac{S}{\mathfrak{m}_R S} < \infty$.

Tomando $\pi: \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}$ un morfismo de \mathbb{C} -álgebras, solo hay que demostrar que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}}{\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E},0}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}} < \infty.$$

Sabemos que $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ es un ideal \mathfrak{m} -primario, por Nullstellensatz, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2} < \infty$. De la proyección canónica $\rho: \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2} \rightarrow \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}}{\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E},0}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}}$ se tiene que:

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2} = \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \rho + \dim_{\mathbb{C}} \text{Im } \rho = \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } \rho + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}}{\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E},0}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}}.$$

Entonces, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}}{\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E},0}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}} < \infty$, así $\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}$ es un $\mathcal{O}_{\mathcal{E},0}$ -módulo finitamente generado, luego, de la Proposición 2.35, tenemos que $\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}$ es finitamente generado. Por lo tanto, la sucesión exacta es de $\mathcal{O}_{\mathcal{E},0}$ -módulos finitamente generados. Como el ideal $(F, G)\mathcal{O}_{S,0}$ es \mathfrak{m}_S -primario, del Teorema 2.34 obtenemos que

$$e\left((F, G)\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}\right) = e((F, G)\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}) + e\left((F, G)\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}\right).$$

Notemos que la $\dim_{K_{rull}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2} < 1$. Por la propiedad 2 de la multiplicidad (e), tenemos que $e\left((F, G)\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2}\right) = 0$. Así,

$$e\left((F, G)\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}\right) = e((F, G)\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}).$$

2.2. NÚMERO DE INTERSECCIÓN DE CURVAS EN UNA SUPERFICIE 49

Consideremos \mathfrak{p}_i ideales primos y $\dim_{krull} \mathcal{O}_{\mathcal{E},0} = \dim_{krull} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_i} = 1$, así $\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_i}$ es un anillo Cohen-Macaulay, además, $(F, G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_i} = (G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_i}$ es un ideal de parámetros. Por la forma que se define φ obtenemos que $(F, G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2} = (G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus (G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}$, por el Teorema 2.30 tenemos que:

$$\begin{aligned}
 e((F, G)\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}) &= e\left((F, G)\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}\right) \\
 &= l\left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus (G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}\right) \\
 &= l\left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}} \oplus \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}\right) \quad . \quad (2.5) \\
 &= l\left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}\right) + l\left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}\right)
 \end{aligned}$$

Para la penúltima igualdad del esquema 2.5, tomemos las siguientes

proyecciones canónicas $\eta_1 : \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \longrightarrow \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}$ y $\eta_2 : \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2} \longrightarrow \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}$, definamos

$\lambda : \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2} \longrightarrow \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}} \oplus \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}$ como $(H_1, H_2) \mapsto (\eta_1(H_1), \eta_2(H_2))$, dado

que λ depende de las proyecciones, se tiene que λ es suprayectiva. Por lo tanto,

$$\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{Ker \lambda} \simeq \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}} \oplus \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{(G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}$$

Note que $Ker \lambda = (G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1} \oplus (G) \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}$, por lo que obtenemos dicha igualdad.

Para la última igualdad del esquema 2.5, consideremos la siguiente sucesión,

$$0 \longrightarrow \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}{\binom{\mathcal{O}_n}{(G)\mathfrak{p}_1}} \longrightarrow \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}{\binom{\mathcal{O}_n}{(G)\mathfrak{p}_1}} \oplus \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{\binom{\mathcal{O}_n}{(G)\mathfrak{p}_2}} \longrightarrow \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{\binom{\mathcal{O}_n}{(G)\mathfrak{p}_2}} \longrightarrow 0.$$

Observe que la primera parte de la sucesión es una inclusión y la segunda es la proyección usual, lo que determina que dicha sucesión sea exacta. Por lo tanto,

$$l \left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}{\binom{\mathcal{O}_n}{(G)\mathfrak{p}_1}} \oplus \frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{\binom{\mathcal{O}_n}{(G)\mathfrak{p}_2}} \right) = l \left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}{\binom{\mathcal{O}_n}{(G)\mathfrak{p}_1}} \right) + l \left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{\binom{\mathcal{O}_n}{(G)\mathfrak{p}_2}} \right).$$

Así, obtenemos la última igualdad.

Como $\mathcal{O}_{S,0}$ es un anillo Cohen-Macaulay, entonces $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ es Cohen-Macaulay, así, del esquema (2.5) y por el Teorema 2.30, tenemos que

$$l \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}{\binom{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}{(G)\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}} \right) = l \left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_1}}{\binom{\mathcal{O}_n}{(G)\mathfrak{p}_1}} \right) + l \left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_2}}{\binom{\mathcal{O}_n}{(G)\mathfrak{p}_2}} \right)$$

por lo tanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(F,G)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(\mathfrak{p}_1, G)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(\mathfrak{p}_2, G)}.$$

Finalizamos este trabajo anunciando el siguiente resultado

Teorema 2.37. *Sean $S \subset \mathbb{C}^n$ una superficie Cohen-Macaulay y $\mathcal{O}_{S,0} = \frac{\mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}{I_S}$ el anillo local de S . Tomando $F, G \in \mathcal{O}_{S,0}$ y $\mathcal{O}_{\mathcal{C},0} = \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{F}$ el anillo local de la curva $\mathcal{C} \subset S$. Supongamos $(F, I_S) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ la descomposición primaria de (F, I_S) en $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \mathcal{O}_n$ donde $\dim_{\text{krull}} \mathcal{O}_{\mathcal{C},0} = \dim_{\text{krull}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{p}_i} = 1$ y \mathfrak{p}_i ideales primos, entonces*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{S,0}}{(F,G)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(\mathfrak{p}_1, G)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(\mathfrak{p}_2, G)}.$$

Bibliography

- [1] Atiyah M. F., Macdonald I. G, “Introducción al álgebra conmutativa”, Universidad de Oxford, Reverte, México, 1980.
- [2] Bruns Winfried, Herzog Jurgén, “Cohen-Macaulay rings”, Cambridge University Press, New York, 1993.
- [3] Chavez Martínez Enrique, “Variedades Tóricas sin la Condición de Normalidad” (Tesis de Maestría), UNAM, Mexico, 2016.
- [4] Fulton William, “Algebraic Curves”, Addison Wesley Longman Publishing Co, United States, 2008.
- [5] Fischer Gerd, “Plane Algebraic Curves”, American Mathematical Society, United States, 2009.
- [6] Greuel Gert-Martin, Gerhard Pfister, “A Singular Introduction to commutative Algebra”, Springer, Berlin 2002.
- [7] Matsumura Hideyuki, “Commutative Ring Theory”, Cambridge University Press, New York, 1989.
- [8] Perrin Daniel, “An Introduction Algebraic Geometry”, Springer, London, 2008.
- [9] Theo de Jong, Pfister Gerhard, “Local Analytic Geometry” Springer, Wiesbaden, 2000.

- [10] Wall, C. T. C., “Singular Points of Plane Curves”, Cambridge University Press, London, 2004.