UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS DE LA DERIVADA DE CANTOR-BENDIXSON PARA MARCOS Y EL PROBLEMA DE LA REFLEXIÓN BOOLEANA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

ANA BELÉN AVILEZ GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. LUIS ÁNGEL ZALDÍVAR CORICHI

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. , 2018

Índice general

Introducción

En este trabajo nos centraremos en usar dos categorías, la de marcos $\mathcal{F}\mathrm{rm}$ y la de álgebras booleanas completas $\mathcal{CBA}$. Toda álgebra booleana completa es un marco, de hecho, $\mathcal{CBA}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{F}\mathrm{rm}$. Es decir, cualquier morfismo de marcos entre dos álgebras booleanas completas es un morfismo en $\mathcal{CBA}$. Lo que exploramos en esta tesis es si podemos, a cada marco, asociarle de manera universal un álgebra booleana completa. Queremos a un marco A poder asignarle un $B \in \mathcal{CBA}$ junto con un morfismo

$$A \xrightarrow{f} B$$

tal que para cualquier $A \xrightarrow{h} C$ con $C \in \mathcal{CBA}$ exista un único morfismo g tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

conmute. Si esto se cumpliera diríamos que A tiene reflexión booleana. El problema es que esto no siempre pasa y no sabemos exactamente qué marcos tienen reflexión. A largo del trabajo, con ayuda de las derivadas, veremos algunos criterios para saber cuando un marco sí tiene reflexión.

Para llevar a cabo ese análisis en el capítulo 1 recordamos que un marco A es una retícula completa que cumple la siguiente ley distributiva

$$a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

para cualesquiera $a \in A$ y $X \subseteq A$. Esta ley es equivalente a que el marco tenga una implicación, es decir, una operación

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(a \succ b) = c$$

que cumpla que

$$c \leq (a \succ b) \Leftrightarrow c \wedge a \leq b$$

para cualesquiera $a, b \in A$.

Ahora bien, si nosotros tenemos un marco A podemos fijarnos en varios operadores en A. Las derivadas son operadores que inflan y son monótonos. Hay varios tipos de derivadas: los estables, que cumplen una desigualdad con respecto a los ínfimos, los operadores cerradura que son idempotentes y los prenúcleos que respetan ínfimos finitos. Los operadores que más nos interesan son aquellas derivadas que son prenúcleos y operadores cerradura y los llamaremos núcleos. Éstos nacen a partir de cocientes de marcos. Los núcleos y los cocientes de un marco están en correspondencia biyectiva. Pues si

$$A \xrightarrow{f} B$$

es un morfismo suprayectivo, hay un núcleo

$$A \xrightarrow{j} A$$

para el cual

$$A_j \cong B$$

donde A_j es el conjunto de puntos fijos, o bien, la imagen de j, pues j es idempotente. Además A_j también tiene estructura de marco. Con esta idea básica de lo que son los núcleos, podemos considerar al conjunto de todos los núcleos de un marco A y obtenemos su ensamble que denotamos como NA. Este ensamble resulta ser también un marco, lo que nos permite tomar el ensamble del ensamble y así sucesivamente hasta formar una torre de marcos

$$A \quad NA \quad N^2A \quad \ldots \quad N^\alpha A \quad \ldots$$

El primero en considerar esta cadena de ensambles fue Isbell en [Isb72]. Y la idea surge de los espacios topológicos pues los abiertos de un espacio forman un marco. En este contexto topológico nace el proceso de Cantor-Bendixson para encontrar la parte perfecta de un conjunto cerrado de un espacio que consiste en ir removiendo los puntos aisalados del conjunto. Si se traslada esta idea a marcos, dejando a un lado el caso espacial, vemos que la derivada de Cantor-Bendixson es el operador que nos va a ir colapsando los intervalos booleanos del marco.

Esta derivada, que escribimos como cbd^A, se define formalmente a partir de una relación $\lessdot$ en A dada como

$$a \lessdot x \Leftrightarrow a \leq x \quad \text{y} \quad (x \succ a) = a$$

y

$$cbd^A(a) = \bigwedge \{x \in A \mid a \lessdot x\}$$

para cualesquiera $x, a \in A$. En el capítulo 2 vemos que la derivada nos dice que tan booleano es A pues cuando evaluamos un elemento del marco en la derivada ésta nos da el intervalo booleano en A mas grande por arriba del elemento. Por ejemplo, si $a \in A$, $[a, cbd^A(a)]$ es el intervalo booleano más grande que empieza en a. En particular si al evaluar en el 0 nos queda 1 tenemos que A es booleano. Además, como cada ensamble de la torre es un marco, también tenemos una torre de derivadas correspondientes a cada marco

$$cbd^A \quad cbd^{NA} \quad cbd^{N^2A} \quad \dots \quad cbd^{N^\alpha A} \quad \dots$$

y podemos relacionar las derivadas de distintos niveles. Por lo que ya dijimos de la derivada, sabemos que, si al evaluar la derivada de un nivel de la torre en el cero correspondiente nos da el uno de ese nivel, ese ensamble es booleano. Esto sería una primera caracterización para saber cuando un marco es booleano. Todavía podemos decir más pues resulta que la derivada de Cantor- Bendixson es un prenúcleo. Probaremos que al iterarla obtenemos una cadena

$$cbd \leq cbd^2 \leq \dots \leq cbd^\alpha \leq \dots$$

que eventualmente se estabiliza ya que A es un conjunto. Vamos a denotar cbd^∞ al momento en que la cadena se estaciona. Este operador cbd^∞ ya va a ser un núcleo pues el proceso anterior es la cerradura idempotente. Además, notemos que esto lo podemos hacer para cualquier derivada de cualquier nivel de la torre de ensambles. Pero podemos generalizar un poco más la definición de derivada. Si damos $j \in NA$, es decir un núcleo de A, tenemos la composición

$$A \xrightarrow{j^*} A_j \xrightarrow{cbd^{A_j}} A_j \xrightarrow{i} A$$

donde i es la inclusión. Esta composición nos permite definir a cbd^A_j que con el mismo proceso de iteración podemos obtener a $(cbd^A_j)^\infty$ y esto también lo puedo hacer para todos los niveles del ensamble. Un resultado muy importante, el que me relaciona a las derivadas de distintos ensambles, dice que

$$(cbd^A_j)^\infty = cbd^{NA}(j)$$

para cualquier núcleo en NA. Este resultado se puede levantar para los demás niveles. Con toda esta información en los capítulos 4 y 5 llegaremos a otras propiedades y teoremas que nos darán caracterizaciones para saber cuando NA y N^2A

son booleanos. Entre algunas de esas caracterizaciones encontraremos condiciones de cadena, ya sea ascendentes o descendentes, lo cual nos da más criterios para analizar a los ensambles. Incluso generalizaremos el orden $\lessdot$ que usamos para definir la derivada y definiremos, en el capítulo 5, un orden $\ll$ que nos ayudará a encontrar más equivalencias. Toda esta herramienta nos permite lograr resultados muy fuertes para NA y N^2A que en algunos casos pueden levantarse a otros niveles. Sin embargo, para ensambles mucho más grandes es difícil calcular cosas y esta herramienta se vuelve un poco inútil.

Con respecto a los resultados que tenemos para N^2A probamos uno en particular en el capítulo 3. Consiste en construir, a partir de un marco A, un álgebra booleana completa. Tomamos a los operadores en A que cumplen que

$$f(a \succ b) = (a \succ f(b))$$

para cualesquiera $a, b \in A$. Estos operadores y sus propiedades se desarrollan en la tesis doctoral de Todd Wilson [Wil94]. Resulta que el conjunto de estos operadores, que escribimos como TA, forma un álgebra booleana completa que además va a ser isomorfa a

$$TA \cong N^2A_{\neg\neg} \cong [Id, \Delta]$$

donde $N^2A_{\neg\neg}$ son todos los elementos regulares en N^2A y $[Id, \Delta]$ es un intervalo en N^2A que va de la identidad a Δ con $\Delta = cbd^{N^2A}(Id)$. Este resultado nos ayuda a entender como esta funcionando la doble negación en N^2A que es importante pues nos da los elementos regulares, es decir, la parte booleana de un marco. A pesar de que $TA \in \mathcal{CBA}$ se construye a partir de A y nos da mucha información sobre N^2A no podemos decir que TA es la reflexión booleana de A. Es un ejemplo muy tangible de un álgebra booleana completa pero, en general, no sirve para la reflexión. Entonces, ¿quién va a ser la reflexión booleana?

La respuesta no es sencilla pero en el capítulo 6 llegamos a una caracterización de cuando un marco tiene reflexión. Lo que pasa es que si $A \in \mathcal{F}\mathrm{rm}$ para cualquier ordinal α hay un epimorfismo inyectivo

$$A \xrightarrow{\eta^\alpha} N^\alpha A$$

La construcción cuidadadosa de estos morfismos y de la torre de ensmables aparece en la tesis de Todd Wilson [Wil94] y en el libro [Joh86] de Johnstone. Cada η^α cumple que todos los elementos de la imagen tienen complemento en $N^\alpha A$. Más aún, para cualquier otro morfismo y marco que cumpla esto, digamos

$$A \xrightarrow{f} B$$

existe un único morfismo g tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta^\alpha"'] & B \\ N^\alpha A \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Esto en realidad es muy parecido a la reflexión booleana el único problema es que $N^\alpha A$ no es necesariamente un álgebra booleana completa. Sin embargo, vamos a poder decir que A tiene reflexión booleana si y sólo si algún $N^\alpha A$ es booleano si y sólo si la torre de ensambles se estabiliza. Y si la torre se estaciona en el ordinal α entonces

$$A \xrightarrow{\eta^\alpha} N^\alpha A$$

es la reflexión booleana. Este teorema es muy fuerte y aparece en las notas de Harold [Sim17c] pero no siempre podemos dar una reflexión booleana y en ese caso los morfismos η^α son lo más cercano a una reflexión. No es trivial dar un marco sin reflexión booleana, afortunadamente damos ejemplo de esto en el capítulo 7.

Evidentemente el problema de la reflexión booleana sigue siendo un problema pues todavía no hay forma de calcular, si es que la torre se estaciona, en qué ordinal se estabiliza la torre. Por eso la derivada de Cantor-Bendixson es una herramienta muy útil para saber cuando un ensamble es booleano. En este trabajo se desarrollará todo esto intentando dar un panorama general de este problema y de la poderosa herramienta que es la derivada de Cantor-Bendixson. Sin embargo, se quedan abiertas varias preguntas como, ¿cuándo podemos saber si la torre de ensambles se estaciona? ¿Si la torre se estabiliza en que ordinal lo hace?

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos las nociones básicas para entender la reflexión booleana y la derivada de Cantor-Bendixson. Estaremos trabajando con dos categorías, la categoría de marcos $\mathfrak{Frm}$ y la categoría de álgebras booleanas completas $\mathcal{CBA}$. Para este capítulo usamos las notas de Harold Simmons [Sim17a] y [Sim17b].

1.1. Teoría General de Marcos

Definición 1.1.1. *Un marco*

$$(A, \leq, \wedge, \bigvee, 0, 1)$$

es una retícula completa que cumple una ley distributiva particular

$$x \wedge \bigvee Y = \{x \wedge y \mid y \in Y\}$$

para cualquier $x \in A$ y $Y \subseteq A$ que llamamos ley distributiva para marcos (LDM). Los morfismos entre marcos son funciones monótonas que mandan el cero al cero, el uno al uno, respetan ínfimos finitos y supremos arbitrarios.

Definición 1.1.2. *Un álgebra booleana completa*

$$(B, \leq, \bigwedge, \bigvee, 0, 1)$$

Es una retícula completa distributiva tal que todo elemento de A tiene un complemento. Es decir, para todo $x \in B$

$$x \vee y = 1 \qquad x \wedge y = 0$$

para algún $y \in B$. Los morfismos entre álgebras boolenas completas son funciones monótonas que mandan el cero al cero, el uno al uno y respetan ínfimos y supremos arbitrarios. Como consecuencia de esto, estos morfismos también respetan complementos.

Observación 1.1.3. *Si $a \in B$ y $B \in \mathcal{CBA}$ el complemento de a es único. Suponemos que b y c con complementos de a entonces*

$$b = b \wedge (a \vee b) = (a \vee c) \wedge b = b \wedge c$$

que implica que $b \leq c$, análogamente podemos llegar a que $c \leq b$. Entonces el complemento de a es único para cualquier $a \in A$ y por eso lo denotaremos como $\neg a$.

Observación 1.1.4. *En un álgebra booleana $B \in \mathcal{CBA}$ se cumple*

$$a \wedge x \leq y \Leftrightarrow x \leq \neg a \vee y$$

para cualesquiera $x, y, x \in B$.

Definición 1.1.5. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ categorias, decimos que $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{E}$ si y sólo si*

1. *Si $\mathcal{E}$ es subcategoría de $\mathcal{C}$.*
2. *$\mathcal{E}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{O}bj(\mathcal{E})$*

Además, decimos que $\mathcal{C}$ es reflexiva si existe $L\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ adjunto izquierdo de la inclusión: $i\colon \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{E}$. Decimos que L es reflector de $(\mathcal{C}, i)$.

La categoría de las álgebras booleanas completas,$\mathcal{CBA}$, no es reflexiva con respecto a la categoría de marcos, Frm. Sin embargo, buscamos que para cada $A \in Frm$ exista un $B \in \mathcal{CBA}$ asociada a A de manera universal.

Definición 1.1.6. *Sea $A \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$ decimos que A tiene reflexión boolena si*

1. *$B \in \mathcal{CBA}$*
2. *hay un $\zeta\colon A \longrightarrow B$ tal que para todo $\eta\colon A \longrightarrow C$ con $C \in \mathcal{CBA}$, existe un único morfismo de álgebras booleanas completas $\gamma\colon B \longrightarrow C$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\zeta"'] & \mathcal{C} \\
\mathcal{B} \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Así, decimos que (B, ζ) es la reflexión booleana de A.

Proposición 1.1.1. *Toda álgebra booleana completa es un marco.*

Demostración. Sea $B \in \mathcal{CBA}$ basta probar que B satisface la ley distributiva para marcos(LDM). Sea $X \subseteq B$ y $a \in B$. Consideremos

$$l = a \wedge \left(\bigvee X\right)$$

y

$$r = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}.$$

Siempre tenemos que $r \leq l$ pues

$$a \wedge x \leq a \wedge \left(\bigvee X\right)$$

para toda $x \in X$. Por otro lado, $a \wedge x \leq r$ y por la observación anterior 1.1.4, $x \leq \neg a \vee r$ para toda $x \in X$. Entonces

$$\bigvee X \leq \neg a \vee r$$

y por la observación 1.1.4,

$$a \wedge \bigvee X \leq r$$

Así $r = l$ que es lo que buscábamos probar. □

Lema 1.1.7. *Sea $A \in \mathcal{CBA}$ y $X \subseteq A$, entonces*

$$\bigwedge X = \neg \left(\bigvee Y\right)$$

donde

$$Y = \{\neg x \mid x \in X\}$$

Demostración. Consideremos $a = \bigwedge X$ y $b = \bigvee Y$. Queremos probar que $a = \neg b$, es decir que

$$a \wedge b = 0$$

y

$$a \vee b = 1$$

Sea $y \in Y$, entonces $y = \neg x$ para alguna $x \in X$. Así,

$$a \wedge y \leq x \wedge y = 0$$

y por 1.1.1

$$a \wedge b = \bigvee \{a \wedge y \mid y \in Y\} = 0$$

Por otro lado, consideremos $c = \neg b$. Así

$$c \wedge \neg x \leq c \wedge b = 0$$

es decir, $c \wedge \neg x = 0$. Por la observación 1.1.4 obtenemos que

$$c \leq \neg\neg x = x$$

para toda $x \in X$. Así, $c \leq a$. Entonces

$$1 = c \vee b \leq a \vee b$$

que implica que $a \vee b = 1$. □

Lema 1.1.8. *Sea $f\colon A \to B$ un morfismo de marcos tal que $A \in \mathcal{CBA}$ entonces f es un morfimso completo, es decir*

$$f\left(\bigwedge X\right) = \bigwedge f[X]$$

para cualquier $x \subseteq A$.

Demostración. Sea $X \subseteq A$ y consideremos $b = f(\bigwedge X)$ y $d = \bigwedge f[X]$ basta que probemos que $d = b$. Primero probaremos que $b \leq d$.Como $\bigwedge X \leq x$ para toda $x \in X$ y f es monótona por ser morfismo de marcos, $b = f(\bigwedge X) \leq \bigwedge f[X] = d$.

Ahora veamos que se cumple la otra desigualdad. Consideremos $Y = \{\neg x \mid x \in X\}$ y $c = f(\bigvee Y)$. Primero, notemos que por el lema 1.1.7

$$\bigwedge X = \neg\left(\bigvee Y\right)$$

y como f es morfismo de marcos, $b \wedge c = 0$ y $b \vee c = 1$. Observemos que para todo $y \in Y$ hay una $x \in X$ tal que $y = \neg x$. Entonces

$$d \wedge f(y) \leq f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y) = f(0) = 0$$

para cualquier $x \in X$. Por lo tanto,

$$d \wedge c = d \wedge f\left(\bigvee Y\right) = d \wedge \bigvee f[Y] = \bigvee \{d \wedge f(y) \mid y \in Y\} = 0$$

pero ya sabíamos que $c \vee b = 1$, enotonces

$$d = d \wedge (c \vee b) = (d \wedge c) \vee (d \wedge b) = 0 \vee (d \wedge b) = d \wedge b$$

lo que no dice que $d \leq b$.

□

Teorema 1.1.9. *La categoría de álgebras booleanas completas, $\mathcal{CBA}$ es una subacategoría plena de la categoría de marcos $\mathfrak{Frm}$.*

Demostración. Sean $A, B \in CBA$, siempre tenemos que $\mathcal{CBA}(A, B) \subseteq \mathfrak{Frm}(A, B)$. Además por el lema anterior 1.1.8, $\mathfrak{Frm}(A, B) \subseteq \mathcal{CBA}(A, B)$. □

Definición 1.1.10. *Sea A una retícula completa, una implicación es una operación sobre A*

$$\_ \succ \_ \colon A \times A \colon \longrightarrow A$$

de tal forma que

$$x \leq (b \succ a) \Leftrightarrow b \wedge x \leq a$$

para cualesquiera $a, b, x \in A$.

Lema 1.1.11. *Una retícula completa tiene implicación si y sólo si es un marco.*

Demostración. Sea A una retícula completa y con implicación. Si $X \subseteq A$ y $a \in A$ sabemos que

$$a \wedge \bigvee X \geq \bigvee \{x \wedge a \mid x \in X\}$$

por definición de supremos e ínfimos. Sólo falta probar la otra desigualdad. Para esto consideramos $y = \bigvee \{x \wedge a \mid x \in X\}$, entonces

$$a \wedge x \leq y$$

para toda $x \in X$. Esto es equivalente a que

$$x \leq (a \succ y)$$

para toda $x \in X$. Entonces

$$\bigvee X \leq (a \succ y)$$

que implica por la propiedad de la implicación que

$$a \wedge \bigvee X \leq y$$

lo que prueba la primera parte del lema.

Ahora suponemos que A es un marco, entonces definimos a la implicación como sigue

$$(a \succ b) = \bigvee \{c \in A \mid\}$$

Esta sería una operación y está bien definida. Además para cualesquiera $a, b, x \in A$ cumple que

$$a \wedge x \leq b \Rightarrow x \leq a \succ b$$

pues es consecuencia directa de como definimos la operación. Ahora, si $x \leq a \succ b$, tenemos que

$$a \wedge x \leq a \wedge (a \succ b) = a \wedge \bigvee \{x \in A \mid a \wedge x \leq b\} = \bigvee \{a \wedge x \in A \mid a \wedge x \leq b\} \leq b$$

donde la segunda igualdad se da por la LDM. $\square$

Lema 1.1.12. *Sea $A \in Frm$ para todo $a, x, y \in A$ y cualquier $X \subseteq A$ se cumple lo siguiente:*

i) $a \leq (x \succ a)$

ii) $x \wedge (x \succ a) = x \wedge a$

iii) $x \leq y \Rightarrow (y \succ a) \leq (x \succ a)$

iv) $((\bigvee X) \succ a) = \bigwedge \{(x \succ a) \mid x \in X\}$

Demostración. Para probar la primera propiedad notamos que si $a, x \in A$, por definición de ínfimo, $x \wedge a \leq a$, entonces $a \in \{y \in A \mid x \wedge y \leq a\}$. Por lo tanto,

$$a \leq \bigvee \{y \in A \mid x \wedge y \leq a\} = (x \succ a)$$

Para la segunda propiedad tomamos $a, x \in A$ arbitrarios y observemos que

$$z \leq x \wedge (x \succ a) \Leftrightarrow z \leq x \quad \text{y} \quad z \leq (x \succ a)$$

$$\Leftrightarrow z \leq x \text{ y } z \wedge x \leq a$$

$$\Leftrightarrow z \leq x \quad \text{y} \quad z \leq a$$

$$\Leftrightarrow z \leq a \wedge x$$

para cualquier $Z \in A$. En particular si damos $z = x \wedge a$ obtenemos que $x \wedge a \leq x \wedge (x \succ a)$ y si damos $z = x \wedge (x \succ a)$, obtenemos que $x \wedge (x \succ a) \leq x \wedge a$. Para el tercer inciso supongamos que $x \leq y$. Consideremos $z = y \succ a$, entonces $x \wedge z \leq y \leq z$ y por los dos incisos anteriores de este lema, $y \wedge z \leq a$. Así, usando la propiedad característica de la implicación, $z = y \succ a \leq x \succ a$. Para probar el inciso iv) tomamos cualquier $z \in A$ entonces

$$z \leq \left(\left(\bigvee X\right) \succ a\right) \Leftrightarrow z \wedge \left(\bigvee X\right) \leq a$$

y recordemos que por estar trabajando en un marco,$z \wedge (\bigvee X) = \bigvee \{z \wedge x \mid x \in X\}$. Entonces lo anterior es equivalente a que

$$(\forall x \in X)[z \wedge x \leq a]$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in X)[z \leq x \succ a]$$
$$\Leftrightarrow z \leq \bigwedge \{x \succ a \mid x \in X\}$$

Así, si damos $z = (\bigvee X)$ obtenemos $(\bigvee X) \leq \bigwedge \{x \succ a \mid x \in X\}$.Y si damos $z = \bigwedge \{x \succ a \mid x \in X\}$,nos queda que $\bigwedge \{x \succ a \mid x \in X\} \leq (\bigvee X)$. □

Observación 1.1.13. *La implicación en un marco es única. Pues si suponemos que hay dos distintas digamos $\succ$ y $\rhd$ entonces para cualquier $a, b \in A$*

$$a \wedge (a \succ b) = a \wedge b \leq b \Leftrightarrow (a \succ b) \leq a \rhd b$$

y

$$a \wedge (a \rhd b) = a \wedge b \leq b \Leftrightarrow (a \rhd b) \leq a \succ b$$

donde usamos la propiedades del lema anterior 1.1.12. Por lo tanto, las implicaciones son iguales. Así podemos decir, por el lema1.1.11 que para un marco $A \in \mathfrak{Frm}$

$$(a \succ b) = \bigvee \{c \in A \mid a \wedge c \leq b\}$$

es la implicación para cualesquiera $a, b \in \mathfrak{Frm}$.

Lema 1.1.14. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ para cualesquiera $x, b \in A$,*

$$(((x \vee (x \succ b)) \succ b) = b$$

Demostración. Observa que si $x, b \in A$

$$(((x \vee (x \succ b)) \succ b) = (x \succ b) \wedge ((x \succ b) \succ b) = (x \succ b) \wedge b = b$$

pues estas igualdades se deben a las propiedades del lema 1.1.12. □

Definición 1.1.15. *Sean $A \in Frm$ y $a \in A$ definimos a le negación de a como:*

$$\neg a = (a \succ 0)$$

Observación 1.1.16. *Notemos que para cualquier $a \in A$, $a \wedge \neg a = a \wedge (a \succ 0) = a \wedge 0 = 0$. Además nota que si $A \in \mathfrak{CBA}$, la negación en ese caso el complemento lo podemos expresar en términos de la implicación.*

Definición 1.1.17. *Sean $A \in Frm$ y $a \in A$ decimos que a es:*

- *complementado si $a \vee \neg a = 1$*
- *regular si $\neg\neg a = a$*
- *denso si $\neg a = 0$*

Observación 1.1.18. *Si $a \in Frm$, entonces para cualesquiera $a, b \in A$:*

i) $a \leq \neg\neg a$ *ya que* $((a \succ 0) \succ 0) \leq a \Leftrightarrow a \wedge 0 = a \wedge (a \succ 0) \leq 0$.

ii) $\neg\neg\neg a = \neg a$ *pues por el inciso anterior tenemos que* $\neg a \leq \neg\neg\neg a$*, y como también sabemos que* $a \leq \neg\neg a$*, por el lema1.1.12 obtenmos que* $\neg\neg\neg a = (\neg\neg a \succ 0) \leq (a \succ 0) = \neg a$*. Esto nos dice que* $\neg a$ *es regular.*

iii) $\neg a \wedge \neg b = \neg(a \vee b)$ *se da por el lema1.1.7.*

iv) $\neg(a \vee \neg a)$*es denso es cierto pues* $\neg(a \vee \neg a) = \neg a \wedge \neg\neg a = 0$.

v) $\neg\neg a \wedge (a \vee \neg a) = a$ *pues* $\neg\neg a \wedge (a \vee \neg a) = (\neg\neg a \wedge a) \vee (\neg\neg a \wedge \neg a) = (\neg\neg a \wedge a) \vee 0 = a \vee 0 = a$*. Esto nos dice que cualquier* $a \in Frm$ *se puede escribir como el supremo de un elemento denso y un elemento regular.*

vi) Notemos que si hay un $b \in Frm$ *tal que* $a \wedge b = 0$ *y* $a \vee b = 1$*, entonces* $b = \neg a$.

Lema 1.1.19. *Sea $A \in Frm$, A es booleano ($A \in \mathcal{CBA}$) si y sólo si todo elemento es regular.*

Demostración. Sea $A \in Frm$. Supongamos que A es booleano y tomamos $a \in A$ arbitrario. Si $A \in CBA$, $a \vee \neg a = 1$ y $\neg\neg a \vee \neg a = 1$. Pero el complemento es único para $\neg a$, por lo tanto, $a = \neg\neg a$, es decir, a es regular. Sea $a \in A$ y suponemos que todos sus elementos son regulares solo hace falta probar que $a \vee \neg a = 1$. Usando que todos los elementos son regulares, en particular $a \vee \neg a$, entonces obtenemos que

$$a \vee \neg a = \neg\neg(a \vee \neg a) = \neg(\neg a \wedge \neg\neg a) = \neg 0 = 1$$

es decir que todo elemento es complementado y por tanto $A \in \mathcal{CBA}$.

$\square$

Por último hay que mencionar una característica de $\mathcal{CBA}$ que enunciamos en el siguiente lema.

Lema 1.1.20. *Si*

$$A \xrightarrow{f} B$$

es un morfismo de álgebras booleanas completas, entonces es epimorfismo si y sólo si es suprayectivo.

Demostración. $\square$

1.2. Cocientes en un marco

Queremos entender bien la noción de núcleo que es un operador muy especial sobre un marco. Para entender esto hay que construir cocientes, sin embargo daré primero la definición de núcleo y de operador cerradura y después se entenderá su importancia.

Definición 1.2.1. *Sea $A \in \mathcal{F}\mathrm{rm}$ decimos que un operador en A*

$$j \colon A \longrightarrow A$$

es un núcleo si éste es una función monótona ,que infla, que es idempotente y que cumple que

$$j(x) \wedge j(y) \leq j(x \wedge y)$$

También serán útiles los operadores cerradura que son aquellos que son son monótonos, idempotentes e inflan. En particular, todo núcleo es un operador cerradura pero no viceversa. Denotamos NA al conjunto de todos los núcleo en A y a CA al conjunto de todos los operadores cerradura en A.

Los núcleos aparecen a partir de construir cocientes en marcos. Sin embargo, para construir los cocientes trabajamos primero con una $\bigvee$-retícula, es decir, un conjunto con un orden parcial, supremos arbitrarios, y por tanto ínfimos arbitrarios, y con cero, $(A, \leq, \bigvee, 0)$. Estos objetos forman una categoría de $\bigvee$-retículas cuyos morfismos son funciones monótonas que respetan a supremos arbitrarios y mandan el cero al cero.

Primero daremos las definiciones de adjunción que serán útiles a lo largo del capítulo.

Definición 1.2.2. *Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados (es decir, una función monótona). El adjunto derecho de f es una función monótona f_**

$$B \xrightarrow{f_*} A$$

tal que

$$f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq f_*(b)$$

para cualquier $a \in A$ y $b \in B$. Denotamos a f como f^* y escribimos

$$f^* \dashv f_*$$

para denotar la adjunción.

Lema 1.2.3. *Sean* $A \xrightarrow{f} B$ *un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados y* f_* *su adjunto derecho. Se cumplen las siguientes condiciones*

i) $f_* \circ f^*$ *infla y* $f^* \circ f_*$ *"desinfla".*

ii) $f^* \circ f_* \circ f^* = f^*$ *y* $f_* \circ f^* \circ f_* = f_*$

iii) Si a f *le pedimos que sea un morfismo de marcos, entonces* $f_* \circ f^*$ *es un núcleo*

Demostración. Sea $x \in A$ por la definición de adjunto derecho $f^*(x) \leq f^*(x) \Leftrightarrow x \leq (f_* \circ f^*)(x)$ por lo tanto $f_* \circ f^*$ infla. Por la misma razón,

$$f_*(x) \leq f_*(x) \Leftrightarrow f^* \circ f_*(x) \leq x$$

por lo que $f^* \circ f_*$ "desinfla ". Para probar ii) notamos que

$$x \leq (f_* \circ f^* \circ f_* \circ f^*)(x) \qquad (f^* \circ f_* \circ f^* \circ f_*)(x) \leq x$$

por la propiedad i) y como tenemos una adjunción obtenemos que

$$f^*(x) \leq (f^* \circ f_* \circ f^*)(x) \qquad (f_* \circ f^* \circ f_*)(x) \leq f_*(x)$$

Para que quede la igualdad solo hace falta ver la otra desigualdad pero como $f^* \circ f_*$ desinfla y $f_* \circ f^*$ infla tenemos que

$$(f^* \circ f_* \circ f^*)(x) \leq f^*(x) \qquad f_*(x) \leq (f_* \circ f^* \circ f_*)(x)$$

Por lo tanto, la igualdad que queríamos queda probada.

Para probar el inciso iii) suponemos que f es un morfismo de marcos y f_* su adjunto derecho y queremos ver que $j = f_* \circ f^*$ es núcleo en A. Ya sabemos que j infla por el inciso i) y que es monótono porque f es monótona y f_* es monótona por definición. Falta ver que j es idempotente y que $j(x) \wedge j(y) \leq j(x \wedge y)$ para cualesquiera $x, y \in A$. Observemos que

$$j^2 = f_* \circ f^* \circ f_* \circ f^* = f_* \circ f^* = j$$

pues usamos el inciso ii). Ahora tomamos $x, y \in A$ y consideremos $a = j(x) \wedge j(y)$. Nota que

$$f^* \circ j = f^* \circ f_* \circ f^* = f^*$$

por el inciso ii). Entonces como f^* es un morfismo de marcos y respeta ínfimos finitos,

$$f^*(a) = f^*(j(x)) \wedge f^*(j(y)) = f^*(x) \wedge f^*(y) = f^*(x \wedge y)$$

es decir, tenemos que
$$f^*(a) \leq f^*(x \wedge y)$$
pero como f_* es el adjunto derecho de f nos queda que

$$a \leq (f_* \circ f^*)(x \wedge y) = j(x \wedge y)$$

lo que prueba que j es un núcleo. $\square$

Lema 1.2.4. *Todo morfismo de marcos tiene adjunto derecho.*

Demostración. Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo de marcos definimos

$$f_* \colon B \longrightarrow A$$

$$f_*(b) = \bigvee \{a \in A \mid f(a) \leq b\}$$

con esta definición es inmediato que

$$f(a) \leq b \Rightarrow a \leq f_*(b)$$

para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Ahora, si

$$a \leq f_*(b) = \bigvee \{a \in A \mid f(a) \leq b\}$$

al aplicar f, como este es un morfismo de marcos y respeta supremos arbitrarios nos queda que

$$f(a) \leq f_*(b) = \bigvee \{f(a) \mid a \in A, f(a) \leq b\} \leq b$$

Por lo tanto, $f \dashv f_*$. $\square$

Observación 1.2.5. *Observa que la prueba del resultado anterior también sirve si trabajamos con $\bigvee$-retículas. Es decir, cualquier morfismo de este tipo de retículas tiene adjunto derecho.*

Lema 1.2.6. *Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados, es decir, una función monótona. La función f respeta supremos arbitrarios si y sólo si f tiene un adjunto derecho.*

Demostración. Para el regreso, la prueba es la misma que la del lema 1.2.4. Para la ida suponemos que $f^* \dashv f_*$ y queremos probar que

$$f^*\left(\bigvee X\right) = \bigvee f^*[X]$$

para algún $X \subseteq A$. Como $\bigvee X \geq x$ para cualquier $x \in X$ y f^* es monótona

$$f^*\left(\bigvee X\right) \geq f^*(x)$$

que implica que

$$f^*\left(\bigvee X\right) \geq \bigvee f^*[X]$$

se cumple. Para la otra desigualdad notamos que

$$f^*(x) \leq \bigvee f^*[X]$$

para cualquier $x \in X$. Pero como tenemos la adjunción esto es equivalente a que

$$x \leq f_*\left(\bigvee f^*[X]\right)$$

para cualquier $x \in X$. Así

$$\bigvee X \leq f_*\left(\bigvee f^*[X]\right)$$

y por la adjunción esto equivale a que

$$f^*\left(\bigvee X\right) \leq \bigvee f^*[X]$$

lo que quiere decir que f^* respeta supremos arbitrarios. $\square$

Ahora sí estamos listos para construir los cocientes. Si A es una $\bigvee$-retícula y tenemos una relación de equivalencia en A $\sim$, como en conjuntos. Buscamos dar un cociente, sin embargo la función canónica

$$A \longrightarrow A/\sim$$

que manda a cada elemento a su clase de equivalencia tiene dos problemas, no sabemos si esa función es un morfismo de $\bigvee$-retículas y tampoco sabemos como definir a $A/\sim$ como una retícula. Así, consideramos las siguientes definiciones.

Definición 1.2.7. *Si A es una $\bigvee$-retícula y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A, para cualesquiera $X \subseteq A$ y $Y \subseteq A$ donde $X = \{x_i \mid i \in I\}$ y $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ decimos que:*

$$X \sim Y \Leftrightarrow (x_i \sim y_i)(\forall i \in I)$$

Además decimos que la relación de equivalencia $\sim$ sobre A es una $\bigvee$-congruencia si para cualesquiera $X, Y \subseteq A$, si $X \sim Y$, entonces $\bigvee X \sim \bigvee Y$. Notemos que la primera relación es la que se definió para conjuntos y la segunda es la relación para elementos de A.

Definición 1.2.8. *Sea* $A \xrightarrow{f} B$ *un morfismo de* $\bigvee$*-retículas, el kernel de* f *es la relación de equivalencia dada por:*

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

donde $x, y \in A$.

Lema 1.2.9. *EL kernel de un* $\bigvee$*-morfismo*

$$A \xrightarrow{f} B$$

es una $\bigvee$*-congruencia en* A.

Demostración. Primero notemos que el kernel es una relación de equivalencia en A y esto es porque se define a partir de una igualdad. Ahora, si tomamos $X, Y \subseteq A$ tales que $X \sim Y$, debemos probar que $f(\bigvee X) = f(\bigvee Y)$. Como $X \sim Y$, $f(x_i) = f(y_i)$ para toda $i \in I$ y por tanto, $\bigvee f[X] = \bigvee f[Y]$ pero como f es un morfismo que respeta los supremos, $\bigvee f[X] = f(\bigvee X) = \bigvee f[Y] = f(\bigvee Y)$. $\square$

Lema 1.2.10. *Si* $\sim$ *es una* $\bigvee$*-congruencia sobre una* $\bigvee$*-retícula* A*, entonces cada* $\sim$*-bloque (clase de equivalencia) tiene un elemento máximo.*

Demostración. Sea $a \in A$ y $X \subseteq A$ su $\sim$-bloque,es decir $X = \{x \in A \mid x \sim a\}$.Podemos considerar a X como $X = \{x_i \mid i \in I\}$ y tomamos a $Y \subseteq A$ como $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ donde $y_i = a$ para toda $i \in I$.

Así, resulta que $X \sim Y$ y por definición de $\bigvee$-congruencia, $\bigvee X \sim \bigvee Y = a$, entonces $\bigvee X \sim a$, es decir, $\bigvee X \in X$. $\square$

Definición 1.2.11. *Sea* $\sim$ *una* $\bigvee$ *congruencia para* A*, una* $\bigvee$*- retícula, el selector para* $\sim$ *es el operador en* A *definido como*

$$j \colon A \longrightarrow A$$

$$j(a) = \bigvee \{x \in A \mid x \sim a\}$$

El lema anterior 1.2.10 nos asegura que este operador está bien definido.

Observación 1.2.12. *Por la definición anterior 1.2.11 y el lema 1.2.10, si* j *es el selector para una* $\bigvee$*-congruencia sobre una retícula* A *y* $a \in A$*, tenemos que*

i) $a \sim j(a)$

ii) $x \sim a \Rightarrow x \leq j(a)$ *para cualquier* $x \in A$

Lema 1.2.13. *Sea A una $\bigvee$-retícula. Los selectores de A son precisamente los operadores cerradura. Además cada operador cerradura es selector para una única $\bigvee$-congruencia. Es decir hay una relación biyectiva entre $\bigvee$-congruencias y operadores cerraduras en A.*

Demostración. Si $j\colon A \longrightarrow A$ es un selector para una $\bigvee$-congruencia $\sim$ en A, veamos que j es un operador cerradura.

Primero vemos que por la observación anterior 1.2.12, como $a \sim a$, entonces $a \leq j(a)$. Por lo tanto, j es un operador que infla. Ahora si $b, a \in A$ y $b \leq a$, por 1.2.12, $a \sim j(a)$ y $b \sim j(b)$. Así,

$$j(a) \vee j(b) \sim a \vee b = a$$

pues si damos $X = \{x \in A \mid x \sim a\} = \{x_i \mid i \in I\}$ y $Y = \{y \in A \mid y \sim b\} = \{y_k \mid k \in K\}$ es claro que $X \cup Y \sim Z$ donde $Z = \{z_l \mid l \in I \cup J\}$ y $z_l = a$ si $l \in I$ y $z_l = b$ si $l \in J$. Como es una $\bigvee$-congruencia al sacar supremos nos queda lo que queríamos. Usando, una vez más la observación 1.2.12, obtenemos que $j(b) \leq j(a) \vee j(b) \leq j(a)$.Lo que quiere decir que j es monótono.

Solo queda ver que j es idempotente. Sea $a \in A$ y damos $b = j(j(a))$. Por 1.2.12, $a \sim j(a) \sim j(j(a))$ y esto implica que $j(j(a)) \leq j(a)$. La otra desigualdad ya la tenemos pues j es un operador que infla. Por lo tanto j es un operador cerradura.

Ahora tomamos j un operador cerradura en A y buscamos definir una $\bigvee$-congruencia para la cual sea selector. Así, definimos la relación

$$x \sim y \Leftrightarrow j(x) = j(y)$$

Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia pues se define a partir de la igualdad. Veamos que es una $\bigvee$-congruencia. Supongamos que $X, Y \subseteq A$ y que $X \sim Y$ y tomemos $x \in X$ y $y \in Y$ de tal forma que $x \sim y$. Usando que j es un operador cerradura tenemos que $y \leq j(y) = j(x) \leq j\left(\bigvee X\right)$ para cualquier $y \in Y$. Entonces, $\bigvee Y \leq j\left(\bigvee X\right)$ y como j es idempotente obtenemos que

$$j\left(\bigvee Y\right) \leq j\left(j\left(\bigvee X\right)\right) = j\left(\bigvee X\right)$$

Faltaría la otra desigualdad pero se obtiene análogamente cambiando x por y. Por lo tanto, la relación que definimos sí es una $\bigvee$-congruencia. Falta ver que j es su selector. Supongamos que para la $\bigvee$-congruencia con la que estamos trabajando

$$f\colon A \to A$$

$$f(a) = \bigvee \{x \in A \mid x \sim a\}$$

es el selector. Queremos ver que $f = j$. Sea $a \in A$ como f es el selector, $a \sim f(a)$ y por definición de la congruencia esto es equivalente a que $j(a) = j(f(a))$. Recordemos que j es un operador cerradura entonces $j(j(a)) = j(f(a))$ y esto es equivalente a que $j(a) \sim f(a)$. Entonces usando la observación 1.2.12

$$j(a) \leq f(f(a)) = f(a)$$

pues ya probamos que los selectores son operadores cerradura. Entonces, $j \leq f$.

Por otro lado, para cualquier $x \sim a$ por la definición de $\sim$ y debido a que j infla, $x \leq j(x) = j(a)$.Así

$$f(a) = \bigvee \{x \in A \mid x \sim a\} \leq j(a)$$

Por lo tanto, $f \leq j$.

Finalmente, para ver que es una relación biyectiva la que hay entre selectores y operadores cerradura veremos que un operador cerradura nos define una única $\bigvee$-congruencia.

Supongamos que j, un operador cerradura, es un selector para una $\bigvee$-congruencia en A. Basta probar que la congruencia está definida como

$$x \sim y \Leftrightarrow j(x) = j(y)$$

para cualesquiera $x, y \in A$. Tomamos $x, y \in A$ arbitrarios de tal forma que $x \sim y$. Por la observación 1.2.12 y ya que j es el selector de la congruencia, $x \leq j(y)$ y $y \leq j(x)$. Usando la monotonía y la idempotencia de j obtenemos que $j(x) \leq j(y)$ y $j(y) \leq j(x)$. Es decir,

$$x \sim y \Rightarrow j(x) = j(y)$$

Ahora bien, si $j(x) = j(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$, como j es el selector, $x \sim j(x) = j(y) \sim y$ y por tanto $x \sim y$. Y así queda probado lo que queríamos.

$\square$

Definición 1.2.14. *Sea A una $\bigvee$-retícula decimos que $F \subseteq A$ es $\bigwedge$-cerrado o cerrado bajo ínfimos si $\bigwedge X \in F$ para cualquier $X \subseteq F$.*

Observación 1.2.15. *Observa que si j es un operador cerradura (idempotente) sobre un marco o una $\bigvee$-retícula A los puntos fijos, que denotaremos como A_j, son igual a la imagen. Pues si $a \in A_j$ entonces $a = j(a)$ y por tanto a esta en la imagen. Ahora bien, si a es un elemento de la imagen, $a = j(b)$. Pero como j es idempotente tenemos que $j(a) = j(j(b)) = j(b) = a$ lo que quiere decir que*

$a \in A_j$. Además si j, k son operadores cerradura en A y $j \leq k$ entonces $A_k \subseteq A_j$. Esto es fácil de ver pues si $a \in A_k$

$$a \leq j(a) \leq k(a) = a$$

lo que quiere decir que $a \in A_j$.

Lema 1.2.16. *Sea A una $\bigvee$-retícula. Si j es un operador cerradura entonces A_j es $\bigwedge$-cerrado. Además, si $F \subseteq A$ es $\bigwedge$-cerrado $F = A_j$ para algún operador cerradura j de A. Hay un correspondencia biyectiva entre operadores cerradura y conjuntos $\bigwedge$-cerrados en A.*

Demostración. Tomemos j un operador cerradura en A y $X \subseteq A_j$.

$$\left(\bigwedge X \leq x\right) \quad \forall x \in X$$

Y como j es idempotente y A_j es su conjunto de puntos fijos,

$$j\left(\bigwedge X\right) \leq j(x) = x$$

para cualquier $x \in X$, lo que quiere decir que

$$j\left(\bigwedge X\right) \leq \bigwedge X$$

Además, como j infla, $\bigwedge X \leq j\left(\bigwedge X\right)$ Esto implica que $\bigwedge X$ es un punto fijo de j. Es decir, $\bigwedge X \in A_j$. Por lo tanto, A_j es cerrado bajo ínfimos.

Ahora bien, si tomamos $F \subseteq A$ un conjunto $\bigwedge$-cerrado queremos encontrarle un operador cerradura que sea igual a sus puntos fijos. Consideremos

$$j \colon A \to A$$

$$j(a) = \bigwedge \{x \in F \mid a \leq x\}$$

Este operador está bien definido e infla. Si tomamos $a, b \in A$ con $a \leq b$ y $b \leq j(b)$

$$j(b) \in \{x \in F \mid a \leq x\}$$

y entonces $j(a) \leq j(b)$. Por lo tanto, el operador j también es monótono. Además, si $a \in A$ como F es cerrado bajo ínfimos $j(a) \in F$. Esto implica que $j(j(a)) = \bigwedge \{x \in F \mid j(a) \leq x\} = j(a)$. Por todo lo anterior, j es un operador cerradura en A. Veamos que $F = A_j$. Si $a \in F$, por como definimos j, es evidente que $a = j(a)$ y por tanto, $a \in A_j$. Ahora si $a \in A_j$, $a = j(a) \in F$ pues la imagen y los puntos fijos son el mismo conjunto para operadores cerradura.

Queremos ver que esta correspondencia es biyectiva, para eso nos tomamos dos operadores cerradura en A, digamos j y k tales que $A_j = A_k$. Si $a \in A$, entonces $j(a) \in A_j = A_k$. Así

$$k(j(a)) = j(a) \Rightarrow k(a) \leq k(j(a)) = j(a)$$

pues k es monótono. Análogamente, si $k(a) \in A_k = A_j$

$$j(k(a)) = j(a) \Rightarrow j(a) \leq j(k(a)) = k(a)$$

Por lo tanto, $j = k$ y esto prueba la biyectividad. □

Lema 1.2.17. *Sean A una $\bigvee$-retícula y j un operador cerradura sobre A. Si $X \subseteq A_j$ entonces su supremo en A_j es la imagen bajo j del supremo de X en A. Es decir, $\bigvee X = j\left(\bigvee X\right)$. Además el conjunto A_j es completo y por tanto una $\bigvee$-retícula y*

$$j^* \colon A \to A_j$$
$$j^* = j(a)$$

es un $\bigvee$-morfismo.

Demostración. Tomemos $X \subseteq A_j$.

$$x \leq \bigvee X \leq j\left(\bigvee X\right) \qquad \forall x \in X$$

Entonces $j\left(\bigvee X\right)$ es una cota superior de X en A_j y es la mínima pues si $a \in A_j$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in X$, entonces $\bigvee X \leq a$ este supremo tomado en A. Pero como $A \in A_j$

$$j\left(\bigvee X\right) \leq j(a) = a$$

Y por lo tanto $j\left(\bigvee X\right)$ es el supremo de X en A_j. Notemos que esto es para cualquier $X \subseteq A_j$ entonces A_j tiene supremos arbitrarios y el cero de A_j es $j(0)$. Esto hace que sea una retícula completa.

Veamos que el morfismo j^* es un morfismo de $\bigvee$- retículas. Para esto solo basta ver que supremos van en supremos. Sea $X \subseteq A$ queremos probar que

$$j^*\left(\bigvee X\right) = \bigvee j^*[X]$$

Pero esto es equivalente, por lo que probamos arriba y por como se define j^* a ver que

$$j\left(\bigvee X\right) = j^*\left(\bigvee X\right) = \bigvee j^*[X] = j\left(\bigvee j[X]\right)$$

donde los supremos de los extremos de estas igualdades están en A. Para la primera desigualdad sabemos que

$$x \leq j(x) \leq \bigvee j[X] \qquad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \bigvee X \leq \bigvee j[X]$$

$$\Rightarrow j\left(\bigvee X\right) \leq j\left(\bigvee j[X]\right)$$

Para la otra desigualdad tenemos que

$$x \leq X \qquad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow j(x) \leq j\left(\bigvee X\right) \qquad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \bigvee j[X] \leq j\left(\bigvee X\right)$$

$$\Rightarrow j\left(\bigvee j[X]\right) \leq j^2\left(\bigvee X\right) = j\left(\bigvee X\right)$$

En esta serie de implicaciones sólo usamos que j es operador cerradura y algunas propiedades del supremo. Así obtenemos la igualdad que queríamos y como j^* es monótona pues j lo es y $j^*(0) = j(0)$ es el cero en A_j tenemos que j^* es un $\bigvee$-morfismo. □

Habíamos dicho que para un morfismo de $\bigvee$- retículas $A \xrightarrow{f} B$, el kernel es la $\bigvee$-congruencia dada por

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Ahora con los teoremas de biyectividad que hemos probado podemos pensar al kernel como el operador cerradura, k, tal que

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow k(x) = k(y)$$

para cualesquiera $x, y \in A$.

Definición 1.2.18. *Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo de $\bigvee$-retículas, el kernel de f es el único operador cerradura k sobre A, tal que*

$$k(x) = k(y) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \qquad \forall x, y \in A$$

Esta definición no nos dice realmente quien es el kernel pero el siguiente lema ayuda a ver esto.

Lema 1.2.19. *Sea* $A \xrightarrow{f} B$ *un* $\bigvee$*-morfismo, el kernel* k *de* f *resulta ser*

$$k = f_* \circ f^*$$

Donde $f = f^*$ *y* f_* *es el adjunto dercho de* f*.*

Demostración. Primero probemos que $j = f^* \circ f_*$ es un operador cerradura pero esto es casi inmediato pues al ser composición de funciones monótonas $f_* \circ f^*$ es monótona. Además por el lema 1.2.3 también podemos decir que es una función que infla y que cumple que

$$f_* \circ f^* \circ f_* \circ f^* = f_* \circ f^*$$

es decir, que es idempotente. Por lo tanto, es un operador cerradura.

Para ver que cumple la definición de kernel hay que ver que

$$(f_* \circ f^*)(x) = (f_* \circ f^*)(y) \Leftrightarrow f^*(x) = f^*(y)$$

para cualquier $x, y \in A$. Para la ida solo hace falta componer con f^* los dos lados de la igualdad y por el lema 1.2.3 obtenemos lo que queremos. El regreso es trivial pues solo se compone con f_* de los dos lados de la igualdad. $\square$

Corolario 1.2.20. *Sea* $A \xrightarrow{f} B$ *un* $\bigvee$*-morfismo, el kernel* k *de* f *es el operador cerradura que cumple que*

$$x \leq k(a) \Leftrightarrow f(x) \leq f(a)$$

para cualesquiera $x, a \in A$*.*

Demostración. Por el lema anterior y como conocemos la desigualdad que cumplen las adjunciones

$$x \leq f_*(y) \Leftrightarrow f^*(x) \leq y$$

para todo $x \in A$ y $y \in B$. Basta que demos $y = f(a) = f^*(a)$ para terminar la prueba. $\square$

Teorema 1.2.21. *Sea* A *una* $\bigvee$*-retícula. Si* $A \xrightarrow{f} B$ *es un* $\bigvee$*-morfismo y* k *es su kernel, entonces para cualquier operador cerradura* j *tal que* $j \leq k$ *hay un único* $\bigvee$*-morfismo* $f^\#$ *que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j^*"'] & B \\ A_j \arrow[ur, "f^\#"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir, $f^\# \circ j^* = f$*.*

Demostración. Para toda $x \in A_j$ definimos

$$A_j \xrightarrow{f^{\#}} B$$

$$f^{\#}(x) = f(x)$$

Es claro que $f^{\#}$ es una función y además cumple que

$$(f^{\#} \circ j^*)(a) = f(j(a)) = f(a)$$

La primera igualdad se debe a como esta definido j^* y la segunda igualdad se da pues para cualquier $a \in A$ ocurre lo siguiente:

$$k(k(a)) = k(a) \Leftrightarrow f(k(a)) = f(a)$$

Así por el corolario anterior 1.2.20

$$a \leq j(a) \leq k(a) \Leftrightarrow f(a) \leq f(j(a)) \leq f(k(a)) = f(a)$$

Por lo tanto , $f(j(a)) = f(a)$.

Lo único que falta ver es que $f^{\#}$ es un morfismo de $\bigvee$-retículas. Para eso nos tomamos $X \subseteq A_j$ y notamos que

$$f^{\#}\left(\bigvee_{A_j} X\right) = f^{\#}\left(j\left(\bigvee_{A} X\right)\right) = f^{\#}\left(j^*\left(\bigvee_{A} X\right)\right) =$$
$$= f\left(\bigvee_{A} X\right) = \bigvee_{B} f[X] = \bigvee_{B} f^{\#}[X]$$

donde el subíndice nos indica donde se está calculando el supremo. $\square$

Ya vimos que pasa para $\bigvee$-retículas ahora nos interesan los cocientes en $\mathfrak{Frm}$. Si tenemos un morfismo de marcos $A \xrightarrow{f} B$ éste tiene un kernel como $\bigvee$-retícula que cumple

$$x \leq j(a) \Leftrightarrow f(x) \leq f(a) \qquad \forall x, a \in A$$

donde j es un operador cerradura de A.

Lema 1.2.22. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo de marcos, entonces el kernel de f es un núcleo en A.*

Demostración. Sabemos que el kernel k de f es un operador cerradura, para ver que es un núcleo sólo falta probar que

$$k(a) \wedge k(b) \leq k(a \wedge b)$$

par todo $a, b \in A$. Notemos que para cualquier $x \in A$

$$\begin{aligned} x \leq k(a \wedge b) &\Leftrightarrow f(x) \leq f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \\ &\Leftrightarrow f(x) \leq f(a) \text{ y } f(x) \leq f(b) \\ &\Leftrightarrow x \leq k(a) \text{ y } s \leq k(b) \\ &\Leftrightarrow x \leq k(a) \wedge k(b) \end{aligned}$$

Observa que usamos que f es un morfismo de marcos y la caracterización del kernel dada por el corolario 1.2.20. Como esto es para cualquier $x \in A$ tenemos que $k(a \wedge b) = k(a) \wedge k(b)$. Por lo tanto, k es un núcleo ☐

Definición 1.2.23. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ decimos que $F \subseteq A$ es un conjunto fijo de A si es $\bigwedge$-cerrado y cumple*

$$a \in F \Rightarrow (x \succ a) \in F$$

para cualesquiera $a \in A_j$ y $x \in A$.

Lema 1.2.24. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in CA$, A_j es un conjunto fijo si y sólo si $j \in NA$.*

Demostración. Consideremos $j \in NA$ y $a \in A_j$. Sea $x \in A$ y damos $y = (x \succ a)$. Queremos ver que $y \in A_j$ pero tenemos que

$$x \wedge y = (x \succ a) \wedge x = x \wedge a \leq a$$

entonces como j es un núcleo

$$x \wedge j(y) \leq j(x) \wedge j(y) \leq j(x \wedge y) \leq j(a) = a$$

Así, por la propiedad de la implicación,

$$j(y) \leq (x \succ a) = y$$

Y como j infla, $j(y) = y$, es decir, $y \in A_j$.

Para el regreso consideremos $j \in CA$ de tal forma que A_j es un conjunto fijo de A. Para ver que j es un núcleo sólo hace falta ver que para cualesquiera $x, y \in A$

$$j(x) \wedge j(y) \leq j(x \wedge y)$$

Consideremos $a = j(x \wedge y)$ para $x, y \in A$ arbitrarios. Por como definimos a a sabemos que $a \in A_j$ y como j infla, $x \wedge y \leq j(x \wedge y) = a$. Además A_j es un conjunto fijo entonces

$$\begin{aligned} y \leq (x \succ a) \in A_j \Rightarrow & j(y) \leq j(x \succ a) = (x \succ a) \\ \Rightarrow & x \wedge j(y) \leq x \wedge (x \succ a) = x \wedge a \leq a \\ \Rightarrow & x \leq (j(y) \succ a) \end{aligned}$$

Y como $a \in A_j$ y A_j es un conjunto fijo, $(j(y) \succ a) \in A_j$. Entonces a partir de la última desigualdad llegamos que a que

$$j(x) \leq j(j(y) \succ a) = (j(y) \succ a) \Leftrightarrow j(x) \wedge j(y) \leq a$$

Así probamos que $j \in NA$. □

Lema 1.2.25. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, si $j \in NA$ entonces $A_j \in \mathfrak{Frm}$ y*

$$j^* \colon A \longrightarrow A_j$$
$$j^*(x) = j(x)$$

es un morfismo de marcos.

Demostración. Sabemos que A_j es un retícula competa pues se probó en 1.2.17 para $\bigvee$-retículas. Para ver que es un marco por 1.1.11 basta que demos una implicación en A_j, pero como A_j es un conjunto fijo la implicación de A funciona para A_j y por lo tanto éste es un marco. Queremos ver que j^* es un morfismo de marcos. Pero por el lema 1.2.17 solo faltaría ver que respeta ínfimos finitos pero esto es inmediato pues j es un núcleo. □

Teorema 1.2.26. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$, $j \in NA$. Si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo de marcos y $j \leq k$, donde k es el kernel de f, entonces existe un único morfismo de marcos $A_j \xrightarrow{f^\#} B$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j^*"'] & B \\ A_j \arrow[ur, "f^\#"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $f^\# \circ j^* = f$.

Demostración. Este teorema queda casi completamtente probado por su análogo para $\bigvee$- retículas. Lo único que faltaría ver en este caso es que $f^{\#}$ respeta ínfimos finitos, pero esto es cierto pues f es morfismo de marcos y respeta ínfimos finitos. Además $f^{\#}$ es único pues j^* es suprayectivo en particular epi. $\square$

Observación 1.2.27. *Notemos que si* $A \xrightarrow{f} B$ *es un morfismo de marcos suprayectivo entonces* A_j *es isomorfo a* B *donde* $j \in NA$ *es el kernel de* f*. Esto se debe al lema anterior y a la definición de kernel. Es decir, los cocientes de* A *están en correspondencia biyectiva con los núcleos de* A*.*

1.3. El ensamble de un marco

Ahora daremos una aproximación distinta a los núcleos de un marco.

Definición 1.3.1. *Sea* $A \in \mathfrak{Frm}$ *una derivada o inflación en* A *es una función* $k\colon A \longrightarrow A$ *tal que:*

1. $a \leq k(a)$ *para cualquier* $a \in A$.

2. *Si* $a \leq b$ *entonces* $k(a) \leq k(b)$ *para cualesquiera* $a, b \in A$.

Denotamos DA al conjunto de todas las derivadas en A.

Definición 1.3.2. *Sea* $A \in \mathfrak{Frm}$*,* $c \in DA$*es un operador cerradura o idempotente si* $c^2 = c$.

Denotamos CA al conjunto de todos los operadores cerradura en A.

Definición 1.3.3. *Sea* $A \in \mathfrak{Frm}$*,* $s \in DA$ *es estable si*

$$s(a) \wedge b \leq s(a \wedge b)$$

para cualesquiera $a, b \in A$.

Denotamos SA al conjunto de todos los estables en A.

Definición 1.3.4. *Sea* $A \in \mathfrak{Frm}$*,* $k \in DA$ *es un prenúcleo si*

$$k(a \wedge b) = k(a) \wedge k(b)$$

para cualesquiera $a, b \in A$.

Denotamos PA al conjunto de todos los prenúcleos en A.

Observación 1.3.5. *Notemos que para un prenucleo basta pedir*

$$k(a) \wedge k(b) \leq k(a \wedge b)$$

para cualesquiera $a, b \in A$. La otra desigualdad se cumple para cualquier derivada pues como $x \wedge y \leq x$ y $x \wedge y \leq y$, por la monotonía tenemos que $k(x \wedge y) \leq k(x)$ y $k(x \wedge y) \leq k(y)$. Por lo tanto, $k(x \wedge y) \leq k(x) \wedge k(y)$.

Definición 1.3.6. *Sea $A \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$, $k \in PA$ es un núcleo si es un operador cerradura.*

Denotamos NA al conjunto de todos los núcleos en A.

Observación 1.3.7. *Con respecto a las definiciones anteriores hay que notar que:*

i) Todo prenúcleo es estable.
Si $j \in PA$ y $x, y \in A$ usando que k infla y la igualdad que caracteriza a los prenúcleos obtenemos:

$$j(x) \wedge y \leq j(x) \wedge j(y) = j(x \wedge y)$$

ii) Si una derivada es estable e idempotente, entonces es núcleo.
Si $j \in SA$ y es idempotente para $x, y \in A$ obtenemos lo siguiente:

$$j(x) \wedge j(y) \leq j(x \wedge j(y)) \leq j(j(x \wedge y)) = j(x \wedge y)$$

Así para un $A \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$ obtenemos las siguientes contenciones:

$$NA \subseteq PA \subseteq SA \subseteq DA$$

$$NA \subseteq CA \subseteq DA$$

Ejemplo 1.3.8. *Veamos ahora algunos ejemplos relevantes de núcleos. Si $A \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$ para cualquier $a \in A$ definimos las funciones*

$$u_a \colon A \longrightarrow A$$

$$u_a(x) = a \vee x \quad \forall x \in A$$

$$v_a \colon A \longrightarrow A$$

$$v_a(x) = (a \succ x) \quad \forall x \in A$$

$$w_a \colon A \longrightarrow A$$

$$w_a(x) = ((x \succ a) \succ a) \quad \forall x \in A$$

Primero notemos que u_a es un núcleo pues infla y es monótona pues la función se calcula como un supremo. Además es un prenúcleo pues un marco es distributivo y por tanto $u_a(x \wedge y) = u_a(x) \wedge u_a(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$. También es un operador cerradura pues

$$u_a(u_a(x)) = a \vee (a \vee x) = a \vee x = u_a(x)$$

para cualquier $x \in A$.
Ahora veamos que v_a es un núcleo. Primero, v_a infla por una propiedad del lema 1.1.12. También es monótona pues, por este mismo lema y por la propiedad característica de la implicación,

$$a \wedge (a \succ x) = a \wedge x \leq y \Leftrightarrow (a \succ x) \leq (a \succ y)$$

si $x \leq y$ y $x, y \in A$. Además v_a es idempotente pues

$$a \wedge (a \succ (a \succ x)) = a \wedge (a \succ x) = a \wedge x \leq x$$

por el lema 1.1.12. Esta desigualdad es equivalente por definición de implicación a que

$$v_a(v_a(x)) = (a \succ (a \succ x)) \leq (a \succ b) = v_a(x)$$

par cualquier $x \in A$. Y la otra desigualdad se da porque v_a infla, por tanto tenemos la igualdad. Sólo nos falta ver que para cualesquiera $x, y \in A$

$$v_a(x) \wedge v_a(y) \leq v_a(x \wedge y)$$

pero esto se da porque si hacemos uso del lema 1.1.12 una vez más tenemos que

$$a \wedge (a \succ x) \wedge (a \succ y) = a \wedge x \wedge (a \succ y) = a \wedge x \wedge y \leq x \wedge y$$

y esta desigualdad es equivalente a que

$$(a \succ x) \wedge (a \succ y) \leq (a \succ (x \wedge y))$$

lo que prueba que v_a es un núcleo.
Finalmente, veamos que w_a es un núcleo. Primero observamos que si $x \leq y$

$$(y \succ a) \leq (x \succ a) \Rightarrow ((x \succ a) \succ a) \leq ((y \succ a) \succ a))$$

por el lema 1.1.12 y por tanto w_a es monótona. Además es una función que infla pues por la propiedad de la implicación

$$a \wedge (x \succ a) = x \wedge a \leq a \Leftrightarrow x \leq ((x \succ a) \succ a) = w_a(x)$$

para cualquier $x \in A$. Ahora bien, para probar que w_a es idempotente basta ver que

$$(((x \succ a) \succ a) \succ a) = (x \succ a)$$

para cualquier $x \in A$. Consideremos $x \in A$ entonces

$$\begin{aligned} z \leq (((x \succ a) \succ a) \succ a) \Leftrightarrow & z \wedge ((x \succ a) \succ a) \leq a \\ \Leftrightarrow & z \wedge x \leq z \wedge ((x \succ a) \succ a) \leq a \\ \Leftrightarrow & z \leq (x \succ a) \end{aligned}$$

Observa que aquí usamos la propiedad de la implicación y que w_a infla. Con esta equivalencia si damos $z = (((x \succ a) \succ a) \succ a)$ y $z = (x \succ a)$ obtenemos la igualdad que buscábamos. Sólo nos queda ver que

$$w_a(x) \wedge w_a(y) \leq w_a(x \wedge y)$$

para cualquier $x, y \in A$. Para esto consideramos $z = w_a(x) \wedge w_a(y)$ y $w = z \wedge ((x \wedge y) \succ a)$. Nos basta probar que que $w \leq a$ pues por la propiedad característica de la implicación esto es equivalente a que $z \leq (((x \wedge y) \succ a) \succ a)$ que es la desigualdad que queremos. Así notemos que

$$z \wedge (x \succ a) \leq a \quad y \quad z \wedge (y \succ a) \leq a$$

por el lema 1.1.12 ya que $w_a(x) \wedge (x \succ a) = a \wedge (x \succ a) \leq a$ y lo mismo para $w_a(y)$. Por otro lado, también tenemos que $w \leq z$ por definición de w y

$$w \wedge x \wedge y \leq a$$

pues por el lema 1.1.12

$$w \wedge (x \wedge y) = z \wedge ((x \wedge y) \succ a) \wedge (x \wedge y) = z \wedge (x \wedge y) \wedge a \leq a$$

Ahora, usando estas desigualdades obtenemos que por la propiedad de la implicación

$$\begin{aligned} w \wedge x \leq (y \succ a) \Rightarrow & w \wedge x \leq z \wedge (y \succ a) \leq a \\ \Rightarrow & w \leq (x \succ a) \\ \Rightarrow & w \leq z \wedge (x \succ a) \leq a \end{aligned}$$

que prueba lo que queríamos. Finalmente, podemos decir que w_a es un núcleo.

Estos tres núcleos serán de suma importancia más adelante.

Definición 1.3.9. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ definimos un orden para los elementos de DA de la siguiente manera:*

$$j \leq k \Leftrightarrow (\forall a \in A)\,(j(a) \leq k(a))$$

para cualesquiera $j, k \in DA$.

Observación 1.3.10. *Nota que este orden también lo tienen CA, NA, PA, SA y entonces todos estos conjuntos, junto con DA, son conjuntos parcialmente ordenados. Como en particular la identidad id y la constante uno, que denotamos como tp, son elementos de estos conjuntos, id es el elemento más pequeño y tp es el elemento más grande. Observemos que*

$$id = u_0 = v_1 \quad y \quad tp = u_1 = v_0$$

donde 0 es el cero en el marco A y 1 es el uno en A.

Definición 1.3.11. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ para cada $F \subseteq DA$ definimos al ínfimo puntual como*

$$\bigwedge F \colon A \to A$$
$$\left(\bigwedge F\right)(x) = \bigwedge \{f(x) \mid x \in X\}$$

Observación 1.3.12. *Es claro que la asignación anterior es una función y esta bien definida para cualquier $F \subseteq A$. En el caso de $F = \emptyset$ observemos que $\bigwedge \emptyset = tp$.*

Proposición 1.3.13. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$ los conjuntos DA, SA, PA, CA y NA son cerrados bajo ínfimos puntuales.*

Demostración. Para esta prueba tomamos $F \subseteq DA$ con $F \neq \emptyset$. Para cualquier $x \in X$, como $x \leq f(x)$ para todo $x \in X$,entonces

$$x \leq \bigwedge \{f(x) \mid x \in X\} = \left(\bigwedge F\right)(x)$$

para cualquier $x \in X$. Por lo tanto, el ínfimo puntual para F infla. Además, si $x \leq y$ con $x, y \in A$,

$$f(x) \leq f(y) \qquad \forall f \in F$$

que implica que

$$\left(\bigwedge F\right)(x) \leq \left(\bigwedge F\right)(y)$$

Ahora bien, si $F \subseteq CA$ queremos ver que CA que $\bigwedge F \in CA$. Para esto notemos que

$$\left((\bigwedge F) \circ (\bigwedge F)\right)(a) \leq f^2(a) = f(a)$$

para cualquier $f \in F$ y $a \in A$. Por lo tanto,

$$\left((\bigwedge F) \circ (\bigwedge F)\right)(a) \leq \left(\bigwedge F\right)(a)$$

y la otra desigualdad, para que quede probada la igualdad, es inmediata de que $\bigwedge F$ es en particular una derivada. Si $F \subseteq SA$, queremos probar que $\bigwedge F \in SA$, es decir, que

$$a \wedge \left(\bigwedge F\right)(b) \leq \left(\bigwedge F\right)(a \wedge b)$$

para cualquier $a, b \in A$. Pero esta desigualdad se da porque

$$a \wedge \left(\bigwedge F\right)(b) \leq a \wedge f(a) \leq f(a \wedge b)$$

para cualquier $f \in F \subseteq SA$.

Ahora, si $F \subseteq PA$ basta probar, por lo dicho en la observación 1.3.5, que

$$\left(\bigwedge F\right)(x) \wedge \left(\bigwedge F\right)(y) \leq \left(\bigwedge F\right)(x \wedge y)$$

donde $x, y \in A$. Pero esta desigualdad es cierta pues

$$\left(\bigwedge F\right)(x) \wedge \left(\bigwedge F\right)(y) \leq f(x) \wedge f(y) \leq f(x \wedge y)$$

para cualquier $f \in F$. Por tanto, $\bigwedge F \in PA$. Si $F \subseteq NA$, el ínfimo puntual se queda en NA pues un núcleo es un prenúcleo idempotente y ya probamos que CA y PA son cerrados bajo ínfimos puntuales. $\square$

Así, tenemos cinco ordenes parciales que por tener ínfimos arbitrarios, tienen supremos arbitrarios, cero y uno. Por lo tanto, DA, SA, NA, CA Y PA son retículas completas. En general, el supremo arbitrario de estas retículas no tiene por qué ser el supremo puntual que se define a continuación.

Definición 1.3.14. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ para cada $F \subseteq DA$ definimos al supremo puntual como*

$$\dot{\bigvee} F \colon A \to A$$

$$\left(\dot{\bigvee} F\right)(x) = \bigvee \{f(x) \mid x \in X\}$$

Observa que cuando $F = \emptyset$, $\left(\dot{\bigvee} F\right)(x) = \bigvee \emptyset = 0$. Por tanto no es una derivada.Así que esta definición solo la tomamos para $F \neq \emptyset$.

Lema 1.3.15. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $F \subseteq DA$ con $F \neq \emptyset$, entonces $\dot{\bigvee} F \in DA$ y $\dot{\bigvee} F = \bigvee F$. Además si $F \subseteq SA$, entonces $\dot{\bigvee} F \in SA$ y $\dot{\bigvee} F = \bigvee F$. Es decir, los supremos en DA y en SA se calculan puntualmente.*

Demostración. Sea $F \subseteq DA$ y $F \neq \emptyset$. Notemos que si $x \in A$, $x \leq f(x) \leq \left(\dot{\bigvee} F\right)(x)$, para toda $f \in F$. Por lo tanto, $\dot{\bigvee} F$ infla. Además si $x, y \in A$ con $x \leq y$

$$f(x) \leq f(y) \leq \left(\dot{\bigvee} F\right)(y)$$

para toda $f \in F$. Así por definición de supremo puntual,

$$\left(\dot{\bigvee} F\right)(x) \leq \left(\dot{\bigvee} F\right)(y)$$

Por lo tanto, $\dot{\bigvee} F \in DA$.

Supongamos que hay $g \in DA$ tal que $f \leq g$ para toda $f \in F$. Queremos ver que $\dot{\bigvee} F \leq g$ pero esto es cierto pues

$$(f(x) \leq g(x)(\forall f \in F) \Rightarrow \left(\dot{\bigvee} F\right)(x) \leq g(x)$$

para cualquier $x \in A$. Por lo tanto, por como se definió el orden, obtenemos lo que queríamos.

Ahora, si $F \subseteq SA$, lo único que falta probar es que para cualesquiera $x, y \in A$

$$\left(\dot{\bigvee} F\right)(x) \wedge y \leq \left(\dot{\bigvee} F\right)(x \wedge y)$$

Usando la propiedad distributiva par marcos en A y que $F \subseteq SA$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(\dot{\bigvee} F\right)(x) \wedge y &= \bigvee \{f(x) \mid x \in X\} \wedge y = \bigvee \{y \wedge f(x) \mid x \in X\} \\ &\leq \bigvee \{f(x \wedge y) \mid x \in X\} = \left(\dot{\bigvee} F\right)(x \wedge y)\end{aligned}$$

para cualesquiera $x, y \in A$. Por todo lo anterior podemos decir que $\dot{\bigvee} F$ es el supremo en SA para cualquier $\emptyset \neq F \subseteq SA$.

$\square$

Esto nos muestra que en DA y SA los supremos se calculan puntualmente si el conjunto es distinto del vacío pues para $F = \emptyset$, $\bigvee F = id$. Sin embargo, en PA y NA los supremos no se calculan puntualmente.

Lema 1.3.16. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$. Si $f, g \in DA$ entonces, $f \circ g \in DA$. Si $f, g \in SA$ entonces, $f \circ g \in SA$. Si $f, g \in PA$ entonces, $f \circ g \in PA$.*

Demostración. Si f, g son derivadas es inmediato que la composición también es derivada, es decir que infla y es monótona. Además si $f, g \in SA$

$$(f \circ g)(a) \wedge b = f(g(a)) \wedge b \leq f(g(a) \wedge b) \leq f(g(a \wedge b)) = (f \circ g)(a \wedge b)$$

para cualesquiera $a, b \in A$. Ahora, si tomamos $f, g \in PA$ se cumple que

$$(f \circ g)(a) \wedge (f \circ g)(b) = f(g(a)) \wedge f(g(b)) \leq f(g(a) \wedge g(b)) \leq f(g(a \wedge b)) = (f \circ g)(a \wedge b)$$

para cualesquiera $a, b \in A$. Por lo tanto $f \circ g \in PA$. □

Observación 1.3.17. *Nota que el lema anterior 1.3.16 no es cierto si tomamos $f, g \in CA$. Es decir, CA y por tanto PA, no es cerrado bajo composición.*

Teorema 1.3.18. *Para un $A \in \mathfrak{Frm}$, SA es un marco.*

Demostración. Como ya sabemos que SA es una retícula completa, para ver que éste es un marco sólo nos falta probar que cumple la ley distributiva para marcos. Sean $G \subseteq SA$ y $f \in SA$. Si $G = \emptyset$ la igualdad $f \wedge \bigvee G = \bigvee \{f \wedge g \mid g \in G\}$ se cumple pues de ambos lados queda id.

Si $G \neq \emptyset$ y tomamos $x \in X$ arbitrario

$$\begin{aligned}\left(f \wedge \bigvee G\right)(x) &= f(x) \wedge \left(\bigvee G\right)(x) = f(x) \wedge \bigvee \{g(x) \mid g \in G\} = \\ &= \bigvee \{f(x) \wedge g(x) \mid g \in G\} = \left(\bigvee \{f \wedge g \mid g \in G\}\right)(x)\end{aligned}$$

En las igualdades anteriores se usa la ley distributiva para marcos en A y que los ínfimos y supremos en SA se calculan puntualmente. Por lo tanto, la LDM es cierta en SA. □

Como SA es un marco tenemos una implicación que cumple que

$$(f \succ g) \in SA \quad \text{y} \quad h \leq (f \succ g) \Leftrightarrow f \wedge h \leq g$$

para cualesquiera $f, g, h \in A$.

Lema 1.3.19. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$, $f \in SA$ y $k \in NA$, entonces $f \succ k \in NA$. (donde la implicación del lema es la que existe en SA)*

Demostración. Sean $f \in SA$ y $k \in NA$, tomamos $l = (f \succ k)$. Como estamos trabajando con la implicación en SA sabemos que $l \in SA$, sólo resta ver que l es idempotente, es decir que $l^2 \leq l$, pues l infla. Para cualquier $x \in X$, observemos que

$$(f \wedge l^2)(x) = f(x) \wedge l^2(x) \leq l(f(x) \wedge l(x)) \leq l(k(x))$$

En la primera igualdad usamos que el ínfimo se calcula puntualmente. En la primera y segunda desigualdad usamos que $l \in SA$ y que $f \wedge l \leq k$ respectivamente. Recordemos que $f \wedge l \leq k \Leftrightarrow l \leq f \succ k$. Entonces, como $f \wedge l^2 \leq l \circ k$ nos queda que $f \wedge l^2 \leq f \wedge (l \circ k)$. Así

$$(f \wedge l^2)(x) \leq f(x) \wedge l(k(x)) \leq f(k(x)) \wedge l(k(x)) \leq k^2(x) = k(x)$$

para cualquier $x \in X$. Es decir, $f \wedge l^2 \leq k$. Pero esto es equivalente, por la propiedad de la implicación, a que

$$l^2 \leq (f \succ k) = l$$

lo que prueba lo que queríamos. □

Teorema 1.3.20. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$, entonces $NA \in \mathfrak{Frm}$.*

Demostración. Podemos definir a la implicación en NA igual que la implicación de SA por el lema anterior 1.3.19. Entonces, como NA es una retícula completa que tiene implicación, por el lema 1.1.11, NA es un marco. □

Al marco NA de un marco A le llamaremos ensamble. Podríamos considerar el ensamble de NA que escribiremos como N^2A y así seguirnos

$$A \quad NA \quad N^2A \quad N^3A \quad \dots \quad N^\alpha A \quad \dots$$

hasta construir una torre de ensambles. Hay detalles para el caso cuando α es un ordinal límite pero se analizará con cuidado más adelante. Por ahora, sólo tengamos en cuenta que la torre de ensambles se puede construir.

Por otro lado, sabemos que los supremos arbitrarios en NA no se calculan puntualmente queremos saber como son estos supremos. Para eso introducimos las siguientes definiciones.

Definición 1.3.21. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $f \in DA$ definimos recursivamente sobre los ordinales*

$$\begin{aligned} f^0 &= id \\ f^{\alpha^+} &= f \circ f^\alpha \\ f^\alpha &= \dot{\bigvee} \left\{ f^\beta \mid \beta < \alpha \right\} \text{ cuando } \alpha \text{ es un ordinal límite} \end{aligned}$$

Denotaremos a lo largo de todo el trabajo α^+ al ordinal sucesor de α.

Así producimos una cadena de derivadas

$$id \leq f \leq f^2 \leq f^3 \leq ... \leq f^\alpha \leq ...$$

Esta cadena se detiene en algún punto, es decir, hay un ordinal δ tal que $f^\theta = f^{\theta^+}$ para cualquier $\delta \leq \theta$. Es evidente que se detiene pues nuestro marco A es un conjunto y formamos una cadena de funciones que inflan. Al mínimo ordinal para el cual se detiene la cadena lo denotamos ∞. Por como construimos nuestra cadena f^∞ es idempotente.

Lema 1.3.22. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $f \in DA$, entonces f^∞ es el menor operador cerradura mayor que f.*

Demostración. Sabemos que f^∞ es un operador cerradura, es decir $f^\infty \in CA$. Falta ver que es el más pequeño. Suponemos que hay un $j \in CA$ tal que

$$f \leq j \leq f^\infty$$

y probamos por inducción sobre ordinales que $f^\alpha \leq j$ para cualquier α en los ordinales, en particular quedaría probado para ∞. Para el ordinal $\alpha = 0$, tenemos que $f^0 = id \leq j$. Si $\alpha = \beta^+$ y suponemos que $f^\beta \leq j$ entonces, como $f \leq j$,

$$f^\alpha = f \circ f^\beta \leq j \circ j = j$$

Ahora bien, si α es un ordinal límite y suponemos que para cualquier $\beta < \alpha$, $f^\beta \leq j$ obtenemos que

$$f^\alpha = \bigvee \left\{ f^\beta \mid \beta < \alpha \right\} \leq j$$

y esto termina la prueba. $\square$

Observación 1.3.23. *Creamos así un operador en DA*

$$\_^\infty \colon DA \longrightarrow CA \subseteq DA$$

$$f \to f^\infty$$

que infla y es monótono. Es decir, $\_^\infty \in D^2A$.

Teorema 1.3.24. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $f \in SA$, $f^\alpha \in SA$ para todo α en los ordinales y $f^\beta \in PA$ para cualquier β ordinal límite.*

Demostración. Hacemos la prueba por inducción sobre ordinales. Para $\alpha = 0$, $id = f^0$ es estable. Si $\alpha = \beta^+$ y suponemos que f^β es estable. Entonces como la composición de estables es estable por 1.3.16, $f \circ f^\beta = f^\alpha$ es estable. Finalmente, si α es un ordinal límite y suponemos que f^β es estable para cualquier $\beta < \alpha$, como

SA es cerrado bajo supremos puntuales por 1.3.15, f^{α} es estable.

Veamos que para α un ordinal límite $f^{\alpha} \in PA$.

$$f^{\alpha}(x) \wedge f^{\alpha}(y) = \bigvee \left\{ f^{\beta}(x) \mid \beta < \alpha \right\} \wedge \bigvee \left\{ f^{\lambda}(y) \mid \lambda < \alpha \right\}$$

para cualquier $x, y \in A$. Como A es un marco y tenemos la LDM nos queda que

$$f^{\alpha}(x) \wedge f^{\alpha}(y) = \bigvee \left\{ f^{\beta}(x) \wedge f^{\lambda}(y) \mid \beta, \lambda < \alpha \right\} \leq \bigvee \left\{ f^{\beta}(x \wedge f^{\lambda}(y)) \mid \beta, \lambda < \alpha \right\}$$

$$\leq \bigvee \left\{ f^{\beta}(f^{\lambda}(x \wedge y)) \mid \beta, \lambda < \alpha \right\} \leq \bigvee \{ f^{\gamma}(x \wedge y) \mid \gamma < \alpha \} = f^{\alpha}(x \wedge y)$$

donde las primeras dos desigualdad se dan pues cada f^{β} es estable para cualquier ordinal β y la ultima desigualdad es cierta pues α es un ordinal límite. Por lo tanto, $f^{\alpha} \in PA$. $\square$

Teorema 1.3.25. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$, la asignación $\_^{\infty} \colon SA \longrightarrow SA$ es un núcleo en SA. Ademas el conjunto de puntos fijos de $\_^{\infty}$ es NA.*

Ya sabemos, por el lema anterior 1.3.24, que $\_^{\infty}$ está bien definida para SA. Este operador infla pues

$$f \leq f^{\infty}$$

Es monótono pues si $f \leq g$ por el lema 1.3.22, $f^{\infty} \leq g^{\infty}$. Veamos que

$$f^{\infty} \wedge g^{\infty} \leq (f \wedge g)^{\infty}$$

Consideremos $k = (f \wedge g)^{\infty}$ que es un núcleo pues k es un operador cerradura por definición y $k \in SA$ por el lema 1.3.24. Así, por el lema 1.3.19, $(f \succ k) \in NA$ y $f \wedge g \leq k$ por la definición 1.3.21, entonces

$$g \leq (f \succ k)$$

debido a la propiedad característica de la implicación. Por lo tanto,

$$g^{\infty} \leq (f \succ k) \Rightarrow f \wedge g^{\infty} \leq k$$

por el lema1.3.22 y la propiedad de la implicación. Esta desigualdad es equivalente a

$$f \leq (g^{\infty} \succ k)$$

y por el lema 1.3.22,

$$f^{\infty} \leq (g^{*} \succ k)$$

lo cual es equivalente, por la propiedad de la implicación a que

$$f^{\infty} \wedge g^{\infty} = k$$

que es lo que buscábamos probar. Solo falta probar que $\_^{\infty}$ es un operador cerradura pero esto es inmediato de la definición 1.3.21. También es claro que los puntos fijos de $(.)^{\infty}$ sean NA pues para cualquier $f \in NA$, $f^{\infty} = f$ pues f es idempotente, y si $f \in SA$ entonces por el lema 1.3.24, $f^{\infty} \in SA$ pero también es idempotente pues así se define. Por lo tanto $f^{\infty} \in NA$.

Lema 1.3.26. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$, $f, g \in SA$ y $k \in NA$. Si $f \wedge g \leq k$ y α es un ordinal distinto del cero, entonces $f \wedge g^{\alpha} \leq k$.*

Demostración. La prueba la hacemos por inducción sobre ordinales. Para $\alpha = 0$ la implicación que busca probarse es cierta pues el antecedente es falso. Ahora bien, si $\alpha = \beta^{+}$ y suponemos que $f \wedge g^{\beta} \leq k$ tenemos que para cualquier$x \in A$,

$$f(x) \wedge g^{\beta^{+}}(x) = f(x) \wedge g(y) \leq f(x) \wedge f(y) \wedge g(x) \leq f(x) \wedge k(y)$$

donde $y = g^{\beta}(x)$. Además como $k \in NA$ en particular es estable entonces nos queda que

$$f(x) \wedge g^{\beta^{+}}(x) \leq f(x) \wedge k(y) \leq k(f(x) \wedge y) = k(k(x)) = k(x)$$

donde la primera igualdad se da por hipótesis de inducción y la segunda igualdad se debe a que k es idempotente.

Finalmente, si α es un ordinal limite y $f \wedge g^{\beta} \leq k$ para cualquier $\beta < \alpha$, obtenemos

$$f(x) \wedge g^{\alpha}(x) = \bigvee \left\{ f(x) \wedge g^{\lambda}(x) \mid \lambda < \alpha \right\} = \bigwedge \left\{ (f \wedge g^{\lambda})(x) \mid \lambda < \alpha \right\} \leq k(x)$$

para cualquier $x \in NA$ y donde la primera igualdad se da por la LDM. □

Lema 1.3.27. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $J \subseteq PA$. Supongamos que $J \neq \emptyset$ y J es dirigido, es decir, para cualesquiera dos elementos de J siempre puedo encontrar uno mayor a estos dos. Entonces el supremo de J en PA se calcula puntualmente.*

Demostración. Sabemos que $\dot{\bigvee} J$ no esta necesariamente en PA pero como el conjunto es dirigido esto si va a ocurrir, sólo debemos probar que $\dot{\bigvee} J$ cumple que

$$\left(\dot{\bigvee} J\right)(x) \wedge \left(\dot{\bigvee} J\right)(y) \leq \left(\dot{\bigvee} J\right)(x \wedge y)$$

para cualesquiera $x, y \in A$. Pero esto pasa porque

$$\begin{aligned}\left(\dot{\bigvee} J\right)(x) \wedge \bigvee \left(\dot{\bigvee} J\right)(y) &= \bigvee \{j(x) \mid f \in J\} \wedge \{h(y) \mid h \in J\} = \\ &= \bigvee \{j(x) \wedge h(y) \mid j, h \in J\} \leq \\ &\leq \bigvee \{k(x) \wedge k(y) \mid k \in J\} = \\ &= \bigvee \{k(x \wedge y) \mid k \in J\} = \\ &= \left(\dot{\bigvee} J\right)(x \wedge y)\end{aligned}$$

para cualesquiera $x, y \in A$. Observa que estas igualdades y desigualdades usamos que J era dirigido y la LDM. □

Para poder calcular los supremos arbitrarios en NA nos damos cuenta que si $\emptyset \neq J \subseteq NA$, donde A es un marco, en particular $J \subseteq SA$ y el supremo de este conjunto en SA es $\dot{\bigvee} J$. Podemos considerar al siguiente conjunto

$$J^\circ = \{j_1 \circ ... \circ j_n \mid n \in \mathbb{N}, j_i \in J\}$$

Podemos asegurar que $J^\circ \subseteq PA$ pues por el lema 1.3.16 PA es cerrado bajo composiciones y además J° es una familia dirigida, entonces el supremo de J° en PA se calcula puntualmente. Observemos en el siguiente lema lo que pasa para NA.

Lema 1.3.28. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ y $J \subseteq NA$ entonces,*

$$\bigvee J = \left(\dot{\bigvee} J\right)^\infty = \left(\dot{\bigvee} J^\circ\right)^\infty$$

Demostración. Sea $J \subseteq NA$ y $J \neq \emptyset$. Notemos que

$$\bigvee J \leq \left(\dot{\bigvee} J\right)^\infty \leq \left(\dot{\bigvee} J^\circ\right)^\infty \leq \bigvee J$$

donde la primera desigualdad se da porque para cualquier $j \in J$, $j \leq \left(\dot{\bigvee} J\right)^\infty$. La segunda desigualdad es cierta pues $J \subseteq J^\circ$. La última desigualdad se da porque $\dot{\bigvee} J^\circ \leq \bigvee J$ como elementos de PA aunque $\dot{\bigvee} J^\circ$ no es un núcleo, solo podemos asegurar por 1.3.27 que es un prenúcleo pero por el lema 1.3.22 llegamos a que $\left(\dot{\bigvee} J^\circ\right)^\infty \leq \bigvee J$. Esto prueba la igualdad que queríamos. □

Ejemplo 1.3.29. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j, k \in NA$ y consideremos $f = j \circ k$, $g = k \circ j$ y $h = j \dot{\vee} k$. Hasta ahora sólo podemos decir que f y g son prenúcleos y que h estable. Además,*

$$j, k \leq h \leq f, g \leq h^2$$

Por lo anterior, obtenemos:

$$f^\infty = g^\infty = h^\infty = j \vee k$$

La última desigualdad se da como consecuencia del lema anterior 1.3.28.

En particular, si tomamos $j = u_a$ y $k = v_a$ obtenemos que $u_a \vee v_a = (v_a \circ u_a)^\infty$. Pero notemos que si $x \in A$, $(k \circ j)(x) = a \succ (a \vee x) = 1$. Por tanto, $u_a \vee v_a = tp$, para cualquier $a \in A$.

Además tenemos otro lema con respecto a como calcular supremos.

Lema 1.3.30. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j, k \in NA$. Si $j \circ k \leq k \circ j$, entonces $j \vee k = k \circ j$.*

Demostración. Consideremos $g = k \circ j$ entonces

$$g^2 = k \circ j \circ k \circ j \leq k \circ k \circ j \circ j = k \circ j = g$$

es decir g es núcleo pues mostramos que es idempotente y como es composición de prenúcleos $g \in PA$. Además, por el lema 1.3.28

$$j \vee k = (k \circ j)^\infty = k \circ j$$

$\square$

Lema 1.3.31. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$, $a, b \in A$ y $j \in NA$*

i) v_a *y* u_a *son complementarios en* NA.

ii) $j \circ u_a$ *es idempotente.*

iii) $j \vee u_a = j \circ u_a$

iv) $u_{j(a)} \wedge v_a \leq j$

v) $v_b \vee j \vee u_a = v_b \circ j \circ u_a$

Demostración. Para probar el primer inciso observemos que por el lema anterior 1.3.28,

$$v_a \vee u_a = (v_a \circ u_a)^\infty$$

pero

$$(v_a \circ u_a)(x) = (a \succ (a \vee x)) = 1$$

para cualquier $x \in X$, entonces

$$v_a \vee u_a = (v_a \circ u_a)^{\infty} = tp$$

Además

$$\begin{aligned}(v_a \wedge u_a)(x) = v_a(x) \wedge u_a(x) = (a \succ x) \wedge (a \vee x) = \\ = (x \wedge (a \succ x)) \vee (a \wedge a \succ x) = x \vee (a \wedge x) = x\end{aligned}$$

para cualquier $x \in A$. En varias de las igualdades usamos la propiedades de le implicación que aparecen en 1.1.12. Por lo tanto , v_a y u_a son complementarios.

Para probar el segundo inciso tomamos cualquier $j \in NA$ y como PA es cerrado bajo la composición por el lema 1.3.16 solo tenemos que ver que $j \circ u_a$ es idempotente. Así tenemos que

$$(j \circ u_a \circ j \circ u_a)(x) = j(j(a \vee x) \vee a) = j(j(a \vee x)) = j(a \vee x) = (j \circ u_a)(x)$$

para cualquier $x \in A$, lo que prueba lo que queríamos.

Para el tercer inciso tomamos $k = j \vee u_a$, como $j \leq j \circ u_a$ y $u_a \leq j \circ u_a$ tenemos que $k \leq j \circ u_a$ pues $j \circ u_a$ es un núcleo por el inciso anterior. Ahora bien, como $j, u_a \leq k$ obtenemos que

$$j \circ u_a \leq k \circ k = k$$

pues k es un núcleo. Con las dos desigualdades a las que llegamos queda probada la igualdad.

Para el cuarto inciso notamos que

$$u_{j(a)}(x) = j(a) \vee x \leq j(a \vee x) = (j \circ u_a)(x)$$

para cualquier $x \in A$ y donde la desigualdad se da por que $j \in SA \subseteq NA$. Lo que quiere decir que

$$u_{j(a)} \leq j \circ u_a = j \vee u_a$$

usando el inciso anterior y como u_a y v_a son complementos queda que

$$u_{j(a)} \wedge v_a \leq (j \vee u_a) \wedge v_a = (j \wedge v_a) \vee id \leq j$$

Para la propiedad v) queremos probar que

$$l(x) = (b \succ j(a \vee x)) \quad \forall x \in A$$

donde $l = v_b \vee j \vee u_a$. Notemos que para cualquier $k \in NA$ ocurre que

$$(k \circ v_b)(x) = k(b \succ x) \Rightarrow k((b \succ x)) \wedge b \leq k(b \succ x) \wedge b) \leq k(x)$$

para cualquier $x \in A$ donde la primera implicación se debe a que k es estable. Esta desigualdad, por la propiedad de la implicación, es equivalente a que

$$k(b \succ k) \leq b \succ k(x) = v_b(k(x))$$

es decir, $k \circ v_b \leq v_b \circ k$. Por otro lado,

$$(u_a \circ k)(x) = a \vee k(x) \leq k(a \vee x) = (k \circ u_a)(x)$$

donde la desigualdad se da por la monotonía de k y porque k infla. Es decir, obtuvimos que $u_a \circ k \leq k \circ u_a$. Así usando el lema anterior 1.3.30

$$l = v_b \vee j \vee u_a = (v_b \circ j) \vee u_a = v_b \circ j \circ u_a$$

lo que prueba lo que queríamos. $\square$

Teorema 1.3.32. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$,*

$$j = \bigvee \left\{ u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in A \right\}$$

.

Demostración. Consideremos

$$k = \bigvee \left\{ u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in A \right\}$$

Queremos ver que $j = k$ pero por el lema 1.3.31 ya tenemos que $k \leq j$. Para la otra desigualdad tomamos $a \in A$ y vemos que

$$(u_{j(a)} \wedge v_a)(a) = j(a) \wedge (a \succ a) = j(a) \wedge 1 = j(a)$$

y por tanto

$$j(a) = (u_{j(a)} \wedge v_a)(a) \leq k(a)$$

y como esto es para cualquier elemento del marco obtenemos que $j \leq k$. $\square$

Corolario 1.3.33. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ es un marco finito, entonces NA es un álgebra booleana completa.*

Demostración. Por el teorema anterior 1.3.32 cualquier núcleo de NA tiene complemento pues se puede expresar como un supremo finito de elementos complementados. Por lo tanto, $NA \in \mathcal{CBA}$. $\square$

Podemos dar otras propiedades para los núcleos u_a, v_a y w_a. Incluso podemos dar un lema parecido al anterior pero usando a los w- núcleos.

Lema 1.3.34. *Para cualquier marco A si tomamos $x, y \in A$ y $j \in NA$*

$$j(x) \succ j(y) = x \succ j(y)$$

Demostración. Si $x, y \in A$ y $j \in NA$ como j es un núcleo

$$x \leq j(x)$$

y por las propiedades del lema 1.1.12

$$x \succ j(y) \leq (j(x) \succ j(y))$$

y para la otra desigualdad usamos el mismo lema para notar que

$$(j(x) \wedge j(y)) \wedge x \leq (j(x) \succ j(y)) \wedge j(x) = j(x) \wedge j(y) \leq j(y)$$

pero por la propiedad de la implicación esto es equivalente a que

$$(j(x) \succ j(y)) \leq (x \succ j(y))$$

lo que prueba la igualdad que queríamos. □

Lema 1.3.35. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a \in A$. Si $j \in NA$ entonces*

$$u_a \leq j \Leftrightarrow a \leq j(0)$$

para cualquier $a \in A$.

Demostración. observemos que

$$u_a \leq j \Rightarrow a = u_a(0) \leq j(0)$$

además si $a \leq j(0)$,

$$u_a(x) = a \vee x \leq j(0) \vee x \leq j(0 \vee x) = j(x)$$

donde $j(0) \vee x \leq j(0 \vee x)$ se da por la monotonía de j ya que

$$j(0) \vee x \leq j(0) \vee j(x) \quad \text{y} \quad j(x), j(0) \leq j(x \vee 0)$$

□

Observación 1.3.36. *Para cualquier* $A \in \mathfrak{Frm}$ *y* $a \in A$*,*

$$u_a \leq w_a$$

Esto sale de inmediato del lema 1.3.35 ya que $a \leq a = w_a(0)$*.*

Lema 1.3.37. *Sea* $A \in \mathfrak{Frm}$*. Si* $a \in A$ *y* $j \in NA$

$$v_a \leq j \Leftrightarrow j(a) = 1$$

Demostración. Supongamos que $v_a \leq j$ entonces

$$1 = (a \succ a) = v_a(a) \leq j(a)$$

y por tanto $j(a) = 1$. Ahora bien, si $j(a) = 1$ y damos $y = (a \succ x) = v_a(x)$, por el lema 1.1.12 tenemos que $y \wedge a = (a \succ x) \wedge a = a \wedge x \leq x$, entonces

$$y \leq j(y) = j(y) \wedge j(a) = j(y \wedge a) \leq j(x)$$

pues j es un núcleo. Por lo tanto, $v_a \leq j$. $\square$

Lema 1.3.38. *Para cualquier* $A \in \mathfrak{Frm}$*, si* $a \in A$ *y* $j \in NA$ *entonces*

$$j \leq w_a \Leftrightarrow j(a) = a$$

Demostración. Supongamos que $j \leq w_a$ para algún $a \in A$. Entonces al evaluar en a tenemos que

$$a \leq j(a) \leq w_a(a) = ((a \succ a) \succ a) = a$$

donde la primera desigualdad es porque j infla. Para la otra desigualdad suponemos que $j(a) = a$ y tomamos cualquier $x \in A$. Así como w_a es un núcleo y en particular infla

$$\begin{aligned} j(x) \leq w_a(j(x)) = ((j(x) \succ a) \succ a) &= ((j(x) \succ j(a)) \succ a) = \\ &= ((x \succ j(a)) \succ a) = ((x \succ a) \succ a) = w_a(x) \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se da por el lema 1.3.34. Esto quiere decir que $j \leq w_a$. $\square$

Lema 1.3.39. *Para cualquier* $A \in \mathfrak{Frm}$*, si* $a \in A$ *y* $j \in NA$ *entonces*

$$w_a \leq j \Rightarrow j = w_b$$

donde $b = j(0)$*.*

Demostración. Sea $a \in A$ y supongamos que $w_a \leq j$ para cualquier $j \in NA$. Consideramos w_b donde $b = j(0)$. Como j es idempotente

$$j(b) = j(j(0)) = j(0) = b$$

y por el lema 1.3.38 nos queda que $j \leq w_b$. Ahora como

$$j(x) \succ j(0) \leq 1 = j(0) \succ j(x)$$

donde la igualdad se da porque $j(0) \leq j(x)$ y entonces al calcular la implicación queda 1. Así, usando la propiedad característica de la implicación

$$(j(x) \succ j(0)) \succ j(0) \leq j(x)$$

y por el lema 1.3.34

$$w_b = (x \succ j(0)) \succ j(0) = (x \succ j(j(0))) \succ j(0) \leq j(x)$$

y por tanto $j = w_b$. □

Lema 1.3.40. *Sea* $a \in \mathfrak{Frm}$ *para cualesquiera* $j \in NA$ *y* $a \in A$ *tal que* $j \leq w_a$ *se cumple que*

$$j = w_a \vee u_b = w_a \circ u_b = w_b$$

donde $b = j(0)$.

Demostración. Dadas la hipótesis que tenemos y por como esta definido v , usando los lemas 1.3.35, 1.3.31 y 1.3.38 tenemos que

$$w_a \circ u_b = w_a \vee u_b \leq j \leq w_b$$

así que solo nos basta probar que $w_b \leq w_a \vee u_b$. Pero esto es equivalente a ver que $w_b \wedge v_b \leq w_a$ pues u_b y v_b por el lema 1.3.31 son complementos. Ahora bien, como $w_a \leq j$, tenemos que $a = w_a(0) \leq j(0) = b$, y por tanto $w_b(a) = b$ pues w_a es monótona y $w_b(0) = b = w_b(b)$. Así

$$a \leq (w_b \wedge v_b)(a) = w_b(a) \wedge v_b(a) = b \wedge (b \succ a) = b \wedge a \leq a$$

donde la última igualdad se da por el lema 1.1.12. Con esta desigualdad podemos decir por el lema 1.3.38 que

$$w_b \wedge v_b \leq w_a$$

lo que prueba lo que queríamos. □

Lema 1.3.41. *Sea* $A \in \mathfrak{Frm}$, *para cualesquiera* $a \in A$ *y* $k, j \in NA$ *tales que* $u_a \leq k \leq w_a$ *se cumple*

$$j \vee w_a = w_a \circ j \circ k = w_b$$

donde $b = w_a(j(a))$.

Demostración. Consideremos $f = j \circ k$ y $h = w_a \circ f$. Solo podemos decir que f, h son prenúcleos pues la composición de núcleos no es un núcleo. Tenemos por 1.3.28 que

$$j \vee w_a \vee k = j \vee w_a = h^{\infty}$$

nos gustaría ver que h es idempotente para que h fuera un núcleo y se cumpla que $h^{\infty} = h$. Para esto notemos que

$$w_a \circ h = h$$

porque w_a es un núcleo y por tanto idempotente. También es cierto que $k \circ h = h$ pues como $k \leq w_a$ tenemos que

$$a \leq k(w_a(a)) = k(a) \leq w_a(a) = a$$

y esto por el lema 1.3.38 nos dice que $k \circ w_a \leq w_a$ pero la otra desigualdad se da por que la composición es siempre mayor ya que son operadores que inflan. Por lo tanto $k \circ w_a = w_a$ y de aquí podemos decir que $k \circ h = h$. También es cierto que $j \circ h = h$, para probar esto nos tomamos un $x \in A$ arbitrario y consideramos

$$y = f(x) \quad \text{y} \quad z = h(x) = w_a(y)$$

pero como ya vimos que $k(0) = a$ obtenemos que

$$j(a) = j(k(0)) = f(0) \leq f(x) = y$$

además

$$z \wedge (y \succ a) = ((y \succ a) \succ a) \wedge (y \succ a) = (y \succ a) \wedge a = y \wedge a \leq a$$

por el lema 1.1.12. Así como j es un núcleo, en particular es estable y obtenemos que

$$j(z) \wedge (y \succ a) \leq j(z \wedge (y \succ a)) \leq j(a) \leq y$$

y por tanto tenemos

$$j(z) \wedge (y \succ a) \leq (y \succ a) \wedge y \leq a$$

esto es equivalente por la propiedad característica de la implicación a que

$$z \leq j(z) \leq ((y \succ a) \succ a) = w_a(y) = z$$

es decir, obtenemos que

$$(j \circ h)(x) = j(z) = z = h(x)$$

que es lo que queríamos probar. Con todo esto llegamos a que

$$h^2 = w_a \circ j \circ k \circ h = w_a \circ j \circ h = w_a \circ h = h$$

lo que prueba la primera igualdad del lema.
Para la segunda igualdad solo basta usar el lema 1.3.40 para h y queda que

$$w_a \vee j = h = w_b$$

donde $b = h(0) = (w_a \circ j \circ k)(0) = w_a(j(a))$. □

Lema 1.3.42. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, si $a \in A$ y $j \in NA$*

$$j = \bigwedge \{w_a \mid a \in A_j\} = \bigwedge \left\{w_{j(a)} \mid a \in A\right\}$$

Demostración. Observa que la segunda igualdad que hay que probar es inmediata pues recordemos de 1.2.15 que los puntos fijos de un núcleo son iguales a la imagen. Entonces solo basta probar que

$$j = \bigwedge \left\{w_{j(a)} \mid a \in A\right\}$$

y denotaremos

$$l = \bigwedge \left\{w_{j(a)} \mid a \in A\right\}$$

Sabemos que como j es idempotente, $j(j(a)) = j(a)$ para cualquier $a \in A$, entonces

$$j \leq w_{j(a)}$$

por el lema 1.3.38. Así $j \leq l$. Por otro lado, como l se definió como un ínfimo, tenemos que $l \leq w_{j(a)}$ para cualquier $a \in A$, entonces

$$l(a) \leq l(j(a)) \leq w_{j(a)}(j(a)) = j(a)$$

lo que quiere decir que $l \leq j$.

□

Lema 1.3.43. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a \in A$ entonces A_{w_a} es booleano.*

Demostración. Observemos primero que el cero en A_{w_a} es a pues

$$w_a(0) = ((0 \succ a) \succ a) = (1 \succ a) = a$$

y como w_a es monótono no queda más que $w_a(0)$ sea el cero. Si $x \in A_{w_a}$ queremos ver que x tiene un complemento en el marco A_{w_a}. Consideremos a $(x \succ a)$ y veamos que

$$w_a(x \succ a) = w_a(x) \succ a = x \succ a$$

donde la primera igualdad se da por el lema 1.3.34 y la segunda porque x es un punto fijo. Esto quiere decir que $(x \succ a) \in A_{w_a}$. Además se cumple que

$$x \wedge (x \succ a) = x \wedge a = a$$

por las propiedades del la implicación que se probaron en el lema 1.1.12. Usando este misma lema y si damos $y = (x \succ a)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} w_a(x \vee y) = (((x \vee y) \succ a) \succ a) = (((x \succ a) \wedge (y \succ a)) \succ a) = \\ = ((y \wedge a) \succ a) = (a \succ a) = 1 \end{aligned}$$

esto prueba que el supremo de x y y en A_j es el 1 pues recordemos que en 1.2.17 probamos que así se calculan los supremos en A_{w_a}. Por lo tanto, por las dos igualdades que obtuvimos podemos decir que para $x \in A_{w_a}$ el elemento $(x \succ a) \in A_{w_a}$ es su complemento en el marco de puntos fijos. Esto quiere decir que A_{w_a} es booleano. $\square$

Lema 1.3.44. *Si $A \in \mathcal{CBA}$ entonces todo núcleo en $j \in NA$ es de la forma u_a donde $a = j(0)$.*

Demostración. Observa que por el lema 1.3.35 ya tenemos que $u_a \leq j$. Para la otra desigualdad consideramos $x \in A$ arbitrario, entonces como $A \in \mathcal{CBA}$, $\neg x$ es el complemento de x . Así

$$\neg x \wedge j(x) \leq j(\neg x) \wedge j(x) = j(\neg x \wedge x) = j(0) = a$$

pero esta desigualdad es equivalente por la observación 1.1.4 a que

$$j(x) \leq \neg\neg x \vee a = x \vee a$$

pues como $A \in \mathcal{CBA}$ todo sus elementos son regulares por el lema 1.1.19. Por lo tanto , tenemos que $j \leq u_a$. $\square$

Algunos de los lemas anteriores nos dicen qué pasa cuando un marco es booleano, sin embargo la siguiente construcción nos acerca un poco más al problema de la reflexión booleana.

Definición 1.3.45. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, η_A es la asignación*

$$A \xrightarrow{\eta_A} NA$$

$$a \longmapsto u_a$$

Teorema 1.3.46. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$, η_A es un morfismo inyectivo de marcos y además es epi.*

Esto nos dices que η_a es un bimorfismo, no necesariamente isomorfismo.

Demostración. Primero, para ver que la función η_A es un morfismo de marcos, notamos que

$$\eta_A(0) = u_0 = id \qquad \eta_A(1) = u_1 = tp$$

es decir el cero va al cero de NA y el uno al uno. Además si $a \leq b$

$$\eta_A(a) = u_a \leq u_b = \eta_A(b)$$

esto es inmediato pues los u-núcleos se calculan como supremos.

Si $a, b \in A$

$$\eta_A(a) \wedge \eta_A(b) = u_a \wedge u_b$$

y

$$(u_a \wedge u_b)(x) = (a \vee x) \wedge (b \vee x) = ((a \vee x) \wedge b) \vee ((a \vee x) \wedge x) = ((a \vee x) \wedge b) \vee x =$$

$$= (a \wedge b) \vee (x \wedge b) \vee x = (a \wedge b) \wedge x = u_{a \wedge b}(x)$$

pues usamos la distributividad del marco. Por tanto, $\eta_A(a) \wedge \eta_A(b) = \eta_A(a \wedge b)$. Ahora bien si tomamos $X \subseteq A$ queremos probar que

$$\bigvee \eta_A[X] \geq \eta_A\left(\bigvee X\right)$$

pues la otra desigualdad se da por la monotonía ya que $\eta_A(x) \leq \eta_A\left(\bigvee X\right)$ para cualquier $x \in X$. Tomemos $c = \bigvee X$ y $j = \bigvee \eta_A[X] = \bigvee \{u_x \mid x \in X\}$. Precisamente queremos ver que $u_c \leq j$. Para esto tomamos $a \in A$ y tenemos que

$$u_c(a) = c \vee a = \bigvee X \vee a = \bigvee \{a \vee x \mid x \in X\} = \bigvee \{u_x(a) \mid x \in X\} =$$

$$= \left(\dot{\bigvee} \{u_x \mid x \in X\}\right)(a) \leq j(a)$$

donde la última desigualdad se da porque el supremo puntal es menor que el supremo en NA, recordando que el supremo puntual no es necesariamente un núcleo.

Para ver que η_A es inyectiva tomamos $a, b \in A$ tales que $\eta_A(a) = \eta_A(b)$ entonces

$$u_a = \eta_A(a) = \eta_A(b) = u_b$$

y si evaluamos en el cero queda que

$$a = u_a(0) = u_b(0) = b$$

por lo tanto es inyectiva.

Finalmente probaremos que η_A es epi. Para esto nos tomamos dos morfismos

$$NA \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

donde $B \in \mathfrak{Frm}$ y $f \circ \eta_A = g \circ \eta_A$. Es decir $f(u_a) = g(u_a)$ para toda $a \in A$. Así, por el lema 1.3.32

$$f(j) = \bigvee \left\{ f(u_{j(a)} \wedge v_a) \mid a \in A \right\} = \bigvee \left\{ f(u_{j(a)}) \wedge f(v_a) \right\}$$

y

$$g(j) = \bigvee \left\{ g(u_{j(a)} \wedge v_a) \mid a \in A \right\} = \bigvee \left\{ g(u_{j(a)}) \wedge g(v_a) \right\}$$

Observa que tenemos que $f(u_{j(a)}) = g(u_{j(a)})$ pero también es cierto que $f(v_a) = g(v_a)$ pues $f(v_a)$ y $g(v_a)$ son complementos de $f(u_a) = g(u_a)$ en A pues

$$f(u_a) \vee f(v_a) = f(u_a \vee v_a) = f(tp) = tp \qquad f(u_a) \wedge f(v_a) = f(u_a \wedge v_a) = f(id) = id$$

y análogamente para g. Como el complemento es único, éstos deben de ser iguales. Esto nos asegura que $f(j) = g(j)$ para todo $j \in NA$. Por lo tanto , η_A es un epimorfismo.

□

Antes de seguir con la propiedades del morfsimo η_A probamos un teorema que es una versión general del lema 1.3.32 pero que probamos hasta ahorita porque se necesita usar que η es un morfismo de marcos en la prueba.

Lema 1.3.47. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$. Si $f \in DA$ y $j = f^{\infty}$ es un núcleo, entonces*

$$j = \bigvee \left\{ u_{f(a)} \wedge v_a \mid a \in A \right\}$$

.

Demostración. Primero tenemos que por 1.3.32

$$\bigvee \left\{ u_{f(a)} \wedge v_a \mid a \in A \right\} \leq \bigvee \left\{ u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in A \right\} = j$$

donde la primera desigualdad se da porque $f(a) \leq f^{\infty}(a) = j(a)$. Para la otra desigualdad necesitamos hacer una construcción. Para cualquier elemento $a \in A$ definimos recursivamente

$$a(0) = a \quad a(\alpha^+) = f(a(\alpha)) \quad a(\alpha) = \bigvee \{a(\beta) \mid \beta < \alpha\} \text{ cuando } \alpha \text{ es límite}$$

Formamos entonces una cadena ascendente de elementos en A que eventualmente se estabiliza porque es ascendente y A es un conjunto. De hecho $a(\alpha) = f^{\alpha}(a)$. En particular, si esta cadena se estabiliza en α, $a(\alpha) = j(a)$. Ahora consideramos

$$\begin{aligned} j_{a,0} &= id \\ j_{a,\alpha^+} &= (u_{a(\alpha^+)} \wedge v_{a(\alpha)}) \vee j_{a,\alpha} \\ j_{a,\alpha} &= \bigvee \{j_{a,\beta} \mid \beta < \alpha\} \end{aligned}$$

Esto por la manera que esta definido nos produce una cadena ascendente de núcleos que también se estabiliza pues como la cadena de elementos de A se estabiliza para algún ordinal α tenemos que

$$(u_{a(\alpha^+)} \wedge v_{a(\alpha)}) = (u_{a(\alpha)} \wedge v_{a(\alpha)}) = id$$

por el lema 1.3.31, entonces

$$j_{a,\alpha} = j_{a,\alpha^+}$$

lo que muestra que la cadena de j-núcleos que formamos se estabiliza. Como esta cadena en algún punto se estaciona podemos considerar

$$j_a = \bigvee \left\{ u_{a(\alpha^+)} \wedge v_{a(\alpha)} \mid \alpha \text{ ordinal} \right\}$$

el núcleo para en el cual se estabiliza la cadena. Ahora afirmamos que $j_{a,\alpha} = u_{a(\alpha)} \wedge v_a$ para cualquier ordinal α. Esta propiedad la probamos por inducción sobre ordinales. Para $\alpha = 0$ tenemos que

$$j_{a,0} = id = u_{a(o)} \wedge v_a$$

pues por el lema 1.3.31 u_a y v_a son complementos. Ahora, si $\alpha = \beta^+$ suponemos que $j_{a,\beta} = u_{a(\beta)} \wedge v_a$. Entonces

$$\begin{aligned} j_{a,\alpha} = j_{a,\beta^+} = (u_{a(\beta^+)} \wedge v_{a(\beta)}) \vee j_{a,\beta} &= (u_{a(\beta^+)} \vee j_{a,\beta}) \wedge (v_{a(\beta)} \vee j_{a,\beta}) = \\ &= u_{a(\beta^+)} \wedge (v_{a(\beta)} \vee j_{a,\beta}) = u_{a(\beta^+)} \wedge (v_{a(\beta)} \vee (u_{a(\beta)} \wedge v_a)) = \\ &= u_{a(\beta^+)} \wedge v_a = u_{a(\alpha)} \wedge v_a \end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se da porque por hipótesis de inducción $j_{a,\beta} = u_{a(\beta)} \wedge v_a \leq u_{a(\beta)} \leq u_{a(\beta^+)}$. La penúltima igualdad se da porque, por el lema 1.3.31, $v_{a(\beta)}$ y $u_{a(\beta)}$ son complementos y porque, como $a \leq a(\beta)$ por el lema 1.1.12, $v_{a(\beta)} \leq v_a$. Finalmente si α es un ordinal límite y suponemos que para cualquier $\beta < \alpha$, $j_{a,\beta} = u_{a(\beta)} \wedge v_a$ obtenemos que

$$\begin{aligned} j_{a,\alpha} &= \bigvee \{j_{a,\beta} \mid \beta < \alpha\} = \bigvee \left\{u_{a(\beta)} \wedge v_a \mid \beta < \alpha\right\} = \\ &= v_a \wedge \bigvee \left\{u_{a(\beta)} \mid \beta < \alpha\right\} = v_a \wedge u_{a(\alpha)} \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se da por la LDM. La última igualdad se da porque η_A es un morfismo de marcos y respeta supremos arbitrarios por el teorema 1.3.46.

Así concluimos que $j_{a,\alpha} = u_{a(\alpha)} \wedge v_a$. Ahora, si tomamos un ordinal suficientemente grande nos queda que

$$j_a = u_{j(a)} \wedge v_a$$

para cualquier $a \in A$. Notemos que $j(a) \in A$ y $f(j(a)) = f(f^\infty(a)) = f^\infty(a) = j(a)$ por tanto

$$u_{j(a)} \wedge v_a \in \left\{u_{f(a)} \wedge v_a \mid a \in A\right\}$$

y así

$$\bigvee \left\{u_{f(a)} \wedge v_a \mid a \in A\right\} \geq u_{j(a)} \wedge v_a$$

para cualquier $a \in A$. Esto implica que

$$\bigvee \left\{u_{f(a)} \wedge v_a \mid a \in A\right\} \geq \bigvee \left\{u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in A\right\} = \bigvee \{j_a \mid a \in A\} = j$$

lo que finalmente prueba el lema. □

Definición 1.3.48. *Decimos que un morfimos de marcos*

$$A \xrightarrow{f} B$$

resuelve el problema de complementación booleana en A si para cualquier $a \in A$, $f(a) \in B$ tiene complemento.

Ejemplo 1.3.49. *Par cualquier marco A, η_A resuelve el problema de la complemetación booleana pues u_a tiene complemento por el lema 1.3.31, $v_a \in NA$, para cualquier $a \in A$.*

Teorema 1.3.50. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, η_A resuelve universalmente el problema de la complememtación booleana. Es decir, η_A resuelve el problema de la complementación booleana y para cualquier otro morfismo, $A \xrightarrow{f} B$ que también lo haga existe un único morfismo de marcos $NA \xrightarrow{f^{\#}} B$ para el cual el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & B \\ NA \arrow[ur, "f^{\#}"'] & \end{tikzcd}$$

con $f^{\#}(j) = \bigvee \{f(j(x)) \wedge f(x)' \mid x \in A\}$ donde $f(x)'$ es el complemento de $f(x)$ en B.

Además como f y $f^{\#}$ son morfismos de marcos tienen adjuntos derechos, f_* y $f_{\#}$ respectivamente. Y se cumple que $f_{\#}(b) = f_* \circ u_b \circ f$ para cualquier $b \in B$.

Demostración. Primero veamos que

$$f^{\#}(j) = \bigvee \{f(j(x)) \wedge f(x)' \mid x \in A\}$$

es un morfismo de marcos. Para esto tomamos $j, k \in NA$ tales que $j \leq k$ entonces

$$f(j(x)) \leq f(k(x))$$

para cualquier $x \in X$ pues f, k, j son monótonas. Así

$$f(j(x)) \wedge f(x)' \leq f(k(x)) \wedge f(x)'$$

para toda $x \in X$, lo que implica que $f^{\#}(j) \leq f^{\#}(k)$.

Además

$$f^{\#}(id) = \bigvee \{f(x) \wedge f(x)' \mid x \in A\} = 0_B$$

pues $f(x)$ y $f(x)'$ son complementos en B. Ahora tomamos $j, k \in NA$ y basta ver que

$$f^{\#}(j) \wedge f^{\#}(k) \leq f^{\#}(j \wedge k)$$

pues la otra desigualdad se da por la monotonía de la función. Así tenemos, por la ley distributiva para marcos, que

$$\begin{aligned} f^{\#}(j) \wedge f^{\#}(k) &= \bigvee \{f(j(x)) \wedge f(x)' \wedge f(k(y)) \wedge f(y)' \mid x, y \in A\} = \\ &= \bigvee \{f(j(x) \wedge k(y)) \wedge f(x)' \wedge f(y)' \mid x, y \in A\} = \\ &= \bigvee \{f(j(x) \wedge k(y)) \wedge f(x \vee y)' \mid x, y \in A\} \\ &\leq \bigvee \{f(j(x) \wedge k(y)) \wedge f(z)' \mid x, y \in A, x, y \leq z \leq x \vee y\} \leq \\ &\leq \bigvee \{f(j \wedge k)(z) \wedge f(z)' \mid x, y \in A, x, y \leq z\} = f^{\#}(j \wedge k) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da porque $(f(x)' \wedge f(y)') \vee f(x \vee y) = 1$ y $(f(x)' \wedge f(y)') \wedge f(x \vee y) = 0$. Es decir $f(x)' \wedge f(y)' = f(x \vee y)'$. También observemos que la primera desigualdad es cierta pues como $x, y \leq z \leq x \vee y$, $f(z) \leq f(x \vee y)$ y por lo tanto $f(x \vee y)' \leq f(z)'$.

Falta ver que $f^{\#}$ respeta supremos arbitrarios pero esto es equivalente por el lema 1.2.5 a que tenga adjunto derecho, entonces probemos que $f_{\#}$ definida como

$$f_{\#}(b) = f_* \circ u_b \circ f$$

para cualquier $b \in B$ es su adjunto derecho. Primero notemos que $f_{\#}$ es monótona pues f, f_* y u_b son funciones monótonas. queremos probar que

$$f^{\#}(j) \leq b \Leftrightarrow j \leq f_{\#}(b)$$

para cualesquiera $b \in B$ y $j \in NA$. Notemos que

$$\begin{aligned} f^{\#}(j) \leq b &\Leftrightarrow \forall x \in A \left(f^*(j(x)) \wedge f^*(x)' \leq b\right) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in A \left(f^*(j(x)) \leq b \vee f^*(x)\right) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in A \left(j(x) \leq f_*(b \vee f^*(x))\right) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in A \left(j(x) \leq f_{\#}(b)(x)\right) \\ &\Leftrightarrow j \leq f_{\#}(b) \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $f_{\#}$ es adjunto derecho de $f^{\#}$ y que $f^{\#}$ respeta supremos arbitrarios. Sólo falta ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & B \\ NA \arrow[ur, "f^{\#}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta pero esto es casi inmediato. Si tomamos $a \in A$

$$\begin{aligned} f^{\#} \circ \eta_A)(a) = f^{\#}(u_a) = \bigvee \{f(u_a(x)) \wedge f(x)' \mid x \in A\} = \\ = \bigvee \{f(a) \wedge f(x)' \mid x \in A\} = f(a) \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se da pues, usando la distributividad de un marco

$$f(u_a(x)) \wedge f(x)' = f(a \vee x) \wedge f(x)' = (f(a) \vee f(x)) \wedge f(x)' = f(a) \wedge f(x)'$$

para cualquier $x \in A$. $\square$

Lema 1.3.51. *Sea $A \in \mathcal{F}\mathrm{rm}$, $A \xrightarrow{\eta_A} NA$ es suprayectivo si y sólo si A es booleano.*

Demostración. Supongamos que η_A es suprayectivo entonces como η_A entonces η_A es un isomorfismo y entonces todos los elementos de A tienen complemento.

Ahora bien, suponemos que $NA \in \mathcal{CBA}$ y tomamos $j \in NA$ y damos $a = j(0)$. Entonces

$$\eta_A(a) = u_a \leq j$$

por el lema 1.3.35. Sea $x \in A$ como $\neg x \in A$ por hipótesis obtenemos que

$$\neg x \wedge j(x) \leq j(\neg x) \wedge j(x) = j(\neg x \wedge x) = j(0) = a$$

y por la observación 1.1.4

$$j(x) \leq a \vee x = u_a(x)$$

es decir $j \leq \eta_A(a)$. Por lo tanto, η_A es suprayectivo. □

Si nos fijamos cuidadosamente en este teorema podemos notar que η_A es casi como la reflexión booleana, el problema es que NA no es necesariamente booleano. De alguna forma, si A fuera un marco sin reflexión booleana, podríamos decir que η_A es lo más parecido a una reflexión booleana. Debemos de tener esto en mente pues este teorema será muy útil y podrá generalizarse para toda la torre de ensambles.

Capítulo 2

Derivada de Cantor-Bendixson

Una vez un poco la teoría general de marcos y de núcleos podemos empezar a estudiar la derivad de Cantor-Bendixson, una herramienta que nos ayudará a ver la booleanidad de un marco. Para este capítulo no guiamos principalmente de el texto [Sim06] de Harold Simmons.

2.1. La derivada de Cantor- Bendixson

Si A es un marco y $a, b \in A$ elementos del marco tales que $a \leq b$ entonces el intervalo $[a, b]$ es booleano si para cualquier $a \leq x \leq b$ hay un único $a \leq y \leq b$ tal que

$$x \wedge y = a \qquad \text{y} \qquad x \vee y = b$$

Observación 2.1.1. *Observemos que si un intervalo $[a, b]$ es booleano entonces para cualquier $a \leq y \leq b$ su complemento x debe ser de la forma $x = (y \succ a) \wedge b$ pues, usando las propiedades de la implicación1.1.12*

$$a \leq ((y \succ a) \wedge b) \leq b$$

$$y \wedge ((y \succ a) \wedge b) = (y \wedge (y \succ a)) \wedge b = (y \wedge a) \wedge b = a \wedge b = a$$

Además $y \vee ((y \succ a) \wedge b) = b$ ya que

$$y \vee ((y \succ a) \wedge b) = (y \vee (y \succ a)) \wedge (y \vee b) = (y \vee (y \succ a)) \wedge b = b$$

La última igualdad se da pues como y tiene complemento y éste es x obtenemos que

$$(y \succ a) = (y \succ (x \wedge y)) = \bigvee \{k \in A \mid k \wedge y \leq x \wedge y\} \geq x$$

y entonces $y \vee (y \succ a) \geq y \vee x = b$ y $(y \vee (y \succ a)) \wedge b = b$

Por lo tanto, como el complemento es único $x = (y \succ a) \wedge b$.

Lema 2.1.2. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a \in A$ si consideramos al conjunto $X \subseteq A$ definido como*

$$x \in X \Leftrightarrow a \leq x \text{ y } [a, x] \text{ es booleano}$$

entonces $\bigvee X \in X$.

Demostración. Consideremos $b = \bigvee X$ y queremos ver que $[a, b]$ es booleano para que quede probado el lema.

Sea $y \in A$ tal que $a \leq y \leq b$. Para cualquier $x \in X$, como $[a, x]$ es booleano y $a \leq x \wedge y \leq x$, existe un $z(x)$ en el intervalo $[a, x]$ que cumple que:

$$z(x) \wedge (x \wedge y) = a \text{ y } z(x) \vee (x \wedge y) = x$$

Como esto ocurre para cualquier $x \in X$ tomemos el supremo, es decir $z = \bigvee \{z(x) \mid x \in X\}$. Así,

$$y \wedge z = y \wedge \bigvee \{z(x) \mid x \in X\} = \bigvee \{y \wedge z(x) \mid x \in X\}] = a$$

La segunda igualdad se da por la ley distributiva para marcos y la tercera igualdad es cierta pues $z(x) \wedge x = z(x)$ y entonces $z(x) \wedge y = z(x) \wedge (x \wedge y) = a$. Solo falta ver que $z \vee y = b$. Para esto primero observemos que $x = (x \wedge y) \vee z(x) = (z(x) \vee x) \wedge (y \vee z(x))$ y por lo tanto, $x \leq y \vee z(x) \leq b$. Así

$$y \vee z = \bigvee \{y \vee z(x) \mid x \in X\} \leq b$$

$$b = \bigvee X \leq \bigvee \{y \vee z(x) \mid x \in X\}$$

Por lo tanto, $y \vee z = b$ y $y \wedge z = a$, lo que significa que el intervalo $[a, b]$ es booleano o equivalentemente que $b \in X$. $\square$

Definición 2.1.3. *Para cualquier marco A, si $a, x \in A$ entonces decimos que x es esencialmente mayor que a ($a \lessdot x$) si y sólo si*

$$a \leq x \qquad \text{y} \qquad (x \succ a) = a$$

Con esta relación entre elementos de un marco ya podemos definir la derivada de Cantor-Bendixson como

$$cbd^A(a) = \bigwedge \{x \in A \mid a \lessdot x\}$$

Lema 2.1.4. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$. Para cualquier $a \in A$, $[a, cbd^A(a)]$ es el intervalo booleano más grande arriba de a. Es decir, para cualquier $x \in A$, si $[a, x]$ es booleano entonces $x \leq cbd^A(a)$.*

Demostración. Supongamos que $[a, y]$ es un intervalo booleano y sea $x \in A$ tal que $a \lessdot x$. Si tomamos $b = x \wedge y$ entonces $a \leq b \leq y$. Pero como $[a, y]$ es booleano existe $a \leq c \leq y$ tal que

$$c \wedge y \wedge x = c \wedge b = a \quad \text{y} \quad c \vee b = y$$

De la primera igualdad, usando la propiedad característica de la implicación obtenemos que

$$y \wedge c \leq x \succ a = a \leq x \wedge y = b$$

Ahora, como $y \wedge c \leq b$,

$$b = b \vee (y \wedge c) = (b \vee y) \wedge (b \vee c) = (b \vee y) \wedge y = ((x \wedge y) \vee y) \wedge y = y \wedge y = y$$

Por lo tanto, $x \wedge y = b = y$. Entonces, $y \leq x$ para cualquier $x \in A$ que cumpla que $a \lessdot x$ y por la definición de la derivada podemos concluir que $y \leq cbd^A(a)$. Si decimos que $d = cbd^A(a)$ para completar la prueba sólo faltaría ver que el intervalo $[a, d]$ es booleano. Para eso tomamos $y \in A$ tal que $a \leq y \leq d$. Escribimos $z = (y \succ a)$ y por propiedades de la implicación sabemos que

$$a \leq z \quad \text{y} \quad y \wedge z = (y \succ a) \wedge y = y \wedge a = a$$

Así,

$$((y \vee z) \succ a) = (y \succ a) \wedge (z \succ a) = z \wedge (z \succ a) = z \wedge a = a$$

Esto quiere decir que $a \lessdot y \vee z$ y por tanto $d \leq y \vee z$. Entones $z \wedge d$ resulta ser el complemento de y en el intervalo $[a, d]$ pues

$$y \wedge (z \wedge d) = a \wedge d = a$$

$$y \vee (z \wedge d) = (y \vee z) \wedge (y \vee d) = d$$

lo que prueba el lema. □

Lema 2.1.5. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ para cualesquiera $a, b, x, y \in A$ se de lo siguiente :*

i) $b \leq a \lessdot x \leq y \Rightarrow b \lessdot y$

ii) Si $a \lessdot x$ y $b \lessdot y$ entonces $a \wedge b \lessdot x \wedge y$

Demostración. Para la primera parte, si tenemos que $b \leq a \lessdot x \leq y$ entonces de manera inmediata sabemos que $b \leq y$ y solo faltará ver que, en efecto, $(y \succ b) \leq b$, la otra desigualdad es una consecuencia de la implicación que ya probamos en 1.1.12. Observemos que

$$(y \succ b) \wedge x \leq (y \succ b) \wedge y = y \wedge b \leq b \leq a$$

Usando entonces la propiedad de la implicación la desigualdad de arriba implica

$$(y \succ b) \leq x \succ a = a \leq y$$

y entonces $y \succ b = (y \succ b) \wedge y \leq b$. Así, $y \succ b \leq b$.
Para la segunda parte del lema, si $a \lessdot x$ y $b \lessdot y$ sabemos que $a \wedge b \leq x \wedge y$ y llamemos $z = ((x \wedge y) \succ (a \wedge b))$. Así, $z \wedge y \wedge x = (x \wedge y) \wedge (a \wedge b) \leq a \wedge b \leq b$. Usando la propiedad de la implicación obtenemos que $z \wedge x \leq y \succ b = b \leq y$. Entonces, $z \wedge x \leq z \wedge x \wedge y \leq a \wedge b \leq a$. Y obtenemos que $z \leq x \succ a = a$. Con las desigualdades obtenidas anteriormente nos queda que $z = z \wedge a \leq z \wedge x \leq b$. Como $z \leq b$ y $z \leq a$ queda lo que queríamos probar

$$(x \wedge y) \succ (a \wedge b) = z \leq a \wedge b$$

La otra desigualdad, para que se de la igualdad, es una consecuencia de la implicación que probamos en el lema 1.1.12.

□

Una vez definida la derivada para un marco A y vista como un operador

$$cbd\colon A \longrightarrow A$$

$$cbd(a) = \bigwedge \{x \in A \mid a \lessdot x\}$$

podemos hacer un poco más general esta idea pues podemos definir la derivada para un marco A y un núcleo $j \in NA$. Sabemos que para el núcleo j en A, el conjunto de puntos fijos A_j es un marco entonces también tiene una derivada

$$A_j \xrightarrow{cbd^{A_j}} A_j$$

$$cbd^{A_j}(a) = \bigwedge \{x \in A_j \mid a \lessdot x\}$$

Cabe mencionar que ser esencialmente mayor en A_j es lo mismo que en A pues la implicación se queda igual en A_j como ya vimos en el lema 1.2.24.

Ahora bien, podemos fijarnos en la siguiente composición:

$$A \xrightarrow{j} A_j \xrightarrow{cbd^{A_j}} A_j \hookrightarrow A$$

Esta composición nos da un operador de A que llamamos cbd_j^A y que en realidad si nos fijamos puntualmente en la composición tenemos que

$$cbd_j^A\colon A \longrightarrow A$$

$$cbd_j^A(a) = \bigwedge \{x \in A_j \mid j(a) \lessdot x\}$$

Solo hay que observar que cbd_j^A y cbd^{A_j} son operadores distintos, el primero es en operador en A y el segundo en A_j. Notemos que en particular $cbd_i^A d = cbd^A$.

De ahora en adelante cuando sea claro el marco en el que estamos trabajando omitiremos escribir el supraíndice.

Teorema 2.1.6. *Tomemos un marco A y $j \in NA$ entonces cbd_j^A es un prenúcleo.*

Demostración. Tomemos j un núcleo en un marco A y $x \in A$. Consideramos al prenúcleo

$$e_x = j \circ u_x \circ v_x \circ j$$

Recordemos que este operador es un prenúcleo pues es composicion de núcleos, no podemos afirmar que es núcleo ya que NA no es cerrado bajo composición.

Consideramos $e = \bigwedge \{e_x \mid x \in A\}$ que es un prenúcleo pues es ínfimo de prenúcleos y afirmamos que $cbd_j = e$.

Para ver que $cbd_j \leq e$ tomamos cualesquiera $a \in A$ y $x \in A_j$ de tal forma que $j(a) \lessdot x$. Es decir, se cumple que

$$j(x) = x \qquad j(a) \leq x \qquad (x \succ j(a)) = j(a)$$

Usando esto notemos que

$$e_x(a) = j(x \vee (x \succ j(a))) = j(x \vee j(a)) = j(x) = x$$

Por definición de e, $e \leq e_x$ entonces

$$e(a) \leq e_x(a) \leq x \leq \bigwedge \{x \in A_j \mid j(a) \lessdot x\} = cbd_j(a)$$

Como esta desigualdad es válida para cualquier $a \in A$ entonces $e \leq cbd_j$.

Falta probar la otra desigualdad, para esto tomamos $a, x \in A$ y definimos

$$z = x \vee (x \succ j(a)) = (u_x \circ v_x \circ j)(a) \qquad \text{y} \qquad y = e_x(a) = j(z) = (j \circ u_x \circ v_x \circ j)(a)$$

Observemos que como los núcleos inflan entonces $j(a) \leq z \leq y$. Sabiendo esto calculamos

$$(y \succ j(a)) = (j(z) \succ j(a)) = (z \succ j(a)) = (x \vee (x \succ j(a))) \succ j(a) = j(a)$$

donde la segunda igualdad se da por el lema 1.3.34 y la cuarta igualdad se debe al lema 1.1.14. Entonces como $(y \succ j(a)) = j(a)$, $j(a) \lessdot y$ y por definición de derivada para el nucléo j

$$cbd_j \leq y = e_x(a)$$

Como lo anterior ocurre para toda $a \in A$

$$cbd_j \leq e_x \qquad \forall x \in A$$

Finalmente, por definición de ínfimo, $cbd_j \leq e$. □

Lema 2.1.7. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$, la cerradura idempotente de cbd_j, cbd_j^∞ es el núcleo más pequeño que colapsa a todos los intervalos $[a, b]$ en A si $[j(a), j(b)]$ es booleano en A_j.*

Demostración. Por el lema anterior cbd_j^A es un prenúcleo y entonces $(cbd_j^A)^\infty$ es un núcleo. Si tomamos $a, b \in A$ tal que $[j(a), j(b)]$ es booleano en A_j queremos ver que $cbd_j(a) = cbd_j(b)$. Tenemos lo siguiente

$$b \leq j(b) \leq cbd^{A_j}(j(a)) = cbd_j^A(a) \leq (cbd_j^A)^\infty(a)$$

donde la segunda desigualdad se da por el lema 2.1.4 pues sabemos por hipótesis que $[j(a), j(b)]$ es booleano. La igualdad de arriba se da por lo siguiente

$$cbd^{A_j}(j(a)) = \bigwedge \{x \in A_j \mid j(a) \lessdot x\} = cbd_j^A(a)$$

Entonces como $b \leq (cbd_j^A)^\infty(a)$, por la monotonía de los núcleos y por la definición de $(cbd_j^A)^\infty$

$$(cbd_j^A)^\infty(b) \leq (cbd_j^A)^\infty((cbd_j^A)^\infty(a)) = (cbd_j^A)^\infty(a)$$

Para tener la igualdad necesitamos la otra desigualdad pero ésta se da pues $a \leq b$ y los núcleos son monótonos.

Ahora solo nos queda ver que $(cbd_j^A)^\infty$ es el menor núcleo que que colapsa intervalos que son booleanos bajo j en A_j. Supongamos que hay $k \in NA$ que también cumple esta propiedad. Tomamos cualquier $a \in A$ y buscamos ver que $(cbd_j^A)^\infty(a) \leq k(a)$. Consideremos el intervalo $[a, cbd_j^A(a)]$ en A. Entonces $[j(a), j(cbd_j^A(a)]$ es un intervalo en A_j y además

$$j(cbd_j^A(a)) = cbd_j^A(a) = cbd^{A_j}(j(a))$$

La primera igualdad se da porque $cbd_j^A(a)$ es un elemento de A_j ya que la derivada se calcula como ínfimos de A_j y éste es un marco; por tanto, es cerrado bajo ínfimos. La segunda igualdad se da por las definiciones de derivada. Así obtenemos que

$$[j(a), j(cbd_j^A(a)] = [j(a), cbd^{A_j}(j(a))]$$

y por el lema 2.1.4 podemos asegurar que este es un intervalo booleano en A_j. Entonces, por la propiedad que cumple k, de colapsar intervalos de A que resultan boolenanos en A_j bajo j, podemos decir que $k(cbd_j^A(a)) = k(a)$. Pero como k es un núcleo, en particular, infla, entonces

$$cbd_j^A(a) \leq k(a)$$

Y como $(cbd_j^A)^\infty$ es el menor núcleo mayor que cbd_j^A resulta que

$$(cbd_j^A)^\infty(a) \leq k(a)$$

□

Si consideramos $j = id$ en el lema anterior obtenemos el siguiente Corolario que ya no necesita prueba.

Corolario 2.1.8. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, $(cbd^A)^\infty$ es el núcleo más pequeño que colapsa a todos los intervalos booleanos de A.*

Teorema 2.1.9. *Si tomamos $A \in \mathfrak{Frm}$ entonces para cualesquiera $j \in NA$ y $a \in A$*

$$cbd_j^A(a) = (w_{j(a)} \succ j)(a)$$

Nota que la implicación que se enuncia en el teorema es en NA que no se define como la evaluación puntual.

Demostración. Tomamos $j \in NA$ y $a \in A$ entonces denotamos

$$b = cbd_j(a) \qquad k = (w_{j(a)} \succ j)$$

El teorema queda probado si llegamosa que $b = k(a)$.

Para la primera desigualdad consideremos al núcleo $l = u_b \wedge v_{j(a)}$. Además sabemos que $a \leq j(a) \leq k(a)$ pues por como esta definido k y las propiedades de la implicación $j \leq k$ (ver lema1.1.12). Afirmamos que $l \leq k$. Sea $x \in A$ y definimos $y = (x \succ j(a))$ entonces

$$y \wedge w_{j(a)}(x) = y \wedge ((x \succ j(a)) \succ j(a)) = y \wedge (y \succ j(a)) = y \wedge j(a) \leq j(a)$$

Si le sacamos ínfimo con $v_{j(a)}(x)$ a ambos lados de la desigualdad anterior

$$y \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x) \leq j(a) \wedge v_{j(a)}(x) = j(a) \wedge (j(a) \succ x) = j(a) \wedge x \leq x$$

Ahora sacamos supremos con x y obtenemos

$$(y \vee x) \wedge (v_{j(a)}(x) \vee x) \wedge (w_{j(a)}(x) \vee x) = x \vee (y \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x)) \leq x \vee x = x$$

Usando esta desigualdad y tomando en cuenta que $v_{j(a)}$ y $w_{j(a)}$ son núcleos , en particular inflan

$$(y \vee x) \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x) \leq x$$

Por otro lado, usando 1.1.14, sabemos que $((x \vee (x \succ j(a))) \succ j(a)) = j(a)$ y $j(a) \leq x \vee (x \succ j(a))$, es decir, $j(a) \lessdot x \vee (x \succ j(a)) = x \vee y$. Por la transitividad del orden $\lessdot$, lema2.1.4, como $x \vee y \lessdot j(x \vee y)$,

$$j(a) \lessdot j(x \vee y)$$

Recordemos que $j(x \vee y) \in A_j$, entonces

$$b = cbd_j^A(a) = cbd^{A_j}(a) \leq j(x \vee y)$$

Así, $x \vee b \leq j(x \vee y)$, pues $x \leq j(x) \leq j(x \vee y)$. Tomando en cuenta las desigualdades que se han obtenido hasta ahora podemos llegar a que para cualquier $x \in A$

$$\begin{aligned}(l \wedge w_{j(a)})(x) =& u_b(x) \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x) = (b \vee x) \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x) \leq \\ \leq& j(x \vee y) \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x) \leq j(x \vee y) \wedge j(v_{j(a)}(x)) \wedge j(w_{j(a)}(x)) = \\ =& j(j(x \vee y) \wedge v_{j(a)}(x) \wedge w_{j(a)}(x)) \leq j(j(x)) = j(x)\end{aligned}$$

Entonces $l \wedge w_{j(a)} \leq j$. Por la propiedad característica de la implicación, obtenemos lo que habíamos afirmado

$$l \leq k = w_{j(a)} \succ j$$

Así,

$$b = l(j(a)) \leq k(j(a)) \leq k(a)$$

donde la segunda desigualdad se da porque $j(a) \leq k(a)$ y entonces $k(j(a)) \leq k^2(a) = k(a)$. La primera igualdad se da pues

$$l(j(a)) = (b \vee j(a)) \wedge (j(a) \succ j(a)) = (b \vee j(a)) \wedge 1 = b \vee j(a) = cbd_j^A \vee j(a) = cbd_j^A(a)$$

Para terminar la prueba sólo falta la otra desigualdad, es decir, $k(a) \leq b$. Tomamos un $y \in A_j$ de tal modo que $j(a) \lessdot y$. Observemos que

$$a \leq j(a) = y = j(y) \qquad \text{y} \qquad w_{j(a)}(y) = ((y \succ j(a)) \succ j(a)) = j(a) \succ j(a) = 1$$

Usando esto tenemos que

$$k(a) \leq k(y) = k(y) \wedge 1 = k(y) \wedge w_{j(a)}(y) = (k \wedge w_{j(a)})(y) \leq j(y) = y$$

Notemos que la última desigualdad se debe a que $k \wedge w_{j(a)} = (w_{j(a)} \succ j) \wedge w_{j(a)}) = j \wedge w_{j(a)} \leq j$. Por lo tanto, $k(a) \leq y$ para cualquier $y \in A_j$ que cumpla que $j(a) \lessdot y$. Entonces, por la definición de derivada,

$$k(a) \leq \bigwedge \{y \in A_j \mid j(a) \lessdot y\} = dbd_j^A(a) = b$$

lo que termina la prueba. □

Corolario 2.1.10. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$, para cualquier $j \in NA$*

$$cbd_j = tp \Leftrightarrow j = w_a$$

donde $a = j(0)$.

Demostración. Tomamos A un marco y $j \in NA$. Damos $a = j(0)$. Por el lema 1.3.38, como $j(j(0)) = j(0)$, entonces $j \leq w_{j(0)} = w_a$. Además, por el lema anterior 2.1.9,

$$cbd_j(0) = (w_a \succ j)(0)$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} cbd_j = tp \Leftrightarrow & 1 = cbd_j(0) = (w_a \succ j)(0) \\ \Leftrightarrow & (w_a \succ j) = T_N \\ \Leftrightarrow & w_a \leq j \\ \Leftrightarrow & w_a = j \end{aligned}$$

lo que prueba este corolario. □

Hemos trabajado la derivada para cualquier marco A, en particular podría ser para el marco NA o cualquiera del ensamble,$N^{\alpha}A$. Sin embargo, aquí agregamos notación para cuando hablamos de estas derivadas pues resulta que las distintas derivadas en distintos niveles de la torre de ensambles se relacionan entre ellas.
La derivada en A:

$$cbd_j^A\colon A \to A$$

$$cbd_j(a) = \bigwedge \{x \in A_j \mid j(a) \lessdot x\}$$

La derivada en NA:

$$Cbd_J^A = cbd_J^{NA}\colon NA \to NA$$

$$Cbd_J^A(k) = \bigwedge \{l \in NA_J \mid J(k) \lessdot l\}$$

Observa que ahora $J \in N^2A$ pues es un núcleo de NA.

La derivada en N^2A:

$$CBD_{\mathcal{J}}^A = Cbd_{\mathcal{J}}^{NA} = cbd_{\mathcal{J}}^{N^2A}\colon N^2A \to N^2A$$

$$CBD_{\mathcal{J}}(K) = \bigwedge \left\{L \in N^2A_{\mathcal{J}} \mid \mathcal{J}(K) \lessdot L\right\}$$

donde $\mathcal{J} \in N^3A$.
La derivada en N^3A:

$$\mathbb{CBD}_{\mathscr{J}}^A = CBD_{\mathscr{J}}^{NA} = Cbd_{\mathscr{J}}^{N^2A} = cbd_{\mathscr{J}}^{N^3A}\colon N^3A \to N^3A$$

$$\mathbb{CBD}_{\mathscr{J}}^A(\mathcal{K}) = \bigwedge \left\{\mathcal{J} \in N^3A_{\mathscr{J}} \mid \mathscr{J}(\mathcal{K}) \lessdot \mathcal{L}\right\}$$

donde $\mathscr{J} \in N^4A$.

Y así sucesivamente. Afortunadamente casi no usamos las derivadas de niveles superiores al tres pues la notación se volvería muy complicada. Además, cuando el contexto sea claro omitiré el supraíndice de la derivada que indica el marco en el que estamos trabajando.

Teorema 2.1.11. *Tomamos $A \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$, entonces*

$$(cbd_j^A)^{\infty} = Cbd^A(j)$$

Demostración. Sea $j \in NA$. Para probar la primera desigualdad tomamos cualquier $k \in NA$ tal que $j \lessdot k$. Consideramos cualquier $x \in A$ y definimos $a = k(x)$ entonces

$$j(a) \leq k(a) = k(k(x)) = k(x) = a$$

Es decir, $j(a) = k(a) = a$ que por el lema 1.3.38 implica que $k \leq w_a$. Usando las propiedades de la implicación nos queda que $(w_a \succ j) \leq (k \succ j) = j$. Así, por lo anterior y por el lema 2.1.9

$$cbd_j(a) = (w_a \succ j)(a) \leq j(a) = a$$

Y como cbd_j es prenúcleo, en particular infla, tenemos que $cbd_j(a) = a$. Por inducción sobre ordinales podemos probar que $cdb_j^{\alpha}(a) = a$. Si $\alpha = 0$ la propiedad ya la probamos líneas arriba. Ahora tomemos $\alpha = \beta^+$ y supongamos que $cbd_j^{\beta}(a) = a$. Entonces $cbd_j^{\alpha}(a) = cbd_j(cbd_j^{\beta}(a)) = cbd_j(a) = a$. Finalmente, si α es un ordinal límite y suponemos que para cualquier ordinal $\beta \leq \alpha$, $cbd_j^{\beta}(a) = a$ obtenemos que $cbd_j^{\alpha}(a) = \bigvee \left\{ cbd_j^{\beta}(a) \mid \beta \leq \alpha \right\} = a$.

Como esta propiedad pasa para cualquier ordinal, en particular $cbd_j^{\infty}(a) = a$. Entonces

$$cbd_j^{\infty}(x) = cbd_j^{\infty}(a) = a = k(x) \qquad \forall x \in A$$

Así, $cbd_j^{\infty} \leq k$ para cualquier $k \in NA$ tal que $j \lessdot k$. Esto implica, por definición de derivada, que $cbd_j^{\infty} \leq Cbd(j)$.

Para la otra desigualdad nos tomamos cualquier $x \in A$ y damos $a = cbd_j^{\infty}(x)$. Entonces

$$a \leq j(a) \leq cbd_j(a) = cbd_j(cbd_j^{\infty}(x)) = cbd_j^{\infty}(x) = a$$

Observa que la segunda desigualdad es inmediata de la definición de cbd_j. Así, $j(a) = a$ y esto es equivalente, por lema 1.3.38, a que $j \leq w_a$. Haciendo uso del lema 2.1.9 obtenemos

$$a = cbd_j(a) = (w_{j(a)} \succ j)(a) = (w_a \succ j)(a)$$

Y esto nos permite usar otra vez el lema 1.3.38 para decir que $j \leq (w_a \succ j) \leq w_a$. Como se da esta desigualdad

$$(w_a \succ j) = (w_a \succ j) \wedge w_a = w_a \wedge j = j$$

Por lo tanto, $j \lessdot w_a$. Entonces $Cbd(j) \leq w_a$ lo que nos permite llegar a que

$$Cbd(j)(x) \leq w_a(x) \leq w_a(a) = a = cbd_j^{\infty}(x) \qquad \forall x \in A$$

Finalmente, $cbd_j^{\infty} = Cbd(j)$. $\square$

Lema 2.1.12. *Sea* $A \in \mathfrak{Frm}$

$$Cbd(v_b \vee j \vee u_a) = v_b \vee Cbd(j) \vee u_a = v_b \circ Cbd(j) \circ u_a$$

para todo $a, b \in A$ *y* $j \in NA$.

Demostración. La segunda igualdad que quiere probarse es inmediata del lema 1.3.31. Nos basta probar que

$$Cbd(v_b \vee j \vee u_a) = v_b \vee Cbd(j) \vee u_a$$

pero la desigualdad

$$Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \geq v_b \vee Cbd(j) \vee u_a$$

se da porque $u_a, v_b, Cbd(j) \leq Cbd(v_b \vee j \vee u_a)$ ya que Cbd infla y es monótono porque es prenúcleo. Para la otra desigualdad como Cbd es un prenúcleo obtenemos que

$$\begin{aligned} u_b \wedge v_a \wedge Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \leq & Cbd(u_b \wedge v_a) \wedge Cbd(v_b \vee j \vee u_a) = \\ = & Cbd((u_b \wedge v_a) \wedge (v_b \vee j \vee u_a)) = \\ = & Cbd(u_b \wedge j \wedge v_a) \leq Cbd(j) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da porque distribuimos y usamos el lema 1.3.31 que dice que v_b y u_b son complementos, al igual que u_a y v_a. Con esta desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned} v_b \vee Cbd(j) \vee u_a \geq & v_b \vee (u_b \wedge v_a \wedge Cbd(v_b \vee j \vee u_a)) \vee u_a = \\ = & v_b \vee Cbd(u_b \vee j \vee u_a) \vee u_a = Cbd(v_b \vee j \vee u_a) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se da también por la distributividad y el lema 1.3.31 y la segunda porque $v_b, u_a \leq Cbd(v_b \vee j \vee u_a)$ pues Cbd infla. □

A continuación encontramos una tabla que nos permite a partir del teorema 2.1.11 entender mejor el nivel en el que se encuentra cada derivada y las notaciones correspondientes. También se introducimos nuevas notaciones para facilitar la escritura.

A	NA	N^2A	N^3A
cbd^A	cbd^{NA}	cbd^{N^2A}	cbd^{N^3A}
	Cbd^A	Cbd^{NA}	Cbd^{N^2A}
		CBD^A	CBD^{NA}
			$\mathbb{CBD}^A$

NA	N^2A	N^3A
$\delta = Cbd(id) = cbd^\infty$	$\Delta = CBD(Id) = Cbd^\infty$	$\boldsymbol{\Delta} = \mathbb{CBD}(ID) = CBD^\infty$
$\theta = CBD(Id)(id) = Cbd^\infty(id)$	$\Theta = \mathbb{CBD}(ID)(Id) = CBD^\infty(Id)$	$\boldsymbol{\Theta} = \mathbb{CBD}^\infty(ID)$
$\xi = \mathbb{CBD}(ID)(Id)(id) = CBD^\infty(Id)(id)$	$\Xi = \mathbb{CBD}^\infty(ID)(Id)$	$\boldsymbol{\Xi} = \dots$

La notación que usaremos para la identidad y la constante uno para los distintos niveles es la siguiente

$$id, tp \in NA \quad Id, Tp \in N^2A \quad ID, TP \in N^3A$$

y va en correspondencia a la notación que usamos para las derivadas en los distintos niveles.

Teorema 2.1.13. *Para* $A \in \mathfrak{Frm}$

i) A *es booleano* $\Leftrightarrow cbd(0) = 1$

ii) NA *es booleano* $\Leftrightarrow \delta = tp \Leftrightarrow \delta(0) = 1$

iii) N^2A *es booleano* $\Leftrightarrow \theta = tp \Leftrightarrow \theta(0) = 1$

iv) N^3A *es booleano* $\Leftrightarrow \xi = tp \Leftrightarrow \xi(0) = 1$

v) $\dots$

Demostración. i) Si A es booleano por el lema 2.1.4, como $[0, cbd(0)]$ es el intervalo más grande por arriba de cero, entonces $cbd(0) = 1$. Ahora bien, si $cbd(0) = 1$ como $[0, cbd(0)]$ es el intervalo más grande por arriba de cero, entonces A es booleano.

ii) Recordemos que $\delta = Cbd(id)$ y por el lema 2.1.4, con el mismo argumento del inciso anterior pero ahora sobre NA, queda probado. Sólo observemos que basta pedir que $\delta(0) = 1$ pues las derivadas son operadores monótonos.

iii) Se usa el lema 2.1.4 pero ahora para N^2A pues $\theta = Cbd^{\infty}(id) = CBD(Id)(id)$ y $CBD(Id)(id) = tp$ si y sólo si $CBD(Id) = Tp$.

iv) Para este inciso se usa el mismo argumento pero para N^3A, pues $\xi = \mathbb{DER}(ID)(Id)(id)$ y

$$\xi = tp \Leftrightarrow \mathbb{DER}(ID)(Id) = Tp \Leftrightarrow \mathbb{DER}(ID) = TP$$

$\square$

Teorema 2.1.14. *Para $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

i) $cbd_j = j$

ii) $Cbd(j) = j$

iii) $\Delta(j) = j$

Demostración. Para la implicación i)$\Rightarrow$ ii) supongamos que $cbd_j = j$. Entonces, por el lema 2.1.11

$$j = cbd_j \leq cbd_j^{\infty} = Cbd(j)$$

Ahora bien, si suponemos que $Cbd(j) = j$ usando la definición de Δ tenemos que

$$\Delta(j) = CBD(Id)(j) = Cbd^{\infty}(j)$$

pero Cbd^{∞} es la cerradura idempotente de de Cbd queda que

$$Cbd(j) = Cbd^{\infty}(j) = j$$

lo que prueba la segunda implicación. Por último, si suponemos que $\Delta(j) = j$ y obtenemos que

$$j \leq cbd_j \leq cbd_j^{\infty} = Cbd(j) \leq Cbd^{\infty}(j) = CBD(Id)(j) = \Delta(j)$$

donde la primera desigualdad se da por como se definió cbd_j y la primera igualdad es cierta por el lema 2.1.11. Así queda probado el teorema. $\square$

Si tomamos $j = id$ obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.15. *Para $A \in \mathfrak{Frm}$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

i) $cbd = id$

ii) $\delta = id$

iii) $\theta = id$

Demostración. Notemos que

$$Cbd(id) = cbd^{\infty} = \delta \quad \text{y} \quad CBD(Id)(id) = \theta$$

y si usamos del teorema 2.1.14 anterior queda probado este corolario. □

Curiosamente este resultado no se puede generalizar pues ya no podemos agregar la condición $\xi = id$. Más adelante se cita un ejemplo en el que ocurren la condiciones del corolario pero $\xi \neq id$.

Antes de seguir con más propiedades sobre la derivada debemos hablar sobre un caso particular.

2.1.1. El caso espacial

Ya definimos la relación de ser esencialmente mayor y la derivada de Cantor Bendixson 2.1.3 para marcos pero podemos tomarnos ahora S un espacio topológico y definir algo equivalente. De hecho, el proceso de Cantor-Bendixson se uso originalmente para quitar los puntos aislados de un conjunto cerrado hasta quedarnos con la parte perfecta. Por esto es importante ver la analogía entre marcos y espacios topológicos.

Antes de avanzar convenimos que la notación que usamos para el complemento de un conjunto es T', para la cerradura es T^{-} y para el interior es T°. Denotamos también $\mathcal{O}S$ como la topología de S y $\mathcal{C}S$ al conjunto de cerrados de S.

Definición 2.1.16. *Si S es un espacio topológico y $Y, X \subseteq X$ son conjuntos cerrados del espacio decimos que Y es una parte no esencial de X*

$$Y \sqsubset X$$

si $Y \subseteq X$ y $X = (X - Y)^{-}$. Ademas para cualquier $X \subseteq S$ conjunto cerrado, $X \in \mathcal{C}S$,

$$lim_S(X) = \left(\bigcup \{Y \in \mathcal{C}S \mid Y \sqsubset X\}\right)^{-}$$

es el operador límite en $\mathcal{C}S$.

Observación 2.1.17. *Recordemos que si S es un espacio topológico $\mathcal{O}S$, el conjunto de los abiertos en S,es un marco. El cero del marco es el vacío y el uno es S. Los supremos arbitrarios son la unión y los ínfimos finitos la intersección. Así se cumple la ley distributiva par marcos. Hay que recalcar que los ínfimos arbitrarios* *existen pues hay supremos arbitrarios pero no se calculan como la intersección sino como sigue:*

$$\bigwedge \mathcal{V} = \left(\bigcap \mathcal{V}\right)^{\circ}$$

para cualquier $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}S$. *Ademas no es difícil ver que la negación y la implicación se calculan como*

$$(V \succ U) = (V' \cup U)^{\circ}$$
$$\neg U = U^{-'}$$

para cualesquiera $U, V \in \mathcal{O}S$.

Si ocupamos la relación $\lessdot$ para el marco $\mathcal{O}S$ y la nueva relación $\sqsubset$ para $\mathcal{C}S$ podemos obtener resultados interesantes.

Lema 2.1.18. *Para cualquier espacio topológico* S *se cumple*

$$Y \sqsubset X \Leftrightarrow X' \lessdot Y' \qquad U \lessdot V \Leftrightarrow V' \sqsubset U'$$

donde $X, Y \in \mathcal{C}S$ *y* $U, V \in \mathcal{O}S$. *Además se cumple que*

$$lim_S(X)' = cbd^{\mathcal{O}S}(X') \qquad cbd^{\mathcal{O}S}(U)' = lim_S(U')$$

Demostración. Sean $X, Y \in \mathcal{C}S$ tenemos que

$$X' \lessdot Y' \Leftrightarrow (Y' \succ X') = X' \Leftrightarrow (Y' \cup X)^{\circ} = X'$$

pero

$$(Y' \cup X)^{\circ} = (Y' \cap X)^{'\circ} = (Y' \cap X)^{-'}$$

donde la segunda igualdad se da por que el interior del complemento es el complemento de la cerradura para cualquier conjunto en un espacio topólogico. Así

$$X' \lessdot Y' \Leftrightarrow X' = (Y' \cap X)^{-'} \Leftrightarrow X = (Y' \cap X)^{-} \Leftrightarrow Y \sqsubset X$$

Para probar la otra equivalencia basta que observemos la prueba anterior y cambiemos X' y Y' por U y V respectivamente.
Ahora bien, si tomamos $X \in \mathcal{C}S$ entonces

$$cbd(X') = \left(\bigcap \{V \in \mathcal{O}S \mid X' \lessdot V\}\right)^{\circ} = \left(\bigcap \{V \in \mathcal{O}S \mid V' \sqsubset X\}\right)^{\circ}$$

la primera igualdad es cierta por como son los ínfimos arbitrarios en $\mathcal{O}S$ que vimos en la observación 2.1.17 y la segunda es verdadera por lo que acabamos de probar. Así obtenemos que

$$\begin{aligned} cbd(X')' &= \left(\bigcap \{V \in \mathcal{O}S \mid V' \sqsubset X\}\right)^{\circ'} = \left(\bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V' \sqsubset X\}\right)^{'-} = \\ &= \left(\bigcup \{V' \in \mathcal{O}S \mid V' \sqsubset X\}\right)^{-} = \left(\bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V' \sqsubset X\}\right)^{-} = lim(X) \end{aligned}$$

donde la segunda igual se da porque para cualquier conjunto de un espacio topológico el complemento del interior es la cerradura del complemento. Eso prueba la primera igualdad pero la segunda es análoga basta sustituir X' por U.

□

Ahora tenemos un lema dual al lema 2.1.4 que nos da información sobre el espacio topológico. Para este lema solo hay que recordar que los puntos límite de un subconjunto $X \subseteq \mathcal{C}S$ con S un espacio topológico son aquellos puntos que no son aislados en X. Un punto aislado de X, $p \in X$ es aquel para el cual existe un abierto $U \in \mathcal{O}S$ tal que $X \cap U = \{p\}$.

Lema 2.1.19. *Sea S un espacio topológico T_0. Para cualquier $X \in \mathcal{C}S$ el conjunto $lim_S(X) \subseteq X$ es el conjunto de puntos límite de X.*

Demostración. Es claro que $lim_S(X) \subset X$ pues por la definición 2.1.16 si $Y \sqsubset X$ entonces $Y \subseteq X$. Queremos probar que

$$X^* = X - lim(X) = X \cap lim(x)'$$

es el conjunto de puntos aislados de X. Supongamos que $p \in X$ es un punto aislado, entonces

$$U \cap X = \{p\}$$

para algún $U \in \mathcal{O}S$. Supongamos, también, que $p \in lim(X) = (\bigcup \{Y \in \mathcal{C}S \mid Y \sqsubset X\})^-$. Pero como $p \in U$ y U es abierto

$$\{Y \in \mathcal{C}S \mid Y \sqsubset X\} \cap U \neq \emptyset$$

y por tanto hay un $Y \in \mathcal{C}S$ con $Y \sqsubset X$ tal que $U \cap Y \neq \emptyset$, digamos que

$$q \in Y \cap U \subseteq X \cap U$$

Por otro lado, $p \in X$ donde $X = (X \cap Y')^-$ pues así nos tomamos a Y. Además como U es abierto y $p \in U$, $U \cap (X \cap Y') \neq \emptyset$. Entonces hay

$$r \in X \cap Y' \cap U \subseteq X \cap U$$

y $r \neq q$ pues $q \in Y$ y $r \in Y'$. Sin embargo, como p es punto aislado,

$$q, r \in X \cap U = \{p\}$$

lo cual nos lleva a una contradicción. Así, $p \notin lim(X)$, es decir, $p \in X^*$.

Ahora queremos ver que si $p \in X^*$ entonces p es aislado. Primero probaremos que para cualquier $q \in X^*$ se cumple que

$$q \in X^* \cap U(q) \subseteq \{q\}^-$$

donde $U(q) = (X' \cup \{q\}^-)^\circ = (X - \{q\}^-)^{-'}$.

Observemos que

$$X \cap U(q) \subseteq X \cap (X' \cup \{q\}^-) = X \cap \{q\}^- \subseteq \{q\}^-$$

y como $X^* \subseteq X$ entonces $X^* \cap U(q) \subseteq \{q\}^-$. Notemos que además $X \cap U(q) \neq \emptyset$ pues si no fuera así tendríamos que

$$X \subseteq U(q) = (X' \cup \{q\}^-)^-$$

y esto implicaría que $\{q\} \sqsubset X$ y por tanto

$$q \in \{q\}^- \in lim(X)$$

lo cual no es posible porque $q \in X^*$, es decir $q \notin lim(X)$. Por lo tanto, $X \cap U(q) \neq \emptyset$. Es decir hay un

$$r \in X \cap U(q) \subseteq \{q\}^-$$

es decir, $r \in \{q\}^-$ y $r \in U(q)$ que es un abierto, por tanto

$$\{q\} \cap U(q) \neq \emptyset$$

lo que quiere decir que $q \in U(q)$ y en consecuencia $q \in X^* \cap U(q) \subseteq \{q\}^-$.

Ahora sí, tomamos un $p \in X^*$ y queremos ver que es aislado en X. Para esto quiero probar que $X^* \cap U(p) = \{p\}$. Ya tenemos una contención por lo que probamos arriba pues como $p \in X^* \cap U(p)$, es claro que $\{p\} \subseteq X^* \cap U(p)$. Si tomamos $q \in X^* \cap U(p)$ queremos ver que $q = p$. Por lo que probamos anteriormente

$$q \in X^* \cap U(p) \subseteq \{p\}^-$$

pero como la cerradura es el conjunto cerrado mas pequeño que contiene al conjunto, nos queda que $\{q\}^- \subseteq \{p\}^-$. También tenemos que $q \in X^* \cap U(q) \subseteq \{q\}^-$ Entonces $q \in U(q) \cap \{p\}^-$, y como $U(q)$ es un abierto,implica que $p \in U(q)$. Por lo tanto,

$$p \in X^* \cap U(q) \subseteq \{q\}^-$$

con lo que obtenemos que $\{p\}^- \subseteq \{q\}^-$. Pero ya teníamos la otra contención, entonces $\{p\}^- = \{q\}-$ pero como S es un espacio T_0 entonces $p = q$. De esta forma llegamos a que

$$\{p\} = X^* \cap U(p) = X \cap lim(X)' \cap U(p)$$

donde $lim(X)' \cap U(p)$ es un abierto pues $lim(X)$ es cerrado por definición entonces su complemento es abierto, y la intersección finita de abiertos es abierto. Por tanto, p es un punto aislado de X. □

Con todo lo que veamos sobre la derivada, por la dualidad que tenemos entre cbd y lim, podemos traducir un problema de marcos a el espacio topológico correspondiente o viceversa. En particular, tenemos que si S es un espacio topológico

$$\begin{aligned} \mathcal{O}S \text{ es un marco booleano } &\Leftrightarrow cbd^{\mathcal{O}S}(\emptyset) = S \\ &\Leftrightarrow lim_S(S) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow S \text{ no tiene puntos aislados} \end{aligned}$$

pues estamos usando los lemas 2.1.19, 2.1.18 y 2.1.4.

2.2. Más propiedades de la derivada de Cantor-Bendixson

En esta parte veremos muchas más propiedades de la derivada y además daremos otras equivalencias, en particular una caracterización de Beazer y Macnab, que resultan útiles para determinar cuando un nivel es booleano.

Lema 2.2.1. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a \in A$, entonces $Cbd(w_a) = tp$*

Demostración. Sea $a \in A$ y consideramos $j = w_a$. Así, $j(0) = w_a(0) = ((0 \succ a) \succ a) = a$.Por lo tanto, usando 2.1.9

$$cbd_j(0) = (w_a \succ w_a)(0) = tp(0) = 1$$

lo que implica

$$1 = cbd_j(0) \leq cbd_j^{\infty}(0) = Cbd(j)(0) \Leftrightarrow Cbd(w_a) = Cbd(j) = tp$$

□

Corolario 2.2.2. *Para todo $A \in \mathfrak{Frm}$, $Cbd = Id$ si y sólo si A es trivial.*

Demostración. Es claro el regreso, pues si el marco es trivial solo queda que $Cbd = Id$. Para la ida suponemos que $Cbd = Id$, entonces para cualquier $a \in A$ usando 2.2.1

$$w_a = Cbd(w_a) = tp$$

Y así

$$a = w_a(0) = 1$$

lo que nos dice que A es el marco trivial. $\square$

Lema 2.2.3. *Si tomamos $A \in \mathfrak{Frm}$, $j \in NA$ y $a \in A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $cbd_j(a) = a$

ii) $cbd_j \leq w_a$

iii) $Cbd(j) \leq w_a$

iv) $j \lessdot w_a$

Demostración. Para i)$\Rightarrow$ ii), supongamos que $cbd_j(a) = a$, entonces por lema 1.3.38, resulta inmediato que $cbd_j \leq w_a$. Observa que el lema 1.3.38 requiere que el operador sea un núcleo y en este caso cbd_j es sólo un prenúcleo pero en realidad esto no nos afecta pues

$$cbd_j(a) = a \Rightarrow cbd_j^{\infty}(a) = (a) \Rightarrow cbd_j^{\infty} \leq w_a \Rightarrow cbd_j \leq cbd_j^{\infty} \leq w_a$$

Ahora suponiendo ii), es decir, que $cbd_j \leq w_a$ queremos ver que $cbd_j^{\infty} = Cbd(j) \leq w_a$. Para probarlo lo haremos por inducción sobre ordinales, vamos a ver que para cualquier ordinal α, $cbd_j^{\alpha} \leq w_a$, en particular esto se va a cumplir para cbd_j^{∞}. Para $\alpha = 0$ es inmediato pues es nuestra hipótesis. Para $\alpha = \beta^+$ suponiendo que $cbd_j^{\beta} \leq w_a$ tenemos que

$$cbd_j^{\alpha} = cbd_j^{\beta^+} = cbd_j \circ cbd_j^{\beta} \leq w_a \circ w_a = w_a$$

La desigualdad se debe a la hipótesis inductiva y a la hipótesis ii) y la última igualdad es ciera pues w_a es un núcleo y por tanto es idempotente. Finalmente si α es un ordinal límite y para cualquier $\beta \leq \alpha$ se cumple que $cbd_j^{\beta} \leq w_a$ tenemos que

$$cbd_j^{\alpha} = \bigvee \left\{ cbd_j^{\beta} \mid \beta \leq \alpha \right\} \leq w_a$$

Para iii) $\Rightarrow$ iv) suponemos que $Cbd(j) \leq w_a$ y queremos ver que $j \lessdot w_a$. Para esto notemos que

$$j \leq Cbd(j) \leq w_a$$

Así, evaluando en a, obtenemos

$$a \leq j(a) \leq Cbd(j)(a) \leq w_a(a) = a = j(a)$$

La última igualdad se debe al lema 1.3.38. Usando entonces el lema 2.1.9 y sabiendo que $j(a) = a$ tenemos que

$$(w_a \succ j)(a) = (w_{j(a)} \succ j)(a) = cbd_j(a) \leq Cbd(j)(a) \leq w_a(a) = a$$

Así, por 1.3.38, $(w_a \succ j) \leq w_a$. Por lo tanto

$$(w_a \succ j) \leq w_a \wedge (w_a \succ j) = w_a \wedge j = j$$

La última igualdad se debe a que ya sabíamos que $j \leq w_a$. Hasta ahora llegamos a que $(w_a \succ j) \leq j$ pero la otra desigualdad que hace falta para que se cumpla que $j \lessdot w_a$ es inmediata por el lema 1.1.12. Finalmente para iv)⇒ i), si $j \lessdot w_a$ entonces, en particular, $j(a) = a$ que por lema 1.3.38 implica que $j(a) = a$. Además $(w_a \succ j) = j$ entonces usando el lema2.1.9

$$j(a) = (w_a \succ j)(a) = (w_{j(a)} \succ j)(a) = cbd_j(a)$$

lo que prueba lo que queríamos.

□

Observación 2.2.4. *Si para el lema anterior damos $j = id$ y $a = 0$ y nos fijamos en los incisos iii) y i), obtenemos que*

$$cbd(0) = 0 \Leftrightarrow \delta = Cbd(id) \leq w_0 = \neg\neg$$

Notemos que además esto lo podemos levantar a otros niveles, es decir, en vez de considerar cbd tomamos Cbd o la derivada en algún otro nivel. Por ejemplo también tenemos que

$$Cbd(Id) = Id \Leftrightarrow \Delta = CBD(Id) \leq \neg\neg$$

donde ahora la negación es en NA no en A. Es importante que tomemos en cuenta que esta observación y muchos de los lemas que se prueban pueden levantarse a los demás niveles.

Ahora bien, tomando la parte ii) y iv) del lema anterior podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 2.2.5. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$*

$$Cbd(j) \leq w_a \Leftrightarrow j \lessdot w_a$$

para cualesquiera $j \in NA$ y $a \in A$.

Corolario 2.2.6. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$ las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $cbd = id$

ii) $\delta = id$

iii) $\theta = id$

iv) $\Delta \leq \neg\neg$

Observemos que la doble negación en el inciso cuatro del corolario es la doble negación en NA.

Demostración. Observemos que las implicaciones i)⇔ ii)⇔ iii) ya están probadas por el corolario 2.1.15. Sólo nos queda ver que ii)⇔iv). Para esto notemos que

$$\delta = Cbd(id) = id \Leftrightarrow \Delta = CBD(Id) \leq \neg\neg$$

esto se debe al lema 2.2.3 en particular 2.2.4. □

Lema 2.2.7. *Para $A \in \mathfrak{Frm}$, si $j, k \in NA$ y $l = (k \succ j)$ entonces*

$$v_a \wedge u_d \leq l \leq w_a \vee u_d$$

donde $a = k(0)$ y $d = l(a) = l(k(0))$.

Demostración. Sean $j, k \in NA$ y $l = (k \succ j)$. Damos

$$a = k(0) \qquad d = l(a) = (k \succ j)(a) = (k \succ j)(k(0)) = ((k \succ j) \circ k)(0)$$

Sea $x \in A$ entonces

$$u_d(x) = d \vee x \leq l(a) \vee x \leq l(a \vee x) = l \circ u_a(x) = (l \vee u_a)(x)$$

La primera desigualdad se da porque l es un núcleo y por tanto infla y es monótono. La última igualdad se da por el lema 1.3.31. Lo anterior ocurre para cualquier $x \in A$ entonces $u_d \leq l \vee u_a$. Como sabemos que los u-núcleos y los v-núcleos son complementarios, ver lema 1.3.31, podemos decir los siguiente:

$$v_a \wedge u_d \leq (l \vee u_a) \wedge v_a = (l \wedge v_a) \vee id = l \wedge v_a \leq l$$

Todavía falta probar otra desigualdad. Para esto observemos que

$$a \leq (l \wedge v_d)(a) = l(a) \wedge (d \succ a) = d \wedge (d \succ a) = d \wedge a \leq a$$

Esto quiere decir que $(l \wedge v_d)(a) = a$ que es equivalente por lema 1.3.38 a que $l \wedge v_d \leq w_a$. Usando otra vez el lema 1.3.31 junto con la desigualdad anterior tenemos que

$$l \leq (l \vee u_d) = (l \vee u_d) \wedge tp = (l \wedge v_d) \vee u_d \leq w_a \vee u_d$$

$\square$

Lema 2.2.8. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$ si $j \in NA$ y $a \in A_j$ entonces*

i) $(w_a \succ j) = (v_a \wedge u_d) \vee j = (v_a \vee j) \wedge (j \vee u_d)$

ii) $((w_a \succ j) \succ j) = v_d \vee j \vee u_a = w_{d \succ a}$

iii) $w_a \vee (w_a \succ j) = w_a \vee u_d = w_b$

Donde $d = cbd_j(a) = (w_a \succ j)(a)$ y $b = w_a(d)$.

Demostración. Sean $j \in NA$ y $a \in A_j$. Damos $d = cbd_j(a)$ que por el lema2.1.9 y como a es un punto fijo de j, también es igual a $(w_a \succ j)(a)$. Consideramos también a $b = w_a(d)$. Para probar la igualdad del primer inciso como sabemos que $a = w_a$ y además tomamos $l = (w_a \succ j)$, entonces $l(a) = d$. Ahora bien, usando la primera desigualdad del lema 2.2.7 y sacando supremos con j tenemos

$$(v_a \wedge u_d) \vee j \leq l \vee j \leq l = w_a \succ j$$

Observa que las hipótesis del lema 2.2.7 sí se cumplen e hicimos coincidir los nombres de los núcleos y elementos de A. Por otro lado, usando la segunda desigualdad de 2.2.7, $l \leq w_a \vee u_d$, tenemos que

$$l = l \wedge (w_a \vee u_d) = (l \wedge w_a) \vee (l \wedge u_d) = (j \wedge w_a) \vee (l \wedge u_d) \leq j \vee (l \wedge u_d) \leq j \vee u_d$$

donde la tercera igualdad se da por propiedades de la implicación pues $l \wedge w_a = (w_a \succ j) \wedge w_a = j \wedge w_a$. La primera desigualdad es cierta pues como a es un punto fijo de j, entonces, por lema 1.3.38, $j \leq w_a$. Las segunda desigualdad se da simplemente porque $l \wedge u_d \leq u_d$. Además por lema 1.3.38, $u_a \leq w_a$ pues $u_a(a) = a$. Entonces esto nos dice que

$$l \wedge u_a \leq l \wedge w_a = (w_a \succ j) \wedge w_a = w_a \wedge j \leq j$$

así, esta desigualdad y el lema 1.3.31 nos da

$$l \leq l \vee v_a = (l \vee v_a) \wedge tp = (l \vee v_a) \wedge (u_a \vee u_a) = (l \wedge u_a) \vee v_a = j \vee v_a$$

Sabemos hasta ahora que $l \leq j \vee u_d$ y $l \leq j \vee v_a$, entonces

$$l \leq (j \vee u_d) \wedge j \vee v_a = (v_a \wedge u_d) \vee j$$

Finalmente, falta la otra desigualdad para llegar a la igualdad que buscamos pero ésta es inmediata pues $j \leq l$ y por lema 2.2.7, $v_a \wedge u_d \leq l$ y por tanto

$$(w_a \succ j) = l = (v_a \wedge u_d) \vee j$$

Para probar ii), como por el inciso anterior $(w_a \succ j) = (v_a \wedge u_d) \vee j$ entonces, usando 1.1.12

$$\begin{aligned}(w_a \succ j) \succ j = ((v_a \wedge u_d) \vee j) \succ j = ((v_a \wedge u_d) \succ j) \wedge (j \succ j) = \\ = ((v_a \wedge u_d) \succ j) \wedge tp = ((v_a \wedge u_d) \succ j)\end{aligned}$$

Sólo nos falta ver que $((v_a \wedge u_d) \succ j) = v_d \vee u_a \vee j$ y esto probaría la primera igualdad. Para esto observemos que $(v_a \wedge u_d)$ y $(v_d \vee u_a)$ son complementarios

$$(v_a \wedge u_d) \wedge (v_d \vee u_a) = v_a \wedge ((u_d \wedge v_d) \vee (u_d \wedge u_a)) = v_a \wedge u_a = id$$

$$(v_a \wedge u_d) \vee (v_d \vee u_a) = ((v_a \vee v_d) \wedge (v_d \vee u_d)) \vee u_a = v_a \vee u_a = tp$$

en estas igualdades usamos el lema 1.3.31 y que si $a \leq d$ entonces $u_a \leq u_d$ y $v_d \leq v_a$. Si consideramos a los complementarios $h = v_a \wedge u_d$ y $k = v_d \vee u_a$, j cumple que $h \wedge j \leq j$ y $h \wedge k = id \leq j$. Así, usando la propiedad característica de la implicación para estas dos desigualdades tenemos que

$$j \leq (h \succ j) \qquad \text{y} \qquad k \leq (h \succ j)$$

Por lo tanto, $k \vee j \leq h \succ j$.

Por otro lado, si tomamos $m \in NA$ tal que $m \wedge h \leq j$ entonces

$$m \leq m \vee h = (m \wedge h) \vee k \leq j \vee k$$

La igualdad se debe a la distributividad y a que k y h son complementarios. Esta desigualdad pasa para cualquier $m \in NA$ tal que $m \wedge h \leq j$, entonces por como se construye la implicación

$$(h \succ j) = \bigvee \{m \in NA \mid m \wedge h \leq j\} \leq j \vee k$$

Así, $(h \succ j) = k \vee j$ que era lo que faltaba probar para la primera igualdad de ii). Para la segunda igualdad observemos que $w_a \leq ((w_a \succ j) \succ j)$ y por el lema 1.3.39, $(w_a \succ j) \succ j = w_b$ donde

$$b = ((w_a \succ j) \succ j)(0) = (v_d \vee j \vee u_a)(0) = (v_d \circ j \circ u_a)(0) = (d \succ j(a)) = (d \succ a)$$

Por lo tanto, $((w_a \succ j) \succ j) = w_{d \succ a}$.

Si queremos probar iii), del primer inciso de este lema ya tenemos que $(w_a \succ j) = (v_a \wedge u_d) \vee j$ entonces tomando supremos con w_a

$$(w_a \succ j) \vee w_a = (v_a \wedge u_d) \vee j \vee w_a = (v_a \wedge u_d) \vee w_a = (v_a \vee w_a) \wedge (u_d \vee w_a) = u_d \vee w_a$$

donde la segunda igualdad se debe a que $j \leq w_a$ que por el lema 1.3.38 es equivalente a que $a \in A_j$. La última igualdad se da por que $u_a \leq w_a$ pues por el lema 1.3.38 $u_a(a) = a$ y entonces $tp = v_a \vee u_a \leq v_a \vee w_a \leq tp$. Por lo tanto, $(w_a \succ j) \vee w_a = u_d \vee w_a$. Además, como $w_a \leq u_d \vee w_a$, un uso del lema 1.3.39 nos dice que $u_d \vee w_a = w_b$, donde

$$b = (u_d \vee w_a)(0) = (w_a \vee u_d)(0) = (w_a \circ u_d)(0) = w_a(d)$$

donde la tercer igualdad se da por el lema 1.3.31

□

Corolario 2.2.9. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$, entonces*

$$(w_a \succ j) = j \vee u_d$$

para $a = j(0)$ y $d = cbd_j(a)$.

Demostración. Si $j \in NA$ y $a = j(0)$ entonces

$$tp = v_a \vee u_a \leq v_a \vee j$$

pues por el lema 1.3.35 $u_a \leq j$ y u_a y v_a son complementarios. Entonces, usando el inciso i) del lema 2.2.8 obtenemos

$$(w_a \succ j) = (v_a \vee j) \wedge (j \vee u_d) = j \vee u_d$$

que es lo que queríamos probar. □

Lema 2.2.10. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a \in A$ entonces*

$$u_a = w_a \Leftrightarrow cbd(a) = 1$$

Demostración. Supongamos que $u_a = w_a$ entonces $\neg w_a = \neg u_a = v_a$. Además por el inciso i) del lema 2.2.8, con $j = id$ y $d = cbd(a)$,

$$\neg w_a = (w_a \succ id) = (v_a \wedge u_d) \vee id = v_a \wedge u_d$$

entonces $v_a = \neg w_a = v_a \wedge u_d$. Esto implica que $v_a \leq u_d$. Al evaluar en a obtenemos

$$1 = (a \succ a) = v_a(a) \leq u_d(a) = a \vee cbd(a) = a$$

donde la última igualdad es cierta por la definición de derivada.

Para la otra implicación, suponemos que $cbd(a) = 1$. Por la observación 1.3.36 basta ver que $w_a \leq u_a$. Si usamos el inciso ii) del lema 2.2.8 para $j = id$ y $d = cbd(a)$ tenemos que

$$\neg\neg w_a = ((w_a \succ id) \succ id) = v_d \vee id \vee u_a = v_d \vee u_a$$

Además $v_d = id$ pues $d = cbd(a) = 1$. Por lo tanto,

$$\neg\neg w_a = u_a \leq w_a \leq \neg\neg w_a$$

donde la primera desigualdad se da por 1.3.36 y la segunda por 1.1.18. $\square$

Definición 2.2.11. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$ decimos que $k \in NA$ es*

- *j-complementado si*

$$j \leq k \qquad y \qquad k \vee (k \succ j) = tp$$

- *j-regular si*

$$j \leq k \qquad y \qquad k = ((k \succ j) \succ j)$$

Observa que si $j = id$ obtenemos las definiciones de regular y complementado que definimos en 1.1.17 para el marco NA.

Lema 2.2.12. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, si $a \in A$ y $j \in NA$ tal que $j \leq w_a$ entonces son equivalentes la siguientes condiciones:*

i) $a \lessdot cbd_j(a)$

ii) w_a *es j-complementado*

iii) w_a *es j-regular*

Además si se cumple alguna de las condiciones anteriores resulta que $w_a = v_a \vee j \vee u_a = w_{d \succ a}$.

Demostración. Para i)$\Leftrightarrow$ ii) suponemos que $a \lessdot cbd_j(a)$ y llamemos $d = cbd_j(a)$. Como por hipótesis tenemos que $j \leq w_a$ entonces

$$j(a) \leq w_a(a) = (a \succ a) \succ a = 1 \succ a = a$$

y como, j infla no queda que $j(a) = a$. Es decir, $a \in A_j$ y podemos aplicar el lema 2.2.8 para obtener

$$w_a \vee (w_a \succ j) = w_b \qquad \text{con } b = w_a(d)$$

Así,

$$(w_a \vee (w_a \succ j))(0)) = w_b(0) = ((0 \succ w_a(d)) \succ w_a(d)) = (1 \succ w_a(d)) = w_a(d)$$

Pero $((d \succ a) \succ a) = (a \succ a) = 1$ pues por hipótesis $d \succ a = a$. Por lo tanto,

$$(w_a \vee (w_a \succ j)) = tp$$

es decir, w_a es j-complementado.

Para la siguiente implicación suponemos que w_a es j-complementado y buscamos probar que w_a es j-regular, es decir que $w_a = ((w_a \succ j) \succ j)$. Para esto observemos que $((w_a \succ j) \succ j) = ((w_a \succ j) \succ j) \wedge tp = ((w_a \succ j) \succ j) \wedge (w_a \vee (w_a \succ j))$ pues w_a es j-complementado. Entonces distribuyendo y tomando en cuenta las propiedades de la implicación 1.1.12, obtenemos

$$\begin{aligned} ((w_a \succ j) \succ j) &= ((w_a \succ j) \succ j) \wedge w_a) \vee ((w_a \succ j) \succ j) \wedge (w_a \succ j) = \\ &= w_a \vee ((w_a \succ j) \wedge j) = w_a \vee j = w_a \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque $j \leq w_a$ y así queda probada la segunda implicación.

Para la ultima implicación, iii)$\Rightarrow$ i), suponemos que w_a es j- regular. Como $a \in A_j$ pues $j \leq w_a$ podemos hacer uso del inciso ii) del lema 2.2.8 y obtenemos que

$$w_a = ((w_a \succ j) \succ j) = w_{d \succ a}$$

donde $d = cbd_j(a)$ lo que implica que $a = w_a(0) = w_{d \succ a}(0) = d \succ a$. Por lo tanto, $a \lessdot d$.

Para terminar la prueba falta mostrar que $w_a = v_a \vee j \vee u_a = w_{d \succ a}$ pero esto es inmediato del lema 2.2.8 y de que w_a sea j- complementado. $\square$

Si, para el lema anterior, damos $j = id$ entonces obtenemos un lema de Beazer y Macnab que se encuentra en [BM79].

Definición 2.2.13. *Para $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$ definimos a los siguientes conjuntos*

$$a \in B_j \Leftrightarrow j(a) = a \qquad y \qquad \mathcal{B}_j = \{w_a \mid a \in B_j\}$$

$$a \in C_j \Leftrightarrow j(a) = a \lessdot cbd_j(a) \qquad y \qquad \mathcal{C}_j = \{w_a \mid a \in B_j\}$$

Observación 2.2.14. *Observemos que $a \in B_j \Leftrightarrow j(a) = a \Leftrightarrow j \leq w_a$. También notemos que por el lema anterior 2.2.12 $a \in C_j \Leftrightarrow a \lessdot cbd_j(a) \Leftrightarrow w_a$ es j-complementado. Además es inmediato de la definición que $C_j \subseteq B_j$.*

Teorema 2.2.15. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $Cbd(j) = tp$

ii) $B_j = C_j$

iii) $a \lessdot cbd_j(a)$ *para toda* $a \in A_j$

Demostración. Para la primera implicación, i)⇒ ii), suponemos $Cbd(j) = tp$. Como $C_j \subseteq B_j$ basta ver que $B_j \subseteq C_j$. Para esto, tomamos $a \in B_j$. Entonces $j(a) = a$ que por lema1.3.38 implica que $j \leq w_a \leq tp$. Pero por el lema 2.1.4 sabemos que $[j, Cbd(j) = tp]$ es booleano, lo que quiere decir que w_a tiene complemento en este intervalo, digamos k. Además k , por la observación2.1.1 debe ser de la forma $k = (w_a \succ j) \wedge tp = (w_a \succ j)$. Así $tp = w_a \vee k = w_a \vee (w_a \succ j)$, es decir, w_a es j- complementado. Por lo tanto, por la observación anterior 2.2.14, $a \in C_j$.

Para la siguiente implicación suponemos que $B_j = C_j$ y tomamos $a \in A_j$. Queremos probar que $a \lessdot cbd_j(a)$. Sabemos que $a \in A_j = B_j = C_j$ entonces por definición de C_j,$a \lessdot cbd_j(a)$.

Finalmente, suponemos que $a \lessdot cbd_j$ para cualquier $a \in A_j$ y queremos ver que $Cbd(j) = tp$. Tomamos $a = Cbd(j)(0)$. Sabemos que $a \leq j(a)$ pues j infla por ser un núcleo y $j \leq Cbd(j)$ pues Cbd es un prenúcleo en NA y por tanto infla. Así, por los lemas 2.1.7 y 2.1.11

$$j(a) \leq Cbd(j)(a) = cbd_j^{\infty}(a) = cbd_j^{\infty}(cbd_j^{\infty}(0)) = cbd_j^{\infty}(0) = Cbd(j)(0) = a$$

entonces usando nuestra hipótesis y sabiendo que $a \in A_j$, tenemos que

$$a \leq cbd_j(a) \leq Cbd(j)(a) = a$$

Por lo tanto, por el lema 2.1.5, $a \lessdot a$. Pero esto implica que $a = 1$ pues $1 = (a \succ a) = a$. Consecuentemente $Cbd(j) = tp$ ya que $Cbd(j)(0) = 1$. $\square$

Este último teorema es una versión de la caracterización original que dan Beazer y Macnab en [BM79]. De hecho para el siguiente teorema tomamos $j = id$ y obtenemos la caracterización original. Fueron estos dos autores los que dieron la primera caracterización de cuándo NA es booleano.

Teorema 2.2.16. *Para cualequier $A \in \mathfrak{Frm}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *NA es booleano*

ii) *Todo w-núcleo es complementado, es decir, todo w_a con $a \in A$ es complementado.*

iii) *$a \lessdot cbd_j(a)$ para toda $a \in A$*

Demostración. Observemos que NA es booleano si y sólo si $Cbd(j) = tp$ por el lema 2.1.13. Además, $A = A_{id} = B_{id} = C_{id}$ si y sólo si, por la observación 2.2.14, todo w-núcleo es complementado. Una vez dicho esto , usando el teorema 2.2.15 la prueba es inmediata. □

Lema 2.2.17. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$, para toda $a \in A$ se cumple que*

$$(\forall a \leq x \in A)(x \lessdot cbd_j(x)) \Leftrightarrow \delta(a) = 1$$

Demostración. Sea $a \in A$. Tomamos $j = u_a$. Si consideramos que $\delta(a) = 1$ entonces esto pasa si y solo si

$$\delta \circ u_a(0) = \delta(a \vee 0) = \delta(a) = 1$$

Además la igualdad anterior es equivalente a que

$$tp = \delta \circ u_a = \delta \vee u_a = Cbd(id) \vee u_a = Cbd(id \vee u_a) = Cbd(u_a)$$

donde la segunda igualdad se da por el lema 1.3.31 y la cuarta es cierta por el lema 2.1.12. Ahora, por el lema 2.2.15 la igualdad anterior equivale a que $(\forall x \in A_{u_a})(x \lessdot cbd_{u_a}(x))$. Pero recordemos que desde $A_{u_a} = [a, 1]$. Por lo tanto, la afirmación anterior queda como:

$$(\forall a \leq x \in A)(x \lessdot cbd_{u_a}(x))$$

donde, como $a \leq x$ y $A_{u_a} = [a, 1]$,

$$cbd_{u_a}(x) = \bigwedge \{y \in A \mid a \leq y \text{ y } a \vee x \lessdot y\}\} = \bigwedge \{y \in A \mid x \lessdot y\} = cbd(x)$$

Todo lo anterior es equivalente a decir que $(\forall a \leq x \in a)(x \lessdot cbd(x))$. □

Lema 2.2.18. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$*

i) la relación $\leq$ en A_j tiene la condición de cadena descendente (CCD)

ii) $Cbd(j) = tp$

iii) la relación $\lessdot$ en A_j tiene CCD

Se cumple i)$\Rightarrow$ ii)$\Rightarrow$ iii).

Demostración. Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$. Supongamos que el orden $\leq$ en A_j tiene la CCD, queremos probar que $Cbd(j) = tp$. Consideramos $a = Cbd(j)(0)$. Entonces $a \leq j(a)$ y $j \leq Cbd(j)$ pues Cbd y j son operadores que inflan. Así

$$j(a) \leq Cbd(j)(a) = Cbd(j)(Cbd(j)(0)) = a$$

donde la última igualdad se da porque $CBd(j) = cbd_j^{\infty}$ que es un núcleo y por tanto idempotente. Por lo tanto, $a = j(a)$, es decir $a \in A_j$. Para que quede la implicación nos basta probar que $a = 1$.

Tomemos al siguiente conjunto

$$D_j(a) = \{\ x \in A_j \mid a \lessdot x\}$$

Observa que $cbd_j(a) = \bigwedge D_j(a)$. Además, $D_j(a)$ es cerrado bajo ínfimos pues para cualesquiera $x, y \in D_j(a)$ por el lema 2.1.4, $a \lessdot x \wedge y$. Afirmamos que $D_j(a)$ tiene un elemento mínimo. Pues si suponemos que no, podemos tomar un elemento del conjunto, x_0, ya que al menos $1 \in D_j(a)$ y como este elemento no puede ser el mínimo tomamos uno menor que el, digamos x_1 y así podemos ir formando una cadena descendente:

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq ...$$

donde por hipótesis existe un x_n para la cual $x_{n+t} = x_n$ para toda t natural. Lo cual es una contradicción a suponer que $D_j(a)$ no tiene mínimo. Por lo tanto, hay un $x \in D_j(a)$ que es mínimo. Pero como $cbd_j(a)$ es el ínfimo del conjunto, $x = cbd_j(a) \in D_j(a)$. Esto quiere decir que

$$a \lessdot cbd_j(a) \leq Cbd(j)(a) = a$$

Entonces $a \lessdot a$ lo que quiere decir que $a = 1$. Por lo tanto, $a = Cbd(j)(0) = 1$, equivalentemente $Cbd(j) = tp$.

Para la siguiente implicación suponemos que $Cbd(j) = tp$. Debemos probar que la relación $\lessdot$ en A_j tiene la CCD. Para esto tomamos una ω-cadena descendente en A_j con el orden $\lessdot$

$$X = \{x_r \in \mid r < \omega\} \qquad x_{r+1} \lessdot x_r \in A_j$$

Consideremos $x = \bigwedge X$. Por el lema 2.1.4, como $x \leq x_{r+1} \lessdot x$, se cumple que $x \lessdot x_r$ para todo $r < \omega$. Por definición de derivada, $cbd(x) \leq x_r$ para cualquier $r < \omega$. Así

$$x \leq cbd_j(x) \leq \bigwedge X = x$$

Ahora, usando la hipótesis, nos queda que

$$x = cbd_j^{\infty}(x) = Cbd(j)(x) = 1$$

pero como x es el ínfimo de X, sólo puede ocurrir que $X = 1$ y por tanto se cumple la CCD. □

Ahora pasaremos a analizar a los conjunto $\mathcal{C}_j$ y $\mathcal{D}_j$ pues nos arrojaran información valiosa.

Observación 2.2.19. *Observa que, para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$, por el lema 2.2.12, podemos ver a $\mathcal{C}_j$ de la siguiente manera:*

$$\mathcal{C}_j = \{w_a \mid j(a) = a \lessdot cbd_j(a)\} = \{v_d \vee j \vee u_a \mid a \in A_j, d = cbd_j(a)\}$$

Teorema 2.2.20. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$. Para cualquier $j \in NA$ se cumple que*

$$(Cbd(j) \succ j) = \bigwedge \mathcal{C}_j$$

Demostración. Como sabemos que $Cbd(j) = cbd_j^{\infty}$ usando el lema 1.3.47 tenemos que

$$Cbd(j) = cbd_j^{\infty} = \bigvee \{u_d \wedge v_a \mid a \in A, d = cbd_j(a)\}$$

Así, haciendo uso del lema 1.1.12

$$\begin{aligned}(Cbd(j) \succ j) = \bigvee \{u_d \wedge v_a \mid a \in A, d = cbd_j(a)\} \succ j = \\ = \bigvee \{(u_d \wedge v_a) \succ j \mid a \in A, d = cbd_j(a)\}\end{aligned}$$

Además, $((u_d \wedge v_a) \succ j) = v_d \vee j \vee u_a$ para cualquier $A \in A$. Esta igualdad no hace falta probarla pues la usamos y probamos en el inciso ii) del lema 2.2.8. Entonces quedaría que

$$(Cbd(j) \succ j) = j = \bigvee \{v_d \vee j \vee u_a \mid a \in A, d = cbd_j(a)\}$$

También observemos que como j es un núcleo en particular idempotente:

$$d = cbd_j(a) = \bigwedge \{x \in A_j \mid j(a) \lessdot x\} = \bigwedge \{x \in A_j \mid j(j(a)) \lessdot x\} = cbd_j(j(a))$$

Además $j \vee u_a = j \vee u_{j(a)}$ pues para cualquier $x \in A$, $(j \vee u_a)(x) = j(a \vee x) = j(j(a) \vee x) = (j \vee u_a)(x)$. La segunda igualdad se da por definición de supremos y porque j es núcleo y recordemos que los supremos se calculan así por el lema 1.3.31. Así en vez de fijarnos en las $a \in A$, tomamos las $a \in A_j$

$$\begin{aligned}(Cbd(j) \succ j) &= \bigvee \{v_d \vee j \vee u_a \mid a \in A, d = cbd_j(a)\} = \\ &= \bigvee \left\{v_d \vee j \vee u_{j(a)} \mid a \in A, d = cbd_j(j(a))\right\} = \\ &= \bigvee \{v_d \vee j \vee u_a \mid a \in A_j, d = cbd_j(a)\} = \\ &= \bigvee \mathcal{C}_j\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la observación anterior2.2.19. □

Corolario 2.2.21. *Para $A \in \mathfrak{Frm}$, $j \in NA$ y $j \lessdot Cbd(j)$ si y sólo si $j = \bigwedge \mathcal{C}_j$.*

Demostración. Usando el lema anterior

$$j = \bigwedge \mathcal{C}_j = (Cbd_j \succ j) \Leftrightarrow j \lessdot Cbd(j)$$

□

Observación 2.2.22. *Notemos que θ es el menor núcleo tal que $Cbd(\theta) = \theta$. Esto se debe a que $\theta = \delta(id) = CBD(Id)(id) = Cbd^{\infty}(id)$ entonces*

$$Cbd(\theta) = Cbd(Cbd^{\infty}(id)) = Cbd^{\infty}(id) = \theta$$

Además, si $j \in NA$ tal que $Cbd(j) = j$, como j y θ son puntos fijos de Cbd que es un prenúcleo, se cumple que

$$\theta = Cbd^{\infty}(id) \leq Cbd^{\infty}(j) = j$$

Lema 2.2.23. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, $C_\theta = \{1\}$.*

Demostración. Sea $a \in C_\theta$, entonces $\theta(a) = a$ y $a \lessdot cbd_\theta(a)$. Así por el lema 2.1.11 obtenemos estas desigualdades

$$a \lessdot cbd_\theta(a) \leq Cbd(\theta)(a) = Cbd(Cbd^{\infty}(id)(a)) = Cbd^{\infty}(id)(a) = \theta(a) = a$$

Por lo tanto, por 2.1.5, $a \lessdot a$, lo que implica que $a = 1$ y así queda probado el resultado. □

Teorema 2.2.24. *Si tomamos $A \in \mathfrak{Frm}$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *N^2A es booleano*

ii) Para cualquier $j \in NA$, $j = \bigwedge \mathcal{C}_j$

iii) Para cualquier $j \in NA$, si $C_j = \{1\}$ entonces $j = tp$.

Demostración. Para la primera implicación suponemos que N^2A es booleano y tomamos un $j \in NA$. Por el lema 2.2.16 usándolo para el marco NA, tenemos que $j \lessdot Cbd(j)$ para cualquier $j \in NA$. Entonces por el lema 2.2.20

$$j = (Cbd(j) \succ j) = \bigwedge \mathcal{C}_j$$

para cualquier $j \in NA$.

Ahora supongamos que para todo $j \in NA$, $j = \bigwedge \mathcal{C}_j$. Tomamos $j \in NA$ tal que $C_j = \{1\}$, y queremos ver que entonces $j = tp$. Si $C_j = 1$ entonces $\mathcal{C}_j = \{w_1\} = \{tp\}$. Pero, por hipótesis, nos queda que

$$j = \bigwedge \mathcal{C}_j = \bigwedge tp = tp$$

que prueba ii)$\Rightarrow$ iii).

Finalmente, par a la ultima implicación, suponemos iii) y queremos probar que N^2A es booleano. Para esto nos tomamos al núcleo θ que por el lema 2.2.23 sabemos que $C_\theta = \{1\}$ entonces, por hipótesis, $\theta = tp$. Pero esto quiere decir

$$tp = \theta = CBD(Id)(id) \Rightarrow Cbd(Id) = Tp$$

que por el lema2.1.4 nos dice que N^2A es booleano. $\square$

Lema 2.2.25. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ entonces*

$$\neg d = 0 \Leftrightarrow w_0 = v_d$$

donde $d = cbd(0)$.

Demostración. Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $d = cbd(0)$ entonces

$$\neg d = 0 \Leftrightarrow (d \succ 0) = 0 \Leftrightarrow 0 \lessdot d \Leftrightarrow w_0 \text{ es } id\text{-complementado} \Leftrightarrow w_0 \text{ es } id\text{-regular}$$

Las últimas dos equivalencias se deben al lema 2.2.12. Pero que w_0 sea id-regular quiere decir que

$$w_0 = ((w_0 \succ id) \succ id) = v_d \vee id \vee u_0 = v_d \vee u_0 = v_d \vee id = v_d$$

donde la segunda igualdad se da por el lema 2.2.8. $\square$

El lema anterior de alguna forma nos está diciendo como calcular la doble negación bajo ciertas condiciones en el marco A pues:

$$\neg d = 0 \Leftrightarrow w_0 = v_d \Leftrightarrow (\neg\neg x = (d \succ x))(\forall x \in A)$$

Ahora si tomamos al marco NA y $D = Cbd(id)$,

$$\neg D = id \Leftrightarrow W_{id} = V_D$$

Aquí uso W y V mayúsculas pues $W_{id}, V_D \in N^2 A$. Es decir,

$$\neg\delta = id \Leftrightarrow \neg\neg j = (\delta \succ j) \qquad \forall j \in NA$$

Observa que este lema se puede seguir levantando para otros niveles del ensamble, de hecho más adelante obtenemos algo muy interesante para $N^2 A$.

Lema 2.2.26. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, $\neg\delta = \bigwedge \mathcal{D}$. Donde $\mathcal{D} = \mathcal{C}_{id}$.*

Demostración. Hay dos pruebas para este lema. La primera es simplemente un uso del lema 2.2.20 pues

$$\neg\delta = (Cbd(id) \succ id) = \bigwedge \mathcal{C}_j = \bigwedge D$$

La otra prueba se da porque por el 1.3.47

$$\delta = \bigvee \{u_d \vee v_a \mid a \in A, d = cbd(a)\}$$

entonces

$$\begin{aligned}\neg\delta &= \bigvee \{u_d \vee v_a \mid a \in A, d = cbd(a)\} \succ id = \\ &= \bigwedge \{u_d \vee v_a \mid a \in A, d = cbd(a)\} = \bigwedge \mathcal{D}\end{aligned}$$

$\square$

Observación 2.2.27. *Observa que por el lema anterior 2.2.28 podemos obtener la siguiente información*

$$\neg\delta = \bigwedge \mathcal{D} = \bigwedge \{u_a \vee v_d \mid a \in A, d = cbd(a)\} \leq \bigwedge \{u_a \mid a \in A, cbd(a) = 1\}$$

La desigualdad se da porque el conjunto de la derecha considera a menos elementos, sólo a aquellos que cumplan que $cbd(a) = 1$ y por lo tanto el ínfimo es mayor. Entonces para cualquier $x \in A$,

$$(\neg\delta)(x) \leq \bigwedge \{a \vee x \mid a \in A, cbd(a) = 1\} \leq \bigwedge \{a \mid a \in A, cbd(a) = 1, x \leq a\}$$

La segunda desigualdad se da pues el conjunto de la izquierda contiene al de la derecha. Además nota que este cálculo se puede elevar al siguiente nivel, es decir en vez de tomar δ consideramos Δ.

Teorema 2.2.28. *Si $A \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$ entonces para N^2A se tiene que*

$$\neg\Delta = Id$$

y entonces

$$\neg\neg J = (\Delta \succ J)$$

para cualquier $J \in N^2A$.

Demostración. Primero veamos que $\neg\Delta = Id$. Para esto tomamos $j \in NA$ y por 2.2.27 calculamos lo siguiente:

$$(\neg\Delta)(j) \leq \bigwedge\{j \in NA \mid j \leq k, Cbd(j) = tp\} \leq \bigwedge\{w_a \mid a \in A_j\} = j$$

donde la segunda desigualdad se da porque para cualquier w_a, por el lema 2.2.1, $Cbd(w_a) = tp$ y además $j \leq w_a$ si y sólo si $j(a) = a$, es decir $a \in A_j$. La última igualdad es por el lema 1.3.42. Entonces resulta que $(\neg\Delta)(j) \leq j$ y $j \leq (\neg\Delta)(j)$ porque $\neg\Delta \in N^2A$. Por lo tanto, $\neg\Delta = Id$. Ahora, aplicando el lema 2.2.25 al marco N^2A obtenemos que

$$\neg\neg J = (\Delta \succ J) \qquad \forall J \in N^2A$$

□

El lema 2.2.25 y el teorema 2.2.28 resultan muy interesantes pues nos están diciendo que la doble negación se puede calcular como un una sola implicación. Lo que es todavía más sorprendente es que para N^2A siempre se tiene que $\neg\Delta = Id$. Esto es importante pues si Δ es regular por 2.2.28

$$\Delta\neg\neg\Delta = \neg Id = Tp$$

lo que quiere decir por 2.1.8 y la definición de Δ que N^2A es booleano. Es decir, si $\Delta es regular$ entonces N^2A es booleano. Este resultado se puede seguir levantando para los demás niveles. Sin embargo, no es cierto que si δ es regular, entonces NA es booleano, y la razón es porque el teorema 2.2.28 no es cierto para NA, lo más que podemos decir es 2.2.25. En este sentido la pregunta sería, ¿por qué a partir de este nivel es cierto el lema 2.2.28? O si vamos un poco más lejos sería útil también preguntarnos , ¿cuándo podemos decir que un marco es isomorfo al ensamble de otro marco? Estas preguntas no las considera Harold Simmons en su artículo y hasta ahora no se tiene respuesta.

Capítulo 3

Los operadores TW

Este capítulo lo dedicamos a unos operadores que Todd Wilson en el capítulo 6 de su tesis doctoral [Wil94] los llama operadores regulares. Harold Simmons en la sección 6 de [Sim06] les dice "twops"nosotros en este trabajo los llamaremos operadores TW en honor a Todd Wilson. A pesar de que estos dos autores presentan a los operadores TW y tienen los mismos resultados yo sigo el orden y la notación de Harold Simmons. La relevancia de estos operadores es que forman un álgebra booleana completa que es isomorfa a $(N^2A)_{\neg\neg}$. Se desarrollará esto y más propiedades de los operadores TW a lo largo del capítulo.

Definición 3.0.1. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$. Un operador TW es un función en A*

$$f\colon A \to A$$

tal que para cualesquiera $a, b \in A$,

$$f(b \succ a) = (b \succ f(a))$$

Y así queda descrito el siguiente conjunto

$$TA = \{f\colon A \to A \mid f \text{es un operador TW}\}$$

Observación 3.0.2. *Nota que si $A \in \mathfrak{Frm}$ para cualquier $a \in A$, v_a es un operador TW pues*

$$\begin{aligned} v_a(y \succ x) = (a \succ (y \succ x)) = ((a \wedge y) \succ x) = ((y \wedge a) \succ x) = \\ = (y \succ (a \succ x)) = (y \succ v_a(x)) \end{aligned}$$

La segunda y tercera igualdad se dan porque, en general, por la propiedad característica de la implicación

$$\begin{aligned} (a \succ (y \succ x)) = & \bigvee \{c \in A \mid a \wedge c \leq (y \succ x)\} = \bigvee \{c \in A \mid a \wedge c \wedge y \leq x\} = \\ = & ((a \wedge y) \succ x) \end{aligned}$$

para cualesquiera $x, y, a \in A$.

En particular $id = v_1$ y $v_0 = tp$ son operadores TW.

Lema 3.0.3. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$. Si $a, c \in A$ y $a \leq c$, entonces*

$$((c \succ a) \succ c) = ((c \succ a) \succ a)$$

Demostración. Consideremos $x = ((c \succ a) \succ c)$, entonces, usando el lema1.1.12 tenemos que

$$x \wedge (c \succ a) = ((c \succ a) \succ c) \wedge (c \succ a) = (c \succ a) \wedge c \leq c$$

y

$$x \wedge (c \succ a) \leq (c \succ a)$$

Así

$$x \wedge (c \succ a) \leq c \wedge (c \succ a) = c \wedge a \leq a$$

Pero esto pasa si y sólo si, por la propiedad de la implicación, $x \leq ((c \succ a) \succ a)$. Además, si tomamos en cuenta que $a \leq c$ entonces $(y \succ a) \leq (y \succ c)$ para cualquier $x \in A$ en particular $y = (c \succ a)$. Por lo tanto

$$((c \succ a) \succ c) = ((c \succ a) \succ a)$$

□

Lema 3.0.4. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $f \in TA$, entonces*

$$w_a(f(a)) = f(a) \qquad \textit{para cualquier } a \in A$$

Además f es idempotente e infla.

Demostración. Consideremos f un operador TW en A. Sabemos que $f(a) \leq w_a(f(a))$ pues $w_a \in NA$ y por lo tanto infla. Nos falta probar la otra desigualdad. Notemos que

$$(w_a(f(a)) \succ f(a)) = f(w_a(f(a)) \succ a) = f(f(a) \succ a) = (f(a) \succ f(a)) = 1$$

Observa que la segunda igualdad se da pues para cualquier $x \in A$ por 1.1.12

$$x \leq w_a(x) \Rightarrow (w_a(x) \succ a) \leq (x \succ a)$$

y

$$w_a(x) \wedge (x \succ a) = ((x \succ a) \succ a) \wedge (x \succ a) = (x \succ a) \wedge a \leq a$$

que es equivalente a que $(x \succ a) \leq (w_a(x) \succ a)$.

Ahora bien, por la propiedad característica de la implicación, como $(w_a(f(a)) \succ f(a)) = 1$, entonces $w_a(f(a)) = w_a(f(a)) \wedge 1 \leq f(a)$.

Falta ver que f es un operador que infla. Nos tomamos $a \in A$, entonces $a \leq ((x \succ a) \succ a) = w_a(x)$ para cualquier $x \in A$. Así, $a \leq w_a(f(a)) = f(a)$.

Además si $a \in A$ por el lema anterior, 3.0.3,

$$f^2(a) = f(f(a)) = f(w_a(f(a))) = f((f(a) \succ a) \succ a) = ((f(a) \succ a) \succ f(a)) = \\ = ((f(a) \succ a) \succ a) = w_a(f(a)) = f(a)$$

Por lo tanto, f es idempotente. $\square$

Observación 3.0.5. *Si tomamos un marco $A \in \mathfrak{Frm}$ y cualesquiera $j \in NA$ y $f \in TA$ entonces por el lema 1.3.38*

$$j \leq w_{f(a)} \Leftrightarrow j(f(a)) = f(a)$$

Entonces si $j = w_a$, por el lema anterior $w_a \leq w_{f(a)}$.

Lema 3.0.6. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$, entonces TA es cerrado bajo composición y la composición es conmutativa.*

Demostración. Consideremos $f, g \in TA$. Entonces para cualesquiera $a, b \in A$,

$$(g \circ f)(b \succ a) = g(f(b \succ a) = g(b \succ f(a)) = (b \succ g(f(a))) = b \succ (g \circ f)(a)$$

Por lo tanto $g \circ f \in TA$.

Ahora, si $a \in A$ tomemos $x = g(f(a))$ y $y = f(g(a))$. Queremos probar que $x = y$. Usando el lema 3.0.4 tenemos que

$$x = g(f(a)) = g(w_a(f(a))) = g((f(a) \succ a) \succ a) = (f(a) \succ a) \succ g(a)$$

Así

$$x \wedge (f(a) \succ a) = ((f(a) \succ a) \succ g(a)) \wedge (f(a) \succ a) = (f(a) \succ a) \wedge g(a) \leq g(a)$$

y

$$x \wedge (f(a) \succ a) \wedge (g(a) \succ a) \leq g(a) \wedge (g(a) \succ a) = g(a) \wedge a \leq a$$

Usando la propiedad de la implicación y el lema3.0.4 esto es equivalente a que

$$x \wedge (g(a) \succ a) \leq (f(a) \succ a) \succ a = w_a(f(a)) = f(a)$$

Aplicando una vez más los resultados a esta desigualdad queda

$$x \leq ((g(a) \succ a) \succ f(a)) = f((g(a) \succ a) \succ a) = f(w_a(g(a))) = f(g(a)) = y$$

Obtuvimos que $x \leq y$. La otra desigualdad es análoga, solo se necesitan cambiar f por g y x por y al procedimiento anterior. $\square$

Así podríamos decir que $\langle TA, \circ\rangle$ es un monoide conmutativo donde cada elemento es idempotente.

Definición 3.0.7. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$. Si $f, g \in TA$,*

$$g \leq f \Leftrightarrow (\forall x \in A)(g(x) \leq f(x))$$

La $id = v_1$ es el menor elemento en TA y $tp = v_0$ es el mayor elemento en TA. El conjunto TA con este orden forma un conjunto parcialmente ordenado, $TA \in \mathcal{P}os$.

Lema 3.0.8. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $g, f \in TA$,*

$$g \leq f \Leftrightarrow (\forall a \in A)(w_{g(a)} = w_{f(a)})$$

Demostración. Supongamos que g y f son operadores TW tales que $g \leq f$, entonces para cualquier $a \in A$

$$f(a) \leq g(f(a)) \leq f^2(a) = f(a)$$

Por esta igualdad y el lema 3.0.6 resulta que

$$f(a) = g(f(a)) = f(g(a))$$

Así, usando 3.0.6,

$$w_{g(a)}(f(a)) = w_{g(a)}(f(g(a))) = f(g(a)) = f(a)$$

Entonces del lema 1.3.38 podemos decir que $w_{g(a)} \leq w_{f(a)}$.

Ahora supongamos que para cualquier $a \in A$, $w_{g(a)} \leq w_{f(a)}$. Si evaluamos estos dos núcleos en el 0, obtenemos que

$$g(a) = w_{g(a)}(0) \leq w_{f(a)}(0) = f(a)$$

Para cualquier $a \in A$. Por lo tanto, $g \leq f$. □

Poco a poco vamos viendo la estructura de TA. Con el siguiente lema queremos probar que es una retícula completa.

Lema 3.0.9. *Para $A \in \mathfrak{Frm}$, $TA \in \mathcal{P}os$ es cerrado bajo ínfimos puntuales.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \subseteq TA$ y $g = \bigwedge \mathcal{F}$ el ínfimo puntual. Queremos ver que $g \in TA$.

$$\begin{aligned} g(b \succ a) &= \bigwedge \{f(b \succ a) \mid f \in \mathcal{F}\} = \bigwedge \{(b \succ f(a)) \mid f \in \mathcal{F}\} = \\ &= (b \succ \bigwedge \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}) = (b \succ g(a)) \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se debe a que, en general, si tomamos $X \subseteq A$ y $y \in A$

$$\begin{aligned} x \geq \bigwedge \{x \mid x \in X\} &\Rightarrow (y \succ x) \geq (y \succ \bigwedge \{x \mid x \in X\}) \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow \bigwedge \{(y \succ x) \mid x \in X\} \geq (y \succ \bigwedge \{x \mid x \in X\}) \end{aligned}$$

y

$$\bigwedge \{(y \succ x) \mid x \in X\} \wedge y = \bigwedge \{y \wedge x \mid x \in X\} \leq \bigwedge \{x \mid x \in X\}$$
$$\Leftrightarrow \bigwedge \{(y \succ x) \mid x \in X\} \leq (y \succ \bigwedge \{x \mid x \in X\})$$

□

Por lo tanto ,TA tiene ínfimos arbitrarios y se calculan puntualmente. Esto implica que TA también tiene supremos arbitrarios y por tanto es una retícula completa. Debemos de tener presente que los supremos no necesariamente se calculan puntualmente.

Lema 3.0.10. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$. Si $f, g \in TA$ entonces el operador*

$$h\colon A \to A$$

$$h(a) = (f(a) \succ g(a))$$

pertenece a TA y satisface la siguiente propiedad:

$$k \leq h \Leftrightarrow k \wedge f \leq g$$

Para cualquier $k \in TA$.

Demostración. Sean $f, g \in TA$ y h la función de A en A definida como $h(a) = (f(a) \succ g(a))$. Así, para cualesquiera $a, b \in A$

$$\begin{aligned} h(b \succ a) &= (f(b \succ a) \succ g(b \succ a)) = ((b \succ f(a)) \succ (b \succ g(a))) = \\ &= (b \wedge (b \succ f(a)) \succ g(a) = ((b \wedge f(a)) \succ g(a)) = (b \succ (f(a) \succ g(a))) = \\ &= (b \succ h(a)) \end{aligned}$$

Para estas igualdades es necesario tomar en cuenta el lema 1.1.12 y lo que se prueba en la observación 3.0.2. Por lo tanto, $h \in TA$. Además si $k \leq h$ quiere decir que para cualquier $a \in A$, $k(a) \leq h(a) = (f(a) \succ g(a))$. Esto es equivalente, por la propiedad característica de la implicación, a que $k(a) \wedge f(a) \leq g(a)$ para cualquier $a \in A$. Esto ocurre si y sólo si $k \wedge f \leq g$, pues los ínfimos en TA se calculan puntualmente. Queda probado que

$$k \leq h \Leftrightarrow k \wedge f \leq g$$

□

Este teorema prueba que TA tiene una implicación y que se calcula puntualmente. Así por el lema 1.1.11, TA es un marco.

Teorema 3.0.11. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, TA es un álgebra booleana completa.*

Demostración. Como TA es un marco sólo falta ver que es complementada para que sea un álgebra booleana completa. Para esto nos tomamos $f \in TA$ y queremos ver que $g = \neg f = (f \succ id)$ es su complemento. Si consideramos $h = g \vee f$ justamente debemos probar que $h = tp$. Si tomamos $a \in A$ entonces

$$a \leq (h(a) \succ a) \leq (f(a) \succ a) \wedge (g(a) \succ a)$$

donde la segunda desigualdad se de porque por por el lema 1.1.12 y por como esta definido h. Además h es al menos mayor o igual que el supremo puntual entonces

$$f(a) \vee g(a) \leq h(a)$$

y por el lema 1.1.12

$$(h(a) \succ a) \leq ((f(a) \vee g(a)) \succ a) = (f(a) \succ a) \wedge (g(a) \succ a)$$

Ahora bien , retomando nuestra primera desigualdad tenemos que

$$a \leq (f(a) \succ a) \wedge (g(a) \succ a) = g(a) \wedge (g(a) \succ a) = g(a) \wedge a = a$$

Usamos aquí la definición de g y el hecho de que como $g \in TA$, g infla. Así, tomando en cuenta el lema 3.0.4,

$$h(a) = w_a(h(a)) = ((h(a) \succ a) \succ a) = (a \succ a) = 1$$

y por lo tanto $h = tp$. Además es inmediato que $g \wedge f = id$ pues $f \wedge (f \succ id) = f \wedge id = id$. Por lo tanto, f es complementado. Como esto pasa para cualquier $f \in TA$ tenemos que $TA \in \mathcal{CBA}$. □

Recuerda que en los preliminares habíamos definido a los operadores estables y en particular, para un marco A al conjunto de los estables lo escribíamos como SA. Ahora para un marco A consideraremos a los estables en NA, es decir a SNA. Además, por el teorema 1.3.18, sabemos que SNA es un marco y los supremos e ínfimos se calculan puntualmente.

Observación 3.0.12. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$, para cualesquiera $F \in SNA$ y $a \in A$*

$$F(w_a) = w_b \qquad \textit{con} \quad b = F(w_a)(0)$$

Esto se debe al lema 1.3.39 ya que F es monótona y por lo tanto, $w_a \leq F(w_a)$.

Definición 3.0.13. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ para un $F \in SNA$ definimos a f como*

$$f\colon A \to A$$

$$f(a) = F(w_a)(0)$$

Nota que debido a la observación 3.0.12, que $f(a) = F(w_a)(0)$ equivale a que $F(w_a) = w_{f(a)}$.

Lema 3.0.14. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $F \in SNA$ si consideramos a f inducido por F como en la definición anterior, es decir,*

$$f\colon A \to A$$

$$f(a) = F(w_a)(0)$$

entonces $f \in TA$.

Demostración. Sean $a, b \in A$ entonces damos $j = w_{b \succ a}$ que, por el lema1.3.41, sabemos que $j = w_{b \succ a} = v_b \vee w_a$. Además como F infla

$$v_b \leq j \leq F(j)$$

entonces

$$w_{f(a)} = F(w_a) \leq F(j)$$

pues recuerda que por la definición de f, $F(w_c)(0) = f(c)$ para cualquier $c \in A$. Así,

$$v_b \vee w_{f(a)} \leq F(j)$$

Evaluando ambos núcleos en el cero obtenemos

$$(b \succ f(a)) = v_b \vee w_{f(a)} \leq F(j)(0) = F(w_{b \succ a})(0) = f(b \succ a)$$

Observa que usamos el lema 1.3.31 para poder evaluar el supremo. Para la desigualdad que falta observemos que como sabíamos que $j = v_b \vee w_a$ entonces

$$j \wedge u_b = (w_a \vee v_b) \wedge u_b = (u_b \wedge v_b) \vee (u_b \wedge w_a) = id \vee (u_b \wedge w_a) \leq w_a$$

Por lo tanto,

$$j \wedge u_b \leq w_a$$

y como $F \in SNA$

$$F(j) \wedge u_b \leq F(j \vee u_b) \leq F(w_a)$$

Si evaluamos en el 0, tomando en cuenta la definición de $f$queda

$$f(b \succ a) \wedge b = f(w_b \succ a)(0) \wedge u_b(0) = (F(j) \wedge u_b)(0) \leq F(w_a)(0) = f(a)$$

Usando la propiedad característica de la implicación obtenemos

$$f(b \succ a) \leq b \succ f(a)$$

Y por tanto $f \in TA$. $\square$

Definición 3.0.15. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ definimos a la asignación τ como sigue*

$$SNA \xrightarrow{\tau} TA$$

$$F \to f$$

donde f es como en la definición 3.0.13.

Definición 3.0.16. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ para $f \in TA$ definimos a la función F en NA como*

$$F\colon NA \longrightarrow NA$$

$$F(j) = \bigwedge \left\{ w_{f(a)} \mid a \in A_j \right\}$$

Teorema 3.0.17. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ entonces para cualquier $f \in TA$, F, definida en 3.0.16, pertenece a N^2A.*

Demostración. Tomemos $j \in NA$. Como f infla,para cualquier $a \in A$, $a \leq f(a)$ y por tanto $w_a \leq w_{f(a)}$. Así

$$j = \bigwedge \{w_a \mid a \in A_j\} \leq \bigwedge \left\{ w_{f(a)} \mid a \in A_j \right\} = F(j)$$

Observa que la primera igualdad se da por el lema1.3.42. Por lo tanto, F infla.

Ahora consideramos $j, k \in NA$ tales que $j \leq k$. Entonces $A_k \subseteq A_j$ y por tanto

$$F(j) = \bigwedge \left\{ w_{f(a)} \mid a \in A_j \right\} \leq \bigwedge \left\{ w_{f(a)} \mid a \in A_k \right\} = F(k)$$

Es decir, F es monótona.

Por otro lado, si $j \in NA$, para cualquier $a \in A_j$, $F(j) \leq w_{f(a)}$ por definición de F. Además $f(a) \leq F(j)(f(a))$ pues $F(j) \in NA$ y en particular infla. Así, por el lema1.3.38

$$F(j) \leq w_{f(a)}$$

y evaluando en $f(a)$ obtenemos que

$$F(j)(f(a)) \leq w_{f(a)}(f(a)) = f(a)$$

Es decir $A \in A_{F(j)}$, por lo tanto $A_j \subseteq A_{F(j)}$. Si nombramos $k = F(j)$ nos queda

$$F(j) \leq F^2(j) = F(k) \leq F(j)$$

Donde la primera desigualdad se da por que F infla y la última por que se da la contención en los conjuntos de puntos fijos. Concluimos que F es idempotente.

Si $j, k \in NA$ lo único que falta probar para que $F \in N^2A$ es que

$$F(j) \wedge F(k) \leq F(j \wedge k)$$

Para esto nos tomamos a $c \in A_{j \wedge k}$ y se cumple que $(j \wedge k)(c) = j(c) \wedge k(c) = c$. Ahora bien, por el lema 1.3.41 podemos considerar los siguientes núcleos

$$w_a = j \vee w_c \qquad \text{y} \qquad w_b = k \vee w_c$$

donde

$$a = w_c(j(c)) = ((j(c) \succ c) \succ c) \qquad \text{y} \qquad b = w_c(k(c)) = ((k(c) \succ c) \succ c)$$

Observa que como $j \leq w_a$ y $k \leq w_b$, por el lema1.3.38, $j(a) = a$ y $k(b) = b$. Es decir, $a \in A_j$ y $b \in A_k$, lo que implica por definición de F que

$$F(j) \leq w_{f(a)} \qquad \text{y} \qquad F(k) \leq w_{f(b)}$$

Además $f(c) \leq f(a), f(b)$ pues como $f \in TA$:

$$f(a) = f((j(c) \succ c) \succ c) = ((j(c) \succ c) \succ f(c))$$

y

$$f(b) = f((k(c) \succ c) \succ c) = ((k(c) \succ c) \succ f(c))$$

Esto quiere decir que $f(a) \leq w_{f(a)}(f(c)) \leq w_{f(a)}(f(a)) = f(a)$ y análogamente $f(b) = w_{f(b)}(f(c))$. Por todo lo anterior tenemos lo siguiente :

$$(F(j) \wedge F(k))(f(c)) \leq (w_{f(a)} \wedge w_{f(b)})(f(c)) \leq w_{f(a)}(f(c)) \wedge w_{f(b)}(f(c)) = f(a) \wedge f(b)$$

Lo que ahora nos gustaría ver es que $f(a) \wedge f(b) \leq f(c)$ pero esto ocurre pues:

$$f(a) \wedge (j(c) \succ c) = (j(c) \succ c) \wedge f(c) \leq f(c)$$

$$f(b) \wedge (k(c) \succ c) = (k(c) \succ c) \wedge f(c) \leq f(c)$$

Pero como $j(c) \wedge k(c) \leq c$, por la propiedad de la implicación, $k(c) \leq (j(c) \succ c)$ entonces

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(a) \wedge k(c) \leq f(a) \wedge (j(c) \succ c) \leq f(c) \\
&\Rightarrow f(a) \wedge (f(c) \succ c) \leq (k(c) \succ c) \\
&\Rightarrow f(a) \wedge (f(c) \succ c) \wedge f(b) \leq (k(c) \succ c) \wedge f(b) \leq f(c) \\
&\Rightarrow f(a) \wedge f(b) \leq ((f(c) \succ c) \succ f(c)) \leq ((f(c) \succ c) \succ c) = w_c(f(c)) = f(c)
\end{aligned}$$

Notemos que en la última línea usamos los lemas 3.0.3 y 3.0.4.

Así, recopilando todo lo anterior nos queda que

$$f(c) \leq (F(j) \wedge F(k))(f(c)) \leq f(a) \wedge f(b) \leq f(c)$$

Y por el lema 1.3.38 tenemos que

$$F(j) \wedge F(k) \leq w_{f(c)}$$

para cualquier $c \in A_{j \wedge k}$. Entonces por definición de F

$$F(j) \wedge F(k) \leq F(j \wedge k)$$

Por lo tanto, $F \in N^2 A$. □

Definición 3.0.18. *Para cada $A \in \mathfrak{Frm}$ definimos la asignación σ como:*

$$TA \xrightarrow{\sigma} SNA$$

$$f \longrightarrow F$$

donde F esta definida como en 3.0.16.

Teorema 3.0.19. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$,*

$$SNA \underset{\sigma}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} TA$$

son monótonas y forman una adjunción de $\mathcal{P}os$, $\tau \dashv \sigma$.

Demostración. Sean $f, g \in TA$ tales que $f \leq g$ entonces par cualquier $j \in NA$:

$$\sigma(f)(j) = F(j) = \bigwedge \left\{ w_{f(a)} \mid a \in a_j \right\} \leq \left\{ w_{g(a)} \mid a \in a_j \right\} = G(j) = \sigma(g)(j)$$

Observa que la desigualdad es inmediata por el lema 3.0.8. Así, obtenemos que σ es monótona. Ahora bien, sean $F, G \in SNA$ tales que $F \leq G$ tenemos que

$$\tau(F)(a) = f(a) = F(w_a)(0) \leq G(w_a)(0) = g(a) = \tau(G)(a)$$

para cualquier $a \in A$. Es decir, τ es monótona.

Sean $G \in SNA$ y $f \in TA$, para ver que τ y σ forman una adjunción tenemos que probar que

$$\tau(G) \leq f \Leftrightarrow G \leq \sigma(f)$$

Consideremos $g = \tau(G)$. Para la primera implicación supongamos que $g \leq f$ y sean $j \in NA$ y $a \in A_j$. Observa $j \leq w_a$ pues por el lema 3.0.13 $j = \bigwedge \{w_a \mid a \in A_j\}$. Como sabemos que G es monótona pues $G \in SNA$, y por la definición 3.0.16 tenemos

$$G(j) \leq G(w_a) = w_{g(a)} \leq w_{f(a)}$$

donde la última desigualdad es por el lema 3.0.8. Así, como esto pasa para cualquier $a \in A_j$

$$G(j) \leq \bigwedge \left\{ w_{f(a)} \mid a \in A_j \right\} = F(j) = \sigma(f)(j)$$

Por lo tanto $g \leq \sigma(f)$.

Para el regreso suponemos que $G \leq \sigma(f)$ y tomamos cualquier $a \in A$ y consideramos $j = w_a$. Es claro que $a \in A_j = A_{w_a}$, entonces

$$w_{g(a)} = G(w_a) \leq \sigma(f)(w_a) = \bigwedge \left\{ w_{f(b)} \mid b \in A_{w_a} = \right\} \leq w_{f(a)}$$

donde que la primera igualdad es por la definición 3.0.13. Ahora bien, si evaluamos en 0 queda

$$\tau(G)(a) = g(a) = w_{g(a)}(0) \leq w_{f(a)}(0) = f(a)$$

para cualquier $a \in A$. Entonces $\tau(G) \leq f$.

□

Observación 3.0.20. *Nota que como τ tiene adjunto derecho entonces respeta supremos arbitrarios. Ver 1.2.6.*

Lema 3.0.21. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$ la asignación τ es un morfismo que respeta ínfimos arbitrarios.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} \subseteq SNA$, queremos probar que

$$\tau\left(\bigwedge \mathcal{F}\right) = \bigwedge \tau\left[\mathcal{F}\right]$$

Llamemos $h = \tau\left(\bigwedge \mathcal{F}\right)$ y $\mathbb{F} = \tau\left[\mathcal{F}\right]$. Sea $a \in A$ entonces

$$w_{h(a)} = \left(\bigwedge \mathcal{F}\right)(w_a) = \bigwedge \{F(w_a) \mid F \in \mathcal{F}\} = \bigwedge \left\{w_{f(a)} \mid f \in \mathbb{F}\right\}$$

Si ahora evaluamos en el 0 queda

$$h(a) = w_{h(a)} = \left(\bigwedge \left\{w_{f(a)} \mid f \in \mathbb{F}\right\}\right)(0) = \bigwedge \left\{w_{f(a)}(0) \mid f \in \mathbb{F}\right\} =$$
$$= \bigwedge \{f(a) \mid f \in \mathbb{F}\} = \bigwedge \mathbb{F}(a)$$

Y esto es justo lo que buscábamos probar. $\square$

Con esta prueba ya podemos decir que τ es un morfismo de marcos.

Lema 3.0.22. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, el morfismo τ es suprayectivo.*

Demostración. Sea $f \in TA$, consideremos $G = \sigma(f)$ y $g = \tau(g) = \tau(\sigma(f))$. Afirmamos que $f = g$. Observa que como $G \leq \sigma(f)$ la ajunción, lema3.0.19, nos da que $g \leq f$. Solo falta probar la otra desigualdad, pero por la definiciones 3.0.16, para cualuier $a \in A$

$$G(w_a) = \bigwedge \left\{w_{f(b)} \mid b \in A_{w_a}\right\}$$

y entonces por la definición 3.0.13

$$g(a) = G(w_a)(0) = \left(\bigwedge \left\{w_{f(b)} \mid b \in A_{w_a}\right\}\right)(0) = \bigwedge \{f(b) \mid b \in A_{w_a}\}$$

Además observa que si $b \in A_{w_a}$ entonces

$$b = ((b \succ a) \succ a)$$

de tal forma que

$$f(b) = f((b \succ a) \succ a) = ((b \succ a) \succ f(a))$$

Y usando 1.1.12 tenemos que $f(a) \leq f(b)$. Por lo tanto, $f(a) \leq g(a) = \bigwedge \{f(b) \mid b \in A_{w_a}\}$ y así $f \leq g$. $\square$

Así tenemos un morfismo de marcos suprayectivo, τ, lo que quiere decir que que TA es un marco cociente de SNA y esta determinado por su kernel k que debe ser, por 1.2.19, $k = \sigma \circ \tau$.

Lema 3.0.23. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $F, G \in SNA$, entonces*

$$\tau(F \circ G) = \tau(F) \circ \tau(G)$$

Demostración. Consideremos $f = \tau(F)$, $g = \tau(G)$ y $h = \tau(F \circ G)$. Así, para cualquier $a \in A$,

$$w_{h(a)} = (F \circ G)(w_a) = F(G(w_a)) = F(w_{g(a)} = w_f(g(a))$$

Aquí usamos para la mayoría de las igualdades, la definición 3.0.13. Al evaluar la igualdad anterior en 0 queda que

$$\tau(F \circ G)(a) = h(a) = f(g(a)) = (\tau(F) \circ \tau(G))(a)$$

que prueba lo que queríamos. □

Lema 3.0.24. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $F \in SNA$, par cualquier $\alpha \in OR$ se cumple que*

$$\tau(F^{\alpha^+}) = \tau(F)$$

Demostración. Si tomamos $f = \tau(F)$, observa que como f es idempotente se tiene

$$\tau(F^2) = \tau(F) \circ \tau(F) = f^2 = f$$

por el lema anterior 3.0.23 y porque f es idempotente. Ahora bien, tomando en cuenta esto, seguimos con la prueba que se hace por inducción sobre los ordinales. El caso $\alpha = 0$ es inmediato. Para $\alpha = \beta^+$ suponemos que el resultado es cierto para β, entonces

$$\tau(F^{\alpha^+}) = \tau(F^{(\beta^+)^+}) = \tau(F \circ F^{\beta^+}) = \tau(F) \circ \tau(F^{\beta^+}) = \tau(F) \circ \tau(F) = \tau(F)$$

Ahora si α es un ordinal límite suponemos que el resultado se vale para cualquier β menor que α y así

$$\begin{aligned}\tau(F^{\alpha^+}) = \tau(F \circ F^{\alpha}) = \tau(F) \circ \tau(F^{\alpha}) = \tau(F) \circ \tau\left(\bigvee\left\{F^{\beta} \mid \beta < \alpha\right\}\right) = \\ = \tau(F) \circ \bigvee\left\{\tau(F^{\beta}) \mid \beta < \alpha\right\} = \tau(F) \circ \bigvee\{\tau(F) \mid \beta < \alpha\} = \\ = \tau(F) \circ \tau(F) = \tau(F)\end{aligned}$$

Observa que usamos la hipótesis de inducción, el lema 3.0.23,que τ preserva supremos arbitrarios debido a 3.0.20 y que los operadores TW son idempotentes.

Entonces queda probado lo que queríamos. □

Así el siguiente corolario es inmediato.

Corolario 3.0.25. *Para cualesquiera* $A \in \mathfrak{Frm}$ *y* $F \in SNA$*,* $\tau(F^{\infty}) = \tau(F)$*.*

Teorema 3.0.26. *Para cualesquiera* $A \in \mathfrak{Frm}$ *y* $F \in SNA$

$$(\sigma \circ \tau)(F) = (\Delta \succ J) = \neg\neg J$$

donde $J = F^{\infty}$*.*

Demostración. Sea $F \in SNA$ y consideramos $f = \tau(F) = \tau(J)$ y $G = \sigma(f)$. Para probar el resultado basta ver que

$$(\Delta \succ J) \leq G \leq \neg\neg J$$

pues por el lema 2.2.28, como $J \in N^2 A$, $(\Delta \succ J) = \neg\neg J$.

Para la primera desigualdad que hay probar nos tomamos $K = (\Delta \succ J)$, entonces por la propiedad de de la implicación, $K \wedge \Delta \leq J$. Ahora tomamos cualesquiera $j \in NA$ y $a \in A_j$. Recuerda que $\Delta(w_a) = tp$ por el lema 2.2.1, entonces

$$K(j) \leq K(w_a) = K(w_a) \wedge \delta(w_a) \leq J(w_a) = w_{f(a)}$$

La primera desigualdad se da por el lema 1.3.38 ya que $j(a) = a$. Y la última igualdad es por definición de 3.0.13 ya que $f = \tau(j)$. Como esto ocurre para cualquier $a \in A_j$ entonces

$$K(j) \leq \bigwedge \left\{ w_{f(a)} \mid a \in A_j \right\} = G(j)$$

La última igualdad se debe a la definición de σ, 3.0.16. Así $(\Delta \succ J) \leq G$.

Ahora, para la segunda desigualdad que debemos probar, consideramos $L = \neg J$ y tomamos $j \in NA$ y $a \in A_j$ arbitrarios, así

$$G(j) \wedge L(j) \leq w_{f(a)} \wedge L(j) = J(w_a) \wedge L(w_a) = w_a$$

La primera desigualdad se debe a la definición de σ, 3.0.16. Además recordemos que por la definición 3.0.13, $w_{f(a)} = J(w_a)$. La última igualdad se debe a 1.1.16. Como esto pasa para cualquier $a \in A_j$ por el lema 1.3.42 ocurre que

$$G(j) \wedge L(j) \leq j$$

para cualquier $j \in NA$ entonces

$$G \wedge L \leq Id$$

y por la propiedad de la implicación nos quedaría que

$$G \leq L \succ Id = \neg L = \neg\neg J$$

lo que prueba el teorema. $\square$

Este teorema es muy importante pues ya habíamos dicho que el kernel, un núcleo en SNA, para τ era $k = \sigma \circ \tau$ pero ahora ya podemos calcularlo explícitamente como

$$SNA \xrightarrow{\qquad k \qquad} SNA$$

$$F \longrightarrow F^{\infty} \longrightarrow \neg\neg F^{\infty}$$

pero recordemos que por el teorema 1.2.26 esto quiere decir que TA es isomorfo a los puntos fijos de k, pero el conjunto de puntos fijos de k es $N^2A_{\neg\neg}$. Es decir $TA \cong N^2A_{\neg\neg}$. También sabemos que $k(F) = (\sigma \circ \tau)(F) = (\Delta \succ F^{\infty})$. Entonces tengo la siguiente composición

$$SNA \xrightarrow{\_^{\infty}} N^2A \xrightarrow{v_{\Delta}} [Id, \Delta]$$

donde $v_{\Delta} \in N^3A$. Observemos que los puntos fijos de $\_^{\infty}$ son N^2A y los puntos fijos de v_{Δ} es el intervalo $[Id, \Delta]$ pues, en general, para cualquier $v_a \in NA$, $A_{v_a} = [0, a]$. Con todo esto dicho a lo que llegamos es a que

$$[Id, \Delta] \cong TA \cong N^2A_{\neg\neg}$$

lo cual nos describe muy bien la doble negación en N^2A.

Capítulo 4

Representaciones

4.1. Familias representativas

Ya habíamos definido a los conjuntos $\mathcal{C}_j$ y $\mathcal{B}_j$ pero no terminamos de explorarlos. En este capítulo intentamos obtener más información de estos conjuntos y su relación con la derivada.

Definición 4.1.1. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$, una representación de $a \in A$ es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que*

$$a = \bigwedge X$$

También, un generador para a es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que

$$a = \bigvee X$$

Si tomamos un marco $A \in \mathfrak{Frm}$ y consideramos a NA y $k \in NA$ podemos tomar el u-núcleo de k que escribiré como $u_k \in N^2A$ de tal forma que $u_k(j) = j \vee k$ para cualquier $j \in NA$. Del mismo modo podría tomar a los v,w-núcleos generados por j. Ahora bien, como $u_k \in N^2A$ puedo tomar a $u_{u_k} \in N^3A$

$$u_{u_k} \colon N^2A \longrightarrow N^2A$$

$$u_{u_k}(J) = u_k \vee J \qquad J \in N^2A$$

Así, usando el lema 1.3.31

$$u_{u_k}(J)(j) = (u_k \vee J)(j) = J(u_k(j)) = J(j \vee k)$$

Entonces dado $\mathcal{K} \subseteq NA$ podemos considerar los siguientes conjuntos

$$u_{\mathcal{K}} = \{u_k \mid k \in \mathcal{K}\}$$

$$u_{u_{\mathcal{K}}} = \{u_{u_k} \mid k \in \mathcal{K}\}$$

Observa que $u_{\mathcal{K}} \subseteq N^2A$ y $u_{u_{\mathcal{K}}} \subseteq N^3A$. Además estos conjuntos se podrían seguir definiendo para los demás niveles del ensamble, tomando los u-núcleos del nivel correspondiente.

Definición 4.1.2. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$, $j \in NA$ y $\mathcal{K} \subseteq NA$ definimos recursivamente*

$$j \lhd_0 \mathcal{K} \Leftrightarrow j = \bigwedge \mathcal{K}$$

$$j \lhd_1 \mathcal{K} \Leftrightarrow u_j \lhd_0 u_{\mathcal{K}}$$

$$j \lhd_2 \mathcal{K} \Leftrightarrow u_j \lhd_1 u_{\mathcal{K}}$$

$$j \lhd_3 \mathcal{K} \Leftrightarrow u_j \lhd_2 u_{\mathcal{K}}$$

$$\ldots$$

una familia de relaciones representables.

Observación 4.1.3. *Observa lo que realmente se pide en la definición anterior*

$$\begin{aligned}
&j \lhd_0 \mathcal{K} \Leftrightarrow j = \bigwedge \mathcal{K}\\
&j \lhd_1 \mathcal{K} \Leftrightarrow u_j \lhd_0 u_{\mathcal{K}} \Leftrightarrow u_j = \bigwedge u_{\mathcal{K}}\\
&j \lhd_2 \mathcal{K} \Leftrightarrow u_j \lhd_1 u_{\mathcal{K}} \Leftrightarrow u_{u_{\mathcal{K}}} \lhd_0 u_{u_{\mathcal{K}}} \Leftrightarrow u_{u_{\mathcal{K}}} = \bigwedge u_{u_{\mathcal{K}}}\\
&j \lhd_3 \mathcal{K} \Leftrightarrow u_j \lhd_2 u_{\mathcal{K}} \Leftrightarrow u_{u_{\mathcal{K}}} \lhd_1 u_{u_{\mathcal{K}}} \Leftrightarrow u_{u_{u_{\mathcal{K}}}} \lhd_0 u_{u_{u_{\mathcal{K}}}} \Leftrightarrow u_{u_{u_{\mathcal{K}}}} = \bigwedge u_{u_{u_{\mathcal{K}}}}\\
&\qquad \ldots
\end{aligned}$$

Observación 4.1.4. *Si tenemos $j \in NA$ y $\mathcal{K} \subseteq NA$ tales que $j \lhd_{i+1} \mathcal{K}$ para alguna i en los naturales, entonces*

$$j \lhd_{i+1} \mathcal{K} \Rightarrow j \lhd_i \mathcal{K} \Rightarrow \ldots \Rightarrow j \lhd_2 \mathcal{K} \Rightarrow j \lhd_1 \mathcal{K} \Rightarrow j \lhd_0 \mathcal{K}$$

pues si $j \lhd_{i+1} \mathcal{K}$ por definición $u_j \lhd_i u_{\mathcal{K}}$ y evaluando esto en la identidad correspondiente digamos id_i, tenemos que $j \lhd_i \mathcal{K}$.

Observación 4.1.5. *Recordemos que ya teníamos definidos, 2.2.13, ciertos conjuntos de núcleos $\mathcal{B}_j$ y $\mathcal{C}_j$ para un $j \in NA$. La pregunta sería, ¿cuándo podemos decir que $j \lhd_i \mathcal{B}_j$ o $j \lhd_i \mathcal{C}_j$? Lo que si podemos saber ahorita es que si $j \lhd_i \mathcal{C}_j$, como $\mathcal{C}_j \subseteq \mathcal{B}_j$, entonces $j \lhd_i \mathcal{B}_j$. Podemos afirmar también lo siguiente*

i) $j \lhd_0 \mathcal{B}_j$

ii) $j \lhd_0 \mathcal{C}_j \Leftrightarrow j \lessdot Cbd(j)$

Sabemos que se da el primer inciso porque por el lema 1.3.42

$$j = \bigwedge \{w_a \mid a \in A_j\} = \bigwedge \{w_a \mid w_a \in \mathcal{B}_j\}$$

Recuerda que $A_j = B_j$ *y* $\mathcal{B}_j = \{w_a \mid a \in B_j\}$.

El inciso ii) es inmediato del lema 2.2.21.

Lema 4.1.6. *Para cualesquiera* $A \in \mathfrak{Frm}$ *y* $j \in NA$

$$j \lhd_1 \mathcal{B}_j$$

Demostración. Notemos que $\mathcal{B}_j = \{w_a \mid j \leq w_a\}$ por la observación 2.2.14. Entonces buscamos probar

$$u_j = \bigwedge u_{\mathcal{B}_j} = \bigwedge \{u_{w_a} \mid j \leq w_a\}$$

es decir,

$$j \vee k = \bigwedge \{w_a \vee k \mid j \leq w_a\} \qquad \forall k \in NA$$

Observemos que para cualquier $k \in NA$ como $w_a \leq k \vee w_a$ por el lema 1.3.39

$$w_a \vee k = w_b$$

con $b = (w_a \vee k)(0)$. Entonces

$$\bigwedge \{w_a \vee k \mid j \leq w_a\} = \bigwedge \{w_b \mid j \vee k \leq w_b\} = j \vee k$$

donde la segunda igualdad se da por el lema 1.3.42 y el lema 1.3.38. La primera igualdad se debe a una igualdad de conjuntos ya que si $w_a \vee k$ es tal que $j \leq w_a$ entonces $k \leq w_b = w_a \vee k$ y $j \leq w_a \leq w_b$, por lo tanto $j \vee k \leq w_b$, o bien, podemos decir que $w_a \vee k \in \{w_b \mid j \vee k \leq w_b\}$. Ahora si w_b cumple que $j \vee k \leq w_b$, entonces $k \leq w_b$ y $j \leq w_b$. Por lo tanto, $w_b \vee k = w_b$, es decir $w_b \in \{w_a \vee k \mid j \leq w_a\}$. Esto ya prueba lo que queríamos. □

Lema 4.1.7. *Sea* $A \in \mathfrak{Frm}$*, si* $a \in A$ *tiene una representación* $X \subseteq A$*, entonces*

$$u_a \leq \bigwedge \{u_x \mid x \in X\} \leq w_a$$

Demostración. Como $a = \bigwedge X$, entonces $a \leq x$ lo que implica que $u_a \leq u_x$ para cualquier $x \in X$. Así

$$u_a \leq \bigwedge \{u_x \mid x \in X\}$$

Ahora observemos que

$$\left(\bigwedge \{u_x \mid x \in x\}\right)(a) = \bigwedge \{x \vee a \mid x \in x\} = \bigwedge X = a$$

Pero esto es equivalente por el lema 1.3.38 a que

$$\bigwedge \{u_x \mid x \in x\} \leq w_a$$

$\square$

Teorema 4.1.8. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$ las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $\Delta(j) = tp$

ii) $CBD(u_j) = Tp$

iii) $u_{u_j} = w_{u_j}$

iv) $j \lhd_2 \mathcal{B}_j$

Demostración. Para la primera implicación suponemos que $\Delta(j) = tp$ entonces por el lema 2.1.12

$$CBD(u_j) = CBD(Id) \circ u_j = \Delta \circ u_j$$

Evaluando en la identidad quedaría que

$$CBD(u_j)(id) = (\Delta \circ u_j)(id) = \Delta(j \vee id) = \Delta(j) = tp$$

Por lo tanto $CBD(u_j) = Tp$.

Ahora suponemos $CBD(u_j) = tp$ y queremos ver que $u_{u_j} = w_{u_j}$. Pero esto es inmediato usando el lema 2.2.10 sobre el marco N^2A y su derivada correspondiente CBD.

Para probar $iii) \Rightarrow iv)$ suponemos que $u_{u_j} = w_{u_j}$. Sabemos por el lema 4.1.6 y por la definición 4.1.2 que

$$j \lhd_1 \mathcal{B}_j \Leftrightarrow u_j \lhd_0 u_{\mathcal{B}_j} \Leftrightarrow u_j = \bigwedge \{u_k \mid k \in \mathcal{B}_j\}$$

Esta igualdad la usamos para ocupar el lema 4.1.7 y obtenemos

$$u_{u_j} \leq \bigwedge \{u_{u_k} \mid k \in \mathcal{B}_j\} \leq w_{u_j}$$

Pero por hipótesis $u_{u_j} = w_{u_j}$, entonces

$$u_{u_j} = \bigwedge \{u_{u_k} \mid k \in \mathcal{B}_j\}$$

Y esto, por definición 4.1.2, es equivalente a que $j \lhd_2 \mathcal{B}_j$.

Finalmente, suponemos que $j \lhd_2 \mathcal{B}_j$ y queremos probar que $\Delta(j) = tp$. Entonces por hipótesis tenemos que

$$u_{u_j} = \bigwedge \{u_{u_k} \mid k \in \mathcal{B}_j\} = \bigwedge \{u_{u_{w_a}} \mid a \in \mathcal{B}_j\}$$

por definición de $\mathcal{B}_j$. Y si tomamos $K \in N^2A$ como $u_{u_j} = K \vee u_j = K \circ u_j$ por el lema 1.3.31 y evaluamos en la igualdad anterior

$$K \circ u_j = u_{u_j}(K) = \left(\bigwedge \{u_{u_{w_a}} \mid a \in \mathcal{B}_j\}\right)(K) = \bigwedge \{u_{w_a} \vee K \mid a \in B_j\}$$

Ahora, por otro uso del lema 1.3.31 tenemos que $u_{w_a} \vee K = K \circ u_{w_a}$ y evaluando en cualquier $k \in NA$

$$K(j \vee k) = (K \circ u_j)(k) = \left(\bigwedge \{u_{w_a} \vee K \mid a \in B_j\}\right)(k) = \left(\bigwedge \{K \circ u_{w_a} \mid a \in B_j\}\right)(k) =$$

$$= \bigwedge \{K(w_a \vee k) \mid a \in B_j\}$$

Pero si consideramos $K = \Delta$ y $k = id$ resulta que la igualdad anterior queda como

$$\Delta(j) = \Delta(j \vee id) = \bigwedge \{\Delta(w_a \vee id) \mid a \in B_j\} = \bigwedge \{\Delta(w_a) \mid a \in B_j\} = tp$$

donde la última igualdad se da por el lema 2.2.1 pues $tp = Cbd(w_a) \leq \Delta(w_a)$.

□

Teorema 4.1.9. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$ las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $Cbd(j) = tp$

ii) $j \lhd_2 \mathcal{C}_j$

iii) $j \lhd_1 \mathcal{C}_j$

Demostración. Para la primera implicación suponemos que $Cbd(j) = tp$ entonces por el lema 2.2.15 tenemos que $B_j = C_j$ que implica que $\mathcal{B}_j = \mathcal{C}_j$. Por otro lado, tenemos que

$$tp = Cbd(j) \leq Cbd^{\infty}(j) = \Delta(j)$$

y por lo tanto $\Delta(j) = tp$. Entonces por el lema anterior 4.1.8 quedaría que $j \lhd_2 \mathcal{B}_j$, pero ya dijimos que $\mathcal{B}_j = \mathcal{C}_j$ por lo que

$$j \lhd_2 \mathcal{C}_j$$

y así queda probada esta implicación.

La siguiente implicación, $ii) \Rightarrow iii)$ es inmediata si usamos la observación 4.1.4.

Para la última implicación suponemos que $j \lhd_1 \mathcal{C}_j$ y queremos ver que $Cbd(j) = tp$. Por hipótesis sabemos que $u_j = \bigwedge u_{\mathcal{C}_j}$ entonces si $k \in NA$ y evaluamos queda

$$j \vee k = u_j(k) = \bigwedge \{u_{w_a} \mid a \in C_j\}(k) = \bigwedge \{w_a \vee k \mid a \in C_j\}$$

Ahora bien, si tomamos $j = Cbd(j)$ obtenemos que

$$Cbd(j) = Cbd(j) \vee j = \bigwedge \{w_a \vee Cbd(j) \mid a \in C_j\}$$

donde la primera igualdad se da por que Cbd es un prenúcleo y por tanto infla. Entonces

$$Cbd(j)(0) = \bigwedge \{(w_a \vee Cbd(j))(0) \mid a \in C_j\}$$

si evaluamos en el 0. Queremos ver que el ínfimo de la derecha es igual a 1 para eso notemos que si $a \in C_j$ entonces $u_a \leq w_a$ y $v_d \leq w_a$. Esto se debe al lema 1.3.38 ya que $u_a(a) = a$ y $v_d(a) = a$ donde $d = cbd_j(a)$ pues como $a \in C_j$ se cumple $a \lessdot d$, es decir, $(d \succ a) = a$. Así $u_a \vee v_a \leq w_a$ y por tanto

$$v_d \circ Cbd(j) \circ u_a = v_d \vee Cbd(j) \vee u_a \leq w_a \vee Cbd(j)$$

La primera igualdad se da por el lema 2.1.12. Ahora si evaluamos en el 0 obtenemos

$$1 = (d \succ Cbd(j)(a)) = (v_d \circ Cbd(j) \circ u_a)(0) \leq (w_a \vee Cbd(j))(0)$$

Notemos que $1 = (d \succ Cbd(j)(a))$ pues $d = cbd_j(a) \leq cbd_j^{\infty}(a) = Cbd(j)(a)$ por el lema 2.1.11. Así quedaría que

$$Cbd(j)(0) = 1 \Leftrightarrow Cbd(j) = tp$$

que es lo que buscábamos probar. $\square$

Así ya tenemos una idea de como se comporta las relaciones de representantes con respecto a $\mathcal{C}_j$ y a $\mathcal{B}_j$.

4.2. Conjuntos cohesivos

Definición 4.2.1. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ decimos que $K \subseteq A$ con $K \neq \emptyset$, es cohesivo si para cualquier $a \in K$ hay un subconjunto $X \subseteq K$ que cumple que $a = \bigwedge X$ donde $a \lessdot x$ para cualquier $x \in X$.*

La definición anterior lo que dice es que un subconjunto de un marco es cohesivo si cualquier elemento del conjunto tiene una representación dada por un conjunto de elementos esencialmente mayores.

Observación 4.2.2. *Observemos que el conjunto $\{1\}$ es cohesivo en cualquier marco y además éste podría ser el único conjunto cohesivo. Observemos que si tienes un conjunto cohesivo, digamos K, y para el elemento a su representación es $X \subseteq K$ de tal forma que $a \in X$, entonces $a = 1$ pues a es esencialmente mayor que el mismo.*

Lema 4.2.3. *Si la relación $\lessdot$ sobre un marco A tiene la condición de cadena ascendente (CCA), entonces $\{1\}$ es el único conjunto cohesivo en A.*

Demostración. Supongamos que $\lessdot$ cumple CCA y que $K \subseteq A$ es cohesivo y $K \neq \{1\}$, entonces hay $a \in K$ tal que $a \neq 1$. Llamemos $a_1 = a$. Ahora, como K es cohesivo y $a \in K$, hay un subconjunto $X \subseteq K$ tal que $a = \bigwedge X$ pero como $a \neq 1$ hay al menos un elemento digamos $a_2 \in X$ tal que $a_2 \neq 1$ y $a_1 \lessdot a_2$.

Y así sucesivamente generamos una cadena ascendente de elementos en K

$$a_1 \lessdot a_2 \lessdot a_3 < \dots \qquad \text{con } a_i \neq 1 \quad \forall i \in \omega$$

Ahora bien, por hipótesis, como $\lessdot$ tiene la CCA hay $n \in \omega$ tal que $a_{n+k} = a_n$ para cualquier $k \in \omega$. Entonces, en particular

$$a_n \lessdot a_n$$

pero esto quiere decir que $(a_n \succ a_n) = a_n$ que implica que $a_n = 1$ pero esto es una contradicción pues para la cadena que construimos escogimos a $a_n \neq 1$.

Por lo tanto, el único conjunto cohesivo en A es $\{1\}$.

□

Observación 4.2.4. *Notemos que si $A \in \mathfrak{Frm}$, $j \in NA$ y $K \subseteq A_j \subseteq A$ entonces*

$$K \textit{ es cohesivo en } A_j \Leftrightarrow K \textit{ es cohesivo en } A$$

Esto se debe a que los ínfimos y la relación $\lessdot$ se calcula igual en A y en A_j para elementos de A_j.

Lema 4.2.5. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$, si $k \in NA$ tal que $Cbd(k) = k$ entonces A_k es cohesivo.*

Demostración. Sea $a \in A_k$ y consideramos $X = \{x \in A_k \mid a \lessdot x\}$. Entonces usando la definición de derivada tenemos que

$$\begin{aligned} a \leq & \bigwedge \{x \in A_k \mid a \lessdot x\} = \bigwedge \{x \in A_k \mid k(a) \lessdot x\} = \\ = & cbd_k(a) \leq Cbd(k)(a) = k(a) = a \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se da por el lema2.1.11. Así queda probado que A_k es cohesivo pues para cualquier $a \in A$ pudimos expresar $a = \bigwedge X$ con $X \subseteq A_k$. □

Corolario 4.2.6. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$, si $j = \Delta(j)$ entonces A_k es cohesivo donde $k = \Delta(j)$.*

Demostración. Si $j \in NA$ tal que $\Delta(j) = j$ como $\Delta(j) = Cbd^{\infty}(j) = k$ se tiene que
$$Cbd(k) = Cbd(Cbd^{\infty}(j)) = Cbd^{\infty}(j) = \Delta(j) = k$$
Así se cumplen las hipótesis del lema anterior, 4.2.5, y obtenemos que A_k es cohesivo □

Lema 4.2.7. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $K \subseteq A$ cohesivo. Si $K \subseteq A_j$ entonces $K \subseteq A_{\Delta(j)}$ para cualquier $j \in NA$.*

Demostración. Sea $K \subseteq A_j$ y cohesivo en A. Consideremos $a \in K$ y queremos probar que $a = cbd_j^{\alpha}(a)$ para cualquier α en los ordinales. Esto lo probamos por inducción sobre ordinales. Para $\alpha = 0$ notamos que por definición de derivada

$$cbd_j(a) = \bigwedge \{x \in A_j \mid a \lessdot x\} \leq \bigwedge \{x \in X \mid a \lessdot x\} = a$$

donde $X \subseteq K$ es el conjunto cuyo ínfimo es igual a a que existe porque K es cohesivo. La desigualdad se da pues $X \subseteq K \subseteq A_j$. Así, $a \leq cbd_j(a) \leq a$ ya que cbd_j infla por ser un prenúcleo y prueba el caso base.

Si tomamos $\alpha = \beta^{+}$ y suponemos que $cbd_j^{\beta}(a) = a$ tenemos que

$$cbd_j^{\alpha}(a) = cbd_j(cbd_j^{\beta}(a)) = cbd_j(a) = a$$

donde la penúltima igualdad es por hipótesis de inducción y la última es por el caso base.

Ahora bien, si tomamos α un ordinal límite y suponemos que para cualquier $\beta < \alpha$, $cbd_j^{\beta}(a) = a$. Así

$$cbd_j^{\alpha}(a) = \left(\bigwedge \left\{cbd_j^{\beta} \mid \beta < \alpha\right\}\right)(a) = \bigwedge \left\{cbd_j^{\beta}(a) \mid \beta < \alpha\right\} = a$$

Y queda probado para cualquier ordinal en particular para el que denotamos como ∞. Es decir probamos que para cualquier $a \in K$, $cbd^{\infty}(a) = a$.

Con esto en mente ahora buscamos probar que

$$\forall a \in K \quad Cbd^{\alpha}(j)(a) = a$$

para cualquier α en los ordinales. Hacemos la prueba por inducción sobre ordinales. Para el caso base, es decir $\alpha = 0$, usando el lema 2.1.11 y lo anterior tenemos que

$$Cbd(j)(a) = cbd_j^{\infty}(a) = a \quad \forall a \in K$$

Si tomamos $\alpha = \beta^+$ y suponemos que

$$\forall a \in K \quad Cbd^{\beta}(j)(a) = a$$

entonces si denotamos $k = Cbd^{\beta}(j)$ y consideramos $a \in K$

$$Cbd^{\alpha}(j)(a) = Cbd(Cbd^{\beta}(j))(a) = cbd^{\infty}_{Cbd^{\beta}(j)}(a) = cbd_k^{\infty}(a)$$

pero

$$a \leq cbd_k(a) = \bigwedge \{x \in A_k \mid a = k(a) \lessdot x\}$$

pues por hipótesis inductiva $a \in A_k$. Ahora, como K es cohesivo en A y por hipótesis de inducción $K \subseteq A_k$, K es cohesivo en A_k por la observación 4.2.4. Entonces hay un $X \subseteq K$ tal que $a = \bigwedge X$ y para todo $x \in X$, $a \lessdot X$. Entonces

$$a \leq cbd_k(a) = \bigwedge \{x \in A_k \mid a = k(a) \lessdot x\} \leq \bigwedge X = a$$

y como $\_^{\infty}$ es la cerradura idmepotente, $cbd_k^{\infty}(a) = a$. Por lo tanto, $Cbd^{\alpha}(j)(a) = cbd_k^{\infty}(a) = a$ para cualquier $a \in K$.

Ahora, si α es un ordinal límite y para cualquier $\beta < \alpha$ se cumple

$$Cbd^{\beta}(j)(a) = a \quad \forall a \in K$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} Cbd^{\alpha}(j)(a) = \left(\bigwedge \left\{Cbd^{\beta} \mid \beta < \alpha\right\}\right)(j)(a) = \left(\bigwedge \left\{Cbd^{\beta}(j) \mid \beta < \alpha\right\}\right)(a) = \\ = \bigwedge \left\{Cbd^{\beta}(j)(a) \mid \beta < \alpha\right\} = a \end{aligned}$$

para cualquier $a \in K$. Así la propiedad queda probada para cualquier ordinal, en particular $Cbd^{\infty}(j)(a) = a$ para toda $a \in K$. Pero recordando la definición de Δ tenemos que

$$\Delta(j)(a) = Cbd^{\infty}(j)(a) = a \quad \forall a \in K$$

Es decir, $K \subseteq A_{\Delta(j)}$ que era lo que buscábamos probar. $\square$

Teorema 4.2.8. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$ se tiene:*

i) $\Delta(j) = tp \Leftrightarrow \{1\}$ *es el único conjunto cohesivo de* A_j

ii) $A_{\Delta(j)}$ *es el conjunto cohesivo más grande de* A_j

iii) $\Delta(j) = j \Leftrightarrow A_j$ *es cohesivo*

Demostración. Consideremos $k = \Delta(j)$.

Para el inciso i) si consideramos que $k = tp$ y tomamos $K \subseteq A_j$ cohesivo entonces por el lema anterior 4.2.7, $K \subseteq A_{\Delta(j)}$. Pero como $k = tp = \Delta(j)$, nos queda que $K \subseteq A_{tp} = \{1\}$. Por lo tanto, como K es distinto del vacío, $K = \{1\}$. Para el regreso podemos usar el corolario 4.2.6 y tenemos que A_k es cohesivo pero por hipótesis obtenemos que $A_k = \{1\}$ lo que implica que $k = tp$.

Para el segundo inciso ya sabemos que A_k es cohesivo, por el corolario 4.2.6. Además por el lema 4.2.7 queda que es conjunto cohesivo más grande.

Para el último inciso del teorema suponemos, primero, que $\Delta(j) = j$. Entonces como $A_{\Delta(j)}$ es cohesivo por el corolario 4.2.6, A_j es cohesivo. Ahora bien si A_j es cohesivo por el lema 4.2.7, $A_j \subseteq A_{\Delta(j)}$. Así $j \leq \Delta(j) \leq j$ y queda probado el regreso.

□

Corolario 4.2.9. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$, si la relación $\lessdot$ en A_j tiene la CCA entonces $\Delta(j) = tp$.*

Demostración. La prueba es inmediata del lema 4.2.3 y del lema anterior 4.2.8. □

De estos resultados obtenemos más propiedades de la derivada y además nos damos cuenta que las condiciones CCD y CCA juegan un papel importante en el ensamble.

Capítulo 5

Otras relaciones

5.1. La relación substancial

Ya conocemos la relación $\lessdot$ para un marco A. Podemos generalizar esta idea y obtener una nueva relación que nos de nuevas propiedades del ensamble a partir de ella. Analizaremos el papel que juegan $\lessdot$ y la nueva relación que definiremos para finalmente obtener una caracterización de cuando N^2A es booleano.

Definición 5.1.1. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a, b \in A$ decimos que a es substancialmente mayor que b*

$$b \ll a$$

si hay una cadena descendente de longitud ω

$$\{x_r \in A \mid r < \omega\}$$

tal que

$$b \leq x_{r+1} \lessdot x_r \leq a \qquad \forall r < \omega$$

Observación 5.1.2. *Nota que si $b \lessdot a$ entonces podemos dar la cadena $x_r = b$ para todo $r < \omega$ y tenemos que $b \ll a$. Además si $a \ll a$ entonces $a \lessdot a$ lo que implica que $a = 1$.*

Lema 5.1.3. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ para cualesquiera $a, b, x, y \in A$ ocurre que*

$$y \leq b \ll a \leq x \Rightarrow y \ll x$$

y

$$x \ll a \text{ y } y \ll b \Rightarrow x \wedge y \ll a \wedge b$$

Demostración. Si suponemos que $y \leq b \ll a \leq x$ entonces hay una cadena $\{x_r \in A \mid r < \omega\}$ tal que $b \leq x_{r+1} \lessdot x_r \leq a$ para cualquier $r < \omega$. Pero esta misma cadena cumple

$$y \leq x_{r+1} \lessdot x_r \leq x$$

Por lo tanto, $y \ll x$.

Ahora si suponemos que $x \ll a$ y $y \ll b$ tenemos dos cadenas

$$\{x_r \in A \mid r < \omega\} \text{ tal que } x \leq x_{r+1} \lessdot x_r \leq a \quad \forall r < \omega$$

y

$$\{y_r \in A \mid r < \omega\} \text{ tal que } y \leq y_{r+1} \lessdot y_r \leq b \quad \forall r < \omega$$

Entonces usando el lema 2.1.5 obtenemos que

$$x \wedge y \leq x_{r+1} \wedge y_{r+1} \lessdot x_r \wedge y_r \leq a \wedge b$$

para cualquier $r < \omega$. Esto implica que $x \wedge y \ll a \wedge b$. $\square$

Lema 5.1.4. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$ si $a, b \in A$ tales que $b \ll a$ entonces $\delta(b) \ll a$.*

Demostración. Sean $b \ll a$ y $\{x_r \mid r < \omega\}$ la cadena dada por la definición 5.1.1. Tomemos $x = \bigwedge \{x_r \mid r < \omega\}$, entonces

$$x \leq x_{r+1} \lessdot x_r \qquad \forall r < \omega$$

Por el lema 2.1.5, $x \lessdot x_r$ para cualquier $r < \omega$. Pero como $cbd(x) = \bigwedge \{y \in A \mid x \lessdot y\}$, entonces $cbd(x) \leq x_r$ y como esto pasa para cualquier $r < \omega$

$$cbd(x) \leq \bigwedge \{x_r \mid r < \omega\} = x$$

y recordando que cbd es un prenúcleo y que por tanto infla se deduce que $cbd(x) = x$. Y así $\delta(x) = cbd^{\infty}(x) = x$. Ahora bien, por como esta tomada la cadena según la definición de $\ll$, $b \leq x$ y entonces como δ es monótona por ser un núcleo, $\delta(b) \leq \delta(x) = x$. Por otro lado $x \ll a$ pues la misma cadena que se usa para $b \ll a$ funciona y cumple la definición. Así

$$\delta(b) \leq x \ll a$$

lo que nos dice por el lema anterior 5.1.3 que $\delta(b) \ll a$. $\square$

Observación 5.1.5. *Si tomamos un marco $A \in \mathfrak{Frm}$ y consideramos $j \in NA$ y w_a con $a \in A$, por el lema anterior 5.1.4 aplicado al marco NA,*

$$j \ll w_a \Rightarrow \Delta(j) \leq w_a$$

Teorema 5.1.6. *Sea* $A \in \mathfrak{Frm}$ *las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $\Delta(j) \leq w_a$

ii) $\Delta(j) \ll w_a$

iii) $j \ll w_a$

Demostración. La implicación iii)⇒ i) es inmediata de la observación 5.1.5.

Para ii)⇒ iii) suponemos que $\Delta(j) \ll w_a$. Pero como Δ infla tenemos la desigualdad

$$j \leq \Delta(j) \ll w_a$$

que por el lema 5.1.3 implica que $j \ll w_a$.

La implicación i)⇒ ii) es muy larga de probar y se prueba usando algo que se llama la técnica de escisión por eso dedicamos la siguiente sección de esta capítulo 5.2 a probar esta parte.

□

Teorema 5.1.7. *Sea* $A \in \mathfrak{Frm}$ *para cualesquiera* $a \in A$ *y* $j \in NA$ *ocurre lo siguiente*

i) $j \leq w_a \Leftrightarrow j(a) = a$

ii) $j \lessdot w_a \Leftrightarrow Cbd(j) \leq w_a$

iii) $j \ll w_a \Leftrightarrow \Delta(j) \leq w_a$

Este teorema realmente sólo enuncia como funcionan los w-núcleos con respecto a las relaciones que tenemos. El resultado realmente ya esta probado en los lemas 1.3.38, 2.2.5 y 5.1.5.

Corolario 5.1.8. *Para cualesquiera* $A \in \mathfrak{Frm}$*,* $a \in A$ *y* $j \in NA$ *se tiene*

i) $j = \bigwedge\{w_a \mid a \in A, j \leq w_a\}$

ii) $Cbd(j) = \bigwedge\{w_a \mid a \in A, j \lessdot w_a\}$

iii) $\Delta(j) = \bigwedge\{w_a \mid j \ll w_a\}$

Demostración. Este corolario es consecuencia inmediata del teorema anterior 5.1.7 y de el lema 1.3.42. □

Lema 5.1.9. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $k \in NA$ tal que $\Delta(k) = k$, entonces*

$$k \leq w_a \Rightarrow k \ll w_a$$

Demostración. Notemos que si $k \leq w_a$, por hipótesis, quiere decir que $\Delta(k) = k \leq w_a$. Por el teorema 5.1.7 implica que

$$k = \Delta(k) \ll w_a$$

$\square$

Corolario 5.1.10. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a \in A$*

$$\theta(a) = a \Leftrightarrow id \ll w_a$$

Demostración. Recordemos que por definición $\theta = \Delta(id)$ entonces

$$\theta(a) = a \Leftrightarrow \Delta(id) = \theta \leq w_a \Leftrightarrow id \ll w_a$$

en la primera equivalencia usamos el lema 1.3.38 y en la segunda use el lema 5.1.7. $\square$

Corolario 5.1.11. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $cbd = id$ entonces $id \ll w_a$ para toda $a \in A$.*

Demostración. Notemos que por el 2.1.15 $der = id$ si y solo si $\theta = id$ que por el lema anterior es equivalente a que $id \ll w_a$ para cualquier $a \in A$. $\square$

Observación 5.1.12. *Observemos que para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a, b \in A$, si $a \leq b$*

$$a \lessdot b \Leftrightarrow v_b \leq w_a$$

Para la ida evaluamos, suponemos que $a \lessdot b$ y vemos que

$$v_b(a) = (b \succ a) = a$$

y por el lema 1.3.38 tenemos que $v_b \leq w_a$. Para el regreso basta evaluar ambos núcleos en a y queda

$$(b \succ a) = v_b(a) \leq w_a(a) = a$$

y como ya tenemos que $a \leq b$ concluimos que $a \lessdot b$.

Corolario 5.1.13. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$ si $cbd = id$ entonces*

$$a \lessdot b \Rightarrow v_b \ll w_a$$

para todo $a, b \in A$.

Demostración. Sean $a, b \in A$ tales que $a \lessdot b$. Así por el lema 2.1.12

$$Cbd(v_b) = Cbd(v_b \vee id \vee u_0) = v_b \vee Cbd(id)$$

pues recuerda que $u_0 = id$. Además nota que $Cbd(id) = cbd^\infty$ por el lema 2.1.11 pero por hipótesis $cbd = id$ entonces $Cbd(id) = id$. Así, $Cbd(v_b) = Cbd(id) = id$. Ahora, como $\Delta = Cbd^\infty$ obtenemos que

$$\Delta(v_b) = Cbd^\infty(v_b) = v_b$$

donde la última igualdad se da por como se construye el operador cerradura en 1.3.21. Esto junto con la observación 5.1.12 nos da que

$$\Delta(v_b) = v_b \leq w_a$$

pues $a \lessdot b$. Aplicando el lema 5.1.6 tenemos que

$$v_b \ll w_a$$

que es lo que queríamos. □

Definición 5.1.14. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ definimos al siguiente operador*

$$\pi(a) = \bigwedge \{x \in A \mid a \ll x\}$$

para cualquier $a \in A$.

Observación 5.1.15. *Nota que*

i) El operador π infla pues si $a \ll x$, en particular $a \leq x$. Por tanto, $a \leq \pi(a)$.

ii) $\delta \leq \pi$ pues por el lema 5.1.4 si $a \ll x$ entonces $\delta(a) \ll x$ para cualquier x substancialmente mayor que a. Así $\delta(a) \leq \pi(a)$ para cualquier $a \in A$.

Lema 5.1.16. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a \in A$*

i) la relación de orden $\leq$ en $[a, 1]$ tiene la CCD

ii) $\delta(a) = 1$

iii) la relación $\lessdot$ en $[a, 1]$ tiene la CCD

se cumplen la implicaciones i)⇒ii)⇒iii).

Demostración. Observemos que por el lema 2.2.18 si tomamos $j = u_a$, como $A_{u_a} = [a, 1]$ tenemos que i) implica que $Cbd(u_a) = tp$ y esto a su vez implica iii). Pero notemos que $Cbd(u_a) = tp$ es equivalente a que $\delta(a) = 1$ pues

$$\delta \circ u_a = \delta \vee u_a = Cbd(id) \vee u_a = Cbd(id \vee u_a) = Cbd(u_a)$$

Aquí usamos el lema 2.1.12 y el lema 1.3.31. Por lo tanto, como Cbd es monótona

$$\delta \circ u_a = Cbd(u_a) = tp \Leftrightarrow \delta(a) = (\delta \circ u_a)(0) = Cbd(u_a)(0) = 1$$

y con esta observación queda i)⇒ii)⇒iii). □

Lema 5.1.17. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a \in A$ las siguientes condiciones son equivalentes*

i) *la relación $\lessdot$ en $[a, 1]$ tiene la CCD*

ii) $(\forall x \in A)(a \ll x \Rightarrow x = 1)$

iii) $\pi(a) = 1$

Demostración. Primero probaremos la primera equivalencia, es decir $i) \Leftrightarrow ii)$. Si suponemos i) y sea $x \in A$ tal que $a \ll x$ tenemos una cadena descendente

$$a \leq \ldots \lessdot x_{r+1} \lessdot x_r \lessdot \ldots \lessdot x_0 \leq x$$

Pero como tenemos la condición de CCD hay un k en los naturales a partir del cual $x_{k+t} = x_k$ para cualquier natural t. Entonces $x_k \lessdot x_k$ lo que implica que $x_k = 1$. Pero como es una cadena descendente $x_r = 1$ para cualquier r en los naturales. Por lo tanto, $x = 1$. Para el regreso hacemos una prueba por contrapositiva y suponemos que existe una $\lessdot$-cadena en $[a, 1]$,descendente que no se estaciona, es decir suponemos que no se cumple i). Digamos que la cadena es

$$a \leq \ldots \lessdot x_{r+1} \lessdot x_r \lessdot \ldots \lessdot x_0 \leq 1$$

Ahora, como la cadena no se estaciona y es descendente hay un natural k para el cual $x_k \neq 1$. Entonces por como esta construida la cadena resulta que $a \ll x_k$ pero $x_k \neq 1$. Lo cual prueba $ii) \Rightarrow i)$.

Además ii)⇔ iii) se da por la misma definición de π, 5.1.14 pues el ínfimo de un conjunto es 1 si y sólo si todos los elementos son 1. Es decir

$$\pi(a) = \bigwedge \{x \in A \mid a \ll x\} = 1 \Leftrightarrow (\forall x \in A)(a \ll x \Rightarrow x = 1)$$

□

Observación 5.1.18. *Sabemos que $\delta \leq \pi$ por la observación 5.1.15, ahora si esto lo levantamos un nivel y lo pasamos a NA resulta que $\Delta \leq \Pi$ pues*

$$\Delta = Cbd_A^{\infty} = cbd_{NA}^{\infty}$$
$$\Pi(j) = \bigwedge \{k \in NA \mid j \ll k\}$$

Teorema 5.1.19. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$*

$$\Delta(j) = \bigwedge \{k \in NA \mid j \ll k\}$$

para cualquier $j \in NA$.

Demostración. Queremos probar $\Delta(j) = \Pi(j)$ para cualquier $j \in NA$. Una de las desigualdades, $\Delta(j) \leq \Pi(j)$, ya está probada por la observación anterior, 5.1.18. Para la otra desigualdad notamos que

$$\Pi(j) = \bigwedge \{k \in NA \mid j \ll k\} \leq \bigwedge \{w_a \mid j \ll w_a\} = \bigwedge \{w_a \mid \Delta(j) \leq w_a\} = \Delta(j)$$

donde la primera desigualdad simplemente se deba a que el conjunto de lado derecho esta contenido en el izquierdo y por tanto se da esa desigualdad de ínfimos. Observemos también que la segunda igualdad se da por el teorema 5.1.6.

□

Teorema 5.1.20. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $j \in NA$ las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $\Delta(j) = tp$

ii) *la relación $\lessdot$ en el intervalo $[j, tp]$ en NA tiene la CCD*

Demostración. Esta prueba es inmediata usando los incisos i) y iii) del lema 5.1.17 para el marco NA y notando que por el lema anterior , 5.1.19, $\Pi(j) = \Delta(j)$ para cualquier núcleo en NA. □

Corolario 5.1.21. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, el marco N^2A es booleano si y solo si la relación $\lessdot$ en NA tiene la CCD.*

Demostración. Si usamos el lema anterior 5.1.20 para $j = id$ obtenemos que

$$\theta = \Delta(id) = tp \Leftrightarrow \text{ la relación en } NA \text{ tiene la CCD}$$

Además el corolario queda probado si recordamos que por el teorema 2.1.13 N^2A es booleano si y sólo si $\theta = tp$. □

Este último resultado es una muy buena caracterización para saber cuando N^2A es booleano. Harold Simmons en [Sim06] nos hace notar que este último corolario 5.1.21 mejora un resultado de Beazer y Macnab que en este trabajo es el lema 2.2.18 tomando a $j = id$.

5.2. La técnica de escisión

Esta sección esta dedicada a probar la implicación i)⇒ ii) del teorema 5.1.6. Es decir, queremos probar que para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$, $j \in NA$ y $a \in A$ ocurre que

$$\Delta(j) \leq w_a \Rightarrow \Delta(j) \ll w_a$$

Para poder probar esto introducimos nuevos conceptos y llevamos a cabo algunas construcciones. Esta prueba la hace Harold Simmons en [Sim14] y es una prueba que usa lo que el llama técnica de escisión.

Definición 5.2.1. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ una extensión es una pareja $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$*

$$\mathfrak{a} = (a(r), r \in R) \qquad \mathfrak{b} = (b(r), r \in R)$$

de familias de A indicadas bajo un conjunto R de tal forma que:

i) $(b(r) \succ a(r)) = a(r) \qquad \forall r \in R$

ii) $b(r) \wedge b(s) \leq a(r) \vee a(s) \qquad \forall r, s \in R$ *con* $r \neq s$

Observación 5.2.2. *Notemos que la condición ii) que pedimos en la definición de una extensión 5.2.1 es equivalente a pedir que $v_{b(r)} \leq w_{a(r)}$ para cualquier $r \in R$. Esto se debe a que*

$$a(r) = (b(r) \succ a(r)) = v_{b(r)}$$

y por el lema 1.3.38 es equivalente a que $v_{b(r)} \leq w_{a(r)}$.

Lema 5.2.3. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ una extensión en A indicada por el conjunto R, entonces*

$$w_{a(r)} \vee w_{a(s)} = u_{a(r)} \vee u_{a(s)} \vee v_{b(r)} \vee v_{b(s)} = tp$$

para todo $r, s \in R$ con $r \neq s$.

Demostración. Sean $r, s \in R$ tales que $r \neq s$ y consideremos $a = a(r) \vee a(s)$ y $b = b(r) \wedge b(s)$, entonces $b \leq a$ pues $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ es una extensión en A. Así

$$u_a \vee v_b = u_{a(r)} \vee u_{a(s)} \vee v_{b(r)} \vee v_{b(s)} \leq u_{a(r)} \vee u_{a(s)} \vee w_{a(r)} \vee w_{a(s)} = w_{a(r)} \vee w_{a(s)}$$

donde la primera igualdad se da porque, en general, $u_c \vee u_d = u_{c \vee d}$ y $v_c \vee v_d = v_{c \wedge d}$ por como funciona el supremo y por las propiedades de la implicación 1.1.12. La desigualdad se da por la observaación 5.2.2. Y la última igualdad es cierta por el lema 1.3.38 ya que $u_{a(r)}(a(r)) = a(r)$ y $u_{a(s)}(a(s)) = a(s)$.

Además $u_b \leq u_a$ pues $a \leq b$, entonces

$$u_b \vee v_b \leq v_b \vee u_a = u_{a(r)} \vee u_{a(s)} \vee v_{b(r)} \vee v_{b(s)} \leq w_{a(r)} \vee w_{a(s)}$$

y como u_b y v_b son complementarios, por el lema 1.3.31, obtenemos que

$$w_{a(r)} \vee w_{a(s)} = u_{a(r)} \vee u_{a(s)} \vee v_{b(r)} \vee v_{b(s)}) = tp$$

□

Definición 5.2.4. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ una extensión en A indicada por el conjunto R definimos al núcleo inducido de la extensión como*

$$j = \bigwedge \left\{ w_{a(r)} \mid r \in R \right\}$$

Es evidente que j es un núcleo pues es un ínfimo de núcleos.

Observación 5.2.5. *Hay otra forma de tomar a las extensiones, en vez de considerar un conjunto R indicamos sobre algún ordinal. Si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ es una extensión la podemos escribir así*

$$\mathfrak{a} = (a(\alpha), \alpha \leq k) \qquad \mathfrak{b} = (b(\alpha), \alpha \leq k)$$

donde k es un ordinal $k \in OR$. Denotaremos OR a la clase de todos los ordinales. O bien, pues será útil más adelante, pedimos que $a(\alpha) = 1$ y $b(\alpha) = 0$ a partir de un $k \in OR$ y simplemente escribimos

$$\mathfrak{a} = (a(\alpha), \alpha \in OR) \qquad \mathfrak{b} = (b(\alpha), \alpha \in OR)$$

pues si $a(\alpha) = 1$ y $b(\alpha) = 0$ a parir de un ordinal se siguen cumpliendo las condiciones de la definición 5.2.1.

Construcción 5.2.6. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a, b \in A$. Supongamos que $a = \bigwedge X$ donde*

$$X = (x(\alpha), \alpha \in OR)$$

de tal forma que hay un ordinal κ tal que $x(\beta) = 1$ para cualquier $\kappa < \beta$.

Así definimos recursivamente sobre los ordinales a la siguiente familia

$$\begin{aligned} b(0) &= b \\ b(\alpha^+) &= b(\alpha) \wedge x(\alpha) \\ b(\alpha) &= \bigwedge \{b(\lambda) \mid \lambda < \alpha\} \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal límite} \end{aligned}$$

y además definimos otra cadena donde $a(\alpha) = (b(\alpha) \succ x(\alpha))$.

Así generamos una cadena descendente

$$b = b(0) \geq b(1) \geq b(2) \geq ....$$

que como esta contenida en el conjunto A y como la cadena X en algún punto se vuelve la contante 1, la cadena $b(\_)$ se hace eventualmente constante.

También la cadena $a(\_)$ es eventualmente 1. Esto se debe a que como $b(\_)$ es eventualmente constante, digamos a partir de $\theta \in OR$ y X también es constante 1, digamos a partir de $\kappa \in OR$, entonces hay $\gamma \in OR$, el máximo entre κ y θ, a partir del cual

$$b(\alpha) = 1 \wedge b(\alpha) \leq x(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq (b(\alpha) \succ x(\alpha)) = a(\alpha)$$

donde $\gamma < \alpha$ y el si y sólo si se da por la propiedad característica de la implicación. Finalmente notemos que $a \leq a(\alpha)$ pues

$$a \leq x(\alpha) \leq (b(\alpha) \succ x(\alpha)) = a(\alpha)$$

donde la primera desigualdad se da porque $a = \bigwedge X$ y la segunda se da por las propiedades de la implicación 1.1.12.

Observación 5.2.7. *Observa que con esta construcción 5.2.6*

$$b(\alpha) = b \wedge \bigwedge \{x(\beta) \mid \beta < \alpha\}$$

para cualquier $\alpha \in OR$. Para probar esto usamos inducción sobre ordinales. Para $\alpha = 0$ notamos que

$$b \wedge \bigwedge \{x(\beta) \mid \beta < \alpha\} = b = b(0)$$

Si $\alpha = \beta^+$ y suponemos que la igualdad se vale para β, entonces

$$b \wedge \bigwedge \left\{x(\lambda) \mid \lambda < \beta^+\right\} = b \wedge \bigwedge \{x(\lambda) \mid \lambda < \beta\} \wedge x(\beta) = b(\beta) \wedge x(\beta) = b(\beta^+) = b(\alpha)$$

Ahora bien, si α es un ordinal límite y suponemos que para cualquier $\beta < \alpha$ se vale la igualdad , nos queda

$$b(\alpha) = \bigwedge \{b(\lambda) \mid \lambda < \alpha\} = \bigwedge \left\{b \wedge \bigwedge \{x(\beta) \mid \beta < \lambda\} \mid \lambda < \alpha\right\} =$$
$$= b \wedge \bigwedge \left\{\bigwedge \{x(\beta) \mid \beta < \lambda\} \mid \lambda < \alpha\right\} = b \wedge \bigwedge \{x(\beta) \mid \beta < \alpha\}$$

Y así queda probada la propiedad que queríamos.

Observación 5.2.8. *Notemos que a partir de la construcción anterior 5.2.6, generamos dos familias en A*

$$\mathfrak{a} = (a(\alpha), \alpha \in OR)$$

$$\mathfrak{b} = (b(\alpha), \alpha \in OR)$$

Pero si consideramos que X el conjunto a partir del cual generamos esta familia cumple que $X \subseteq A_l$ donde $l \in NA$ y $b \in A_l$, entonces $a \in A_l$ y $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son familias en A_l. Es claro que $a \in A_l$ pues $a = \bigwedge X$ y A_l es cerrado bajo ínfimos arbitrarios.

Para probar que $\mathfrak{b}$ es una familia en A_l necesitamos usar inducción sobre ordinales. Para $\alpha = 0$, $b(0) = b \in A_l$. Ahora, si $\alpha = \beta^+$ y suponemos que $b(\beta) \in A_l$ como tenemos que

$$b(\alpha) = b(\beta) \wedge x(\beta)$$

y $x(\beta) \in A_l$ entonces $b(\alpha) \in A_l$ pues A_l es cerrado bajo ínfimos. Si α es un ordinal límite y suponemos que $b(\beta) \in A_l$ para cualquier $\beta < \alpha$ como

$$b(\alpha) = \bigwedge \{b(\beta) \mid \beta < \alpha\}$$

y A_l es cerrado bajo ínfimos arbitrarios, $b(\alpha) \in A_l$.

Ahora, A_l es cerrado bajo implicaciones pues es un conjunto fijo por el lema 1.2.24, y recuerda que la implicación de A_l se calcula igual que en A, entonces $a(\alpha) = (b(\alpha) \succ x(\alpha)) \in A_l$.

Lema 5.2.9. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $a, b \in A$ tal que $a = \bigwedge X$. La construcción 5.2.6 produce una extensión $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Además*

$$a \leq j(0) \leq (b \succ a)$$

donde j es el núcleo inducido por $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Demostración. Por como hicimos la construcción 5.2.6 tenemos que

$$(b(\alpha) \succ a(\alpha)) = (b(\alpha) \succ (b(\alpha) \succ x(\alpha))) = (b(\alpha) \succ x(\alpha)) = a(\alpha)$$

donde la segunda igualdad se da porque $v_{b(\alpha)}$ es un núcleo y por tanto idempotente. Es decir, se cumple que $(b(\alpha) \succ (b(\alpha) \succ x(\alpha))) = v_{b(\alpha)}(v_{b(\alpha)}(x(\alpha))) = v_{b(\alpha)}(x(\alpha)) = (b(\alpha) \succ x(\alpha))$.

Además si $\alpha < \beta$ son ordinales, como $\mathfrak{b}$ forma una familia descendente tenemos que

$$b(\beta) \leq b(\alpha^+) \leq x(\alpha)$$

donde la segunda desigualdad se da porque como definimos a $\mathfrak{b}$ cuando tenemos un ordinal sucesor. Entonces nos quedaría que

$$b(\alpha) \wedge b(\beta) = b(\beta) \leq x(\alpha) \leq a(\alpha) \leq a(\alpha) \vee a(\beta)$$

pues la primera igualdad se da porque es una familia descendente y la penúltima desigualdad es simplemente por la definición de $a(\alpha)$ ya que

$$x(\alpha) \leq (b(\alpha) \succ x(\alpha)) = a(\alpha)$$

por las propiedades de la implicación, 1.1.12. Así quedan probados las dos condiciones de la definición 5.2.1. Vale la pena recordar que a pesar de que indicamos con ordinales, por como construimos $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, las familias se hacen eventualmente constantes y quedan bien definidas. Por lo tanto $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ es una extensión en A.

Falta probar que el núcleo inducido

$$j = \bigwedge \left\{ w_{a(\alpha)} \mid \alpha \in OR \right\}$$

cumple que $a \leq j(0) \leq (b \succ a)$. Para esto vamos a definir recursivamente una nueva familia $\mathfrak{c}$ de elementos

$$\begin{aligned} c(0) &= b \\ c(\alpha^+) &= c(\alpha) \wedge a(\alpha) \\ c(\alpha) &= \bigwedge \{c(\beta) \mid \beta < \alpha\} \qquad \alpha \text{ un ordinal límite} \end{aligned}$$

Resulta que $b(\alpha) = c(\alpha)$ para cualquier $\alpha \in OR$ y esto lo probamos por inducción. Para $\alpha = 0$ tenemos que $c(0) = b = b(0)$. Ahora, si $\alpha = \beta^+$ y suponemos que $b(\beta) = c(\beta)$ tenemos que

$$\begin{aligned} c(\alpha) = c(\beta^+) &= c(\beta) \wedge a(\beta) = b(\beta) \wedge a(\beta) = b(\beta) \wedge (b(\beta) \succ x(\alpha)) = \\ &= b(\beta) \wedge x(\alpha) = b(\beta^+) = b(\alpha) \end{aligned}$$

donde para la quinta igualdad usamos las propiedades de la implicación, 1.1.12. Finalmente si α es un ordinal limite y suponemos que $c(\beta) = b(\beta)$ para cualquier $\beta < \alpha$ obtenemos

$$c(\alpha) = \bigwedge \{c(\beta) \mid \beta < \alpha\} = \bigwedge \{b(\beta) \mid \beta < \alpha\} = b(\alpha)$$

Teniendo en mente esta nueva familia y como está definido el núcleo inducido, calculamos lo siguiente

$$j(0) = \left(\bigwedge \left\{ w_{a(\alpha)} \mid \alpha \in OR \right\} \right)(0) = \bigwedge \{a(\alpha) \mid \alpha \in OR\}$$

Además sabemos que, por como esta definida la familia $\mathfrak{a}$ y por un uso del lema 1.1.12, $x(\alpha) \leq a(\alpha)$ para cualquier $\alpha \in OR$. Así

$$a = \bigwedge X \leq \bigwedge \{a(\alpha) \mid \alpha \in OR\} = j(0)$$

Falta probar la otra desigualdad, para esto primero observamos que para cualquier $\alpha \in OR$:

$$b \wedge \bigwedge \{a(\beta) \mid \beta < \alpha\} = b(\alpha) = b \wedge \bigwedge \{x(\beta) \mid \beta < \alpha\}$$

La segunda igualdad se da por la observación 5.2.7 y la primera igualdad es cierta pero debe probarse por inducción. Si $\alpha = 0$ entonces

$$b \wedge \bigwedge \{a(\beta) \mid \beta < 0\} = b = b(0)$$

Ahora si suponemos que $\alpha = \beta^+$ y β cumple la propiedad nos queda que

$$\begin{aligned} b \wedge \bigwedge \{a(\lambda) \mid \lambda < \alpha\} &= b \wedge \bigwedge \{a(\lambda) \mid \lambda < \beta\} \wedge a(\beta) = b(\beta) \wedge a(\beta) = \\ &= c(\beta) \wedge a(\beta) = c(\beta^+) = b(\beta^+) = b(\alpha) \end{aligned}$$

donde usamos la definición de $\mathfrak{c}$ y que $c(\alpha) = b(\alpha)$ para cualquier $\alpha \in OR$. Finalmente, si α es un ordinal límite y suponemos que la igualdad es cierta para cualquier ordinal $\beta < \alpha$ obtenemos

$$\begin{aligned} b(\alpha) &= \bigwedge \{b(\lambda) \mid \lambda < \alpha\} = \\ &= \bigwedge \Big\{b \wedge \bigwedge \{a(\beta) \mid \beta < \lambda\} \mid \lambda < \alpha\Big\} = \\ &= b \wedge \bigwedge \Big\{\bigwedge \{a(\beta) \mid \beta < \lambda\} \mid \lambda < \alpha\Big\} = \\ &= b \wedge \bigwedge \{a(\beta) \mid \beta < \alpha\} \end{aligned}$$

Entonces tomando en cuenta la igualdad a la que llegamos antes de la inducción anterior, nos queda que

$$b \wedge j(0) = b(\theta) = b \wedge \bigwedge X = b \wedge a \leq a$$

si tomamos un ordinal θ suficientemente grande. Es decir,tomamos el máximo entre γ y κ donde γ es el ordinal a partir del cual la familia $\mathfrak{a}$ se vuelve la constante 1 y κ el ordinal a partir del cual el conjunto X se vuelve constante.

Entonces, usando la propiedad característica de la implicación, como $b \wedge j(0) \leq a$ queda que

$$j(0) \leq (b \succ a)$$

$\square$

Lema 5.2.10. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$. Si $a, b \in A$ tales que $(b \succ a) = a$ y $cbd(a) = a$, entonces la construcción 5.2.6 nos da una extensión en A que cumple que*

$$j \lessdot w_a \qquad \textit{con} \quad j(0) = a$$

donde j es el núcleo inducido de la extensión.

Demostración. Como $a = cbd(a) = \bigwedge\{x \in A \mid a \lessdot x\}$ tomamos al conjunto $X = \{x \in A \mid a \lessdot x\}$ de tal forma que $a = \bigwedge X$. Para fines prácticos ordenamos el conjunto X

$$X = (x(\alpha), \alpha \in OR)$$

donde a partir de un $\theta \in OR$, $x(\alpha) = 1$ para cualquier $\theta < \alpha$. Ahora sí contamos con todas las hipótesis para formar una extensión $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ como en 5.2.6. Recordemos que en efecto es una extensión pues lo probamos en el lema anterior 5.2.9. Además por este mismo lema, si j es el núcleo inducido por $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, $a \leq j(0) \leq (b \succ a)$. Pero por hipótesis $(b \succ a) = a$ entonces

$$j(0) = a$$

lo cual prueba una parte de este teorema. Ahora bien, como $j(0) = a$ y j es idempotente,obtenemos que

$$j(a) = j(j(0)) = j(0) = a$$

lo cual, por el lema 1.3.38, nos dice que $j \leq w_a$. Sólo falta probar que $(w_a \succ j) = j$. Para esto consideramos $k = (w_a \succ j)$ que por 1.1.12 implica que $j \leq k$. Además

$$k \wedge w_a = (w_a \succ j) \wedge w_a = w_a \wedge j \leq j$$

donde la tercera igualdad también se debe al lema 1.1.12. Por otro lado,

$$w_a(x(\alpha)) = ((x(\alpha) \succ a) \succ a)) = (a \succ a) = 1$$

donde la segunda igualdad se debe a que $a \lessdot x(\alpha)$ para cualquier $\alpha \in OR$ pues así definimos el conjunto X. Usando todo lo anterior nos queda que

$$\begin{aligned} k(a) \leq & k(x(\alpha)) \leq k(x(\alpha)) \wedge 1 = k(x(\alpha)) \wedge w_a(x(\alpha)) \leq j(x(\alpha)) \\ \leq & w_{a(\alpha)}(x(\alpha)) = a(\alpha) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da por como se define al núcleo inducido 5.2.4. La última igualdad es cierta pues, por definición de $a(\alpha)$ y por el lema 1.1.12, $x(\alpha) \leq a(\alpha)$ entonces

$$((x(\alpha) \succ a(\alpha)) \succ a(\alpha)) = (1 \succ a(\alpha)) = a(\alpha)$$

Pero todo esto ocurre para cualquier $\alpha \in OR$ entonces

$$k(a) \leq \bigwedge \{a(\alpha) \mid \alpha \in OR\} = \bigwedge \left\{w_{a(\alpha)} \mid \alpha \in OR\right\} = j(0) = a$$

Por lo tanto, $k(a) = a$. Usando, una vez más, el lema 1.3.38 esto es equivalente a que $k \leq w_a$. Esto implica que

$$k = k \wedge w_a \leq j$$

pero como ya teníamos que $j \leq k$, obtenemos que $j = k = w_a \succ j$ que era lo que buscábamos. □

Definición 5.2.11. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$, $j, l \in NA$ y $b \in A$ decimos que*

$$l \propto j \preceq b$$

si j es inducido por alguna extensión $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ donde

$$a(r) \in A_l \qquad b(r) \in A_l \qquad b(r) \leq b$$

para cualquier $r \in R$ donde R es el conjunto de la extensión. Además como $a(r) \in A_l$, es decir, $l(a(r)) = a(r))$ para toda $r \in R$, por el lema 1.3.38

$$l \leq \bigwedge \left\{w_{a(r)} \mid r \in R\right\} = j$$

Lema 5.2.12. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$. Si $l \in NA$ y $b \in A$ tales que $b \in A_l$ y $\Delta(l) = l$, entonces para toda $a \in A_l$ que cumpla que $(b \succ a) = a$ se tiene que*

$$l \propto j \preceq b \qquad j \lessdot w_a \qquad j(0) = a$$

para algún $j \in NA$.

Demostración. Sea $a \in A_l$ tal que $(b \succ a) = a$. Como $\Delta(l) = l$, por el lema 4.2.6, A_l es cohesivo y entonces existe $X \subseteq A_l$ tal que $a = \bigwedge X$ y $a \lessdot x$ para cualquier $x \in X$. Ahora, como $a \leq cbd(a)$ pues cbd infla y

$$cbd(a) \leq \bigwedge X = a$$

tenemos que $cbd(a) = a$. Observemos que la primera igualdad es inmediata de la definición de cbd y de X. Así cumplimos con las hipótesis del lema 5.2.10 que por la construcción 5.2.6 nos da una extensión $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ tal que

$$j \lessdot w_a \qquad \text{y} \qquad j(0) = a$$

donde j es el núcleo inducido por la extensión. Además $b(\alpha) \in A_l$ y $a(\alpha) \in A_l$ por la observación 5.2.8. Y la misma construcción de la extensión nos da que $b(\alpha) \leq b$. Por lo tanto,

$$l \propto j \preceq b$$

$\square$

Lema 5.2.13. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y R un conjunto tal que tenemos la siguiente familia de elementos en A*

$$p_r \leq k_r \lessdot j_r \qquad \forall r \in R$$

donde p_r es complementado. Si $p_r \vee p_s = 1$ para cualesquiera $r \neq s \in R$, entonces para

$$k = \bigwedge \{k_r \mid r \in R\} \qquad y \qquad j = \{j_r \mid r \in R\}$$

se tiene que $k \lessdot j$.

Demostración. Damos $l = (j \succ k)$, entonces $l \wedge j = (j \succ k) \wedge j = k \wedge j \leq k$ y $k \leq l$ por el lema 1.1.12. Para terminar la prueba basta ver que $l \leq k$ para que así $k \lessdot j$. Para esto consideramos, para cualquier $r \in R$, al siguiente conjunto

$$\bar{j_r} = \bigwedge \{j_s \mid r \neq s \in R\}$$

entonces es claro, por definición de j que

$$j = \bar{j_r} \wedge j_r$$

Ahora bien si $r \neq s \in R$

$$1 = p_r \vee p_s \leq p_r \vee j_s$$

pues $p_r \leq j_r$ para cualquier $r \in R$. Queda que $1 = p_r \vee j_s$. Entonces

$$j_s \geq \neg p_r \wedge j_s = (\neg p_r \wedge p_r) \vee (\neg p_r \wedge j_s) = \neg p_r \wedge (p_r \vee j_s) = 1 \wedge \neg p_r = \neg p_r$$

donde usamos que p_r es complementado, es decir, que se cumple que $p_r \vee \neg p_r = 1$ y $\neg p_r \wedge p_r = 0$. Pero como $\neg p_r \leq j_s$ para cualquier $r \neq s$, $\neg p_r \leq \bigwedge \{j_s \mid r \neq s \in R\} = \bar{j_r}$. A partir de todo lo anterior llegamos a que

$$l \wedge \neg p_r \wedge j_r \leq l \wedge \bar{j_r} \wedge j_r = l \wedge j \leq k \leq k_r$$

Esta desigualdad por la propiedad característica de la implicación ocurre si y sólo si

$$l \wedge \neg p_r \leq j_r \succ k_r = k_r$$

donde la última igualdad se debe a que, por hipótesis, $k_r \lessdot j_r$. Así

$$l \leq l \vee p_r = (l \vee p_r) \wedge (\neg p_r \vee p_r) = p_r \vee (l \wedge \neg p_r) \leq pr \vee k_r = k_r$$

Observa que para esta desigualdad usamos que p_r tiene complemento. Finalmente como $l \leq k_r$ para cualquier $r \in R$ ocurre que

$$l \leq \bigwedge \{k_r \mid r \in R\} = k$$

lo que completa la prueba. □

Lema 5.2.14. *Sean $A \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$, $l \in NA$ y $b \in A_l$. Si $\Delta(l) = l$ y $l \propto j \preceq b$ para algún $j \in NA$, entonces hay un $k \in NA$ tal que*

$$l \propto k \preceq b \qquad y \qquad k \lessdot j$$

Demostración. Como $l \propto k \preceq b$ tenemos una extensión $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ que es testigo de esta relación

$$\mathfrak{a} = (a(r), r \in R) \qquad \mathfrak{b} = (b(r), r \in R)$$

que cumple que $a(r) \in A_l$, $b(r) \in A_l$ y $b(r) \leq b$ para toda $r \in R$, con R un conjunto. Por esta misma relación es que j es el núcleo inducido de esta extensión. Además se cumple, por definición de extensión 5.2.1 que

$$b(r) \succ a(r) = a(r) \qquad \forall r \in R$$

y

$$b(r) \wedge b(s) \leq a(r) \vee a(s) \qquad \forall r \neq s \in R$$

Teniendo esto en mente, consideremos un $r \in R$ fijo. Como $\Delta(l) = l$ y $b(r) \in A_l$ podemos usar el lema 5.2.12 para los elementos $b(r)$ y $a(r)$ pues se cumplen las hipóteis, $a(r) \in A_l$ y $(b(r) \succ a(r)) = a(r)$. Y obtenemos que hay un $k_r \in NA$ tal que

$$l \propto k_r \preceq b(r) \qquad k_r \lessdot w_{a(r)} \qquad k_r(0) = a(r)$$

Ahora bien,la relación $l \propto k_r \preceq b(r)$ tiene como testigo a una extensión, y ahora uso la notación con ordinales 5.2.5 pues además así lo hicimos para la prueba de 5.2.12,

$$\mathfrak{a}_r = (a(r, \alpha), \alpha \in OR) \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{b}_r = (b(r, \alpha), \alpha \in OR)$$

donde se cumple que

$$a(r) \leq a(r, \alpha) \quad a(r, \alpha) \in A_l \quad b(r, \alpha) \leq b(r) \quad b(r, \alpha) \in A_l$$

para cualquier $\alpha \in OR$. Estas propiedades son ciertas pues la forma en la que se construye la extensión en el lema 5.2.12 es con 5.2.6. Como es una extensión sabemos que

$$(b(r,\alpha) \succ a(r,\alpha)) = a(r,\alpha)$$

para cualquier $\alpha \in OR$ y

$$b(r,\alpha) \wedge b(r,\beta) \leq a(r,\alpha) \vee a(r,\beta)$$

para cualquier $\alpha \neq \beta$. Y además el núcleo inducido es

$$k_r = \bigwedge \left\{ w_{a(r,\alpha)} \mid \alpha \in OR \right\}$$

esto lo sabemos porque así esta dada, debido a 5.2.11, la extensión testigo de $l \propto k_r \preceq b$.

Si hacemos esto para cualquier $r \in R$ tenemos una "R-familia"de extensiones. De todo lo anterior, tenemos lo siguientes propiedades

$$a(r,\alpha), (b(r,\alpha) \in A_l$$

$$b(r,\alpha) \leq b(r) \leq b$$

$$a(r) \leq a(r,\alpha)$$

$$(b(r,\alpha) \succ a(r,\alpha)) = a(r,\alpha)$$

para cualquier $(r,\alpha) \in R \times OR$ y

$$b(r,\alpha) \wedge b(s,\beta) \leq a(r,\alpha) \vee a(s,\beta)$$

para $(r,\alpha) \neq (s,\beta)$. Esta última propiedad es cierta pues si las parejas ordenadas son distintas entonces hay dos casos. Si $r \neq s$ entonces

$$b(r,\alpha) \wedge b(s,\beta) \leq b(r) \wedge b(s) \leq a(s) \vee a(r) \leq a(r,\alpha) \vee a(s,\beta)$$

pues usamos las propiedades anteriores y el hecho de que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ es una extensión. Falta el caso en el que $r = s$ y $\alpha < \beta$, pero esto caso es inmediato pues lo tenemos de la extensión $(\mathfrak{a}_r, \mathfrak{b}_r)$. Todas estas propiedades nos hacen ver que

$$(a(r,\alpha), (r,\alpha) \in R \times OR) \qquad (b(r,\alpha), (r,\alpha) \in R \times OR)$$

forman una extensión en A_l indicado bajo $R \times OR$ que a pesar de que $R \times OR$ no es un conjunto se vale notar lo mismo que en la observación 5.2.5 pues eventualmente las familias, por como se construyeron, se detienen. El núcleo inducido por esta extensión sería

$$k = \bigwedge \left\{ w_{a(r,\alpha)} \mid (r, \alpha) \in R \times OR \right\}$$

y cumple que $l \propto k \preceq b$ pues se satisfacen todas las propiedad de la definición 5.2.11. Para terminar la prueba sólo falta probar que $k \lessdot j$. Para esto notemos que

$$k = \bigwedge \left\{ w_{a(r,\alpha)} \mid (r, \alpha) \in OR \right\} = \bigwedge \left\{ \bigwedge \left\{ w_{a(r,\alpha)} \mid \alpha \in OR \right\} \mid r \in R \right\} =$$
$$= \bigwedge \{k_r \mid r \in R\}$$

Por otro lado, para cada $r \in R$ tomamos $p_r = u_{a(r)} \vee v_{b(r)}$. Estos núcleos cumplen ser complementarios por el lema 1.3.31. Además por el lema 1.3.31

$$p_r(a(r)) = (u_{a(r)} \vee v_{b(r)}) = v_{b(r)}(u_{a(r)}(a(r))) = (b(r) \succ a(r)) = a(r)$$

donde la última igualdad se da por las propiedades de la extensión. Pero esto es equivalente por el lema 1.3.38 a que

$$p_r \leq w_{a(r)}$$

para cualquier $r \in R$. Ahora bien, por el lema 5.2.3

$$p_r \vee p_s = u_{a(r)} \vee v_{b(r)} \vee u_{a(s)} \vee v_{b(s)} = tp$$

para cualquier $r \neq s \in R$. También recordemos que $k_r(0) \leq a(r)$ que por el lema 1.3.35 implica que $u_{a(r)} \leq k_r$. Además

$$v_{b(r)} \leq v_{b(r,\alpha)} \leq w_{a(r,\alpha)}$$

donde la primera desigualdad se da por el lema 1.1.12 pues $b(r, \alpha) \leq b(r)$. La segunda desigualdad se da por el lema 1.3.38 ya que $v_{(b(r),\alpha)}(a(r, \alpha)) = (b(r, \alpha) \succ a(r, \alpha)) = a(r, \alpha)$. Entonces, por como esta definido k_r, $v_{b(r)} \leq k_r$. Finalmente, podemos decir que

$$p_r = u_{a(r)} \vee v_{b(r)} \leq k_r \lessdot w_{a(r)}$$

y se cumplen las hipótesis del lema anterior5.2.13. Por lo tanto, $k \lessdot j$. □

Corolario 5.2.15. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$, $l \in NA$ y $b \in A_l$, si $\Delta(l) = l$ entonces*

$$l \propto j \preceq b \Rightarrow l \ll j$$

para cualquier $j \in NA$.

Demostración. Sea $j \in NA$ tal que $l \propto j \preceq b$ entonces por el lema anterior 5.2.14 hay $j^1 \in NA$ tal que

$$l \propto j^1 \preceq b \qquad j^1 \lessdot j$$

Si usamos otra vez el lema 5.2.14 llegamos a que hay $j^2 \in NA$ tal que

$$l \propto j^2 \preceq b \qquad j^2 \lessdot j^1 \lessdot j$$

y así sucesivamente hasta generar una cadena

$$l \leq ... \lessdot j^n \lessdot ... \lessdot j^2 \lessdot j^1 \lessdot j$$

y por lo tanto $l \ll j$. $\square$

Teorema 5.2.16. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$, si $a \in A$ y $l \in NA$ tal que $\Delta(l) = l$, entonces*

$$l \leq w_a \Rightarrow l \ll w_a$$

Demostración. Como $\Delta(l) = l$ y $l \leq w_a$ si damos $b = 1$ se cumple que $a, b \in A_l$ y $(b \succ a) = a$ y podemos usar el lema 5.2.12. Entonces

$$l \propto j \preceq b \qquad j \lessdot w_a \qquad j(0) = a$$

para algún $j \in NA$. Y usando el corolario 5.2.14, tenemos que $l \ll j \lessdot w_a$ y por la observación 5.1.2 y el lema 5.1.3 queda que $l \ll w_a$. $\square$

Este último teorema nos da la prueba a lo que queríamos. Pues como $\Delta(\Delta(j)) = \Delta(j)$ usamos 5.2.16 y queda probado que para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$, $j \in NA$ y $a \in A$ ocurre que

$$\Delta(j) \leq w_a \Rightarrow \Delta(j) \ll w_a$$

Y así queda finalmente completa la prueba del teorema 5.1.6.

Capítulo 6

La reflexión booleana

Ahora sí atacar el problema de la reflexión booleana y saber cuando a un marco le podemos asociar de manera universal un álgebra booleana completa y quien sería ésta. Para este capítulo es importante que tengamos en mente la definición de relfexión booleana 1.1.6.

6.1. El ensamble y los morfismos canónicos

Recordemos que para $A \in \mathfrak{Frm}$ tenemos, ver definición 1.3.45, el siguiente morfismo

$$A \xrightarrow{\eta_A} NA$$

que es epimorfismo e inyectivo por el lema 1.3.46 y además resuelve el problema de la complementación booleana, esto ya lo probamos en el teorema 1.3.50. Esta condición que se cumple para este morfismo se asemeja a la reflexión booleana, sin embargo NA no tiene porque ser un álgebra booleana completa. Debe de llamarnos la atención esto y a continuación veremos la importancia. Queremos extender esta idea y construir la torre de ensambles con morfismos canónicos, esto lo hacemos recursivamente. La idea es tener la torre

$$A \quad NA \quad N^2A \quad ... \quad N^{\alpha}A \quad ...$$

que quedaría definida formalmente como sigue

$$\begin{aligned} N^0A &= A \\ N^{\alpha^+}A &= N(N^{\alpha}) \\ N^{\alpha}A &= colim_{\beta<\alpha} N^{\beta}A \quad \alpha \text{ ordinal límite} \end{aligned}$$

el colímite en el caso del ordinal límite se obtiene a partir de los siguientes morfismos

$$c^{\alpha}_{\beta}\colon N^{\beta}A \longrightarrow N^{\alpha}A$$

donde

$$\begin{aligned}
c^{\alpha}_{\alpha} &= id_{N^{\alpha}A} \\
c^{\alpha^+}_{\beta} &= \eta_{N^{\alpha}A} \circ c^{\alpha}_{\beta} \quad \text{con } \beta \leq \alpha \\
c^{\lambda}_{\beta} &= \text{ es el morfismo canónico } N^{\beta} \longrightarrow colim_{\alpha<\lambda} N^{\alpha}A \text{ cuando } \beta < \lambda \text{ y } \lambda \text{ es límite} \\
c^{\alpha}_{\lambda} &= \text{ es el morfismo determinado por } \{c^{\alpha}_{\beta} \mid \beta < \lambda\} \text{ cuando } \lambda < \alpha \text{ y } \alpha \text{ es límite}
\end{aligned}$$

Observemos que en particular $c^{\alpha^+}_{\alpha}$ es lo mismo que hablar del morifismo $\eta_{N^{\alpha}A}$. El siguiente diagrama muestra más o menos como se ven estos morfismos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[rrrr, bend left] \arrow[rrrrr, bend left] \arrow[drrr] \arrow[ddrrr] & N^2A \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "c^{\beta}_2"] \arrow[rrrr, bend left] \arrow[drr] \arrow[ddrr] & \dots & \dots \arrow[r] & N^{\beta}A \arrow[r, "\eta_{N^{\beta}A}"] \arrow[dl, "c^{\alpha}_{\beta}"'] \arrow[ddl] & N^{\beta^+}A \arrow[r] \arrow[dll] \arrow[ddll, "c^{\lambda}_{\beta}"'] & \dots \\
 & & & N^{\alpha}A \arrow[d, "c^{\lambda}_{\alpha}"'] & & & \\
 & & & N^{\lambda}A & & &
\end{tikzcd}$$

donde suponemos que $\beta < \alpha < \lambda$ y α y λ son límites.

En esta definición usamos la notación de Todd Wilson que aparece en [Wil94] pero que también se puede encontrar en [Joh86]. Además en el documento de Wilson se pueden encontrar las pruebas de que cada uno de los morfismos c^{α}_{β} para cualesquiera $\beta < \alpha$ oridnales, son inyectivos y epis. También se encuentra la prueba de que

$$c^{\lambda}_{\alpha} \circ c^{\alpha}_{\beta} = c^{\lambda}_{\beta}$$

para cualquier $\beta < \alpha < \lambda$.

En particular, escribiremos η^{α}_{A} al morfismo

$$A \xrightarrow{c^{\alpha}_{0}} N^{\alpha}A$$

para cualquier α ordinal. El caso de η_A^0 lo analizamos en el cápitulo de los preliminares y vimos en el teorema 1.3.50 que este morfismo resuelve universalmente el problema de la complementación booleana. Este resultado también es cierto para η_A^α. Es decir, η_A^α resuleve universalmente el problema de la reflexión booleana. La prueba de esto no la haremos aquí pero no es muy difícil, se hace por recursión donde el caso base y el caso sucesor son casi inmediatos y para el caso límite solo se usa la propiedad universal del colímite. Hay que observar que aunque esto se cumpla, en general, no implica que $N^\alpha A$ y NA sean isomorfos para cualquier $\alpha \in A$.

Tomando esto en cuenta podemos construir al endofuntor

$$N^\alpha(\_)\colon \mathfrak{Frm} \longrightarrow \mathfrak{Frm}$$

donde cada $A \in \mathfrak{Frm}$ va a dar a $N^\alpha A$ y cualquier morfismo de marcos

$$A \xrightarrow{f} B$$

como tenemos la propiedad de la complementación booleana para η_A^α existe un único morfismo g que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A^\alpha"] \arrow[d, "f"] & N^\alpha A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\eta_B^\alpha"] & N^\alpha B \end{tikzcd}$$

y g será precisamente $N^\alpha f$.

De esta forma queda bien construido la torre de ensambles de un marco y más adelante en este capítulo veremos las consecuencias que tiene para el problema de la reflexión booleana.

6.2. Otras condiciones equivalentes a tener reflexión booleana

Definición 6.2.1. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$.*

i) A es reflexivo si tiene una reflexión booleana.

ii) A esta epimórficamente acotado si hay un cardianal κ tal que para cualquier

$$A \longrightarrow B$$

epimorfismo, se cumple que $|B| \leq \kappa$.

Lema 6.2.2. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $C \in \mathcal{CBA}$ tales que $A \xrightarrow{\gamma} C$ es una reflexión booleana para A. Si $C \xrightarrow{h} C$ es un endomorfismo tal que $h \circ \gamma = \gamma$ entonces $h = Id_C$.*

Demostración. Como γ es la reflexión booleana, existe un único morfismo η tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma"'] & C \\ C \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\eta \circ \gamma = \gamma$. Pero esta propiedad también la cumple h y Id_C y como el morfismo es único resulta que

$$\eta = h = Id_C$$

$\square$

Observación 6.2.3. *Si A tiene dos reflexiones booleanas entonces son isomorfas. Para ver que esto es cierto supongamos que $A \in \mathfrak{Frm}$ y $B, C \in \mathcal{CBA}$ tales que*

$$A \xrightarrow{\beta} B$$

$$A \xrightarrow{\xi} C$$

son reflexiones booleanas para A. Por ser reflexiones existe η y δ morfismos únicos que hacen conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\beta"'] & C \\ B \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\xi"'] & B \\ C \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

es decir $\delta \circ \beta = \xi$ y $\eta \circ \xi = \beta$. Entonces

$$\eta \circ \delta \circ \beta = \eta \circ \beta = \xi$$

y

$$\delta \circ \eta \circ \beta = \delta \circ \xi = \beta$$

Pero por el lema anterior 6.2.2, $\eta \circ \delta = Id_C$ y $\delta \circ \eta = Id_B$. Por lo tanto, η y δ forman un isomorfismo.

Lema 6.2.4. *En la categoría CBA cualquier espimorfismo es suprayectivo.*

Demostración. Sea

$$A \xrightarrow{e} B$$

un epimorfismo de álgebras booleanas completas. Consideramos $E \subseteq B$ la imagen de e entonces tenemos que

$$A \xrightarrow{e} E \xrightarrow{i} B$$

donde i es la inclusión. i es epi pues es composición de epis. Para probar que i es suprayectivo y tener que e es suprayectivo se necesita introducir mucha teoría y trabajar con ideales primos. La prueba es demasiado larga y no vale la pena hacerla pero se puede revisar en [Sim17e]. □

Lema 6.2.5. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ entonces existe al menos un morfismo*

$$A \xrightarrow{f} B$$

tal que f es inyectivo y epi y $B \in \mathcal{CBA}$.

Demostración. Para el marco $A \in \mathfrak{Frm}$ tenemos, por el teorema 1.3.46, que el morfismo

$$A \xrightarrow{\eta_A} A$$

es epi e inyectivo. Para NA tenemos, por el lema 1.2.25, el morfismo inducido por por el núcleo w_{id} o la doble negación

$$NA \xrightarrow{\neg\neg^*} NA_{\neg\neg}$$

Consideremos $f = \neg\neg^* \circ \eta_A$. Sabemos que f es epi pues $\neg\neg^*$ es suprayectivo, en particual epi, y η_A es epi. Por lo tanto, la compososición es epi. Veamos que f es inyectivo. Sean $a, b \in A$ tales que

$$(\neg\neg^* \circ \eta_A)(a) = f(a) = f(b) = (\neg\neg^* \circ \eta_A)(b)$$

.Entonces por como esta definido η_A, 1.3.45

$$\neg\neg u_a = \neg\neg u_b$$

pero como u_a y u_b son elementos complementado, 1.3.31, su doble negación negación son ellos mismos y obtenemos que

$$u_a = u_b$$

y al evaluar en el 0 queda que

$$a = u_a(0) = u_b(0) = b$$

Por lo tanto, f es epi e inyectiva, en particular, mono.

Además recordemos que $NA_{\neg\neg}$ es un álgebra booleana completa por el lema 1.3.43. $\square$

Corolario 6.2.6. *En la categoría $\mathfrak{Frm}$ cualquier epimorfismo de una algebra booleana completa a un marco es suprayectivo.*

Demostración. Sea

$$B \xrightarrow{g} A$$

un epimorfismo con $B \in \mathcal{CBA}$ y $A \in \mathfrak{Frm}$. Entonces por el lema anterior,6.2.5, hay un morfismo

$$A \xrightarrow{f} C$$

que es epi e inyectivo y $C \in \mathcal{CBA}$. Como f y g son epi entonces $f \circ g$ es epi. Pero por el lema 6.2.4, la composición también es suprayectiva. Ahora, sea $a \in A$, $f(a) \in C$ pero por la suprayectividad existe $b \in B$ tal que $f(g(b)) = f(a)$ y como f es inyectiva queda que $g(b) = a$. Por lo tanto , g es subrayectiva. $\square$

Lema 6.2.7. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ y $A \xrightarrow{\gamma} C$ es su reflexión booleana , entonces γ es mono y epi.*

Demostración. Para probar que γ es epi, consideramos

$$C \xrightarrow{f} E \qquad \text{y} \qquad C \xrightarrow{g} E$$

tales que $f \circ \gamma = g \circ \gamma$. Ahora por el lema anterior tenemos un morfismo

$$E \xrightarrow{h} B$$

que es inyectivo y epi y $B \in \mathcal{CBA}$. Entonces usando la propiedad de la relfexión booleana, existe un único morfismo l que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma"] & C \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "h"] & B \\ C \arrow[urrr, "l"] & & & \end{tikzcd}$$

es decir $l \circ \gamma = h \circ f \circ \gamma$. Pero $h \circ g = h \circ f$ y también hacen conmutar el diagrama, entonces como l es único

$$h \circ g = h \circ f = l$$

y h es inyectiva, en particular mono. Por lo tanto, $f = g$. lo que prueba que γ es epi.

Ahora, veamos que γ también es mono. Por el lema anterior 6.2.5 hay un morfismo

$$A \xrightarrow{f} B$$

tal que f es mono y epi y $B \in \mathcal{CBA}$. Entonces por definición de reflexión booleana,1.1.6, hay un morfismo l tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \\ C \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta el diagrama. Es decir, $f = l \circ \gamma$. Pero como f es mono, entonces γ es mono. □

A partir de este momento usaremos que en la categoría de $\mathfrak{Frm}$ se tienen todos los pushouts. Este resultado no se prueba aquí pero se puede buscar en la tesis de Todd Wilson [Wil94] o en el libro de Johnstone [Joh86].

Lema 6.2.8. *Sean $A \in \mathfrak{Frm}$ y $A \xrightarrow{\gamma} C$ su reflexión booleana. Si $A \xrightarrow{\beta} B$ es un epimorfismo de marcos, entonces se cumplen las siguientes condiciones*

i) $|B| \leq |C|$

ii) *B también tiene reflexión booleana y es un cociente de C.*

Demostración. Por hipótesis tenemos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

pero como en $\mathfrak{Frm}$ tenemos todos los pushouts, existe $D \in \mathfrak{Frm}$ y f, g morfismos de marcos tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

y además para cualquier $E \in \mathfrak{Frm}$ y l, k morfismos que cumplan que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "k"'] \\
C \arrow[r, "l"'] & E
\end{tikzcd}$$

conmuta, existe un único morfismo tal que $m \circ g = k$ y $m \circ f = l$.

De lo anterior podemos decir que f y g son epi, pues cruzan al pushout, β es epi por hiótesis y γ es epi por ser la relfexión booleana de A, 6.2.7. Además por el lema 6.2.6 , f es suprayectivo y por tanto $D \in CBA$ y D es cociente de C. Además como f es suprayectivo $|D| \leq |C|$.

Ahora, afirmamos que la reflexión booleana de B es $B \xrightarrow{g} D$. Para esto nos tomamos cualquier morfismo $B \xrightarrow{k} E$ con $E \in \mathcal{CBA}$. Pero como γ es la reflexión booleana de A existe un único morfismo l que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "k"] & E \\
C \arrow[urr, "l"'] & &
\end{tikzcd}$$

es decir $l \circ \gamma = k \circ \beta$. Pero por el pushout que teníamos existe un único morfismo $D \xrightarrow{m} E$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "k"'] \arrow[ddr, "g"] & \\
C \arrow[r, "l"'] \arrow[drr, "f"'] & E & \\
& & D \arrow[ul, "m"']
\end{tikzcd}$$

Entonces $k = m \circ g$ es decir,

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g"] & E \\
D \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta y como m es único podemos concluir que, en efecto, $B \xrightarrow{g} D$ es la reflexión booleana de B. Recordemos que por el lema 6.2.7, g es mono y en $\mathfrak{Frm}$

un morfismo es mono si y sólo si es inyectivo, entonces g es inyectivo y por lo tanto

$$|B| \leq |D| \leq |C|$$

donde la segunda desigualdad ya la habíamos obtenido antes en la prueba. □

Lema 6.2.9. *Para cualesquiera $A \in \mathfrak{Frm}$ y $A \xrightarrow{f} B$ morfismo de marcos las siguientes condiciones son equivalentes*

i) f es mono y para cualquier pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

g es mono.

ii) Para cualquier morfismo $A \xrightarrow{h} C$ hay un cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

donde g es mono

Demostración. La implicación i)⇒ii) es inmediata. Para ii)⇒ i), damos $h = id_A$ y entonces, por hipotesis, existe un cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle id_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ A & \xrightarrow{\beta} & D \end{array}$$

tal que β es mono. Queremos ver que f es mono entonces tomamos dos morfismos

$$E \xrightarrow{i} A \qquad E \xrightarrow{j} A$$

tales que $f \circ i = f \circ j$. Entonces

$$\alpha \circ f \circ i = \alpha \circ f \circ j$$

pero como el cuadro de arriba conmuta obtenemos que

$$\beta \circ id_A \circ i = \beta \circ id_A \circ j$$

Pero β y id_A son monos, por tanto la composición también lo es y así

$$i = j$$

Afirmamos entonces que f es el monomorfismo que cumple i). Entonces, sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

un pushout, basta probar que g es mono. Por ii) hay

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r, "h"] & E \end{tikzcd}$$

un cuadro conmutativo. Cómo teníamos un pushout y este diagrama también conmuta, existe un único morfismo $D \xrightarrow{m} E$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[ddr] & \\ C \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "h"] & D \arrow[dr, "m"] & \\ & & E \end{tikzcd}$$

conmuta. En particular $m \circ g = h$ y como h es mono g debe de ser mono. $\square$

Definición 6.2.10. *Sea* $A \xrightarrow{f} B$ *un morfismo de marcos, decimos que* f *es un monomorfismo universal si cumple con las condiciones i) y ii) del lema anterior 6.2.9.*

Observación 6.2.11. *Notemos que*

i) todo monomorfismo universal es monomorfismo , esto sale directo de la definición.

ii) *cualquier isomorfismo*

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$$

es universal, pues para cualquier morfismo $A \xrightarrow{h} C$ *el siguiente cuadro*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[d, "h\circ g"] \\ C \arrow[r, "id_C"] & C \end{tikzcd}$$

conmuta.

iii) *no todo monomorfismo universal que es epi es suprayectivo.*

Lema 6.2.12. *Para el siguiente diagrama en* $\mathfrak{Frm}$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se tiene que

i) *Si f y g son monos universales entonces $g \circ f$ también es estricto.*

ii) *Si f y g son monos universales y epi, entonces $g \circ f$ también es universal y epi.*

iii) *Si $g \circ f$ es mono universal, entonces f también lo es.*

Demostración. Para probar el primer inciso del lema tomamos $A \xrightarrow{j} D$ un morfismo de marcos, y queremos probar que se cumple la condición ii) del lema 6.2.9, pues i) y ii) son equivalentes, para $g \circ f$. Pero como f es universal hay un monomorfismo h tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[d, "l"] \\ D \arrow[r, "h"] & E \end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora bien como g es universal también hay un monomorfismo k tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l"'] & C \arrow[d] \\ E \arrow[r, "k"] & F \end{tikzcd}$$

que conmuta. Así

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r, "h"] & E \arrow[r, "k"] & F \end{tikzcd}$$

es un cuadro conmutativo con $k \circ h$ monomorfismo pues k y h son monos. Por lo tanto, $g \circ f$ es un mono universal.

Para probar la condición ii) si f y g son universales y epi. Entonces $g \circ f$ es universal por el inciso anterior y es epi pues composición de epimorfismos es también epimorfismo.

Para el último inciso suponemos que $g \circ f$ es monomorfismo universal. En particular, por la observación 6.2.11, $g \circ f$ es mono y entonces f es mono. Para ver que f es estricto nos tomamos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d, "j"] \\ D \arrow[r, "h"] & E \end{tikzcd}$$

un pushout. Ahora, para

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & C \\ E & \end{tikzcd}$$

tambien tenemos un pushout

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"'] & C \arrow[d] \\ E \arrow[r, "k"] & F \end{tikzcd}$$

pues en $\mathfrak{Frm}$ tenemos todos los pushouts. Así formamos el siguiente diagrama que conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r, "k \circ h"'] & F \end{tikzcd}$$

y es un pushout. Pero como $g \circ f$ es mono universal por el inciso i) de la definición 6.2.10, $k \circ h$ es mono. Por tanto h es mono lo que prueba que f es mono universal.

$\square$

Lema 6.2.13. *Sea $E(\_)$ un endofuntor en $\mathfrak{Frm}$ que extiende naturalmente el funtor identidad. Es decir, para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$ hay un monomorfismo*

$$A \xrightarrow{\mu_A} E(A)$$

que es natural a la variación de A. Entonces μ_A es un monomorfismo universal.

Demostración. Ya tenemos que μ_A es mono, por hipótesis, solo nos faltaría probar la condición i) del lema 6.2.9 para ver que es estricto. Para esto nos tomamos un pushout

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "h"] & E(A) \arrow[d] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

y queremos probar que g es mono. Pero por hipótesis tenemos que el cuadro

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "h"] & E(A) \arrow[d, "E(h)"] \\ C \arrow[r, "\mu_C"] & E(C) \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces por la propiedad del pushout existe un único morfismo $D \xrightarrow{m} E(C)$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "h"] & E(A) \arrow[d] \arrow[ddr, "E(h)"] & \\ C \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "\mu_C"'] & D \arrow[dr, "m"] & \\ & & E(C) \end{tikzcd}$$

conmuta. En particular $\mu_C = m \circ g$ y como μ_C es mono, entonces g es mono. $\square$

Teorema 6.2.14. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ y α un ordinal, el morfismo canónico*

$$A \xrightarrow{\eta_A^\alpha} N^\alpha A$$

es mono universal.

Demostración. Esta prueba es inmediata del teorema anterior 6.2.13 pues ya vimos en la primera sección 6.1 de este capitulo que $N(\_)$ es un endofuntor y cumple las hipótesis que se piden. $\square$

Teorema 6.2.15. *Para cualquier $A \in \mathfrak{Frm}$ éste tiene reflexión booleana si y solo si hay un monomorfismo universal*

$$A \longrightarrow B$$

donde $B \in CBA$.

Demostración. □

Teorema 6.2.16. *Sea $A \in \mathfrak{Frm}$ las siguientes condiciones son equivalentes*

i) A tiene reflexión booleana

ii) A está epimórficamente acotado

iii) La torre de ensambles de A se estabiliza

iv) Hay un monomorfismo universal, $A \longrightarrow B$ que es epi y $B \in \mathcal{CBA}$.

Además si la torre se estabiliza en el ordinal α

$$A \longrightarrow N^{\alpha}A$$

es la reflexión booleana.

Demostración. La primera implicación , i)⇒ ii)la obtenemos directamente del lema 6.2.8. Ahora si suponemos que A esta empimórficamente acotado hay un cardinal κ para el cual se cumple que

$$|N^{\alpha}A| < \kappa$$

pues el morfismo

$$A \xrightarrow{\eta_A^{\alpha}} N^{\alpha}A$$

es epi. Ahora bien, como cada c_{α}^{β} es inyectivo tenemos que

$$|NA| \leq |N^2A| \leq \ldots \leq |N^{\alpha}A| \leq \ldots < \kappa$$

por tanto la a partir de un α ordinal tenemos que

$$|N^{\alpha}A| = |N^{\gamma}A|$$

para cualquier $\alpha < \gamma$. Esto implica que la torre de ensambles se estabiliza pues la cardinalidad se estaciona y los ensambles me están representando los cocientes. Es decir me estoy tomando los cocientes, de los cocientes, de los cocientes,..,de los cocientes de A si la cardinalidad se para entonces eventaulemente los elementos de la torre se hacen isomorfos.

Para la impliciación iii)$\Rightarrow$ iv) suponemos que la torre se estabiliza en el ordinal α es decir

$$N^{\alpha}A \cong N^{\gamma}A$$

para cualquier ordinal γ tal que $\alpha < \gamma$. Entonces como en particular $N^{\alpha}A \cong N^{\alpha^+}A$ tenemos el isomorfismo

$$\begin{tikzcd} N^{\alpha}A \arrow[r, shift left, "f"] & N^{\alpha^+}A \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

y por el teorema 1.3.50 existe un único morfismo h

$$\begin{tikzcd} N^{\alpha}A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "\eta_{N^{\alpha}A}"'] & N^{\alpha^+}A \arrow[l, shift left, "g"] \\ N^{\alpha^+}A \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

que hace conmutar el diagrama. De esta forma como $h \circ \eta_{N^{\alpha}A} = f$ es suprayectiva, h es suprayectiva. Pero $\eta_{N^{\alpha}A} \circ g = h$ y como h es suprayectiva, $\eta_{N^{\alpha}A}$ también es suprayectiva.Entonces por el lema 1.3.51, $N^{\alpha}A$ es booleano. Pero además por el lema 6.2.14

$$A \xrightarrow{\eta_A^{\alpha}} N^{\alpha}A$$

es mono universal que es epi por el teorema 1.3.50 y el codominio es un álgebra booleana completa.

Finalmente,para iv)$\Leftrightarrow$i) suponemos que hay monomorifismo universal

$$A \xrightarrow{f} B$$

que es epi y $B \in \mathcal{CBA}$. Afirmamos que esta es la reflexión booleana de A. Para probar esto consideramos un morfismo

$$A \xrightarrow{g} C$$

con $C \in \mathcal{CBA}$. Como en $\mathcal{F}\mathrm{rm}$ tenemos todos los pushouts tenemos que existe

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "l"] \\ C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

un pushout. Como f es universal h es mono y también es epi pues los epis cruzan los pushouts. Pero como h es epi y su dominio es álgebra booleana completa, por el lema 6.2.6, h es suprayectivo y por tanto es un ismorfismo. Esto quiere decir que puedo dar h^{-1} que haga conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "l"] \\ C & D \arrow[l, "h^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Además $h^{-1} \circ l$ es único pues f es epi. Esto prueba que

$$A \xrightarrow{f} B$$

es la reflexión booleana de A.

Sólo nos falta mostrar que la reflexión booleana es

$$a \xrightarrow{\eta_a^\alpha} N^\alpha A$$

si la torre de ensamble se estabiliza en $N^\alpha A$. Ya vimos, cuando probamos la implicación iii)$\Rightarrow$ iv) que si la torre se estaciona en α, $N^\alpha A$. Sólo nos faltaría mostrar que para cualquier morfismo

$$A \xrightarrow{f} B$$

con $B \in \mathcal{CBA}$ existe un único morfismo $N^\alpha A \xrightarrow{g} B$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_a^\alpha"'] & B \\ N^\alpha A \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Pero eso sí ocurre pues ya sabemos que $N^\alpha A$ y su morfismo canónico resuelven universalmente el problema de la complementación booleana como vimos en 6.1. □

Este teorema es muy importante. Lo llega a mencionar Todd Wilson en [Wil94] pero no da todas las condiciones equivalentes, se fija en i) y ii) de 6.2.16. En realidad estoy usando la prueba de Harold Simmons en el documento [Sim17c]. De hecho Harold introduce las condiciones ii) y iv) de 6.2.16 para hacer más sencilla la prueba.

A pesar de que este teorema es muy fuerte, resulta que no es muy práctico porque no podemos calcular el ordinal en el que se estabiliza la torre. Tampoco hay una forma de saber prácticamente si la torre se estaciona, esto es un problema si la torre de un marco se llega a estabilizar en un ordinal muy grande. Otra pregunta que también podríamos hacernos es si ¿para cualquier ordinal hay un marco cuya torre de ensambles se estabilice en ese ordinal? En fin, todavía hay muchas preguntas sin contestarse entorno a la reflexión booleana.

Capítulo 7

Ejemplos

En este capítulo daremos algunos ejemplos que ayudaran a aclarar las ideas que ya se desarrollaron a lo largo del trabajo.+

7.1. Algunos ejemplos sencillos

Ejemplo 7.1.1. *El ordinal cerradura para* cbd *que denotamos como* ∞*, puede ser tan grande como queramos.*

Tomemos β *un ordinal limite. Recuerda que podemos ver a* β^+ *como el conjunto de ordinales* α *donde* $\alpha < \beta$ *o* $\alpha = \beta$*. Resulta que* β^+ *es un marco linealmente ordenado donde los ínfimos se calculan como el mínimo o la intersección y los supremos como el máximo o la unión. Además, el uno del marco sería* β *y el cero el* $0 = \emptyset$*. Es claro que se va a cumplir la ley distributiva para marcos y por tanto,* β^+ *es, en efecto, un marco.*

Ahora bien, si $\alpha < \beta$

$$cbd(\alpha) = \bigwedge \{\kappa < \beta \mid \alpha \lessdot \kappa\}$$

Notemos que $\alpha \leq \kappa$ *para que* $\alpha \leq \kappa$ *pero* $(\alpha \succ \alpha) = \beta$*. Por tanto,*

$$\alpha < cbd(\alpha)$$

Además,

$$(\alpha^+ \succ \alpha) = \bigvee \left\{k < \beta \mid \kappa \cap \alpha^+ \leq \alpha\right\} = \alpha$$

notemos que usamos esta forma de calcular la implicación que vimos en la observación 1.1.13. Así queda probado que $\mathrm{cbd}(\alpha) = \alpha^+$ *para cualquier* $\alpha < \beta$*. Y para*

β pasa que cbd$(\beta) = \beta$. En particular si tomamos a 0 queda que

$$cbd^{\alpha}(0) = \alpha$$

y por tanto para llegar al operador cerradura cbd$^{\infty}$ necesitamos que $\infty = \beta$.

Así siempre podemos encontrar un marco para el cual el ordinal cerradura de la derivada es cualquier ordinal límite y por tanto, se puede hacer tan grande como queramos.

Ejemplo 7.1.2. *Sea Γ un ordinal lo suficientemente grande. Entonces tenemos el marco Γ^{+} pero ahora nos tomamos el orden inverso de tal forma que Γ es el cero del marco y $0 = \emptyset$ es el uno del marco. Ahora los supremos serían los mínimos o la intersección y los ínfimos la unión. No es difícil ver que también se cumple la ley distributiva para marcos.*
Notemos que para $\alpha \neq 0$, cbd$(\alpha) = \alpha$ si y solo si α es un ordinal límite

$$\bigwedge \{\kappa \leq \Gamma \mid \alpha \lessdot \kappa\} = cbd(\alpha) = \alpha$$

es decir

$$\bigcup \{\kappa \leq \Gamma \mid \alpha \lessdot \kappa\} = \{\kappa \leq \Gamma \mid \alpha > \kappa \text{ y } (\kappa \succ \alpha) = \alpha\} = \alpha$$

pues observa que para cualquier κ,

$$(\kappa \succ \alpha) = \bigcap \{\beta \leq \Gamma \mid \beta \cup \kappa \leq \alpha\}$$

entonces $(\kappa \succ \alpha) = \alpha$ si y sólo si $\kappa < \alpha$. Esto nos dice que al tomar la unión para obtener la derivada

$$cbd(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha \text{ es límite}$$

con $\alpha \neq 0$. Sólo los límites y el cero son puntos fijos de cbd entonces al obtener $Cbd(id) = cbd^{\infty} = \delta$ nos quedará que Γ_{δ} es el conjunto de los ordinales límites menores o iguales que Γ. Si seguimos iterando Cbd tendríamos que

$$Cbd(id) \text{ nos da a los ordinales límites}$$

$$Cbd^{2}(id) \text{nos da a los oridinales límites de los límites}$$

$$\ldots$$

Ejemplo 7.1.3. *Considera el intervalo [0, 1] en los reales con el orden usual. Entonces [0,1] es un marco linealmente ordenado donde los supremos e ínfimos se calculan como siempre. Notemos que aquí cbd $= id$ pues*

$$cbd(a) = \bigwedge \{0 \leq b \leq 1 \mid a \lessdot b\} = \bigwedge \{0 \leq b \leq 1 \mid a \leq b \text{ y } b \succ a = a\}$$

pero $(b \succ a) = a \Leftrightarrow a < b$. Entonces cbd$(a) = \bigwedge \{0 \leq b \leq a \text{ y } a < b\} = a$. Así cbd $= id$ y entonces cbd$^{\infty} = id$ y por el corolario 2.1.15 $\theta = id$.

Los dos ejemplos anteriores, 7.1.2 y 7.1.3, nos sirven para dar una idea de como se comporta la derivada cuando los marcos están linealmente ordenados. Pues en este tipo de marcos los intervalos booleanos $[a, x]$ o cumplen que $a = x$ o $a < x$ pero entre a y x no hay elementos. Esto se aclara con los ejemplos, pues al evaluar la derivada en un elemento ésta sólo nos podrá dar el mismo elemento, como en el caso de los ordinales limites en 7.1.2 y en el de los reales 7.1.3 o el elemento siguiente, como ocurre en 7.1.2 para todos los ordinales que no sean límite. Esto da una imagen muy clara de lo que dice el lema 2.1.4.

Hay un otro ejemplo que debemos mencionar aunque no lo contruyamos en este trabajo pues es el de un marco para el cual $\theta = id$ pero $\xi = tp$. La construcción de este marco no es trivial, de hecho se vuelve muy complicada pero se puede encontrar en las notas de Harold [Sim17d] y [Sim10]. Este ejemplo es importante pues nos dice que el corolario 2.1.15 no puede extenderse de la manera obvia lo cual resulta un tanto sorprendente.

7.2. Un marco sin reflexión booleana

En esta sección buscamos construir un marco que no tenga reflexión booleana para esto ocuparemos varias categorías, la de marcos $\mathcal{F}\mathrm{rm}$, la de álgebras booleanas completas $\mathcal{CBA}$, la de conjuntos $\mathcal{S}et$, y la de retículas distributivas y acotadas $\mathcal{D}lt$ donde los morfismos son funciones monótonas que mandan al cero en el cero, al uno en el uno y respetan ínfimos y supremos finitos. De hecho, ocuparemos la idea de reflexión para cualquiera de estas categorías.

Definición 7.2.1. *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ son dos categorías tal que $\mathcal{E}$ es subcategoría de $\mathcal{C}$ un objeto $C \in \mathcal{C}$ tiene reflexión en $\mathcal{E}$ si existe un un morfismo en $\mathcal{C}$*

$$C \xrightarrow{f} E$$

con E un objeto de $\mathcal{E}$ tal que para cualquier morfismo en $\mathcal{C}$

$$C \xrightarrow{g} F$$

con F un objeto en $\mathcal{E}$, existe un unico morfismo h en $\mathcal{E}$ para el cual

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & F \\ E \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Con esta definición en mente podemos, ahora sí, construir el ejemplo. La idea del ejemplo es dar un conjunto que no tiene reflexión booleana. Probaremos que ese conjunto tiene reflexión en $\mathcal{F}\mathrm{rm}$. Entonces resultará que si el marco, que es la reflexión del conjunto, tiene reflexión booleana el conjunto mismo tendrá reflexión en $\mathcal{CBA}$ pero esto no es posible.

Primero vamos a construir, para cualquier cardinal κ, un álgebra boolena completa $A(\kappa) \in \mathcal{CBA}$ tal que $\kappa < |A(\kappa)|$ y que además $A(\kappa)$ tenga un conjunto de generadores, digamos Y, tal que $|Y| \leq \aleph_0$.

Para esta construcción vamos a considerar al marco $\mathcal{O}S$ que ya vimos en 2.1.17. Además también trabajaremos con $R\mathcal{O}S \subseteq \mathcal{O}S$ el conjunto que tiene a todos los abiertos que son abiertos regulares. Es decir, aquellos abiertos para los cuales

$$U = U^{-\circ} = U^{-'-'} = \neg\neg U$$

o bien, como vimos en 2.1.17, los abiertos cuya doble negación los deja fijos. En particular cualquier conjunto que se abierto y cerrado es un abierto regular. Además, si U es un abierto, $U^{-\circ}$ es un abierto regular. Este conjunto, $R\mathcal{O}S$, de abiertos regulares esta parcialmente ordenado por la contención tiene un elemento mínimo que es el vacío y un elemento máximo que es S. No es difícil ver que los supremos e ínfimos arbitrarios se calculan como

$$\bigvee \mathcal{U} = \left(\bigcup \mathcal{U}\right)^{-\circ} \qquad \bigwedge \mathcal{U} = \left(\bigcap \mathcal{U}\right)^{\circ}$$

donde $\mathcal{U} \subseteq R\mathcal{O}S$. Además estas operaciones se distribuyen, es decir, se cumple que

$$U \wedge \bigvee \mathcal{V} = \bigvee \{U \wedge V \mid V \in \mathcal{V}\}$$

y

$$U \vee \bigwedge \mathcal{V} = \bigwedge \{U \vee V \mid V \in \mathcal{V}\}$$

para cualesquiera $U \in R\mathcal{O}S$ y $\mathcal{V} \subseteq R\mathcal{O}S$. Esto ya nos dice que $R\mathcal{O}S$ es un marco, pero, podemos afirmar que $R\mathcal{O}S$ es un álgebra booleana completa pues todos sus elementos son complementados

$$U \vee U^{-'} = (U \cup U^{-'})^{-\circ} \supseteq (U \cup U') = S$$

y

$$U \wedge U^{-'} = (U \cap U^{-'})^{\circ} \subseteq (U^{-} \cap U^{-'}) = \emptyset$$

para cualquier $U \in R\mathcal{O}S$ pues $U^{-'} \in R\mathcal{O}S$. De hecho, en la construcción que vamos a dar el álgebra booleana completa $A(\kappa)$ va a ser igual a $R\mathcal{O}S$ para un espacio topológico S en particular.

Construcción 7.2.2. *Para k un cardinal. Si a este conjunto le damos la topología discreta, consideramos al conjunto*

$$S = \{p \colon \mathbb{N} \to \kappa \mid p \text{ función}\}$$

donde en realidad $S = \prod_{n<\omega} k$ con la topología producto. Esta topología la denotaremos $\mathcal{O}S$ y también nos tomamos a $R\mathcal{O}S$.

Ahora bien, Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ y $\alpha < \kappa$ un ordinal, tomamos a los siguientes subconjuntos de S:

$$\begin{aligned} p \in A(m,n) &\Leftrightarrow p(m) \leq p(n) \\ p \in B(m,\alpha) &\Leftrightarrow p(m) = \alpha \\ p \in C(m,\alpha) &\Leftrightarrow p(m) < \alpha \end{aligned}$$

Y así formamos subconjuntos de la potencia de S:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{A(m,n) \mid m,n \in \mathbb{N}\} \\ \mathcal{B} &= \{B(m,\alpha) \mid m \in \mathbb{N}, \alpha < \kappa\} \\ \mathcal{C} &= \{C(m,\alpha) \mid m \in \mathbb{N}, \alpha < \kappa\} \end{aligned}$$

Por como definimos a los conjuntos $B(\_,\_)$ sabemos que $\mathcal{B}$ es subbase de la topología producto. Es decir, es subbase de $\mathcal{O}S$ y por tanto cada $B(\_,\_)$ es un abierto.

Tomando esto en cuenta observemos que las siguientes propiedades ocurren para los conjuntos anteriores. Las primeras cinco propiedades se deducen de manera inmediata de las definiciones.

1. $B(m,\alpha)' = \bigcup\{B(m,\beta) \mid \beta \neq \alpha, \beta < \kappa\}$

   Esto nos dice que $B(m,\alpha)$ es cerrado por que su complemento es abierto. Podemos concluir que entonces $B(m,\alpha) \in R\mathcal{O}S$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha < \kappa$.

2. $A(m,n) = \bigcup\{B(m,\alpha) \cap B(n,\beta) \mid \alpha \leq \beta < \kappa\}$

3. $A(m,n)' = \bigcup\{B(m,\alpha) \cap B(n,\beta) \mid \beta < \alpha < \kappa\}$

   Esta propiedad junto con la anterior nos dice que $A(m,\alpha)$ es abierto y cerrado y por tanto $A(m,\alpha) \in R\mathcal{O}S$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha < \kappa$.

4. $C(m,\alpha) = \bigcup\{B(m,\beta) \mid \beta < \alpha\}$

5. $C(m,\alpha)' = \bigcup\{B(m,\beta) \mid \alpha \leq \beta < \kappa\}$

   Esta propiedad junto con la anterior nos dice que $C(m,\alpha)$ es abierto y cerrado y por tanto $C(m,\alpha) \in R\mathcal{O}S$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha < \kappa$.

6. $C(m,\alpha) = \bigvee \{B(m,\beta) \mid \beta < \alpha\}$

   El supremo de esta igualdad es en $\mathcal{ROS}$*. Si tomamos* $\mathcal{U} = \{B(m,\beta) \mid \beta < \alpha\}$ *por la propiedad anterior* $(5.)$*,*

$$C(m,\alpha) = \bigcup \mathcal{U}$$

   pero ya sabemos que $C(m,\alpha)$ *es un abierto regular por lo tanto*

$$C(m,\alpha) = C(m,\alpha)^{-\circ} = (\bigcup \mathcal{U})^{-\circ} = \bigvee \mathcal{U}$$

   que prueba lo que queríamos.

7. $C(m,\alpha^+) = \bigwedge \{A(m,n) \cup C(n,\alpha) \mid n \in \mathbb{N}\}$

   El ínfimo de esta igualdad es en $\mathcal{ROS}$*. Esta propiedad no es inmediata. Para probarla consideramos* $\mathcal{U} = \{A(m,n) \cup C(n,\alpha) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *y queremos probar que* $C(m,\alpha^+) = (\bigcap \mathcal{U})^\circ$*. Lo hacemos por doble contención y para la primera notamos que*

$$\begin{aligned} p \in C(m,\alpha^+) &\Rightarrow p(m) < \alpha^+ \Rightarrow p(m) \leq \alpha \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, [p(n) < p(m) \Rightarrow p(n) < \alpha] \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, [p(m) \leq p(n) \text{ o } p(n) < \alpha] \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, [p \in A(m,n) \cup C(n,\alpha)] \\ &\Rightarrow p \in \bigcap \{A(m,n) \cup C(n,\alpha) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &\Rightarrow C(m,\alpha^+) \subseteq \bigcap \mathcal{U} \end{aligned}$$

   y como $C(m,\alpha^+)$ *es abierto, ocurre que* $C(m,\alpha^+) \subseteq (\bigcap \mathcal{U})^\circ$*.*

   Para la otra contención nos tomamos $p \in (\bigcap \mathcal{U})^\circ$ *que es un abierto, entonces existe un* W *en la base de* $\mathcal{O}S$ *tal que* $p \in W \subseteq (\bigcap \mathcal{U})^\circ$*. También dijimos que* $\mathcal{B}$ *era una subbase de la topología, entonces*

$$W = B(m_1,\alpha_1) \cap ... \cap B(m_r,\alpha_r)$$

   donde r *es un natural,* $\{m_1,...,m_r\} \subseteq \mathbb{N}$ *y* $\alpha_1,...,\alpha_r < \kappa$*. Tomamos* $F = \{m_1,...,m_r\}$ *y observemos que si* $q \in S$ *tal que* $q|_F = p|_F$*, entonces* $q \in W \subseteq (\bigcap \mathcal{U})^\circ$*. Así, construimos al siguiente elemento de* S

$$q(n) = \begin{cases} p(n) & \text{si } n \in F \cup \{m\} \\ \alpha & \text{si } n \notin F \cup \{m\} \end{cases}$$

y por lo que dijimos anteriormente $q \in W \subseteq (\bigcap \mathcal{U})^\circ$. *Entonces, para cualquier* $n \in F \cup \{m\}$

$$p(m) = q(m) \leq q(n) = \alpha$$

donde la desigualdad se da porque $q \in \bigcap \mathcal{U}$. *Por lo tanto,*

$$p(m) \leq \alpha$$

lo que quiere decir que $p \in C(m, \alpha^+)$.

8. $B(m, \alpha) = C(m, \alpha^+) \cap C(m, \alpha)'$

   La prueba de esta propiedad es sencilla pues

$$p \in B(m, \alpha) \Leftrightarrow p(m) < \alpha^+ \text{ y } p(m) \not< \alpha \Leftrightarrow p \in C(m, \alpha^+) \cap C(m, \alpha)'$$

Con estas propiedades ya podemos construir el álgebra booleana que queremos y lo hacemos recursivmante usando a $\mathcal{A} \subseteq R\mathcal{O}S$,

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathcal{A} \cup \{\neg U \mid U \in \mathcal{A}\} \cup \{\emptyset, S\} \\ A_{\alpha^+} &= A_\alpha \cup \left\{\bigvee Y \mid Y \subseteq A_\alpha\right\} \cup \left\{\bigwedge Y \mid Y \subseteq A_\alpha\right\} \\ A_\alpha &= \bigcup \{A_\lambda \mid \lambda < \alpha\} \qquad \textit{si } \alpha \textit{ es ordinal límite} \end{aligned}$$

donde los supremos e ínfimos que se usan para el caso de un ordinal sucesor son aquellos en $R\mathcal{O}S$. *También observa que cada* A_α *es cerrado bajo negaciones pues recordemos que por el lema 1.1.7 como* $R\mathcal{O}S$ *es un álgebra booleana completa*

$$\neg \bigvee Y = \bigwedge \{\neg y \mid y \in Y\} \qquad \neg \bigwedge Y = \bigvee \{\neg y \mid y \in Y\}$$

para cualquier $Y \subseteq R\mathcal{O}S$.

De esta forma, $A_\alpha \subseteq R\mathcal{O}S$ *para cualquier* α *ordinal entonces nuestros conjuntos eventualmente se estacionan y es en ese punto que tomamos a* $A(\kappa)$. *Ahora queremos ver que* $R\mathcal{O}S = A(\kappa)$. *Para ver esto probamos que* $\mathcal{A}$ *genera a* $\mathcal{B}$. *Usamos inducción fuerte. Llamemos* $[\alpha]$ *a la siguiente propiedad*

$$(\forall m \in \mathbb{N})(B(m, \alpha) \textit{ se puede generar a partir de } \mathcal{A})$$

Queremos probar que $[\alpha]$ *se cumple para cualquier* $\alpha < \kappa$. *Así si* $\alpha < \kappa$ *suponemos que se vale* $[\beta]$ *para cualquier* $\beta < \alpha$ *y queremos llegar a* $[\alpha]$. *Por la hipótesis que tenemos y por la propiedad (6.).* $C(m, \alpha)$*se puede generar a partir de* $\mathcal{A}$ *para cualquier* $m \in \mathbb{N}$. *Entonces por la propiedad (7.) se puede generar* $C(m, \alpha^+)$ *a* *partir de $\mathcal{A}$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, por la propiedad (8.), $B(m, \alpha)$ es generado por $\mathcal{A}$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$, que es lo que queríamos probar.*

Ahora bien, si $U \in R\mathcal{O}S$ como $\mathcal{B}$ es una subbase de $\mathcal{O}S$

$$U = \bigcup_{i \in I} V_i$$

donde $V_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} B(m_j, \alpha_j)$ con $n_i \in \mathbb{N}$. Pero como U es un abierto regular

$$U = U^{-\circ} = (\bigcup_{i \in I} V_i)^{-\circ} = \bigvee_{i \in I} V_i$$

y

$$V_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} B(m_j, \alpha_j) = \left(\bigcap_{j=1}^{n_i} B(m_j, \alpha_j) \right)^{\circ} = \bigwedge_{j=1}^{n_i} B(m_j, \alpha_j)$$

pues cada la intersección finita de abiertos es abierto y cada $B(\_, \_)$ es abierto. Entonces como $\mathcal{B}$ es generado por $\mathcal{A}$, cada V_i es generado por $\mathcal{A}$ y por tanto también U. Por lo tanto $R\mathcal{O}S \subseteq A(\kappa)$ y como ya teníamos la otra contención

$$R\mathcal{O}S = A(\kappa)$$

lo que nos dice que $A(\kappa)$ es un álgebra booleana completa. También como $\mathcal{B} \subseteq R\mathcal{O}S$,

$$\kappa \leq |\mathcal{B}| \leq |R\mathcal{O}S| = |A(\kappa)|$$

y además el conjunto generador de $A(\kappa)$ es $\mathcal{A}$ y éste es numerable.

Teorema 7.2.3. *Si X es un conjunto infinito entonces X no tiene reflexión en $\mathcal{CBA}$.*

Demostración. Supongamos que X infinito si tiene reflexión en $\mathcal{CBA}$ y es

$$X \xrightarrow{r} B$$

Sea κ un cardinal tal que $|B| < \kappa$. Entonces por la construcción 7.2.2 hay $A(\kappa) \in \mathcal{CBA}$ tal que $\kappa < |A(\kappa)|$ y con un conjunto $\mathcal{A}$ de generadores con $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$. Así

$$A_0 \xrightarrow{i} A(k)$$

donde A_0 es el primer paso en la recursión para definir $A(\kappa)$ y es numerable pues $\mathcal{A}$ es numerable. Además i es la inclusión y es una función en $\mathcal{S}et$. Ahora como X es infinito existe una función suprayectiva

$$X \xrightarrow{k} A_0$$

en $\mathcal{S}et$. Consideremos entonces la función $f = i \circ k$. Entonces por definición de reflexión existe una única función

$$B \xrightarrow{f^*} A(\kappa)$$

para la cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, "f"] & A_0 \arrow[d, "i"] \\ B \arrow[r, "f^*"] & A(\kappa) \end{tikzcd}$$

Veamos que f^* es supreyectiva. Basta probar por inducción que para todo ordinal α, si $a \in A_\alpha$ entonces hay un $b \in B$ tal que $f^*(b) = a$ donde A_α es el conjunto que definimos recursivamente para obtener a $A(\kappa)$. Para el caso base consideramos $a \in A_0$ entonces como k es suprayectiva hay $x \in X$ tal que

$$a = k(x) = i(k(x)) = f(r(x))$$

y $r(x) \in B$. Para el caso sucesor $\alpha = \beta^+$, suponemos que para cualquier $a \in A_\beta$ hay un $b \in B$ tal que $f^*(b) = a$. Sea $a \in A_\alpha$, recordemos que

$$A_\alpha = A_\beta \cup \left\{ \bigvee Y \mid Y \subseteq A_\beta \right\} \cup \left\{ \bigwedge Y \mid Y \subseteq A_\beta \right\}$$

Si $A \in A_\beta$ ya acabamos por hipótesis de inducción. Si $a = \bigwedge Y$ para $Y \subseteq A_\beta$. Damos

$$X = \{x \in B \mid f^*(x) = y \text{ para algún } y \in Y\}$$

Así, como $f*$ es un morfismo en $\mathcal{CBA}$

$$f^*(\bigwedge X) = \bigwedge f^*[X] = \bigwedge Y = a$$

donde la segunda igualdad se da por la hipótesis de inducción. Hacemos lo mismo si $a = \bigvee Y$ con $Y \subseteq A_\beta$. Lo que prueba que para toda $a \in A_\alpha$ hay un $b \in B$ tal que $f^*(b) = a$. Ahora bien, si α es un ordinal límite, por como definimos A_α la prueba es inmediata. Así, concluimos que f^* es suprayectiva. Esto quiere decir que

$$k < |A(\kappa)| \leq |B| < \kappa$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si X es un conjunto infinito no tiene relfexión en $\mathcal{CBA}$. $\square$

Ahora lo que queremos es construir la reflexión en $\mathcal{F}\mathrm{rm}$ para cualquier conjunto $X \in \mathcal{S}et$ y cualquier retícula acotada y distributiva $L \in \mathcal{D}lt$. Tomamos los siguientes conjuntos

$$spec(L) = \left\{ (\ L \xrightarrow{p} 2) \ \in \mathcal{D}lt \right\} = \mathcal{D}lt(L, 2)$$

$$D(L) = \left\{ (\ X \xrightarrow{\pi} 2_S \ ) \in \mathcal{S}et \right\} = \mathcal{S}et(X, 2_S)$$

donde 2 es la retícula $\{0, 1\}$, y 2_S es el espacio $0, 1$ con la topología de Sierpinski.

$$\mathcal{O}2_S = \{\emptyset, 1, 2\}$$

Definimos el siguiente conjunto para cualquier $a \in L$

$$p \in \sigma(a) \Leftrightarrow p(a) = 1$$

y así $\sigma(a) \subseteq spec(L)$. Análogamente, para cualquier $x \in X$

$$\pi \in \delta(x) \Leftrightarrow \pi(x) = 1$$

y entonces $\delta(x) \subseteq D(X)$.

Entonces para los conjuntos

$$spec(L) \qquad D(X)$$

podemos formar la topología

$$\mathcal{O}spec(L) \qquad \mathcal{O}D(X)$$

donde

$$\sigma[L] \qquad \delta[X]$$

sean subbases respectivamente.

Teorema 7.2.4. *El morfismo de retículas*

$$L \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}spec(L)$$

$$a \to \sigma(a)$$

y el morfismo de conjuntos

$$X \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}D(X)$$

$$x \to \delta(x)$$

son $\mathcal{F}\mathrm{rm}$-*epi.*

Demostración. Por como se definieron es fácil ver que σ y δ son funciones. Lo que faltaría probar es que σ es un morfismo de retículas, es decir falta ver que es monótona, que abre ínfimos y supremos arbitrarios, y $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = 1$. Sean $a, b \in L$ entonces, para cualquier morfismo de retículas p, obtenemos

$$\begin{aligned} p \in \sigma(a \wedge b) \Leftrightarrow & p(a) \wedge p(b) = p(a \wedge b) = 1 \Leftrightarrow p(a) = 1 \text{ y } p(b) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & p \in \sigma(a) \text{ y } p \in \sigma(b) \Leftrightarrow p \in \sigma(a) \cap \sigma(b) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sigma(a \wedge b) = \sigma(a) \cap \sigma(b)$. Ahora hacemos lo mismo para el supremo

$$\begin{aligned} p \in \sigma(a \vee b) \Leftrightarrow & p(a) \vee p(b) = p(a \vee b) = 1 \Leftrightarrow p(a) = 1 \text{ ó } p(b) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & p \in \sigma(a) \text{ ó } p \in \sigma(b) \Leftrightarrow p \in \sigma(a) \cup \sigma(b) \end{aligned}$$

Nota que el segundo si y sólo si no se da para cualquier retícula pero como en este caso estamos sobre la retícula 2 es cierto. Por lo tanto $\sigma(a \vee b) = \sigma(a) \cup \sigma(b)$.

Además notemos que $p \in \sigma(0)$ si y sólo si $p(0) = 1$ pero como p es un morfismo de retículas esto no es cierto pues $p(0) = 0$. Por lo tanto, $\sigma(0) = \emptyset$ y el vacío es el cero en $\mathcal{O}spec(L)$. Por otro lado, $p \in \sigma(1)$ si y sólo si $p(1) = 1$. Pero esto último es cierto para cualquier p pues p es un morfismo de retículas. Por lo tanto, $p(1) = spec(L)$ y $spec(L)$ es el uno del $\mathcal{O}spec(L)$.

Ahora sólo falta probar que σ es monótona. Si $a \leq b$ elementos de L, y sea $p \in \sigma(a)$, entonces $p(a) = 1$. Pero p es monótona entonces $1 = p(a) \leq p(b)$. Por tanto, $p(b) = 1$ si y sólo $p \in \sigma(b)$. Es decir, nos queda que $\sigma(a) \subseteq \sigma(b)$ y como $\subseteq$ es el orden en $\mathcal{O}spec(L)$ obtenemos que σ es monótona y por tanto es un morfismo de retículas.

Observemos que $\sigma[L]$ no es sólo subbase también es base pues se cumple que $\sigma(a) \cap \sigma(b) = \sigma(a \wedge b)$.

Falta ver que σ y δ son $\mathcal{F}\mathrm{rm}$-epi. Primero lo hacemos para el caso de retículas. Supongamos que tenemos $A \in \mathcal{F}\mathrm{rm}$ y g, h morfismos de marcos

$$L \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}spec(L) \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A$$

tales que $g \circ \sigma = h \circ \sigma$ y queremos probar que $h = g$. Consideremos $U \in \mathcal{O}spec(L)$, entonces

$$U = \bigcup \sigma[X] = \bigcup \{\sigma(x) \mid x \in X\}$$

donde $X \subseteq L$. La igualdad de arriba es cierta pues dijimos anteriormente que $\sigma[L]$ forma una base para el espacio. Así, como g y h son morfismos de marcos y preservan supremos arbitrarios

$$g(U) = g\left(\bigcup\{\sigma(x) \mid x \in X\}\right) = \bigcup\{g(\sigma(x)) \mid x \in X\} =$$
$$= \bigcup\{h(\sigma(x)) \mid x \in X\} = h\left(\bigcup\{\sigma(x) \mid x \in X\}\right) = h(U)$$

observa que en la tercera igualdad usamos la hipótesis de que $g \circ \sigma = h \circ \sigma$. Por lo tanto, $g = h$.
Para el caso de conjuntos nos tomamos

$$X \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}D(X) \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A$$

donde $A \in \mathfrak{Frm}$ y g y h morfismos de marcos tales que $g \circ \delta = h \circ \delta$. Si tomamos $U \in \mathcal{O}D(X)$ entonces

$$U = \bigcup_{\text{ß} \in I} K_i$$

donde, como $\delta[X]$ es subbase, cada $K_i = \bigcap V$ con $V \subseteq \delta[X]$ y $|V| < \aleph_0$. Así,como g y h respetan supremos arbitrarios e ínfimos finitos por ser morfismos de marcos,

$$g(U) = \bigvee_{i \in I} g(K_i) = \bigvee\left(\bigwedge\{g(\delta(a)) \mid \delta(a) \in V\}\right) =$$
$$= \bigvee\left(\bigwedge\{h(\delta(a)) \mid \delta(a) \in V\}\right) = \bigvee_{i \in I} h(K_i) = h(U)$$

Por lo tanto, $g = h$.
Por todo lo anterior, δ y σ son $\mathfrak{Frm}$-epi. □

Cabe mencionar que σ es inyectiva, esta prueba no es trivial, pues usa el Lema de Separación de Stone, y esta demás probarlo aquí. Sin embargo, la prueba puede revisarse en [Joh86]. Notemos que si $A \in \mathfrak{Frm}$, en particular $A \in \mathcal{D}lt$ entonces también podemos tomar el respectivo morfismo

$$A \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}specA$$

pues A es, en particular, una retícula. Tomamos esto en cuenta para probar el siguiente lema.

Lema 7.2.5. *Si $A \in \mathfrak{Frm}$ entonces hay un morfismo*

$$\mathcal{O}spec(A) \xrightarrow{\alpha} A$$

tal que $\alpha \circ \sigma = id_A$, donde σ es el morfismo que se contruyó anteriormente para retículas.

Demostración. Consideremos

$$\mathcal{O}specA \xrightarrow{\alpha} A$$

$$a(U) = \bigvee \{x \in A \mid \sigma(x) \subseteq U\}$$

para $A \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$. Como los supremos arbitrarios están bien definidos y σ es una función, α es una función. También podemos decir que α es monótona pues esto es inmediato por la definición ya que esta dada por supremos y porque si $\sigma(x) \subseteq U$ y $U \subseteq V$ entonces $\sigma(x) \subseteq V$. Además α es un morfismo de marcos. Para probar esto veamos, primero, que

$$\alpha(\emptyset) = \bigvee \{x \in A \mid \sigma(x) \subseteq \emptyset\} = 0$$

pues $\sigma(x) \subseteq \emptyset \Leftrightarrow \sigma(x) = \emptyset \Leftrightarrow x = 0$. En la última implicación usamos que σ es inyectiva. También $\alpha(spec(A)) = 1$ pues $\sigma(1) = spec(A)$ por lo que vimos en el lema 7.2.4. Notemos que tambien α respeta ínfimos finitos. Para esto tomamos cualesquiera $U, V \in \mathcal{O}spec(A)$ y damos $X, Z, Y \subseteq A$ como

$$x \in X \Leftrightarrow \sigma(x) \subseteq U$$

$$y \in Y \Leftrightarrow \sigma(y) \subseteq V$$

y

$$z \in Z \Leftrightarrow \sigma(z) \subseteq U \cap V$$

de tal forma que por la ley distributiva para marcos

$$\alpha(U) \wedge \alpha(V) = \bigvee \{x \wedge y \mid x \in X, y \in Y\} \leq \alpha(U \cap V)$$

donde la última desigualdad se da porque como $\sigma(x \wedge y) = \sigma(x) \wedge \sigma(y) \subseteq U \cap V$ entonces $x \wedge y \in Z$. Por lo tanto, $x \wedge y \leq \bigvee Z = \alpha(U \cap V)$. Ahora, como para cualquier $z \in Z$, $z \in X$ y $z \in Y$ tenemos que

$$z \leq \alpha(U) \qquad \text{y} \qquad z \leq \alpha(V)$$

luego, $z \leq \alpha(U) \wedge \alpha(V)$. Entonces $\alpha(U \cap V) = \bigvee Z \leq \alpha(U) \wedge \alpha(V)$. Así, finalmente, $\alpha(U \cap V) = \alpha(U) \wedge \alpha(V)$.

Sólo nos falta ver que α respeta supremos arbitrarios. Para esto nos tomamos $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}spec(A)$ y queremos ver que

$$\bigvee \alpha[\mathcal{U}] = \alpha(\bigcup \mathcal{U})$$

pero como α es monótona sólo basta ver que

$$\bigvee \alpha[\mathcal{U}] \geq \alpha(\bigcup \mathcal{U})$$

Para esto tomamos un $x \in A$ tal que $\sigma(x) \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ y es suficiente probar, por como definimos α, que $x \leq \bigvee \alpha[\mathcal{U}]$. Vamos a usar, aunque no se probará aquí, que $\sigma(x)$ es compacto. La prueba de esto usa el Lema de Separación de Stone y no es trivial pero puede revisarse en [Joh86]. Usando que este conjunto es compacto, como $\sigma(x) \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ obtenemos que

$$\sigma(x) \subseteq U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_m$$

para algunos $U_1, ...U_m \in \mathcal{U}$. Pero como $\sigma[A]$ es una base para la topología podemos escribir

$$\sigma(x) \subseteq U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_m = \sigma(y_1) \cup \sigma(y_2) \cup ... \cup \sigma(y_m) = \sigma(y_1 \vee ... \vee y_n)$$

donde $y_1, ...y_n \in A$. Además se cumple que para toda $1 \leq i \leq n$, $\sigma(y_i) \subseteq U_j$ para algún $1 \leq j \leq n$. Así,

$$y_i \leq \alpha(U_j) \leq \bigvee \alpha[\mathcal{U}]$$

y como $\sigma(x) \subseteq \sigma(y_1...y_n)$ y σ es monótona e inyectiva $x \leq y_1 \vee ... \vee y_n$ por el Lema de Separación de Stone. Por lo tanto ,

$$x \leq y_1 \vee ... \vee y_n \leq \bigvee \alpha[\mathcal{U}]$$

que es lo que queríamos probar. Para finalizar la prueba solo veamos que $\alpha \circ \sigma = id_A$. Tomamos $a \in A$ y entonces podemos decir que

$$(\alpha \circ \sigma)(a) = \alpha(\sigma(a)) = \bigvee \{x \in A \mid \sigma(x) \subseteq \sigma(a)\} \geq a$$

y además para cualquier $x \in A$ si $\sigma(x) \leq \sigma(a)$ entonces $x \leq a$. Por tanto, $(\alpha \circ \sigma)(a) = a$. □

Recordemos que $D(X)$ y $spec(L)$ con X un conjunto y L una retícula son espacios topológicos entonces podemos tener funciones continuas entre ellos. Una de estas funciones es la que aparece en los dos siguientes lemas.

Lema 7.2.6. *Sean $X \in \mathcal{S}et$, $A \in \mathfrak{F}\mathrm{rm}$ y $X \xrightarrow{f} A$ una función. La función*

$$spec(A) \xrightarrow{\phi} D(X)$$

$$p \to p \circ f$$

es una función continua y cumple que

$$\phi^{-1}(\delta(x)) = \sigma(f(x))$$

para cualquier $x \in X$.

Demostración. Tomemos $p \in spec(A)$ entonces

$$p \in \phi^{-1}(\delta(x)) \Leftrightarrow \phi(p) \in \delta(x) \Leftrightarrow \phi(p)(x) = 1 \Leftrightarrow p(f(x)) = 1 \Leftrightarrow p \in \sigma(f(x))$$

para cualquier $x \in X$. Por lo tanto

$$\phi^{-1}(\delta(x)) = \sigma(f(x)) \in \mathcal{O}specA$$

lo que quiere decir que ϕ es continua y que la igualdad que dice el lema se cumple. □

También tenemos un resultado análogo para retículas.

Lema 7.2.7. *Sean $L \in \mathcal{D}lt$, $A \in \mathcal{F}\mathrm{rm}$ y $L \xrightarrow{f} A$ un morfismo de retículas. La función*

$$spec(A) \xrightarrow{\phi} spec(L)$$
$$p \rightarrow p \circ f$$

es una función continua y cumple que

$$\phi^{-1}(\sigma_L(x)) = \sigma_A(f(x))$$

para cualquier $x \in X$.

Demostración. La prueba es análoga a la del lema 7.2.6, solo haría falta cambiar δ por σ_A. □

Teorema 7.2.8. *Si $L \in \mathcal{D}lt$ y $X \in \mathcal{S}et$ entonces*

$$L \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}spec(L) \qquad X \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}D(X)$$

son la reflexiones en $\mathcal{F}\mathrm{rm}$ para L y X respectivamente.

Demostración. Sean

$$L \xrightarrow{f} A \qquad X \xrightarrow{g} A$$

un morfismo de retículas y un morifsmo de conjuntos respectivamente, donde $A \in \mathcal{F}\mathrm{rm}$. Para ver que son las reflexiones en marcos debemos dar f^* y g^* morfismos únicos que hagan conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] & A \\ \mathcal{O}spec(L) \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\delta"'] & A \\ \mathcal{O}D(X) \arrow[ur, "g^*"'] & \end{tikzcd}$$

Pero notemos que si f^* y g^* existen son únicos pues σ y δ son $\mathcal{F}\mathrm{rm}$-epi por el lema 7.2.4. Para probar la existencia de estas funciones consideramos los siguientes morfismos

$$spec(A) \xrightarrow{\phi} spec(L) \qquad\qquad spec(A) \xrightarrow{\phi} D(X)$$

dados por los lemas anteriores 7.2.6 y 7.2.7. Además por estos mismos lemas sabemos que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma_L"'] & A \arrow[d, "\sigma_A"] \\
\mathcal{O}spec(L) \arrow[r, "\phi^{-1}"'] & \mathcal{O}spec(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\delta"'] & A \arrow[d, "A"', "\sigma"] \\
\mathcal{O}D(X) \arrow[r, "\phi^{-1}"'] & \mathcal{O}spec(A)
\end{tikzcd}$$

es decir, $\phi^{-1} \circ \sigma_L = \sigma_A \circ f$ y $\phi^{-1} \circ \delta = \sigma_A \circ f$. Además por el lema 7.2.5 tenemos al morfismo

$$\mathcal{O}spec(A) \xrightarrow{\alpha_A} A$$

tal que $\alpha_A \circ \sigma_A = id_A$. Damos $f^* = \alpha_A \circ \phi^{-1}$ y $g^* = \alpha_A \circ \phi^{-1}$. Así

$$f^* \circ \sigma_L = \alpha_A \circ \phi^{-1} \circ \sigma_L = \alpha_A \circ \sigma_A \circ f = id_A \circ f = f$$

y

$$g^* \circ \delta = \alpha_A \circ \phi^{-1} \circ \delta = \alpha_A \circ \sigma_A \circ g = id_A \circ g = g$$

Pero ademas f es un morfismo de marcos pues ϕ^{-1} y α_A también lo son. Por lo tanto, σ y δ son las respectivas reflexiones en $\mathcal{F}\mathrm{rm}$ para L y X. □

Con todo esto finalmente podemos concluir el ejemplo con el siguiente teorema.

Teorema 7.2.9. *Para cualquier conjunto infinito $X \in \mathcal{S}et$ el marco $\mathcal{O}D(X)$ no tiene reflexión booleana.*

Demostración. Nos tomamos $X \in \mathcal{S}et$ infinito. Consideramos, por el lema anterior 7.2.8,

$$X \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}D(X)$$

la reflexión en $\mathcal{F}\mathrm{rm}$ de X. Y supongamos que $\mathcal{O}D(X)$ si tiene reflexión boolena, digamos

$$\mathcal{O}D(X) \xrightarrow{\beta} B$$

donde $B \in \mathcal{CBA}$. Entonces $\beta \circ \delta$ es la reflexión booleana para X pues si tomamos $X \xrightarrow{h} C$ una función con $C \in \mathcal{CBA}$ obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{O}D(X) \arrow[r, "\beta"] & B \\ C & & \end{tikzcd}$$

pero δ es la reflexión en $\mathcal{F}\mathrm{rm}$ para X entonces existe un único morfismo de marcos

$$\mathcal{O}D(X) \xrightarrow{f} C$$

tal que $h = f \circ \delta$. Pero como β es la reflexión booleana de $\mathcal{O}D(X)$ existe un único morfismo en $\mathcal{CBA}$,

$$B \xrightarrow{g} C$$

tal que $f = g \circ \beta$. Es decir,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{O}D(X) \arrow[r, "\beta"] \arrow[dl, "f"] & B \arrow[dll, "g"] \\ C & & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo que $\beta \circ \sigma$ es la reflexión booleana de X pero esto contradice el lema 7.2.3. Por lo tanto, $\mathcal{O}D(X)$ no tiene reflexión booleana. $\square$

Posiblemente este ejemplo es uno de los hechos más importantes que se muestran en la tesis. La primera parte del ejemplo, en la que construímos un álgebra booleana complete a partir de un ordinal κ se sacó de las notas de Harold Simmons [Sim17e] y [Sim17f] pero la prueba original esta dada por R.M. Solovay en [Sol66] que simplificó dos pruebas anteriores de Gaifman [Gai64] y A.W. Hales [WH64]. La otra parte del ejemplo, en la que damos la reflección en $\mathcal{F}\mathrm{rm}$ para un conjunto se encuentra en las notas de Harold Simmons [Sim17c] pero la pureba original es de Isbell y esta en [Isb72].

Bibliografía

[BM79] R Beazer and DS Macnab, *Modal extensions of Heyting algebras*, Colloquium Mathematicae, vol. 41, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1979, pp. 1–12.

[Gai64] H Gaifman, *Infinite boolean polynomials. i*, Fundamenta Mathematicae **54** (1964).

[Isb72] John R Isbell, *Atomless parts of spaces.*, Mathematica Scandinavica **31** (1972), 5–32.

[Joh86] Peter T Johnstone, *Stone spaces*, vol. 3, Cambridge University Press, 1986.

[Sim06] H Simmons, *The higher level cb properties of frames*, `http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/TEMP/HigherAssemb.pdf`, 2006.

[Sim10] ———, *Examples of higher level assemblies*, 2010.

[Sim14] Harold Simmons, *Cantor-bendixson properties of the assembly of a frame*, Leo Esakia on Duality in Modal and Intuitionistic Logics, Springer, 2014, pp. 217–255.

[Sim17a] H Simmons, *The assembly of a frame*, 2017.

[Sim17b] ———, *The basics of frame theory*, 2017.

[Sim17c] ———, *The boolean reflection problem for frames*, 2017.

[Sim17d] ———, *Examples of the assembly tower of a frame*, 2017.

[Sim17e] ———, *Two categories of boolean algebras*, 2017.

[Sim17f] ———, *Various examples of reflections for poset algebras*, 2017.

[Sol66] Robert Solovay, *New proof of a theorem of gaifman and hales*, Bulletin of The American Mathematical Society - BULL AMER MATH SOC **72** (1966).

[WH64] Alfred Washington Hales, *On the non-existence of free complete boolean algebras*, Fundamenta Mathematicae **54** (1964).

[Wil94] J Todd Wilson, *The assembly tower and some categorical and algebraic aspects of frame theory*, Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, 1994.