



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CONTROL INSENSIBILIZANTE PARA ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
JOSÉ ALBERTO PEÑA GARCÍA

DIRECTOR DE LA TESIS:
DRA. MARÍA DE LA LUZ JIMENA DE TERESA DE OTEYZA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Este trabajo no sería posible sin el apoyo de mi directora de tesis, la Dra. Luz de Teresa, a quien agradezco su tiempo, motivación, dedicación y sobre todo su paciencia.

A mis sinodales: Dr. Julio Ernesto Solís, Dr. Alessio Franci, Dr. Marcos López y el Dr. Renato Calleja, por leer cuidadosamente este trabajo y darme valiosas observaciones y comentarios.

A mis padres y hermanos por el apoyo brindado. También a mi amiga Bris por siempre compartir su alegría.

En especial, quiero agradecer a CONACYT por la beca brindada para mis estudios de maestría.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	v
1 Preliminares	1
2 Controlabilidad de sistemas lineales	7
2.1 Planteamiento del problema	7
2.2 Controlabilidad del sistema lineal	10
2.2.1 A simétrica e invertible, Q simétrica	12
2.2.2 A general, Q simétrica	19
3 Controlabilidad de sistemas no lineales	31
3.1 Introducción	31
3.2 Problema semilineal de control insensibilizante	41
3.3 Controlabilidad del sistema linealizado	44
3.4 Controlabilidad del sistema no lineal	46
Conclusiones	49
A Apéndice	51
A.1 Algunos resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias	51
A.2 Cálculo de los términos D_k	52

Introducción

Un problema importante en teoría de control es cómo reducir la influencia de las perturbaciones, bajo algún criterio. Estas pueden estar presentes directamente en el sistema (usualmente descrito por ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias) o en los datos iniciales del sistema. A este tipo de problemas se les conoce como problemas de control robusto.

En la literatura se han encontrado trabajos en los que se abordan varios problemas que manejan perturbaciones. Por ejemplo en [15] se discuten distintos tipos de perturbaciones (Lineales, no lineales y aleatorias) en el sistema descrito, ya sea en tiempo continuo o tiempo discreto, dados por ecuaciones diferenciales ordinarias o por ecuaciones en diferencias, respectivamente, y se buscan propiedades como estabilidad, sensibilidad de los parámetros, etc.

Otro de tipo de enfoque fue introducido por J. L. Lions en [9], donde se define el problema de control insensibilizante. Este consiste en considerar un sistema con datos iniciales parcialmente conocidos (con perturbación) de la forma

$$\mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{x}_1, \tag{0.1}$$

donde \mathbf{x}_0 es conocido, \mathbf{x}_1 desconocido y τ un parámetro pequeño, y se busca que un funcional \mathcal{J} , dependiente de la solución \mathbf{x} del sistema, que "no sienta" las perturbaciones en los datos iniciales. Es decir, se plantea encontrar una función de control tal que

$$\left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \tag{0.2}$$

Esta condición es conocida como condición de insensibilidad para el sistema. Dicho problema ha sido estudiado en el contexto de ecuaciones diferenciales parciales, como se puede consultar en [9], [3], [13], entre otros. Sin embargo, este enfoque, hasta donde sabemos, no se ha encontrado en la literatura para ecuaciones diferenciales ordinarias.

En esta tesis se estudia el problema de control insensibilizante para ecuaciones diferenciales ordinarias, siguiendo el planteamiento para ecuaciones diferenciales parciales

mostrado en [13], donde se estudia el problema de control insensibilizante mediante la controlabilidad del sistema adjunto. El concepto de controlabilidad se refiere a que es posible encontrar una función que influye en el sistema, tal que permite llevar el sistema de un estado inicial \mathbf{x}_I a un estado final \mathbf{x}_f en un tiempo finito.

En el capítulo 1, se discute el concepto de controlabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias y se deducen algunas sus propiedades para sistemas lineales. Esto con la finalidad de mostrar resultados clásicos en teoría de control, que permitirán caracterizar algunos sistemas para los cuales es posible encontrar un control insensibilizante.

En el capítulo 2, se plantea el problema de control insensibilizante para n ecuaciones diferenciales ordinarias con datos iniciales parcialmente conocidos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 + \tau\mathbf{x}_1,\end{aligned}\tag{0.3}$$

con el funcional \mathcal{J} definido por

$$\mathcal{J}(\tau) = \int_0^T \mathbf{x}^\top Q \mathbf{x} dt.\tag{0.4}$$

se prueba que la condición de insensibilidad es equivalente a la controlabilidad del sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -A^*\mathbf{p} + Q\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{p}(T) &= 0,\end{aligned}\tag{0.5}$$

este sistema está compuesto por el sistema de estados y el sistema adjunto, correspondientes a la componente \mathbf{x} y la componente \mathbf{p} , respectivamente. Además se obtiene una caracterización de los sistemas de n ecuaciones diferenciales lineales que pueden ser insensibilizados. Esto se realiza para matrices A simétrica e invertible y Q simétrica, también se estudia para cualquier matriz A y Q simétrica e invertible.

Por último, en el capítulo 3 se estudia el concepto de controlabilidad local de un sistema no lineal y se analiza la relación entre el sistema no lineal y su linealización, ver [7]. Esta relación permite obtener la controlabilidad local de un sistema no lineal si su linealización es controlable. Además, se plantea el problema de control insensibilizante para ecuaciones diferenciales ordinarias semilineales de orden 3 con datos parcialmente conocidos. Procediendo como en el capítulo 2, se estudia la existencia del control insensibilizante mediante el estudio de la controlabilidad a cero del sistema formado por el sistema semilineal acoplado con su sistema adjunto. Esto se realiza usando la linealización de dicho sistema.

1 Preliminares

En este capítulo se estudian algunos conceptos clásicos de la teoría de control, en particular la controlabilidad. Ver e.g [1], [14] y [16]. Consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u(t)), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}$ para $t \in [0, T]$ con $T > 0$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La función $u \in \mathcal{U}$ es conocida como función de control, donde \mathcal{U} es un conjunto de funciones, conocido como el conjunto de controles admisibles. En este se trabajo se considera que $\mathcal{U} \subset C^1([0, T], \mathbb{R})$. Además, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, donde $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto y es llamado el conjunto de estados.

Definición 1.1 (Ver [14]). *Se dice que el sistema (1.1) es exactamente controlable al tiempo $T > 0$ si para toda pareja de estados iniciales y finales $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ existe $u \in \mathcal{U}$ tal que la solución $\mathbf{x}(t)$ de (1.1) satisface $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_f$.*

Es posible hacer que la definición de controlabilidad sea menos restrictiva en el sentido de pedir que el estado final \mathbf{x}_f sea el cero.

Definición 1.2 (Ver [14]). *Se dice que el sistema (1.1) es controlable a cero al tiempo $T > 0$ si para todo estado inicial \mathbf{x}_0 existe $u \in \mathcal{U}$ tal que la solución $\mathbf{x}(t)$ de (1.1) satisface $\mathbf{x}(T) = 0$.*

Consideramos en particular sistemas de control escalar, es decir, sistemas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante y $B \in \mathbb{R}^n$ un vector constante.

Definición 1.3 (Ver [14]). *Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^n$ matrices correspondientes al sistema (1.2). Se dice que (A, B) es un par controlable si el sistema (1.2) es exactamente controlable al tiempo $T > 0$.*

Cuando el sistema es lineal los conceptos de controlabilidad exacta y a cero son equivalentes. Esto se muestra en el siguiente teorema

2 Preliminares

Teorema 1.1 (Ver [14]). *El sistema (1.2) es controlable a cero al tiempo $T > 0$ si y sólo si el sistema (1.2) es exactamente controlable al tiempo $T > 0$.*

Demostración. Supongamos que el sistema (1.2) es exactamente controlable al tiempo $T > 0$, es decir que para todo estado inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y estado final $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$ existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_f$, en particular si $\mathbf{x}_f = 0$, por lo que el sistema es controlable a cero. Recíprocamente, si el sistema (1.2) es controlable a cero, para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ existe algún $u \in \mathcal{U}$ tal que $\mathbf{x}(T) = 0$. Dado \mathbf{x}_f , nuestro estado objetivo, se considera el sistema (1.2) sin control cuya condición final está dada por el estado \mathbf{x}_f

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z}, \\ \mathbf{z}(T) &= \mathbf{x}_f.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Ahora tomamos la solución $\mathbf{y}(t)$ de

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= A\mathbf{y} + B u, \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{z}(0),\end{aligned}\tag{1.4}$$

donde $u \in \mathcal{U}$ es elegido de modo que $\mathbf{y}(T) = 0$. Se tiene que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{z}(t)$ satisface

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B u, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}(T) &= \mathbf{x}_f.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Esto muestra que el sistema (1.2) es exactamente controlable al tiempo $T > 0$. \square

La controlabilidad puede ser caracterizada en términos del rango de la matriz de controlabilidad, dicha matriz se define de la siguiente manera.

Definición 1.4 (Ver [14]). *La matriz $\tilde{U} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ es llamada la matriz de controlabilidad para el sistema (1.2).*

El siguiente teorema, conocido como el criterio de Kalman ver en [8], da condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad del sistema lineal (1.2).

Teorema 1.2 (Ver [8]). *El sistema (1.2) es exactamente controlable al tiempo $T > 0$ si y sólo si $\text{rang } \tilde{U} = n$*

Demostración. Supongamos primero que el sistema (1.2) es exactamente controlable al tiempo $T > 0$ y el $\text{rang } \tilde{U} < n$. Esto implica que las columnas de la matriz de controlabilidad son linealmente dependientes. Por lo tanto, existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $\mathbf{v}^\top \tilde{U} = 0$, entonces

$$\mathbf{v}^\top B = \mathbf{v}^\top AB = \dots = \mathbf{v}^\top A^{n-1}B = 0\tag{1.6}$$

Del teorema de Caley-Hamilton (ver e.g. [10]),

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I = 0, \quad (1.7)$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son los coeficientes del polinomio característico P_A de A . De la ecuación (1.7) y las relaciones (1.6) se obtiene

$$\mathbf{v}^\top A^n B = -a_1 \mathbf{v}^\top A^{n-1} B + \cdots + a_{n-1} \mathbf{v}^\top AB + a_n \mathbf{v}^\top B = 0. \quad (1.8)$$

Por inducción se obtiene que

$$\mathbf{v}^\top A^m B = 0, \quad (1.9)$$

para toda $m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, usando la fórmula de variación de las constantes se encuentra la solución $\mathbf{x}(T)$ del sistema (1.2) al tiempo $T > 0$

$$\mathbf{x}(T) = e^{AT} \left[\mathbf{x}_0 + \int_0^T e^{-A\tau} B u(\tau) dt \right]. \quad (1.10)$$

Como por hipótesis el sistema es controlable a cero, existe u tal que $\mathbf{x}(T) = 0$. Luego, obtenemos una forma equivalente de la solución $\mathbf{x}(T)$ (1.10) desarrollando la matriz exponencial como serie de potencias, es decir,

$$-\mathbf{x}_0 = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!} A^k B u(\tau) dt, \quad (1.11)$$

entonces

$$-\mathbf{v}^\top \mathbf{x}_0 = \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!} \mathbf{v}^\top A^k B u(\tau) dt = 0, \quad (1.12)$$

ya que todos los términos se anulan por (1.6). Tenemos que

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{x}_0 = 0, \quad (1.13)$$

para toda $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, y se sigue que $\mathbf{v}^\top = 0$. Esto es una contradicción. Por lo tanto $\text{rang } \tilde{U} = n$.

Ahora supongamos que $\text{rang } \tilde{U} = n$. Definimos

$$M = \int_0^T e^{-A\tau} B B^\top e^{-A^\top \tau} dt. \quad (1.14)$$

Observamos que si la matriz M es invertible, se puede construir una función de control

$$u(t) = -B e^{-A^\top t} M^{-1} \mathbf{x}_0, \quad (1.15)$$

obteniendo que el sistema (1.2) es controlable a cero, ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(T) &= e^{AT} \left[\mathbf{x}_0 + \int_0^T e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \right] \\ &= e^{AT} \left[\mathbf{x}_0 - \int_0^T e^{-A\tau} B B e^{-A^\top \tau} d\tau M^{-1} \mathbf{x}_0 \right] \\ &= e^{AT} \left[\mathbf{x}_0 - M M^{-1} \mathbf{x}_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

4 Preliminares

Finalmente, por el teorema 1.1 el sistema (1.2) es exactamente controlable. Ahora resta mostrar que M es invertible: sea $\alpha \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\alpha^\top M \alpha = \int_0^T |\psi(\tau)|^2 d\tau \geq 0 \quad (1.17)$$

donde $\psi(\tau) = \alpha^\top e^{-A\tau} B$. Se tiene que M es semidefinida positiva, por lo que M no es invertible si y sólo si existe $\hat{\alpha} \neq 0$ tal que $\hat{\alpha}^\top M \hat{\alpha} = 0$. Si es el caso se tiene lo siguiente

$$\psi(\tau) = \hat{\alpha}^\top e^{-A\tau} B = 0 \quad (1.18)$$

para toda $\tau \in [0, T]$. Calculando las derivadas $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n)}$ y evaluando en $\tau = 0$ se obtiene

$$\hat{\alpha}^\top B = 0, \dots, \hat{\alpha}^\top A^{n-1} B = 0. \quad (1.19)$$

Por lo tanto $\hat{\alpha}^\top \tilde{U} = 0$, esto contradice que $\text{rang } \tilde{U} = n$. Por lo tanto $\hat{\alpha}^\top = 0$ y M es invertible. \square

Los sistemas lineales exactamente controlables pueden ser escritos de una forma en particular, conocida como la forma canónica (de Brunovsky (ver en [4]) de un sistema controlable. Dicha forma se obtiene mediante una transformación de la forma $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$ y el sistema equivalente a (1.2) está dado por

$$\dot{\mathbf{y}} = \bar{A}\mathbf{y} + \bar{B}u. \quad (1.20)$$

El siguiente teorema da la forma de las matrices \bar{A} y \bar{B} para cada par controlable (A, B) .

Teorema 1.3 (Ver [1]). *(A, B) es un par controlable si y sólo si existe una transformación invertible S tal que*

$$\bar{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = S^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

donde los coeficientes a_i para $i = 1, 2, \dots, n$, corresponden a los coeficientes del polinomio característico P_A de A ,

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n. \quad (1.22)$$

Demostración. En primer lugar supongamos que existe $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante e invertible, tal que satisface (1.21). Se observa que (\bar{A}, \bar{B}) es un par controlable, ya

que calculando el determinante de la matriz de controlabilidad para este caso se obtiene

$$\det \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & l_{n-2n} \\ 0 & 1 & -a_1 & \cdots & l_{n-1n} \\ 1 & -a_1 & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}, \quad (1.23)$$

donde $l_{i,j}$ son constantes. Se sigue que $\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} = n$, entonces

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} &= \text{rang} \{S^{-1} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} S^{-1}B & S^{-1}ASS^{-1}B & \cdots & S^{-1}A^{n-1}SS^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} = n \end{aligned} \quad (1.24)$$

esto implica que (A, B) es un par controlable.

Por otro lado, supongamos que (A, B) es un par controlable, esto implica que el $\text{rang} \tilde{U} = \text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$. Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ los coeficientes del polinomio característico (1.22). Nuestro objetivo es encontrar a $S = [S_1 \ S_2 \ \cdots \ S_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz invertible, donde $S_1, \dots, S_n \in \mathbb{R}^n$ son las columnas de dicha matriz, tal que \bar{A}, \bar{B} satisfagan (1.21). Se obtienen la siguientes relaciones

$$S\bar{A} = AS, \quad S\bar{B} = B. \quad (1.25)$$

Desarrollando cada lado de la primera ecuación de (1.25)

$$\begin{aligned} S\bar{A} &= [S_1 \ S_2 \ \cdots \ S_n] \bar{A} = [-S_n a_n \ S_1 - S_n a_{n-1} \ \cdots \ S_{n-1} - S_n a_1], \\ AS &= A [S_1 \ \cdots \ S_n] = [AS_1 \ AS_2 \ \cdots \ AS_n]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Igualando las expresiones obtenidas se encuentran la siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} AS_1 &= -S_n a_n \\ AS_2 &= S_1 - S_n a_{n-1} \\ &\vdots \\ AS_n &= S_{n-1} - S_n a_1. \end{aligned} \quad (1.27)$$

De la segunda ecuación de (1.25) se obtiene

$$B = S\bar{B} = [S_1 \ S_2 \ \cdots \ S_n] \bar{B} = S_n. \quad (1.28)$$

Sustituyendo $S_n = B$ en la última ecuación de (1.27) y resolviendo dichas ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} S_1 &= a_{n-1}B + a_{n-2}AB + \cdots + a_1 A^{n-2}B + A^{n-1}B, \\ S_2 &= a_{n-2}B + a_{n-3}AB + \cdots + a_1 A^{n-3}B + A^{n-2}B, \\ &\vdots \\ S_{n-1} &= a_1 B + AB. \end{aligned} \quad (1.29)$$

6 Preliminares

De las relaciones anteriores se obtiene que la matriz S se puede escribir como

$$S = [S_1 \ S_2 \ \cdots \ S_n] = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{U}P. \quad (1.30)$$

Nótese que S es invertible, pues $\det P = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}$ y $\det \tilde{U} \neq 0$. Por construcción la matriz S satisface (1.21). \square

2 Controlabilidad de sistemas lineales

En este capítulo planteamos el problema de control insensibilizante. Este problema se ha tratado en la literatura en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales, ver e.g. [13]. Esta tesis es hasta donde sabemos, el primer estudio de este tipo en el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias. También se estudian las condiciones suficientes y necesarias para la existencia del control insensibilizante para sistemas lineales.

En la sección 2.1 se plantea el problema de control insensibilizante y se muestra que es equivalente aun problema de control a cero de un sistema acoplado.

En la sección 2.2 se considera el par (A, B) controlable y se escriben las potencias de la matriz \bar{A} , definida en el capítulo 1. Esto ayuda a reducir los cálculos a lo largo del capítulo.

En la sección 2.2.1 se caracteriza la controlabilidad del sistema (2.4), considerando A simétrica e invertible y Q simétrica.

Por último en la sección 2.2.2, se estudia la controlabilidad del sistema (2.4) con A una matriz arbitraria y ahora se pide que la matriz Q además sea invertible. Dicho estudio se realiza para $n = 3, 4$.

2.1. Planteamiento del problema

Se considera el sistema de control lineal con valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B u \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{x}_1\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante, $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, B \in \mathbb{R}^n$ son vectores constantes, $0 < \tau \ll 1$ es un parámetro pequeño, y $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que modifica la dinámica del sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. En las condiciones iniciales del sistema (2.1) el vector \mathbf{x}_0 es conocido, mientras que \mathbf{x}_1 es un vector desconocido, de este modo el término $\tau \mathbf{x}_1$ corresponde a una pequeña perturbación de la condición inicial \mathbf{x}_0 . En este trabajo consideramos el siguiente funcional

$$\mathcal{J}(\tau) = \int_0^T \mathbf{x}^\top Q \mathbf{x} dt,\tag{2.2}$$

8 Controlabilidad de sistemas lineales

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante y simétrica. La solución del sistema (2.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \tau)$ tiene dependencia de las condiciones iniciales, las cuales involucran el parámetro τ , por lo tanto la solución es afectada por las perturbaciones presentes en la condición inicial. Hay que notar que el valor del funcional \mathcal{J} depende del control u elegido y del parámetro τ , ya que se encuentran implícitamente en la solución $\mathbf{x}(t)$ de (2.1). Una manera de influir en el sistema (2.1) es mediante la función de control u . Ésta se construye, en caso de existir, dependiendo del objetivo planteado sobre el sistema o el funcional. Surge el problema de encontrar una función u que permita que el funcional \mathcal{J} sea insensible a pequeñas perturbaciones del sistema, es decir

$$\left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (2.3)$$

la condición (2.3) es conocida como la condición de insensibilidad. En el siguiente lema se relaciona la condición de insensibilidad con la controlabilidad a cero de la componente \mathbf{p} del sistema (2.4).

Lema 2.1. *Sea \mathcal{J} dado en (2.2). Entonces u es un control insensibilizante de \mathcal{J} para la solución \mathbf{x} de (2.1) si y sólo si u es tal que la componente \mathbf{p} del sistema*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -A^*\mathbf{p} + Q\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{p}(T) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

satisface que $\mathbf{p}(0) = 0$.

Demostración. Primero veamos que la condición de insensibilidad se puede escribir explícitamente. Desarrollando la ecuación (2.3)

$$0 = \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \int_0^T \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{x}(\tau)^\top Q \mathbf{x}(\tau)) dt \Big|_{\tau=0} = 2 \int_0^T \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}(\tau)}{\partial \tau}, Q \mathbf{x}(\tau) \right\rangle dt \Big|_{\tau=0}. \quad (2.5)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interior en \mathbb{R}^n . En la última igualdad de (2.5) está involucrado el término $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}$. Para calcular dicha derivada es necesario hacer variar el parámetro τ . Sea $\tilde{\mathbf{x}}(\tau + h) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \tau + h)$ solución de (2.1), es decir, $\tilde{\mathbf{x}}$ es solución de (2.1), tomamos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= A\tilde{\mathbf{x}} + B\mathbf{u}, \\ \tilde{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{x}_0 + (\tau + h) \mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por linealidad, la solución $\tilde{\mathbf{x}}$ del sistema anterior se puede escribir como la suma de las soluciones del sistema (2.1), el cual coincide con la solución de (2.6) cuando $h = 0$ y la solución del siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= A\mathbf{w}, \\ \mathbf{w}(0) &= h\mathbf{x}_1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

es decir, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{w}$. Además haciendo el cambio $\mathbf{w} = h\tilde{\mathbf{w}}$ en el sistema (2.7) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{w}}} &= A\tilde{\mathbf{w}}, \\ \tilde{\mathbf{w}}(0) &= \mathbf{x}_1.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Usando $\mathbf{x}(\tau)$, $\mathbf{w}(h)$ soluciones de (2.1) y (2.7) respectivamente, tenemos

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tau + h) = \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{w}(h) = \mathbf{x}(\tau) + h\tilde{\mathbf{w}}.\tag{2.9}$$

Se concluye

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mathbf{x}}(\tau + h) - \mathbf{x}(\tau)}{h} = \tilde{\mathbf{w}}.\tag{2.10}$$

Sustituyendo en (2.5), y siendo \mathbf{x} solución de (2.1)

$$\left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 2 \int_0^T \langle \tilde{\mathbf{w}}, Q\mathbf{x} \rangle dt = 0.\tag{2.11}$$

La expresión (2.11) da una forma explícita de la condición de insensibilidad. Si $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ y $\tilde{\mathbf{w}}(t)$ satisfacen (2.4) y (2.8) respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{p} \rangle &= \langle \dot{\tilde{\mathbf{w}}}, \mathbf{p} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{p}} \rangle \\ &= \langle A\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{p} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{w}}, -A^*\mathbf{p} + Q\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \tilde{\mathbf{w}}, A^*\mathbf{p} \rangle - \langle \tilde{\mathbf{w}}, A^*\mathbf{p} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{w}}, Q\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \tilde{\mathbf{w}}, Q\mathbf{x} \rangle.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Integrando ambos lados de 0 a T , y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \tilde{\mathbf{w}}, Q\mathbf{x} \rangle dt &= \int_0^T \frac{d}{dt} \langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{p} \rangle dt \\ &= \langle \tilde{\mathbf{w}}(T), \mathbf{p}(T) \rangle - \langle \tilde{\mathbf{w}}(0), \mathbf{p}(0) \rangle \\ &= - \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{p}(0) \rangle.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Entonces la propiedad (2.11) se satisface si y sólo si $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{p}(0) \rangle = 0$ para toda $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Esto es equivalente a $\mathbf{p}(0) = 0$. \square

El lema anterior sugiere un nuevo problema de control: ¿Bajo que condiciones existe la función real u de clase C^1 , tal que $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$, satisface (2.4) y $\mathbf{p}(0) = 0$? La solución del sistema (2.4) se expresa usando la fórmula de variación de parámetros. Antes de calcular la solución de dicho sistema se realiza el cambio $\mathbf{z}(t) = \mathbf{p}(T - t)$ en el sistema adjunto, correspondiente a la componente \mathbf{p} de (2.4), así

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= -\dot{\mathbf{p}}(T - t) = A^*\mathbf{p}(T - t) - Q\mathbf{x}(T - t) = A^*\mathbf{z}(t) - Q\mathbf{x}(T - t), \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{p}(T) = 0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

10 Controlabilidad de sistemas lineales

Como el sistema formado por la variable \mathbf{x} no depende de la variable \mathbf{z} , es posible calcular la solución del primer subsistema de (2.11) aplicando la fórmula de variación de las constantes

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \left(\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-A\omega} B u(\omega) d\omega \right). \quad (2.15)$$

Considerando la solución $\mathbf{x}(t)$ en el sistema, la solución del subsistema correspondiente a la variable \mathbf{z} en $t = T$ se calcula

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(T) &= -e^{A^*T} \int_0^T e^{-A^*s} Q \mathbf{x}(T-s) ds \\ &= -e^{A^*T} \int_0^T e^{-A^*s} Q \left(e^{A(T-s)} \left(\mathbf{x}_0 + \int_0^{T-s} e^{-A\omega} B u(\omega) d\omega \right) \right) ds \\ &= -e^{A^*T} \int_0^T e^{-A^*s} Q e^{A(T-s)} ds \mathbf{x}_0 - e^{A^*T} \int_0^T \int_0^{T-s} e^{-A^*s} Q e^{A(T-s)} e^{-A\omega} B u(\omega) d\omega ds \\ &= -e^{A^*T} \tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{A^*T} \int_0^T \int_0^{T-\omega} e^{-A^*s} Q e^{-As} ds e^{A(T-\omega)} B u(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \int_0^T e^{-A^*s} Q e^{A(T-s)} ds \mathbf{x}_0$.

En la siguiente sección estudiamos algunos casos para A , B y Q del sistema (2.4) en los que es posible mostrar la existencia de la función u tal que $\mathbf{p}(0) = 0$.

2.2. Controlabilidad del sistema lineal

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante, $B \in \mathbb{R}^n$ un vector constante, tal que (A, B) es un par controlable. Esta hipótesis es natural para estudiar el problema de control insensibilizante, recordando que la condición de insensibilidad del funcional \mathcal{J} para la solución \mathbf{x} de (2.1) se traduce a un problema de controlabilidad a cero de la componente \mathbf{p} del sistema (2.4). Veamos en el siguiente ejemplo la importancia de la hipótesis antes mencionada.

Ejemplo 2.1. Consideramos a las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

en este caso el sistema (2.4) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + u, & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= y, & y(0) &= y_0, \\ \dot{p} &= -p + x, & p(T) &= 0, \\ \dot{q} &= -q + y, & q(T) &= 0, \end{aligned}$$

donde $T > 0$. Claramente, (A, B) no es un par controlable, ya que el control u no influye sobre la variable y . Esto se puede observar en la solución del subsistema formado por x y y

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t x_0 + e^t \int_0^t e^{-s} u(s) ds, \\ y(t) &= e^t y_0. \end{aligned}$$

Entonces, no todas las variables del subsistema formado por p y q pueden ser llevadas a cero, para observar que es así, hacemos el cambio $z(t) = p(T-t)$ y $w(t) = q(T-t)$, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= z(t) - x(T-t), & z(0) &= 0, \\ \dot{w}(t) &= w(t) - y(T-t), & w(0) &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que en la solución

$$\begin{aligned} z(t) &= -e^t \int_0^t e^{-s} x(T-s) ds, \\ w(t) &= -e^t \int_0^t e^{-s} y(T-s) ds. \end{aligned}$$

Si $y_0 > 0$, entonces $y(t) > 0$ para toda $t > 0$, por lo que $w(t) > 0$ para toda $t > 0$.

Bajo estas hipótesis es posible construir una transformación invertible S , como se muestra en el capítulo 1, tal que

$$\bar{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = S^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

donde los coeficientes a_i para $i = 1, 2, \dots, n$, corresponden a los coeficientes del polinomio característico P_A de A ,

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_n. \quad (2.18)$$

Observación 2.1. Las entradas del producto $\bar{A}^r \bar{A}$ con $r \in \mathbb{N}$ se expresan como

$$\begin{aligned} [\bar{A}^r \bar{A}]_{ij} &= \langle e_n, \bar{A}^{\top r} e_i \rangle \langle e_j, \bar{A}^{\top} e_n \rangle + \langle e_{j-1}, \bar{A}^{\top r} e_i \rangle \\ &= \langle \bar{B}, \bar{A}^{\top r} e_i \rangle \langle e_j, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle + \langle e_{j-1}, \bar{A}^{\top r} e_i \rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde $e_m \in \mathbb{R}^n$ es un vector que consta de ceros en todas sus entradas excepto la m -ésima entrada donde aparece un 1 (base canónica de \mathbb{R}^n) para $m = 1, \dots, n$, y $e_0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Notar que $e_n = \bar{B}^{\top}$.

12 Controlabilidad de sistemas lineales

Por el teorema de Caley-Hamilton la matriz \bar{A} se anula en su polinomio característico, es decir

$$\bar{A}^n = -a_1\bar{A}^{n-1} - a_2\bar{A}^{n-2} - \dots - a_n I. \quad (2.20)$$

En la siguiente proposición se escribe a \bar{A}^{n+k} para $k \geq 0$, como combinación lineal de las primeras n potencias de \bar{A} y cuyos coeficientes corresponden a entradas de \bar{A}^{k+1} . El siguiente resultado, hasta donde sabemos, no está publicado en la literatura.

Proposición 2.1. Si \bar{A}, \bar{B} son como en (2.17), entonces

$$\bar{A}^{n+k} = \sum_{m=1}^n \langle e_{n-m+1}, \bar{A}^{\top k+1} \bar{B} \rangle \bar{A}^{n-m}. \quad (2.21)$$

Demostración. Claramente

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \langle e_{n-m+1}, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle \bar{A}^{n-m} &= \sum_{m=1}^n \langle e_{n-m+1}, [-a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad -a_1]^{\top} \rangle \bar{A}^{n-m} \\ &= \sum_{m=1}^n -a_m \bar{A}^{n-m} = \bar{A}^n. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nuestra hipótesis de inducción es que (2.21) se cumple para un cierto $k \geq 1$. Multiplicamos a (2.21) por \bar{A} en ambos lados, usamos (2.19) y (2.22) para obtener

$$\begin{aligned} \bar{A}^{n+k+1} &= \sum_{m=1}^n \langle e_{n-m+1}, \bar{A}^{\top k+1} \bar{B} \rangle \bar{A}^{n-m+1} \\ &= \langle e_n, \bar{A}^{\top k+1} \bar{B} \rangle \bar{A}^n + \sum_{m=2}^n \langle e_{n-m+1}, \bar{A}^{\top k+1} \bar{B} \rangle \bar{A}^{n-m+1} \\ &= \langle e_n, \bar{A}^{\top k+1} \bar{B} \rangle \sum_{m=1}^n \langle e_{n-m+1}, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle \bar{A}^{n-m} + \sum_{m=1}^{n-1} \langle e_{n-(m+1)+1}, \bar{A}^{\top k+1} \bar{B} \rangle \bar{A}^{n-(m+1)+1} \\ &= \sum_{m=1}^n (\langle e_n, \bar{A}^{\top k+1} \bar{B} \rangle \langle e_{n-m+1}, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle + \langle e_{n-m}, \bar{A}^{\top k+1} \bar{B} \rangle) \bar{A}^{n-m}. \\ &= \sum_{m=1}^n [\bar{A}^{k+1+1}]_{n, n-m+1} \bar{A}^{n-m} \\ &= \sum_{m=1}^n \langle e_{n-m+1}, \bar{A}^{\top (k+1)+1} \bar{B} \rangle \bar{A}^{n-m}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

□

A simétrica e invertible, Q simétrica

Primero estudiamos la controlabilidad del sistema (2.4) para un tipo de matrices A, Q particulares. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante, simétrica e invertible, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una

matriz constante y simétrica y $B \in \mathbb{R}^n$ un vector constante. Además se pide que las matrices A y Q conmuten, es decir, $AQ = QA$. La solución de (2.4) dada por (2.16) se simplifica en este caso.

A continuación se calcula una integral que aparece en el desarrollo de $\mathbf{z}(T)$ para $T > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{T-\omega} e^{-2As} ds &= -\frac{1}{2}A^{-1} \int_0^{T-\omega} -2Ae^{-2As} ds \\ &= -\frac{1}{2}A^{-1} (e^{-2A(T-\omega)} - I). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ahora bien, la solución $\mathbf{z}(T)$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(T) &= -e^{AT}\tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{AT} \int_0^T \int_0^{T-\omega} e^{-As} Q e^{-As} ds e^{A(T-\omega)} Bu(\omega) d\omega, \\ &= -e^{AT}\tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{AT} \int_0^T Q \int_0^{T-\omega} e^{-2As} ds e^{A(T-\omega)} Bu(\omega) d\omega, \\ &= -e^{AT}\tilde{\mathbf{x}}_0 + e^{AT} \int_0^T QA^{-1} \left(\frac{e^{-2A(T-\omega)} - I}{2} \right) e^{A(T-\omega)} Bu(\omega) d\omega, \\ &= -e^{AT}\tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{AT} \int_0^T QA^{-1} \sinh(A(T-\omega)) Bu(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En seguida se da una condición necesaria para la controlabilidad del sistema (2.4), con A , B y Q bajo las hipótesis enunciadas al inicio de esta sección. Para ello se define a la matriz $U = Q\tilde{U}$, donde \tilde{U} es la matriz de controlabilidad descrita en el capítulo 1. La matriz U se escribe de la siguiente manera

$$U = [QB \quad QAB \quad \dots \quad QA^{n-1}B]. \quad (2.26)$$

Teorema 2.1. *Si existe un control insensibilizante de (2.2) para \mathbf{x} solución de (2.1), entonces $\text{rang } U = n$.*

Demostración. Por contradicción: Supongamos que existe un control insensibilizante de (2.2) para \mathbf{x} solución de (2.1) y que $\text{rang } U < n$. Entonces existe un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$, tal que

$$\mathbf{v}^\top U = [\mathbf{v}^\top QB \quad \mathbf{v}^\top QAB \quad \dots \quad \mathbf{v}^\top QA^{n-1}B] = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]. \quad (2.27)$$

Tomamos el polinomio característico de A

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n. \quad (2.28)$$

Por el teorema de Caley-Hamilton se tiene

$$A^n = -a_1A^{n-1} - a_2A^{n-2} - \dots - a_nI. \quad (2.29)$$

14 Controlabilidad de sistemas lineales

De las relaciones en (2.27) y (2.29) se tiene

$$\mathbf{v}^\top QA^n B = -a_1 \mathbf{v}^\top QA^{n-1} B - a_2 \mathbf{v}^\top QA^{n-2} B - \dots - a_n \mathbf{v}^\top QB = 0, \quad (2.30)$$

usando la ecuación anterior se puede mostrar por inducción que

$$\mathbf{v}^\top QA^m B = 0 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \quad (2.31)$$

Ahora bien, por el lema 2.1 existe un control u tal que $\mathbf{z}(T) = \mathbf{p}(0) = 0$, de modo que

$$0 = \mathbf{x}_0 + \int_0^T QA^{-1} \sinh(A(t-\omega)) Bu(\omega) d\omega = \mathbf{x}_0 + \int_0^T QA^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{2i+1}}{(2i+1)!} A^{2i+1} Bu(\omega) d\omega, \quad (2.32)$$

$$\text{entonces} \quad -\mathbf{v}^\top \mathbf{x}_0 = \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{2i+1}}{(2i+1)!} \mathbf{v}^\top QA^{2i} Bu(\omega) d\omega = 0,$$

pues, $\mathbf{v}^\top QA^{2m} B = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, luego

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{x}_0 = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (2.33)$$

de lo anterior tenemos que $\mathbf{v} = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\text{rang } U = n$ \square

Una vez que la condición necesaria para la controlabilidad a cero de la componente \mathbf{p} del sistema (2.4) ha sido obtenida, es natural preguntarse por alguna condición suficiente. Enseguida se muestra que dicha condición requiere que la matriz

$$C = [QB \quad QA^2B \quad \dots \quad QA^{2(n-1)}B] \quad (2.34)$$

tenga rango completo.

Teorema 2.2. *Si $\text{rang } C = n$, entonces la componente \mathbf{p} del sistema (2.4) es controlable a cero al tiempo $T > 0$.*

Demostración. Sea M la matriz definida como

$$M = \int_0^T QA^{-1} \sinh(A(T-\omega)) BB^\top \sinh(A(T-\omega)) A^{-1} Q d\omega. \quad (2.35)$$

Observación 2.2. M es invertible. En efecto, para $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\begin{aligned} \alpha^\top M \alpha &= \int_0^T \alpha QA^{-1} \sinh(A(T-\omega)) BB^\top \sinh(A(T-\omega)) A^{-1} Q \alpha d\omega \\ &= \int_0^T |\phi^\top(\omega)|^2 d\omega \geq 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde $\phi(s) = \alpha^\top Q A^{-1} \sinh(A(T-s)) B$ para todo $s \in [0, T]$. La expresión (2.36) muestra que M es semidefinida positiva, de modo que M es no invertible si y sólo si existe $\hat{\alpha} \neq 0$, tal que $\hat{\alpha}^\top M \hat{\alpha} = 0$. Supongamos que existe $\hat{\alpha} \neq 0$, tal que $\hat{\alpha}^\top M \hat{\alpha} = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \hat{\alpha}^\top Q A^{-1} \sinh(A(T-s)) B \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}^\top Q A^{-1} A^{2n-1} B \frac{(T-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} = 0 \quad \text{para todo } s \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Por lo tanto,

$$\hat{\alpha}^\top C = [\alpha^\top Q B \quad \alpha^\top Q A^2 B \quad \dots \quad \alpha^\top Q A^{2(n-1)} B] = (0, 0, \dots, 0). \quad (2.38)$$

Entonces, $\text{rang } C < n$, esto es una contradicción, se sigue que M es invertible.

Ahora considerando la observación 2.2, se define la función

$$u(\omega) = -B^\top \sinh(A(T-\omega)) A^{-1} Q M^{-1} \mathbf{x}_0. \quad (2.39)$$

Sustituyendo a u en (2.25) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(T) &= \mathbf{x}_0 - \int_0^T Q A^{-1} \sinh(A(T-\omega)) B B^\top \sinh(A(T-\omega)) A^{-1} Q M^{-1} \mathbf{x}_0 d\omega \\ &= \mathbf{x}_0 - \int_0^T Q A^{-1} \sinh(A(T-\omega)) B B^\top \sinh(A(T-\omega)) A^{-1} Q d\omega M^{-1} \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_0 - M M^{-1} \mathbf{x}_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Por lo tanto $\mathbf{p}(0) = 0$. Esto muestra que la componente \mathbf{p} del sistema (2.4) es controlable a cero al tiempo $T > 0$. \square

Nótese que si $\text{rang } C = n$, entonces $\text{rang } U = n$, lo anterior se obtiene de la aplicación directa del Teorema 2.2, seguido del Teorema 2.1. Sin embargo, el recíproco no se satisface y es necesario imponer más condiciones sobre la matrices A, B . Como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. Considerando las siguiente matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

se tiene que el par (A, B) es controlable, puesto que

$$\det \tilde{U} = \det [B \quad AB \quad A^2 B] = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -8, \quad (2.42)$$

esto implica que la matriz de controlabilidad \tilde{U} tiene rango completo. Por lo tanto, $\text{rang } U = \text{rang } Q\tilde{U} = 3$. Por otro lado tenemos

$$\det C = \det Q \begin{bmatrix} 1 & 5 & 41 \\ 0 & 4 & 40 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (4 - 40) + (5 * 40 - 4 * 41) = 0. \quad (2.43)$$

Esto implica que $\text{rang } C < 3$.

Las condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad de la componente \mathbf{p} del sistema (2.27) se enuncian en el siguiente teorema. Para la demostración hay que tomar casos separados para n par y n impar. Más aún, en dicha prueba se hace uso de la igualdad (2.21), ésta nos permite escribir de manera conveniente cada una de las columnas de la matriz C .

Teorema 2.3. Sean $A, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrices simétricas e invertibles, tales que A y Q conmutan y $B \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que (A, B) es un par controlable y que se satisface

$$\text{rang } N \left[(\bar{A}^\top)^{r+1} \bar{B} \quad (\bar{A}^\top)^{r+3} \bar{B} \quad \dots \quad (\bar{A}^\top)^{r+2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \bar{B} \right] = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (2.44)$$

donde $r = n - 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ $N = \begin{bmatrix} e_2^\top \\ \vdots \\ e_{2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^\top \end{bmatrix}$. Entonces

$$\text{rang } C = \text{rang} \left[QB \quad QA^2B \quad \dots \quad QA^{2(n-1)}B \right] = n \quad (2.45)$$

Debido a que la demostración de este teorema es demasiado técnica se muestra en particular para $n = 3$ y $n = 4$. En estas pruebas se observa cómo proceder en el caso general, ya sea n par o impar, respectivamente.

Caso $n = 3$

En este caso el Teorema 2.3 se puede reescribir como:

Teorema 2.4. En las hipótesis del Teorema 2.3 con $n = 3$. Si se satisface que

$$\text{rang } N \left[\bar{A}^\top \bar{B} \right] = 1, \quad (2.46)$$

donde $N = [e_2^\top]$, entonces

$$\text{rang } C = \text{rang} \left[QB \quad QA^2B \quad QA^4B \right] = 3 \quad (2.47)$$

Demostración. Como el sistema formado por $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + Bu$ es controlable, existe una transformación S invertible tal que $\bar{A} = S^{-1}AS$ y $\bar{B} = S^{-1}B$ son de la forma expresada en (2.17). Notamos que

$$\begin{aligned} \text{rang } C &= \text{rang} \begin{bmatrix} QS\bar{B} & Q(S\bar{A}S^{-1})^2 B & Q(S\bar{A}S^{-1})^4 S\bar{B} \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} QS\bar{B} & QS\bar{A}^2\bar{B} & QS\bar{A}^4B \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

Supongamos que $\text{rang} \begin{bmatrix} QS\bar{B} & QS\bar{A}^2\bar{B} & QS\bar{A}^4B \end{bmatrix} < 3$, entonces existe un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq 0$, tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top QS\bar{B} & \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^2\bar{B} & \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^4B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

Por la expresión (2.21) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^4B = \langle e_3, \bar{A}^{\top 2}\bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^2\bar{B} + \langle e_2, \bar{A}^{\top 2}\bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B} + \langle e_1, \bar{A}^{\top 2}\bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{B} \\ &= \langle e_2, \bar{A}^{\top 2}\bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B} \\ &= N\bar{A}^{\top 2}\bar{B}\mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Entonces

$$0 = \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B} \quad (2.51)$$

así que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top QS\bar{B} & \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B} & \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^2\bar{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top QSS^{-1}B & \mathbf{v}^\top QS(S^{-1}AS)S^{-1}B & \mathbf{v}^\top QS(S^{-1}AS)^2S^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top QB & \mathbf{v}^\top QAB & \mathbf{v}^\top QA^2B \end{bmatrix} = U \end{aligned} \quad (2.52)$$

lo cual es una contradicción, ya que el par (A, B) es controlable y Q invertible, esto implica $\text{rang } U = 3$. Por lo tanto $3 = \text{rang} \begin{bmatrix} QS\bar{B} & QS\bar{A}^2\bar{B} & QS\bar{A}^4B \end{bmatrix} = \text{rang } C$. \square

Caso $n = 4$

Procediendo de manera análoga al caso anterior se enuncia el teorema 2.3 para $n = 4$

Teorema 2.5. *En las hipótesis del Teorema 2.3 con $n = 4$. Si se satisface que*

$$\text{rang } N \begin{bmatrix} \bar{A}^\top \bar{B} & \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \end{bmatrix} = 2 \quad \text{donde} \quad N = \begin{bmatrix} e_2^\top \\ e_4^\top \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

entonces

$$\text{rang } C = \text{rang} \begin{bmatrix} QB & QA^2B & QA^4B & QA^6B \end{bmatrix} = 4 \quad (2.54)$$

Demostración. Existe una transformación invertible S tal que $\bar{A} = S^{-1}AS$ y $\bar{B} = S^{-1}B$ son de la forma expresada en (2.17). Notamos que

$$\begin{aligned} \text{rang } C &= \text{rang} \begin{bmatrix} QS\bar{B} & Q(S\bar{A}S^{-1})^2\bar{B} & Q(S\bar{A}S^{-1})^4\bar{B} & Q(S\bar{A}S^{-1})^6\bar{B} \end{bmatrix} \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} QS\bar{B} & QS\bar{A}^2\bar{B} & QS\bar{A}^4\bar{B} & QS\bar{A}^6\bar{B} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

Supongamos que $\text{rang} \begin{bmatrix} QS\bar{B} & QS\bar{A}^2\bar{B} & QS\bar{A}^4\bar{B} & QS\bar{A}^6\bar{B} \end{bmatrix} < 4$, entonces existe un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{v} \neq 0$, tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top QS\bar{B} & \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^2\bar{B} & \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^4\bar{B} & \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^6\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Usando (2.21) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^4\bar{B} = \langle e_4, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^3\bar{B} + \langle e_3, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^2\bar{B} \\ &\quad + \langle e_2, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B} + \langle e_1, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{B} \\ &= \langle e_4, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^3\bar{B} + \langle e_2, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B}, \\ 0 &= \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^6\bar{B} = \langle e_4, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^3\bar{B} + \langle e_3, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^2\bar{B} \\ &\quad + \langle e_2, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B} + \langle e_1, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{B} \\ &= \langle e_4, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^3\bar{B} + \langle e_2, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B} \end{aligned} \quad (2.57)$$

escribiendo las igualdades anteriores en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \langle e_2, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle & \langle e_4, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle \\ \langle e_2, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle & \langle e_4, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B} \\ \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^3\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{bmatrix} \langle e_2, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle & \langle e_4, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle \\ \langle e_2, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle & \langle e_4, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \end{bmatrix} &= \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle e_1, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle & \langle e_1, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \\ \langle e_2, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle & \langle e_2, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \\ \langle e_3, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle & \langle e_3, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \\ \langle e_4, \bar{A}^\top \bar{B} \rangle & \langle e_4, \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \rangle \end{bmatrix} \\ &= \text{rang } N \begin{bmatrix} \bar{A}^\top \bar{B} & \bar{A}^{\top 3} \bar{B} \end{bmatrix} = 2. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B} \\ \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^3\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Y se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top QS\bar{B} & \mathbf{v}^\top QS\bar{A}\bar{B} & \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^2\bar{B} & \mathbf{v}^\top QS\bar{A}^3\bar{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top QB & \mathbf{v}^\top QAB & \mathbf{v}^\top QA^2B & \mathbf{v}^\top QA^3B \end{bmatrix} = \mathbf{v}^\top U \end{aligned} \quad (2.61)$$

lo cual es una contradicción, ya que $\text{rang } U = 4$. Por lo tanto $\text{rang } C = 4$. \square

Por último, es importante destacar que las condiciones suficientes y necesarias encontradas en esta sección son válidas para la clase de matrices A simétrica e invertible y Q simétrica, sin embargo nos gustaría ampliar dicha clase. Esto se estudia en la siguiente sección. En donde se buscan condiciones suficientes y necesarias, similares a las mostradas hasta ahora, para la controlabilidad de la componente \mathbf{p} a cero de (2.4).

A general, Q simétrica

Ahora vamos a estudiar el control insensibilizante de \mathcal{J} para un sistema lineal arbitrario, dado por (2.2) con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante, $B \in \mathbb{R}^n$ un vector constante y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica de (2.1), es decir, el control a cero de la componente \mathbf{p} de (2.4). Procediendo como en el apartado anterior, se calcula la solución del problema de Cauchy (2.4) haciendo el cambio $\mathbf{z}(t) = \mathbf{p}(T - t)$ para $T > 0$, obteniendo la solución dada en (2.16) en $t = T$. Calculamos la integral con respecto a s de (2.16), por la fórmula del producto de Cauchy para series (ver e.g. [2]) tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T-\omega} e^{-A^*s} Q e^{-As} ds &= \int_0^{T-\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{s^k}{k!} A^{*k} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k!} Q A^k \right) ds \\
 &= \int_0^{T-\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \left((-1)^m \frac{s^m}{m!} A^{*m} \right) \left((-1)^{k-m} \frac{s^{k-m}}{(k-m)!} Q A^{k-m} \right) ds \\
 &= \int_0^{T-\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k (-1)^k \frac{s^k}{(k-m)!m!} A^{*m} Q A^{k-m} ds \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k (-1)^k \frac{(T-\omega)^{k+1}}{(k+1)!} \binom{k}{m} A^{*m} Q A^{k-m} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(T-\omega)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} A^{*m} Q A^{k-m} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(T-\omega)^{k+1}}{(k+1)!} C_k
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

donde

$$C_k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} A^{*m} Q A^{k-m}.$$

Sustituyendo (2.62) en (2.16)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}(T) &= -e^{A^*T} \tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{A^*T} \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(T-\omega)^{k+1}}{(k+1)!} C_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^k}{k!} A^k \right) B u(\omega) d\omega \\
 &= -e^{A^*T} \tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{A^*T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \left((-1)^m \frac{(T-\omega)^{m+1}}{(m+1)!} C_m \right) \left(\frac{(T-\omega)^{k-m}}{(k-m)!} A^{k-m} \right) B u(\omega) d\omega \\
 &= -e^{A^*T} \tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{A^*T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{(T-\omega)^{k+1}}{(m+1)!(k-m)!} C_m A^{k-m} B u(\omega) d\omega \\
 &= -e^{A^*T} \tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{A^*T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} C_m A^{k-m} B u(\omega) d\omega \\
 &= -e^{A^*T} \tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{A^*T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} D_k B u(\omega) d\omega,
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

donde

$$D_k = \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} C_m A^{k-m} = \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (-1)^m A^{*m} Q A^{k-m},$$

esta igualdad se demuestra en el Apéndice A.2.

En este caso, la condición necesaria para la controlabilidad del sistema (2.11) se enuncia a partir de la matriz U , definida en (2.26). Se construyen n^2 vectores correspondientes a las columnas de $A^{*j}U$ para $j = 0, \dots, n-1$. Es decir,

$$U_1 = [QB \quad \dots \quad QA^{n-1}B \quad A^*QB \quad \dots \quad A^*QA^{n-1}B \quad \dots \quad A^{*n-1}QB \quad \dots \quad A^{*n-1}QA^{n-1}B] \quad (2.64)$$

La demostración de dicha condición se realiza siguiendo la misma idea presentada en la prueba del Teorema 2.1.

Teorema 2.6. *Si existe un control insensibilizante de (2.2) para la solución del sistema (2.1), entonces el rang $U_1 = n$.*

Demostración. Supongamos que el rang $U_1 < n$. Entonces, existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$, tal que

$$\mathbf{v}^\top [QB \quad \dots \quad QA^{n-1}B \quad A^*QB \quad \dots \quad A^*QA^{n-1}B \quad \dots \quad A^{*n-1}QB \quad \dots \quad A^{*n-1}QA^{n-1}B] = \mathbf{0}. \quad (2.65)$$

Más aún,

$$\mathbf{v}^\top A^{*j}QA^mB = 0, \quad (2.66)$$

para todos los enteros $j, m \geq n$. En efecto, por el Teorema de Caley-Hamilton

$$A^n = -a_1A^{n-1} - a_2A^{n-2} - \dots - a_nI. \quad (2.67)$$

donde a_1, \dots, a_n son los coeficientes del polinomio característico de A . Multiplicando ambos lados de la ecuación (2.67) por $\mathbf{v}^\top A^{*j}Q$, para $j = 0, \dots, n-1$, por la izquierda y por B por la derecha, tenemos por (2.56) que

$$\mathbf{v}^\top A^{*j}QA^nB = -a_1\mathbf{v}^\top A^{*j}QA^{n-1}B - a_2\mathbf{v}^\top A^{*j}QA^{n-2}B - \dots - a_n\mathbf{v}^\top A^{*j}QB = 0. \quad (2.68)$$

Usando inducción concluimos que

$$\mathbf{v}^\top A^{*j}QA^mB = 0, \quad (2.69)$$

para todo $m \geq 0$ y $j = 0, \dots, n-1$. Luego, como el polinomio característico de A^* coincide con el de A , el Teorema de Caley-Hamilton y (2.69) implican

$$\mathbf{v}^\top A^{*n}QA^mB = -a_1\mathbf{v}^\top A^{*n-1}QA^mB - a_2\mathbf{v}^\top A^{*n-2}QA^mB - \dots - a_n\mathbf{v}^\top QA^mB = 0. \quad (2.70)$$

para $m \in \mathbb{N}$. Usando inducción se obtiene (2.66).

Por hipótesis, existe u un control insensibilizante de (2.2) para la solución del sistema (2.1). Así, aplicando el Lema 2.1 tenemos que $\mathbf{z}(T) = 0$ para $T > 0$, por (2.63) obtenemos

$$0 = \tilde{\mathbf{x}}_0 - \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} D_k B u(\omega) d\omega, \quad (2.71)$$

multiplicando la igualdad (2.71) por \mathbf{v}^\top y por las relaciones (2.66) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{x}}_0 &= \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} \mathbf{v}^\top D_k B u(\omega) d\omega \\ &= \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{(k+1)!} (T-\omega)^{k+1} \mathbf{v}^\top A^{*m} Q A^{k-m} B u(\omega) d\omega = 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Por lo anterior

$$\mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{x}}_0 = 0 \quad (2.73)$$

para todo $\tilde{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\mathbf{v}^\top = 0$, esto contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $\text{rang } U_1 = n$. \square

De manera análoga al caso presentado en la sección 2.2.1, se busca una condición suficiente para la controlabilidad. Se definen los siguientes vectores

$$\bar{D}_{2j} = (2j+1) D_{2j} B, \quad (2.74)$$

para $j = 0, \dots, n-1$.

Teorema 2.7. Si

$$\text{rang} [\bar{D}_0 \quad \bar{D}_2 \quad \dots \quad \bar{D}_{2(n-1)}] = n, \quad (2.75)$$

entonces la componente \mathbf{p} del sistema (2.4) es controlable a cero al tiempo $T > 0$.

Demostración. Supongamos que

$$\text{rang} [\bar{D}_0 \quad \bar{D}_2 \quad \dots \quad \bar{D}_{2(n-1)}] < n. \quad (2.76)$$

Sea

$$M = \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} D_k B \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} B^\top D_k^\top \right) d\omega. \quad (2.77)$$

Supongamos por el momento que M es invertible, definimos a la función u como sigue

$$u(\omega) = - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} B^\top D_k^\top \right) M^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0. \quad (2.78)$$

22 Controlabilidad de sistemas lineales

luego, sustituyendo la función u en la solución dada por (2.63), en el instante $t = T$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(T) &= -e^{A^*T} \tilde{\mathbf{x}}_0 + e^{A^*T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} D_k B \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} B^\top D_k^\top \right) M^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0 d\omega \\ &= -e^{A^*T} \tilde{\mathbf{x}}_0 + e^{A^*T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} D_k B \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} B^\top D_k^\top \right) d\omega M^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ &= -e^{A^*T} \tilde{\mathbf{x}}_0 + e^{A^*T} M M^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Concluimos que la componente \mathbf{p} del sistema (2.4) es controlable a cero al tiempo $T > 0$. Ahora veamos que la matriz M es invertible: Sea $\alpha \in \mathbb{R}^n$, así

$$\alpha^\top M \alpha = \int_0^T \phi^\top(\omega) \phi(\omega) d\omega = \int_0^T |\phi(\omega)|^2 d\omega \geq 0 \quad (2.80)$$

donde

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-s)^{k+1}}{k!} \alpha^\top D_k B \quad (2.81)$$

obsérvese que $\phi(s)$ está bien definida para todo $s \in [0, T]$.

En efecto sea $S_N = \sum_{k=0}^N \frac{(T-s)^{k+1}}{k!} \alpha^\top D_k B$, para $M < N$

$$|S_N - S_M| \leq (T-s) \|\hat{\alpha}\| \|QB\| \sum_{j=M+1}^N \frac{(T-s)^j}{j!} \|A\|^j \leq \varepsilon$$

cuando M es lo suficientemente grande y consideramos $\|A\|$ alguna norma matricial.

Entonces la matriz M es semidefinida positiva. Además M no es invertible, si y sólo si existe $\hat{\alpha} \neq 0$, tal que, $\hat{\alpha}^\top M \hat{\alpha} = 0$. Supongamos que dicho vector $\hat{\alpha} \neq 0$ existe, de modo que $\hat{\alpha}^\top M \hat{\alpha} = 0$. Así

$$\phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-s)^{k+1}}{k!} \hat{\alpha}^\top D_k B = 0, \quad \text{para todo } s \in [0, T]. \quad (2.82)$$

Por lo tanto,

$$(k+1) \hat{\alpha}^\top D_k B = 0, \quad (2.83)$$

para todo $k > 0$, en particular

$$\hat{\alpha}^\top [\bar{D}_0 \quad \bar{D}_2 \quad \cdots \quad \bar{D}_{2(n-1)}] = \mathbf{0}. \quad (2.84)$$

Entonces

$$\text{rang} [\bar{D}_0 \quad \bar{D}_2 \quad \cdots \quad \bar{D}_{2(n-1)}] < n. \quad (2.85)$$

Por lo tanto no existe $\hat{\alpha}$ y se tiene que M es invertible. \square

Se observa que la condición necesaria no necesariamente implica la condición suficiente, para ver que esto sí ocurra se consideran condiciones sobre las matrices A , B y Q . Nótese que la condición necesaria, $\text{rang } U_1 = n$, es equivalente a pedir que (A, B) sea un par controlable y Q invertible. Para dar dichas condiciones vamos a definir las siguientes matrices

$$U = [QB \quad QAB \quad \dots \quad QA^{n-1}B]$$

$$H_{n-j} = \begin{cases} \bar{D}_{2(n-j)} & \text{si } n < 2j \leq 2(n-1) \\ \begin{bmatrix} 0 & QAB + A^*QB & \dots & QA^{n-1}B + A^{*n-1}QB \\ + \sum_{m=1}^{n-2j} (-1)^m [A^{*m}QB + QA^mB & \dots & A^{*m}QA^{n-1}B + A^{*n-1}QA^mB] \\ + \sum_{m=n-2j+1}^{n-1} (-1)^m A^{*m}QA^{2(n-j)-m}B, & \text{si } 2 \leq 2j \leq n, \end{bmatrix} \bar{A}^{\top n-(2j-1)} \bar{B} \end{cases} \quad (2.86)$$

para $j \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.8. Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$ tal que (A, B) es un par controlable y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica e invertible. Supongamos

$$\text{rang} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2 \quad \dots \quad U^{-1}H_{n-1}] = n-1, \quad (2.87)$$

donde U y H_1, \dots, H_{n-1} son como en (2.90). Entonces

$$\text{rang} [\bar{D}_0 \quad \bar{D}_2 \quad \dots \quad \bar{D}_{2(n-1)}] = n, \quad (2.88)$$

Este teorema se demuestra separando en el caso n par e impar. Luego, en cada caso se procede por contradicción, suponiendo que no se cumple la condición suficiente, esto da la existencia de un vector distinto de cero tal que anula a cada vector involucrado en la condición suficiente. Además, usando la fórmula (2.21) se reescribe a cada uno de dichos vectores. Obteniendo así un sistema de ecuaciones, cuya solución implica que las columnas de la matriz de controlabilidad son linealmente dependientes. Lo anterior se realiza de forma detallada para los casos $n = 3$ y $n = 4$.

Caso $n = 3$

Teorema 2.9. Sean $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^3$ tal que (A, B) es un par controlable y $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica e invertible. Supongamos

$$\text{rang} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2] = 2. \quad (2.89)$$

Consideramos

$$\begin{aligned}
 U &= [QB \quad QAB \quad QA^2B] \\
 H_1 &= QA^2B - A^*QAB + A^{*2}QB \\
 H_2 &= [0 \quad (QAB + A^*QB) \quad (QA^2B + A^{*2}QB)] (\bar{A}^*)^2 \bar{B} \\
 &\quad - [(A^*QB + QAB) \quad 2A^*QAB \quad (A^*QA^2B + A^{*2}QAB)] \bar{A}^* \bar{B} + A^{*2}QA^2B.
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Entonces

$$\text{rang } C = \text{rang} [\bar{D}_0 \quad \bar{D}_2 \quad \bar{D}_4] = 3. \tag{2.91}$$

Demostración. Existe una transformación invertible S tal que $A = S\bar{A}S^{-1}$, $B = S\bar{B}$. Donde \bar{A}, \bar{B} son como se definen en el capítulo 1. Usando la transformación S y la expresión (2.21) la última columna de C se expresa como

$$\begin{aligned}
 &QA^4B - A^*QA^3B + A^{*2}QA^2B - A^{*3}QAB + A^{*4}QB \\
 &= QS\bar{A}^4\bar{B} + (S\bar{A}^4S^{-1})^*QB - (A^*QS\bar{A}^3\bar{B} + (S\bar{A}^3S^{-1})^*QAB) + \bar{A}^{*2}QA^2B \\
 &= \langle e_3, \bar{A}^{\top 2} \bar{B} \rangle (QS\bar{A}^2\bar{B} + (S\bar{A}^2S^{-1})^*QB) + \langle e_2, \bar{A}^{\top 2} \bar{B} \rangle (QS\bar{A}\bar{B} + (S\bar{A}S^{-1})^*QB) \\
 &\quad + 2 \langle e_1, \bar{A}^{\top 2} \bar{B} \rangle (QB) - \langle e_3, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle (\bar{A}^*QS\bar{A}^2\bar{B} + (S\bar{A}^2S^{-1})^*QAB) \\
 &\quad - \langle e_2, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle (A^*QS\bar{A}\bar{B} + (S\bar{A}S^{-1})^*QAB) - \langle e_1, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle ((A^*QS\bar{B} + QAB) + A^{*2}QA^2B) \\
 &= \langle e_3, \bar{A}^{\top 2} \bar{B} \rangle (QA^2B + A^{*2}QB) + \langle e_2, \bar{A}^{\top 2} \bar{B} \rangle (QAB + A^*QB) + 2 \langle e_1, \bar{A}^{\top 2} \bar{B} \rangle (QB) - \\
 &\quad \langle e_3, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle (A^*QA^2B + A^{*2}QAB) - 2 \langle e_2, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle A^*QAB - \langle e_1, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle (A^*QB + QAB) \\
 &\quad + A^{*2}QA^2B \\
 &= [2(QB) \quad (QAB + A^*QB) \quad (QA^2B + A^{*2}QB)] \begin{bmatrix} \langle e_1, \bar{A}^{\top 2} \bar{B} \rangle \\ \langle e_2, \bar{A}^{\top 2} \bar{B} \rangle \\ \langle e_3, \bar{A}^{\top 2} \bar{B} \rangle \end{bmatrix} - \\
 &\quad [(A^*QB + QAB) \quad 2A^*QAB \quad (A^*QA^2B + A^{*2}QAB)] \begin{bmatrix} \langle e_1, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle \\ \langle e_2, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle \\ \langle e_3, \bar{A}^{\top} \bar{B} \rangle \end{bmatrix} + A^{*2}QA^2B \\
 &= [2(QB) \quad (QAB + A^*QB) \quad (QA^2B + A^{*2}QB)] (\bar{A}^{\top})^2 \bar{B} - \\
 &\quad [(A^*QB + QAB) \quad 2A^*QAB \quad (A^*QA^2B + A^{*2}QAB)] \bar{A}^{\top} \bar{B} + A^{*2}QA^2B \\
 &= [2(QB) \quad (QAB + A^*QB) \quad (QA^2B + A^{*2}QB)] \bar{A}^{*2} \bar{B} - \\
 &\quad [(A^*QB + QAB) \quad 2A^*QAB \quad (A^*QA^2B + A^{*2}QAB)] \bar{A}^* \bar{B} + A^{*2}QA^2B.
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Supongamos que $\text{rang } C < 3$, entonces existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{v}^{\top} QB = 0 \\
 &\mathbf{v}^{\top} (QA^2B - A^*QAB + A^{*2}QB) = 0 \\
 &\mathbf{v}^{\top} ([2(QB) \quad (QAB + A^*QB) \quad (QA^2B + A^{*2}QB)] \bar{A}^{*2} \bar{B}) - \\
 &\quad \mathbf{v}^{\top} ([(A^*QB + QAB) \quad 2A^*QAB \quad (A^*QA^2B + A^{*2}QAB)] \bar{A}^* \bar{B} + A^{*2}QA^2B) = 0,
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{v}^{\top} H_1 = 0 \\
 &\mathbf{v}^{\top} H_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

Nótese que $U = [QB \quad QAB \quad QA^2B]$ es invertible, ya que Q es invertible y (A, B) es un par controlable. Reescribiendo (2.94)

$$\begin{aligned}
 [0 \ 0] &= [\mathbf{v}^\top H_1 \quad \mathbf{v}^\top H_2] \\
 &= [\mathbf{v}^\top UU^{-1}H_1 \quad \mathbf{v}^\top UU^{-1}H_2] \\
 &= \mathbf{v}^\top U [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2] \\
 &= [\mathbf{v}^\top QB \quad \mathbf{v}^\top QAB \quad \mathbf{v}^\top QA^2B] [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2] \\
 &= [0 \quad \mathbf{v}^\top QAB \quad \mathbf{v}^\top QA^2B] [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2] \\
 &= [\mathbf{v}^\top QAB \quad \mathbf{v}^\top QA^2B] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2] \\
 &= [\mathbf{v}^\top QAB \quad \mathbf{v}^\top QA^2B] \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2].
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

Por la hipótesis (2.89) se tiene

$$[0 \ 0 \ 0] = [\mathbf{v}^\top QB \quad \mathbf{v}^\top QAB \quad \mathbf{v}^\top QA^2B]. \tag{2.96}$$

Entonces,

$$\text{rang} [QB \quad QAB \quad QA^2B] = \text{rang} Q [B \quad AB \quad A^2B] < 3. \tag{2.97}$$

Lo cual es una contradicción ya que Q es invertible y (A, B) es un par controlable. Por lo tanto $\text{rang} C = 3$. \square

Observación 2.3. En ejemplos numéricos es necesario calcular la función de control u definida en (2.78), en esta tesis lo hacemos de forma aproximada, es decir consideramos

$$\begin{aligned}
 M_N &= \int_0^T \left(\sum_{k=0}^N \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} D_k B \right) \left(\sum_{k=0}^N \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} B^\top D_k^\top \right) d\omega, \\
 u_N(\omega) &= - \left(\sum_{k=0}^N \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} B^\top D_k^\top \right) M^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0.
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Se puede probar que M_N es invertible siguiendo el mismo argumento que se usó para mostrar que M es invertible en 2.7. Sustituyendo u_N en el sistema (2.4) tenemos

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{z}(T) = -e^{A^*T} + e^{A^*T} \tilde{M}_N M_N^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0 \tag{2.99}$$

donde

$$\tilde{M}_N = \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} D_k B \right) \left(\sum_{k=0}^N \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} B^\top D_k^\top \right) d\omega. \tag{2.100}$$

Claramente,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{M}_N M_N^{-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{M}_N \lim_{N \rightarrow \infty} M_N^{-1} = M M^{-1} = I, \tag{2.101}$$

por definición, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N > N_0$

$$\begin{aligned} \left| [\tilde{M}_N M_N^{-1}]_{ij} \right| &< \varepsilon \quad \text{si } i \neq j, i, j = 1, \dots, n, \\ \left| [\tilde{M}_N M_N^{-1}]_{ii} - 1 \right| &< \varepsilon \quad \text{si } i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Entonces existe una matriz $R_{ij}(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ para $i, j = 1, \dots, n$ tal que $|R_{ij}(\varepsilon)| < 2\varepsilon$ y

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_N M_N^{-1}]_{ij} &= \varepsilon + R_{ij}(\varepsilon) \quad \text{si } i \neq j, i, j = 1, \dots, n, \\ [\tilde{M}_N M_N^{-1}]_{ii} - 1 &= \varepsilon + R_{ij}(\varepsilon) \quad \text{si } i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.103)$$

definiendo $R(\varepsilon) = R_{ij}(\varepsilon)$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}(0)\| = \|\mathbf{z}(T)\| &= \left\| -e^{A^*T} + e^{A^*T} (I + \varepsilon I + R(\varepsilon)) \tilde{\mathbf{x}}_0 \right\| \\ &= \left\| -e^{A^*T} \right\| \|\tilde{\mathbf{x}}_0\| \|(\varepsilon I + R(\varepsilon))\|. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Esto muestra que si N lo suficientemente grande, $\mathbf{p}(0)$ se encuentra en una vecindad pequeña del 0.

A continuación se ilustran los resultados obtenidos para la controlabilidad mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. Se considera un caso particular del sistema (2.4) con

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} & -\frac{1}{27} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = 10^{-2} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}, \quad (2.105)$$

que satisfacen las condiciones del Teorema 2.9. Entonces $\text{rang } C = 3$. En este caso el sistema adjunto de (2.4) es controlable a cero al tiempo T . Eligiendo a $T = 0.5$ y la condición inicial $\mathbf{x}_0 = 2.025$. Primero, se ilustra en la Figura 2.1 el comportamiento de cada subsistema de (2.4) con $u = 0$, correspondientes al sistema de estados y el sistema adjunto. Se observa en la Figura 2.1 (b) que la solución del sistema adjunto se aleja del origen en cada una de sus variables.

Ahora veamos el efecto del control insensibilizante u , definido en la observación 2.3. Dicho control u_N se calcula para $N = 25$. En la figura 2.2 (b) se observa el esfuerzo realizado por la función de control sobre el sistema adjunto para llevarlo a cero en tiempo inverso partiendo de $T = 0.5$. Dicho control también tiene un efecto sobre las variables de estado, como se muestra en la Figura 2.2 (a).

Recordando que la controlabilidad a cero del sistema adjunto (2.4) se relaciona con la condición de insensibilidad (2.3) del sistema (2.1). En este caso se calcula el valor aproximado de la condición de insensibilidad $\left. \frac{\partial d}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}$ para distintos valores de la perturbación \mathbf{x}_1 , elegimos vectores unitarios como se muestra en el cuadro 2.1

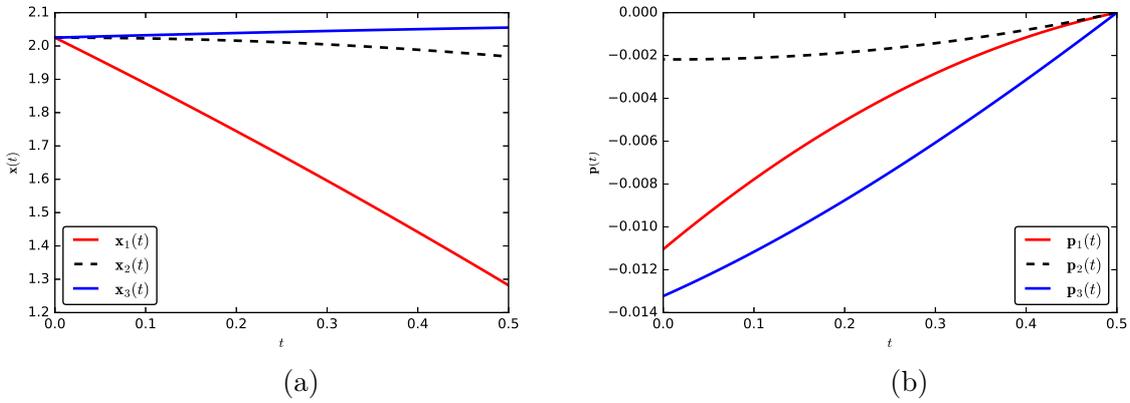


Figura 2.1.: Trayectorias del sistema (2.11) con control nulo en el tiempo $T = 0.5$: en la figura (a) se muestra el comportamiento de las variables de estado y en la figura (b) el comportamiento de las variables del sistema adjunto en tiempo inverso.

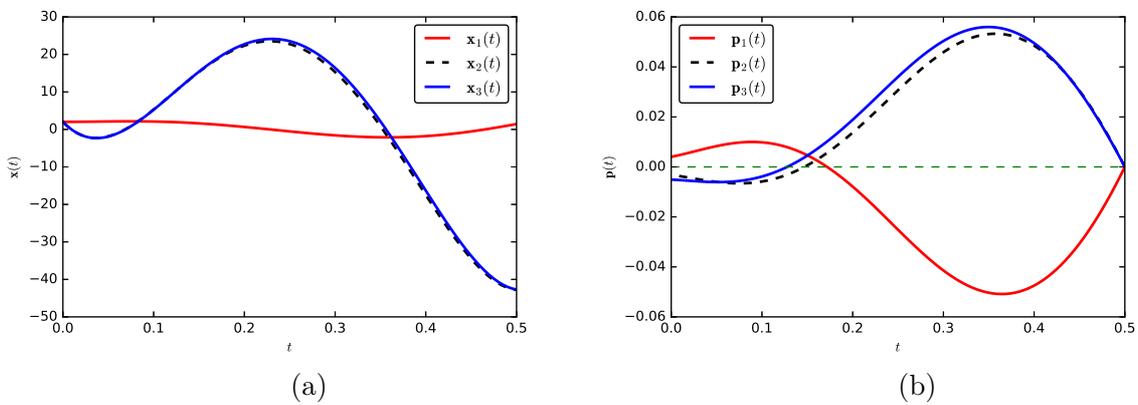


Figura 2.2.: Trayectorias del sistema (2.4) bajo el efecto del control: (a) solución del sistema de estados y (b) solución del sistema adjunto en tiempo inverso.

$\mathbf{x}_1 =$	$\left. \frac{\partial J}{\partial \tau} \right _{\tau=0} \approx$
$\begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{131}} & -\frac{9}{\sqrt{131}} & \frac{1}{\sqrt{131}} \end{bmatrix}^\top$	-0.00904
$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}^\top$	0.00709
$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}^\top$	-0.00579

Cuadro 2.1.: Valor de la condición de insensibilidad para distintas perturbaciones \mathbf{x}_1 con norma 1.

Nótese que el valor absoluto de la condición de insensibilidad es pequeño con respecto a 1, coincidiendo con los resultados de la sección 2.1.

Caso $n = 4$

Teorema 2.10. Sea (A, B) un par controlable, Q simétrica e invertible. Tal que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2 \quad U^{-1}H_3] = 3. \quad (2.106)$$

$$U = [QB \quad QAB \quad QA^2B \quad QA^3B]$$

$$H_1 = QA^2B - A^*QAB + A^{*2}QB$$

$$H_2 = [0 \quad QAB + A^*QB \quad QA^2B + A^{*2}QB \quad QA^3B + A^{*3}QB] \bar{A}^* \bar{B} \\ - (A^*QA^3B + A^{*3}QAB) + A^{*2}QA^2B,$$

$$H_3 = [0 \quad QAB + A^*QB \quad QA^2B + A^{*2}QB \quad QA^3B + A^{*3}QB] (\bar{A}^*)^3 \bar{B} \\ - [QAB + A^*QB \quad 2A^*QAB \quad A^{*2}QAB + A^*QA^2B \quad A^{*3}QA^3B + A^*QA^3B] (\bar{A}^*)^2 \bar{B} \\ + [QA^2B + A^{*2}QB \quad A^*QA^2B + A^{*2}QAB \quad 2A^{*2}QA^2B \quad A^{*3}QA^2B + A^{*2}QA^3B] \bar{A}^* \bar{B} \\ - A^{*3}QA^3B. \quad (2.107)$$

Entonces

$$\text{rang } C = \text{rang} [\bar{D}_0 \quad \bar{D}_2 \quad \bar{D}_4 \quad \bar{D}_6] = 4 \quad (2.108)$$

Demostración. Existe una transformación invertible S , tal que $A = S\bar{A}S^{-1}$ y $B = S\bar{B}$. Donde \bar{A}, \bar{B} son como en (2.17). Las columnas $\bar{D}_0 = QB$ y $\bar{D}_2 = H_1$, además usando

dicha transformación S y la expresión (2.21) las columnas \bar{D}_4 y \bar{D}_6 se expresa como

$$\begin{aligned}\bar{D}_4 &= [0 \quad QAB + A^*QB \quad QA^2B + A^{*2}QB \quad QA^3B + A^{*3}QB] \bar{A}^* \bar{B} \\ &\quad - (A^*QA^3B + A^{*3}QAB) + A^{*2}QA^2B, \\ \bar{D}_6 &= [2QB \quad QAB + A^*QB \quad QA^2B + A^{*2}QB \quad QA^3B + A^{*3}QB] \bar{A}^{*3} \bar{B} \\ &\quad - [QAB + A^*QB \quad 2A^*QAB \quad A^{*2}QAB + A^*QA^2B \quad A^{*3}QA^3B + A^*QA^3B] \bar{A}^{*2} \bar{B} \\ &\quad + [QA^2B + A^{*2}QB \quad A^*QA^2B + A^{*2}QAB \quad 2A^{*2}QA^2B \quad A^{*3}QA^2B + A^{*2}QA^3B] \bar{A}^* \bar{B} \\ &\quad - A^{*3}QA^3B.\end{aligned}\tag{2.109}$$

Si $\text{rang } C < 4$, entonces existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{v} \neq 0$ tal que

$$\mathbf{v}^\top \bar{D}_1 = 0, \quad \mathbf{v}^\top \bar{D}_2 = 0, \quad \mathbf{v}^\top \bar{D}_3 = 0, \quad \mathbf{v}^\top \bar{D}_4 = 0.\tag{2.110}$$

Sustituyendo $\mathbf{v}^\top QB = 0$ en las dos últimas ecuaciones de (2.110), obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^\top H_1 &= 0 \\ \mathbf{v}^\top H_2 &= 0, \\ \mathbf{v}^\top H_3 &= 0.\end{aligned}\tag{2.111}$$

La matriz $U = [QB \quad QAB \quad QA^2B]$ es invertible, ya que Q es invertible y (A, B) es un par controlable. Reescribiendo (2.111)

$$\begin{aligned}[0 \quad 0 \quad 0] &= [\mathbf{v}^\top H_1 \quad \mathbf{v}^\top H_2 \quad \mathbf{v}^\top H_3] \\ &= [\mathbf{v}^\top UU^{-1}H_1 \quad \mathbf{v}^\top UU^{-1}H_2 \quad \mathbf{v}^\top UU^{-1}H_3] \\ &= \mathbf{v}^\top U [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2 \quad U^{-1}H_3] \\ &= [\mathbf{v}^\top QB \quad \mathbf{v}^\top QAB \quad \mathbf{v}^\top QA^2B \quad \mathbf{v}^\top QA^3B] [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2 \quad U^{-1}H_3] \\ &= [0 \quad \mathbf{v}^\top QAB \quad \mathbf{v}^\top QA^2B \quad \mathbf{v}^\top QA^3B] [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2 \quad U^{-1}H_3] \\ &= [\mathbf{v}^\top QAB \quad \mathbf{v}^\top QA^2B \quad \mathbf{v}^\top QA^3B] \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} [U^{-1}H_1 \quad U^{-1}H_2 \quad U^{-1}H_3].\end{aligned}\tag{2.112}$$

Por la hipótesis (2.106) y (2.110) se tiene

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] = [\mathbf{v}^\top QB \quad \mathbf{v}^\top QAB \quad \mathbf{v}^\top QA^2B \quad \mathbf{v}^\top QA^3B].\tag{2.113}$$

Entonces,

$$\text{rang} [QB \quad QAB \quad QA^2B \quad QA^3B] = \text{rang } Q [B \quad AB \quad A^2B \quad QA^3B] < 4.\tag{2.114}$$

Esto contradice nuestras hipótesis de que Q es invertible y que (A, B) es un par controlable. Por lo tanto $\text{rang } C = 4$. \square

3 Controlabilidad de sistemas no lineales

3.1. Introducción

El objetivo de esta sección es estudiar algunos conceptos de teoría de control, que serán utilizados a lo largo del capítulo. Primero se establece la definición de controlabilidad local de un sistema no lineal de control.

Consideramos la clase de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, u) \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función Lipschitz continua, $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ es el control y \mathcal{X} , \mathcal{U} son conjuntos abiertos. Este sistema es conocido como un sistema no lineal de control. Para $(\mathbf{x}_0, u(t)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, sea $\phi : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución del sistema no lineal de control (3.1) con condición inicial \mathbf{x}_0 y u una función de control. Entonces definimos el flujo del sistema no lineal de control (3.1) como $\phi(t, \mathbf{x}_0, u)$ para $t \in I(\mathbf{x}_0) \subseteq [\sigma, \tau]$ el intervalo máximo de existencia de la solución. Ahora vamos a denotar al conjunto de todas las parejas (\mathbf{x}_0, u) tal que $I(\mathbf{x}_0) = [\sigma, \tau]$ como $\mathcal{D}_{\sigma, \tau}$. Lo que sigue se tomó parcialmente de [7] y [12].

Definición 3.1 (Ver [7]). *Una trayectoria del sistema no lineal de control (3.1) es una función $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) : (\sigma, \tau) \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ tal que*

- $\bar{\mathbf{x}} \in C^0([\sigma, \tau], \mathbb{R}^n)$, $\bar{u} \in L^\infty([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m)$,
- existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{u}(t)) \in K$ para casi todo $t \in (\sigma, \tau)$.

■

$$\bar{\mathbf{x}}(t_2) = \bar{\mathbf{x}}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{u}(t)) dt$$

para todo $t_1, t_2 \in [\sigma, \tau]$.

En particular, un par $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ tal que

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = 0 \quad (3.2)$$

es una trayectoria constante del sistema no lineal de control (3.1), cuyo punto se conoce como punto de equilibrio del sistema (3.1). En lo que sigue, consideramos las normas $\|\cdot\|$ la

norma euclidiana en \mathbb{R}^n y la norma $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma en $L^\infty([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m)$. Definimos a la bola abierta centrada en \mathbf{y} de radio $\eta > 0$ por $B_\eta(\mathbf{y}) = \{\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\| < \eta\}$.

Definición 3.2 (Ver [7]). *Sea el par $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ un punto de equilibrio del sistema (3.1). El sistema no lineal de control (3.1) es localmente controlable $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para cada $\mathbf{x}^0 \in B_\eta(\bar{\mathbf{x}})$ y para cada $\mathbf{x}^1 \in B_\eta(\bar{\mathbf{x}})$, existe una función medible $u : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la solución $\mathbf{x}(t)$ del problema de valor inicial*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, u(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (3.3)$$

satisface $\mathbf{x}(\varepsilon) = \mathbf{x}^1$ y

$$|u(t) - \bar{u}| \leq \varepsilon, \quad (3.4)$$

para todo $t \in [0, \varepsilon]$.

Ahora, se introduce la linealización alrededor de una trayectoria correspondiente al sistema no lineal de control (3.1). Sea $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) : (\sigma, \tau) \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ una trayectoria. La linealización alrededor de dicha trayectoria es

$$\dot{\mathbf{x}} = D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{u}(t))\mathbf{x} + D_u\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{u}(t))u, \quad (3.5)$$

para $t \in [\sigma, \tau]$, donde D denota la derivada y el subíndice denota con respecto a que variable se realiza esta operación. Finalmente se enuncia y demuestra un teorema que relaciona el estado final de la solución del sistema no lineal, dado el par $(\mathbf{y}, \omega) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ formado por un estado inicial y un control, con el estado final de la linealización para el mismo par (\mathbf{y}, ω) . En lo que sigue, decimos que una sucesión de funciones $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty \subset L^\infty([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m)$ es equiacotada si existe $K \subset \mathcal{U}$ un compacto tal que $\omega_j(t) \in K$ para toda $j \in \mathbb{N}$ y para casi todo $t \in [\sigma, \tau]$.

Teorema 3.1 (Ver [12]). *Sea $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz continua en ambos argumentos y $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$ una trayectoria del sistema no lineal de control (3.1). Sea $\phi(t, \sigma, \mathbf{x}, u)$ el flujo de dicho sistema no lineal. Consideramos la función $\alpha : \mathcal{D}_{\sigma, \tau} \rightarrow \mathcal{X}$, dada por*

$$\alpha(\mathbf{y}, \omega) = \phi(\tau, \sigma, \mathbf{y}, \omega) =: \xi(\tau), \quad (3.6)$$

para $(\mathbf{y}, \omega) \in \mathcal{D}_{\sigma, \tau}$. Supongamos que $\lambda : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución de

$$\dot{\lambda}(t) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\lambda(t) + D_u\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\mu, \quad \lambda(\sigma) = \lambda_0, \quad (3.7)$$

donde $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathcal{L}^\infty([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m)$. Entonces se satisface lo siguiente

1. El conjunto $\mathcal{D}_{\sigma, \tau} \subset \mathcal{X} \times L^\infty([\sigma, \tau], \mathcal{U})$ es abierto y la función α es continua.
2. Sean $(\mathbf{x}, \omega) \in \mathcal{D}_{\sigma, \tau}$, $\{\omega_j\}_j^\infty$ una sucesión equiacotada de controles y $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^\infty$ una sucesión en \mathcal{X} tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}_j = \mathbf{x}. \quad (3.8)$$

El flujo correspondiente a cada par (\mathbf{x}_j, ω_j) está dado por $\xi_j(t) = \phi(t, \sigma, \mathbf{x}_j, \omega_j)$ para todo $t \in [\sigma, \tau]$. Si alguna de las siguiente condiciones se cumple

- a) $\{\omega_j\}_j^\infty$ converge puntualmente casi en todas partes a ω .
- b) $\{\omega_j\}_j^\infty$ converge débilmente¹ a ω y el sistema (3.1) es afín en los controles, es decir $\mathbf{g}(\mathbf{x}, u) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x})$.

Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\xi_j - \xi\|_\infty = 0. \quad (3.9)$$

3. La función α es de clase C^1 y su diferencial satisface

$$D\alpha[\mathbf{x}, \omega](\lambda_0, \mu) = \lambda(\tau), \quad (3.10)$$

donde $\lambda(t)$ satisface la linealización (3.7).

Demostración.

1. Sean $(\mathbf{x}, \omega) \in \mathcal{D}_{\sigma, \tau}$ y $(\mathbf{x}_j, \omega_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión como en el inciso 2 y supongamos que 2.a) se satisface, entonces (3.9) se cumple. De la definición de (3.9) se obtiene la continuidad de la función α , ya que dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $j \geq j_0$, tenemos que

$$\varepsilon > \|\xi_j - \xi\|_\infty > \|\xi_j(t) - \xi(t)\| = \|\alpha(\mathbf{x}_j, \omega_j) - \alpha(\mathbf{x}, \omega)\|.$$

Más aún, el conjunto $\mathcal{D}_{\sigma, \tau}$ es abierto, pues $\mathcal{D}_{\sigma, \tau} = \alpha^{-1}(\mathbb{R}^n)$ y por la continuidad de α se tiene que $\alpha^{-1}(\mathbb{R}^n)$ es abierto.

2. Sean $(\mathbf{x}, \omega) \in \mathcal{D}_{\sigma, \tau}$, $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ subconjunto abierto, cuya cerradura $\bar{\mathcal{X}}_0$ es un compacto, tal que el flujo ϕ de (3.1) está bien definido en \mathcal{X}_0 , es decir $\xi(t) = \phi(t, \sigma, \mathbf{x}, \omega) \in \mathcal{X}_0$ para todo $t \in [\sigma, \tau]$, $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{U}$ es una sucesión que satisface ya sea la hipótesis a) o b), y $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{X}_0$ una sucesión que satisface (3.8). Elijamos un subconjunto compacto $K \subset \mathcal{U} = \mathbb{R}$ tal que $\omega(t), \omega_j(t) \in K$ para casi todo $t \in [\sigma, \tau]$. Ahora veamos que las condiciones del Teorema A.3 se satisfacen, para esto se definen las siguientes funciones $\mathbf{h}_j, \mathbf{m}_j, \tilde{\mathbf{g}} : [\sigma, \tau] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_j(\mathbf{z}, t) &= \mathbf{g}(\mathbf{z}, \omega_j(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{z}, \omega(t)), \\ \mathbf{m}_j(\mathbf{z}, t) &= \mathbf{g}(\mathbf{z}, \omega(t)) + \mathbf{h}_j(\mathbf{z}, t) \\ \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{z}, t) &= \mathbf{g}(\mathbf{z}, \omega(t)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Nótese que las propiedades de \mathbf{g} son heredadas por $\mathbf{h}_j, \mathbf{m}_j$ y $\tilde{\mathbf{g}}$, de modo que es posible encontrar una constante $a > 0$, tal que

$$\|\mathbf{m}_j(t, \mathbf{z}_1) - \mathbf{m}_j(t, \mathbf{z}_2)\| = \|\mathbf{g}(\mathbf{z}_1, \omega_j(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{z}_2, \omega_j(t))\| \leq a \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|, \quad (3.12)$$

¹Decimos que ω_j converge débilmente a ω si $\int_\sigma^\tau \varphi(s)' \omega_j(s) ds$ converge a $\int_\sigma^\tau \varphi(s)' \omega(s) ds$ para toda función integrable $\varphi : (\sigma, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^m$, ver [12].

para todo $t \in [\sigma, \tau]$ y cada $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathcal{X}_0$ ya que \mathbf{g} es Lipschitz en su primer argumento. Sean

$$\mathbf{H}_j(t) = \int_{\sigma}^t \mathbf{h}_j(\xi(s), s) ds \quad (3.13)$$

y $\underline{\mathbf{H}}_j = \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \|\mathbf{H}_j(t)\|$. Ahora bien, supongamos que \mathbf{H}_j converge uniformemente a cero. Tomando $0 < D < \varepsilon$ tal que

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{z} \in \mathcal{X} : \|\mathbf{z} - \xi(t)\| \leq D, \text{ para alg\u00fan } t \in [\sigma, \tau]\} \subset \mathcal{X}_0. \quad (3.14)$$

Elegimos a $j > j_0$ tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \leq \frac{D}{2} e^{-a(\tau-\sigma)}, \quad \underline{\mathbf{H}}_j \leq \frac{D}{2} e^{-a(\tau-\sigma)}, \quad (3.15)$$

por construcci\u00f3n se cumple (A.7). Usando el Teorema A.3 la soluci\u00f3n $\xi_j(t)$ de

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j(t) &= \mathbf{m}(\xi_j(t), t), \\ \xi_j(\sigma) &= \mathbf{x}_j, \end{aligned}$$

existe para toda $t \in [\sigma, \tau]$ y satisface

$$\|\xi - \xi_j\|_{\infty} \leq (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| + \underline{\mathbf{H}}_j) e^{a(\tau-\sigma)} \leq \left(\frac{D}{2} e^{-a(\tau-\sigma)} + \frac{D}{2} e^{-a(\tau-\sigma)} \right) e^{a(\tau-\sigma)} \leq \varepsilon. \quad (3.16)$$

Ahora s\u00f3lo resta demostrar que \mathbf{H}_j converge uniformemente a cero. En primer lugar supongamos que la hip\u00f3tesis a) se cumple, es decir $\{\omega_j\}_j^{\infty}$ converge puntualmente casi en todas partes a ω . Formalmente, dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\omega_j(t) - \omega(t)\| < \varepsilon,$$

para $j > j_0$ y para casi todo $t \in [\sigma, \tau]$. Entonces

$$\|\mathbf{h}_j(\xi(t), t)\| = \|\mathbf{g}(\xi(t), \omega_j(t)) - \mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\| \leq a \|\omega_j(t) - \omega(t)\| \quad (3.17)$$

donde $a > 0$ es como en (3.12). El c\u00e1lculo anterior implica que $\mathbf{h}_j(\xi(t), t)$ converge puntualmente casi en todas partes a cero. Por otro lado, sea $c > 0$ una cota superior de $\|\mathbf{g}\|$ en un compacto contenido en $\mathcal{X}_0 \times K$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}_j(\xi(t), t)\| &= \|\mathbf{g}(\xi(t), \omega_j(t)) - \mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\| \\ &\leq \|\mathbf{g}(\xi(t), \omega_j(t))\| + \|\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\| \\ &\leq 2c \end{aligned} \quad (3.18)$$

para toda $t \in [\sigma, \tau]$. Por lo tanto, aplicando el teorema de convergencia dominada ver [11]

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\sigma}^t \|\mathbf{h}_j(\xi(s), s)\| ds = 0, \quad (3.19)$$

para $t \in [\sigma, \tau]$. Lo cual prueba lo requerido.

De otra manera, supongamos que la hipótesis b) se cumple y demostramos la convergencia uniforme de \mathbf{H}_j a cero):

Supongamos que $\{\omega_j\}_j^\infty$ converge débilmente a ω y el sistema (3.1) es afín en los controles, es decir $\mathbf{g}(\mathbf{x}, u) = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x})$. Reescribiendo las funciones \mathbf{h}_j , definidas en (3.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_j(\xi(s), s) &= \mathbf{g}(\xi(s), \omega_j(s)) - \mathbf{g}(\xi(s), \omega(s)), \\ &= \sum_{i=1}^m \omega_{ij}(s) \mathbf{g}_i(\xi(s)) - \omega_i(s) \mathbf{g}_i(\xi(s)) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\xi(s)) (\omega_{ij}(s) - \omega_i(s)) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\xi(s)) & \cdots & \mathbf{g}_m(\xi(s)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1j}(s) - \omega_1(s) \\ \vdots \\ \omega_{mj}(s) - \omega_m(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\xi(s)) & \cdots & \mathbf{g}_m(\xi(s)) \end{bmatrix} (\omega_j(s) - \omega(s)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde $\mathbf{g}_i(\xi(s)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \omega_j(s), \omega(s) \in \mathbb{R}^m$, cuyas entradas están dadas por $[\omega_j(s)]_i = \omega_{ij}(s)$ y $[\omega(s)]_i = \omega_i(s)$, para $i = 1 \cdots m$. Haciendo $[\varphi]_i = \varphi_i(s)$, donde φ es el i -ésimo renglón de la matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\xi(s)) & \cdots & \mathbf{g}_m(\xi(s)) \end{bmatrix}$, para $i = 1, \cdots, n$. De (3.20) se obtiene

$$\int_{\sigma}^t \mathbf{h}_j(\xi(s), s) ds = \int_{\sigma}^t \varphi(s) (\omega_j(s) - \omega(s)) ds. \quad (3.21)$$

Por la hipótesis b) cada elemento del vector (3.21)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[\int_{\sigma}^t \mathbf{h}_j(s, \xi(s)) ds \right]_i = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\sigma}^t \varphi_i(s) (\omega_j(s) - \omega(s)) ds = 0, \quad (3.22)$$

en consecuencia \mathbf{H}_j converge puntualmente a cero. Más aún, \mathbf{H}_j es una familia equicontinua, ya que

$$\|\mathbf{H}_j(t_1) - \mathbf{H}_j(t_2)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{h}_j(s, \xi(s)) ds \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{h}_j(s, \xi(s))\| ds \leq 2c(t_2 - t_1). \quad (3.23)$$

Entonces \mathbf{H}_j converge uniformemente a cero.

- Primero se demuestra la diferenciabilidad de α . Sea $\phi(t, \sigma, \mathbf{x}, \omega)$ el flujo del sistema (3.1), como en el inciso 2. Sea $(\mathbf{y}, \omega) \in \mathcal{D}_{\sigma, \tau}$ y su trayectoria correspondiente $(\xi(t), \omega(t))$, como la diferenciabilidad es una propiedad local se puede suponer que \mathbf{g} tiene soporte compacto en una vecindad de la trayectoria $(\xi(t), \omega(t))$.

Observación 3.1. Definiendo a $\mathbf{G}(s) = \mathbf{g}(\mathbf{y} + s\mathbf{a}, \omega + s\mathbf{b})$ para todo $\mathbf{y}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $\omega, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Sea $\mathbf{N} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{N}(\mathbf{y}, \omega, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_0^1 \left(\frac{\mathbf{G}}{\partial s}(s) - D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) \mathbf{a} - D_u\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) \mathbf{b} \right) ds, \quad (3.24)$$

Desarrollando a \mathbf{N} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}(\mathbf{y}, \omega, \mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial s}(s) - D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) \mathbf{a} - D_u\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) \mathbf{b} \right) ds, \\
 &= \mathbf{G}(1) - \mathbf{G}(0) - \int_0^1 (D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) \mathbf{a} - D_u\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) \mathbf{b}) ds \\
 &= \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{a}, \omega + \mathbf{b}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) - D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) \mathbf{a} - D_u\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) \mathbf{b}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

De la última expresión se observa que \mathbf{N} es continua en cada uno de sus argumentos y se anula en $a = b = 0$. Así que \mathbf{N} es uniformemente continua ya que posee soporte compacto. Por lo tanto, si definimos

$$M(a, b) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m} \int_0^1 \|D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x} + s\mathbf{a}, u + s\mathbf{b}) - D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}, u)\|_1 + \|D_u\mathbf{g}(\mathbf{x} + s\mathbf{a}, u + s\mathbf{b}) - D_u\mathbf{g}(\mathbf{x}, u)\|_1 ds$$

donde $\|\cdot\|_1$ es una norma matricial², es continua y se anula en $a = b = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ y para algún $0 < \eta < \varepsilon$, $(\mathbf{z}, \nu) \in \mathcal{B}_\eta(\mathbf{x}) \times \mathcal{B}_\eta(\omega) \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}^\infty([\sigma, \tau], \mathbb{R}^m)$ y $\zeta(t) = \phi(t, \sigma, \mathbf{z}, \nu)$. Haciendo

$$\begin{aligned}
 \delta(t) &= \zeta(t) - \xi(t), \\
 \mu &= \nu(t) - \omega(t),
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta} &= \dot{\zeta}(t) - \dot{\xi}(t) = \dot{\phi}(t, \sigma, \mathbf{z}, \nu) - \dot{\phi}(t, \sigma, \mathbf{y}, \omega) \\
 &= \mathbf{g}(\phi(t, \sigma, \mathbf{z}, \nu), \nu) - \mathbf{g}(\phi(t, \sigma, \mathbf{y}, \omega), \omega) \\
 &= \mathbf{g}(\zeta(t), \nu(t)) - \mathbf{g}(\xi(t), \omega(t)) \\
 &= \mathbf{g}(\xi(t) + \delta(t), \omega(t) + \mu(t)) - \mathbf{g}(\xi(t), \omega(t)) \\
 &= \mathbf{N}(\xi(t), \omega(t), \delta(t), \mu(t)) + A(t)\delta(t) + B(t)\mu(t)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

donde

$$A(t) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t)), \quad B(t) = D_u\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t)), \tag{3.28}$$

²Esta norma para matrices de tamaño $n \times m$ se define como $\sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$, ver [10].

cuyo dato inicial está dado por $\delta(\sigma) = \mathbf{z} - \mathbf{y}$. Además el término \mathbf{N} está acotado por

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{N}(\xi(t), \omega(t), \delta(t), \mu(t))\| &\leq \left\| \int_0^1 \left(\frac{\mathbf{G}}{\partial \bar{s}}(s) - D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) \delta(t) - D_u\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega) \mu(t) \right) ds \right\| \\
 &\leq \int_0^1 \left\| D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\xi(t) + s\delta(t), \omega(t) + s\mu(t)) \delta(t) + D_u\mathbf{g}(\xi(t) + s\delta(t), \omega(t) + s\mu(t)) \mu(t) \right. \\
 &\quad \left. - D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t)) \delta(t) - D_u\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t)) \mu(t) \right\| ds \\
 &\leq \int_0^1 \left(\|D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\xi(t) + s\delta(t), \omega(t) + s\mu(t)) - D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\|_1 \|\delta(t)\| \right. \\
 &\quad \left. + \|D_u\mathbf{g}(\xi(t) + s\delta(t), \omega(t) + s\mu(t)) - D_u\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\|_1 \|\mu(t)\| \right) ds \\
 &\leq \int_0^1 \left(\|D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\xi(t) + s\delta(t), \omega(t) + s\mu(t)) - D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\|_1 \right. \\
 &\quad \left. + \|D_u\mathbf{g}(\xi(t) + s\delta(t), \omega(t) + s\mu(t)) - D_u\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\|_1 \right) (\|\delta(t)\| + \|\mu(t)\|) ds \\
 &\leq (\|\delta(t)\| + \|\mu(t)\|) \int_0^1 \left(\|D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\xi(t) + s\delta(t), \omega(t) + s\mu(t)) - D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\|_1 \right. \\
 &\quad \left. + \|D_u\mathbf{g}(\xi(t) + s\delta(t), \omega(t) + s\mu(t)) - D_u\mathbf{g}(\xi(t), \omega(t))\|_1 \right) ds \\
 &\leq (\|\delta(t)\| + \|\mu(t)\|) \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m} \int_0^1 \left(\|D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{y} + s\delta(t), u + s\mu(t)) - D_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{y}, u)\|_1 \right. \\
 &\quad \left. + \|D_u\mathbf{g}(\mathbf{y} + s\delta(t), u + s\mu(t)) - D_u\mathbf{g}(\mathbf{y}, u)\|_1 \right) ds \\
 &= (\|\delta(t)\| + \|\mu(t)\|) M(\delta(t), \mu(t)).
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Sea $\lambda(t)$ solución de (3.7) con dato inicial

$$\lambda(\sigma) = \lambda_0 = \mathbf{z} - \mathbf{y}. \tag{3.30}$$

consideramos $\Psi(t)$ la solución fundamental de la ecuación matricial,

$$\mathbf{X} = A(t) \mathbf{X}. \tag{3.31}$$

Definiendo a $\Phi(t, \sigma) = \Psi(t) \Psi^{-1}(\sigma)$ es solución fundamental principal de (3.31). Por la fórmula de variación de los parámetros se tiene que

$$\lambda(t) = \Phi(t, \sigma) \lambda_0 + \int_{\sigma}^t \Phi(t, s) B(s) \mu(s) ds. \tag{3.32}$$

Se calcula la solución de (3.27), usando la fórmula de variación de los parámetros y la solución $\lambda(t)$

$$\begin{aligned}
 \delta(t) &= \Phi(t, \sigma) \delta(\sigma) + \int_{\sigma}^t \Phi(t, \bar{s}) (B(\bar{s}) \mu(\bar{s}) + \mathbf{N}(\xi(\bar{s}), \omega(\bar{s}), \delta(\bar{s}), \mu(\bar{s}))) d\bar{s} \\
 &= \Phi(t, \sigma) \lambda_0 + \int_{\sigma}^t \Phi(t, \bar{s}) B(\bar{s}) \mu(\bar{s}) d\bar{s} + \int_{\sigma}^t \Phi(t, \bar{s}) \mathbf{N}(\xi(\bar{s}), \omega(\bar{s}), \delta(\bar{s}), \mu(\bar{s})) d\bar{s} \\
 &= \lambda(t) + \int_{\sigma}^t \Phi(t, \bar{s}) \mathbf{N}(\xi(\bar{s}), \omega(\bar{s}), \delta(\bar{s}), \mu(\bar{s})) d\bar{s}.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

De (3.33) y de la cota encontrada en (3.29) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \|\delta(\tau) - \lambda(\tau)\| &= \left\| \int_{\sigma}^{\tau} \Phi(t, \bar{s}) \mathbf{N}(\xi(\bar{s}), \omega(\bar{s}), \delta(\bar{s}), \mu(\bar{s})) d\bar{s} \right\| \\
 &\leq \int_{\sigma}^{\tau} \|\Phi(t, \bar{s})\|_1 \|\mathbf{N}(\xi(\bar{s}), \omega(\bar{s}), \delta(\bar{s}), \mu(\bar{s}))\| d\bar{s} \\
 &\leq \int_{\sigma}^{\tau} \|\Phi(t, \bar{s})\|_1 (\|\delta(\bar{s})\| + \|\mu(\bar{s})\|) M(\delta(\bar{s}), \mu(\bar{s})) \\
 &\leq \int_{\sigma}^{\tau} \|\Phi(t, \bar{s})\|_1 (\|\delta\|_{\infty} + \|\mu\|_{\infty}) \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \{M(\delta(t), \mu(t))\} ds \\
 &= (\|\delta\|_{\infty} + \|\mu\|_{\infty}) \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \{M(\delta(t), \mu(t))\} \int_{\sigma}^{\tau} \|\Phi(t, \bar{s})\|_1 ds \\
 &= c_1 (\|\delta\|_{\infty} + \|\mu\|_{\infty}) \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \{M(\delta(t), \mu(t))\}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde $c_1 > 0$ es una constante tal que $\int_{\sigma}^{\tau} \|\Phi(t, \bar{s})\|_1 ds \leq c_1$. Por otro lado, escogemos a $k > 0$ tal que $k(\tau - \sigma) > 1$ se tiene

$$\|\delta\|_{\infty} \leq \|\delta\|_{\infty} + (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}) \leq (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}) + \int_{\sigma}^{\tau} k \|\delta\|_{\infty} ds, \tag{3.35}$$

aplicando la desigualdad de Gronwall ver en [6],

$$\|\delta\|_{\infty} \leq c_2 (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}) \tag{3.36}$$

donde $c_2 = e^{k(\tau - \sigma)}$. Por (3.36), finalmente se tiene

$$\begin{aligned}
 \|\delta(\tau) - \lambda(\tau)\| &\leq c_1 (\|\delta\|_{\infty} + \|\mu\|_{\infty}) \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \{C(\delta(t), \mu(t))\} \\
 &\leq c_1 ((c_2 (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty})) + \|\mu\|_{\infty}) \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \{C(\delta(t), \mu(t))\} \\
 &= (c_1 c_2 \|\lambda_0\| + (c_1 + c_1 c_2) \|\mu\|_{\infty}) \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \{C(\delta(t), \mu(t))\} \\
 &\leq c (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}) \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \{C(\delta(t), \mu(t))\}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

para alguna constante $c > 0$. Ahora veamos que la desigualdad (3.37) implica que $D\alpha[\mathbf{x}, \omega](\lambda_0, \mu) = \lambda(\tau)$, en efecto

$$\begin{aligned}
 \frac{\|\alpha[\mathbf{y}, \nu] - \alpha[\mathbf{y}, \omega] - \lambda(\tau)\|}{\|(\mathbf{z}, \nu) - (\mathbf{y}, \omega)\|} &= \frac{\|\zeta(\tau) - \xi(\tau) - \lambda(\tau)\|}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| + \|\nu - \omega\|_{\infty}} \\
 &= \frac{\|\delta(\tau) - \lambda(\tau)\|}{\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}} \\
 &\leq \frac{c (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}) \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \{C(\delta(t), \mu(t))\}}{\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}} \\
 &= c \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \{C(\delta(t), \mu(t))\}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Por lo tanto, la definición de derivada para α se satisface siempre que η sea lo suficientemente pequeño tal que $c \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \{C(\delta(t), \mu(t))\} < \eta$. La unicidad de la diferencial implica (3.10).

Para finalizar se demuestra que α es continuamente diferenciable, es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$, tal que si, para cada $\mathbf{x}, \tilde{\omega} \in \mathcal{D}_{\sigma, \tau}$

$$\|\omega - \tilde{\omega}\| + \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| < \eta \tag{3.39}$$

entonces

$$\|D\alpha[\mathbf{x}, \omega] - D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\omega}]\| < \varepsilon. \tag{3.40}$$

Observación 3.2. La definición anterior es equivalente a: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \left(\Phi(\tau, \sigma) - \tilde{\Phi}(\tau, \sigma) \right) \lambda_0 + \int_{\sigma}^{\tau} \left(\Phi(\tau, s) B(s) - \tilde{\Phi}(\tau, s) \tilde{B}(s) \right) \mu(s) ds \right\| \leq \varepsilon (\|\lambda_0\| + \|\mu\|) \tag{3.41}$$

para cada $\lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ y cada $\mu \in \mathbb{R}^m$, siempre que (3.39) se satisface, donde $\Phi(\tau, s)$ y $\tilde{\Phi}(\tau, s)$ son soluciones de

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= A(t) \mathbf{X}(t), & \dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) &= \tilde{A}(t) \tilde{\mathbf{X}}(t), \\ \mathbf{X}(\tau) &= I, & \tilde{\mathbf{X}}(\tau) &= I \end{aligned} \tag{3.42}$$

respectivamente, y donde

$$\begin{aligned} A(t) &= D_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\xi(t), \omega(t)), & \tilde{A}(t) &= D_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\tilde{\xi}(t), \tilde{\omega}(t)), \\ B(t) &= D_u \mathbf{g}(\xi(t), \omega(t)), & \tilde{B}(t) &= D_u \mathbf{g}(\tilde{\xi}(t), \tilde{\omega}(t)). \end{aligned} \tag{3.43}$$

En efecto, se consideran las soluciones λ y $\tilde{\lambda}$, las cuales satisfacen los sistemas

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= A(t) \lambda(t) + B(t) \mu, & \dot{\tilde{\lambda}}(t) &= \tilde{A}(t) \tilde{\lambda}(t) + \tilde{B}(t) \mu, \\ \lambda(\sigma) &= \lambda_0, & \tilde{\lambda}(\sigma) &= \lambda_0, \end{aligned} \tag{3.44}$$

por la fórmula de variación de los parámetros

$$\begin{aligned} \lambda(\tau) &= \Phi(\tau, \sigma) \lambda_0 + \int_{\sigma}^{\tau} \Phi(\tau, s) B(s) \mu(s) ds, \\ \tilde{\lambda}(\tau) &= \tilde{\Phi}(\tau, \sigma) \lambda_0 + \int_{\sigma}^{\tau} \tilde{\Phi}(\tau, s) \tilde{B}(s) \mu(s) ds. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Por la definición de la norma $\|\cdot\|_1$ se obtiene una expresión equivalente a (3.41)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &> \|D\alpha[\mathbf{x}, \omega] - D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\omega}]\| \\
 &= \sup_{(\lambda_0, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \frac{\|D\alpha[\mathbf{x}, \omega](\lambda_0, \mu) - D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\omega}](\lambda_0, \mu)\|}{\|\lambda_0\| + \|\mu\|} \\
 &\geq \frac{\|D\alpha[\mathbf{x}, \omega](\lambda_0, \mu) - D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\omega}](\lambda_0, \mu)\|}{\|\lambda_0\| + \|\mu\|} \\
 &= \frac{\|\lambda(\tau) - \tilde{\lambda}(\tau)\|}{\|\lambda_0\| + \|\mu\|} \\
 &= \frac{\|(\Phi(\tau, \sigma) - \tilde{\Phi}(\tau, \sigma))\lambda_0 + \int_{\sigma}^{\tau} ((\Phi(\tau, s)B(s) - \tilde{\Phi}(\tau, s)\tilde{B}(s)))\mu(s) ds\|}{\|\lambda_0\| + \|\mu\|}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

de donde se sigue (3.41).

Recordando el producto interior definido en el espacio de matrices de tamaño $n \times m$ dado por

$$\langle A, B \rangle = \text{traza } A^T B$$

induce la norma matricial

$$\|A\|_F = \langle A, A \rangle^{\frac{1}{2}},$$

esta norma es conocida como norma matricial de Frobenius, ver e.g [10]. Dicha norma es útil para mostrar la expresión (3.46). Dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\|A(t) - \bar{A}(t)\| < \varepsilon, \quad \|B(t) - \bar{B}(t)\| < \varepsilon,$$

siempre que se satisfaga (3.39), ya que \mathbf{g} es de clase C^1 . Definiendo $V = \Phi(\tau, \sigma) - \tilde{\Phi}(\tau, \sigma)$, la cual satisface

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= AV + (A - \bar{A})\tilde{\Phi}(\tau, t), \\
 V(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|V\|_F^2 &= 2 \langle \dot{V}, V \rangle = 2 \langle AV + (A - \bar{A})\tilde{\Phi}(\tau, t), V \rangle \\
 &= 2 (\langle AV, V \rangle + \langle (A - \bar{A})\tilde{\Phi}(\tau, t), V \rangle) \\
 &\leq 2 \|A\|_F \|V\|_F^2 + 2 \|A - \bar{A}\|_F \|\tilde{\Phi}(\tau, t)\| \|V\|_F \\
 &\leq (2 \|A\|_F + 1) \|V\|_F^2 + \|A - \bar{A}\|_F^2 \|\tilde{\Phi}(\tau, t)\|_F^2 \\
 &\leq c_1 \|V\|_F^2 + c_2
 \end{aligned}$$

donde $c_1 = (2 \|A\|_{\infty} + 1)$ y $c_2 = \|A - \bar{A}\|_{\infty}^2 \|\tilde{\Phi}(\tau, t)\|_{\infty}^2 < \varepsilon \|\tilde{\Phi}(\tau, t)\|_{\infty}^2$. Multiplicando Por $e^{-c_1 t}$ e integrando en $[\sigma, \tau]$, ambos lados de la desigualdad anterior

$$\int_{\sigma}^{\tau} \frac{d}{ds} e^{-c_1 s} \|V\|_F^2 ds \leq \int_{\sigma}^{\tau} e^{-c_1 s} c_2 ds = -\frac{c_2}{c_1} (e^{-c_1 \tau} - e^{-c_1 \sigma}),$$

aplicando en teorema fundamental del cálculo en el lado izquierdo y despejando el termino $\|V(t)\|_F^2$

$$\|V(t)\|_F^2 \leq -\frac{c_2}{c_1} e^{c_1 t} (e^{-c_1 t} - e^{-c_1 \sigma}) = -\frac{1 - e^{-c_1(t-\sigma)}}{c_1} c_2 = cc_2,$$

donde $c = -\frac{1 - e^{-c_1(t-\sigma)}}{c_1} > 0$. Finalmente, veamos que (3.46) se satisface. Se tiene

$$\begin{aligned} & \left\| (\Phi(\tau, \sigma) - \tilde{\Phi}(\tau, \sigma)) \lambda_0 + \int_{\sigma}^{\tau} ((\Phi(\tau, s) B(s) - \tilde{\Phi}(\tau, s) \tilde{B}(s))) \mu(s) ds \right\| \\ & \leq \|V(\sigma)\|_F \|\lambda_0\| + \int_{\sigma}^{\tau} \|\Phi(\tau, s) B(s) - \tilde{\Phi}(\tau, s) \tilde{B}(s)\|_F \|\mu(s)\| ds \\ & \leq \int_{\sigma}^{\tau} \|\Phi(\tau, s) (B(s) - \tilde{B}(s)) + \Phi(\tau, s) \tilde{B}(s) - \tilde{\Phi}(\tau, s) \tilde{B}(s)\|_F ds (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}) \\ & \leq \int_{\sigma}^{\tau} \|\Phi(\tau, s)\|_F \|(B(s) - \tilde{B}(s))\|_F + \|\Phi(\tau, s) - \tilde{\Phi}(\tau, s)\|_F \|\tilde{B}(s)\|_F ds (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}) \quad (3.47) \\ & = \int_{\sigma}^{\tau} \|\Phi(\tau, s)\|_F \|(B(s) - \tilde{B}(s))\|_F + \|V(s)\|_F \|\tilde{B}\|_{\infty} ds (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}) \\ & \leq \varepsilon \int_{\sigma}^{\tau} \|\Phi(\tau, s)\|_F + c \|\tilde{B}\|_{\infty} ds (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}) \\ & \leq \varepsilon \tilde{c} (\|\lambda_0\| + \|\mu\|_{\infty}), \end{aligned}$$

para alguna $\tilde{c} > 0$. De la desigualdad (3.47) se sigue (3.46), siempre que se satisfaga (3.39).

□

3.2. Problema semilineal de control insensibilizante

En este capítulo trabajamos únicamente en \mathbb{R}^3 . Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + B u, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0 + \tau \mathbf{x}^1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función de clase C^1 , las condiciones iniciales son como en el capítulo 2. Consideramos el funcional dado en (2.2) para establecer la condición de insensibilidad. Es decir, nuevamente se busca que

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \int_0^T \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}, Q \mathbf{x} \right\rangle dt \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (3.49)$$

De manera similar al cálculo realizado en la sección 2.1 para determinar $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}$, se define a $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \tau + h) = \tilde{\mathbf{x}}(\tau + h)$, la cual satisface

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\tau + h) &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau + h)) + Bu, \\ \tilde{\mathbf{x}}(0) &= \mathbf{x}^0 + (\tau + h) \mathbf{x}^1.\end{aligned}\quad (3.50)$$

Haciendo $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}} &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}} = f(\tilde{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}), \\ \mathbf{w}(0) &= \tilde{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{x}(0) = h\mathbf{x}^1.\end{aligned}\quad (3.51)$$

Ahora bien, reescribiendo la ecuación (3.51) con las entradas de los vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, y la función vectorial $f = (f_1, f_2, f_3)^\top$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{x}_1 - x_1} & \frac{1}{\tilde{x}_2 - x_2} & \frac{1}{\tilde{x}_3 - x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 - x_1 \\ \tilde{x}_2 - x_2 \\ \tilde{x}_3 - x_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_1(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_1 - x_1} & \frac{f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_1(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_2 - x_2} & \frac{f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_1(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_3 - x_3} \\ \frac{f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_2(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_1 - x_1} & \frac{f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_2(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_2 - x_2} & \frac{f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_2(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_3 - x_3} \\ \frac{f_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_3(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_1 - x_1} & \frac{f_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_3(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_2 - x_2} & \frac{f_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_3(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_3 - x_3} \end{bmatrix} \mathbf{w}.\end{aligned}\quad (3.52)$$

Tomando el límite

$$\lim_{\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{3} \lim_{\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \frac{f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_1(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_1 - x_1} & \frac{f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_1(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_2 - x_2} & \frac{f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_1(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_3 - x_3} \\ \frac{f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_2(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_1 - x_1} & \frac{f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_2(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_2 - x_2} & \frac{f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_2(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_3 - x_3} \\ \frac{f_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_3(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_1 - x_1} & \frac{f_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_3(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_2 - x_2} & \frac{f_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) - f_3(x_1, x_2, x_3)}{\tilde{x}_3 - x_3} \end{bmatrix} \mathbf{w},\quad (3.53)$$

se obtiene

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{w} = \frac{1}{3} Df(\mathbf{x}) \mathbf{w},\quad (3.54)$$

donde $Df(\mathbf{x})$ está dada por la matriz Jacobiana de f . Finalmente se obtiene el problema con valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}} &= \frac{1}{3} Df(\mathbf{x}) \mathbf{w} \\ \mathbf{w}(0) &= h\mathbf{x}^1.\end{aligned}\quad (3.55)$$

Haciendo $\tilde{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}}{h}$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{w}}} &= \frac{1}{3} Df(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{w}}, \\ \tilde{\mathbf{w}}(0) &= \mathbf{x}^1.\end{aligned}\quad (3.56)$$

Luego, como $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ tenemos que

$$\tilde{\mathbf{w}}(\tau) = \frac{\tilde{\mathbf{x}}(\tau + h) - \mathbf{x}(\tau)}{h}, \quad (3.57)$$

tomando el límite

$$\tilde{\mathbf{w}}(\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mathbf{x}}(\tau + h) - \mathbf{x}(\tau)}{h} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}. \quad (3.58)$$

sustituyendo (3.58) en (3.49), la condición de insensibilidad es equivalente a

$$\int_0^T \langle \tilde{\mathbf{w}}, Q\mathbf{x} \rangle dt = 0. \quad (3.59)$$

Dicha condición tiene la misma forma que en el caso lineal. Luego, para obtener una condición equivalente a la condición de insensibilidad, se considera el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + \mathbf{B}u \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{1}{3}Df(\mathbf{x})^* \mathbf{p} + Q\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{p}(T) &= 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Si \mathbf{x} , \mathbf{p} y $\tilde{\mathbf{w}}$ satisfacen (3.60) y (3.56), respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{p} \rangle &= \langle \dot{\tilde{\mathbf{w}}}, \mathbf{p} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{p}} \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{3}Df(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{p} \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbf{w}}, -\frac{1}{3}Df(\mathbf{x})^* \mathbf{p} + Q\mathbf{x} \right\rangle \\ &= \frac{1}{3} \langle Df(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{p} \rangle - \frac{1}{3} \langle \tilde{\mathbf{w}}, Df(\mathbf{x})^* \mathbf{p} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{w}}, Q\mathbf{x} \rangle \\ &= \frac{1}{3} \langle Df(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{p} \rangle - \frac{1}{3} \langle Df(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{p} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{w}}, Q\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \tilde{\mathbf{w}}, Q\mathbf{x} \rangle. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Integrando ambos lados en el intervalo $[0, T]$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \tilde{\mathbf{w}}, Q\mathbf{x} \rangle dt &= \int_0^T \frac{d}{dt} \langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{p} \rangle dt \\ &= \langle \tilde{\mathbf{w}}(T), \mathbf{p}(T) \rangle - \langle \tilde{\mathbf{w}}(0), \mathbf{p}(0) \rangle \\ &= \langle \tilde{\mathbf{w}}(T), 0 \rangle - \langle \mathbf{x}^1, \mathbf{p}(0) \rangle \end{aligned} \quad (3.62)$$

Entonces, la propiedad (3.59) se satisface si y sólo si $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{p}(0) \rangle = 0$ para toda $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Notamos que dicha propiedad es equivalente a pedir $\mathbf{p}(0) = 0$, esto se satisface si la componente \mathbf{p} del sistema (3.60) es controlable a cero. Es decir, existe una función $u = \bar{u}$, no necesariamente única, tal que la solución (\mathbf{x}, \mathbf{p}) de (3.60) satisface $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$. Lo anterior se puede resumir en el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea \mathcal{J} dado por (2.2). Entonces u es un control insensibilizante de (3.49) para la solución \mathbf{x} de (3.48) si y sólo si u es tal que la componente \mathbf{p} del sistema (3.60) satisface que $\mathbf{p}(0) = 0$.*

3.3. Controlabilidad del sistema linealizado

En esta sección se estudian condiciones suficientes y necesarias para garantizar la controlabilidad a cero de la componente \mathbf{p} del sistema que se obtiene de linealizar el sistema no lineal (3.60) alrededor de un punto de equilibrio. La motivación de estudiar la controlabilidad de la componente \mathbf{p} del sistema linealizado se sigue de la relación que hay con la controlabilidad local del sistema no lineal, cuya definición se enunció en la sección 3.1.

Sea $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la parte derecha del sistema (3.60)

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}) + Bu \\ -\frac{1}{3}Df(\mathbf{x})^* \mathbf{p} + Q\mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

El sistema (3.60) se escribe como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} &= F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{p}(T) &= 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Supongamos que $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{u})$ es un punto de equilibrio del sistema, es decir, $F(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{u}) = (0, 0, 0)$. De modo que la linealización del sistema (3.64) alrededor de $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{u})$ está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = DF(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{u}) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

donde la derivada DF está dada por la matriz Jacobiana de F , y se calcula como

$$\begin{aligned} DF &= D \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}) + Bu \\ -\frac{1}{3}D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x})^* \mathbf{p} + Q\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(f(\mathbf{x}) + Bu) \\ D(-\frac{1}{3}D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x})^* \mathbf{p} + Q\mathbf{x}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Df(\mathbf{x}) + D(Bu) \\ -\frac{1}{3}D(D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x})^* \mathbf{p}) + D(Q\mathbf{x}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) & 0 & B \\ -\frac{1}{3}D_x(D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x})^* \mathbf{p}) + Q & -\frac{1}{3}D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x})^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}) & 0 & B \\ -\frac{1}{3}\mathcal{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^\top f(\mathbf{x})^*) + Q & -\frac{1}{3}D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x})^* & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Donde \mathcal{H} denota a la matriz Hessiana, y el subíndice \mathbf{x} denota con respecto a la variable

que se realiza dicha operación. De modo que la linealización (3.65) se escribe como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{\mathbf{x}}f(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 & B \\ -\frac{1}{3}\mathcal{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^\top f(\mathbf{x})^*)(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{u}) + Q & -\frac{1}{3}D_{\mathbf{x}}f(\tilde{\mathbf{x}})^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_{\mathbf{x}}f(\tilde{\mathbf{x}}) & 0 \\ -\frac{1}{3}\mathcal{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{p}^\top D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x})^*)(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{u}) + Q & -\frac{1}{3}D_{\mathbf{x}}f(\tilde{\mathbf{x}})^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Con la finalidad de analizar el caso más sencillo posible supongamos que el punto de equilibrio $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{u}) = (0, 0, 0)$ de F , sustituyendo en (3.67) se obtiene la linealización alrededor de $(0, 0, 0)$ con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{1}{3}A^*\mathbf{p} + Q\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{p}(T) &= 0, \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde $A = D_{\mathbf{x}}f(0)$. Haciendo el cambio de variable $\mathbf{z}(t) = \mathbf{p}(T-t)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu \\ \dot{\mathbf{z}}(t) &= \frac{1}{3}A^*\mathbf{z}(t) - Q\mathbf{x}(T-t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{z}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Procediendo como en la sección 2.1, se calcula la solución de $\mathbf{z}(T)$ de (3.69) de manera análoga a (2.63):

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(T) &= -e^{-\frac{1}{3}A^*T}\tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{-\frac{1}{3}A^*T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} C_m A^{k-m} Bu(\omega) d\omega, \\ &= -e^{-\frac{1}{3}A^*T}\tilde{\mathbf{x}}_0 - e^{-\frac{1}{3}A^*T} \int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\omega)^{k+1}}{k!} D_k Bu(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde

$$\begin{aligned} C_m &= \sum_{r=0}^m \left(\frac{1}{3}\right)^r \binom{m}{r} A^{*r} Q A^{m-r} \\ D_k &= \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} C_m A^{k-m} = \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k \left(\frac{-1}{3}\right)^m A^{*m} Q A^{k-m}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Nótese que en la solución obtenida aparece la constante $\frac{1}{3}$, dicha constante provoca un ligero cambio en la condición suficiente para la controlabilidad a cero de la componente

\mathbf{p} del sistema linealizado. Antes de enunciar dicha condición, se observa que la condición necesaria para la controlabilidad a cero de dicha componente del sistema linealizado dada en el Teorema 2.5 se mantiene en este caso. Esta se enuncia como

$$\text{rang} \begin{bmatrix} QB & QAB & QA^2B & A^*QB & A^*QAB & A^*QA^2B & A^{*2}QB & A^{*2}QAB & A^{*2}QA^2B \end{bmatrix} = 3 \quad (3.72)$$

La condición suficiente para la controlabilidad a cero de la componente ya mencionada del sistema linealizado se demuestra de manera similar a lo descrito en el Teorema 2.7, y se describe por

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{D}_0 & \bar{D}_2 & \bar{D}_4 \end{bmatrix} = 3, \quad (3.73)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{D}_0 &= QB, \\ \bar{D}_2 &= QA^2B - \frac{1}{3}A^*QAB + \frac{1}{3^2}A^{*2}QB, \\ \bar{D}_4 &= QA^4B - \frac{1}{3}A^*QA^3B + \frac{1}{3^2}A^{*2}QA^2B - \frac{1}{3^3}A^{*3}QAB + \frac{1}{3^4}A^{*4}QB \end{aligned}$$

A continuación se enuncia un teorema que nos da una condición necesaria y suficiente para controlabilidad a cero de la componente \mathbf{p} de (3.68), ya que dicha condición permite obtener la condición (3.73). De esto se sigue la controlabilidad a cero de la componente \mathbf{p} del sistema linealizado. Cuya demostración es análoga a la del Teorema 2.7.

Teorema 3.2. Sean (A, B) un par controlable, Q simétrica e invertible, tal que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1}H_1 & U^{-1}H_2 \end{bmatrix} = 2. \quad (3.74)$$

Ponemos

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} QB & QAB & QA^2B \end{bmatrix} \\ H_1 &= QA^2B - \frac{1}{3}A^*QAB + \frac{1}{3^2}A^{*2}QB \\ H_2 &= \begin{bmatrix} 0 & (QAB + \frac{1}{3^4}A^*QB) & (QA^2B + \frac{1}{3^4}A^{*2}QB) \end{bmatrix} \bar{A}^{*2}\bar{B} \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{3}A^*QB + \frac{1}{3^3}QAB \right) \quad \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} \right) A^*QAB \quad \frac{1}{3}A^*QA^2B + \frac{1}{3^3}A^{*2}QAB \right] \bar{A}^*\bar{B} \\ &\quad + \frac{1}{3^2}A^{*2}QA^2B. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Entonces

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \bar{D}_0 & \bar{D}_2 & \bar{D}_4 \end{bmatrix} = 3. \quad (3.76)$$

Observación 3.3. Por la linealización del sistema no lineal aparecen potencias de $\frac{1}{3}$ cambiando ligeramente lo establecido en el Teorema 2.9.

3.4. Controlabilidad del sistema no lineal

En esta última sección se estudia la controlabilidad local de la componente \mathbf{p} del sistema no lineal (3.64), mediante la controlabilidad a cero de la componente \mathbf{p} del sistema

linealizado (3.68). Para esto en el sistema no lineal hacemos el cambio $\mathbf{z}(t) = \mathbf{p}(T - t)$, obteniendo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + Bu(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) &= \frac{1}{3}D\mathbf{f}(\mathbf{x}(T-t))^* \mathbf{z}(t) - Q\mathbf{x}(T-t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0, \\ \mathbf{z}(0) &= 0.\end{aligned}\tag{3.77}$$

Ahora la controlabilidad a cero de la componente \mathbf{p} se estudia mediante la controlabilidad a cero de la componente \mathbf{z} al tiempo $T > 0$, es decir, buscamos un control u tal que $u(T) = 0$. La ventaja de este cambio es que las componentes \mathbf{x} y \mathbf{z} están en tiempo directo.

Teorema 3.3. *Sea \mathbf{f} una función de clase C^2 , $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}) = (0, 0, 0)$ un punto equilibrio del sistema no lineal (3.77). Supongamos que la componente \mathbf{z} del sistema linealizado alrededor de $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u})$ (3.69) es controlable a cero. Entonces la componente \mathbf{z} del sistema no lineal es localmente controlable en $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}) = (0, 0, 0)$.*

Demostración. Sea el sistema no lineal (3.77) y su linealización alrededor de $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}) = (0, 0, 0)$, dada por (3.69). Sea $\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times L^\infty([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, u) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, \mathbf{z}(T))\tag{3.78}$$

donde $\mathbf{z}(t)$ satisface el sistema no lineal (3.69). Como \mathbf{f} es de clase C^2 el lado derecho del sistema no lineal (3.77) es de clase C^1 . Aplicando el inciso 3 del Teorema 3.1 para α , se tiene que la diferencial $D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times L^\infty([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ está determinada por

$$D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}](\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, u) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, \mathbf{z}(T)),\tag{3.79}$$

donde $\mathbf{z}(t)$ satisface el sistema linealizado (3.69). Ahora veamos que $D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}]$ es sobreyectiva. En efecto, sea $(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, \mathbf{z}_f) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ arbitrario. Se puede mostrar que la controlabilidad a cero de la componente \mathbf{z} del sistema lineal (3.69) implica la controlabilidad exacta de la componente \mathbf{z} de dicho sistema. Esto permite encontrar a $u = \bar{u} \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$ tal que la solución $(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ del sistema lineal con $u = \bar{u}$, satisface

$$D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}](\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, \bar{u}) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, \mathbf{z}(T)) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, \mathbf{z}_f).\tag{3.80}$$

En consecuencia, $\text{rang}(D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}]) = \dim(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) = 9$, se sigue la existencia de un subespacio lineal E de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times L^\infty([0, T], \mathbb{R})$ con dimensión 9, tal que

$$D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}](E) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.\tag{3.81}$$

Nótese que si se considera la restricción de la diferencial al espacio E , es decir $D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}] : E \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, se tiene que dicha diferencial es inyectiva. Por el Teorema de la Dimensión (ver e.g. [10])

$$\begin{aligned}9 = \dim(E) &= \dim(\mathcal{N}(D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}])) + \text{rang}(D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}]) \\ &= \dim(\mathcal{N}(D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}])) + 9,\end{aligned}\tag{3.82}$$

donde \mathcal{N} denota el núcleo de la diferencial. Entonces $\dim(\mathcal{N}(D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}])) = 0$, por lo tanto la diferencial es inyectiva. De modo que $D\alpha[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}]$ restringida a E es invertible. Si además, $\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}) = \alpha(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, entonces α restringida a E satisface las condiciones del Teorema de la Función Inversa (ver e.g. [6]), de donde se obtiene la existencia de $U \subset E$ y $V \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ subconjuntos abiertos, con $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}) \in U$, $(0, 0, 0) \in V$. Más aún, para $T > 0$ existe $\eta > 0$ y $\mathcal{G} : B_\eta(\tilde{\mathbf{x}}) \times B_\eta(\tilde{\mathbf{z}}) \times \tilde{B}_\eta(\tilde{\mathbf{z}}) \subset V \rightarrow U$ de clase C^1 , tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(0, 0, 0) &= (0, 0, 0), \\ \alpha \circ \mathcal{G}(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, b_1) &= (\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, b_1), \end{aligned} \quad (3.83)$$

para todo $(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, b_1) \in B_\eta(\tilde{\mathbf{x}}) \times B_\eta(\tilde{\mathbf{z}}) \times \tilde{B}_\eta(\tilde{\mathbf{z}}) \subset V$. Escribiendo a

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, b_1) = (\mathcal{G}_1(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, b_1), \mathcal{G}_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, b_1), \mathcal{G}_3(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0, b_1)). \quad (3.84)$$

En particular para \mathbf{z}_0 y $b_1 = 0$, tenemos de la segunda igualdad de (3.83) y (3.84) obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^0, 0, 0) &= \alpha \circ \mathcal{G}(\mathbf{x}^0, 0, 0) \\ &= \alpha(\mathcal{G}_1(\mathbf{x}^0, 0, 0), \mathcal{G}_2(\mathbf{x}^0, 0, 0), \mathcal{G}_3(\mathbf{x}^0, 0, 0)) \\ &= (\mathcal{G}_1(\mathbf{x}^0, 0, 0), \mathcal{G}_2(\mathbf{x}^0, 0, 0), \mathbf{z}(T)). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Se satisface mientras

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_3(\mathbf{x}^0, 0, 0) - \tilde{u}\|_\infty &= \|\mathcal{G}_3(\mathbf{x}^0, 0, 0)\|_\infty \\ &\leq C \|\mathcal{G}_3(\mathbf{x}^0, 0, 0)\| \\ &\leq C (\|\mathbf{x}^0\|) \\ &\leq C\eta \leq T, \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde $C > 0$ existe pues \mathcal{G} es de clase C^1 para $\eta > 0$ lo suficientemente pequeña. \square

Nótese que la controlabilidad local en el punto equilibrio $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{u}) = (0, 0, 0)$ de la componente \mathbf{z} del sistema no lineal (3.64) implica que este sistema puede ser controlado a cero en una vecindad pequeña del equilibrio. Se sigue del cambio $\mathbf{z}(t) = \mathbf{p}(T - t)$ y del Lema 3.1 que existe un control insensibilizante de (3.49) para \mathbf{x} la solución de (3.48).

3 Conclusiones

En este trabajo se consideran los sistemas de control de la forma (2.1) y (3.48), sistema lineal y sistema no lineal, respectivamente. Para este tipo de sistemas se plantea el problema de control insensibilizante. Cabe destacar que bajo este enfoque para ecuaciones diferenciales ordinarias no se ha encontrado un estudio previo en la literatura. Se caracterizan los sistemas para los cuales existe un control insensibilizante. Esto se realiza mediante la transformación del problema de control insensibilizante a un problema de control a cero del sistema adjunto. A continuación se resumen los resultados obtenidos en esta tesis que se consideran más importantes.

En el capítulo 3 se da una fórmula para las potencias de \bar{A} , considerando un par controlable (A, B) el cual está representado en su forma canónica. Dicha fórmula nos permite caracterizar los sistemas lineales de orden n , cuyo sistema adjunto es controlable a cero. Por la equivalencia entre los problemas mencionados se obtiene para qué tipo de sistemas existe el control insensibilizante. Lo anterior se realiza para matrices A simétrica y Q simétrica. También se hace para cualquier matriz A real y Q simétrica e invertible.

En el capítulo 4 se estudia el problema de control insensibilizante en sistemas no lineales. Esto se realiza para sistemas de orden tres, mediante la equivalencia con el problema de control a cero del sistema adjunto. En este caso se obtiene un resultado de controlabilidad local del sistema adjunto no lineal, mediante la controlabilidad del sistema adjunto linealizado alrededor del punto de equilibrio $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{u}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0)$.

El problema de control insensibilizante para sistemas de control lineales y no lineales puede seguir siendo estudiado, puesto que no se ha analizado el caso cuando la matriz Q no es simétrica. Además, sería interesante saber cuáles son las condiciones sobre el sistema no lineal que garantizan la existencia del control insensibilizante, si éste no existe para el sistema linealizado, ya sea de manera local o global.

A.1. Algunos resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias

En este apartado se enuncian resultados que son requeridos a lo largo de este trabajo. Las demostraciones pueden ser consultadas en [6] y [12]. Consideramos el problema con valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0,\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde $\mathbf{f} : J \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Teorema A.1 (Ver e.g. [6]). *Si la función \mathbf{f} en el problema de valor inicial (A.1) es Lipschitz continua, $t \in J$, y $\mathbf{x}_0 \in \omega$, entonces existe conjuntos abiertos $J_0 \subset J$ y $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $(t_0, \mathbf{x}_0) \in J_0 \times \Omega_0$ y una única función continua $\phi : J_0 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por (t, \mathbf{x}) tal que $t \rightarrow \phi(t, \mathbf{x})$ es solución de la ecuación diferencial (A.1) con $\phi(t_0, \mathbf{x})$. Si además, \mathbf{g} es de clase C^1 , entonces ϕ también lo es.*

Definición A.1 (Ver e.g. [6]). *Una función $\phi : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $(t, \mathbf{x}) \rightarrow \phi(t, \mathbf{x})$ es llamada flujo si $\phi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $\phi(t+s, \mathbf{x}) = \phi(t, \phi(s, \mathbf{x}))$*

Teorema A.2 (Ver e.g. [6]). *Sean $a < b$ y α , ϕ y ψ funciones continuas y no negativas en el intervalo $[a, b]$. Además, supongamos que α es diferenciable en (a, b) con derivada $\dot{\alpha}$ continua y no negativa. Si, para todo $t \in [a, b]$*

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \psi(s) \phi(s) ds,\tag{A.2}$$

entonces

$$\phi(t) \leq \alpha(t) e^{\int_0^t \psi(s) ds},\tag{A.3}$$

para todo $t \in [a, b]$.

Teorema A.3 (Ver [12]). *Sea $\alpha : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva e integrable, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, y D una constante positiva. Supongamos que $f, h : \mathcal{X} \times [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfacen las condiciones del teorema de existencia y unicidad, y $\xi : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathcal{X}$ es solución de*

$$\dot{\xi}(t) = f(\xi(t), t)\tag{A.4}$$

tal que

$$\mathbf{K} = \{x : \|x - \xi(t)\| \leq D \text{ para algún } t \in [\sigma, \tau]\} \subset \mathcal{X}.\tag{A.5}$$

Sea

$$\mathbf{H}(t) = \int_{\sigma}^t h(\xi(s), s) ds \quad (\text{A.6})$$

y $\underline{\mathbf{H}} = \sup_{t \in [\sigma, \tau]} \|\mathbf{H}(t)\|$. Además

$$\max \left\{ \underline{\mathbf{H}}, \|\xi(\sigma) - \mathbf{z}^0\| \right\} \leq \frac{D}{2} e^{-\int_{\sigma}^{\tau} \underline{\alpha}(s) ds} \quad (\text{A.7})$$

y escribiendo $m = f + h$,

$$\|m(\mathbf{x}, t) - m(\mathbf{z}, t)\| \leq \underline{\alpha}(t) \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \quad (\text{A.8})$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathcal{X}$ y $t \in [\sigma, \tau]$. Entonces, la solución ζ de la ecuación perturbada

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= m(\zeta, t) = f(\zeta, t) + h(\zeta, t) \\ \zeta(\sigma) &= \mathbf{z}^0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

existe en el intervalo $[\sigma, \tau]$, y es cercana a la solución original en el siguiente sentido

A.2. Cálculo de los términos D_k

En esta sección del apéndice se escriben a los términos D_k , los cuales aparecen en la solución del sistema (2.4) obtenida en el sección 2.2.2. Los términos D_k se pueden escribir como

$$\begin{aligned} D_k &= \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} C_m A^{k-m} \\ &= \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} A^{*i} Q A^{m-i} A^{k-m} \\ &= \sum_{m=0}^k \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} \binom{m}{i} A^{*i} Q A^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{m=i}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} \binom{m}{i} A^{*i} Q A^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k S(k, i) A^{*i} Q A^{k-i} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde $S(k, i) = \sum_{m=i}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} \binom{m}{i}$. Antes de calcular los términos $S(k, i)$, se enuncian algunas propiedades de coeficiente binomial, cuyas demostraciones se pueden consultar

en [5]: Sea $m \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
 \binom{k}{m} &= \binom{k}{k-m}, \\
 \binom{k}{m} \binom{m}{i} &= \binom{k}{i} \binom{k-i}{k-m}, \\
 m \binom{k}{m} &= k \binom{k-1}{m-1}, \\
 \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{r} &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Se puede verificar de manera inmediata que el término

$$S(k, k) = \frac{(-1)^k}{k+1}. \tag{A.12}$$

Además, $S(k, 0) = \frac{1}{k+1}$, puesto que

$$\begin{aligned}
 2S(k, 0) &= \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} \binom{m}{0} + \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} \binom{m}{0} \\
 &= \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} \binom{m}{0} + \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^{k-m}}{k-m+1} \binom{k}{k-m} \binom{k-m}{0} \\
 &= \sum_{m=0}^k \left(\frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} + \frac{(-1)^{k-m}}{k-m+1} \binom{k}{m} \right) \\
 &= \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{(-1)^k}{k-m+1} \right) \\
 &= \begin{cases} \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \left(\frac{k+2}{(m+1)(k-m+1)} \right) & \text{si } k \text{ es par,} \\ \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \left(\frac{k-2m}{(m+1)(k-m+1)} \right) & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Siguiendo el cálculo para cada caso: Primero se realiza para cuando k es par

$$\begin{aligned}
2S(k, 0) &= \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \left(\frac{k+2}{(m+1)(k-m+1)} \right) \\
&= -\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^k (-1)^{m+1} \binom{k+2}{m+1} \\
&= -\frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} (-1)^m \binom{k+2}{m} \\
&= -\frac{1}{k+1} \left(\sum_{m=0}^{k+2} (-1)^m \binom{k+2}{m} - (-1)^0 \binom{k+2}{0} - (-1)^{k+2} \binom{k+2}{k+2} \right) \\
&= -\frac{1}{k+1} \left(-(-1)^0 \binom{k+2}{0} - (-1)^{k+2} \binom{k+2}{k+2} \right) \\
&= \frac{2}{k+1},
\end{aligned} \tag{A.14}$$

esto implica lo obtiene lo requerido. Se puede probar de manera análoga que $S(k, 0) = \frac{1}{k+1}$ cuando k es impar. De lo anterior, se concluye que el término

$$S(k, 0) = \frac{1}{k+1} \tag{A.15}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observación A.1. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Supongamos que el término $S(k, i) = \frac{(-1)^i}{k+1}$ y veamos que $S(k, i+1) = \frac{(-1)^{i+1}}{k+1}$: Usando las identidades (A.11) y recorriendo la suma

$$S(k, i) = \sum_{m=i}^k \frac{(-1)^m}{m+1} \binom{k}{m} \binom{m}{i} = \binom{k}{i} \sum_{m=0}^{k-i} \frac{(-1)^{m+i}}{m+i+1} \binom{k-i}{m}. \tag{A.16}$$

El siguiente cálculo es útil en (A.18)

$$\begin{aligned}
&1 + \binom{k}{i}^{-1} \binom{k-i}{m}^{-1} \binom{k}{i+1} \binom{k-i-1}{m-1} \\
&= 1 + \binom{k}{i}^{-1} \binom{k-i}{m}^{-1} \binom{k}{i+1} \frac{m}{k-i} \binom{k-i}{m} \\
&= 1 + \frac{m}{k-i} \binom{k}{i}^{-1} \binom{k}{i+1} \\
&= 1 + \frac{m}{k-i} \frac{(k-i)!}{k!} \frac{k!}{(k-i-1)!(i+1)!} \\
&= 1 + \frac{m}{i+1} \\
&= \frac{m+i+1}{i+1}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Sumando el término i con el término $i + 1$

$$\begin{aligned}
 & S(k, i) + S(k, i + 1) \\
 &= \binom{k}{i} \sum_{m=0}^{k-i} \frac{(-1)^{m+i}}{m+i+1} \binom{k-i}{m} + \binom{k}{i+1} \sum_{m=0}^{k-i-1} \frac{(-1)^{m+i+1}}{m+i+2} \binom{k-i-1}{m} \\
 &= \binom{k}{i} \sum_{m=1}^{k-i} \frac{(-1)^{m+i}}{m+i+1} \binom{k-i}{m} + \binom{k}{i+1} \sum_{m=1}^{k-i} \frac{(-1)^{m+i}}{m+i+1} \binom{k-i-1}{m-1} + \binom{k}{i} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{k-i}{0} \\
 &= \sum_{m=1}^{k-i} \frac{(-1)^{m+i}}{m+i+1} \binom{k}{i} \binom{k-i}{m} \left[1 + \binom{k}{i}^{-1} \binom{k-i}{m}^{-1} \binom{k}{i+1} \binom{k-i-1}{m-1} \right] + \binom{k}{i} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{k-i}{0} \\
 &= \sum_{m=1}^{k-i} \frac{(-1)^{m+i}}{m+i+1} \binom{k}{i} \binom{k-i}{m} \left[\frac{m+i+1}{i+1} \right] + \binom{k}{i} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{k-i}{0} \\
 &= \frac{1}{i+1} \sum_{m=1}^{k-i} (-1)^{m+i} \binom{k}{i} \binom{k-i}{m} + \binom{k}{i} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{k-i}{0} \\
 &= \frac{1}{i+1} \sum_{m=0}^{k-i} (-1)^{m+i} \binom{k}{i} \binom{k-i}{m} - \binom{k}{i} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{k-i}{0} + \binom{k}{i} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{k-i}{0} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

tenemos que

$$S(k, i + 1) = -S(k, i) = -\frac{(-1)^i}{k+1} = \frac{(-1)^{i+1}}{k+1} \tag{A.19}$$

La hipótesis de la observación A.1 se satisface para $i = 0$ por (A.15) y se obtiene $S(k, 1) = \frac{1}{k+1}$ por (A.19). Usando la fórmula (A.19) de manera recursiva se obtienen los demás términos $i = 2, \dots, k - 2$. En resumen tenemos

$$S(k, i) = \frac{(-1)^i}{k+1} \tag{A.20}$$

para $i = 1, \dots, k$. Finalmente, se sustituye a (A.20) en las expresiones D_k y se obtiene

$$D_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (-1)^i A^{*i} Q A^{k-i}, \tag{A.21}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

A *Bibliografía*

- [1] V. V. Aleksandrov, Yu. V. Bolotin, N. A. Parusnikov S. S. Lemak, S. I. Slochevsky, and W. F. Guerrero. *Introduction to Control of Dynamic Systems*. BUAP, México, 2009.
- [2] Tom M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Philippines, 1974.
- [3] O. Bodart and C. Fabre. Controls insensitizing the norm of the solution of semilinear heat equation. *J. Math. Anal. and App.*, 195:658–683, 1995.
- [4] P. Brunovsky. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, 6:173–188, 1970.
- [5] Peter J. Cameron. *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*. Cambridge University Press, Great Britain, 1994.
- [6] Carmen Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, New York, 2006.
- [7] Jean M. Coron. *Control and Nonlinearity*. American Mathematical Society, United States of America, 2007.
- [8] R. E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 5:102–119, 1960.
- [9] J.-L. Lions. Remarques préliminaires sur le contrôle des systèmes à données incomplètes. in *Actas del Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (CEDYA)*, Universidad de Málaga:43–54, 1989.
- [10] Carl D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 2000.

- [11] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, United States of America, 1976.
- [12] Eduardo D. Sontag. *Mathematical Control Theory Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer, New York, 1998.
- [13] L. De Teresa. Insensitizing controls for a semilinear heat equation. *Comm. in Partial Differential Equations*, 25(1-2):39–72, 2000.
- [14] L. De Teresa. *Introducción a la Teoría del Control*. Notas, México, 2016.
- [15] Alexander Weinmann. *Uncertain Models and Robust Control*. Springer, New York, 1991.
- [16] Jerzy Zabczyk. *Mathematical Control Theory: An Introduction*. Birkhäuser, Boston, 1995.