



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA  
APLICADA

# CARACTERIZACIÓN DE NIELSEN DE GRUPOS DISCRETOS DE $PSL(2, \mathbb{R})$

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
Santiago Manuel Pérez Pérez

DIRIGIDA POR:  
Dr. Angel Cano Cordero  
**Instituto de Matemáticas Cuernavaca, UNAM**

ASESORES:  
Dr. Jose Seade Kuri  
**Instituto de Matemáticas Cuernavaca, UNAM**  
Dr. Waldemar Barrera, Dr. Juan Pablo Navarrete  
**Universidad Autónoma de Yucatán, UADY**  
Dr. Manuel Cruz López  
**Universidad de Guanajuato, UG**

Ciudad de México, Agosto de 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Primeramente agradezco a mi asesor de tesis y maestría Dr. Angel Cano Cordero por todo el apoyo y consejo durante todo el proceso de los antes mencionados y por contribuir a mi formación personal y profesional.*

*Igualmente agradezco a los doctores, Dr. José Seade, Dr. Waldemar Barrera, Dr. Juan Pablo Navarrete y al Dr. Manuel Cruz por sus acertados comentarios, su trabajo de revisión, y que además son sinodales de este trabajo.*

*También a mis padres y hermana por estar siempre presentes durante este proceso y siempre.*

*Quiero Agradecer también a mi Esposa Diana y a mi hija Helena por su apoyo y aliento y por permitirme tomar parte del tiempo que compartimos para continuar con esta Tesis.*

*Por ultimo deseo expresar mi agradecimiento tanto al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al proyecto PAPIIT IN101816 por el apoyo económico proporcionado durante la realización y término de la presente tesis y del curso de la maestría.*



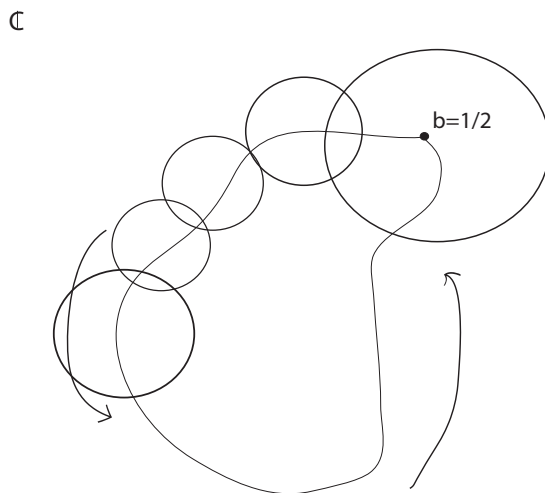
## Resumen

El área de los sistemas dinámicos es un capítulo muy antiguo de las matemáticas, y con muchos honores, el cual surgió en campos aplicados tales como mecánica celeste, meteorología, biología, oscilaciones no lineales y mecánica de fluidos. A través de los siglos y como resultado de los esfuerzos de científicos y matemáticos, ha surgido una teoría de amplios alcances y muy atractiva. En los últimos 25 años, debido principalmente a la proliferación de las computadoras y de los avances de la computación, sistemas dinámicos se ha tornado una vez más a sus raíces y aplicaciones, pero al mismo tiempo, estos se han extendido técnica y metodológicamente, han resurgido los sistemas dinámicos en su forma discreta, la cual consiste en estudiar la dinámica ya sea de una función analítica producida por su iteración o bien por el estudio de la acción de grupos discretos de automorfismos.

El estudio de los así llamados grupos Kleinianos tiene sus inicios alrededor de 1875, cuando Lazarus Fuchs, estaba tratando de entender las condiciones bajo las cuales una solución a una ecuación diferencial ordinaria es algebraica. Fuchs logró resolver este problema para la ecuación general de segundo orden, reduciendo esta problemática a la creación de invariantes. La solución inicial de Fuchs estaba incompleta y contenía algunos errores, y fue Klein quién dio una simplificación, además de llenar los detalles faltantes, mediante una mezcla de técnicas geométricas y de teoría de grupos. Paralelamente y de forma independiente, Poincaré comenzó en 1880 a desarrollar una teoría más general de las superficies de Riemann, acciones de grupos discontinuas y ecuaciones diferenciales, inspirándose (entre otros escritos) con el artículo de Fuchs. Al principio, Poincaré desconocía el trabajo de Schwarz y Klein, pero después de que Klein Poincaré intercambiaron correspondencia, ellos comenzaron a tratar el problema desde el punto de vista de teoría de grupos. Este punto de vista es el que le permitió a Poincaré llegar a la noción de los grupos Kleinianos en 1881.

Cuando tenemos una ecuación diferencial ordinaria compleja de grado  $n$ , sabemos gracias a un teorema de Cauchy que (genericamente) localmente esta posee  $n$  soluciones linealmente independientes en un punto

$b \in \mathbb{C}$ , si tomamos una de estas soluciones y la continuamos analíticamente por un lazo anclado en  $b$  obtenemos una solución que depende de las  $n$  soluciones linealmente independientes dadas, gracias a este hecho, podemos asociar un grupo a la ecuación diferencial dada, este grupo visto en  $GL(2, \mathbb{C})$  contiene las matrices, llamadas matrices de conexión, que relacionan a la solución original y la continuación analítica de la solución. Dado un conjunto de soluciones alrededor de un punto  $b \in \mathbb{C}$  y a la continuación analítica a través de los lazos en el grupo fundamental  $\Pi_1(b, \mathbb{C})$  el grupo de matrices de matrices de conexión es llamado el grupo de monodromía.



**Figure 1:** Continuación analítica

El grupo de monodromía nos da información importante de la ecuación diferencial. En general hallar la monodromía relativa a una ecuación diferencial no es una tarea sencilla. Esta tesis tiene dos objetivos, el primero es dar de manera explícita el grupo de monodromía de la ecuación diferencial hipergeométrica (para ciertos parámetros).

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{du}{dx} - abu = 0.$$

Siendo más precisos, por medio de una combinación de técnicas recopiladas en numerosos textos (en particular [KIY91]) nosotros mostramos que el grupo de monodromía de la ecuación hipergeométrica es de Schottky cuando tomamos parámetros puramente imaginarios, *i. e.* los exponentes están dados por:

$$1 - c = i\theta_0, c - a - b = i\theta_1, a - b = i\theta_2$$

con  $\theta_i > 0$ . En este caso es posible describir la monodromía de la ecuación diferencial hipergeométrica por medio de reflexiones respecto a círculos  $C(c, r)$  (donde  $c$  es real)

$$\psi(c, r) : s \mapsto \frac{r^2}{\bar{s} - c} + c.$$

Y mediante estas reflexiones garantizar que la monodromía es un grupo de Schottky (esto siguiendo los pasos de Takashi Ichikawa y Masaaki Yoshida, veasé [IY03]).

El grupo de Schottky  $\Lambda_\theta$  asociado a la ecuación hipergeométrica con exponentes imaginarios tiene la importante característica de ser discreto (para ejemplos de grupos de monodromía asociados a la ecuación diferencial hipergeométrica que no son discretos véase [IY03]). Y como es bien sabido determinar la discretos de un grupo, no es un problema sencillo. Esto nos lleva a nuestro segundo objetivo de este trabajo, el cual es presentar un criterio debido Nielsen para determinar sin un grupo de isometrías del plano hiperbólico es discreto o no, este resultado se destaca su naturaleza completamente geométrica.

Antes de enunciar el resultado, creo conveniente recordar algunos conceptos básicos.

**Definición 0.0.1** *Un grupo es elemental si deja invariante a un conjunto finito en la esfera.*

Una caracterización algebraica interesante de los grupos elementales es la siguiente: Un grupo es elemental sii es virtualmente soluble. En particular los grupos libres no son elementales.

**Definición 0.0.2** *Un grupo  $G$  se dice discontinuo en un punto  $x \in \mathbb{D}$  si  $x$  no es un punto de acumulación de la clase  $Gx$*

Nuestro objetivo es encontrar ejemplos de grupos que actúen de manera discontinua en  $\mathbb{D}$ . Para esto el uso de la siguiente definición será necesario.



**Definición 0.0.3** Sea  $X$  un espacio topológico arbitrario y  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $X$  en  $X$ . Se dice que  $G$  actúa propia y discontinuamente en  $X$  si y solo si para cada subconjunto compacto  $K$  de  $X$  se tiene,

$$g(K) \cap K = \emptyset$$

Excepto para un número finito de  $g$ 's en  $G$

Es importante destacar que toda acción propia y discontinua es discontinua, pero no necesariamente se tiene el recíproco. Afortunadamente para grupos de Isometrías en espacios métricos completos localmente compactos estas dos nociones coinciden.

Finalmente podemos enunciar el teorema de Nielsen

**Teorema 0.0.4** Sea  $\Gamma$  un grupo no elemental de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\Gamma$  es discreto.
2.  $\Gamma$  actúa discontinuamente.
3.  $\Gamma$  actúa propia y discontinuamente.
4. Los puntos en el espacio hiperbólico con isotropía finita respecto a  $\Gamma$  no se acumulan en el interior del espacio hiperbólico.

Mediante el uso de este resultado se muestra sin hacer uso del lema del ping-pong que para ciertos parámetros imaginarios, los grupos de monodromía de la respectiva ecuación diferencial hipergeométrica es discreto.

Esta tesis está organizada de la forma siguiente: El capítulo 1 y 2 nos dan las bases para el desarrollo de este trabajo. El capítulo 1 damos las definiciones y conceptos utilizados a lo largo del trabajo. Como por ejemplo: continuación analítica, grupos Kleinianos y de Schottky así como una introducción de la ecuación diferencial hipergeométrica. En el capítulo 2 hablamos de la monodromía en general, el esquema de Riemann, calculamos la monodromía de la ecuación hipergeométrica y hallamos el grupo de monodromía con las soluciones dadas por la serie hipergeométrica. En el capítulo 3 construimos el grupo de Schottky asociado al grupo de monodromía a través de los dominios fundamentales dados en ([IY03]) dicho grupo generado por reflexiones

nos servira como ejemplo para el teorema principal. En el capítulo 4 probamos el teorema de Nielsen en 2 partes, la primera parte se prueba de manera sencilla bajo el supuesto de que en el grupo  $G < PSL(2, \mathbb{R})$  existen elementos elípticos, la segunda parte supone que no existen elementos elípticos en el grupo y se utilizan 5 lemas para probar el teorema, estos lemas destacan mayormente por sus demostraciones puramente geométricas asi como la demostración del teorema, al final probamos que el grupo de Schottky encontrado aplica en el teorema de Nielsen. Al final de la tesis incluimos dos apéndices, donde incluimos las igualdades y desigualdades trigonométricas usadas en esta tesis discutimos brevemente el principio de reflexión de Schwartz.



# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>xi</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 La ecuación diferencial hipergeométrica y sus soluciones . . . . .	1
1.2 Continuación analítica . . . . .	4
1.3 Grupos Kleinianos y grupos de Schotkky . . . . .	5
1.4 Ecuaciones lineales . . . . .	7
1.5 Comportamiento alrededor de puntos singulares regulares . . . . .	8
1.6 Ecuaciones Fuchsianas . . . . .	10
1.7 Esquema de Riemann de la ecuación hipergeométrica . . . . .	10
1.8 Monodromía . . . . .	12
1.9 Monodromía de la ecuación hipergeométrica . . . . .	15
1.10 Grupo de monodromía con las soluciones dadas por la serie hipergeométrica . . . . .	17
<b>2 Grupo de Schottky de la ecuación hipergeométrica</b>	<b>19</b>
2.1 Dominios fundamentales . . . . .	19
2.2 El grupo de monodromía generado por reflexiones . . . . .	22
2.3 El grupo de Schottky asociado al grupo de Monodromía . . . . .	24
<b>3 El teorema de Nielsen</b>	<b>25</b>
3.1 El lema de los elementos hiperbólicos con ejes divergentes . . . . .	30
3.2 El lema del conmutador de los elementos hiperbólicos . . . . .	33
3.3 El lema del conmutador de los elementos parabólicos . . . . .	35
3.4 El lema del conmutador de los elementos hiperbólicos con ejes paralelos . . . . .	37
3.5 El lema del elemento elíptico . . . . .	38
3.6 El teorema de Nielsen . . . . .	40
3.7 Un ejemplo de un grupo discreto . . . . .	43

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>A Apéndice</b>	<b>47</b>
A.1 Igualdades trigonométricas . . . . .	47
A.2 Mapeo y principio de reflexión de Schwarz . . . . .	49
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>

# Índice de figuras

1	Continuación analítica . . . . .	iv
1.1	Lazo anclado en un punto en $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ . . . . .	6
1.2	Lazos anclados en $b = \frac{1}{2}$ . . . . .	14
2.1	Dominios fundamentales . . . . .	20
2.2	Círculos $C_1, C_2, C_3$ . . . . .	23
3.1	Rectas hiperbólicas concurrentes, paralelas y divergentes respectivamente. . . . .	26
3.2	Representación de los puntos importantes en las transformaciones hiperbólicas . . . . .	27
3.3	Figura 3.3 . . . . .	31
3.4	Figura 3.4 . . . . .	32
3.5	Cuadrilátero de Lambert . . . . .	33
3.6	Figura 3.6 . . . . .	34
3.7	Pentágono con 4 ángulos rectos . . . . .	35
3.8	Figura 3.8 . . . . .	36
3.9	Figura 3.9 . . . . .	36
3.10	Figura 3.10 . . . . .	37
3.11	Figura 3.11 . . . . .	38
3.12	Figura 3.12 . . . . .	39
3.13	Hiperciclo punteado . . . . .	40
3.14	Figura 3.14 . . . . .	41
3.15	Ejes de $f$ y $g$ paralelos y divergentes . . . . .	42
3.16	Figura 3.16 . . . . .	42
3.17	Figura 3.17 . . . . .	44
A.1	Cuadrilátero con 3 ángulos rectos . . . . .	48
A.2	Pentágono con 4 ángulos rectos . . . . .	49
A.3	Principio de reflexión de Schwarz . . . . .	50



# Preliminares

## 1.1 La ecuación diferencial hipergeométrica y sus soluciones

Consideremos la siguiente serie:

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} x^n$$

En donde  $x$  es una variable compleja,  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$ , y  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ . Esta serie es la llamada serie hipergeométrica. El coeficiente  $n$ -ésimo de esta serie al que llamaremos  $A_n$  esta dado por

$$A_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1) \cdot b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1) \cdot 1(1+1)\cdots(n)}$$

De esta igualdad obtenemos:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)}. \quad (1.1)$$

Usando el criterio del cociente podemos notar que el radio de convergencia de esta serie es 1, cuando  $a$  o  $b$  son negativos la serie es finita. De cualquier modo tenemos que dicha serie define una función holomorfa en  $x$  en al menos el disco de radio 1 centrado en 0 y también es holomorfa en  $(a, b, c)$  si  $c \neq 0, -1, -2, \dots$



## 1. PRELIMINARES

---

Nuestro interés por la serie definida anteriormente viene del hecho que dicha serie es una solución de la ecuación diferencial hipergeométrica

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{du}{dx} - abu = 0$$

. A la cual denotamos  $E(a, b, c; x)$  y la referimos como la serie hipergeométrica con parámetros  $(a, b, c)$ . Para ver que  $F(a, b, c; x)$  es una solución de  $E(a, b, c)$  procedemos como Euler e introducimos el operador  $D = x\frac{d}{dx}$ , a continuación enunciamos algunas propiedades que son útiles:

1.  $Dx^n = nx^n$
2.  $f(D)x^n = f(n)x^n$  donde  $f$  es un polinomio de coeficientes constantes

La propiedad número 1 es clara de la definición, para la propiedad número 2 debemos dejar en claro como funciona el operador  $D^n$  al aplicarlo a  $x^n$ . Cuando  $n = 2$  tenemos que  $D^2x^n = x\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}(x^n)) = x\frac{d}{dx}(x \cdot nx^{n-1}) = x\frac{d}{dx}(nx^n) = x \cdot n^2x^{n-1} = n^2x^n$ , en general se tiene por un proceso análogo al anterior que  $D^m x^n = n^m x^n$ . Sea

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Donde  $a_n \neq 0$ , un polinomio de grado  $n$  y por  $f(D)$  entendemos el operador

$$f(D) = \sum_{i=0}^n a_i D^i.$$

Entendiendo  $D^i$  como la composición del operador  $D$   $i$ -veces consigo mismo. Aplicamos este operador a  $x^n$  y obtenemos

$$f(D)x^n = \left(\sum_{i=0}^n a_i D^i\right)x^n = \sum_{i=0}^n a_i D^i(x^n) = \sum_{i=0}^n a_i n^i x^n = f(n)x^n.$$

Gracias a este operador  $D$  podemos escribir la ecuación diferencial hipergeométrica en términos de dicho operador para obtener;

$$E(a, b, c) : [(a + D)(b + D) - (c + D)(1 + D)]\frac{1}{x}u = 0.$$

Con esta nueva presentación verificamos que la serie  $F(a, b, c; x)$  es una solución de dicha ecuación.

## 1.1 La ecuación diferencial hipergeométrica y sus soluciones

---

Podemos escribir

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} x^n = \sum A_n x^n.$$

y evaluamos

$$\begin{aligned} & [(a + D)(b + D) - (c + D)(1 + D)\frac{1}{x}] \sum A_n x^n \\ &= \sum [(a + D)(b + D)A_n x^n - (c + D)(1 + D)A_n x^{n-1}] \\ &= \sum [(a + n)(b + n)A_n x^n - (c + n - 1)(1 + n - 1)A_n x^{n-1}] \\ &= \sum [(a + n)(b + n)A_n x^n - (c + n)(1 + n)A_n x^n] = 0. \end{aligned}$$

La última igualdad se da gracias a que obtenemos una serie telescópica. Esta serie tiene singularidades en 0, 1 e  $\infty$ , nuestro objetivo ahora es encontrar soluciones en los puntos singulares como hicimos anteriormente con  $x = 0$ . Denotaremos a la solución  $F(a, b, c; x)$  como  $f_0(x; 0)$ .

Queremos hallar otra solución en  $x = 0$  pero para esto necesitamos calcular la aplicación del operador  $D$  al término  $x^s u$ ;

$$D(x^s u) = s x^s u + x^s D u = x^s (s + D) u.$$

esto es  $D x^s = x^s (s + D)$ , con este cálculo podemos obtener una expresión equivalente para

$$[(a + D)(b + D) - (c + d)(1 + d)\frac{1}{x}] x^{1-c}.$$

La expresión anterior es equivalente a:

$$x^{1-c} [(a + 1 - c + D)(b + 1 - c + D) - (1 + D)(2 - c + D)\frac{1}{x}].$$

y esto nos dice que

$$x^{1-c} F(a + 1 - c, b + 1 - c, 2 - c : x).$$

Es también una solución de  $E(a, b, c)$ . Aunque la serie anterior esta definida solamente cuando  $2 - c$  no es un entero negativo o cero (cuando es  $c = 1$  la serie coincide con  $F(a, b, c; x)$ ) esto no afecta nuestra solución ya que tomamos  $1 - c \in i\mathbb{R}$  en cuyo caso siempre esta definida. A esta ultima solución la denotamos por  $f_0(x; 1 - c)$ .

## 1. PRELIMINARES

---

Queremos hallar también soluciones alrededor del punto singular  $x = 1$ , llevamos a cabo una transformación de la variable  $x$  en  $1 - x$  abusando de la notación, y verificamos como luce ahora

$$E(a, b, c) = x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{du}{dx} - abu.$$

Bajo esta transformación el primero y el tercer término no cambian, pero el segundo término ahora es

$$-\{c - (a+b+1)(1-x)\} = a+b+1-c - (a+b+1)x.$$

Entonces podemos notar que la ecuación transformada es de nuevo la ecuación hipergeométrica con parámetros  $(a, b, a+b+1-c)$  y a menos que  $c-a-b$  sea entero obtenemos como antes dos soluciones pero ahora alrededor de  $x = 1$

$$F(a, b, a+b+1-c; 1-x), \quad (1-x)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c+1-a-b; 1-x).$$

En nuestro caso tomamos  $c-a-b \in i\mathbb{R}$  por lo que las soluciones anteriores siempre están definidas en su radio de convergencia. A las soluciones anteriores las denotamos  $f_1(x; 0)$  y  $f_1(x; c-a-b)$  respectivamente.

## 1.2 Continuación analítica

La continuación analítica nos da una forma de extender el dominio sobre el cual una función analítica está definida, si tomamos la serie de potencias,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k. \quad (1.2)$$

Esta serie de potencias generalmente es válida en un radio de convergencia dado, en ciertos casos  $f$  tiene una serie de potencias que es válida más allá del radio de convergencia esperado, y esta serie de potencias puede servir para definir la función  $f$  fuera de su dominio de definición original.

Sean  $f_1, f_2$  funciones analíticas en dominios  $\Lambda_1, \Lambda_2$  respectivamente, supongamos además que la intersección  $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$  es no vacía y  $f_1 = f_2$  en  $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ , en este caso llamamos a  $f_2$  la continuación analítica de  $f_1$  a  $\Lambda_2$  y viceversa, Aún más si dicha extensión existe es única.

Para dar una definición formal supongamos que  $f$  es analítica en una vecindad  $U_{z_0}$  de  $z_0$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  un camino en  $D$  basado en  $z_0$ .

**Definición 1.2.1** Sea  $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua con las siguientes propiedades:

### 1.3 Grupos Kleinianos y grupos de Schotkky

---

1.  $f^*(t) = f(\gamma(t))$  para  $t$  cercano a  $a$  (en  $[a, b]$ ).
2. Para cada  $t' \in [a, b]$ , hay una función  $h_{t'}(z)$  analítica en un disco  $D_{t'}$  sobre  $\gamma(t')$  con  $h_{t'}(\gamma(t)) = f^*(t)$  para  $t$  cercano a  $t'$  en  $[a, b]$ .

Si tal  $f^*$  existe esto nos define  $h_{t'}(z)$ . Esta es la continuación analítica de  $f$  a  $t'$ . Es una función analítica en alguna vecindad de  $\gamma(t')$ . Nos interesa realmente la función  $h_b(z)$  analítica en una vecindad de  $\gamma(b)$ . Le llamamos  $f_\gamma(z) = f_\gamma$ , la continuación analítica de  $f$  (a lo largo de  $\gamma$ ).

Nuestro interés en la continuación analítica radica en la manera de hallar el grupo de monodromía, si tenemos un punto  $a \in \mathbb{C}$  y una vecindad  $U_a$  en la cual tenemos un conjunto de soluciones linealmente independientes, la monodromía que mas adelante analizamos con más detalle tiene relación con la continuación analítica de las soluciones de una ecuación diferencial a través de lazos anclados en  $a$  y sus clases (es decir el grupo fundamental) y las matrices que relacionan a estas soluciones.

Cuando tratamos con la ecuación hipergeométrica, el teorema fundamental de Cauchy nos dice que para cada punto  $x_0 \neq 0, 1$  existen dos soluciones holomorfas linealmente independientes alrededor de  $x_0$ , en otras palabras, el conjunto de estas soluciones forman un espacio lineal bidimensional sobre  $\mathbb{C}$ . Cualquiera de estas soluciones se puede continuar analíticamente a lo largo de cualquier lazo en  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ . Las soluciones en general no son univaluadas. Si  $\gamma$  es un lazo anclado en  $x_0$  y  $u_1$  una solución no cero, y  $u_2$  otra solución que no es múltiplo constante de  $u_1$  y sean  $\gamma^*u_1$  y  $\gamma^*u_2$  las continuaciones analíticas a través de  $\gamma$ , como  $\gamma^*u_1, \gamma^*u_2$  siguen siendo soluciones linealmente independientes se tiene que existe una matriz  $M(\gamma) \in GL(2, \mathbb{C})$  que relaciona a estas soluciones, esta matriz se llama la matriz de conexión de  $(u_1, u_2)$  a lo largo de  $\gamma$ .

Las matrices de conexión juegan un papel fundamental en nuestra búsqueda del grupo de monodromía.

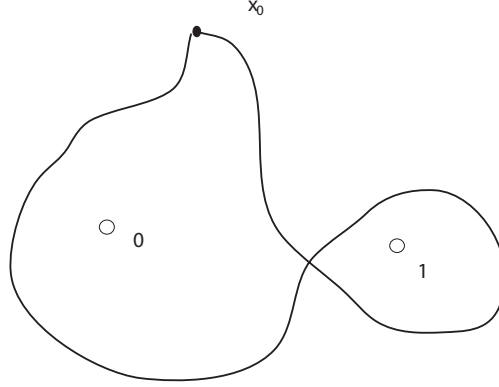
### 1.3 Grupos Kleinianos y grupos de Schotkky

De entre los ejemplos de subgrupos discretos de isometrías hiperbólicas conocidos, los grupos de Schotkky son ejemplos clásicos de estos, al ser nuestro objetivo dar un ejemplo de un grupo de Schotkky tenemos la obligación de dar una definición e introducir brevemente algunos resultados interesantes.

**Definición 1.3.1** *Un grupo de Schotkky es un grupo generado por transformaciones de Möbius  $g_1, \dots, g_k, k \geq 1$  junto con una colección de pares de regiones disjuntas en  $\hat{\mathbb{C}}$ , digamos  $C_1, B_1, \dots, C_k, B_k$ , acotadas por curvas de jordan, tal que*

## 1. PRELIMINARES

---



**Figura 1.1:** Lazo anclado en un punto en  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$

$g_i(C_i) = \widehat{\mathbb{C}} - \bar{B}_i$  para toda  $i = 1, \dots, k$ , el conjunto  $g_1, \dots, g_k$  es llamado un conjunto de generadores Schottky, los dominios  $C_i, B_i$  un conjunto fundamental de dominios y el entero  $k$  el género del grupo de Schottky.

Todos los grupos de Schottky son grupos finitamente generados tal que todos sus elementos no triviales son loxodrómicos, cuando decimos elementos no triviales nos referimos a todos excepto la identidad.

Un grupo de Schottky es clásico si las curvas de Jordan correspondientes a algún conjunto de generadores se pueden escoger como círculos.

Un grupo de Schottky también puede ser caracterizado de la siguiente manera

**Teorema 1.3.2** *Un grupo  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  es un grupo de Schottky si y solo si  $G$  es finitamente generado, y un grupo Kleiniano puramente loxodrómico que es isomorfo a un grupo libre.*

En nuestro caso la noción de grupo de Schottky que usamos es la siguiente: Consideremos una familia de pares de 2-discos disjuntos  $D_1, \dots, D_s$  en la 2-esfera cuyas fronteras son los círculos  $C_1, \dots, C_s$  y sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  inversiones en estos  $s$  círculos y sea  $G$  el grupo generado por estas inversiones. Le llamamos a  $G$  un grupo de Schottky. El subgrupo de índice 2 de longitud par es un grupo de Schottky clásico.

El término grupo Kleiniano se utiliza para referirse a cualquier subgrupo discreto de isometrías hiperbólicas siendo cierto o no que su región de discontinuidad sea vacía.

Si el lector desea conocer todos estos conceptos en profundidad se sugiere revisar la bibliografía, especialmente [ACS13], para nuestros propósitos lo visto anteriormente es suficiente.

## 1.4 Ecuaciones lineales

En esta sección presentamos conceptos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales así como definiciones y teoremas que son útiles para calcular la monodromía de la ecuación hipergeométrica, enunciamos los teoremas sin demostración. Para las demostraciones podemos dirigirnos a [KIY91].

En el caso más general podemos considerar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

$$\frac{du_j}{dz} = f_j(z, u) \quad (j = 1, \dots, r) \quad (1.3)$$

Con la variable independiente  $z$  y el vector de incógnitas  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ , donde el vector  $f = (f_1, \dots, f_r)$  es holomorfo en un dominio  $D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$

**Teorema 1.4.1** *Para cada  $(a, b) \in D$  hay una solución única  $u$  de 1.3 holomorfa en una variedad de  $a$ , tal que*

$$u(a) = b \quad (1.4)$$

**Teorema 1.4.2** *Si el sistema 1.3 y el valor inicial 1.4 depende de manera holomorfa de un sistema de parámetros  $s = (s_1, \dots, s_r)$ , entonces la solución es holomorfa en  $x$  y en  $s$*

El motivo de definir un sistema de este tipo es que todo sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de cualquier orden, se puede reducir a un sistema del tipo 1.3.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria;

$$\frac{d^r u}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1} u}{dz^{r-1}} + \dots + a_r(z) u = 0 \quad (1.5)$$

Donde las  $a_j$ 's son holomorfas en un dominio  $D \subset \mathbb{C}$ , introducimos nuevas variables;

$$u_0 = u \quad u_i = \frac{d^i u}{dz^i} \quad (i = 1, \dots, r-1)$$

La ecuación 1.5 se puede reescribir de la forma :

$$\frac{du_i}{dz} = \sum_{j=0}^{r-1} a_i^j(z) u_j \quad (i = 0, \dots, r-1) \quad (1.6)$$

## 1. PRELIMINARES

---

**Teorema 1.4.3** Para cada punto  $a \in D$  y cualesquiera complejos  $b_0, \dots, b_{r-1}$  hay una única solución holomorfa de 1.5 tal que

$$\frac{d^i u}{dz^i}(a) = b_i \quad i = 0, \dots, r-1$$

Dicha solución tiene una continuación analítica a lo largo de cualquier curva en  $D$ .

Si los coeficientes de la ecuación 1.5 son holomorfos en  $\{z \mid 0 < |z - a| < \epsilon\}$  para algún  $\epsilon > 0$  y al menos una es meromorfa y no holomorfa en  $\{z \mid |z - a| < \epsilon\}$ , entonces el punto  $a$  es un punto singular de 1.5.

**Definición 1.4.4** Un punto singular  $a$  de 1.5 es regular si

$$(z - a)^k a_k(z), \quad (k = 1, \dots, r)$$

Son holomorfas en  $a$ .

### 1.5 Comportamiento alrededor de puntos singulares regulares

Consideremos  $z = 0$  un punto singular regular de la ecuación 1.5 (en el caso de la ecuación hipergeométrica  $z = 0$  es un punto singular regular). Como en 1.1 introducimos el operador;

$$D = z \frac{d}{dz}$$

Este operador se relaciona con  $\frac{d}{dz}$  de la siguiente manera,

$$z^k \frac{d^k}{dz^k} = D(D-1) \cdots (D-k+1) \quad (1.7)$$

Para  $k \geq 1$  se tiene

$$\begin{aligned} z^r \left\{ \frac{d^r}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} + \cdots + a_r(z) \right\} &= \sum_{k=0}^r z^{r-k} a_{r-k}(z) D(D-1) \cdots (D-k+1) \\ &= D^r + \left\{ z a_1(z) - \frac{(r-1)(r)}{2} \right\} D^{r-1} + \cdots \end{aligned}$$

Donde  $a_0 = 1$ . La ecuación 1.5 se puede reescribir en la forma

## 1.5 Comportamiento alrededor de puntos singulares regulares

---

$$Lu = 0$$

Donde  $L$  es un operador de la forma;

$$L = \sum_{i=0}^r b_i(z) D^{r-i}$$

Donde  $b_0(z) = 1$ , y  $b_1(z), \dots, b_r(z)$  estan dados por series convergentes. Escribimos;

$$b_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} z^j, \quad 0 \leq i \leq r \quad (1.8)$$

En particular,  $b_{00} = 1, b_{0j} = 0, (j \geq 1)$ , escribiendo ;

$$u = z^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_0 = 1$$

Calculamos  $Lz$ :

$$\begin{aligned} Lz &= \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} z^j D^{r-i} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{s+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^r b_{ij} (s+k)^{r-i} c_k z^{s+k+j} \\ &= z^s \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r b_{i,n-k} (s+k)^{r-i} c_k \right\} z^n \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta  $Dz^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}$ , escribimos;

$$f(s) = \sum_{i=0}^r b_{i,0} s^{r-i} = \sum_{i=0}^r b_i(0) s^{r-i}$$

**Definición 1.5.1** *La ecuación algebraica*

$$f(s) = 0 \quad (1.9)$$

*Se llama la ecuación característica en el punto singular regular  $z = 0$ . Las raíces de 1.9 son llamados los exponentes característicos.*



## 1. PRELIMINARES

---

### 1.6 Ecuaciones Fuchsianas

**Lema 1.6.1** *Una ecuación diferencial*

$$\{D^r + b_1(z)D^{r-1} + \cdots + b_r(z)\}u = 0$$

Es regular singular en  $z = 0$  si y solo si  $b_j$ , ( $1 \leq j \leq r$ ) son holomorfas en  $z = 0$

La ecuación 1.5 con coeficientes racionales es *Fuchsiana* si cada punto singular en  $\mathbb{C}$  es regular, y si después de un cambio de variable  $z$  en  $t = \frac{1}{z}$ , la ecuación transformada tiene un punto singular regular en  $t = 0$ . Los exponentes de  $t = 0$  son llamados los exponentes de 1.5 en el infinito.

**Proposición 1.6.2 (Una caracterización de las ecuaciones Fuchsianas)** *La ecuación 1.5 es Fuchsiana con singularidades regulares en  $z_1, \dots, z_m, z_{m+1} = \infty$  si y solo si los coeficientes tienen la siguiente forma:*

$$a_k(z) = \frac{p_k(z)}{\prod_{i=1}^m (z - z_i)^k}, \quad (k = 1, \dots, r)$$

Donde cada  $p_k(z)$  es un polinomio de grado a lo más  $k(m - 1)$ .

**Definición 1.6.3** *Un esquema de Riemann es una tabla donde se representan los puntos singulares  $z_1, \dots, z_{m+1}$  y los exponentes en  $s_1^1, \dots, s_i^r$  en  $z_i$ , el esquema de Riemann de 1.5 se expresa como*

$$\begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_{m+1} \\ s_1^1 & \cdots & s_{m+1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1^r & \cdots & s_{m+1}^r \end{pmatrix}$$

### 1.7 Esquema de Riemann de la ecuación hipergeométrica

Para nuestra ecuación hipergeométrica

$$(1 - z)z \frac{d^2 u}{dz^2} + \{c - (a + b + 1)z\} \frac{du}{dz} - abu = 0 \quad (1.10)$$

Deseamos hallar el esquema de Riemann correspondiente, esto nos sirve para hallar la monodromía más adelante por medio de las identidades de *Gauss - Kummer* ([KIY91]).

## 1.7 Esquema de Riemann de la ecuación hipergeométrica

---

Los puntos singulares de nuestra ecuación son  $1, 0, \infty$ , y esto lo podemos ver transformando la ecuación 1.10 a la forma estándar;

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{\{c - (a + b + 1)z\}}{z(z-1)} \frac{du}{dz} - \frac{ab}{z(z-1)}u = 0$$

Y obtenemos  $a_1(z) = \frac{c-(a+b+1)z}{z(z-1)}$  y  $a_2(z) = \frac{-ab}{z(z-1)}$ , podemos ver que los puntos singulares son  $0, 1$  e  $\infty$  (mostramos después que  $\infty$  también es un punto singular pero consideremos por ahora que esto es cierto). Estos puntos también son regulares como podemos verificar;

Para  $z = 0$

$$za_1(z) = z\left(\frac{c - (a + b + 1)z}{z(1 - z)}\right) = \frac{c - (a + b + 1)z}{1 - z}$$

Y

$$z^2a_2(z) = z^2\left(\frac{-ab}{z(1 - z)}\right) = \frac{-abz}{1 - z}$$

Y ambas son holomorfas en  $z = 0$ , análogamente verificamos que  $z = 1$  es un punto singular regular (El caso  $z = \infty$  se deja al final). Tenemos entonces 3 puntos singulares regulares para la ecuación 1.10, lo que deseamos ahora es hallar los exponentes en cada punto.

Para  $z = 0$  recordemos que los exponentes son las raíces de la ecuación 1.9, la cual esta dada en este caso por

$$f(s) = \sum_{i=0}^2 b_i(0)s^{r-i}$$

Y en este caso  $b_1(z) = za_1(z) - 1$  y  $b_2(z) = z^2a_2(z)$ , es decir  $b_1(z) = \frac{c-(a+b+1)z}{1-z} - 1$  y  $b_2(z) = \frac{-abz}{1-z}$  y por tanto;

$$f(s) = s^2 + b_1(0)s + b_2(0) = s^2 + (c - 1)s + 0$$

Cuyas raíces son  $0$  y  $c - 1$ . Para encontrar los exponentes en  $z = 1$  hacemos un proceso similar y escribimos;

$$D_1 = (z - 1) \frac{d}{dz}$$

Y se cumple la misma relación de antes entre  $D_1$  y  $\frac{d}{dz}$ , luego;

## 1. PRELIMINARES

---

$$(z-1)\left\{\frac{d^r}{dz^r} + a_1(z)\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} + \dots + a_r(z)\right\} = D_1^r + \left\{(z-1)a_1(z) - \frac{(r-1)(r)}{2}\right\}D_1^{r-1} + \dots$$

Si llamamos  $f_1$  a la ecuación característica de 1.5 en  $z = 1$ , tenemos en este caso  $b_1(z) = (z-1)a_1(z) - 1$  y  $b_2(z) = (z-1)^2a_2(z)$  entonces;

$$f_1(s) = s^2 + b_1s + b_2(1) = s^2 + \{c - (a + b + 1) + 1\}s = s^2 - (c - a - b)s$$

Cuyas raíces son 0 y  $c - a - b$ . Basta hallar los exponentes para  $z = \infty$ , hacemos una transformación  $t = \frac{1}{z}$  y definimos  $\theta \frac{d}{dt}$  y notando que  $D = -\theta$ , obtenemos entonces;

$$z^r \left\{ \frac{d^r}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} + \dots + a_r(z) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-(r-k)} a_{r-k}\left(\frac{1}{t}\right) (-1)^k \theta(\theta+1) \dots (\theta+k-1)$$

En nuestro caso, para  $r = 2$  la ecuación es

$$\theta^2 + (1 - t^{-1}a_1(\frac{1}{t}))\theta + t^{-2}a_2(\frac{1}{t})$$

Donde  $-t^{-1}a_1(\frac{1}{t}) = \frac{a+b+1-ct}{t-1}$  y  $t^{-2}a_2(\frac{1}{t}) = \frac{-ab}{t-1}$  de aquí vemos dado que ambas son holomorfas en 0 que  $z = \infty$  es un punto regular singular. Entonces si  $f_\infty$  denota la ecuación característica de 1.10 con el cambio de variable en  $t = 0$ , tenemos;

$$f_\infty(s) = s^2 + (-a - b)s + ab$$

Cuyas raíces son  $a$  y  $b$ , por tanto los exponentes en  $z = \infty$  de 1.10 son  $a$  y  $b$ . Concluimos con el esquema de *Riemann* de la ecuación hipergeométrica esta dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix}$$

.

### 1.8 Monodromía

Si consideramos de nuevo la ecuación 1.5, es posible asociarle una clase de conjugación en  $GL(2, \mathbb{C})$  a la cual llamamos la monodromía de la ecuación 1.5. Consideremos el grupo fundamental  $\Pi_1(D, b)$  donde  $D$  es una vecindad en la cual los

coeficientes de 1.5 son holomorfas y  $b \in D$ .

Sea  $U$  una vecindad simplemente conexa de  $b \in D$  y sea  $\mathfrak{F} = (u_1, \dots, u_n)$  un sistema fundamental de soluciones en  $U$ . Si  $\alpha \in \Pi_1(D, b)$  sea  $\gamma$  un representante y  $\gamma_*(F)$  la continuación analítica de  $\mathfrak{F}$  a lo largo de  $\gamma$ . El teorema de monodromía para la continuación analítica ([KIY91]) implica que  $\gamma_*\mathfrak{F}$  depende en la clase de homotopía  $\alpha$ , podemos escribir entonces  $\alpha_*\mathfrak{F}$  en lugar de  $\gamma_*\mathfrak{F}$ . Ya que la ecuación 1.5 es lineal,  $\alpha_*\mathfrak{F}$  es también un sistema fundamental de soluciones de 1.5 en  $U$  y hay una única matriz invertible  $M(\alpha; \mathfrak{F}) \in GL(n, \mathbb{C})$  tal que

$$\alpha_*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}M(\alpha; \mathfrak{F}) \quad (1.11)$$

Ya que  $e_*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$  y  $(\alpha\beta)_*\mathfrak{F} = \alpha_*(\beta_*\mathfrak{F})$  para  $\alpha, \beta \in \Pi_1(D, b)$  tenemos

$$M(e, \mathfrak{F}) = I, M(\alpha\beta; \mathfrak{F}) = M(\alpha; \mathfrak{F})M(\beta; \mathfrak{F})$$

Esto implica que el mapeo

$$\rho_{\mathfrak{F}} : \Pi_1(D, b) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), \alpha \mapsto M(\alpha; \mathfrak{F}).$$

Es un homomorfismo. Llamamos a  $\rho_{\mathfrak{F}}$  la representación de monodromía y a  $\rho_{\mathfrak{F}}(\Pi_1(D, b)) \subset GL(n, \mathbb{C})$  el grupo de monodromía de 1.5 respecto al sistema fundamental de soluciones  $\mathfrak{F}$ . Si  $\mathfrak{G}$  es otro sistema de soluciones en otro punto  $a$  y denotamos también por  $\mathfrak{G}$  la continuación analítica de este a lo largo de una curva que une  $a$  y  $b$ , existe una matriz  $C \in GL(n, \mathbb{C})$  tal que  $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}C$  y tenemos

$$\mathfrak{G}M(\alpha; \mathfrak{G}) = \alpha_*\mathfrak{G} = (\alpha_*\mathfrak{F})C = \mathfrak{F}M(\alpha; \mathfrak{F})C = \mathfrak{G}C^{-1}M(\alpha; \mathfrak{F})C.$$

Es decir

$$M(\alpha; \mathfrak{F}) = C^{-1}M(\alpha; \mathfrak{G})C.$$

En otras palabras

$$\rho_{\mathfrak{G}}(\alpha) = C^{-1}\rho_{\mathfrak{F}}(\alpha)C, \text{ para } \alpha \in \Pi_1(D, b) \quad (1.12)$$

la representación de monodromía no solo depende de la ecuación diferencial 1.5, depende de igual manera del sistema fundamental de soluciones. Notemos que de cualquier manera que 1.12 implica que cada par de representaciones de monodromía de 1.5 son conjugadas, tal que la clase de conjugación de la representación de monodromía se determina únicamente por la ecuación diferencial 1.5. A esta clase de conjugación la llamamos *La Monodromía* de la ecuación 1.5. entonces

## 1. PRELIMINARES

---

el grupo de monodromía  $\rho_{\mathfrak{F}}(\Pi_1(D, b))$  de 1.5 respecto de cualquier  $\mathfrak{F}$  pertenece a la misma clase de conjugación, que también llamamos *La Monodromía* de 1.5.

Cuando 1.5 es una ecuación diferencial fuchsiana en la esfera de Riemann con puntos singulares regulares en  $p_1, \dots, p_m, p_{m+1} = \infty$ , se toma  $D = \mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ . Para cada  $j = 1, \dots, m$ , sea  $U_j$  un disco abierto en  $D \cup \{p_j\}$  centrado en  $p_j$ , y sea  $l_j$  un lazo en  $U_j \setminus \{p_j\}$  con punto base  $q_j \in U_j \setminus \{p_j\}$  que encierra  $p_j$  una vez en sentido antihorario, y sea  $\mathfrak{F}_j$  un sistema fundamental de soluciones de 1.5 en una vecindad simplemente conexa de  $b$  y  $\gamma_j, (j = 1, \dots, m)$  arcos con punto inicial  $b$  y punto final  $q_j$ . Las matrices de conexión  $C_j \in GL(n, \mathbb{C}), (j = 1, \dots, m)$  se definen por

$$\gamma_{j*} \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_j C_j \quad (1.13)$$

**Problema 1.8.1** *Problema de matrices de conexión Dada una ecuación diferencial lineal, sean  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_j$  y  $C_j$  como antes. Encontrar una expresión explícita de las  $C_j$ .*

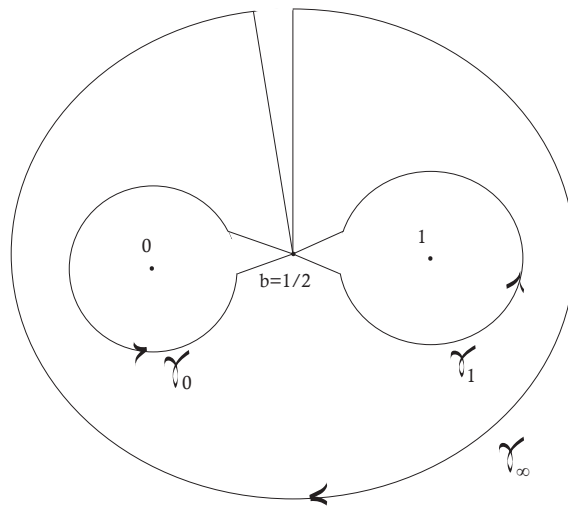
*Las matrices de circuito  $M_j$  alrededor de  $p_j$  se pueden definir por*

$$l_{j*} \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j M_j \quad (1.14)$$

Ya que los generadores del grupo de monodromía respecto a  $\mathfrak{F}$  estan dados por

$$C_j^{-1} M_j C_j,$$

Notamos que el problema de monodromía es parte del problema de conexión.



**Figura 1.2:** Lazos anclados en  $b = \frac{1}{2}$

## 1.9 Monodromía de la ecuación hipergeométrica

---

El problema de hallar la monodromía respectiva a una ecuación diferencial es un problema complicado, afortunadamente existen métodos que nos permiten hallar (en ciertos casos) la monodromía de la ecuación hipergeométrica y también el grupo de monodromía para soluciones particulares. En los siguientes capítulos hallamos la monodromía de la ecuación hipergeométrica y uno de los grupos de monodromía respecto de las soluciones dadas en 1.1.

### 1.9 Monodromía de la ecuación hipergeométrica

En esta sección encontramos la monodromía de la ecuación hipergeométrica a través de su esquema de Riemann por medio de propiedades locales y la relación de Fuchs, utilizando fuertemente que la ecuación hipergeométrica resulta ser irreducible.

Sea  $G = \pi_1(D, b)$  y  $\gamma_j \in G$ , ( $j = 0, 1, \infty$ ), lazos en  $b$ . Sea  $\rho : G \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$  una representación de monodromía del esquema de Riemann

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \rho_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \rho_2 & \sigma_2 & \tau_2 \end{pmatrix}$$

Dado que

$$\rho(\gamma_1 \cdot \gamma_0) = \rho(\gamma_\infty)^{-1} \quad (1.15)$$

ya que

$$\gamma_\infty^{-1} = \gamma_1 \gamma_0 \quad (1.16)$$

Y

$$\gamma_0 \gamma_1 \quad (1.17)$$

es conjugado a  $\gamma_1 \gamma_0$ , tenemos;

$$\{\varepsilon(\rho_1), \varepsilon(\rho_2)\} \text{ conjunto de eigenvalores de } \rho(\gamma_0) \quad (1.18)$$

$$\{\varepsilon(\sigma_1), \varepsilon(\sigma_2)\} \text{ conjunto de eigenvalores de } \rho(\sigma_1) \quad (1.19)$$

$$\{\varepsilon(-\tau_1), \varepsilon(-\tau_2)\} \text{ conjunto de eigenvalores de } \rho(\sigma_0 \sigma_1) \quad (1.20)$$

Donde  $\varepsilon(\cdot) = \exp(2\pi i \cdot)$ . La clase de conjugación de  $\rho$ , es decir la monodromía de  $RE(\rho, \sigma, \tau)$  esta casi determinada por los eigenvalores, y esta completamente determinada si la monodromía es irreducible.

**Definición 1.9.1** *La ecuación de Riemann  $RE(\rho, \sigma, \tau)$  se dice irreducible si la monodromía es irreducible*

## 1. PRELIMINARES

---

**Teorema 1.9.2** *La ecuación de Riemann es irreducible si y solo si*

$$\rho_i + \sigma_j + \tau_k \notin \mathbb{Z}, (i, j, k = 1, 2)$$

*Bajo esta condición la representación  $\rho$  se expresa hasta conjugación por las siguientes matrices:*

$$\rho(\gamma_0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho_1) & 1 \\ 0 & \varepsilon(\rho_2) \end{pmatrix}, \quad \rho(\gamma_1) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma_1) & 0 \\ b & \varepsilon(\sigma_2) \end{pmatrix}$$

*Y el número  $b$  esta dado por  $b = \varepsilon(-\tau_1) + \varepsilon(-\tau_2) - \varepsilon(\rho_1 + \sigma_1) - \varepsilon(\rho_2 + \sigma_2)$ . Todas las representaciones obtenidas al intercambiar  $\rho_1, \rho_2$  y/o  $\sigma_1, \sigma_2$  son mutuamente conjugadas.*

En nuestro caso tenemos el esquema de Riemann;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix}$$

Y verificamos si satisface las condiciones del teorema, tenemos los siguientes casos:

1.  $0+0+a = a$
2.  $0+c-a-b+b = c-a$
3.  $0+c-a-b+a = c-b$
4.  $1-c+0+a = 1-c+a$
5.  $1-c+0+b = 1-c+b$
6.  $1-c+c-a-b+b = 1-a$
7.  $0+0+b = b$
8.  $1-c+c-a-b+a = 1-b$

Queremos calcular  $a, c-a, c-b, 1-c+a, 1-c+b, 1-a, b, 1-b$ , y estamos considerando que los exponentes  $1-c, c-a-b, a-b$  son imaginarios puros, por lo que basta probar que ninguno de los anteriores estan en  $\mathbb{Z}$ . No es difícil verificar que  $b = \frac{1-i(\theta_0+\theta_1+\theta_2)}{2} \notin \mathbb{R}$ . Para  $a$  tenemos;

$$a = \frac{1-i(\theta_0+\theta_1-\theta_2)}{2}.$$

## 1.10 Grupo de monodromía con las soluciones dadas por la serie hipergeométrica

---

Y podemos ver que  $a \notin \mathbb{R}$  o  $a = \frac{1}{2}$  de cualquier modo  $a \notin \mathbb{Z}$ . Para  $c - a$  se tiene;

$$c - a = \frac{1 + i(-\theta_0 + \theta_1 - \theta_2)}{2}.$$

Por lo que de nuevo  $c - a \notin \mathbb{R}$  o  $c - a = \frac{1}{2}$ , y de cualquier modo  $c - a \notin \mathbb{Z}$ . Para  $c - b$  se tiene;

$$c - b = \frac{1 + i(\theta_2 + \theta_1 - \theta_0)}{2}.$$

Entonces  $c - b \notin \mathbb{R}$  o  $c - b = \frac{1}{2}$  y en cualquier caso  $c - b \notin \mathbb{Z}$ . Para  $1 - c + a$  notamos que  $1 - c + a = -(c - a - 1)$  y  $c - a - 1 = -\frac{1}{2}$  o  $c - a - 1 \notin \mathbb{R}$ . En los casos restantes un proceso análogo nos enseña que ninguno de los números considerados está en  $\mathbb{Z}$ .

Invocamos el teorema 1.9.2 al esquema de Riemann que hallamos para nuestra ecuación, y obtenemos que las matrices que generan la monodromía de la ecuación hipergeométrica con exponentes imaginarios puros son:

$$\rho(\gamma_0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^{2\pi i(1-c)} \end{pmatrix}, \quad \rho(\gamma_1) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & e^{2\pi i(c-a-b)} \end{pmatrix}$$

Con  $b = e^{-2\pi ia} + e^{-2\pi ib} - 1 - e^{2\pi i(1-a-b)}$ , y la monodromía de la ecuación hipergeométrica es generada por  $\rho(\gamma_0), \rho(\gamma_1)$  en  $GL(2, \mathbb{C})$ .

## 1.10 Grupo de monodromía con las soluciones dadas por la serie hipergeométrica

En este capítulo pretendemos dar a conocer el grupo de monodromía con el par de sistemas fundamentales de soluciones hallados en 1.1, utilizando las identidades de *Gauss – Kummer*. El enfoque principal en este capítulo es exponer las herramientas necesarias para ese propósito y los resultados principales que llevan a una expresión del grupo de monodromía con los sistemas fundamentales de soluciones dadas. Los teoremas y resultados de este capítulo pueden encontrarse en [KIY91] así como sus demostraciones, y se remite al lector a dicha bibliografía para un desarrollo más profundo de lo expresado aquí.

Queremos resolver el problema de conexión utilizando las identidades de *Gauss – Kummer* y encontrar generadores para el grupo de monodromía de la ecuación diferencial hipergeométrica con las soluciones dadas en 1.1. Los sistemas fundamentales de soluciones son  $(f_0(x; 0), f_0(x; 1 - c))$  y  $(f_1(x; 0), f_1(x; c - a - b))$ , queremos encontrar una relación entre estos sistemas.



## 1. PRELIMINARES

---

**Teorema 1.10.1** *Si ninguno de los exponentes  $c$  o  $c - a - b$  es un entero entonces*

$$(f_0(x; 0), f_0(x; 1 - c)) = (f_1(x; 0), f_1(x; c - a - b))P$$

donde  $P$  es la matriz definida por

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \\ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix}$$

y  $\Gamma$  es la función Gamma.

En nuestro caso los exponentes  $1 - c$  y  $c - a - b$  están en  $i\mathbb{R}$  por lo que  $c$  y  $c - a - b$  cumplen las condiciones del teorema.

Los lazos en la fig. 1.2 nos sirven para hacer la continuación analítica del sistema fundamental de soluciones  $(f_0(x; 0), f_0(x; 1 - c))$  y gracias al teorema anterior sabemos que tendremos una matriz conjugada bajo  $P$  que será generador de nuestro grupo de monodromía.

**Teorema 1.10.2** *Sea  $\gamma_v$ , ( $v = 0, 1$ ) lazos con punto inicial y final  $b = \frac{1}{2}$  definidos en 1.2, supongamos que ni  $c$  ni  $c - a - b$  son enteros. La continuación analítica del sistema fundamental de soluciones  $\mathfrak{F} = (f_0(x; 0), f_0(x; 1 - c))$  a lo largo de  $\gamma_v$  está dada por*

$$\gamma_{v*}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}A_v, (v = 0, 1)$$

Donde  $A_v$  son matrices definidas por

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon(-c) \end{pmatrix}, \quad A_1 = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon(c - a - b) \end{pmatrix} P$$

Donde  $P$  está dada por 1.10.1 y  $\varepsilon(\cdot) = \exp(2\pi i \cdot)$ . El grupo de monodromía respecto al sistema fundamental de soluciones  $\mathfrak{F}$  está generado por  $A_0$  y  $A_1$ .

# Grupo de Schottky de la ecuación hipergeométrica

Nuevamente consideramos la ecuación hipergeométrica

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{du}{dx} - abu = 0,$$

cuyos exponentes son

$$1 - c = i\theta_0, \quad c - a - b = i\theta_1, \quad a - b = i\theta_2.$$

Donde supondremos  $\theta_0, \theta_1, \theta_2 > 0$ . Para cualesquiera dos soluciones linealmente independientes  $u_1$  y  $u_2$  tenemos el mapeo multivaluado

$$s : \mathbb{C} - \{0, 1\} \ni x \mapsto u_1(x) : u_2(x) \in \mathbb{P} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

llamado el mapeo de Schwarz.

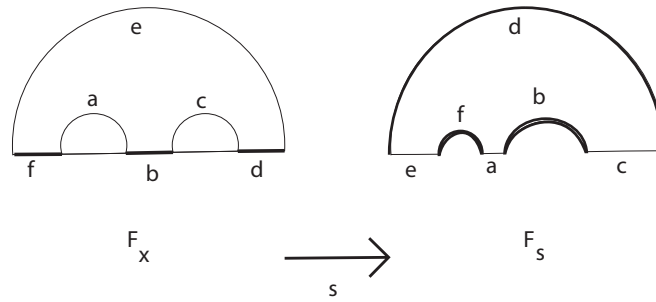
## 2.1 Dominios fundamentales

En [SY01] se pueden encontrar un dominio  $F_x$  en  $\mathbb{C}$  y un dominio  $F_s$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$  tal que el mapeo

$$s|_{F_x} : F_x \rightarrow F_s$$

## 2. GRUPO DE SCHOTTKY DE LA ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Es un biholomorfismo y el mapeo  $s$  se puede recuperar via el mapeo restringido  $s|_{f_x}$  a través del principio de reflexión de Schwarz ([SY01]), estos se llaman dominios fundamentales para el mapeo de Schwarz.



**Figura 2.1:** Dominios fundamentales

Denotemos por  $C(c, r)$  el círculo en el plano  $s$  con centro  $c$  y radio  $r$  y considerense los tres círculos disjuntos en el plano  $s$

$$C_1 = C(0, 1), C_2 = C(0, T), C_3 = C(-C, R),$$

donde  $T = e^{\theta_1\pi}, r = e^{-\theta_0\pi}$

$$C = \frac{\xi(1-r^2)}{\xi^2-r^2}, R = \frac{r(1-\xi^2)}{\xi^2-r^2}, \xi = \left( \frac{\cosh\theta_2\pi + \cosh(\theta_0 - \theta_1)\pi}{\cosh\theta_2\pi + \cosh(\theta_0 + \theta_1)\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cuando  $\theta_2 = 0$

$$\cosh(\theta_0 - \theta_1)\pi = \frac{1 + (rt)^2}{2rT}.$$

y

$$\cosh(\theta_0 + \theta_1)\pi = \frac{r^2 + T^2}{2rT}.$$

Y también  $\cosh\theta_2\pi = 1$  por lo que

## 2.1 Dominios fundamentales

---

$$\xi^2|_{\theta_2=0} = \frac{1 + \frac{1+(rt)^2}{2rT}}{1 + \frac{r^2+T^2}{2rT}} = \frac{\frac{2rT+1+(rt)^2}{2rT}}{\frac{2rT+r^2+T^2}{2rT}} = \frac{T^2 + 2rT + 1}{r^2 + 2rT + T^2} = \frac{(rT + 1)^2}{(r + T)^2}.$$

Entonces  $\xi|_{\theta_2=0} = \frac{Tr+1}{T+r}$ . Ya que  $T > 1$  y  $r < 1$  tenemos por un lado  $r^2 < 1$  entonces  $Tr + r^2 < Tr + 1$ , es decir,  $r(T + r) < Tr + 1$ , entonces;  $r < \frac{Tr+1}{T+r}$ . Por otro lado;  $r < 1$  y también  $T - 1 > 0$  por lo que  $(T - 1)r < T - 1$  entonces  $Tr - r < T - 1$  y luego  $Tr + 1 < T + r$  por lo que  $\frac{Tr+1}{T+r} < 1$  Dado que  $\xi$  como una función de  $\theta_2 \geq 0$  incrementa de manera monótona a 1 y

$$1 > \xi|_{\theta_2=0} = \frac{Tr + 1}{T + r} > r$$

tenemos

$$\begin{aligned} C - R - 1 &= \frac{\xi(1 - r^2)}{\xi^2 - r^2} - \frac{r(1 - \xi^2)}{\xi^2 - r^2} - 1 = \frac{\xi - \xi r^2 - r + r\xi^2 - \xi^2 - r^2}{\xi^2 - r^2} \\ &= \frac{\xi - r + \xi r(-r + \xi) - (\xi - r)(\xi + r)}{\xi^2 - r^2} \\ &= \frac{(\xi - r)(1 + \xi r - (\xi + r))}{(\xi + r)(\xi - r)} \\ &= \frac{1 + \xi r - (\xi + r)}{\xi + r} = \frac{(1 - r)(1 - \xi)}{\xi + r} > 0 \\ T - C - R &= \frac{(T + r)\xi - (Tr + 1)}{\xi - r} > 0, \end{aligned}$$

y tenemos

$$-T < -C - R < -C + R < -1 < 1 < T$$

**Comentario 2.1.1** Existe una relación entre el número  $\xi$  y los elementos de la matriz  $P$  en el teorema 1.10.1 y una relación entre dichos elementos, estas relaciones son importantes para verificar más adelante que en efecto podemos decir que el grupo de monodromía de la ecuación hipergeométrica es un grupo de Schottky, Las relaciones son las siguientes;

$$P = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}, \quad \xi = \frac{|A|}{|B|}$$

Y también  $A = \bar{D}$ ,  $B = \bar{C}$

## 2. GRUPO DE SCHOTTKY DE LA ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA

El dominio en el semi-plano superior, acotado por  $C_1, C_2, C_3$  y el eje real, puede servir como un dominio fundamental  $F_s$ , y tiene la forma de un puente de doble arco como en la figura 2.1. El dominio fundamental  $F_x$  también tiene la forma de un puente de doble arco como en la figura 2.1, y esta acotado por tres segmentos reales y tres curvas que no son parte de circunferencias.

### 2.2 El grupo de monodromía generado por reflexiones

Gracias a estos dominios fundamentales y el principio de reflexión de Schwarz (A) aplicado a lo largo de los lados, el grupo de monodromía de la ecuación diferencial se puede describir como sigue. La reflexión con respecto al círculo  $C(c, r)$  donde  $c$  es real, esta dada por

$$\psi(c, r) : s \mapsto \frac{r^2}{\bar{s} - c}.$$

Sea  $\bar{\Lambda}$  el grupo generado por las tres reflexiones respecto a los círculos  $C_1, C_2, C_3$ , respectivamente. El grupo de monodromía  $\Lambda_\theta$  de la ecuación hipergeométrica es el subgrupo de  $\bar{\Lambda}$ , de índice 2 que consiste de las palabras pares de  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ .

Por otro lado, para el círculo  $C(c, r)$  definimos la transformación fraccional lineal de orden 2 que fija los dos puntos de intersección del círculo y el eje real:

$$\gamma(c, r) : s \mapsto \frac{r^2}{s - c} + c.$$

Sea  $\Gamma_\theta$ , el grupo generado por tres involuciones  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  con respecto a los círculos  $C_1, C_2, C_3$ , respectivamente. El grupo de monodromía  $\Lambda_\theta$  es el subgrupo de  $\Gamma_\theta$ , de índice 2 que consiste de las palabras pares de  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Sea  $\omega(\subset \mathbb{P}^1)$  el dominio de discontinuidad de  $\Gamma_\theta$  y el grupo de Schotky  $\Lambda_\theta$ .

Esta representación tiene algunos problemas, aunque la ecuación hipergeométrica es simétrica respecto de  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ , los tres círculos  $C_1, C_2, C_3$  no lo son. Por ejemplo si  $\theta_2 \rightarrow 0$  los círculos  $C_2$  y  $C_3$  se tocan, y si  $\theta_1 \rightarrow 0$  entonces  $C_3$  tiende a un punto y  $C_1$  y  $C_2$  coinciden, más aún ya que  $C_1$  y  $C_2$  son concéntricos. Hacemos un cambio de coordenadas como sigue:

$$s \mapsto \frac{(3 + T^2)s + 1 + 3T^2}{4(s + T^2)}.$$

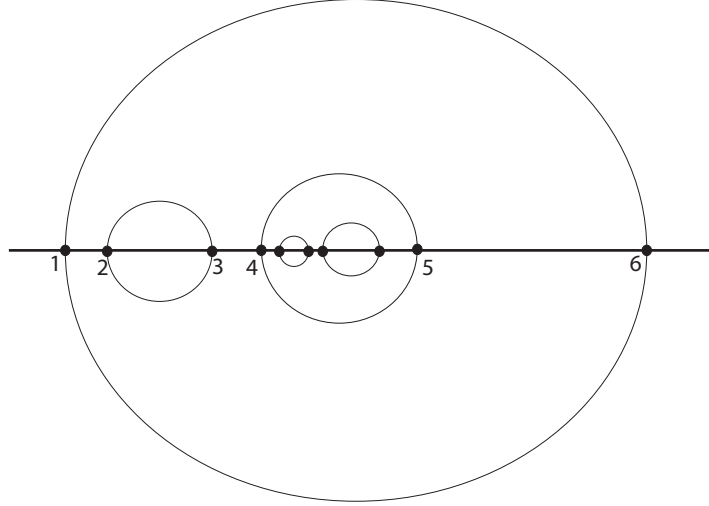
entonces los diámetros de los círculos en el eje real están dados por

$$C_1 : [s_4, s_5], C_2 : [s_1, s_6], C_3 : [s_2, s_3],$$

donde

$$s_1 = -\frac{(1 - T)^2}{4T}, s_2 = -\frac{(T - 1)^3 - (3 + T^2)(T - C - R)}{4(T^2 - T + T - C - R)}$$

## 2.2 El grupo de monodromía generado por reflexiones



**Figura 2.2:** Círculos  $C_1, C_2, C_3$

$$s_3 = -\frac{(1+T^2)(C-R-1)}{4(T^2-1-(C-R-1))} + \frac{1}{2}, s_4 = \frac{1}{2}$$

$$s_5 = 1, s_6 = \frac{(1+T)^2}{4T}$$

Notemos que  $s_1 < s_2 < \dots < s_6$ , Ahora podemos probar lo siguiente,

**Proposición 2.2.1** Si  $\theta_1 = 0$ , entonces  $C_1$  y  $C_2$  se tocan en un punto. Si  $\theta_2 = 0$  entonces  $C_2$  y  $C_3$  se tocan en un punto. Si  $\theta_0 = 0$ , entonces  $C_3$  y  $C_1$  se tocan en un punto

*Prueba.*

Cuando  $\theta_1 = 0$ , notemos que en este caso  $T = e^{\theta_1\pi}$  y dado que  $\theta_1 = 0$  se tiene que  $T = 1$ , también recordemos que  $C_1 : [s_4, s_5]$  y  $C_2 : [s_1, s_6]$  y dado que  $s_5 = 1$  y  $s_6 = \frac{(1+T^2)^2}{4T} = \frac{(1+1^2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ , concluimos que  $C_1$  y  $C_2$  se tocan en 1.

Si  $\theta_2 = 0$ , primero veremos que  $T - C - R = 0$ , como  $\theta_2 = 0$  entonces  $\xi = \frac{T_{r+1}}{T+r}$  esto implica que  $(T+r)\xi = Tr + 1$  y como  $T - C - R = \frac{(T+r)\xi - (Tr+1)}{\xi - r} = \frac{Tr+1 - (Tr+1)}{\xi - r} = 0$ , Ahora bien  $s_1 = -\frac{1-T^2}{4T}$  y  $s_2 = -\frac{(T-1)^3 - (3+T^2)(T-C-R)}{4(T^2 - T + T - C - R)} = -\frac{(T-1)^3}{4(T^2 - T)} = -\frac{(T-1)^2(T-1)}{4T(T-1)} = -\frac{(T-1)^2}{4T} = s_1$  por lo que  $C_2$  y  $C_3$  se tocan en  $s_1$ .

Por último si  $\theta_0 = 0$  tenemos  $r = e^{-\theta_0\pi}$  en este caso  $r = 1$  mostremos que  $C - R - 1 = 0$ . De las deducciones anteriores  $C - R - 1 = \frac{(1-r)(1-\xi)}{\xi+r}$ , Entonces  $C - R - 1 = 0$  ya que  $r = 1$ , entonces  $s_3 = \frac{(1+T^2)(C-R-1)}{4(T^2-1-C-R-1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ya que

## 2. GRUPO DE SCHOTTKY DE LA ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA

---

$C - R - 1 = 0$  y dado que  $C_3 : [s_2, s_3]$  y  $C_1 : [s_4, s_5]$  por los calculos anteriores obtuvimos  $s_4 = s_3$  (recordando que  $s_4 = \frac{1}{2}$ ), Concluyendo con la prueba.  $\square$

### 2.3 El grupo de Schottky asociado al grupo de Monodromía

Si ahora tomamos como antes las reflexiones  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , definimos las siguientes transformaciones;

$$\gamma_1 = \psi_2\psi_1, \quad \gamma_2 = \psi_1\psi_3.$$

Y tomamos los círculos  $C_1, C_3$  y  $C'_1 = \psi_2(C_1), C'_3 = \psi_1(C_3)$ , luego por definición tenemos;

$$\gamma_1(C_1) = C'_1, \quad \gamma_2(C_3) = C'_3.$$

Además tenemos que el exterior de  $C_1$  se mapea al interior de  $C'_1$  y el exterior de  $C_3$  se mapea al interior de  $C'_3$ , por la definición tenemos un grupo de *Schottky* de genus 2 (genero 2). Para el grupo de *Schottky* anterior tenemos que sus transformaciones estan dadas también por;

$$\gamma_1 = sT^2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{s+C}{-Cs+R^2-C^2} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & C \\ -C & R^2-C^2 \end{pmatrix}.$$

Y notando que  $C = \frac{|A||B|(1-r^2)}{|A|^2-|B|^2r^2}$  y  $R^2 - C^2 = \frac{|A|^2r^2-|B|^2}{|A|^2-|B|^2r^2}$  podemos ver que son conjugadas bajo  $P$  a las matrices del grupo de monodromía de la ecuación hipergeométrica 1.10.2.

## El teorema de Nielsen

En este capítulo proponemos un teorema sobre la acción discontinua de grupos de transformaciones que pretendemos aplicar al caso del grupo de monodromía de la ecuación hipergeométrica.

Todo en este capítulo es pensado en el sentido de Poincaré y hacemos un breve recordatorio de los conceptos que ocupamos durante el mismo.

Tratamos de dar una caracterización de los grupos propiamente discontinuos de transformaciones lineales fraccionales con círculo principal en el sentido de la teoría de automorfismos. Representamos al plano hiperbólico como una región circular en el plano complejo, este modelo llamado el disco de Poincaré se divide en dos partes de  $\{z \mid |z| \leq 1\}$ , el interior lo denominamos  $D = \{z \mid |z| < 1\}$  y la frontera lo denominamos  $E = \{z \mid |z| = 1\}$ . Todas las consecuencias geométricas las entendemos en el sentido no-euclidío. También denotamos por  $\mathbb{H}^+$  al modelo hiperbólico del semiplano.

Llamamos puntos finales a los extremos de una recta situados en el círculo infinito, e identificamos tres tipos de relaciones entre las rectas, a saber; concurrentes, paralelas y divergentes.

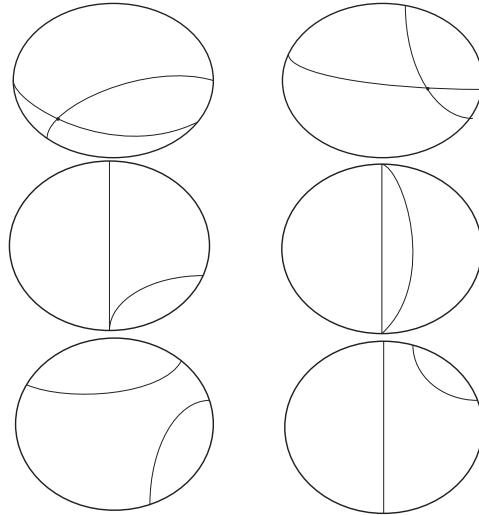
### Definición 3.0.1 (Relaciones entre las rectas)

1. *Las rectas Paralelas son dos rectas que tienen un punto final en común.*
2. *Las rectas Concurrentes son las que se intersectan en  $D$ .*



### 3. EL TEOREMA DE NIELSEN

---



**Figura 3.1:** Rectas hiperbólicas concurrentes, paralelas y divergentes respectivamente.

3. Las rectas Divergentes son las que no se intersectan en ningún lugar.

#### **Definición 3.0.2**

Los **Horociclos** son círculos tangentes a algún punto en la frontera  $E$  de  $S^1$ . Es importante dejar en claro que los Horociclos no son geodésicas.

#### **Definición 3.0.3**

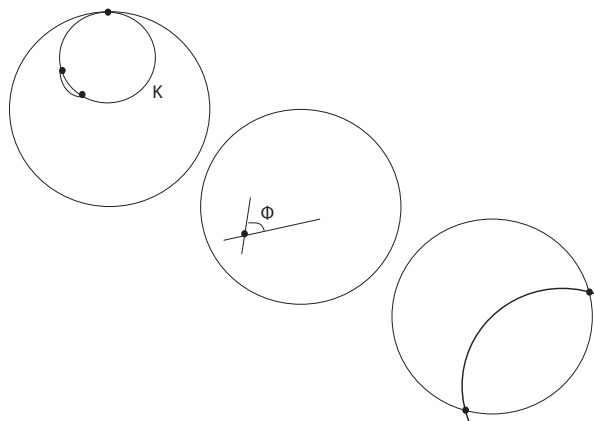
Los **hiperciclos** se forman por una recta  $L$  y un punto  $P$  fuera de ella, el hiperciclo es el lugar geométrico de todos los puntos a distancia  $d_H(P, L)$ , de  $L$  y del mismo lado de  $P$ .  $d_H$  es la distancia hiperbólica. De igual manera los hiperciclos no son geodésicas.

Dividiremos las transformaciones isométricas en dos grupos, las que preservan la orientación y las que no. En el grupo de las que preservan la orientación distinguimos tres tipos distintos de transformaciones;

#### **Definición 3.0.4 (Clasificación de las transformaciones)**

1. Las transformaciones **parabólicas** tienen un punto fijo en  $E$  y dado un horociclo  $K$  tangente en dicho punto fijo a  $E$ , esta transformación tiene un desplazamiento fijo en  $K$ .

- 
2. Las transformaciones **elípticas** tienen un punto fijo en  $D$  y un ángulo fijo  $\phi$  de rotación en torno al punto fijo.
  3. Las transformaciones **hiperbólicas** tienen dos puntos fijos en  $E$  y una recta invariante, la recta que pasa por dichos puntos fijos la llamamos eje de la transformación.



**Figura 3.2:** Representación de los puntos importantes en las transformaciones hiperbólicas

Si  $G$  es un grupo de transformaciones isométricas, un punto invariante para  $G$  es un punto fijo bajo todos los elementos de  $G$ , de una manera similar pensamos en una recta invariante.

Un par de conjuntos de puntos  $M$  y  $M'$  en  $D \cup E$  son equivalentes respecto a  $G$  si existe  $f \in G$  tal que  $M = fM'$ . El total de conjuntos equivalentes de  $M$  se denota como la familia  $GM$  llamada clase de equivalencia de  $M$ , en esta familia si  $f_1, f_2 \in G$  y  $f_1 \neq f_2$  entonces  $f_1M \neq f_2M$  sin importar que como conjunto sean iguales.

**Definición 3.0.5** Decimos que  $G$  es discontinuo en un punto  $x \in D$ , si  $x$  no es un punto de acumulación de la clase  $Gx$ , si esto sucede  $Gx$  no tiene puntos de acumulación en  $D$

**Proposición 3.0.6** Si  $G$  es discontinuo en  $x$ ,  $G$  no tiene puntos de acumulación en  $D$ .

### 3. EL TEOREMA DE NIELSEN

---

*Prueba:*

Supongamos que  $G$  es discontinuo en  $x$ , existe  $m$  tal que  $\forall i, j, d_H(g_i x, g_j x) > m$ , de otro modo  $x$  sería un punto de acumulación de  $Gx$ . Sea  $y$  un punto arbitrario de  $D$  y sea  $U_r$  una vecindad de  $y$  de radio  $r < m$ , entonces a lo más hay un punto  $gx$  de  $Gx$  en  $U_r$ , si tomamos  $V_{r'}$  vecindad de  $y$  con  $r' < d_H(gx, y)$ , esa vecindad no contiene puntos de  $Gx$ .  $\square$

Esto implica que si  $G$  es discontinuo en un punto de  $D$  entonces es discontinuo en todo  $D$ .

Las únicas isometrías de  $\mathbb{H}^+$  que preservan la orientación son las de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , las transformaciones mencionadas con anterioridad se encuentran en este grupo. Si  $f \in PSL(2, \mathbb{R})$  y  $g$  otra transformación entonces  $gfg^{-1}$  es de la misma clase que  $f$ .

Llamaremos **reversiones** a las transformaciones que invierten la orientación, las reversiones son las **reflexiones** respecto a una recta, y las reflexiones compuestas con elementos hiperbólicos a las que llamamos **h-reflexiones**.

La reflexión respecto a una recta hiperbólica es la reflexión respecto a una circunferencia euclidiana.

**Teorema 3.0.7** [Teorema de Nielsen] *Una condición necesaria y suficiente para que un grupo de transformaciones isométricas en el plano hiperbólico sin puntos ni líneas invariantes sea discontinuo en  $D$  es que los puntos fijos de los elementos elípticos del grupo, si los hay, no se acumulen en  $D$*

La condición de que no tenga puntos ni rectas invariantes es necesaria, como podemos ver en los siguientes casos.

1. Si  $G$  es un grupo de elementos parabólicos con un mismo punto fijo al infinito.
2. Si  $G$  es un grupo de elementos hiperbólicos con una recta fija dada.

Ninguno de los anteriores contiene elementos elípticos sin embargo ninguno es discontinuo en  $D$ .

Si  $G$  contiene reversiones y  $H$  es un subgrupo de  $G$  y además  $H \subseteq PSL(2, \mathbb{R})$  se tiene que  $H$  es normal y de índice 2. Es normal ya que si  $f \in H$  para cualquier elemento  $g \in G$  se tiene que  $gfg^{-1}$  es del mismo tipo que  $f$  por lo que  $gfg^{-1} \in H$ , es de índice 2, para ver esto basta probar que si  $f, g \in G - H$  entonces  $f \cong g$

---

equivalentemente que  $fg^{-1} \in H$ , dado que  $f, g$  revierten orientación se tiene que  $fg^{-1}$  conserva la orientación y por lo tanto esta en  $H$ .

Una clase de equivalencia  $Gx$  es la suma de las clases  $Hx$  y  $Hgx$  con  $g$  una reversión en  $G$  ( $H \cup Hg = G \Rightarrow Hx \cup Hgx = Gx$ ), por lo que se concluye que  $G$  y  $H$  son ambos discontinuos en  $D$  o ambos no lo son. En otras palabras  $H$  es discontinuo en  $D$  si y solo si  $G$  lo es.

**Proposición 3.0.8** *Si  $G$  no tiene rectas ni puntos invariantes tampoco los tiene  $H$ .*

*Prueba:*

Supongamos que  $H$  deja invariantes un punto en  $D \cup E$ , pero ningún otro punto (y por tanto ninguna recta), como  $G$  no deja puntos invariantes, existe  $g \in G$  tal que  $gc \neq c$  luego el subgrupo  $gHg^{-1}$  deja invariante  $gc$  pero ningún otro punto en  $D \cup E$  pero como  $H \triangleleft G$  se tiene que  $gHg^{-1} = H$  y como  $gc \neq c$  implica que  $H$  fija  $c$  y  $gc$  lo cual es una contradicción, concluimos que  $H$  no deja puntos invariantes. Un razonamiento análogo nos enseña que  $H$  no deja rectas invariantes.

□

Desde ahora  $G$  denotará un subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$  sin puntos ni rectas invariantes.

Ahora probamos el **Teorema 3.0.7** para el caso cuando el grupo tiene elementos elípticos.

*Prueba:*

Primero probaremos que si los puntos fijos de los elementos elípticos se acumulan  $\Rightarrow G$  no es discontinuo en  $D$

Supongamos que los puntos fijos de los elementos elípticos se acumulan en  $x \in D$  (tiene un punto de acumulación en  $D$ ), es posible encontrar una sucesión de puntos fijos que convergen al punto de acumulación  $x$ .

Sean estos puntos fijos  $y_1, y_2, \dots$  y  $f_1, f_2, \dots$  los respectivos elementos elípticos. Por un lado  $d_H(y_i, x) \leq \epsilon$  para  $i$  adecuada, considerando  $\{f_i x\}$  podemos notar que

$$d_H(f_i x, x) \leq d_H(f_i x, y_i) + d_H(y_i, x) = 2d_H(y_i, x)$$

Lo anterior debido a que  $f_i$  fija  $y_i$  y que es una isometría. Luego entonces  $f_i x \rightarrow x$ , es decir  $Gx$  se acumula en  $x$  por tanto  $G$  no es discontinuo en  $x$  y por lo tanto no lo es en  $D$ .

### 3. EL TEOREMA DE NIELSEN

---

Si los puntos fijos de los elementos elípticos no se acumulan en  $D \Rightarrow G$  es discontinuo en  $D$ .

Sea  $c$  un punto fijo de algún elemento elíptico en  $G$ . Basta notar que  $Gc$  contiene solo puntos fijos de elementos elípticos de  $G$ , observando que para  $g(c) \in Gc$  el elemento  $gfg^{-1} \in G$  lo deja fijo si  $f$  es un elemento elíptico que fija  $c$ , luego  $c$  no es un punto de acumulación de  $Gc$  ya que los puntos fijos de elementos elípticos no se acumulan, entonces  $G$  es discontinuo en  $c$  y por lo tanto  $G$  es discontinuo en  $D$   $\square$ .

A continuación presentamos unos lemas principales que nos ayudan a la parte final de la demostración del teorema de Nielsen.

#### 3.1 El lema de los elementos hiperbólicos con ejes divergentes

**Lema 3.1.1** Sean  $f$  y  $g$  elementos hiperbólicos cuyos ejes son divergentes y cuyos desplazamientos  $\lambda$  miden lo mismo pero tienen sentidos opuestos, y sea  $\delta$  la distancia entre sus ejes, entonces  $fg$  es elíptico, parabólico o hiperbólico dependiendo de

$$\operatorname{senh}\frac{1}{2}\delta\operatorname{senh}\frac{1}{2}\lambda \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$$

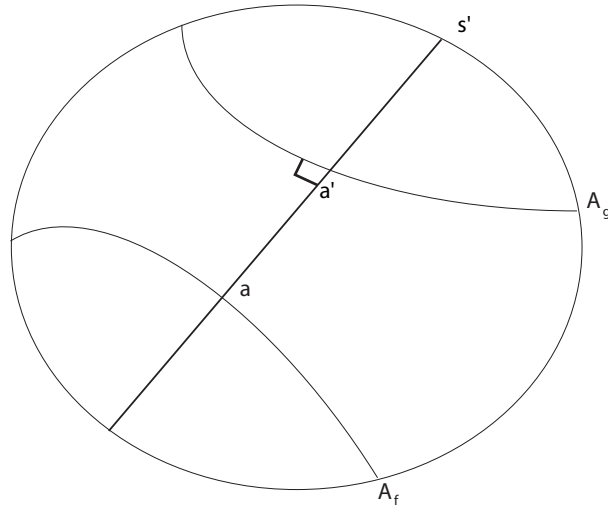
*Prueba:*

Como los ejes son divergentes existe una normal común a ambos y a esta recta le llamamos  $s'$ , denotemos a los ejes de  $f$  y  $g$  como  $A_f$  y  $A_g$  respectivamente, entonces la normal que mencionamos antes corta a  $A_f$  en  $a$  y a  $A_g$  en  $a'$  (Fig. 3.3) y elegimos  $b, b'$  en  $A_f$  y  $A_g$  respectivamente de tal manera que  $d_H(a, b) = d_H(a', b') = \frac{1}{2}\lambda$  y además en la dirección que se desplaza  $f$ . Sean  $s, s''$  las rectas normales a  $A_f, A_g$  en  $b, b'$  y por abuso de notación las reflexiones respecto a estas rectas y  $s'$  se denotaran de la misma manera. (Fig. 3.4)

Queremos ver que tenemos la relación  $f = ss'$ , es claro que  $ss'$  preserva  $A_f$  ya que  $s'$  lo preserva y  $s$  también por ser normal a este eje (las circunferencias ortogonales son invariantes bajo inversiones entre ellas), para ver que tiene el mismo sentido que  $f$  basta ver hacia donde desplaza un punto y es fácil si tomamos el punto  $a$  que queda fijo bajo  $s'$  y bajo  $s$  se desplaza en la misma dirección que  $f$ , por último hay que verificar que  $d_H(x, ss'x) = \lambda$  pero como  $ss'$  preserva la

### 3.1 El lema de los elementos hiperbólicos con ejes divergentes

orientación y tiene dos puntos fijos (los puntos finales del eje fijo) necesariamente tiene que ser un elemento hiperbólico y para saber cuanto mide su desplazamiento de nuevo basta verificarlo para un punto en la recta fija y tomando de nuevo  $a$  notamos que  $d_H(a, ss'a) = d_H(a, sa) = \lambda$ , en conclusión  $f = ss'$  y un proceso análogo nos permite probar que  $g = s's''$ .



**Figura 3.3:** Figura 3.3

Queremos saber ahora que tipo de transformación es  $fg$ , por lo anterior tenemos que  $fg = ss's's'' = ss''$ , ahora todo depende de la posición de los ejes de  $f$  y  $g$ .

**Caso 1.**[las rectas se intersectan en algún punto de  $D \cup E$ ]

Sea  $m$  el punto medio del segmento  $aa'$ , la normal a  $s'$  que pasa por  $m$  bisecta el ángulo que forman los ejes en el punto de intersección  $p$  (3.4), para ver esto reflejamos las rectas  $l$  y  $\sigma$  respecto de  $l$  obtenemos  $l$  y  $s''$ , como la reflexión es conforme el ángulo entre  $l$  y  $s''$  es el mismo que el ángulo entre  $l$  y  $s$ . Es claro que el punto de intersección  $p$  será el punto fijo de la transformación, sea  $\frac{1}{2}\phi_{fg}$  el ángulo entre  $s$  y  $s'$  (la inversión respecto a dos circunferencias es un elemento elíptico con ángulo el doble del ángulo de esta intersección).

Luego  $abpm$  es un cuadrilátero con 3 ángulos rectos y el ángulo restante agudo (cuadrilátero de Lambert Fig. 3.5) cuyas medidas son  $\frac{1}{4}\phi_{fg}$  con lados  $\frac{1}{2}\delta$  y  $\frac{1}{2}\lambda$  por lo cual tenemos  $\sinh\frac{1}{2}\delta\sinh\frac{1}{2}\lambda = \cos\frac{1}{4}\phi_{fg} \leq 1$  y es igual a 1 en el caso de que se

### 3. EL TEOREMA DE NIELSEN

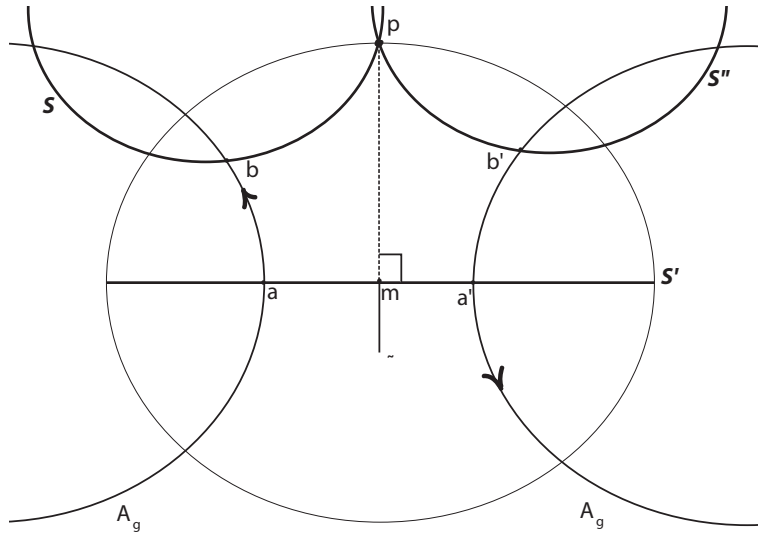


Figura 3.4: Figura 3.4

intersecten en el infinito ( $\phi = 0$ ) y en dado caso la transformación sería parabólica.

#### Caso 2

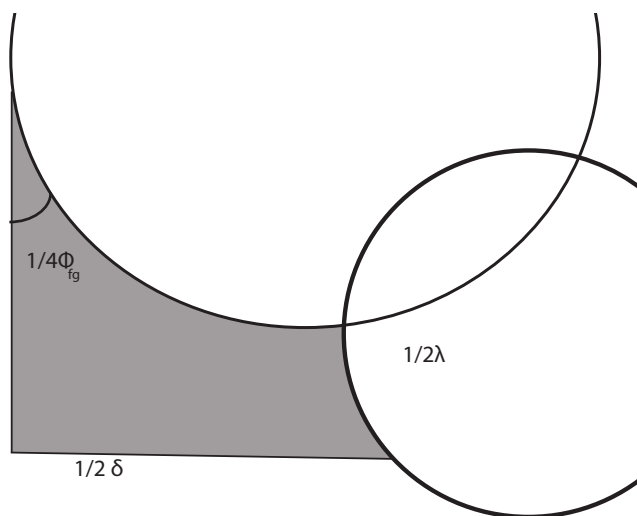
En el caso que los ejes sean divergentes, existe una recta normal a ambos y se tiene que la recta  $l$  bisecta al segmento entre  $s$  y  $s'$  de esta recta normal, entonces basta probar que;

1. Esta recta normal es el eje de  $fg$
2. En efecto  $l$  bisecta al segmento entre  $s$  y  $s'$  de esta recta normal

Para (1) Probaremos que  $fg$  es hiperbólica viendo que tiene dos puntos fijos y que se encuentran en la normal mencionada antes. Sean  $x$  y  $x'$  los puntos finales de dicha recta normal y notemos que  $s''x = x'$  ya que  $s''x$  debe cumplir que esta sobre la recta normal a  $s''$  y que  $d_H(x, s'') = d_H(s''x, s'')$  pero  $d_H(x, s'') = \infty$ , por la misma razón  $sx' = x$  entonces  $ss''x = x$  y también se cumple  $ss''x' = x'$  por lo tanto  $fg$  tiene 2 puntos fijos y su eje es la recta que los une, que en este caso es la recta normal mencionada (Fig. 3.6).

Para (2) queremos probar que  $d_H(x, y) = d_H(y, x')$  donde  $y$  es el punto de intersección de la normal con  $l$ , al reflejar respecto de  $l$  y notando que  $x \mapsto x'$  bajo  $s$  y  $d_H(x, y) = d_H(y, sx)$  tenemos el resultado.

### 3.2 El lema del conmutador de los elementos hiperbólicos



**Figura 3.5:** Cuadrilátero de Lambert

Finalmente tenemos las rectas  $s''$ ,  $A_g$ ,  $s$ ,  $l$  y  $A_{fg}$  y estas forman un pentágono con 4 ángulos rectos y con lados  $\frac{1}{2}\lambda_{fg}$ ,  $\frac{1}{2}\delta$ ,  $\frac{1}{2}\lambda$  (Fig. 3.7) y podemos concluir (A)

$$\sinh\frac{1}{2}\delta\sinh\frac{1}{2}\lambda = \cosh\frac{1}{4}\lambda_{fg} > 1$$

□

### 3.2 El lema del conmutador de los elementos hiperbólicos

**Lema 3.2.1** Sean  $f$  y  $g$  dos elementos hiperbólicos con ejes  $A_f$  y  $A_g$  y desplazamientos iguales  $\lambda$ , y con ángulo de intersección  $\phi$ . El conmutador  $[f, g] = fgf^{-1}g^{-1}$  es elíptico, parabólico o hiperbólico dependiendo de

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}\lambda\right)\sin\phi \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$$

*Prueba:*

Sea  $s'$  el punto de intersección de  $A_f$  y  $A_g$ , sea  $s$  el punto sobre  $A_f$  tal que  $d_H(s', s) = \frac{1}{2}\lambda$  y trazado siguiendo la dirección de  $A_f$ , y sea  $s''$  el punto sobre  $A_g$  tal que  $d_H(s', s'') = \frac{1}{2}\lambda$  y trazado siguiendo la misma dirección que  $A_g$  (Fig. 3.8).



### 3. EL TEOREMA DE NIELSEN

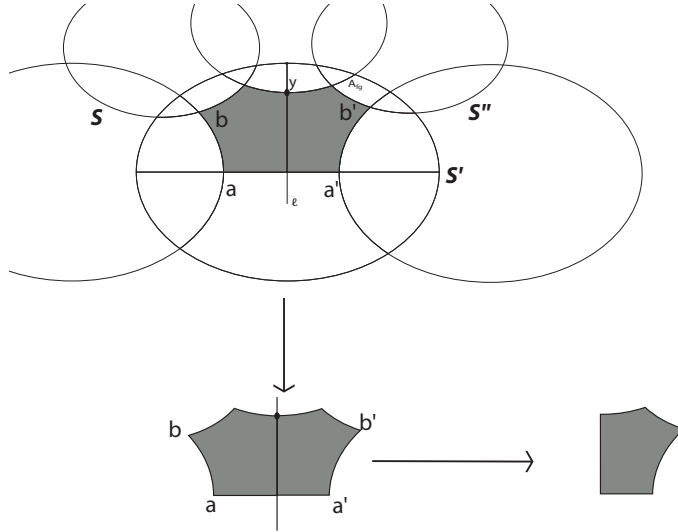


Figura 3.6: Figura 3.6

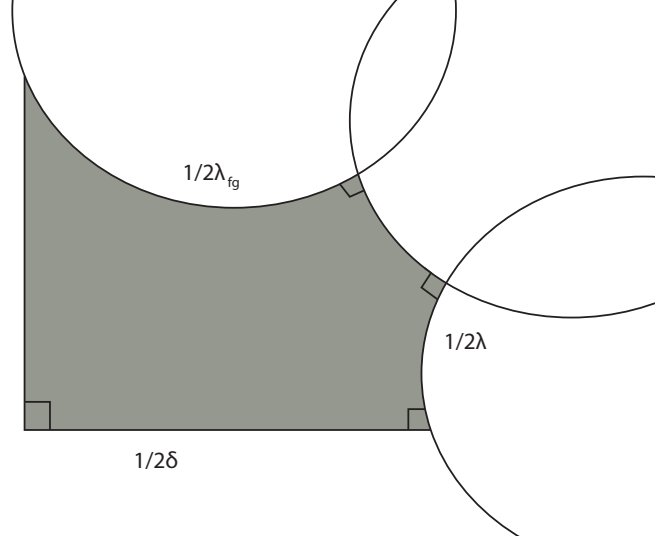
Y consideremos los elementos elípticos de ángulo  $\pi$  respecto a estos puntos y los denotaremos igual que denotamos a sus puntos fijos.

Queremos primero probar que  $f = ss'$ , para esto deseamos ver los puntos que deja fijos  $ss'$ . El elemento elíptico con ángulo  $\pi$  funciona de la siguiente manera; dado un punto  $x$  se traza la recta que va de  $x$  al punto fijo  $c$ , la imagen de  $x$  bajo el elemento elíptico llamémosle  $y$  esta sobre la misma recta y  $d_H(x, c) = d_H(y, c)$ , con este proceso podemos ver que  $ss'$  fija los mismos puntos que  $f$  por lo tanto el eje de  $f$  es el mismo que el de  $ss'$  solo falta ver cuanto es el desplazamiento de  $ss'$ , como antes, basta verificarlo para un punto y en esta ocasión tomamos el punto  $s'$ , tenemos que  $d_H(s, ss'(s')) = d_H(s, s(s')) = 2d_H(s', s) = 2(\frac{1}{2}\lambda) = \lambda$  por lo tanto  $f = ss'$ . Un proceso análogo nos enseña que  $g = s's''$  y como  $s's''$  es la identidad entonces  $fg = ss''$ , más aún  $f^{-1} = s's, g^{-1} = s''s'$  y entonces  $f^{-1}g^{-1} = s'ss''s' = s'fgs' = s'fgs'^{-1}$ , luego  $ss'$  es un elemento hiperbólico con recta invariante igual a la recta que pasa por  $s$  y  $s''$  y desplazamiento  $2d_H(s, s'')$ , más aún  $f^{-1}g^{-1}$  es hiperbólico obtenido de  $fg$  conjugando por  $s'$ , tenemos entonces;

1.  $f^{-1}g^{-1}$  tiene un desplazamiento con la misma medida que  $fg$
2. su eje  $A_{f^{-1}g^{-1}}$  se obtiene de  $A_{fg}$  rotando por  $s'$ .

Para probar (1) queremos ver cuanto mide  $d_H(x, s'fgs'x)$  y tenemos que  $d_H(x, s'fgs'x) = d_H(s'x, fg(s'x))$  y esta última cantidad es el desplazamiento de  $fg$ .

### 3.3 El lema del conmutador de los elementos parabólicos



**Figura 3.7:** Pentágono con 4 ángulos rectos

(2) se cumple ya que  $f^{-1}g^{-1}(s'A_{fg}) = s'fgs'(s'A_{fg}) = s'fg(A_{fg}) = s'A_{fg}$ .

Estos ejes son divergentes y sus correspondientes transformaciones tienen sentidos opuestos, aplicamos el **lema 3.1.1** a  $fg$  y a  $f^{-1}g^{-1}$  entonces  $[f, g]$  es elíptico, parabólico o hiperbólico según sea

$$\operatorname{senh}\eta \operatorname{senh}\frac{1}{2}\lambda_{fg} \leq 1.$$

Donde  $\eta$  es la perpendicular desde  $s'$  en el triángulo  $ss's''$  (Fig. 3.9) y por trigonometría hiperbólica (A) se cumple  $\operatorname{senh}\eta \operatorname{senh}\frac{1}{2}\lambda_{fg} = \operatorname{sen}\phi \operatorname{senh}^2\frac{1}{2}\lambda$   $\square$

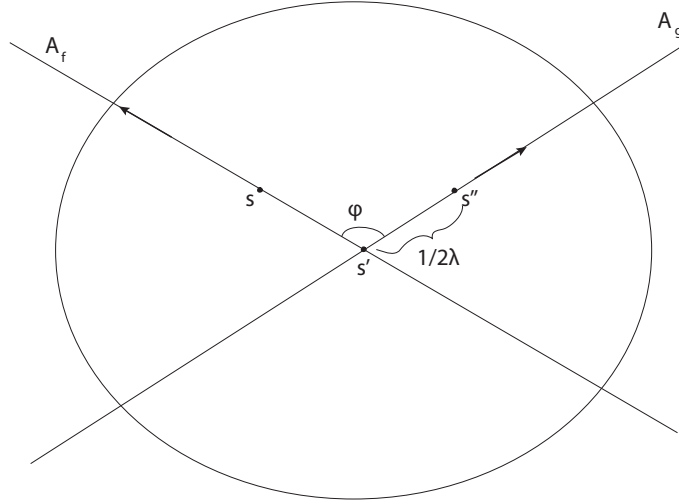
### 3.3 El lema del conmutador de los elementos parabólicos

**Lema 3.3.1** Sean  $f, g$  elementos parabólicos con puntos fijos  $c_f$  y  $c_g$  entonces el conmutador  $[f, g]$  es hiperbólico.

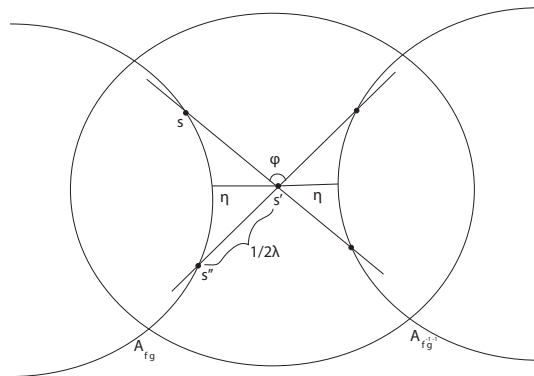
*Prueba.*

Sea  $s'$  la recta que une  $c_f$  y  $c_g$  y denotemos la reflexión respecto a esta recta también como  $s'$ . Sea  $O_f$  un horociclo dado con punto al infinito  $c_f$  y  $x \in O_f$ ,

### 3. EL TEOREMA DE NIELSEN



**Figura 3.8:** Figura 3.8



**Figura 3.9:** Figura 3.9

tomamos  $s$  en el conjunto de geodésicas que pertenece al haz parabólico con punto fijo  $c_f$  ([Bea83]).

Tenemos entonces que  $f = ss'$ , y análogamente obtenemos que existe  $s''$  tal que  $g = s's''$  luego tenemos  $[f, g] = ss''s'ss's' = (ss''s')^2$ , la composición de reflexiones conserva el sentido por lo tanto la composición de 3 reflexiones invierte el sentido y es por tanto una reflexión o una h-reflexión entonces su cuadrado es la identidad o un elemento hiperbólico. Probemos que  $f$  y  $g$  no permutan: Si  $fg = gf$ , tenemos que  $f$  deja invariante el conjunto de puntos fijos de  $g$  y viceversa, para ver esto sea  $x$  un punto fijo de  $f$  entonces  $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$ , es decir  $g(x)$  es un punto fijo de  $f$ , si sustituimos  $g$  por  $g^{-1}$  análogamente obtenemos que  $g^{-1}(x)$  es un punto fijo, es decir todo punto fijo es la imagen bajo  $g$  de otro punto fijo ( $x = g(g^{-1}(x))$ ). Dado esto  $[f, g]$  es la identidad si y solo si  $f$  y  $g$  conmutan,

### 3.4 El lema del conmutador de los elementos hiperbólicos con ejes paralelos

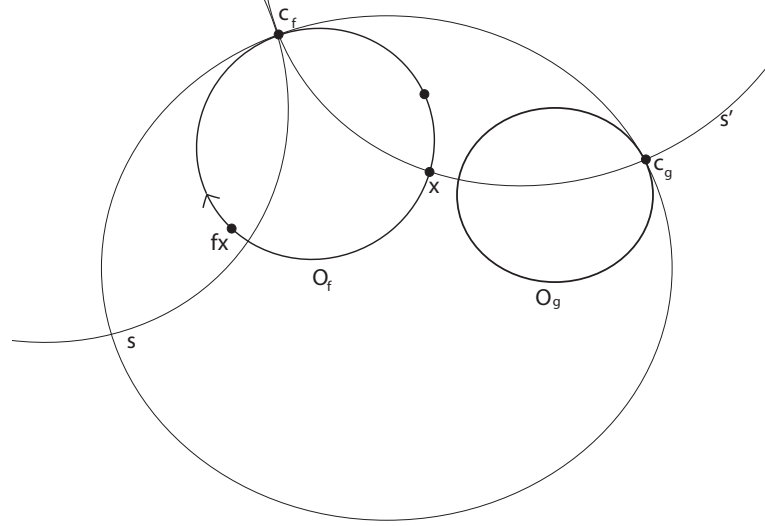


Figura 3.10: Figura 3.10

como hemos probado que esto no es posible se tiene que  $[f, g]$  es un elemento hiperbólico.  $\square$

### 3.4 El lema del conmutador de los elementos hiperbólicos con ejes paralelos

**Lema 3.4.1** Sean  $f$  y  $g$  elementos hiperbólicos con ejes paralelos y con punto común  $u$ , entonces el conmutador  $[f, g]$  es un elemento parabólico con centro en  $u$

*Prueba:*

Primero veamos que  $f \neq gf^{-1}g^{-1}$ , es claro que  $gf^{-1}g^{-1}$  fija  $u$  ya que tanto  $f$  como  $g$  lo fijan, sea  $x$  el punto final del eje de  $f$  distinto de  $u$ , es claro que  $g^{-1}$  no fija este punto, y  $gx \neq u$  (puesto que  $g^{-1}u \neq x$ ) concluimos con esto  $f \neq gf^{-1}g^{-1}$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $u = 0$  y que las matrices de los elementos hiperbólicos correspondientes a  $f$  y  $g$  lucen de la siguiente manera:

$$M_f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M_g = \begin{pmatrix} x & 0 \\ w & z \end{pmatrix}$$

Donde  $ad = 1, xz = 1, |a + d| > 2$  y  $|x + z| > 2$ . Haciendo los cálculos obtenemos que  $tr(M_f M_g M_{f^{-1}} M_{g^{-1}}) = 2$  por lo que el conmutador es un elemento parabólico con punto fijo  $u = 0$ .  $\square$

### 3. EL TEOREMA DE NIELSEN

---

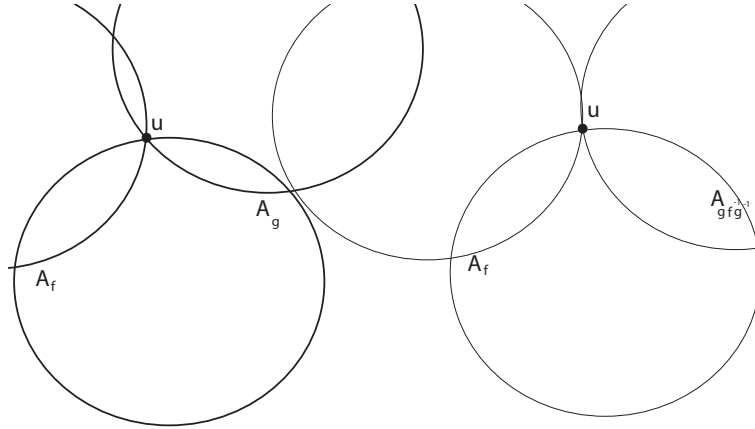


Figura 3.11: Figura 3.11

### 3.5 El lema del elemento elíptico

**Lema 3.5.1** *Si en un grupo  $G < PSL(2, \mathbb{R})$  sin puntos invariantes, 2 ejes de elementos hiperbólicos son paralelos entonces el grupo contiene un elemento elíptico*

*Prueba:*

Del Lema 3.4.1 tenemos que  $G$  contiene elementos parabólicos y con punto en común  $u$  como centro. Consideremos un Horociclo  $K$  con punto en el infinito  $u$ , sobre  $K$  el elemento parabólico tiene un desplazamiento fijo. Sea  $S_u < G$  el subgrupo de  $G$  que consta de elementos parabólicos con punto en el infinito  $u$  y sea  $x \in K$ , la clase de equivalencia  $S_u x$  es un subconjunto de  $K$  y podemos distinguir dos casos.

1. Los puntos forman una sucesión de puntos equidistantes cuando  $S_u$  es discontinuo.
2. El conjunto de puntos es denso en todo  $K$  cuando  $S_u$  no es discontinuo.

Para probar (1), sea  $d = \min\{d_H(x, fx) | f \in S_u\}$  este mínimo existe por que si no es así se tendría un punto de acumulación lo cual por hipótesis no es posible. Si  $y \in S_u x$  es claro que  $\min\{d_H(y, fy) | f \in S_u\} = d$  y de esto concluimos que el conjunto de puntos es equidistante de distancia  $d$ .

Para el caso (2) por hipótesis tenemos que  $S_u x$  se acumula en  $x$  y queremos ver que se acumula en todo  $K$ . Sea  $k \in K$  un punto arbitrario y  $B_\epsilon(k) = \{z \in$

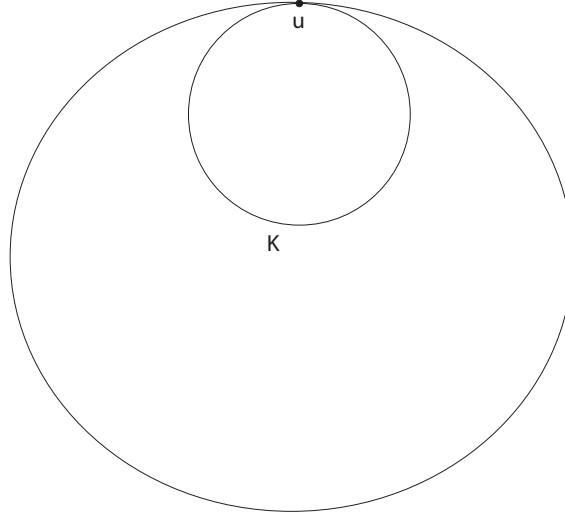


Figura 3.12: Figura 3.12

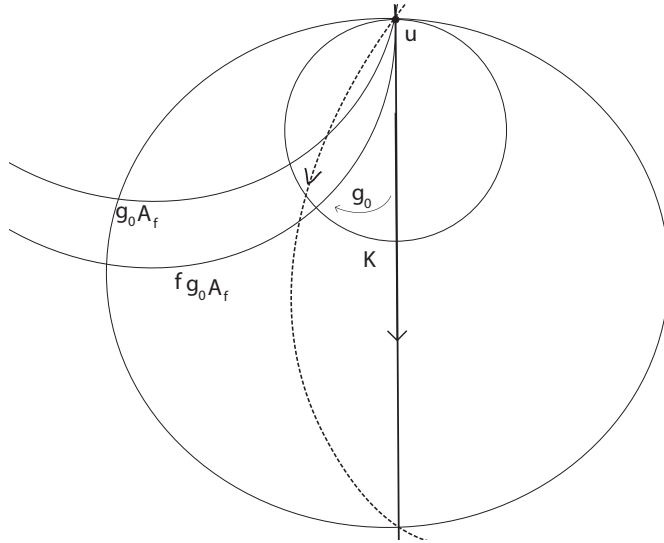
$D\{d_H(k, z) < \epsilon\}$  y tomemos  $B_\epsilon(k) \cap K$ , queremos ver que existe  $x \in S_u x$  tal que  $d_H(k, x) < \epsilon$ , si dicha  $x$  no existe entonces los desplazamientos en  $K$  de los elementos de  $S_u$  estarían acotados inferiormente por  $\epsilon$  lo cual implicaría que  $S_u$  es discontinuo lo que contradice la hipótesis, por lo tanto  $S_u$  es denso en todo  $K$ .

Ahora supongamos que estamos en el caso (1) y sea  $g_0$  el elemento con el menor desplazamiento respecto de  $K$  (Fig. 3.13) y  $f$  un elemento hiperbólico en  $G$  tal que su eje  $A_f$  tiene a  $u$  como punto fijo y cuyo sentido es tal que se aleja de  $u$ , entonces  $f g_0 f^{-1}$  fija  $u$  y es un elemento parabólico y por tanto  $f g_0 f^{-1} \in S_u$ .

La imagen de  $A_f$  bajo  $f g_0 f^{-1}$  es claramente la misma que la de su imagen bajo  $f g_0$ , la recta  $f g_0 A_f$  se encuentra entre  $A_f$  y  $g_0 A_f$ , luego el desplazamiento de  $f g_0 f^{-1}$  es menor que el de  $g_0$  lo cual es una contradicción, por lo tanto  $S_u x$  es denso en  $K$ , es decir los desplazamientos de los elementos de  $S_u$  son tan pequeños como se quiera.

Como  $G$  no tiene a  $u$  como punto invariante, sea  $g \in G$  tal que  $gu \neq u$ . Sean  $f_1, f_2$  elementos hiperbólicos pertenecientes a los dos ejes del lema, al menos uno de los elementos hiperbólicos  $g f_j g^{-1}$  no fija  $u$ , ya que  $g$  solo puede mover  $u$  a los más a uno de los puntos extremos de  $A_{f_j}$ . Entonces existe en  $G$  un elemento hiperbólico  $f$  que no deja  $u$  invariante. Elijamos ahora un horociclo  $K$  tal que interseque  $A_f$  (fig 3.14) y elegimos  $h$  tal que su desplazamiento respecto a  $K$  ayude a que los ejes  $A_f$  y  $A_{hf}$  de  $f$  y  $f' = h f h^{-1}$  respectivamente se intersecten en un

### 3. EL TEOREMA DE NIELSEN



**Figura 3.13:** Hiper ciclo punteado

ángulo arbitrariamente pequeño, en particular elegimos  $h$  tal que

$$\text{sen}\phi \text{sen}h^2 \frac{1}{2} \lambda_f < 1$$

Ya que  $\text{sen}h^2 \frac{1}{2} \lambda_f$  es fijo y  $\text{sen}\phi \rightarrow 0$  cuando  $\phi \rightarrow 0$ , y del **Lema 3.2.1** se sigue que  $[f, f']$  es elíptico.  $\square$

### 3.6 El teorema de Nielsen

Probamos ahora la parte restante del teorema de Nielsen.

Sea  $G < PSL(2, \mathbb{R})$  sin puntos invariantes y sin elementos elípticos. Antes que nada veamos que  $G$  no es abeliano. Sean  $f$  y  $g$  elementos hiperbólicos con ejes divergentes y  $fg = gf$  entonces  $fgf^{-1} = g$ , pero no es posible ya que  $fgf^{-1}$  fija  $fx, fy$  con  $x, y$  puntos fijos de  $g$ , pero esto implica  $fx = y$  y  $fy = x$  lo que a su vez nos dice que  $f^2x = x$ , pero  $f^2$  fija los mismos puntos que  $f$  por tanto no puede fijar los puntos de  $g$ .

Es análogo si los ejes son paralelos ya que  $f$  no puede intercambiar  $x$  y  $y$  al mismo tiempo.

Más aún debe haber elementos hiperbólicos en  $G$ , de otro modo solo tendría elementos parabólicos que por hipótesis no tendrían un punto fijo en común y el

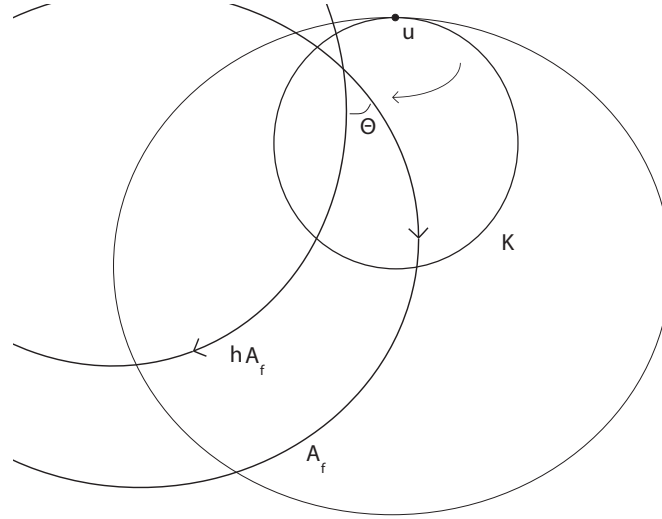


Figura 3.14: Figura 3.14

lema ?? implicaría una contradicción en este caso.

Sea  $f$  hiperbólico en  $G$  y  $A_f$  su eje y  $\lambda_f$  la medida de su desplazamiento, sea  $g \in G$  tal que  $fg \neq gf$ , entonces  $f' = gf^{\pm 1}g^{-1}$  es una transformación hiperbólica con el mismo desplazamiento que  $f$  y con eje  $gA_f \neq A_f$  (Por no ser permutables)(Si  $A_f = gA_f \Rightarrow gfg^{-1} = f$  o  $gfg^{-1} = f^{-1}$ . El primer caso es trivial. El segundo caso basta tomar un punto fijo  $x$  de  $f$  tal que  $g(x)$  no es punto fijo de  $f$  (ni de  $f^{-1}$ ) y evaluar en ambos lados de la ecuación para llegar a una contradicción.)

$A_f, A_{f'}$  no pueden ser paralelas por el Lema 3.5.1, si son divergente sea  $\delta$  la distancia entre ellas y elijamos  $f'$  tal que el exponente de  $f$  haga  $f$  y  $f'$  con desplazamientos opuestos, por las condiciones impuestas en  $G$ ,  $ff'$  no es elíptico y del 3.1.1 obtenemos

$$\sinh \frac{1}{2} \delta \sinh \frac{1}{2} \lambda_f \geq 1 \quad (3.1)$$

Si  $A_f, A_{f'}$  son concurrentes sea  $\phi$  su ángulo de intersección, dado que  $[f, f']$  no es un elemento elíptico, del 3.2.1 tenemos

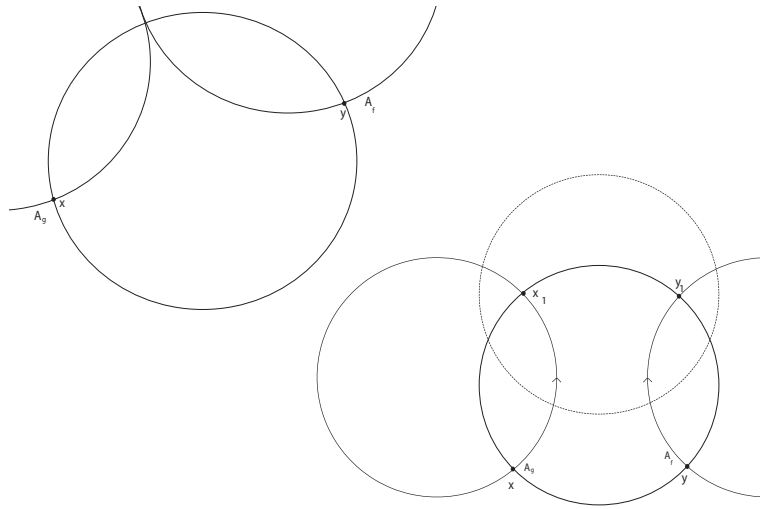
$$\sin \phi \sinh^2 \frac{1}{2} \lambda_f \geq 1 \quad (3.2)$$

Estas desigualdades se aplican a  $g$  fijo y  $f$  variando. Sea  $A$  un eje de un elemento hiperbólico en  $G$ , los elementos hiperbólicos que comparten este eje forman un subgrupo abeliano  $S_A$  de  $G$ , sea  $g \in G$  un elemento que no tenga como eje a  $A$ ,



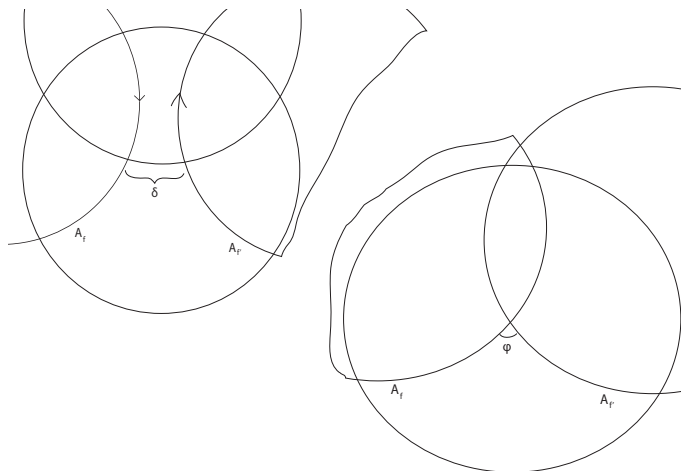
### 3. EL TEOREMA DE NIELSEN

---



**Figura 3.15:** Ejes de  $f$  y  $g$  paralelos y divergentes

es decir que no permuta con los elementos de  $S_A$ , se tiene que  $gA \neq A$ . Si  $gA$  y  $A$  son divergentes y con distancia es  $d_H(gA, A) = \delta$  si  $gA$  y  $A$  son concurrentes se cortarán en un ángulo  $\phi$ . Dependiendo cual sea el caso aplicaremos 3.1 o 3.2.



**Figura 3.16:** Figura 3.16

Si  $f$  varia sobre todos los elementos de  $S_A$ , podemos notar que todos tienen desplazamiento mayor que un número positivo distinto de 1, por las condiciones 3.1 y 3.2 y sabiendo que  $\operatorname{senh}x \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $\lambda_f$  no puede ser arbitrariamente pequeño, más aún los desplazamientos no pueden ser arbitrariamente cercanos a la

### 3.7 Un ejemplo de un grupo discreto

---

cota, si así fuera podemos encontrar dos elementos tal que su composición tiene un desplazamiento menor que la cota dada, esto implica que  $S_A$  es discontinuo. Sea  $\lambda_0$  el desplazamiento mas pequeño de elementos de  $S_A$  que por lo anterior existe.

Podemos aplicar las mismas desigualdades para  $f \in S_A$  fijo y  $g$  variando sobre los representantes  $g_1, g_2, \dots$  de las clases de  $S_A < G$  ( $g_1 \sim g_2$  si y solo si  $g_1 S_A = g_2 S_A$  si y solo si  $g_1 g_2^{-1} \in S_A$ ).

**Comentario 3.6.1** Si  $g_1$  implica  $g_2$  se tiene que  $g_1 A = g_2 A$  ya que  $g_1 g_2^{-1} = f \in S_A$  implica  $g_1 g_2^{-1} A = f A$  entonces  $g_1 g_2^{-1} A = A$  implica  $g_2^{-1} A = g_1^{-1} A$

Los ejes de los elementos hiperbólicos  $f_v = g_v f g_v^{-1}$  varían sobre los diferentes ejes de la clase de equivalencia  $GA$  de  $A$ .

Dado que  $f_v$  tiene el mismo desplazamiento  $\lambda_f$  que  $f$  para todo índice  $v$ , de 3.1 y 3.2 obtenemos que  $\sinh \frac{1}{2} \delta$  y  $\sin \phi$  tienen una cota inferior por lo que  $\delta$  y  $\phi$  también la tienen según sean divergentes o concurrentes los ejes  $g_v A$ , esto implica que los ejes no se acumulan en  $D$ .

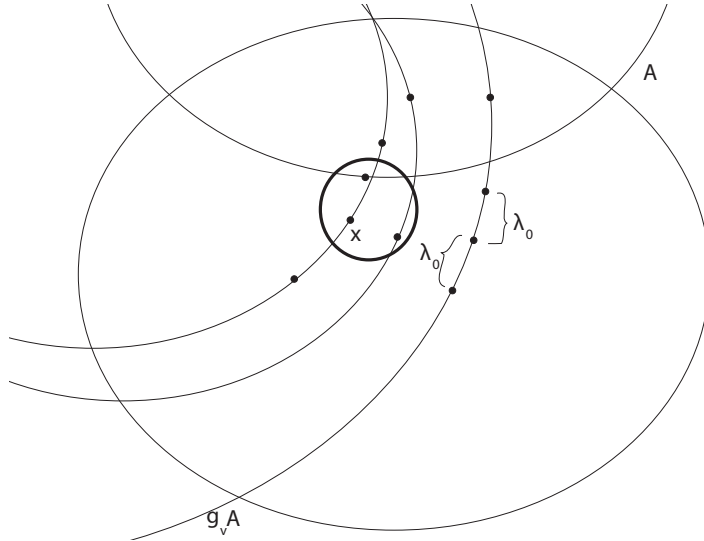
Sea  $x \in A$ . Todo punto en  $Gx$  está en algún elemento del conjunto  $g_v A$ . Para un eje dado los puntos  $Gx$  que se encuentran en este eje forman una sucesión de puntos equidistantes a distancia  $\lambda$  (Los puntos en  $Gx \cap g_v A$  son los puntos  $gx, hx$  tal que  $g \sim h$ , luego para  $gx, hx \in g_v A \Rightarrow d_H(gx, hx) = d_H(x, g^{-1}hx), g^{-1}h \in S_A$  entonces  $\lambda_{g^{-1}h} \geq \lambda_0$  (Fig. 3.17).

El círculo con centro  $x$  y radio  $\frac{1}{2} \lambda_0$  no puede contener mas de un punto de dicha sucesión en su interior, entonces el número de puntos en  $Gx$  dentro de este círculo es a lo más igual al número de ejes  $g_v A$  que cortan al círculo, este número es finito ya que los ejes  $g_v A$  no se acumulan en  $D$  por lo tanto  $x$  no es punto de acumulación de  $Gx$ .  $\square$

## 3.7 Un ejemplo de un grupo discreto

En el capítulo 2 hallamos un grupo de Schottky que es un subgrupo discreto de isometrías hiperbólicas, más aún sabemos que todos los elementos no triviales del grupo de Schottky son loxodrómicos, en nuestro caso hiperbólicos, excepto por la identidad, para que podamos validar el teorema de Nielsen en este grupo debemos verificar que se cumplen las condiciones del teorema. Los generadores del grupo de Schottky son hiperbólicos por lo cual cada uno tiene una geodesica invariante, podemos usar las matrices del grupo de monodromía de la ecuación diferencial hipergeometrica 1.10.2 que son conjugadas a los generadores del grupo de Schottky;

### 3. EL TEOREMA DE NIELSEN



**Figura 3.17:** Figura 3.17

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon(-c) \end{pmatrix}, \quad A_1 = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon(c - a - b) \end{pmatrix} P$$

Notamos que  $A_0$  fija  $0, \infty$  y por tanto deja invariante la geodésica que los une, podemos ver que  $A_1$  fija  $P^{-1}(0)$  y  $P^{-1}(\infty)$  y dado que conocemos  $P^{-1}$  podemos calcular ambos valores, por un lado  $P^{-1}(0) = \frac{-C}{D}$  por otro lado  $P^{-1}(\infty) = \frac{-A}{B}$ , y por tanto deja invariante la geodésica que une estos dos puntos. Mas abajo probamos que estos dos ejes necesariamente son divergentes.

En nuestro caso tenemos un grupo de Schottky con dos generadores, sabemos que es libre y también es no elemental (0.0.1). En [Bea83] encontramos un teorema que dice que para un grupo de transformaciones hiperbólicas con las características anteriores ser discreto equivale a que actúe de manera discontinua según 0.0.3, de igual manera en [Bea83] encontramos que 0.0.3 implica 0.0.2.

Por otro lado  $\Lambda_\theta$  posee, salvo la identidad, solo elementos hiperbólicos, para aplicar el teorema de Nielsen necesitamos además que el grupo no tenga ni puntos fijos ni rectas invariantes como mencionamos arriba. En [Bea83] encontramos el siguiente teorema;

**Teorema 3.7.1** *Dos transformaciones de Möbius  $g, h$  tienen un punto fijo en  $\widehat{\mathbb{C}}$  si y solo si  $tr[g, h] = 2$*

Haciendo los calculos correspondientes a las matrices asociadas a  $\gamma_1, \gamma_2$  obtenemos que;

### 3.7 Un ejemplo de un grupo discreto

---

$$\text{tr}[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{2T^2(R^2 - C^2) + C^2(T^4 + 1)}{T^2R^2}. \quad (3.3)$$

si suponemos que  $\text{tr}[\gamma_1, \gamma_2] = 2$  obtenemos que  $C^2 = 0$  o que  $T = \pm 1$ , ninguno de estos casos es posible debido a las condiciones exigidas, por lo que  $\text{tr}[\gamma_1, \gamma_2] \neq 2$  es decir  $\gamma_1, \gamma_2$  no tienen puntos fijos en  $\widehat{\mathbb{C}}$  (en particular no los tiene en  $D$ ) y dado que tienen ejes diferentes, estos necesariamente son divergentes de otro modo su intersección sería un punto fijo, por tal motivo no hay rectas invariantes en el grupo generado por estos elementos. Aplicando el teorema de Nielsen se puede concluir que  $\Lambda_\theta$  es discontinuo en  $D$ .

Todo lo anterior nos permite afirmar que la familia de grupos de Schottky hallada en el capítulo 2 son ejemplos en donde podemos verificar el teorema de Nielsen. En la actualidad existen muchos resultados que nos dan la misma información que este teorema pero la exposición geométrica de este resultado sigue siendo admirable gracias a su demostración basada en su mayoría en la geometría hiperbólica pura.





# Apéndice

## A.1 Igualdades trigonométricas

Dedicamos esta sección a recopilar las fórmulas de trigonometría hiperbólica utilizadas durante éste trabajo. Comenzamos con las fórmulas para seno y coseno hiperbólicos:

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad (\text{A.1})$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad (\text{A.2})$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 \quad (\text{A.3})$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x \quad (\text{A.4})$$

Para triángulos hiperbólicos tenemos lo siguiente:

Sea  $\triangle (A, B, C)$  un triángulo con lados  $A, B$  y  $C$ . Y sean sus correspondientes ángulos opuestos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  entonces, si  $\gamma$  es un ángulo recto tenemos;

Ley de los cosenos hiperbólicos

$$\cosh C = \cosh A \cdot \cosh B \quad (\text{A.5})$$

Ley de los senos hiperbólicos

$$\sinh B = \sinh A \cdot \tan \beta \quad (\text{A.6})$$

## A. APÉNDICE

---

También

$$\cosh A \cdot \sin \beta = \cos \alpha \quad (\text{A.7})$$

$$\cosh B \cdot \sin \alpha = \cos \beta \quad (\text{A.8})$$

Para triángulos arbitrarios se tiene;

Ley de los cosenos hiperbólicos

$$\cosh C = \cosh A \cdot \cosh B - \sinh A \cdot \sinh B \cdot \cos \gamma \quad (\text{A.9})$$

Ley de los senos hiperbólicos

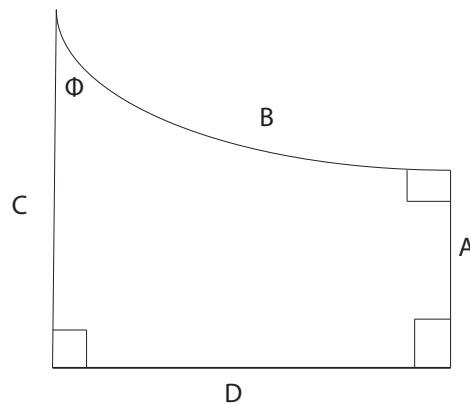
$$\frac{\sinh A}{\sin \alpha} = \frac{\sinh B}{\sin \beta} = \frac{\sinh C}{\sin \gamma} \quad (\text{A.10})$$

Para un cuadrilátero con tres ángulos rectos como en la figura A.1, donde  $\Phi$  no es recto, se tiene:

$$\sinh D \cdot \sinh A = \cos \Phi \quad (\text{A.11})$$

$$\cosh D = \cosh B \cdot \sin \Phi \quad (\text{A.12})$$

$$\cosh A = \cosh C \cdot \sin \Phi \quad (\text{A.13})$$



**Figura A.1:** Cuadrilátero con 3 ángulos rectos

En un triángulo  $\Delta (A, B, C)$  hay una relación entre  $\gamma$  y la longitud de  $C$

## A.2 Mapeo y principio de reflexión de Schwarz

---

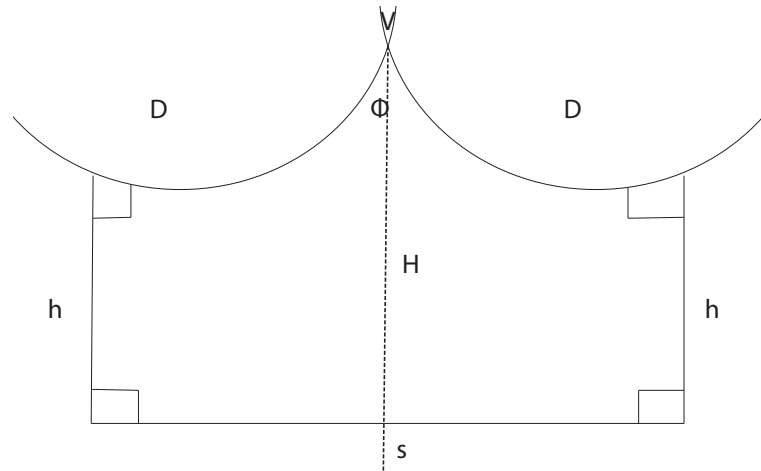
$$\cosh C > \cosh A \cdot \cosh B, \text{ si } \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$\cosh C = \cosh A \cdot \cosh B, \text{ si } \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\cosh C < \cosh A \cdot \cosh B, \text{ si } \gamma > \frac{\pi}{2}$$

Por último tenemos un resultado para pentágonos con 4 ángulos rectos.

Sea  $P$  un pentágono como en la figura A.2, donde  $h$ ,  $D$  son las medidas de los lados y  $H$  la medida de la perpendicular del vértice al lado  $s$  y denotamos por  $\Phi$  también a su medida.



**Figura A.2:** Pentágono con 4 ángulos rectos

Las siguientes condiciones se cumplen

$$\sinh h \cdot \sinh \frac{s}{2} = \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) \tag{A.14}$$

$$\cosh h = \cosh H \cdot \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \tag{A.15}$$

$$\cosh \frac{s}{2} = \cosh D \cdot \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \tag{A.16}$$

## A.2 Mapeo y principio de reflexión de Schwarz

Si consideramos la ecuación diferencial hipergeométrica



## A. APÉNDICE

---

$$x(1-x)u'' + (c - (a+b+1)x)u' - abu = 0.$$

Cualesquiera dos soluciones linealmente independientes  $u_1, u_2$  definen un mapeo

$$s : \mathbb{C} - \{0, 1\} \ni x \mapsto u_1(x) : u_2(x) \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

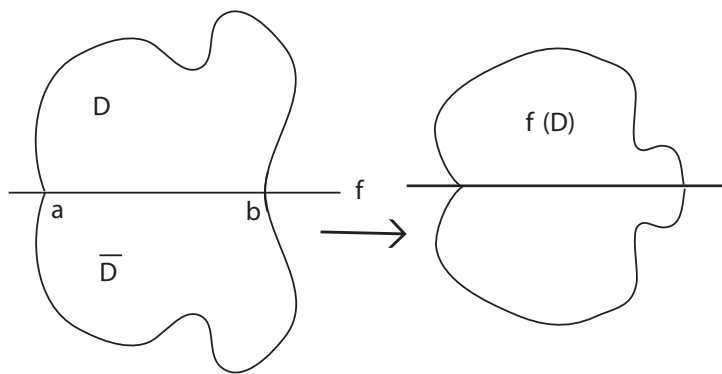
Al que llamamos el mapeo de Schwarz. El teorema fundamental de Cauchy nos asegura que dos soluciones linealmente independientes no son simultaneamente cero en  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ . Para un estudio mas profundo del mapeo de Schwarz se remite al lector a [SY01].

EL principio de reflexión de Schwarz se enuncia de la siguiente manera:

**Proposición A.2.1** *Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $D$  cuya frontera contiene un intervalo real  $(a, b)$ . Supongamos que  $f$  se puede extender a una función continua en  $D \cup (a, b)$  y es real valuada en el intervalo  $(a, b)$ . Extendiendo  $f$  por*

$$f(x) := \overline{f(\bar{x})}, \quad x \in \bar{D} := \{\bar{\xi} \mid \xi \in D\}$$

*A la imagen reflejada  $\bar{D}$  de  $D$ . Entonces, la extensión de  $f$  es holomorfa en  $D \cup (a, b) \cup \bar{D}$ , y su imagen es la unión de  $f(D)$ , su imagen reflejada  $f(\bar{D})$  y el intervalo  $f((a, b))$  que comparten como parte de su frontera.*



**Figura A.3:** Principio de reflexión de Schwarz

# Bibliografía

- [ACS13] Juan Pablo Navarrete Angel Cano and José Seade. Complex kleinian groups. *Birkhauser*, 2013. 6
- [Bea83] Alan F. Beardon. The geometry of discrete groups. *Springer*, 1983. 36, 44
- [FN48] W. Fenchel and J. Nielsen. On discontinuous groups of isometric transformations of the non-euclidian plane. *Studies and Essays Presented to R. Courant, Interscience, New York*, 1948.
- [IY03] Takashi Ichikawa and Masaaki Yoshida. On schottky groups arising from the hypergeometric equation with imaginary exponents. *American Mathematical Society*, 132(2):447–454, 2003. v, vi
- [KIY91] Shun Shimomura Katsunori Iwasaki, Hironobu Kimura and Maasaki Yoshida. From gauss to painlevé. *Springer*, 1991. iv, 7, 10, 13, 17
- [SY01] Takeshi Sasaki and Maasaki Yoshida. A geometric study of the hypergeometric function with imaginary exponents. *Experimental Mathematics*, 2001. 19, 20, 50



*This page is intentionally left blank*