



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Constantes de acoplamiento escalables para operadores de
una y doble traza con dimensión conforme $d/2 + 1$ y
 $d/2 + 2$ utilizando la correspondencia AdS/CFT

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Marcos Jafred Hernández Mercado

TUTOR

Rodolfo Martínez Patricio y Romero





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno.

Hernández
Mercado
Marcos Jafred
5569667099
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
412050983

2. Datos del asesor.

Martínez
y Romero
Rodolfo Patricio

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Hernando
Quevedo
Cubillos

4. Datos del sinodal 2

Dra.
Myriam
Mondragón
Ceballos

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Héctor
Hernández
Coronado

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Alberto
Güijosa
Hidalgo

7. Datos de la tesis.

Constantes de acoplamiento escalables para operadores de una y doble traza con dimensión conforme $d/2+1$ y $d/2+2$ utilizando la correspondencia AdS/CFT
66p.
2018

Índice general

Introducción	1
1. Teoría Cuántica de Campos	3
1.1. Campo de Klein Gordon	3
1.2. Teoría Interactuante	6
1.3. Integral Funcional	8
1.4. Renormalización	9
1.4.1. Matriz S y diagramas de Feynman	10
1.4.2. Contratérminos	11
1.4.3. Condiciones de renormalización	12
1.5. Renormalización de $\lambda\phi^4$	13
1.6. Grupo de Renormalización Wilsoniano	15
1.7. Ecuación de Callan-Symanzik	16
2. Correspondencia Norma Gravedad	19
2.1. Teorías de Norma	19
2.1.1. N grande	20
2.2. Teoría de Cuerdas	23
2.3. D-branas	28
2.4. Supergravedad	28
2.5. Correspondencia AdS/CFT	29
2.5.1. Combinando perspectivas	30
2.5.2. Comparación de simetrías	31
2.5.3. Funciones de partición.	31
3. Renormalización Holográfica	33
3.1. Klein Gordon en AdS	33
3.1.1. Cálculo de $\tilde{\phi}_{UV}$ y $\tilde{\phi}_{IR}$ con condiciones de Dirichlet	35
3.2. Renormalización del campo escalar	37
3.2.1. Solución asintótica	37
3.2.2. Regularización	38
3.2.3. Contratérminos	39
3.2.4. Acción Renormalizada	40
3.3. Renormalización holográfica Wilsoniana	40
3.3.1. Cálculo de S_{UV}	41
3.3.2. Cálculo de S_{IR}	41
3.3.3. S_{UV} y S_{IR} renormalizadas	42
3.4. Esquema de substracción mínima	42

4. Caso ν entero	47
4.1. Cálculo de $\tilde{\phi}_{UV}$ y $\tilde{\phi}_{IR}$ para condiciones tipo Dirichlet	47
4.2. Cálculo de S_{UV} y S_{IR}	48
4.2.1. $n=1$	48
4.2.2. $n=2$	49
4.3. Esquema de substracción mínima	49
4.3.1. $n=1$	49
4.3.2. $n=2$	50
5. Conclusiones	53
A. Espacios de curvatura constante	55
B. Teoría de Grupos	57
B.1. Grupos de Lorentz, Poincaré y Conforme	57
Bibliografía	61

Introducción

La teoría cuántica de campos ha demostrado ser el lenguaje adecuado para la descripción de las partículas elementales y cómo estas interactúan unas con otras. Matemáticamente un campo es una función definida en todo el espacio con un número infinito de grados de libertad. Al ser cuantizado el campo, se identifica a las partículas como las fluctuaciones del campo.

En teoría cuántica de campos se puede separar el Lagrangiano como una parte libre \mathcal{L}_0 , y una parte interactuante $\lambda\mathcal{L}_{int}$. A λ se le denomina la constante de acoplamiento; la cual nos da información de qué tan intensas son las interacciones con respecto a la parte libre.

Las cantidades físicamente relevantes de una teoría cuántica de campos interactuante en general no pueden ser calculadas de manera exacta. Estas pueden ser calculadas de manera aproximada por medio de una expansión perturbativa. Dicha expansión se puede expresar en términos de diagramas, a los cuales se les denomina diagramas de Feynman. Sin embargo algunos de los diagramas dan contribuciones divergentes. Existe un proceso que permite eliminar dichas divergencias, a este proceso se le conoce como renormalización. Un efecto sorprendente que se presenta en la teoría cuántica de campos es que después de la renormalización las constantes de acoplamiento de la teoría no son constantes del todo, dependen de la energía.

La expansión perturbativa de la cual se habló en el párrafo previo es válida solo si la constante de acoplamiento satisface $\lambda \ll 1$, en este caso se dice que la teoría es débilmente acoplada, como sucede en la interacción electrodébil. Si $\lambda \gg 1$ se dice que la teoría es fuertemente acoplada. Un ejemplo de ello es la cromodinámica cuántica, que es la teoría que explica las interacciones entre quarks y gluones. En una teoría de norma fuertemente acoplada, es imposible hacer cálculos por medio de expansiones perturbativas. Existen algunos métodos que nos permiten obtener información acerca de estas teorías fuertemente acopladas. Uno de estos métodos consiste en utilizar la correspondencia norma/gravedad, la cual se abordará en esta tesis.

En 1997 Maldacena encontró que dos teorías distintas matemáticamente parecían ser la misma. Conjeturó que una teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S_5$ (teoría gravitacional) era igual a una teoría cuántica de campos conforme en 4 dimensiones (CFT). A esta conjetura se le conoce como correspondencia AdS/CFT. Las diferentes cantidades del lado de la teoría gravitacional tienen su equivalente en el lado de la teoría de campo, a la relación entre las distintas cantidades de las dos teorías se le conoce como el diccionario de la correspondencia. Uno de los posibles usos de la correspondencia AdS/CFT es calcular cantidades del lado de la teoría de campo usando la teoría gravitacional. En particular, en esta tesis se aborda el problema de la renormalización.

Así como en una teoría cuántica de campos existen cantidades infinitas que necesitan ser renormalizadas, lo mismo sucede para la teoría gravitacional en AdS_5 , por lo cual es necesario eliminar las divergencias de este lado de la teoría. A este procedimiento se le

conoce como renormalización holográfica. Un fenómeno que se presenta en la correspondencia AdS/CFT es la conexión UV/IR, es decir las divergencias ultravioleta en el lado de la teoría de campo están relacionadas con las divergencias infrarrojas del lado gravitacional. En la correspondencia AdS/CFT, la coordenada radial z de AdS está relacionada con la energía de la teoría de campo. Esto sugiere una correspondencia entre la evolución de la coordenada radial z y el flujo de renormalización Wilsoniano del lado de la teoría de campo.

En el artículo de Balasubramanian, Guica y Lawrence [3], se calcula la constante de acoplamiento para operadores de una y doble traza con dimensión conforme $\Delta = d/2 + \nu$, donde $\nu \in (1, 2)$, que en la teoría gravitacional corresponden a partículas con masa imaginaria. En el cálculo aparece la ecuación diferencial de las funciones de Bessel modificadas de orden ν , cuya solución puede escribirse como combinación lineal de las funciones de Bessel modificadas de primer especie I_ν e $I_{-\nu}$. El cálculo debe ser modificado si ν es un entero, debido a que las funciones I_ν e $I_{-\nu}$ son linealmente dependientes. Para ello se hace uso de la función de Bessel modificada de segunda especie K_ν .

En la tesis se calculará la constante de acoplamiento para operadores de una y doble traza con dimensión conforme $\Delta = d/2 + 1$, y $d/2 + 2$. El cálculo se hará utilizando la correspondencia *AdS/CFT*, en particular se utilizará un resultado encontrado en [12]. El caso $\nu = 1$ posee la peculiaridad de que aparece un término logarítmico. El caso $\nu = 2$ corresponde a una partícula de masa cero.

Capítulo 1

Teoría Cuántica de Campos

1.1. Campo de Klein Gordon

En mecánica clásica para describir un sistema de N grados de libertad se necesitan N coordenadas $q_i(t)$ así como las derivadas con respecto al tiempo de cada una de las N coordenadas.

Para hacerlo se construye el Lagrangiano el cual es una función de los grados de libertad $q_i(t)$ y $\dot{q}_i(t)$. Así mismo se define la acción como $S = \int dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ con $i = 1, \dots, N$. Al extremizar la acción se obtienen las ecuaciones de Euler Lagrange, a partir de las cuales se puede recuperar la segunda ley de Newton.

Por definición, un campo ϕ es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante de tiempo. En una teoría de campo el Lagrangiano se puede escribir como

$$L = \int d^{d-1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.1)$$

donde $d-1$ es el número de dimensiones espaciales. A $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ se le define como densidad lagrangiana. Del mismo modo que en mecánica clásica se define la acción como.

$$S = \int dt L = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.2)$$

Esto nos sirve para formular el principio de mínima acción. Dados el tiempo inicial t_i y el tiempo final t_f entonces la trayectoria que satisface estas condiciones es un extremal de la acción.

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt (L(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta\partial_\mu \phi) - L(\phi, \partial_\mu \phi)) = \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta(\partial_\mu \phi_i) \right). \quad (1.3)$$

Al integrar por partes y considerar que la variación en los extremos se anula, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = 0. \quad (1.4)$$

Una de las formulaciones de la mecánica clásica es la de Hamilton, en la cual se introduce el momento canónico conjugado dado por $p = \partial_{\dot{q}} L$. Análogamente el momento canónico conjugado para teorías de campo es

$$\Pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i(x))}. \quad (1.5)$$

La formulación hamiltoniana está basada matemáticamente en una transformada de Legendre del Lagrangiano $H = p\dot{q} - L$. Para una teoría de campo la densidad hamiltoniana está dada por

$$\mathcal{H} = \sum_i \Pi^i(x) \partial_0 \phi_i(x) - \mathcal{L}, \quad (1.6)$$

por lo cual el Hamiltoniano es

$$H = \int d^{d-1}x \mathcal{H}. \quad (1.7)$$

La idea de la teoría cuántica de campos QFT (siglas en inglés para Quantum Field Theory), es empezar con una teoría clásica de campos (la cual tiene ecuaciones de movimiento determinadas por su Lagrangiano) y posteriormente cuantizarla. De mecánica cuántica sabemos que para cuantizar un sistema clásico con coordenadas q^i y momento p^i , promovemos q^i y p^i a operadores que satisfagan las relaciones de conmutación $[q^i, p^j] = i\delta^{ij}$. Este mismo principio se puede aplicar en campos donde $q^i(t)$ es reemplazado por un campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ mientras que $p^i(t)$ es reemplazado por el momento conjugado $\Pi(\mathbf{x}, t)$. Debido a que \mathbf{x} es una variable continua, δ^{ij} debe ser reemplazada por una delta de Dirac. Entonces el principio básico de cuantización canónica es promover ϕ y Π a operadores que satisfagan las siguientes relaciones de conmutación.

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(d-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.8)$$

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = [\Pi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (1.9)$$

Empecemos con el campo más sencillo posible, el campo escalar y libre, el cual describirá partículas con espín cero, sin carga y no interactuantes. Esto corresponde a una densidad lagrangiana cuadrática que sea invariante de Lorentz, que en su forma más general es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2. \quad (1.10)$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange nos llevan a la ecuación

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0 \quad (1.11)$$

que se le conoce como la ecuación de Klein-Gordon, cuya solución es

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} \right). \quad (1.12)$$

Por otra parte el momento canónico conjugado para el Lagrangiano de Klein-Gordon es $\Pi = \partial_0 \phi = \dot{\phi}$

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = -i \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} \right). \quad (1.13)$$

Al imponer las reglas de conmutación se encuentra que los operadores a y a^\dagger satisfacen las relaciones de conmutación

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^{d-1} \delta^{(d-1)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (1.14)$$

Recordando que el momento canónico conjugado es $\Pi = \dot{\phi}$, se encuentra que el Hamiltoniano es

$$H = \int d^{d-1}x \left[\frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (1.15)$$

Sustituyendo los valores de $\phi(x, 0)$, $\nabla\phi(\mathbf{x}, 0)$ y de $\Pi(\mathbf{x}, 0)$ se encuentra el Hamiltoniano en términos de los operadores a y a^\dagger , que al usar las relaciones de conmutación de esto últimos se llega a la siguiente expresión

$$H = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2} (a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} E_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right). \quad (1.16)$$

El término dado por el conmutador nos da la energía del vacío, la cual resulta ser infinita, sin embargo debido a que en la naturaleza lo que es medible son las diferencias de energía, estaremos olvidando dicho término.

Ahora podemos darle una interpretación a los operadores a^\dagger y a . Interpretamos a $a_{\mathbf{p}}$ como un operador de destrucción y $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ como un operador de creación. Definimos el estado base $|0\rangle$ como el estado que es aniquilado por todos los operadores de destrucción

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0, \quad (1.17)$$

este estado tiene energía $E = 0$. Cualquier otro estado genérico del espacio de Fock se obtiene actuando un operador de creación sobre el vacío. Para un estado multipartículas es

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = (2E_{\mathbf{p}_1})^{1/2} \dots (2E_{\mathbf{p}_n})^{1/2} a_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle. \quad (1.18)$$

Los factores de normalización $(2E_{\mathbf{p}})^{1/2}$ se escogen de modo que $\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle$ sea un invariante de Lorentz.

La función de correlación de dos puntos o propagador es $\langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle$, esta puede ser interpretada como la amplitud de propagación de una partícula entre y y x . El símbolo T denota el orden temporal, el cual nos dice en qué orden debemos de poner los operadores de campo.

$$\langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle. \quad (1.19)$$

En la teoría libre la función de Green es

$$\langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle = D(x - y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 + m^2 + i\epsilon}, \quad (1.20)$$

al aplicarle el operador de Klein-Gordon a esta cantidad se obtiene

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)D(x - y) = -i\delta^{(d)}(x - y), \quad (1.21)$$

esto significa que $D(x - y)$ es una función de Green para el operador de Klein-Gordon. Se puede identificar a

$$D(p) = \frac{i}{p^2 + m^2} \quad (1.22)$$

como el propagador en el espacio de momentos.

1.2. Teoría Interactuante

En un sistema interactuante el Hamiltoniano es $H = H_0 + H_{int}$. Por ejemplo en teoría ϕ^4 $H_0 = H_{Klein-Gordon}$ y $H_{int} = 1/4! \int d^4x \lambda \phi^4(x)$. El estado de la teoría libre lo denotaremos por $|0\rangle$. El estado base de la teoría interactuante por lo regular es distinto del estado base de la teoría libre, por lo que para referirnos al vacío de la teoría interactuante lo denotaremos por: $|\Omega\rangle$.

Queremos una expresión para la función de Green como una serie de potencias en λ . En el cuadro de Heisenberg

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt}. \quad (1.23)$$

A $\phi(x)$ se le conoce como el campo de Heisenberg. Queremos expresar a $\phi(x)$ y a $|\Omega\rangle$ en términos de cantidades conocidas como operadores de campo en el caso y libre y $|0\rangle$. Si $\lambda \ll 1$ H_0 será la parte más importante del Hamiltoniano, en tal caso $\phi(x)$ puede ser aproximado por

$$\phi_I(x) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH(t-t_0)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (1.24)$$

a $\phi_I(x)$ se le conoce como el campo en el esquema de interacción. Expresando el campo ϕ en términos de ϕ_I

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \mathbf{x}) U(t, t_0) \quad (1.25)$$

donde se ha definido el operador unitario $U(t, t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}$. Notemos que $U(t, t_0)$ satisface la ecuación de Schrodinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_I(t, t_0) \quad (1.26)$$

donde $H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int} e^{-iH_0(t-t_0)} = 1/4! \int d^3x \lambda \phi_I^4$. La solución de esta ecuación diferencial con $U(t, t_0)$ es

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} + \dots \\ &\equiv T\{\exp[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')]\} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Si $|0\rangle$ es el estado base de H_0 , este evoluciona con H como

$$e^{-iHT} |0\rangle = \sum_n e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle, \quad (1.28)$$

donde E_n son los eigenvalores de H . La serie de arriba contiene a $|\Omega\rangle$ como uno de sus elementos, aislando $|\Omega\rangle$

$$e^{-iHT} |0\rangle = e^{-iE_0T} |\Omega\rangle \langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_nT} |n\rangle \langle n|0\rangle. \quad (1.29)$$

Tomando el límite $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$ se eliminan todos los términos con $n \neq 0$

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0T} \langle\Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle. \quad (1.30)$$

Haciendo lo mismo para $\langle\Omega|$, y manipulando las expresiones algebraicas obtenidas se obtiene

$$\begin{aligned} \langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0| \phi_I(x)\phi_I(y)U(T, -T) |0\rangle}{\langle 0|U(T, -T) |0\rangle} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x)\phi_I(y) \exp[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)]\} |0\rangle}{\langle 0| \exp[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)] |0\rangle}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Existen reglas que asocian expresiones analíticas con diagramas, a estos se les conoce como reglas de Feynman. En teoría ϕ^4 las reglas son.

1. Por cada vértice  = $-i\lambda \int d^4z$
2. Por cada propagador,  $D_F(x - y)$
3. Por cada punto externo,  = e^{-ipx}
4. Dividir por el factor de simetría

El factor $-i\lambda$ se puede interpretar como la amplitud de emisión o de absorción de partículas en el vértice. La integral nos dice que debemos sumar sobre todos los puntos donde este proceso puede ocurrir, este es simplemente el principio de superposición. Las reglas de Feynman en el espacio de momento son

1. Por cada propagador,  $\frac{i}{p^2 + m^2 + i\epsilon}$.
2. Por cada vértice  = $-i\lambda$.
3. Por cada punto externo,  = 1.
4. Imponer conservación de momento en cada vértices.
5. Integrar sobre cada lazo $\int \frac{d^2p}{(2\pi)^4}$.
6. Dividir por el factor de simetría.

Se puede probar que la función de Green $G(x_1, \dots, x_n) = \langle\Omega|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle$ será igual a la suma de todos los diagramas conectados con n puntos externos [16]. Por ejemplo para $n=2$ se obtiene

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \langle\Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle \\ &= \textit{suma sobre todos los diagramas conectados con 2 puntos externos} \\ &= \textit{x} \text{---} \textit{y} + \textit{x} \text{---} \text{O} \text{---} \textit{y} + \textit{x} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O} \text{---} \textit{y} + \dots \end{aligned} \quad (1.32)$$

1.3. Integral Funcional

Utilizando el formalismo de integral funcional se encuentra que la función de Green en una teoría interactuante está dada por

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0|T\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} = \frac{\int D\phi e^{i\int d^4x\mathcal{L}}\phi(x_1)\dots\phi(x_n)}{\int D\phi e^{i\int d^4x\mathcal{L}}}. \quad (1.33)$$

Es conveniente introducir el generador funcional $Z[J]$, en teoría escalar se define como

$$Z[J] = \int D\phi e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)}. \quad (1.34)$$

Este generador funcional lo podemos escribir en términos de las funciones de Green

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1\dots dx_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1)\dots J(x_n). \quad (1.35)$$

Consecuentemente

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \left(\frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \right)_{J=0} Z[J]. \quad (1.36)$$

A menudo es conveniente utilizar el espacio euclidiano, el cual se define haciendo $x_0 = -i\bar{x}_0$, donde \bar{x}_0 es real. En el espacio euclidiano la función generadora es

$$Z_E[J] = \int D\phi e^{-S_E[\phi] + \int d^3x d\bar{x}_0 J\phi}, \quad (1.37)$$

donde S_E es la acción euclidiana. La función de Green euclidiana esta dada por:

$$G_E^{(n)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \left(\frac{\delta^n}{\delta J(\bar{x}_1)\dots\delta J(\bar{x}_n)} \right)_{J=0} Z_E[J]. \quad (1.38)$$

Usando continuación analítica, las funciones de Green en Minkowski estan relacionadas con las funciones de Green euclidianas como

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = i^n G_E^{(n)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \quad (1.39)$$

En teoría de perturbaciones, la función de Green $G^{(n)}$ está dada por la suma sobre todos los diagramas con n puntos externo, incluyendo diagramas disconexos, los diagramas de vacío se cancelan debido al factor de normalización.

Si consideramos

$$Z[J] = e^{iW[J]} \quad (1.40)$$

$W[J]$ nos permite obtener las funciones de Green que contienen a los diagramas de Feynman conectados, esta función de Green se denota por $G_{con}^{(n)}$ y se puede calcular del siguiente modo

$$G_{con}^{(n)} = \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \quad (1.41)$$

1.4. Renormalización

En una teoría de campos libre la función de correlación o función de Green $\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$ tiene una interpretación simple: es la amplitud de probabilidad de una partícula para propagarse de y a x .

Para calcular la función de Green utilizaremos el operador identidad. Sea $|\lambda_0\rangle$ un eigenestado del Hamiltoniano con momento cero $\mathbf{P} |\lambda_0\rangle$. Sea $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$ un empujón de $|\lambda_0\rangle$ con momento \mathbf{p} y asumamos que los estados $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$ están normalizados relativísticamente. Sea $E_{\mathbf{p}}(\lambda) \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\lambda^2}$, donde m_λ es la masa de los estados $|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle$, es decir la energía del estado $|\lambda_0\rangle$. La relación de completez es

$$1 = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} |\lambda_{\mathbf{p}}\rangle \langle \lambda_{\mathbf{p}}|. \quad (1.42)$$

Usando $x^0 > y^0$, se puede reescribir la función de Green de dos puntos utilizando la relación de completez

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\mathbf{p}}\rangle \langle \lambda_{\mathbf{p}} | \phi(y) | \Omega \rangle. \quad (1.43)$$

Manipulando los elementos de matriz e introduciendo una integración sobre p_0 , nuestra expresión para la función de Green de dos puntos es

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 + m_\lambda^2 + i\epsilon} e^{ip \cdot (x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2. \quad (1.44)$$

Podemos repetir el procedimiento para $y^0 > x^0$. Ambos casos los podemos incluir en la siguiente ecuación conocida como: *la representación espectral de Källén-Lehmann*

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) D_f(x-y, M^2), \quad (1.45)$$

donde ρ es la *densidad espectral*

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 + m_\lambda^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2. \quad (1.46)$$

La densidad espectral de una teoría suele estar conformada de un pico para $M = m$, donde m es la masa de una sola partícula. También contiene un continuo multipartículas el cual comienza alrededor de $M = 4m^2$

$$\rho(M^2) = (2\pi) \delta(M^2 + m^2) Z + (\text{parte multipartícula}) \quad (1.47)$$

A Z se le conoce como *renormalización de intensidad de campo*. Al aplicar la transformada de Fourier a la función de Green de dos puntos y utilizando la densidad espectral de la ecuación (1.47) se obtiene

$$G(p) = \frac{iZ}{p^2 + m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 + M^2}, \quad (1.48)$$

m es la masa de una partícula, esta cantidad en general es distinta a la que aparece en el lagrangiano. La masa que aparece en el lagrangiano la llamaremos masa desnuda y la denotaremos por m_0 , y m para referirnos a la masa física. Sólo la masa física es observable.

La ecuación (1.48) nos da una regla importante: *La masa física de una partícula en una teoría de campo está dada por la posición del polo en el propagador.*

Al hacer este cálculo para un campo escalar libre, se obtiene

$$G(p) = \frac{i}{p^2 + m^2}. \quad (1.49)$$

Esta fórmula se puede interpretar como la amplitud de una partícula para propagarse de 0 a x . En el caso interactuante la expresión es similar, salvo que en este caso aparecen contribuciones de estados multipartículas y la constante Z que es la probabilidad de $\phi(0)$ para crear un estado de una partícula a partir del vacío.

Se define el diagrama irreducible de una partícula (1PI) como cualquier diagrama que no puede ser dividido en 2 removiendo una sola línea. Sea $-i\Sigma(p)$ la suma de todos los diagramas 1PI con dos líneas externas. La transformada de Fourier de la función de Green puede ser reescrita en términos de Σ

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{i}{p^2 + m_0^2} + \frac{i}{p^2 + m_0^2} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{p^2 + m_0^2} \\ &\quad + \frac{i}{p^2 + m_0^2} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{p^2 + m_0^2} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{p^2 + m_0^2} + \dots \end{aligned} \quad (1.50)$$

La suma se puede reescribir como una suma geométrica

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{i}{p^2 + m_0^2} \left(1 + [-i\Sigma(p)] \frac{i}{p^2 + m_0^2} + \dots \right) \\ &= \frac{i}{p^2 + m_0^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Sigma(p)}{p^2 + m_0^2}} \right) \\ &= \frac{i}{p^2 + m_0^2 - \Sigma(p) + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

1.4.1. Matriz S y diagramas de Feynman

La amplitud para un proceso en el cual el estado inicial es $|k_1, \dots, k_m\rangle$ evoluciona a un estado final $|p_1, \dots, p_n\rangle$ está dada por

$$S_{if} = \langle p_1, \dots, p_n | e^{-iH(T_f - T_i)} | k_1, \dots, k_m \rangle. \quad (1.52)$$

En el límite en que $T_f \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$ y $T_i \rightarrow -\infty(1 - i\epsilon)$ a S_{if} se le denomina la matriz S. Aún si la teoría es interactuante, existe la probabilidad de que las partículas no interactúen, a esta parte de la matriz S se le denota por el operador identidad 1, la parte restante de la matriz S que contiene a las interacciones se denota por T . De modo que la matriz S se puede escribir como

$$S = 1 + iT. \quad (1.53)$$

Tanto la matriz S como T contiene un factor $\delta^{(4)}(\sum k_i - \sum p_i)$. Extrayendo este factor, se define el *elemento de matriz invariante* \mathcal{M} por

$$\langle p_1, \dots, p_n | iT | k_1, \dots, k_m \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum k_i - \sum p_i \right) \cdot i\mathcal{M}. \quad (1.54)$$

La fórmula de reducción LSZ nos da una relación entre las amplitudes de dispersión y las funciones de correlación. Un resultado de este hecho es

$$i\mathcal{M} = \text{suma sobre diagramas amputados completamente conexos}, \quad (1.55)$$

con las siguientes reglas de Feynman en el espacio de momentos

1. Por cada propagador, $\longrightarrow \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$.
2. Por cada vértice $\times = -i\lambda$.
3. Por cada línea externa, $\text{-----} = \sqrt{Z} = 1$ a orden más bajo.
4. Imponer conservación de momento en cada vértice.
5. Integrar sobre cada lazo $\int \frac{d^2p}{(2\pi)^4}$.
6. Dividir por el factor de simetría.

1.4.2. Contratérminos

El lagrangiano de la teoría $\lambda\phi^4$ en términos de los parámetros desnudos es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4, \quad (1.56)$$

de la cual conocemos sus diagramas de Feynman, los cuales nos permiten calcular las funciones de Green de esta teoría en forma perturbativa en potencias de la constante de acoplamiento λ_0 . Sin embargo algunos de estos diagramas conducen a integrales que divergen.

En primer instancia parece que el Lagrangiano no es el apropiado para definir a una teoría. No obstante, no es el Lagrangiano el incorrecto, sino los parámetros desnudos: la constante de acoplamiento desnuda λ_0 y la masa desnuda m_0 no están relacionados directamente con cantidades físicas.

Al realizar un reescalamiento $\phi_0 = Z^{1/2}\phi$ podemos reescribir el Lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2Z\phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!}Z^2\phi^4. \quad (1.57)$$

La masa desnuda y la constante de acoplamiento desnuda siguen apareciendo en el Lagrangiano, estas se pueden eliminar definiendo

$$\delta_Z = Z - 1, \quad \delta_m = m_0^2Z - m^2, \quad \delta_\lambda = \lambda_0Z^2 - \lambda, \quad (1.58)$$

donde m y λ son la masa física y la constante de acoplamiento física respectivamente. Escribiendo el Lagrangiano en términos de los parámetros físicos se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \\ &+ \frac{1}{2} \delta_Z (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \delta_m \phi^2 - \frac{\delta \lambda}{4!} \phi^4. \end{aligned} \quad (1.59)$$

El Lagrangiano escrito en la ecuación (1.59) está dividido en dos partes. La primer parte es idéntica al Lagrangiano de la ecuación (1.56) reemplazando los parámetros desnudos por los parámetros físicos. Las expansiones perturbativas de esta parte del Lagrangiano dará calculos divergentes como sucedía con los parámetros desnudos. Para quitar estas divergencias es necesario que la segunda parte del Lagrangiano cancele estas divergencias, a esta segunda parte del Lagrangiano se le conoce como contratérminos. Si esto sucede, se dice que la teoría es renormalizable. Las reglas de Feynman para los contratérminos de $\lambda \phi^4$ son

$$\begin{aligned} \text{---} \otimes \text{---} &= i(p^2 \delta_z - \delta_m) \\ \text{X} \otimes &= -i\delta_\lambda. \end{aligned}$$

1.4.3. Condiciones de renormalización

Las definiciones dadas en la ecuación (1.58) no sirven a menos de que demos una definición de la masa física y la constante de acoplamiento física.

Masa física El polo de la función de Green nos da la masa física de la partícula cuando $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, es decir

$$m^2 - m_0^2 - \text{Re}(\Sigma(p^2 = m^2)) = 0 \quad (1.60)$$

Esta ecuación muestra que existe un desfaseamiento entre la masa física y la masa desnuda. Algunos de los diagramas que contribuyen a $\Sigma(p)$ son divergentes haciendo que el desfaseamiento entre m y m_0 sea infinito. Para especificar que m en (1.59) se la masa física se usan contratérminos que nos llevan a una de las condiciones de renormalización

$$\Sigma(p^2 = -m^2) = 0 \quad (1.61)$$

Adicionalmente para fijar la normalización del campo renormalizado, pedimos que el propagador tenga residuo 1, esta condición es equivalente a

$$\frac{d}{dp^2} \Sigma(p^2) = 0. \quad (1.62)$$

Constante de acoplamiento física

Se define a la función de vértice Γ por

$$-i\Gamma = \sum \left(\text{ todos los diagramas de cuatro puntos conectados } \right. \quad (1.63) \\ \left. \text{ con patas externas amputadas).} \right.$$

La constante de acoplamiento física se puede definir como la función de vértice con momento cero, es decir

$$\Gamma(m, 0, 0, 0) = \lambda. \quad (1.64)$$

Esta es la segunda condición de renormalización. En términos de las variables de Mandelstam las condiciones son $s = 4m^2$, $t = u = 0$.

1.5. Renormalización de $\lambda\phi^4$



Figura 1.1: Amplitud de dispersión a un lazo para $\lambda\phi^4$

Calculemos el diagrama mostrado en la figura 1.1 en $n = 4 - \epsilon$ dimensiones, donde $\epsilon \rightarrow 0$ funciona como un parámetro de regularización. El segundo diagrama de la figura 1.1 nos da la siguiente expresión para la amplitud

$$A_1 = \frac{1}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 + m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k+p)^2 + m^2 + i\epsilon} (-i\lambda)^2 \equiv (-i\lambda)^2 iV(s). \quad (1.65)$$

Donde usamos que p^2 es igual a la variable de Mandelstam s . Los otros dos diagramas nos llevan a una integral similar, en la que se reemplaza s por u y por t . La amplitud a un lazo es

$$-i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 (iV(s) + iV(t) + iV(u)) - i\delta_\lambda. \quad (1.66)$$

Para calcular $V(p^2)$ se introduce el parámetro de Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[Ax + B(1-x)]^2}, \quad (1.67)$$

y realizando el cambio de variable $l = k + px$, se obtiene

$$V(p^2) = \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{[l^2 + x(1-x)p^2 - m^2]^2}. \quad (1.68)$$

Rotando al espacio euclidiano ($l_E^0 = -il^0$) y resolviendo las integrales en p

$$\begin{aligned} V(p^2) &= \frac{-1}{2} dx \int_0^1 \int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{1}{[l_E^2 - x(1-x)p^2 + m^2]^2} \\ &= \frac{-1}{2} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - n/2)}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-n/2}} \\ &= \frac{-1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{(4\pi)^{\epsilon/2}} [m^2 - x(1-x)p^2]^{-\epsilon/2}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Para proceder se necesitan las dos siguientes aproximaciones, las cuales son válidas para $x \rightarrow 0$

$$\Gamma(x) \rightarrow \frac{1}{x} - \gamma,$$

$$a^\epsilon = e^{\epsilon \log a} = 1 + \epsilon \log a + O(\epsilon^2)$$

Al sustituirlas en la integral para $V(p^2)$ y despreciando los términos de orden ϵ y superiores se obtiene

$$V(p^2) = \frac{-1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log [m^2 - x(1-x)s] \right). \quad (1.70)$$

De acuerdo a la segunda condición de renormalización, $-i\mathcal{M} = -i\lambda$ cuando $s = 4m^2$ y $t = u = 0$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &= -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)] \\ &= \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma + 3\log(4\pi) - \log [m^2 - x(1-x)4m^2] - 2\log [m^2] \right). \end{aligned} \quad (1.71)$$

La amplitud a un lazo es

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{m^2 - x(1-x)s}{m^2 - x(1-x)4m^2} \right) \\ &+ \log \left(\frac{m^2 - x(1-x)t}{m^2 - x(1-x)4m^2} \right) + \log \left(\frac{m^2 - x(1-x)u}{m^2 - x(1-x)4m^2} \right). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Para determinar δ_z y δ_m ocupamos las condiciones de renormalización

$$\Sigma(p^2 = m^2) = 0 \quad y \quad \frac{d}{dp^2} \Sigma(p^2) = 0. \quad (1.73)$$

A un lazo se obtiene

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p^2) &= \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - m^2} + i(p^2 \delta_z - \delta_m) \\ &= \frac{-i\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(1 - n/2)}{m^{2-n}} + i(p^2 \delta_z - \delta_m), \end{aligned} \quad (1.74)$$

con esto se obtiene el valor de δ_z y δ_m

$$\delta_z = 0 \quad y \quad \delta_m = \frac{-\lambda}{2(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(1 - n/2)}{m^{2-n}}. \quad (1.75)$$

1.6. Grupo de Renormalizacion Wilsoniano

El método de Wilson está basado en la suposición de que toda teoría física es una teoría efectiva e incompleta a grandes energías. Matemáticamente está basado en la integral funcional, donde los grados de libertad del campo son variables de integración. La integral funcional está dada por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i f(\mathcal{L}+J\phi)} = \prod_k \int d\phi(k) e^{i f(\mathcal{L}+J\phi)}. \quad (1.76)$$

Para imponer un corte en el ultravioleta, restringimos el número de grados de integración, esto lo hacemos fijando $\phi(k) = 0$ para $|k| > \Lambda$.

El corte no esta bien definido en un espacio de Minkowski. El corte se impone en el espacio euclidiano el cual se obtiene después de realizar una rotación de Wick.

Consideremos el caso de $\lambda\phi^4$, tomando $J=0$ la integral funcional es

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi]_{\Lambda} \exp \left(- \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu}\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right] \right) \quad (1.77)$$

donde

$$[\mathcal{D}\phi]_{\Lambda} = \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k) \quad (1.78)$$

Podemos dividir $\phi(k)$ en dos grupos, para ello tomamos un número b tal que $b < 1$. Las variables $\phi(k)$ con $b\Lambda \leq |k| < \Lambda$ son los grados de libertad que serán integrados. Definimos

$$\hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & \text{si } b\Lambda \leq |k| \leq \Lambda \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.79)$$

Redefinamos $\phi(k)$ como $\phi + \hat{\phi}$, reemplazándolo en (1.77) obtenemos

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\hat{\phi} \exp \left(- \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu}\phi + \partial_{\mu}\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi + \hat{\phi})^4 \right] \right). \quad (1.80)$$

El lagrangiano efectivo \mathcal{L}_{ef} lo podemos reescribir como $\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L}$ más correcciones proporcionales a λ . Estos términos proporcionales a λ los trataremos como perturbaciones.

El lagrangiano efectivo lo podemos reescribir como

$$\int d^d x \mathcal{L}_{ef} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (1 + \Delta Z) (\partial_{\mu}\phi)^2 + \frac{1}{2} (m^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4} (\lambda + \Delta\lambda) \phi^4 \right] \quad (1.81)$$

Reescalando la distancia y el momento como

$$k' = k/b, \quad x' = xb \quad (1.82)$$

de tal modo que k' está integrada sobre $|k'| < \Lambda$. En términos de la variable x' el lagrangiano efectivo es

$$\int d^d x \mathcal{L}_{ef} = \int d^d x' b^{-d} \left[\frac{1}{2} b^2 (1 + \Delta Z) (\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4} (\lambda + \Delta \lambda) \phi^4 \right] \quad (1.83)$$

Si reescalamos el campo como

$$\phi' = \left[b^{2-d} (1 + \Delta Z) \right]^{1/2} \phi, \quad (1.84)$$

la acción vuelve a tomar su forma inicial

$$\int d^d x \mathcal{L}_{ef} = \int d^d x' \left[\frac{1}{2} (\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \phi'^2 + \frac{\lambda'}{4} \phi'^4 \right], \quad (1.85)$$

donde los nuevos parámetros del Lagrangiano son

$$\begin{aligned} m'^2 &= (m^2 + \Delta m^2) (1 + \Delta Z)^{-1} b^{-2} \\ \lambda' &= (\lambda + \Delta \lambda) (1 + \Delta Z)^{-2} b^{d-4}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Combinando el reescalamiento con el hecho de que se integraron los grados de libertad ultravioletas se pudo reescribir el Lagrangiano de tal manera que toma la forma original con los parámetros renormalizados. Continuando con este procedimiento, podemos integrar sobre otra capa de momento y volver a transformar el Lagrangiano. Si tomamos el parámetro b cercano a uno, la transformación se convierte en una transformación continua. Esto lo podemos ver como una trayectoria o un flujo de todos los posibles Lagrangianos. A esta transformación continua de Lagrangianos se le conoce como el grupo de renormalización.

1.7. Ecuación de Callan-Symanzik

Para definir una teoría de modo adecuado, se necesita especificar las condiciones de renormalización. En la subsección Renormalización las condiciones de renormalización se definieron en términos de la masa física. Si la teoría posee $m = 0$ estas condiciones no pueden ocuparse, ya que estas dan lugar a singularidades. Para evitar dichas singularidades, se escoge una escala de momento arbitraria M , imponiendo las condiciones de renormalización en $p^2 = -M^2$:

$$\begin{aligned} \Sigma(p^2 = M^2) &= 0 \\ \frac{d}{dp^2} \Sigma(p^2 = M^2) &= 0 \\ \Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \lambda \quad \text{en } (p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = M^2. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Al parámetro M se le conoce como la escala de renormalización. Ahora supongamos que variamos M por δM .

$$\begin{aligned} M &\rightarrow M + \delta M \\ \lambda &\rightarrow \lambda + \delta\lambda \\ \phi &\rightarrow (1 + \delta\eta)\phi. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Haciendo estas variaciones en los parámetros M , λ y ϕ , la variación en la función de Green renormalizada es

$$G^{(n)} \rightarrow (1 + n\delta\eta)G^{(n)}. \quad (1.89)$$

Si pensamos $G^{(n)}$ como función de M y de λ podemos escribir esta transformación como

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda} \delta \lambda = n\delta\eta G^{(n)}. \quad (1.90)$$

Definiendo los parámetros

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \delta \lambda; \quad \gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \delta \eta. \quad (1.91)$$

Sustituyendo los parámetros β y λ en la ecuación (1.90), se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\left(M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma \right) G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, \lambda, M) = 0. \quad (1.92)$$

A esta relación se le conoce como la ecuación de Callan-Symanzik. Esta relación nos dice que existen 2 funciones universales β y γ que compensan la variación en la escala de renormalización. Los parámetros β y γ son los mismos para cualquier n y deben ser independientes de cualquier x_i y de la escala M , β y γ solo dependen de λ . La función β es la tasa de cambio del flujo del grupo de renormalización de la constante de acoplamiento λ . Si la función β es positiva la constante de acoplamiento renormalizada aumenta su valor si aumenta el momento, y disminuye si disminuye el momento.

Calculando el valor de β y de γ para la teoría $\lambda\phi^4$ a un lazo se obtiene

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}; \quad \gamma = 0. \quad (1.93)$$

La ecuación de Callan-Symanzik asociada es

$$p \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0. \quad (1.94)$$

La ecuación característica de este sistema es

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dp} = \frac{3\bar{\lambda}^2}{16\pi^2 p}, \quad (1.95)$$

al ponerle la condición inicial $\bar{\lambda}(M) = \lambda$, encontramos el valor de $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{1 - (3\lambda/16\pi^2) \log(p/M)}. \quad (1.96)$$

En esta última ecuación vemos que la constante de acoplamiento depende del momento, nos referiremos a esta como la constante de acoplamiento escalable.

Capítulo 2

Correspondencia Norma Gravedad

2.1. Teorías de Norma

Consideremos un campo vectorial ϕ que vive en un espacio plano de n dimensiones, en el cual actúa un grupo de Lie en su representación fundamental como $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(x)\phi(x)$. En términos de componentes

$$\phi^j(x) \rightarrow \phi'^j(x) = \left(e^{i\alpha^a(x)T_a} \right)_k^j \phi^k(x) = U_k^j(x)\phi^k(x) \quad (2.1)$$

Donde $U(x) = \exp(i\alpha^a(x)T_a)$ es un elemento del grupo de Lie y T_a son los generadores del grupo los cuales forman el álgebra de Lie con las relaciones de conmutación

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c. \quad (2.2)$$

Tomando $\alpha^a(x)$ infinitesimal, el campo transforma como

$$\phi^j(x) \rightarrow \phi'^j(x) = \phi^j(x) + i\alpha^a(x)(T_a)_k^j \phi^k(x). \quad (2.3)$$

Las derivadas de ϕ no transforman de acuerdo con (2.1). Para ello se define la derivada covariante dada por

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iA_\mu^a T_a, \quad (2.4)$$

e imponiendo

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = U(x)A_\mu U^\dagger(x) - iU(x)\partial_\mu U^\dagger(x), \quad (2.5)$$

se satisface

$$D_\mu \phi'(x) = D_\mu (U(x)\phi(x)) = U(x)D_\mu \phi(x), \quad (2.6)$$

es decir $D_\mu \phi$ es invariante de norma. Definiendo $F_{\mu\nu}$ en términos de los campos de norma A_μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c)T_a, \quad (2.7)$$

$F_{\mu\nu}$ es invariante de norma, es decir

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger. \quad (2.8)$$

La acción se define como

$$S = -\frac{1}{4g^2} \int d^d x F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a, \quad (2.9)$$

la cual invariante de norma. A esta acción se puede acoplar la acción de un campo fermiónico Ψ con masa m

$$S = -\frac{1}{4g^2} \int d^d x (F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + i\bar{\Psi} D_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi). \quad (2.10)$$

Una vez cuantizada la teoría, se encuentra que la función β del grupo de renormalización a un lazo de una teoría con grupo de norma $SU(N_c)$ es [16]

$$\beta = \mu \frac{dg_{YM}}{d\mu} = -\frac{1}{48\pi^2} g_{YM}^3 (11N_c - 2N_f), \quad (2.11)$$

donde μ es la escala de renormalización y N_f el número de sabores. La función β es negativa si $11N_c - 2N_f > 0$ como es el caso de QCD, lo que nos dice que la teoría es asintóticamente libre.

2.1.1. N grande

Los protones y neutrones están hechos de partículas más fundamentales, los quarks. Bajo circunstancias normales los quarks están juntos dentro de protones y neutrones; estos poseen una propiedad que causa que uno no pueda liberarlos, a esta se le llama confinamiento, la interacción entre quarks crece y crece a medida que se separan, hasta que es tan grande que en lugar de separarlos produce pares quark-antiquark. La fuerza fuerte es la responsable de mantener a los quarks juntos.

La interacción fuerte es descrita por medio de la cromodinámica cuántica (QCD). QCD es una teoría cuántica basada en una simetría de norma $SU(3)$. La interacción fuerte se da por medio de gluones, que son los campos de norma de $SU(3)$.

Un quark pertenece a la representación fundamental de $SU(3)$ y puede tomar 3 estados llamados color, los cuales denotaremos por q_i $i = 1, 2, 3$. Del mismo modo un antiquark \bar{q}_i tiene un anticolor.

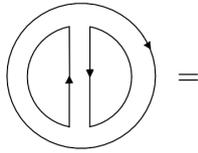
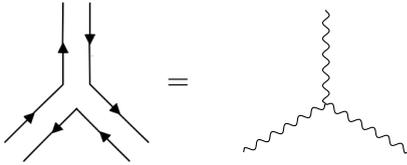
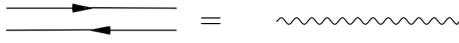
Un quark tiene un determinado color, pero puede cambiar su color por una interacción quark-gluón. La diferencia de color es llevada por el gluón, el cual transforma como un quark-antiquark bajo $SU(3)$. Un gluón pertenece a la representación adjunta de $SU(3)$, y se puede escribir como $(A_\mu)_j^i$.

QCD se vuelve fuertemente acoplada a energías bajas, por lo que no se pueden usar teorías perturbativas. Un método de aproximación, es el llamado N_c -grande propuesto por 't Hooft [20], el cual consiste en generalizar QCD reemplazando su grupo de norma por $SU(N_c)$ y tomar el límite $N_c \rightarrow \infty$, mateniendo $\lambda = g^2 N_c$ fijo. Los grados de libertad de

esta teoría son los campos gluónicos $A_{\mu j}^i$ y los campos de quark q_j^i , donde $i, j = 1, \dots, N_c$ y $a = 1, \dots, N_f$.

Debido a que el grupo de norma es $SU(N_c)$ tenemos $N_c^2 - 1$ campos de norma independientes, pero como estamos considerando el límite $N_c \rightarrow \infty$ podemos considerar que hay N_c^2 gluones. El número de gluones es mucho mayor que el número de grados de libertad de los quarks, el cual está dado por $N_c N_f$, por esta razón podemos esperar que la dinámica es dominada por los gluones en el límite de N_c -grande.

En diagramas de Feynmann un propagador de una teoría de norma es representado por una sola línea, pero para mantener el seguimiento de los colores es conveniente utilizar notación de doble línea, donde el propagador del gluón es representado por una doble línea con flechas opuestas. Los diagramas se deben de dibujar de modo que se preserve la dirección de la flecha. Los diagramas de Feynman para propagador, vértice y lazo respectivamente son



Las reglas de Feynmann son proporcionales a:

1. Asociar el factor λ/N_c por cada propagador.
2. Asociar el factor N_c/λ por cada vértice de interacción.
3. Asociar el factor N_c por cada lazo. Si tenemos V vértices, E propagadores y F lazos.

A partir de las reglas de Feynmann obtenemos

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^V \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^E N_c^F = \lambda^{E-V} N_c^{V-N+F} \quad (2.12)$$

Los diagramas 2.1a y 2.1b son planares, mientras que el 2.1c es no planar. La palabra planar/no planar significa que el diagrama puede/no puede dibujarse en un plano. Los diagramas planares tienen una relación cuadrática en N_c , por lo que la amplitud de cualquier diagrama planar se puede escribir como $f(\lambda)N_c^2$. La suma de todos los diagramas es

$$A = \sum_{g=0}^{\infty} f_g(\lambda) N_c^{2-2g} = f_0(\lambda) N_c^2 + f_1(\lambda) N_c^0 + f_2(\lambda) \frac{1}{N_c^2}. \quad (2.13)$$

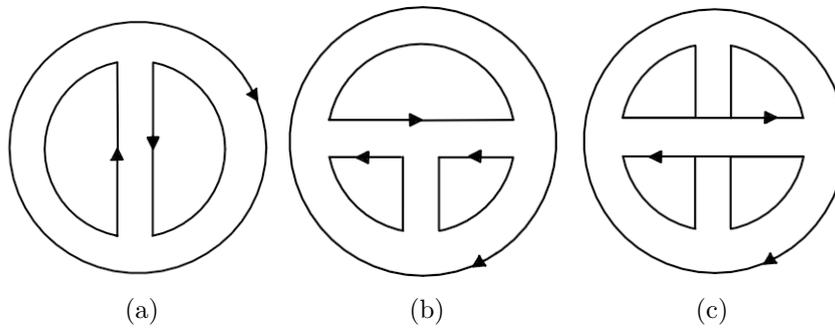


Figura 2.1: Ejemplo amplitudes de vacío

Lo cual nos muestra que son los diagramas planares los que dominan en el límite de N_c grande.

Estos diagramas los podemos clasificar por su topología, la cual nos da una conexión con teoría de cuerdas. Esto lo podemos hacer asociando una superficie de Riemann a cada diagrama de Feynman. En notación de doble línea cada línea de un diagrama de Feynman es un lazo cerrado el cual lo podemos pensar como la frontera de una superficie dos-dimensional o 'cara'. La superficie de Riemann se obtiene pegando las fronteras de estas caras como lo indican los diagramas de Feynman. Para obtener una superficie compacta añadimos un punto al infinito a la cara asociada a la línea externa del diagrama. Este procedimiento se ejemplifica en las figuras 2.2 y 2.3

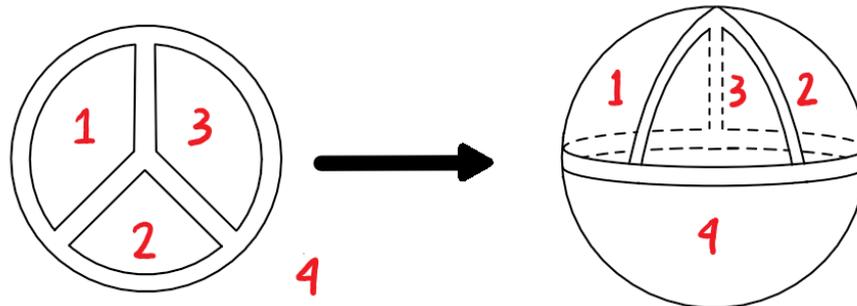


Figura 2.2: Superficie de Riemann asociada a un diagrama planar

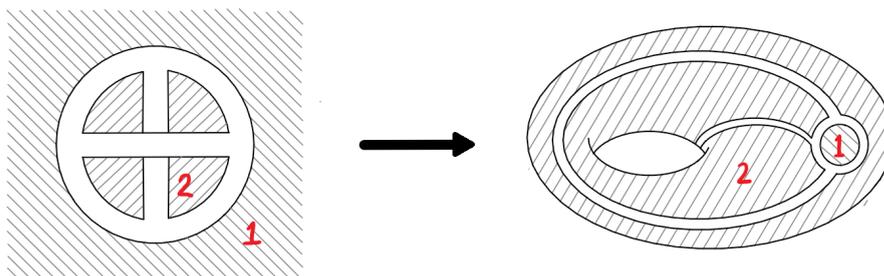


Figura 2.3: Superficie de Riemann asociada a un diagrama no planar

en el primer caso se obtuvo una esfera y en el segundo un toro. La potencia de N_c asociada a un diagrama de Feynman esta asociada a la superficie de Riemann. Previamente se

encontró que la potencia de N_c es $V - N + F$, esta potencia es un invariante topológico denominado la característica de Euler χ . En una superficie compacta, orientable y con género g (el género es el número de agujeros que tiene una superficie) la característica de Euler es $\chi = 2 - 2g$. De modo que la esfera tiene $\chi = 2$ y para el toroide $\chi = 0$.

La principal conclusión de este desarrollo es que las amplitudes de vacío en el límite de N_c largo de una teoría de norma están relacionados con el género.

2.2. Teoría de Cuerdas

La teoría cuántica de campos describe la dinámica de partículas puntuales, la teoría de cuerdas es una teoría cuántica relativista en que los objetos son unidimensionales llamados cuerdas. Esta teoría está caracterizada por la tensión de la cuerda T y por una constante de acoplamiento adimensional g_s . Se suele escribir la tensión de la cuerda en términos de una escala de longitud fundamental l_s

$$T = \frac{1}{2\pi l_s^2}. \quad (2.14)$$

Una cuerda puede oscilar, y puede hacerlo de distintos modos. La teoría de cuerdas unifica todas las partículas de la naturaleza como diferentes oscilaciones de la cuerda.

Existen dos tipos de cuerdas: abiertas y cerradas. Los puntos finales de las cuerdas abiertas se pueden unir y formar una nueva cuerda, en particular si los dos puntos finales de dos cuerdas se unen, se obtiene una cuerda cerrada.

Justo como una partícula traza una línea en el espacio-tiempo, una cuerda traza una superficie en el espacio tiempo. La línea trazada por la partícula se denomina línea de mundo, similarmente la superficie trazada por una cuerda se llama hoja de mundo.

Cuerda bosónica

Para cuantizar una partícula relativista se toma como la acción la longitud de la línea de mundo; análogamente se postula que la acción para la cuerda sea proporcional al área de la hoja de mundo, a esta acción se le denomina como la acción de Nambu-Goto.

La hoja de mundo depende de 2 coordenadas que parametrizan el tiempo y la longitud de la cuerda denotadas por τ y σ respectivamente. El número de coordenadas necesarias para parametrizar la hoja de mundo dependiera de la dimensión del espacio. Si nos encontramos en un espacio-tiempo de $d+1$ dimensiones, la parametrización de la hoja de mundo será

$$X = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)). \quad (2.15)$$

El área de la hoja de mundo es

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}. \quad (2.16)$$

Para que la acción tenga las unidades adecuadas (energía tiempo), la acción es

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}. \quad (2.17)$$

Cuantizar la acción de Nambu-Goto es complicado debido a la raíz cuadrada. Una acción equivalente que nos da las mismas ecuaciones de movimiento clásicamente es la acción de Polyakov

$$S = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu. \quad (2.18)$$

Calculando el tensor de esfuerzos se encuentra que este se anula, esta será una de las constricciones que tendrá la ecuación obtenida a partir de la acción de Polyakov

$$T_{ab} = -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{ab}} = 0. \quad (2.19)$$

Una parametrización conveniente es $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Usando esta parametrización la ecuación de movimiento que se obtiene es la ecuación de onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X^\mu = \frac{\partial^2}{\partial \sigma^+ \partial \sigma^-} = 0, \quad (2.20)$$

donde se hizo uso de las coordenadas $\sigma^+ = \tau + \sigma$, $\sigma^- = \tau - \sigma$ y las constricciones sobre el tensor de energía momento son

$$\begin{aligned} T_{10} = T_{01} &= \dot{X} \cdot X' = 0 \\ T_{00} = T_{11} &= \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

La solución general de la ecuación de onda se puede escribir como la suma de dos funciones arbitrarias

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma). \quad (2.22)$$

Para la cuerda cerrada se pide que la solución sea periódica.

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi). \quad (2.23)$$

Para la cuerda abierta se le imponen condiciones de Neumann

$$X'^\mu(\tau, 0) = X'^\mu(\tau, \pi) = 0. \quad (2.24)$$

Para la cuerda cerrada la solución más general es

$$X_R^\mu = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l_s^2 p^\mu (\tau - \sigma) + \frac{i}{2} l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} \quad (2.25)$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l_s^2 p^\mu (\tau - \sigma) + \frac{i}{2} l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}. \quad (2.26)$$

Para la cuerda abierta con condiciones de frontera tipo Neumann x^μ es la posición del centro de masa y p^μ es el momento de la cuerda. La longitud de la cuerda es l_s , este parámetro se relaciona con α' como $l = 1/\sqrt{2\alpha'}$. X_R^μ y X_L^μ son funciones reales lo cual implica que x^μ y p^μ son reales y α_{-n}^μ es el adjunto de α_n^μ , es decir

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^\dagger, \quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^\dagger. \quad (2.27)$$

Para la cuerda abierta con condiciones de frontera tipo Neumann la solución está dada por

$$X^\mu = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + i l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\tau} \cos \sigma. \quad (2.28)$$

Para cuantizar la cuerda se introduce el momento canónico conjugado, dado por

$$P^\mu = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}_\mu} = T \dot{X}^\mu. \quad (2.29)$$

Utilizando esta definición del momento canónico conjugado se imponen las siguientes relaciones de conmutación

$$[P^\mu(\sigma, \tau), P^\nu(\sigma', \tau)] = [X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = 0 \quad (2.30)$$

$$[P^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.31)$$

Al insertar (2.28) en los conmutadores previos, se obtienen los siguientes conmutadores para α_m^μ y $\tilde{\alpha}_m^\nu$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = im\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} \quad (2.32)$$

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = 0. \quad (2.33)$$

Los α_n pueden ser interpretados como operadores de ascenso y descenso para n negativa y positiva respectivamente. El estado base está definido como aquel que es aniquilado por cualquier α_n con $n > 0$.

Esta cuantización impone condiciones sobre la dimensión del espacio, no todos los espacios son consistentes, si empezamos con un espacio-tiempo de Minkowski D-dimensional, encontramos que la dimensión en que es consistente la teoría de cuerdas es D=26 [4] [11].

Supercuerdas

Se pueden construir distintas teorías agregando grados de libertad a la hoja de mundo. En el caso de la dualidad se utiliza una teoría de super cuerdas la cual se obtiene añadiendo una hoja de mundo fermiónica 2-dimensional.

$$S = -T \int d\tau d\sigma (\partial^\alpha X_\mu \partial_\alpha X^\mu + \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu). \quad (2.34)$$

Donde $\bar{\psi} = \psi \gamma^0$, γ^α son las matrices de Dirac en dos dimensiones. Una de las posibles representaciones de las matrices de Dirac es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

ψ es un espinor cuyas componentes son

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

La ecuación para la parte fermiónica es $\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi = 0$, que en la base dada en (2.35) se obtienen un par de ecuaciones desacopladas

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \psi_-^\mu &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \psi_+^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Usando los términos de frontera de la parte fermiónica del Lagrangiano de la supercuerda se encuentra que $\psi_+^2|_{0,\pi} = \psi_-^2|_{0,\pi}$

Imponiendo $\psi_+|_0 = \psi_-|_0$, quedan dos opciones para la condición de frontera en $\sigma = \pi$. En el primer caso la condición es

$$\psi_+^\mu(\pi, \tau) = \psi_-^\mu(\pi, \tau), \quad (2.38)$$

a esto se le conoce como el sector Ramond cuya expansión en modos normales es

$$\psi_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in\sigma_\pm}. \quad (2.39)$$

El segundo caso es conocido como el sector Neveu-Schwarz (NS)

$$\psi_+^\mu(\pi, \tau) = -\psi_-^\mu(\pi, \tau), \quad (2.40)$$

la expansión en modos de Fourier es

$$\psi_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_r^\mu e^{-ir\sigma_\pm}. \quad (2.41)$$

Para la cuerda cerrada se pueden tener condiciones de periodicidad (R) o antiperiodicidad (NS), es decir

$$\psi_\pm(\sigma) = \pm \psi_\pm(\sigma + \pi). \quad (2.42)$$

La expansión en modos de Fourier puede ser

$$\psi_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-2ir(\tau-\sigma)} \quad (2.43)$$

y

$$\psi_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} \tilde{b}_r^\mu e^{-2ir(\tau-\sigma)} \quad (2.44)$$

Para una cuerda cerrada se tienen cuatro posibles sectores que son: NS-NS, NS-R, R-NS, RR. El primero y último sector describen estados bosónicos y los otros dos sectores describen fermiones.

Para cuantizar la teoría se imponen relaciones de anticonmutación para las hojas de mundo fermiónicas

$$\{\psi_A^\mu, \psi_B^\nu\} = \pi\eta^{\mu\nu}\delta^{AB}\delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.45)$$

como resultado los coeficientes de Fourier satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\begin{aligned} \{b_r^\mu, b_s^\nu\} &= \eta^{\mu\nu}\delta_{rs} \\ \{d_m^\mu, b_n^\nu\} &= \eta^{\mu\nu}\delta_{mn}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para una teoría de supercuerdas consistente se requiere que el espacio sea de dimensión $D=10$.

Interacciones

Las interacciones entre cuerdas pueden ser introducidas geoméricamente postulando que 2 cuerdas se pueden unir y que una cuerda se puede dividir en 2 a través de un vértice de intensidad g_s como se muestra en la figura 2.4

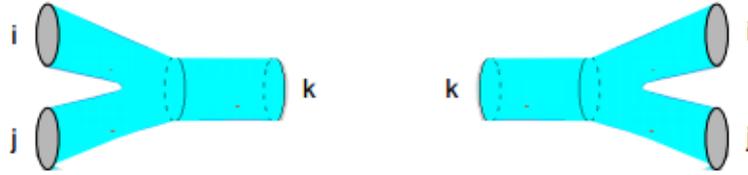


Figura 2.4: Interacciones en teoría de cuerdas: dos cuerdas en estados iniciales i y j se unen para formar una cuerda en un estado final k

Las observables físicas como amplitudes de dispersión se obtienen sumando propagaciones de cuerdas entre estados iniciales y finales. Esta suma se reduce a una suma sobre las topologías de superficies bidimensionales multiplicadas por un factor g_s^{2h-2} , donde h es el genero de una superficie bidimensional dada.

Con esto, la amplitud de vacío a vacío en teoría de cuerdas se puede escribir como:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{h=0}^{\infty} F_h(\alpha)g_s^{2h-2} = F_0(\alpha)\frac{1}{g_s^2} + F_1(\alpha) + F_2(\alpha)g_c^2 + \dots \\ &= \text{Diagrama de árbol} + \text{Diagrama de bucle} + \text{Diagrama de dos bucles} + \dots \end{aligned} \quad (2.47)$$

Comparando las ecuaciones (2.13) y (2.47), notamos que ambas tienen la misma estructura, por lo que las funciones de partición de ambas teorías son las mismas

$$Z_{gauge} = Z_{string}, \quad (2.48)$$

y la relación entre los parámetros de ambas teorías es

$$N_c^2 \propto \frac{1}{g_s^2}. \quad (2.49)$$

2.3. D-branas

Una cuerda abierta puede tener sus puntos finales en un objeto llamado D-brana [17]. Si tenemos N_c D-branas, las cuerdas abiertas pueden tener sus puntos finales acomodados de distintas formas, pueden tener los puntos finales en la misma brana o en distintas branas. Estos grados de libertad corresponden a los grados de libertad de $SU(N_c)$. Es por esto que las cuerdas abiertas corresponden a teorías de norma con grupo de norma $SU(N_c)$.

Las D-branas existen en varias dimensionalidades. Una D-brana con dimensión espacial p se llama Dp -brana. Una Dp -brana describe una teoría de norma $(p + 1)$ -dimensional. Una Dp -brana se extiende a lo largo de la direcciones $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^p)$, con direcciones transversas identificadas por $y^i = (x^{p+1}, \dots, x^9)$. Para una sola Dp -brana el espectro sin masa consiste en: campos de norma $A^\mu(x)$, $\mu = 0, 1, \dots, p$, $9 - p$ campos escalares ϕ^i , $i = 1, \dots, 9 - p$, y sus supercompañeros.

Las Dp -branas para una teoría de cuerdas supersimétrica tipo IIA existen para $p = 0, 2, 4, 6, 8$, mientras que para la tipo IIB $p = 1, 3, 5, 7$.

Como una cuerda abierta representa una teoría de norma y una cuerda cerrada representa la gravedad, la teoría de cuerdas contiene teoría de norma y teoría gravitacional, por esto la teoría de cuerdas es una teoría unificada. La dualidad AdS/CFT relaciona una teoría de norma con una teoría gravitacional. Esto es posible debido a que en el fondo, la teoría de cuerdas contiene a ambas.

Para una Dp -brana en una teoría IIB, utilizando las ecuaciones de supergravedad se encuentra que la métrica es [13] [14]

$$ds^2 = [H_p(r)]^{(p-7)/8} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + [H_p(r)]^{(p+1)/8} \delta_{ij} dy^i dy^j \quad (2.50)$$

donde $r^2 = y_i y^i$

$$H_p(r) = 1 + \frac{L_p^{7-p}}{r^{7-p}} \quad (2.51)$$

El dilatón nos da el valor de la constante de acoplamiento, esta relación está dada por

$$e^{2\phi(r)} = g_s^2 [H_p(r)]^{(3-p)/2}, \quad (2.52)$$

reescribiendo la métrica en coordenadas polares $dy^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2$, obtenemos

$$ds^2 = [H_p(r)]^{(p-7)/8} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + [H_p(r)]^{(p+1)/8} (dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2) \quad (2.53)$$

2.4. Supergravedad

Cuando la constante de acoplamiento $g_s \ll 1$, en la expansión topológica domina el primer término que corresponde a diagramas a nivel árbol. En este caso, una teoría de gravedad clásica puede describir una teoría de supercuerdas. A este tipo de teorías se les conoce como supergravedad.

Podemos escribir una acción que nos reproduzca los diagramas de Feynman a nivel árbol. Si consideramos que la longitud de la cuerda l_s es despreciable, entonces la acción gravitacional es

$$S = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g} R \quad (2.54)$$

justo como en relatividad general. Escribimos una acción en 10 dimensiones, porque la teoría de supercuerdas solo puede ser cuantizada en 10 dimensiones espacio-temporales.

Al tomar en cuenta los efectos debido a la longitud de la cuerda, la acción tendrá potencias del tensor de curvatura

$$S = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g} (R + l_s^2 R^2 + \dots) \quad (2.55)$$

estos términos los podemos ignorar cuando $l_s^2 R \ll 1$. Si consideramos espacio con curvatura pequeña, entonces podemos considerar la acción de la ecuación (2.54).

Previamente vimos que las amplitudes de vacío de teorías de norma con N_c -grande están dadas por una suma sobre las topologías de superficies bidimensionales, teniendo la misma forma que las amplitudes de cuerdas cerradas. Como las cuerdas cerradas dan lugar a la gravedad, la expansión en diagramas de Feynman en teoría de cuerdas corresponden a una expansión perturbativa gravitacional. Si consideramos los diagramas planares, estos corresponden a una gravedad clásica, los diagramas correspondientes a un toro corresponden a gravedad a un lazo.

Esto implica que una teoría de norma con N_c grande es representada por una teoría de cuerdas, en particular en el límite $N_c \rightarrow \infty$, es representada por una teoría de gravedad clásica.

2.5. Correspondencia AdS/CFT

Perturbativamente la teoría de cuerdas consiste de cuerdas abiertas y cuerdas cerradas. Las cuerdas cerradas describen excitaciones del espacio-tiempo y las cuerdas abiertas excitaciones en las D-branas.

Las Dp -branas se pueden estudiar desde 2 puntos de vista: cuerdas abiertas y cuerdas cerradas.

Cuerdas abiertas

En esta perspectiva se trata a las cuerdas como pequeñas perturbaciones; esta perspectiva solo es válida si la constante de acoplamiento efectiva de las cuerdas es pequeña, es decir $g_s N \ll 1$.

Consideremos N D3-branas en el límite de baja energía $E \ll \alpha^{-1/2}$. En otras palabras tomando solamente el espectro no masivo. La acción de los modos no masivos [1] se puede escribir como

$$S = S_{bulto} + S_{brana} + S_{int}. \quad (2.56)$$

S_{bulto} es la acción de la supergravedad 10-dimensional más correcciones de orden superior. S_{int} describe la interacción entre los modos de la brana y los del bulto. Finalmente S_{brana} está dada por la acción de Dirac-Born-Infeld, la cual para una sola D3-brana es

$$D_{DBI} = -\frac{1}{(2\pi)^3 \alpha'^2 g_s} \int d^4x e^{-\phi} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})}, \quad (2.57)$$

con $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + (2\pi\alpha')^2 \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^i$.

En el límite $\alpha' \rightarrow 0$ las cuerdas abiertas y cerradas se desacoplan, matemáticamente $S_{int} \rightarrow 0$. S_{bulto} se reduce a la acción de supergravedad libre en un espacio de Minkowski

(9+1)-dimensional. En este mismo límite la acción S_{brana} se reduce a la acción de la teoría de Super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ con grupo de norma $U(N_c)$. Esta teoría consiste de un campo de norma A_μ , seis campos escalares ϕ^i y 4 fermiones de Weyl. En este caso podemos desacoplar $U(1)$ de $U(N_c)$, físicamente esto se debe a que $U(1)$ describe el movimiento del centro de masa. La parte restante del grupo $U(N_c)$ es $SU(N_c)$ el cual describe el movimiento relativo entre D-branas.

Cuerdas cerradas

En esta perspectiva las D-branas son vistas como soluciones en el límite de bajas energías de la teoría de supercuerdas, es decir como una teoría de Supergravedad.

En las ecuaciones (2.52) y (2.53) se obtuvo el valor del dilatón y de la métrica para una Dp-brana. Tomando el caso particular en que se tiene una D3-brana, el dilatón se reduce a una constante, y la métrica es

$$ds^2 = [H_p(r)]^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + [H_p(r)]^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2). \quad (2.58)$$

La constante L se relaciona con otros parámetros como

$$L^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2. \quad (2.59)$$

La escala característica L debe ser grande para que la curvatura sea pequeña y por lo tanto sea válida la aproximación de supergravedad. Por lo que la perspectiva de cuerdas abiertas es válida si $g_s N \gg 1$.

La métrica de la D3-brana consiste en regiones de interés. Para $r \gg L$, $H(r) \sim 1$, la métrica obtenida con esta aproximación es la métrica de Minkoski en 10 dimensiones. Tomando el otro límite $r \ll L$, la métrica es

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (2.60)$$

Los primeros dos términos corresponden a la métrica de $AdS_5 \times S_5$, donde AdS_5 es el espacio tiempo de Anti de Sitter en 5 dimensiones. L es el radio de AdS. Este espacio-tiempo es solución de la ecuación de Einstein con constante cosmológica negativa.

$$S_5 = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g_5} (R_5 - 2\Lambda). \quad (2.61)$$

donde $2\Lambda = -12/L^2$.

2.5.1. Combinando perspectivas

En ambos esquemas, la perspectiva de cuerdas abiertas y cerradas, se encontraron dos teorías desacopladas en el límite de bajas energías.

1. *Cuerdas cerradas*: teoría de cuerdas tipo IIB en AdS_5 y supergravedad tipo IIB en $\mathbb{R}^{9,1}$.
2. *Cuerdas abiertas*: $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills en 4 dimensiones y supergravedad tipo IIB en $\mathbb{R}^{9,1}$.

Ambos esquemas deberían ser equivalentes, y la teoría de supergravedad en $\mathbb{R}^{9,1}$ está presente en ambas teorías. Esto sugiere que las dos teorías restantes deberían ser equivalentes. Por lo que Maldacena ([15]) conjeturó que

$$\{\mathcal{N} = 4 SU(N_c) SYM\} = \{\text{Teoría de cuerdas IIB en } AdS_5 \times S_5\}. \quad (2.62)$$

2.5.2. Comparación de simetrías

Tanto la teoría de cuerdas como la teoría de Super-Yang-Mills deben poseer las mismas simetrías.

Introduciendo el cambio de variable $z = L^2/r$ en (2.60), la métrica de $AdS_5 \times S^5$ se puede reescribir como

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) + L^2 d\Omega_5^2 \quad (2.63)$$

La métrica contiene la combinación $-dt^2 + d\mathbf{x}^2$, por lo que es invariante ante el grupo de Poincaré $ISO(1, 3)$. La métrica de AdS_5 es invariante de escala, es decir que si reescalamos $z \rightarrow az$, la métrica permanece invariante. Invarianza de escala más $ISO(1, 3)$ pueden ser unidas en el grupo de simetría $SO(2, 4)$; esto se puede ver claramente en el apéndice A. La 5-esfera tiene a $SO(6)$ como grupo de simetría, por lo que el grupo de simetría de la teoría gravitacional en $AdS_5 \times S_5$ es $SO(2, 4) \times SO(6)$.

La teoría de campo debería poseer las mismas simetrías, veamos que esto es así. Ciertamente es invariante ante el grupo de Poincaré $ISO(1, 3)$. Esperamos que la teoría de campo sea invariante ante reescalamientos. Aún si una teoría posee invarianza de escala clásicamente, no necesariamente sucede lo mismo cuánticamente. La renormalización introduce una escala en la que se rompe la invarianza de escala. Como resultado, las constantes de acoplamiento cambian con la energía. Existen alguna teorías de norma la cuales son invariantes de escala incluso cuánticamente. Una de estas teorías en particular es $\mathcal{N} = 4$ *super - Yang - Mills* (SYM).

Calculando la β a un lazo de teorías de Super Yang Mills se obtiene [22]

$$\beta = \mu \frac{g_{YM}}{d\mu} = -\frac{g_{YM}}{48\pi^2} N_c \left(11 - 4n_f - \frac{1}{2}n_s \right), \quad (2.64)$$

donde n_f es el número de fermiones de Weyl y n_s es el número de escalares. La función β se anula para $\mathcal{N} = 4$ SYM, ya que $n_f = 4$ y $n_s = 6$. Al tener una teoría invariante ante reescalamientos e invariante ante el grupo de Poincare $ISO(1, 3)$, estas juntas nos dan como grupo de simetría a $SO(2, 4)$. La teoría de SYM $\mathcal{N} = 4$ además de ser invariante ante $SO(2, 4)$, lo es también ante $SO(6)$, simetría que rota entre si a los seis campos escalares, y por separado a los cuatro campos fermiónicos.

2.5.3. Funciones de partición.

La función de partición de la teoría de cuerdas tipo IIB debe ser igual a la función de partición de la teoría de campos conforme

$$Z[\phi] \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x \phi(x) \mathcal{O}_I(x) \right) \right\rangle_{CFT} = Z_{string}. \quad (2.65)$$

Pasando al espacio euclidiano por medio de una rotación de Wick, se puede usar una aproximación del punto silla para Z_{string} en el límite de bajas energías, obteniendo una teoría de supergravedad tipo IIB. La aproximación es

$$Z_{string} \approx e^{-S_{sugra}}. \quad (2.66)$$

En [23] se deduce la relación que existe entre los elementos de las funciones de partición. En esta subsección intentaremos dar un argumento heurístico que nos permitirá identificar los elementos de la teoría de supergravedad con los elementos de la teoría de campo dual. Las funciones de partición de ambas teorías deben ser invariantes bajo reescalamientos. Si \mathcal{O} es un operador con dimensión l , la función de partición para la teoría de campos conforme ante reescalamientos es

$$\begin{aligned} \exp\left(\int d^d x \phi_l(x) \mathcal{O}_l(x)\right) &= \exp\left(\int d^d(\lambda x) \phi_l(\lambda x) \mathcal{O}_l(\lambda x)\right) \\ &= \exp\left(\lambda^{d-l} \int d^d x \phi_l(\lambda x) \mathcal{O}_l(x)\right), \end{aligned} \quad (2.67)$$

para que la integral funcional sea invariante ante reescalamientos le tenemos que pedir a ϕ que satisfaga

$$\phi_l(x) = \lambda^{d-l} \phi_l(\lambda x). \quad (2.68)$$

La integral funcional del lado de AdS también debe ser invariante de escala. Esto implica que $\Phi(\lambda x, \lambda z) = \Phi(x, z)$.

Como veremos en el siguiente capítulo, la solución asintótica en un espacio AdS cuando $z \rightarrow 0$ es

$$\Phi(x, z) = z^{d-\Delta} \phi_0(x), \quad (2.69)$$

de aquí se sigue que

$$\phi_0(x) = \lambda^{d-\Delta} \phi_0(\lambda x). \quad (2.70)$$

Comparando con la integral funcional del lado de la teoría de campos podemos identificar a l como Δ y a $\phi_l(x)$ con $\phi_0(x)$, habiendo identificando estos dos parámetros podemos reescribir la integral funcional del lado de la teoría de campo como

$$Z[\phi_0] \equiv \left\langle \exp\left(\int d^d x \phi_0(x) \mathcal{O}_\Delta(x)\right) \right\rangle. \quad (2.71)$$

La relación (2.65) se puede reescribir como

$$Z[\phi_0] = \left\langle \exp\left(\int d^d x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)\right) \right\rangle_{CFT} = e^{-S_{sugra}[\Phi(\phi_0)]}. \quad (2.72)$$

La función de correlación de n puntos de la teoría de campo dual será

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta^n}{\delta \phi_0(x_1) \dots \delta \phi_0(x_n)} e^{-S_{sugra}[\Phi(\phi_0)]}. \quad (2.73)$$

Capítulo 3

Renormalización Holográfica

3.1. Klein Gordon en AdS

Consideremos la acción del campo de Klein Gordon dada una métrica g^{mn}

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (g^{mn} \partial_m \phi \partial_n \phi + m^2 \phi^2). \quad (3.1)$$

La ecuación de campo asociada a esta acción es

$$(\square_g - m^2) \phi = 0, \quad \square_g = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_m (\sqrt{-g} g^{mn} \partial_n). \quad (3.2)$$

La métrica de AdS en las coordenadas de Poincaré es

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n = \frac{1}{z^2} (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu), \quad (3.3)$$

donde hemos fijado el radio de curvatura $L = 1$. Para pasar de la métrica de Minkowski $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ a la métrica euclidiana $ds_E^2 = d\tau^2 + dx^2$ se hace con una rotación de Wick $t = -i\tau$. La métrica de AdS euclidiana en las coordenadas de Poincaré es

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n = \frac{1}{z^2} (dz^2 + \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu). \quad (3.4)$$

Usando que g^{mn} es la métrica de AdS euclidiana, la ecuación 3.2 se puede reescribir como

$$(z^2 \partial_z^2 - (d-1)z \partial_z + z^2 \delta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu - m^2) \phi = 0. \quad (3.5)$$

Aplicando transformada de Fourier para para las coordenadas x^μ , la ecuación que se obtiene en el espacio de momentos es

$$z^2 \partial_z^2 \tilde{\phi}_p(z) - (d-1)z \partial_z \tilde{\phi}_p(z) - (m^2 + p^2 z^2) \tilde{\phi}_p(z) = 0, \quad (3.6)$$

donde $p^2 \equiv \delta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$. Esta ecuación tiene dos soluciones linealmente independientes, si $z \rightarrow 0$ asintóticamente las soluciones son

$$\tilde{\phi}_p \sim \begin{cases} z^{\Delta_+} \\ z^{\Delta_-} \end{cases} \quad (3.7)$$

Δ_{\pm} son las 2 raíces de la ecuación cuadrática

$$m^2 - \Delta(\Delta - d) = 0, \quad (3.8)$$

dadas por

$$\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \nu. \quad (3.9)$$

A la raíz positiva la denotaremos simplemente por Δ , a esta se le conoce como el peso conforme, a raíz negativa la denotaremos por Δ_- . El valor de ν es

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m^2}. \quad (3.10)$$

Cerca de la frontera de *AdS* la solución la podemos escribir como

$$\phi(x, z) = z^{\Delta_-} \phi_0(x) + \dots + z^{\Delta} \phi_+(x). \quad (3.11)$$

La solución a la ecuación de Klein Gordon en el espacio de momentos es

$$\tilde{\phi}(z, p) = \alpha_p \Gamma(1 - \nu) \left(\frac{1}{2}p\right)^{\nu} z^{d/2} I_{-\nu}(pz) + \beta_p \Gamma(1 + \nu) \left(\frac{1}{2}p\right)^{-\nu} z^{d/2} I_{\nu}(pz), \quad (3.12)$$

donde I_{ν} e $I_{-\nu}$ son las funciones de Bessel modificadas de primera especie. En el caso $\nu \in \mathbb{N}$ $I_{-\nu}$ e I_{ν} son linealmente dependientes por lo que como veremos más adelante se tiene que hacer una modificación. El valor de α_p y β_p dependerá de las condiciones de frontera.

La solución en el espacio de posiciones será la transformada de Fourier inversa de $\tilde{\phi}(z, p)$

$$\phi(x, z) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{ip^{\mu} x_{\mu}} \tilde{\phi}, \quad (3.13)$$

esta solución tiene una singularidad en $pz = 0$.

Si se requiere calcular la ecuación de Klein Gordon inhomogénea o con fuentes, se necesita calcular la función de Green, esta se calcula como

$$G(x, z, x', z') = \int d^d p e^{ip^{\mu}(x_{\mu} - x'_{\mu})} (zz')^{d/2} (\theta(z - z') K_{\nu}(pz) I_{\nu}(pz') + \theta(z' - z) I_{\nu}(pz') K_{\nu}(pz)) \quad (3.14)$$

Esta expresión puede ser integrada, obteniendo así una función hipergeométrica. La función de Green satisface

$$(\square_g - m^2) G(x, x') = -\frac{i}{\sqrt{g}} \delta^{(d)}(x - x') \delta(z - z'). \quad (3.15)$$

Habiendo obtenido la función de Green de la ecuación de Klein Gordon en AdS, podemos encontrar la solución si la ecuación contiene fuentes, es decir

$$(\square_g - m^2) \phi(x, z) = J(x, z). \quad (3.16)$$

La solución a la parte inhomogénea está dada por

$$\phi_{part} = \int d^{d+1} x' G(x, x') J(x'). \quad (3.17)$$

3.1.1. Cálculo de $\tilde{\phi}_{UV}$ y $\tilde{\phi}_{IR}$ con condiciones de Dirichlet

Previamente se encontró que la solución para el campo escalar de Klein Gordon es

$$\tilde{\phi}(z, p) = \alpha_p \Gamma(1 - \nu) \left(\frac{p}{2}\right)^\nu z^{d/2} I_{-\nu}(pz) + \beta_p \Gamma(1 + \nu) \left(\frac{p}{2}\right)^{-\nu} z^{d/2} I_\nu(pz). \quad (3.18)$$

A fin de seleccionar de modo correcto los valores de las constantes α_p y β_p , se deben imponer condiciones de frontera. Separemos la solución en 2 partes: ϕ_{UV} y ϕ_{IR} . ϕ_{UV} será la solución en la región ultravioleta definida en $\epsilon < z < l$. ϕ_{IR} será la solución en la región infrarroja definida en $l < z < \infty$.

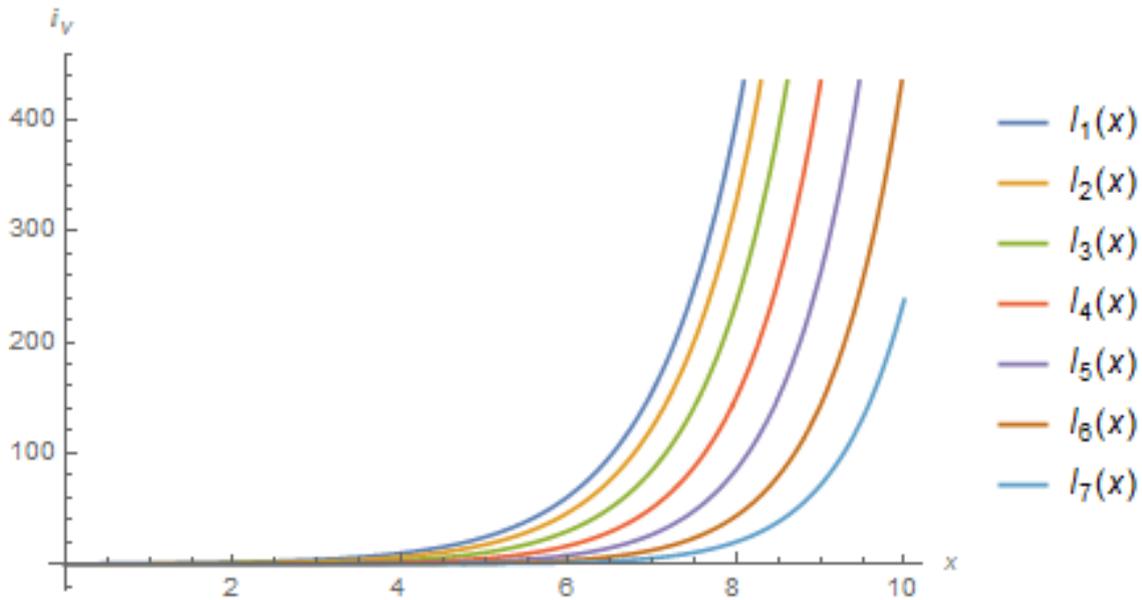
Para la región ultravioleta se imponen las siguientes condiciones de frontera tipo Dirichlet $\tilde{\phi}(\epsilon, p) = \epsilon^{\Delta-} \alpha_p$ y $\tilde{\phi}(l, p) = \tilde{\phi}_l(p)$. De este modo el parámetro α_p queda determinado y β_p también queda determinado en términos de α_p y $\phi_l(p)$. La solución en el ultravioleta con estas condiciones de frontera es

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(z, p) &= \alpha_p \Gamma(1 - \nu) \left(\frac{1}{2}p\right)^\nu z^{d/2} I_{-\nu}(pz) \\ &+ \left(\tilde{\phi}_l - \alpha_p \Gamma(1 - \nu) \left(\frac{1}{2}p\right)^\nu l^{d/2} I_{-\nu}(pl) \right) \left(\frac{z}{l}\right)^{d/2} \frac{I_\nu(pz)}{I_\nu(pl)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

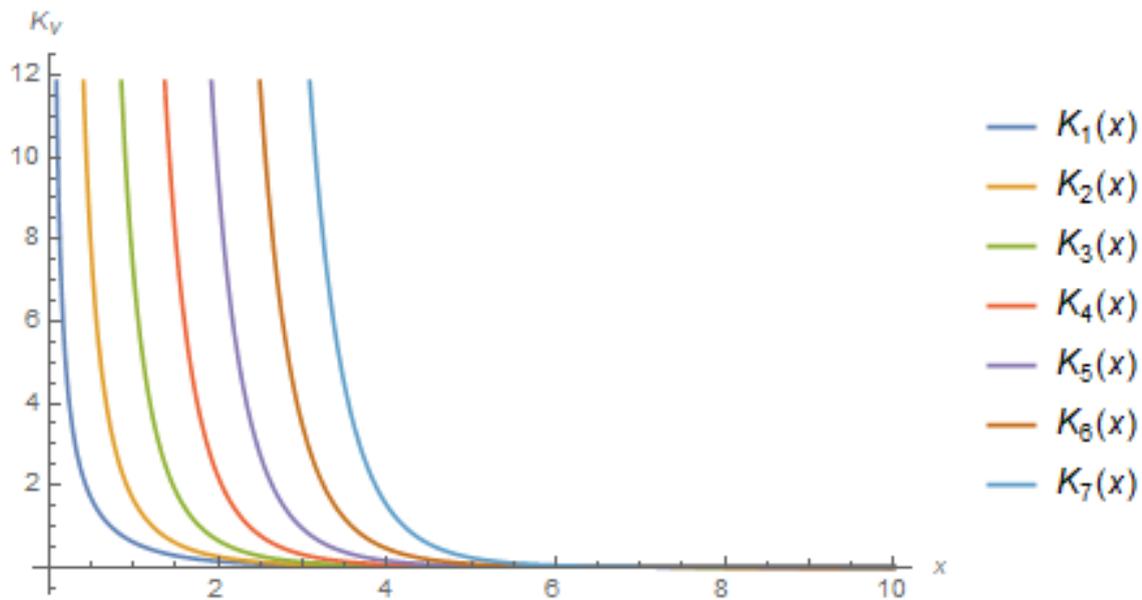
Para la región infrarroja se debe satisfacer que $\tilde{\phi}(l, p) = \tilde{\phi}_l(p)$, adicionalmente se requiere que $\tilde{\phi}_{IR}$ sea finita en $z \rightarrow \infty$. El comportamiento asintótico [2] de las funciones de Bessel modificadas de primera especie es

$$\lim_{pz \rightarrow \infty} z^{d/2} I_\nu(pz) = \sqrt{\frac{z^{d-1}}{2\pi p}} e^{pz} + \dots, \quad (3.20)$$

ambas soluciones no están acotadas si $z \rightarrow \infty$. En la figura 3.1a se puede observar el comportamiento de las funciones de Bessel modificadas de primera especie. Es conveniente



(a) Gráfica de funciones de Bessel modificadas de primera especie, para distintos valores. Se puede observar que crecen rápidamente.



(b) Gráfica de funciones de Bessel modificadas de segunda especie, para distintos valores. Se puede observar que estas funciones poseen una singularidad en $x=0$, y que decrecen muy rápido conforme crece x .

Figura 3.1: Funciones de Bessel de primera I_ν y de segunda especie K_ν

utilizar la función de Bessel modificada de segunda especie K_ν , la cual está definida en términos de I_ν e $I_{-\nu}$ como

$$K_\nu = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu} - I_\nu}{\sin(\pi\nu)}. \quad (3.21)$$

El comportamiento asintótico de esta función de Bessel modificada de segunda especie es

$$\lim_{pz \rightarrow \infty} z^{d/2} K_\nu(pz) = \sqrt{\frac{\pi z^{d-1}}{2p}} e^{-pz}. \quad (3.22)$$

La solución en el infrarrojo será de la forma $\tilde{\phi}(p, z) = az^{d/2} K_\nu(pz)$, que al imponerle la condición $\tilde{\phi}(l, p) = \tilde{\phi}_l(p)$ se obtiene

$$\tilde{\phi}(z, p) = \left(\frac{z}{l}\right)^{d/2} \frac{K_\nu(pz)}{K_\nu(pl)} \tilde{\phi}_l(p). \quad (3.23)$$

3.2. Renormalización del campo escalar

En teoría cuántica de campos al calcular las funciones de correlación aparecen términos divergentes, por lo que se necesita renormalizar la teoría para que esta tenga sentido. Un fenómeno general en la dualidad norma/gravedad es la conexión UV/IR, es decir las divergencias ultravioleta en el lado de la teoría de campo están relacionadas con las divergencias infrarrojas del lado gravitacional. En [5] [18] se analiza cómo remover estas divergencias, es decir cómo *renormalizar holográficamente*. El procedimiento consiste esencialmente de cuatro pasos:

1. Obtener la solución asintótica.
2. Regularizar la acción.
3. Sumar los contratérminos.
4. Obtener la acción renormalizada.

A continuación se ejemplifica este proceso para el campo escalar de Klein-Gordon.

3.2.1. Solución asintótica

Recordemos que la métrica de AdS euclidiana en las coordenadas de Poincaré es

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n = \frac{dz^2}{z^2} + \frac{1}{z^2} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.24)$$

A fin de resolver la ecuación de Klein Gordon en AdS, proponemos una solución de la forma

$$\phi(x, z) = z^{d-\Delta} \bar{\phi}(x, z). \quad (3.25)$$

Al sustituir (3.25) en la ecuación Klein Gordon obtenemos

$$0 = [(m^2 - \Delta(\Delta - d))\bar{\phi}(x, z) - z(\square_0\bar{\phi}(x, z) + (d - 2\Delta + 2)\partial_z\bar{\phi}(x, z) + z\partial_z^2\bar{\phi}(x, z))] \quad (3.26)$$

donde $\square_0 = \delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$.

Al satisfacerse (3.8), la ecuación (3.26) se reduce a

$$(z\square_0\bar{\phi}(x, z) + (d - 2\Delta + 2)\partial_z\bar{\phi}(x, z) + z\partial_z^2\bar{\phi}(x, z)) = 0. \quad (3.27)$$

La función $\bar{\phi}(x, z)$ la expandimos en potencias pares de z

$$\bar{\phi}(x, z) = \phi_0(x) + z^2\phi_{(2)}(x) + z^4\phi_{(4)}(x) + \dots + z^{2n}\phi_{(2n)}(x) + \dots \quad (3.28)$$

Esta ecuación se resuelve de forma iterativa, derivando con respecto de z y tomando $z = 0$. Para $\phi_{(2)}$ se obtiene

$$\phi_{(2)} = \frac{1}{2(2\Delta - d - 2)}\square_0\phi_{(0)}, \quad (3.29)$$

continuyendo con el procedimiento se obtiene el valor de cualquier $\phi_{(2n)}$.

$$\phi_{(2n)} = \frac{1}{2n(2\Delta - d - 2n)}\square_0\phi_{(2n-2)}. \quad (3.30)$$

Este procedimiento se vuelve inválido si existe k tal que $2\Delta - d - 2k = 0$, en este caso $\phi(x, z)$ lo reescribimos como

$$\bar{\phi}(x, z) = \phi_0(x) + z^2\phi_{(2)}(x) + \dots + z^{2k}(\phi_{(2n)}(x) + \log z^2\psi_{(2k)}) + \dots \quad (3.31)$$

Un cálculo similar al que se hizo previamente nos lleva a

$$\psi_{(2k)} = -\frac{1}{2^{2k}\Gamma(k)\Gamma(k+1)}(\square_0)^k\phi_{(0)}. \quad (3.32)$$

3.2.2. Regularización

Para regularizar la acción, restringimos el rango de integración en z , $z \geq \epsilon$, donde ϵ es un parámetro pequeño. A esta acción se le denomina acción regularizada y se denota por S_{reg} .

$$\begin{aligned} S_{reg} &= \int_{z \geq \epsilon} d^{d+1}x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} g^{mn} \partial_m \phi \partial_n \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \\ &= \int_{z \geq \epsilon} d^{d+1}x \sqrt{g} \phi (-\square_g \phi + m^2 \Phi) - \frac{1}{2} \int_{z \geq \epsilon} d^d x \sqrt{g} g^{zz} \phi \partial_z \phi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{z \geq \epsilon} d^d x \sqrt{g} g^{zz} \phi \partial_z \Phi. \end{aligned} \quad (3.33)$$

En el último paso se ocupó que se satisfacen las ecuaciones de movimiento. Esta expresión la podemos reescribir en términos de $\phi(x, z)$ como

$$\begin{aligned} S_{reg} &= - \int_{z=\epsilon} d^d x \epsilon^{-2\Delta+d} \left(\frac{1}{2} (d - \Delta) \bar{\phi}(x, \epsilon) + \frac{1}{2} \epsilon \bar{\phi}(x, \epsilon) \partial_\epsilon \phi(x, \epsilon) \right) \\ &= - \int_{z=\epsilon} d^d x \left(\epsilon^{-2\Delta+d} a_{(0)} + \epsilon^{-2\Delta+d+2} a_{(2)} + \dots + \epsilon^{-2\Delta+d+2k} a_{(2k)} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

El valor de $a_{(2n)}$ se puede encontrar explícitamente ocupando la expresión propuesta en la ecuación (3.28), sustituyéndola en (3.34). Así encontramos

$$a_{(0)} = -\frac{1}{2} (d - \Delta) \phi_{(0)}^2 \quad a_{(2)} = -(d - \Delta + 1) \phi_{(0)} \phi_{(2)}. \quad (3.35)$$

Previamente se encontró que

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m^2} \equiv \frac{d}{2} + \nu \quad (3.36)$$

de este modo, podemos reescribir la acción regularizada como

$$S_{reg} = \int_{\rho=\epsilon} d^d x \left(\epsilon^{-2\nu} a_{(0)} + \epsilon^{-2\nu+2} a_{(2)} + \dots + \epsilon^{-2\nu+2k} a_{(2k)} + \dots \right). \quad (3.37)$$

Al ser $\nu > 0$, nos damos cuenta de que la acción diverge si $\epsilon \rightarrow 0$. La cantidad de términos divergentes dependerá del valor de ν .

3.2.3. Contratérminos

Los contratérminos se definen como

$$S_{ct} = -\text{términos divergentes de } S_{reg}. \quad (3.38)$$

Reescribiendo $\phi_{(0)}$ y $\phi_{(2)}$ en términos de $\phi(x, \epsilon)$ a segundo orden

$$\begin{aligned} \phi_{(0)} &= \epsilon^{-(d-\Delta)} \left(\phi(x, \epsilon) - \frac{1}{2(2\Delta - d - 2)} \square_\gamma \phi(x, \epsilon) \right) \\ \phi_{(2)} &= \epsilon^{-(d-\Delta)-2} \frac{1}{2(2\Delta - d - 2)} \square_\gamma \phi(x, \epsilon), \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde $\square_\gamma = \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, $\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon^2} \eta_{\mu\nu}$ se le conoce como la métrica inducida. Con esto se puede reescribir a $a_{(0)}$ y a $a_{(2)}$ en términos de $\phi(x, \epsilon)$. La acción contratérmino en términos de $\phi(x, \epsilon)$ para $\nu \in (0, 2)$ es

$$S_{ct} = \int d^d x \sqrt{\gamma} \left(\frac{\Delta}{2} \phi^2 + \frac{1}{2(2\Delta - d - 2)} \phi \square_\gamma \phi(x, \epsilon) \right). \quad (3.40)$$

Si $\Delta = d/2 + 1$, el factor que multiplica a $\phi \square_\gamma \phi$ debe ser reemplazado por $-1/2 \log z$. Si $\nu > 2$ hay que añadir más contratérminos.

Aplicando el teorema de la convolución en cero a la ecuación (3.40), podemos escribir los contratérminos en términos de la transformada de Fourier de ϕ como

$$S_{ct} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{\Delta}{\epsilon^d} - \frac{(p\epsilon)^2}{\epsilon^d(2\nu - 2)} \right) \tilde{\phi}(p, \epsilon). \quad (3.41)$$

3.2.4. Acción Renormalizada

Para definir la acción renormalizada, primero es necesario definir la acción subtraída

$$S_{sub}[\phi, \epsilon] = S_{reg}[\phi, \epsilon] + S_{ct}[\phi, \epsilon]. \quad (3.42)$$

La acción subtraída es finita aún cuando se toma el límite $\epsilon \rightarrow 0$, la acción renormalizada está definida por este límite

$$S_{ren} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_{sub}. \quad (3.43)$$

Haciendo uso de esta definición obtenemos

$$S_{ren} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^d x \sqrt{\gamma} \left(-\epsilon \phi \partial_\epsilon \phi + \frac{d - \Delta}{2} \phi^2 + \frac{1}{2(2\Delta - d - 2)} \phi \square_\gamma \phi \right) + \dots \quad (3.44)$$

3.3. Renormalización holográfica Wilsoniana

En la correspondencia AdS/CFT, la coordenada radial z de AdS está relacionada con la energía de la teoría de campo [19]. Esto sugiere una correspondencia entre la evolución de la coordenada radial z y el flujo de renormalización Wilsoniano del lado de la teoría de campo [6] [7].

Consideremos un campo escalar en AdS, la integral funcional se puede escribir como

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_{(z < l)} \mathcal{D}\phi_l \mathcal{D}\phi_{(z > l)} e^{iS_{sugra}}, \quad (3.45)$$

donde $\Phi_l = \Phi(z = l)$, y l será la escala de corte. La física debe ser independiente de la escala de corte $\Lambda = l^{-1}$, matemáticamente esto es $dS/dl = 0$, como consecuencia se encuentra una ecuación para el flujo de renormalización, en [8] se encuentra que se debe satisfacer una ecuación tipo Hamilton-Jacobi.

Definiendo

$$\Psi_{UV} = \int_{\phi(l, x) = \phi_l(x)}^{\phi(\epsilon, x) \sim \epsilon^{\Delta - \alpha}} \mathcal{D}\phi_{(z < l)} e^{iS_{sugra}} \quad (3.46)$$

$$\Psi_{IR} = \int_{\phi(l, x) = \phi_l(x)} \mathcal{D}\phi_{(z > l)} e^{iS_{sugra}}, \quad (3.47)$$

la integral funcional completa se puede reescribir como

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_l \Psi_{UV} \Psi_{IR}. \quad (3.48)$$

En [12] se utiliza el siguiente postulado

$$\Psi_{IR}(\Phi_l) = \left\langle e^{i \int d^d x l^{-\Delta} \phi \Lambda^{\mathcal{O}}} \right\rangle_{CFT, \Lambda=l^{-1}}. \quad (3.49)$$

Este postulado nos permite identificar a Ψ_{IR} como el generador de las funciones de correlación. Suponiendo que Ψ_{UV} del lado de AdS tiene la siguiente forma

$$\Psi_{UV}(\Phi_l) = e^{\int d^d x \frac{1}{2hl^{2\Delta}} (\phi_l(x) - l^{\Delta} \lambda)^2}, \quad (3.50)$$

ocupando el postulado (3.49) se encuentra la integral de trayectoria del lado de la teoría de campo en términos de λ y h . La integral de trayectoria es

$$\left\langle e^{i \int d^d x (\lambda \mathcal{O} + \frac{h}{2} \mathcal{O}^2)} \right\rangle_{CFT, \Lambda=l^{-1}}. \quad (3.51)$$

Se puede identificar a λ y h como las constantes de acoplamiento escalables para operadores de una y de doble traza respectivamente.

3.3.1. Cálculo de S_{UV}

La región ultravioleta está definida por condiciones de Dirichlet en $z = \epsilon$ y en $z = l$. La acción ultravioleta desnuda está dada por

$$S_{UV}^{\epsilon} = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{\gamma} \phi z \partial_z \Phi \Big|_{\epsilon}^l. \quad (3.52)$$

Esta acción es divergente, por lo que es necesario que se le sumen los contratérminos dados en la ecuación (3.41). Aplicando este procedimiento y tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$ se encuentra la siguiente expresión para $S_{UV} = S_{cont} + S_{UV}^{\epsilon}$

$$\begin{aligned} S_{UV} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\left(\frac{2^{1-2\nu} \Gamma(1-\nu) p^{2\nu}}{\Gamma(\nu)} \frac{I_{-\nu}(pl)}{I_{\nu}(pl)} \right) |\alpha_p|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\Delta_-}{l^d} + \frac{(pl) I_{\nu-1}(pl)}{l^d I_{\nu}(pl)} \right) |\tilde{\phi}_l(p)|^2 - \frac{2^{1-\nu} p^{\nu}}{l^{d/2} \Gamma(\nu) I_{\nu}(pl)} (\alpha_p^* \tilde{\phi}_l + \phi_l^* \alpha_p) \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.3.2. Cálculo de S_{IR}

Previamente se encontró que en el infrarrojo

$$\tilde{\phi}(z, p) = \left(\frac{z}{l} \right)^{d/2} \frac{K_{\nu}(pz)}{K_{\nu}(pl)} \tilde{\phi}_l(p).$$

Usando esta expresión y sustituyéndola en la expresión para la acción se encuentra

$$S_{IR} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[-\frac{\Delta_-}{l^d} + \frac{(pl) K_{\nu-1}(pl)}{l^d K_{\nu}(pl)} \right] |\tilde{\phi}_l(p)|^2. \quad (3.54)$$

3.3.3. S_{UV} y S_{IR} renormalizadas

En [3] se introduce una Ψ_{IR} renormalizada dada por

$$\Psi_{IR}^{ren}(\phi_l) = e^{iS_{ct}^l} \Psi_{IR}(\phi_l) = e^{iS_{ct}^l} \left\langle e^{i \int d^d x \phi_l \mathcal{O}} \right\rangle_{\Lambda}. \quad (3.55)$$

Consideraremos a Ψ_{IR}^{ren} como el generador de las funciones de correlación de la teoría renormalizada. Ψ_{UV}^{ren} estará dada por

$$\Psi_{UV}^{ren} = \Psi_{UV} e^{-iS_{ct}^l}, \quad (3.56)$$

de tal modo que la función de partición sigue siendo la misma. Con estas definiciones podemos reescribir la función de partición como

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_l \Psi_{IR}^{ren} \Psi_{UV}^{ren}. \quad (3.57)$$

Los requerimientos para S_{ct}^l son los siguientes

- S_{ct}^l es construido a partir de ϕ_l y sus derivadas. Esto garantiza que sea analítica y que sea compatible con las condiciones de Dirichlet en $z = l$.
- Los términos de S_{ct}^l que son divergentes cuando $l \rightarrow 0$ estén de acuerdo con los contratérminos S_{ct}^e . Esto asegura que S_{IR}^{ren} no diverja incluso en el límite $l \rightarrow 0$.

3.4. Esquema de substracción mínima

El contratérmino más simple que satisface las condiciones que le hemos pedido a S_{ct}^l es

$$S_{ct}^l = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{\Delta_-}{l^d} - \frac{p^2 l^2}{l^d (2\nu - 2)} \right) \tilde{\phi}_l^2. \quad (3.58)$$

La acción en el infrarrojo renormalizada es

$$S_{IR}^{ren} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{pl}{l^d} \frac{K_{\nu-1}(pl)}{K_{\nu}(pl)} - \frac{p^2}{l^2 (2\nu - 2)} \right) \tilde{\phi}_l^2. \quad (3.59)$$

La función de correlación de 2 puntos renormalizada para la teoría conforme dual es

$$\langle \mathcal{O}(p) \mathcal{O}(q) \rangle = (2\pi)^d l^{2\Delta-} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_l(p) \delta \phi_l(q)} = l^{2\Delta-} \delta(p+q) \left(\frac{pl}{l^d} \frac{K_{\nu-1}(pl)}{K_{\nu}(pl)} - \frac{p^2 l^2}{l^d (2\nu - 2)} \right). \quad (3.60)$$

Expandiendo dicha expresión en serie de potencias, para $\nu \in (1, 2)$ se obtiene

$$\langle \mathcal{O}(p)\mathcal{O}(q) \rangle = \delta(p+q) \left(l^{-2\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} (pl)^{2n\nu+2m+2} - \frac{p^2 l^2}{l^{2\nu}(2\nu-2)} \right), \quad (3.61)$$

donde $a_{00} = 1/(2\nu-2)$, de modo que se cancela con el término que está separado de la serie. Explícitamente los primeros términos de la serie son

$$\langle \mathcal{O}(p)\mathcal{O}(q) \rangle = \delta(p+q) \left(\frac{\Gamma(-\nu+1)}{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)} p^{2\nu} + \frac{l^{4-2\nu}}{2^3(\nu-1)^2(2-\nu)} p^4 + \dots \right). \quad (3.62)$$

El caso ν entero debe ser tratado por separado, ya que la serie de potencias para K_n contiene términos logarítmicos.

En general, las funciones de Bessel no están dadas en términos de funciones elementales. Sin embargo existe un caso particular en el que sí sucede, que es el caso en que ν es un semientero. Tomando $\nu = 3/2$ la expresión que se obtiene para el correlador es

$$\langle \mathcal{O}(p)\mathcal{O}(q) \rangle = \delta(p+q) \left(\frac{p^2 l^2}{l^3} \frac{1}{1+pl} - \frac{p^2 l^2}{l^3} \right) \quad (3.63)$$

$$= \delta(p+q) \left(-p^3 \sum_{m=0}^{\infty} (pl)^m \right). \quad (3.64)$$

Para pasar al espacio de posiciones se calcula la transformada de Fourier inversa del correlador encontrado en (3.61). Por continuación analítica se encuentra el valor de la siguiente integral

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{ipx} p^{2k} = \frac{2^{2k}}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2+k)}{\Gamma(-k)} \frac{1}{x^{d+2k}}, \quad (3.65)$$

de modo que el correlador en el espacio de posiciones toma la siguiente forma

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} l^{(2n-1)\nu+2m+2} \frac{1}{(x-y)^{d+2n\nu+2m+2}} - \frac{p^2 l^2}{l^{2\nu}(2\nu-2)} \right), \quad (3.66)$$

$$\text{donde } b_{mn} = \frac{2^{2n\nu+2m+2}}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2+n\nu+m+1)}{\Gamma(-n\nu-m-1)}.$$

Tomando el límite $l \rightarrow 0$ y pasando al espacio de posiciones se encuentra [9] [10]

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle = \frac{2\nu\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\Gamma(\nu)} \frac{1}{(x-y)^{2\Delta}}, \quad (3.67)$$

que es lo esperado para una teoría conforme como lo es SYM $\mathcal{N} = 4$. Una manera distinta de calcular la función de correlación es haciendo uso del propagador.

Para la acción en el ultravioleta se obtiene

$$\begin{aligned} S_{UV}^{ren} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\left(\frac{2^{1-2\nu}\Gamma(1-\nu)p^{2\nu}}{\Gamma(\nu)} \frac{I_{-\nu}(pl)}{I_{\nu}(pl)} \right) |\alpha_p|^2 \right. \\ &+ \left. \left(\frac{(pl)I_{\nu-1}(pl)}{l^d I_{\nu}(pl)} + \frac{p^2 l^2}{l^d(2\nu-2)} \right) |\tilde{\phi}_l(p)|^2 - \frac{2^{1-\nu} p^{\nu}}{l^{d/2}\Gamma(\nu)I_{\nu}(pl)} \left(\alpha_p^* \tilde{\phi}_l + \phi_l^* \alpha_p \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

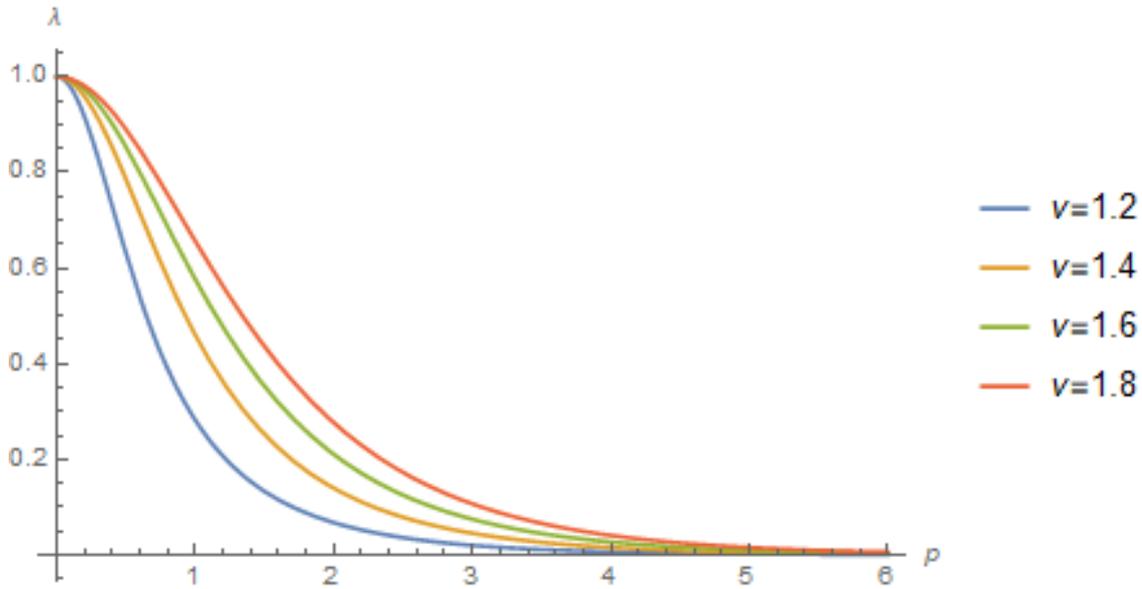


Figura 3.2: Constantes de acoplamiento escalables para operadores de una traza, con valores fijos de $\nu \in (1, 2)$, fijando $\alpha_p = 1$ y $l = 1$.

Comparando con las ecuaciones (3.50) y (3.51), encontramos el valor de las constantes de acoplamiento escalables para operadores de una y doble traza. Para el operador de una traza se obtiene

$$\lambda_p = \frac{2^{1-\nu} p^\nu l^\nu \alpha_p}{\Gamma(\nu) \left[(pl) I_{\nu-1}(pl) - \frac{(pl)^2 I_\nu(pl)}{2-2\nu} \right]}. \quad (3.69)$$

Utilizando las aproximaciones asintóticas de las funciones de Bessel modificadas de primera especie, se puede observar que para un momento $p \rightarrow 0$ $\lambda \rightarrow \alpha_p$, de donde podemos ver su dependencia con la condición a la frontera. El otro extremo es $p \rightarrow \infty$, en este caso $\lambda \rightarrow 0$. λ_p es una función monótona decreciente como se observa en la figura 3.2.

La constante de acoplamiento para el operador de doble traza es

$$h(p) = \frac{l^{2\nu} I_\nu(pl)}{(pl) I_{\nu-1}(pl) - \frac{(pl)^2 I_\nu(pl)}{2-2\nu}}. \quad (3.70)$$

$h(p)$ no tiene dependencia con α_p .

Las expresiones obtenidas para las constantes de acoplamiento de una y doble traza fueron deducidas para operadores con peso conforme $\Delta = d/2 + \nu$, siendo $\nu \in (1, 2)$. Queda claro que las expresiones (3.69) y (3.70) son inválidas si $\nu = 1$, por lo que este caso debe tratarse por separado. Sin embargo si se toma el límite $\nu = 2$ pareciera ser que no existe ningún problema en las expresiones (3.69) y (3.70). En el siguiente capítulo trataremos estos dos casos por separado.

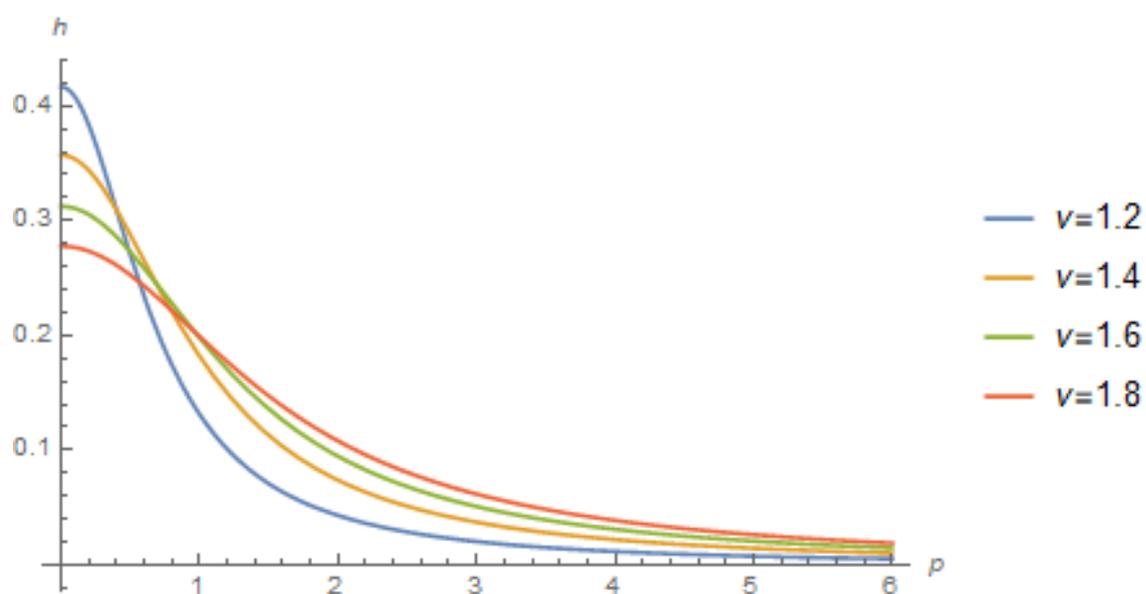


Figura 3.3: Constantes de acoplamiento escalables para operadores de doble traza, con valores fijos de $\nu \in (1, 2)$, fijando $\alpha_p = 1$ y $l = 1$.

Capítulo 4

Caso ν entero

En la ecuación (3.12) se encontró la solución a la ecuación de Klein Gordon en el espacio de momentos en términos de las funciones de Bessel I_ν e $I_{-\nu}$. Esta solución no es válida si $\nu = n \in \mathbb{N}$, ya que en ese caso I_n e I_{-n} son linealmente dependientes. En este caso es conveniente escribir la solución en términos de I_n y K_n

$$\tilde{\phi}(z, p) = az^{d/2}K_n(pz) + bz^{d/2}I_n(pz) \quad (4.1)$$

4.1. Cálculo de $\tilde{\phi}_{UV}$ y $\tilde{\phi}_{IR}$ para condiciones tipo Dirichlet

Impondremos las mismas condiciones de frontera usadas en el capítulo pasado. A fin de que satisfaga la condición de Dirichlet $\tilde{\phi}(\epsilon, p) = \epsilon^{\Delta_-}$. Para la región ultravioleta escribimos la solución como

$$\tilde{\phi}(z, p) = \frac{2\alpha_p}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{2}p\right)^n z^{d/2}K_n(pz) + \beta_p \Gamma(1+n) \left(\frac{1}{2}p\right)^{-n} z^{d/2}I_n(pz), \quad (4.2)$$

donde se hizo uso de que asintóticamente

$$K_n(q\epsilon) = \frac{\Gamma(n)}{2} \left(\frac{q\epsilon}{2}\right)^{-n}.$$

Esta solución debe satisfacer que $\tilde{\phi}(l, p) = \tilde{\phi}_l(p)$, reescribiendo β_p en términos de α_p y $\tilde{\phi}_l$

$$\tilde{\phi}(z, p) = az^{d/2}K_n(pz) + bz^{d/2}I_n(pz), \quad (4.3)$$

donde

$$a = \frac{2\alpha_p}{\Gamma(n)} \left(\frac{p}{2}\right)^n \quad (4.4)$$

$$b = \frac{\tilde{\phi}_l}{l^{d/2}I_n(pl)} - \frac{2\alpha_p}{\Gamma(n)} \left(\frac{p}{2}\right)^n \frac{K_n(pl)}{I_n(pl)}. \quad (4.5)$$

La solución en el infrarrojo continuará siendo

$$\tilde{\phi}(z, p) = \left(\frac{z}{l}\right)^{d/2} \frac{K_n(pz)}{K_n(pl)} \tilde{\phi}_l(p). \quad (4.6)$$

4.2. Cálculo de S_{UV} y S_{IR}

Calculemos la acción ultravioleta desnuda S_{UV}^ϵ dada por

$$S_{UV}^\epsilon = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{z^d} \tilde{\phi}^* z \partial_z \tilde{\phi} \Big|_\epsilon^l \quad (4.7)$$

Usando las relaciones de recurrencia para funciones de Bessel de primera y segunda especie [21], S_{UV}^ϵ lo podemos reescribir como

$$S_{UV}^\epsilon = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{\Delta_-}{z^d} |\tilde{\phi}|^2 + pz (a^* K_n(pz) + b^* I_n(pz)) (-a K_{n-1}(pz) + b I_{n-1}(pz)) \right] \Big|_\epsilon^l. \quad (4.8)$$

4.2.1. $n=1$

Consideremos el caso $n = 1$, para el cual se hace uso de las siguientes aproximaciones asintóticas de las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie

$$\begin{aligned} I_1(p\epsilon) &\approx \frac{p\epsilon}{2} & I_0(p\epsilon) &\approx 1 \\ K_1(p\epsilon) &= \frac{1}{p\epsilon} & K_0(p\epsilon) &= -\log\left(\frac{p\epsilon}{2}\right) - \gamma \end{aligned}$$

donde γ es la constante de Euler cuyo valor numérico aproximado es $\gamma \approx 0.577$. Encontramos que

$$\begin{aligned} S_{UV}^\epsilon &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\left(\frac{K_1(pl)}{I_1(pl)} - \gamma - \log 2 \right) q^2 |\alpha_p|^2 \right. \\ &+ \left(\frac{\Delta_-}{l^d} + \frac{pl I_0(pl)}{l^d I_1(pl)} \right) |\tilde{\phi}_l(p)|^2 - \frac{p}{l^{d/2} I_1(pl)} \left(\alpha_p^* \tilde{\phi}_l + \tilde{\phi}_l^* \alpha_p \right) \\ &\left. - p^2 |\alpha_p|^2 \log p\epsilon - \frac{\Delta_-}{\epsilon^d} |\tilde{\phi}_\epsilon(p)|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Los últimos dos términos de la acción son divergentes, estos términos son los encontrados en (3.41). Renormalizando la acción $S_{UV} = S_{cont} + S_{UV}^\epsilon$ se obtiene

$$\begin{aligned} S_{UV} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\left(\frac{K_1(pl)}{I_1(pl)} - \gamma - \log 2 \right) q^2 |\alpha_p|^2 \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\Delta_-}{l^d} + \frac{pl I_0(pl)}{l^d I_1(pl)} \right) |\tilde{\phi}_l(p)|^2 - \frac{p}{l^{d/2} I_1(pl)} \left(\alpha_p^* \tilde{\phi}_l + \phi_l^* \alpha_p \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

S_{IR} será

$$S_{IR} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[-\frac{\Delta_-}{l^d} + \frac{(pl) K_0(pl)}{l^d K_1(pl)} \right] |\tilde{\phi}_l(p)|^2. \quad (4.11)$$

4.2.2. $n=2$

Repitiendo el procedimiento de la subsección previa se encuentra que la acción en el ultravioleta desnuda para $n = 2$ es

$$\begin{aligned}
S_{UV}^\epsilon &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{4} \frac{K_2(pl)}{I_2(pl)} p^4 |\alpha_p|^2 \right. \\
&+ \left(\frac{\Delta_-}{l^d} + \frac{pl I_1(pl)}{l^d I_2(pl)} \right) |\tilde{\phi}_l(p)|^2 - \frac{p^2}{2l^{d/2} I_2(pl)} \left(\alpha_p^* \tilde{\phi}_l + \tilde{\phi}_l^* \alpha_p \right) \\
&+ \left. \frac{2p^2 |\alpha_p|^2}{\epsilon^2} - \frac{\Delta_-}{\epsilon^d} |\tilde{\phi}_\epsilon(p)|^2 \right]. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Los últimos dos terminos son divergentes, al sumar los contratérminos se obtiene

$$\begin{aligned}
S_{UV}^\epsilon &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{4} \frac{K_2(pl)}{I_2(pl)} p^4 |\alpha_p|^2 \right. \\
&+ \left. \left(\frac{\Delta_-}{l^d} + \frac{pl I_1(pl)}{l^d I_2(pl)} \right) |\tilde{\phi}_l(p)|^2 - \frac{p^2}{2l^{d/2} I_2(pl)} \left(\alpha_p^* \tilde{\phi}_l + \tilde{\phi}_l^* \alpha_p \right) \right]. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

4.3. Esquema de substracción mínima

4.3.1. $n=1$

El contratérmino más simple que satisface que S_{IR} sea finito aún cuando $l \rightarrow 0$ es

$$S_{ct}^l = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{\Delta_-}{l^d} + \frac{p^2 l^2}{l^d} \log pl \right) \tilde{\phi}_l^2. \tag{4.14}$$

La acción en el infrarrojo renormalizada está dada por $S_{IR} + S_{ct}^l$, explícitamente obtenemos

$$S_{IR}^{ren} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{pl K_0(pl)}{l^d K_1(pl)} + \frac{p^2 l^2}{l^d} \log pl \right) \tilde{\phi}_l^2. \tag{4.15}$$

La función de correlación de 2 puntos para la teoría conforme dual es

$$\langle \mathcal{O}(p) \mathcal{O}(q) \rangle = (2\pi)^d \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_l(p) \delta \phi_l(q)} = \delta(p+q) \left(\frac{pl K_0(pl)}{l^2 K_1(pl)} + p^2 \log pl \right). \tag{4.16}$$

Si expandimos la expresión previa en una serie de potencias, se encuentra que aparecen términos logarítmicos. Para la acción en el ultravioleta se obtiene

$$\begin{aligned}
S_{UV}^{ren} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\left(\frac{K_1(pl)}{I_1(pl)} - \gamma - \log 2 \right) |\alpha_p|^2 \right. \\
&+ \left. \left(\frac{(pl) I_0(pl)}{l^d I_1(pl)} - \frac{p^2 l^2}{l^d} \log pl \right) |\tilde{\phi}_l(p)|^2 - \frac{p}{l^{d/2} I_1(pl)} \left(\alpha_p^* \tilde{\phi}_l + \phi_l^* \alpha_p \right) \right]. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

La constante de acoplamiento para el operador de una traza es

$$\lambda_p = \frac{pl\alpha_p}{(pl)I_0(pl) - p^2l^2 \log plI_1(pl)}. \quad (4.18)$$

La constante de acoplamiento para el operador de doble traza es

$$h(p) = \frac{l^2I_1(pl)}{(pl)I_0(pl) - p^2l^2 \log plI_1(pl)}. \quad (4.19)$$

4.3.2. $n=2$

El contratérmino que satisface que S_{IR} sea finito aún cuando $l \rightarrow 0$ es

$$S_{ct}^l = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{\Delta_-}{l^d} - \frac{p^2 l^2}{2l^d} \right) \tilde{\phi}_l^2. \quad (4.20)$$

La acción en el infrarrojo renormalizada es

$$S_{IR}^{ren} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{pl K_1(pl)}{l^d K_2(pl)} - \frac{p^2 l^2}{2l^d} \right) \tilde{\phi}_l^2. \quad (4.21)$$

La función de correlación de 2 puntos para la teoría conforme dual es

$$\langle \mathcal{O}(p)\mathcal{O}(q) \rangle = (2\pi)^d \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_l(p)\delta\phi_l(q)} = \delta(p+q) \left(\frac{pl K_1(pl)}{l^4 K_2(pl)} - \frac{p^2 l^2}{2l^4} \right). \quad (4.22)$$

Para la acción en el ultravioleta se obtiene

$$\begin{aligned} S_{UV}^{ren} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{4} \frac{K_2(pl)}{I_2(pl)} p^4 |\alpha_p|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{plI_1(pl)}{l^d I_2(pl)} + \frac{p^2 l^2}{2l^d} \right) |\tilde{\phi}_l(p)|^2 - \frac{p^2}{2l^{d/2} I_2(pl)} \left(\alpha_p^* \tilde{\phi}_l + \tilde{\phi}_l^* \alpha_p \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

La constante de acoplamiento para el operador de una traza es

$$\lambda_p = \frac{p^2 l^2 \alpha_p}{(pl)I_1(pl) + \frac{p^2 l^2 I_2(pl)}{2}}. \quad (4.24)$$

La constante de acoplamiento para el operador de doble traza es

$$h(p) = \frac{l^2 I_1(pl)}{(pl)I_1(pl) + \frac{p^2 l^2 I_2(pl)}{2}}. \quad (4.25)$$

En las ecuaciones (3.69) y (3.70) se obtuvieron las expresiones para las constante de acoplamiento escalables para operadores de una y doble traza respectivamente. Si en estas

tomamos $\nu = 2$ obtenemos las mismas expresiones que las encontradas en (4.24) y (4.25), sin embargo es importante recalcar que el cálculo que se hizo en el capítulo pasado no estaba contemplado el caso $\nu = 2$.

Inicialmente en la teoría no existían operadores de traza doble. Sin embargo, al fijar una escala de corte l^{-1} aparecieron estos operadores. La aparición de operadores de traza doble nos dice que existe información que se propaga del ultravioleta al infrarrojo y viceversa. Una consecuencia de esto es que la energía no se conserva en $z = l$, y esto no es de sorprendernos, ya que excitaciones físicas en el infrarrojo se pueden propagar al ultravioleta.

Recordemos algunos de los resultados obtenidos en el capítulo uno, a fin de que veamos lo poderosa que puede ser la correspondencia AdS/CFT. En el capítulo 1 se trabajó con la teoría $\lambda\phi^4$, se vio que la función de correlación de dos puntos de esta teoría solo puede ser aproximada de manera perturbativa. Aunque solo se vio el caso de la teoría, $\lambda\phi^4$, en general esto sucede para una teoría de campos interactuante. La constante de acoplamiento escalable para la teoría $\lambda\phi^4$ fue calculada resolviendo la ecuación característica de la ecuación de Callan-Symanzik, con β y γ calculadas a un lazo, por lo que la constante de acoplamiento escalable calculada es solo una aproximación. Sorprendentemente en la teoría gravitacional los contraterminos fueron calculados de manera exacta, como resultado las funciones de correlación y las constantes de acoplamiento escalables de la teoría de campo fueron calculadas de manera exacta.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se abordó el problema de calcular las funciones de correlación y las constantes de acoplamiento escalables para una teoría cuántica de campos. Lo sorprendente es que se calcularon haciendo uso de su dual gravitacional.

Para ello se vieron algunos de los conceptos más importantes de la teoría cuántica de campos. Se comenzó viendo el campo escalar más sencillo invariante de Lorentz, el campo de Klein Gordon y su cuantización. Se estudió el caso interactuante, y como este caso daba lugar a los diagramas Feynman. Se vió que algunos de estos diagramas conducen a cantidades divergentes, algo que no tiene cabida en una teoría física, por ello se estudió el proceso de renormalización, el cual nos permite eliminar los términos divergentes de la teoría. Un resultado de este hecho es que las constantes de acoplamiento de la teoría dependen de la energía. Estos resultados se pueden obtener resolviendo la ecuación característica de la ecuación de Callan Symanzik.

Es importante recalcar que para una teoría cuántica de campos interactuante, los cálculos por lo regular deben de efectuarse de manera perturbativa. Sin embargo si la constante de acoplamiento es muy intensa los métodos perturbativos no son válidos.

En el capítulo dos se estudió la correspondencia norma-gravedad, que es una relación entre una teoría de Yang-Mills (norma) con una teoría de cuerdas (gravedad). Un caso muy particular de esta correspondencia es que una teoría de cuerdas tipo *IIB* en $AdS \times S_5$ es igual a una teoría *SYM* $\mathcal{N} = 4$. Al ser equivalentes estas teorías, las funciones de partición deben ser iguales, y debe existir una relación entre los parámetros de ambas teorías. Un resultado increíble de este hecho es que las funciones de correlación de una teoría cuántica de campos pueden ser calculadas como derivadas funcionales de la integral de trayectoria de una teoría de cuerdas, que en límite de bajas energías es una teoría de gravedad clásica.

En el capítulo tres se calculó la solución al campo de Klein-Gordon en un espacio AdS. Se encontró que la solución en el espacio de momentos está dada por funciones de Bessel modificadas multiplicadas por un factor $z^{d/2}$. Se vió que en lado gravitacional, la coordenada radial z está relacionada con la energía, por lo que debe existir una relación entre la evolución de z y el flujo de renormalización Wilsoniano del lado de la teoría de campo. Se tomó el postulado propuesto por Heemskerck y Polchinski, donde separan la integral de trayectoria en la parte infrarroja Ψ_{IR} y ultravioleta Ψ_{UV} , uno de los resultados es que Ψ_{IR} es el generador de las funciones de correlación, y Ψ_{UV} está relacionado con las constante de acoplamiento de operadores de una y doble traza. Al calcular las funciones de correlación se encontró que estas contienen términos divergentes, y no es de extrañarnos ya que esta teoría gravitacional es el dual de una teoría cuántica de campos, en la cual vimos que aparecen términos divergentes. Para eliminar estos términos se sumaron contratérminos que eliminaran estas divergencias. Se introdujeron Ψ_{IR}^{ren} y Ψ_{UV}^{ren} , que son la parte infrarroja

y ultravioleta renormalizadas de la integral de trayectoria, de modo que usando el postulado propuesto por Heemskerck y Polchinski se consideró a Ψ_{IR}^{ren} como el generador de las funciones de correlación renormalizadas, es decir sin términos divergentes; y haciendo uso de Ψ_{UV}^{ren} se encontraron las constantes de acoplamiento escalables renormalizadas para operadores de una y doble traza. La interpretación física de la aparición de operadores de doble traza, es que existe propagación de energía del infrarrojo al ultravioleta. Los cálculos realizados en este capítulo correspondieron a operadores con dimensión conforme $d/2 + \nu$ con $\nu \in (1, 2)$.

En el capítulo cuatro se calcularon las constantes de acoplamiento escalables para operadores de una y doble traza con dimensión conforme $d/2 + 1$ y $d/2 + 2$. Se utilizaron todos los resultados mencionados en el capítulo tres. Este caso tuvo que hacer por separado debido a que las funciones de Bessel modificadas de primera especie de orden n y $-n$ son linealmente dependientes; se tuvo que escribir la solución en términos de funciones de Bessel de primera y segunda especie. En el caso $\nu = 1$ se encontró que en las constantes de acoplamiento para operadores de una y doble traza aparecen términos logarítmicos en el denominador.

Como se vió a lo largo de este trabajo, en una teoría cuántica de campos interactuante, los contratérminos son calculados de modo perturbativo, como consecuencia las funciones de correlación y las constantes de acoplamiento escalables están dadas de forma perturbativa. Increíblemente, del lado gravitacional, encontramos los contratérminos de manera exacta, y como resultado las funciones de correlación y las constantes de acoplamiento escalables de la teoría de campo dual fueron calculadas en el régimen de acoplamiento fuerte de manera no perturbativa. Esto nos hace ver a la correspondencia AdS/CFT como una poderosa herramienta para hacer cálculos en teorías de campo fuertemente acopladas utilizando una teoría de gravedad clásica.

Aunque en este trabajo nos enfocamos únicamente en el problema de la renormalización usando la correspondencia AdS/CFT, la correspondencia ha sido y puede ser utilizada para obtener información de muchos otros tipos de teorías de campo fuertemente acopladas.

Apéndice A

Espacios de curvatura constante

En este apéndice se analizan tres espacios de curvatura constante, se analiza como reescribir la métrica de cada uno de estos, de modo que sean claras las simetrías que poseen estos espacios. Uno de ellos es el espacio AdS que es de especial interés.

La esfera. La esfera unitaria S^{p+1} posee invarianza ante $SO(p+2)$ y está definida por

$$d\Omega_{p+2}^2 = \sum_{i=1}^{p+2} d\omega_i^2 \quad (\text{A.1})$$

$$\sum_{i=1}^{p+2} \omega_i^2 = 1 \quad (\text{A.2})$$

Usando coordenadas hiperesféricas

$$\begin{aligned} \omega_1 &= r \cos(\phi_1) \\ \omega_2 &= r \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ \omega_3 &= r \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \cos(\phi_3) \\ &\vdots \\ \omega_{n-1} &= r \sin(\phi_1) \cdots \sin(\phi_{n-2}) \cos(\phi_{n-1}) \\ \omega_n &= r \sin(\phi_1) \cdots \sin(\phi_{n-2}) \sin(\phi_{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

la métrica se puede reescribir como

$$d\Omega_{p+2}^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\Omega_{p+1}. \quad (\text{A.4})$$

El espacio-tiempo dS_{p+1}

El espacio de Sitter posee invarianza ante $SO(1, p+1)$. Está definido como un espacio con métrica Lorentziana y con curvatura constante positiva.

$$ds_{p+2}^2 = -(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^p (dX^i)^2 + (dX^{p+1})^2 \quad (\text{A.5})$$

$$-(X^0)^2 + \sum_{i=1}^p (X^i)^2 + (X^{p+1})^2 = +L^2. \quad (\text{A.6})$$

Utilizando las coordenadas de la esfera unitaria S^p del siguiente modo

$$\begin{aligned} X_0 &= L \sinh t \\ X_i &= L \cosh t \omega_i, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

podemos escribir la métrica como

$$\frac{ds^2}{L^2} = -dt^2 + \cosh^2 t d\Omega_p^2. \quad (\text{A.8})$$

El espacio-tiempo AdS_{p+1}

El espacio Anti-de Sitter tiene invarianza ante $SO(2, p)$ está definido por

$$ds_{p+2}^2 = -(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^p (dX^i)^2 - (dX^{p+1})^2 = \bar{\eta}_{MN} dX^M dX^N \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\eta}_{MN} X^M X^N = -(X^0)^2 + \sum_{i=1}^p (X^i)^2 - (X^{p+1})^2 = -L^2, \quad (\text{A.10})$$

donde $\bar{\eta} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1, -1)$.

El espacio AdS posee simetría conforme. Para X^M grande el hiperboloide dado por la ecuación A.10 se aproxima al cono de luz en $\mathbb{R}^{p,2}$.

$$\bar{\eta}_{MN} X^M X^N = -(X^0)^2 + \sum_{i=1}^p (X^i)^2 - (X^{p+1})^2 = 0 \quad (\text{A.11})$$

al conjunto de puntos que satisfacen la ecuación A.11 se le conoce como la frontera conforme de AdS_{p+1} denotada por ∂AdS_{p+1} . Otra parametrización del hiperboloide de la ecuación A.10 es

$$X^0 = \frac{L^2}{2r} \left(1 + \frac{r^2}{L^4} (\mathbf{x}^2 - (x^0)^2 + L^2) \right), \quad (\text{A.12})$$

$$X^i = \frac{rx^i}{L} \quad i = 1, \dots, d-1 \quad (\text{A.13})$$

$$X^p = \frac{L^2}{2r} \left(1 + \frac{r^2}{L^4} (\mathbf{x}^2 - (x^0)^2 - L^2) \right) \quad (\text{A.14})$$

$$X^{p+1} = \frac{rx^0}{L} \quad (\text{A.15})$$

poniéndole la restricción de $r > 0$, cubrimos solo la mitad del espacio AdS_{p+1} . La métrica del espacio con esta parametrización es

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} (-(dx^0)^2 + d\mathbf{x}^2) = \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.16})$$

donde $\mu = 0, \dots, p$. Al calcular el escalar de Ricci encontramos que $R = \frac{-d(d+1)}{L^2}$, lo cual confirma que la curvatura es constante y negativa.

Apéndice B

Teoría de Grupos

Un conjunto $\{G : a_1, \dots, a_n\}$ se dice que forma un grupo si existe una operación \cdot , llamada multiplicación la cual asocia cualquier par de elementos $a_i, a_j \in G$ tal que se satisfacen las siguientes condiciones

- I) $a_i \cdot a_j = a_k \in G$;
- II) La operación es asociativa $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
- III) De todos los elementos de G , existe un elemento e el cual tiene la propiedad $a \cdot e = e \cdot a = a$, para todo $a \in G$;
- IV) Para todo $a \in G$ existe un elemento a^{-1} con la propiedad $a \cdot a^{-1} = e$

Nos estaremos centrando en los denominados Grupos de Lie, que son grupos continuos y una variedad diferenciable a la vez

Ejemplos de grupo de Lie son el grupo ortogonal $O(n)$, que es el grupo de transformaciones que deja invariante la métrica euclidiana en n dimensiones. Un subgrupo de $O(n)$ es $SO(n)$, conocido como el grupo especial ortogonal, que es el grupo de matrices ortogonales con determinante igual a uno. El grupo unitario $U(N)$ está compuesto de matrices unitarias complejas de dimensión $N \times N$, que satisfacen $M^\dagger M = \mathbb{1}$. Un subgrupo de $U(N)$ es el grupo especial unitario $SU(N)$, que adicionalmente satisface $\det M = 1$.

Si existe un homeomorfismo de un grupo G a un grupo de operadores $U(G)$ en un espacio vectorial V , decimos que $U(G)$ es una representación de G . Se dice que una representación es fiel si el homeomorfismo es también un isomorfismo. Es decir

$$g \in G \rightarrow U(g) \in V, \quad (\text{B.1})$$

donde $U(g)$ satisface

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2), \quad (\text{B.2})$$

es decir, la representación satisface las mismas reglas de multiplicación que el grupo original.

B.1. Grupos de Lorentz, Poincaré y Conforme

La longitud de un intervalo espacio-tiempo de Minkowski está dada por

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^d (dx^i)^2 \equiv dx^\mu \eta_{\mu\nu} dx^\nu. \quad (\text{B.3})$$

Por definición $\eta_{\mu\nu}$ es una matriz diagonal, la cual en su primer coordenada tiene valor de -1 y para las restantes $d - 1$ coordenadas tiene el valor 1.

Consideremos transformaciones Λ , tal que $x \rightarrow x'$, dejen ds^2 invariante

$$x'^{\mu}\eta_{\mu\nu}x'^{\nu} = x^{\rho}\eta_{\rho\sigma}x^{\sigma} \quad (\text{B.4})$$

El conjunto de transformaciones que satisface la ecuación B.4 se le conoce como transformaciones de Lorentz Λ . Al tomar $x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu}x^{\nu}$ y considerar que debe satisfacer la ecuación B.4, encontramos que las matrices Λ deben satisfacer la siguiente relación

$$x'^{\mu}\eta_{\mu\nu}x'^{\nu} = (\Lambda_{\rho}^{\mu}x^{\rho})\eta_{\mu\nu}(\Lambda_{\sigma}^{\nu}x^{\sigma}) = x^{\rho}\eta_{\rho\sigma}x^{\sigma} \quad (\text{B.5})$$

$$\Lambda_{\rho}^{\mu}\eta_{\mu\nu}\Lambda_{\sigma}^{\nu} = \eta_{\rho\sigma}. \quad (\text{B.6})$$

Ejemplos de transformaciones de Lorentz son rotaciones en las direcciones espaciales, y empujones en las direcciones espaciales. Las transformaciones de Lorentz forman un grupo, el grupo de Lorentz denotado por $SO(d - 1, 1)$.

Al tomar el determinante de la ecuación B.6 encontramos que $\det \Lambda = \pm 1$. Las transformaciones con $\det = -1$ pueden ser escritas como el producto de una transformación con $\det = 1$ y una transformación discreta como la inversión de un número par de coordenadas. Consideremos las transformaciones de Lorentz cuyo determinante sea +1, a estas se les conoce como transformaciones de Lorentz propias. Escribiendo de manera explícita la componente 00 de la ecuación (B.6)

$$-1 = -(\Lambda_0^0)^2 + \sum_{i=1}^d (\Lambda_0^i)^2. \quad (\text{B.7})$$

Esta ecuación nos asegura que $(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$, por lo cual se tienen 2 opciones. Si se escoge $\Lambda_0^0 \leq -1$, se obtienen las llamadas transformaciones no ortócronas que corresponden a transformaciones discretas relacionadas con la inversión de alguna de las componentes

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \rightarrow (-x_0, -x_1, -x_2, -x_3) \text{ o } (-x_0, -x_1, x_2, x_3).$$

Centrémonos en el caso de transformaciones de Lorentz que satisfacen $\det \Lambda = 1$ y $\Lambda_0^0 \geq 1$, a estas se les conoce como transformaciones propias y ortócronas, estas corresponden a transformaciones continuas como lo son las rotaciones y empujones.

Consideremos una transformación de Lorentz infinitesimal, utilizando que está cercana a la identidad, la transformación se puede escribir como

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}, \quad (\text{B.8})$$

ω_{ν}^{μ} es el parámetro infinitesimal, sustituyendo esta ecuación en la ecuación (B.6), y despreciando los términos de orden cuadrático

$$\eta_{\mu\nu} (\delta_{\rho}^{\mu} + \omega_{\rho}^{\mu}) (\delta_{\sigma}^{\nu} + \omega_{\sigma}^{\nu}) = \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} = \eta_{\rho\sigma},$$

$$\omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Esto nos lleva a que ω es una matriz antisimétrica, originalmente ω era una matriz con d^2 parámetros por determinar, sin embargo debido a que es una matriz antisimétrica nos reduce el cálculo a $d(d-1)/2$ parámetros independientes.

Se puede escribir una transformación de Lorentz infinitesimal en términos de los generadores del grupo de Lorentz $J^{\mu\nu}$ como:

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(J^{\rho\sigma})_\nu^\mu. \quad (\text{B.10})$$

A $J^{\mu\nu}$ se le conoce como el generador del grupo de Lorentz, es apropiado este nombre ya que a partir de este generador podemos reconstruir las matrices de empujones y rotaciones, esto se hace del siguiente modo.

$$\Lambda(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{N} \left(\frac{-i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right) \right]^N = e^{-i\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} / 2} \quad (\text{B.11})$$

Los generadores del grupo de Lorentz se pueden escribir de manera explícita como

$$(J^{\mu\nu})_\sigma^\rho = i(\eta^{\mu\rho}\delta_\sigma^\nu - \eta^{\nu\sigma}\delta_\sigma^\mu). \quad (\text{B.12})$$

Utilizando esta expresión para los generadores podemos calcular el conmutador de manera explícita. A esto se le conoce como álgebra de Lie de Lorentz, o $so(d, 1)$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}). \quad (\text{B.13})$$

Las matrices $J^{\mu\nu}$ forman una representación del álgebra de Lorentz.

Cuando consideramos transformaciones de Lorentz y traslaciones por un vector constante, estas forman en conjunto un grupo: el grupo de Poincaré $ISO(d-1, 1)$, formado por pares (Λ, a) que actúan sobre un vector como

$$x \rightarrow x' = \Lambda x + a \quad (\text{B.14})$$

La multiplicación de dos elementos del grupo de Poincaré está dada por

$$(\Lambda_1, a_1) \cdot (\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, a_1 + \Lambda_1 a_2) \quad (\text{B.15})$$

El álgebra de Lorentz puede ser extendida al álgebra de Poincaré. Además de los generadores $J^{\mu\nu}$ de las transformaciones de Lorentz, tenemos generadores infinitesimales de traslaciones P^μ . Los generadores P^ρ y $J^{\mu\nu}$ satisfacen las relaciones de conmutación de la ecuación B.13 y adicionalmente satisfacen

$$[J^{\mu\nu}, P^\rho] = i(\eta^{\mu\rho} P^\nu - \eta^{\nu\rho} P^\mu), \quad [P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (\text{B.16})$$

El grupo de Poincaré se puede extender al grupo conforme. Este grupo consiste de transformaciones que preservan ángulos. Las transformaciones conformes pueden ser vistas como aquellas transformaciones que dejan invariante a la métrica $g_{\mu\nu}$ salvo un factor de escala positivo, es decir

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x)^{-2} g_{\mu\nu}(x) \equiv e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{B.17})$$

Por lo cual las transformaciones conformes cambian la longitud infinitesimal por $ds'^2 = e^{2\sigma(x)} ds^2$. Estas transformaciones dejan los ángulos invariantes localmente y preservan la estructura causal.

Para una transformación infinitesimal $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$, la métrica en un espacio plano transforma como

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu. \quad (\text{B.18})$$

Utilizando la ecuación B.17, aproximando esta en serie de Taylor a primer orden, la transformación infinitesimal conforme satisface

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = 2\sigma(x)\eta_{\mu\nu}. \quad (\text{B.19})$$

Contrayendo los índices de ambos lados utilizando $\eta^{\mu\nu}$, obtenemos $\partial_\mu \epsilon^\mu = 2\sigma(x) \cdot d$. Para $d > 2$, $\epsilon(x)$ es a lo más de orden cuadrático en x , teniendo como solución más general

$$\epsilon^\mu(x) = a^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu + \lambda x^\mu + b^\mu x^2 - 2(b \cdot x)x^\mu \quad (\text{B.20})$$

donde $\sigma(x) = \lambda - 2b \cdot x$, a^μ corresponde a translaciones espacio-temporales, $\omega_\nu^\mu x^\nu$ a transformaciones de Lorentz, λx^μ a dilataciones y $b^\mu x^2 - 2(b \cdot x)x^\mu$ corresponde a una transformación especial conforme, los generadores del grupo son P^μ , $J^{\mu\nu}$, D y K^μ respectivamente. El álgebra conforme está dada por las relaciones de conmutación del algebra del grupo de Poincaré (B.16) más

$$\begin{aligned} [J^{\mu\nu}, K^\rho] &= i(\eta^{\mu\rho} K^\nu - \eta^{\nu\rho} K^\mu) & [D, P^\mu] &= iP^\mu & [D, K^\mu] &= -iK^\mu \\ [K^\mu, P^\nu] &= -2i(\eta^{\mu\nu} D - J^{\mu\nu}) & [D, J^{\mu\nu}] &= 0 & [K^{\mu\nu}, K^\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Bibliografía

- [1] AHARONY, O., GUBSER, S. S., MALDACENA, J. M., OOGURI, H., AND OZ, Y. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.* 323 (2000), 183–386.
- [2] ARFKEN, G., WEBER, H., AND HARRIS, F. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. YBP Print DDA. Elsevier, 2012.
- [3] BALASUBRAMANIAN, V., GUICA, M., AND LAWRENCE, A. Holographic Interpretations of the Renormalization Group. *JHEP* 01 (2013), 115.
- [4] BECKER, K., BECKER, M., AND SCHWARZ, J. H. *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge University Press, 2006.
- [5] BIANCHI, M., FREEDMAN, D. Z., AND SKENDERIS, K. Holographic renormalization. *Nucl. Phys. B*631 (2002), 159–194.
- [6] DE BOER, J. The Holographic renormalization group. *Fortsch. Phys.* 49 (2001), 339–358.
- [7] DE BOER, J., VERLINDE, E. P., AND VERLINDE, H. L. On the holographic renormalization group. *JHEP* 08 (2000), 003.
- [8] FAULKNER, T., LIU, H., AND RANGAMANI, M. Integrating out geometry: Holographic Wilsonian RG and the membrane paradigm. *JHEP* 08 (2011), 051.
- [9] FREEDMAN, D. Z., MATHUR, S. D., MATUSIS, A., AND RASTELLI, L. Correlation functions in the CFT(d) / AdS(d+1) correspondence. *Nucl. Phys. B*546 (1999), 96–118.
- [10] FREEDMAN, D. Z., AND VAN PROEYEN, A. *Supergravity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2012.
- [11] GREEN, M. B., SCHWARZ, J. H., AND WITTEN, E. *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. 1988.
- [12] HEEMSKERK, I., AND POLCHINSKI, J. Holographic and Wilsonian Renormalization Groups. *JHEP* 06 (2011), 031.
- [13] HOROWITZ, G. T., AND STROMINGER, A. Black strings and P-branes. *Nucl. Phys. B*360 (1991), 197–209.
- [14] JOHNSON, C. V. *D-branes*. 2003.
- [15] MALDACENA, J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999), 1113–1133. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].

- [16] PESKIN, M. E., AND SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [17] POLCHINSKI, J. Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges. *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995), 4724–4727.
- [18] SKENDERIS, K. Lecture notes on holographic renormalization. *Class. Quant. Grav.* 19 (2002), 5849–5876.
- [19] SUSSKIND, L., AND WITTEN, E. The Holographic bound in anti-de Sitter space.
- [20] 'T HOOFT, G. A Planar Diagram Theory for Strong Interactions. *Nucl. Phys. B*72 (1974), 461.
- [21] WATSON, G. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1995.
- [22] WEINBERG, S. *The Quantum Theory of Fields*. No. v. 2-3 in Quantum theory of fields. Cambridge University Press, 2000.
- [23] WITTEN, E. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), 253–291.