



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA
INSTITUTO DE GEOFÍSICA

METODOLOGIA PARA CALCULAR LAS PROPIEDADES DE
TRANSPORTE EN UN EXPERIMETO DE TUBO DE COMBUSTIÓN
IN-SITU

PARA OPTAR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:

PATRICIA GUTIÉRREZ LÓPEZ

TUTOR Dr. **JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES**
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM
MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dr. LUIS MIGUEL DE LA CRUZ SALAS
INSTITUTO DE GEOFÍSICA, UNAM
Dr. ERIC MORALES CASIQUE.
INSTITUTO DE GEOLOGÍA, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO DE 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esta tesis la dedico a

Dios *por todos los regalos que me ha dado en mi vida*

A mis padres a quienes les agradezco la vida, su mucho amor y tiempo

Virginia López M., *gracias por ser un ejemplo en mi vida, por tu mucho amor y por apoyarme en mis sueños, por enseñarme el valor de la honestidad, el trabajo. Por escucharme y darme los mejores consejos en mis momentos difíciles. La admiro mucho por toda su gran fortaleza, inteligencia, trabajo y tenacidad. Te amo mamá*

Feliciano Gutiérrez C., *por ser un padre alegre, por darme sus consejos con cariño cuando se los he pedido, por enseñarme a ser humilde, paciente, por enseñarme a defender y darle el valor a las cosas y a las personas, por apoyarme en mis sueños. Te amo Papá*

también a mis hermanos a quienes tanto quiero, gracias por su mucho amor y motivación, César y Rosa

A mis cuñados gracias por su cariño, Dulce y Eduardo

y a mis sobrinos que siempre me regalan su alegría y amor: Montserrat, Ximena y Ramses

A esta maravillosa Universidad, profesores y sinodales por haberme enseñado y formado. Gracias

Muy especilmemente y con mucho cariño a J. Adrián Reyes C. por todo su apoyo incondicional, confianza, paciencia, tiempo, amistad y cariño, muchas gracias por todo

Agradecimiento

Agradezco a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico por el apoyo económico brindado para realizar esta tesis a través del proyecto IN101316.

Índice general

1. Objetivo	8
1.1. Introducción	9
1.2. Antecedentes	11
2. Combustión in-situ en medios porosos	13
2.1. Tipos de recuperación del petróleo, de acuerdo al mecanismo de producción .	13
2.1.1. Recuperación primaria	14
2.1.2. Recuperación secundaria	14
2.1.3. Recuperación terciaria o también conocida como recuperación mejorada (enhanced Oil Recovery, EOR)	14
2.2. Combustión in-situ	15
2.3. Conceptos básicos	16
2.3.1. Porosidad efectiva	16
2.3.2. Porosidad absoluta	17
2.3.3. Saturación	17
2.3.4. Permeabilidad absoluta	18
2.3.5. Permeabilidad efectiva.	19
2.3.6. Permeabilidad relativa	19
2.3.7. Mojabilidad	20
2.3.8. Presión capilar	20
2.3.9. Viscosidad	21
2.4. Zonas que caracterizan a un proceso de combustión in-situ y su descripción experimental	21
2.4.1. Combustión seca	22
2.5. Pruebas en un tubo de combustión in-situ (SIC)	25
2.6. Procedimiento experimental en tubos de combustión in-situ	26

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	5
3. Planteamiento del Modelo Analítico	32
3.1. Deducción de la ecuación de calor	32
3.2. Ecuación que gobierna la energía del sistema	35
3.2.1. Condiciones iniciales, de frontera	39
3.3. Método de la función de Green	39
4. Solución Analítica del Modelo	41
4.1. Solución estacionaria	43
4.2. Frente de Calor (transitorio lento)	46
4.2.1. Medio con fronteras muy lejanas	46
4.2.2. Medio acotado por una frontera plana	51
4.2.3. Región acotada por dos planos	52
4.3. Parte transitoria rápida	54
4.4. Perfil de temperaturas completo	56
5. Análisis General	60
5.1. Método numérico	60
5.2. Formalismo de ajuste analítico	63
5.3. Ajuste de las curvas.	68
5.4. Discusión de los resultados	74
6. Conclusiones	77
A. Conservación de la masa	80
A.1. Ecuaciones para la conservación de la masa de los fluidos	80
B. Balance de masa en un tubo de combustión	85
B.1. Determinación del valor de las saturaciones.	87
C. Aproximación de envolvente lenta para la temperatura	91

Índice de figuras

2.3.1.Comunicación entre poros en un medio poroso.	17
2.3.2.Representa una superficie solida en la que se han colocado pequeñas gotas de mercurio, aceite y agua. A medida que el ángulo de contacto disminuye, las características humectantes del líquido aumentan [28].	20
2.4.1.Esquema del perfil de saturación para el proceso de combustión in-situ. Cortesía del centro UNITAR Mehta y Moore, 1996.	22
2.4.2.Zonas representativas que resultan del transporte de calor, masa y reacciones químicas que ocurren en el proceso de combustión in-situ [16].	23
2.5.1.Tubo de combustión tomado de la literatura [9, 6].	27
2.6.1.Dispositivo experimental	29
2.6.2.Perfil de temperatura del primer experimento (E-1), gráficas tomadas del trabajo de [10].	30
2.6.3.Perfil de temperatura del primer experimento (E-2), gráficas tomadas del trabajo de [10].	31
4.2.1.Se muestra esquemáticamente las regiones en que se divide el sistema para calcular la función de Green.Las líneas gruesas verticales son los bordes del sistema y la línea delgada la posición del frente de calor.	53
5.1.1.Perfil de temperaturas $T(^{\circ}C)$ como función de posición $x(\text{cm})$ y tiempo $t(\text{hr})$, calculado numéricamente por diferencias finitas	62
5.1.2.Perfiles de temperaturas en diez distintas posiciones como función del tiempo correspondientes a curvas de nivel de la Fig 5.1.1	63
5.2.1.Perfiles de temperatura ($^{\circ}C$) como función del tiempo (hr) obtenidos a partir de la solución analítica dada por la ec. (4.4.7)	66
5.3.1.Ajuste de modelo analítico completo con datos experimentales tomados de la referencia [10] para los tres termopares más altos	69

5.3.2.Lo mismo que para la Figuras 5.3.1 pero para los tres termopares de posiciones intermedias 69

5.3.3.Lo mismo que para la figuras 5.3.1 pero para los tres termopares de posiciones más bajas 70

5.3.4.Errores relativos en las curvas de las figuras 5.3.1 correspondientes a los tres primeros termopares 70

5.3.5.Lo mismo que en la figura 5.3.4 pero para los termopares en las posiciones de medición intermedias 71

5.3.6.Lo mismo que en la figura 5.3.4 pero para las termopares en las posiciones de medición más bajas 73

5.3.7.Perfiles de temperatura ($^{\circ}C$) como función del tiempo (hr) ajustados suponiendo la aproximación $\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}L \gg 1$ 73

5.3.8.Ajuste de modelo analítico bajo la aproximación $\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}L \gg 1$ con datos experimentales tomados de la referencia [10] para los tres termopares más altos . . 74

5.3.9.Lo mismo que en la figura 5.3.7 pero para los tres termopares intermedios. . 75

5.3.10.Lo mismo que en la figura 5.3.7 pero para los tres termopares de posiciones más bajas. 75

C.0.1Esquema de una función constante por intervalos 92

C.0.2Integral de la función del Figura anterior comparada con la integral del valor efectivo 93

C.0.3Perfiles de temperaturas efectivo y realIntegral de la función del Figura anterior comparada con la integral del valor efectivo 94

Capítulo 1

Objetivo

En procesos de recuperación mejorada en yacimientos petroleros existen distintos mecanismos de recuperación ya sea por inyección de gases, agua, polímeros, agentes químicos, térmicos, etc. En este trabajo estamos interesados en el proceso de recuperación térmico, el cual antes de llevarlo a campo se realizan experimentos en tubos de combustión in-situ. En nuestro caso no realizamos los experimentos en tubos de combustión in-situ, sin embargo utilizamos los resultados reportados de la literatura Cazares-Candia [10].

La finalidad de esta tesis es llevar a cabo un análisis mediante el cual podemos determinar las propiedades efectivas del medio velocidad de onda de convección, constante de pérdida de calor, flujo de calor en las fronteras, difusión y advección térmica, ancho del perfil de temperatura gaussiano, flujo de calor, punto de ignición, etc, que caracterizan al medio que llena al tubo de combustión mediante un ajuste los datos experimentales para el perfil de temperatura mencionado. Para lograr nuestro objetivo se plantea realizar dos estudios, uno de ellos es resolver un modelo analítico de la ecuación de difusión advección que describe el sistema de interés a través de un tubo de combustión in-situ en una dimensión con condiciones iniciales y de frontera dadas; el otro caso es un modelo numérico. Se realiza una comparación de los perfiles de temperatura obtenidos del modelo experimental con el modelo numérico para obtener una estimación burda del valor numérico de los parámetros, después se realiza el mismo procedimiento comparativo con la solución analítica y los datos experimentales y mediante un ajuste de mínimos cuadrados se observa una mayor aproximación a los valores reales (se encuentra el valor para el cual la varianza es mínima).

Para poder resolver la ecuación de transferencia de calor es necesario considerar las características fundamentales que han sido observadas en experimentos realizados con tubos de combustión, tales como: condiciones iniciales y de frontera, temperatura inicial, temperatura del ignición, tiempo en que tardan en desplazarse el perfil de temperatura, longitud del

tubo de combustión, velocidad del frente, porosidad, saturación. Se calculara analíticamente el perfil de temperaturas estacionario soportado por las condiciones de frontera de flujo a través de los bordes del tubo, en seguida se calcularan dos perfiles transitorios caracterizados por tiempos de respuesta distintos a saber minutos y horas. Así también calculamos numéricamente una solución simple del mismo proceso de conducción de calor utilizado diferencias finitas y mostraremos que los resultados son consistentes tanto con la descripción analítica como con datos experimentales.

1.1. Introducción

Para extraer el crudo en un yacimiento existen dos métodos; el primero es conocido como primario y consiste en aprovechar la presión natural del yacimiento para que el crudo se eleve sobre la superficie, con este método se puede extraer aproximadamente el 60% del volumen total del yacimiento[30] [32]; el segundo proceso de extracción es conocido como recuperación mejorada y ocurre cuando la presión en el yacimiento ya no es suficiente para subir el crudo a la superficie, entonces se aplican diferentes métodos para aumentar la presión, ya sea inyectando agua o gas. Existen diferentes procesos para llevar a cabo la recuperación mejorada, pero en este trabajo sólo nos interesa estudiar el proceso de combustión in-situ.

El transporte reactivo en medios porosos es importante para una variedad de procesos, que cubre desde las escalas pequeñas como los procesos de reacción-difusión en catálisis hasta procesos de gran escala como los problemas de transporte en yacimientos ecológicos; un ejemplo de estos es la combustión in-situ (SIC), también conocida como flujo de fuego [1]. Debido a la disminución de los aceites ligeros y las dificultades encontradas en la producción de aceite pesado, SIC y la inyección de aire a alta presión (HPAI) se consideran como formas efectivas de mejorar la recuperación de crudo. En estos el oxígeno del gas inyectado reacciona con las componentes más pesadas del crudo, generando una zona caliente en la cual cracking y vaporización de las componentes más ligeras ocurre.

La inyección de aire tiene la ventaja de estar disponible en cualquier lugar [3]; sin embargo el costo de inyección es elevado [4]. La combustión de aceite es generalmente no solo considerada como una técnica que es aplicable para aceites pesados debido a la reducción evidente de la viscosidad causada por el calor producido, sino que además promueve la producción a través de expansión térmica, destilación y gas dirigido por la combustión de gases. El proceso de inyección de aire se le conoce como inyección de aire a alta presión cuando se aplica a yacimientos profundos de aceite ligero mientras que el término combustión in-situ se ha utilizado tradicionalmente para yacimientos de aceites pesados.

El mecanismo responsable efectivamente del desplazamiento del crudo en SIC varía con el tipo de aceite. Para aceites ligeros, la evaporación y condensación son tan importantes como las reacciones de oxidación [5]. En contraste, para aceites pesados, la combustión de aceites ligeros ocurre normalmente a temperaturas más bajas porque el aceite solamente se oxida parcialmente. Cuando hay poca evaporación y localmente todo el aceite ligero se oxida, relativamente altas temperaturas pueden todavía darse, las difusiones térmica y de masa tanto como las fuerzas capilares producen procesos difusivos y son importantes cuando cambios extremos ocurren en las variables dependientes del frente de onda.

La combustión in-situ (SIC) es básicamente un proceso de recuperación de petróleo de inyección de aire o de gas rico en oxígeno, dentro del pozo de extracción. A diferencia de un proceso de inyección de gas convencional, en un proceso SIC se usa el calor para crear un frente de combustión que permita aumentar la temperatura del combustible, y como consecuencia disminuir su viscosidad, facilitando su extracción. Entonces el petróleo se lleva rumbo al productor por un empuje de gas vigoroso y un empuje de agua.

Los tubos de combustión son una herramienta muy útil en el laboratorio para la investigación de los procesos de combustión in-situ. Una prueba bien diseñada y ejecutada, puede proporcionarnos información muy valiosa acerca de las características de combustión del sistema de prueba roca-petróleo.

Akkutlu y Yortsos [7] formularon un modelo matemático para un flujo unidimensional con reacciones químicas que resultan de la inyección de aire en medios porosos, inicialmente con gas, agua y aceite volátil. El objetivo de este trabajo fue investigar el efecto del agua y vapor en la recuperación mejorada de petróleo, así como cuando se incrementa la presión por medio de inyección de aire. Mostraron que cuando el punto de ebullición del aceite volátil se encuentra por debajo o ligeramente por arriba del punto de ebullición del agua, el vapor caliente se mueve hacia la parte de enfrente de la onda de calor del medio (en donde el petróleo se evapora y la combustión ocurre, mientras que el aceite volatilizado y el vapor se condensan en el mismo lugar; lo cual permite el mejoramiento de la recuperación de petróleo por este método. Notablemente, las curvas de recuperación dependen débilmente de las saturaciones de agua y aceites ligeros, si el punto de ebullición del aceite es mucho más alto que el del agua, la región de vapor se mueve hacia la parte posterior del frente de onda. En dicho caso los efectos del agua en la recuperación se debilitan y llegan a ser negativos por saturaciones grandes de agua.

En esta tesis no realizamos experimentos en tubos de combustión in-situ sin embargo en la literatura se encuentran experimentos en los cuales reportan que el aceite es directamente

quemado en pequeñas porciones, para lo cual se usa el término combustión de aceite a temperatura media. El modelo de dos fases considera la vaporización, condensación y reacción con el oxígeno. En ausencia de difusión térmica, molecular y capilar, las ecuaciones relevantes de transporte pueden ser resueltas analíticamente. La solución se divide en tres casos, es decir una onda térmica, una onda de oxidación de temperatura media (MTO) y una onda de saturación, las cuales están separadas por regiones de estado de separación.

El análisis de datos obtenidos a partir de experimentos realizados en tubos de combustión bajo condiciones de yacimientos reales, actualmente es el método más aceptado para investigar el proceso de combustión in-situ.

En esta tesis en lugar de resolver las ecuaciones acopladas de flujo de fluido y energía, se desarrolló un modelo analítico y numérico relativamente simple basado en el balance energético usando datos de experimentos que nosotros no realizamos, pero que han sido reportados en la literatura Cazares-Candia et al [10], en dicho artículo se realizaron experimentos con tubos de combustión, en el cual utilizaron las propiedades básicas de yacimientos y fluido.

El modelo analítico y numérico que se plantea en la presente tesis es con la finalidad de poder determinar las propiedades del medio (velocidad de onda de convección, constante de pérdida de calor, flujo de calor en las fronteras, difusión y advección térmica, ancho del perfil de temperatura gaussiano, flujo de calor, punto de ignición, etc.) bajo los cuales se desarrolló el experimento. Se utilizara una rutina numérica únicamente para obtener una primera aproximación al valor de los parámetros, después se resolverá la ecuación analítica se graficará su solución para obtener los perfiles de temperatura, los cuales se ajustan para compararlos con los perfiles que se generaron de manera experimental y cuando se realiza el ajuste se van obteniendo los parámetros que corresponden a valores numéricos que no se reporta en el artículo en el cual se basa esta tesis para obtener los parámetros que concuerdan hasta cierto punto que discutiremos, con los valores experimentales.

1.2. Antecedentes

Existen artículos reportados en la literatura cuyo estudio se centra en la simulación de la combustión in-situ en tubos de combustión. Por ejemplo Gottfried [8], propuso un modelo matemático en el cual tratan el frente de combustión como una discontinuidad en un punto que implica una fuente de calor, haciendo que el modelo sea aplicable a una variedad de procesos de recuperación térmica. Sin embargo, no investiga lo que sucede con la estructura de la zona de combustión. Otros autores usaron el modelo de simulación detallada en experimentos de laboratorio con tubos de combustión. Akkutlu y Yortsos [7], proponen un modelo

analítico en el cual describen el comportamiento de frentes de combustión, hacen algunas suposiciones como: el frente de combustión es plano, se mueve con una velocidad constante y con la misma dirección de la inyección de aire. Penberthy y Ramey [9], desarrollaron un modelo analítico de movimiento de un frente de combustión a lo largo del eje de un tubo de combustión con la pérdida de calor a través de un aislamiento anular. Existen otros modelos matemáticos, sin embargo, en cualquiera de ellos los autores toman en cuenta las pérdidas de calor al principio y al final del tubo, considerando fronteras aisladas. Un artículo publicado Cazaes-Candia et al [10], realizó una prueba usando un tubo de combustión con la finalidad de estudiar el efecto de las fronteras finitas no aislantes, y desarrolló un modelo numérico para predecir el perfil de temperatura.

Capítulo 2

Combustión in-situ en medios porosos

En este capítulo se definirán los tipos de recuperación que existen y algunos conceptos básicos para la recuperación mejorada en especial para el proceso llamado combustión in-situ en un medio poroso, cuya aplicación es en el campo de la industria petrolera, la finalidad de su estudio es incrementar la producción de un pozo cuando su presión natural ya no es suficiente para que el combustible salga por su propia cuenta [32, 28, 16].

2.1. Tipos de recuperación del petróleo, de acuerdo al mecanismo de producción

Los métodos de recuperación mejorada en México aún se encuentra en proyectos que se llevan a cabo, obteniendo algunos con buenos resultados y otros no. El complejo Cantarell que es el mayor campo petrolero en México, en junio de 2009 cumplió 30 años de vida productiva, debido al colapso que ha sufrido sobre su producción, se decidió aplicar un método de recuperación, se aplicó inyección de nitrógeno con la finalidad de cambiar su presión y poder extraer el crudo restante.

La producción petrolera en México se encuentra en declinación, ha caído dos terceras partes de la reservas originales, la madurez de estas reservas obliga a centrar la discusión en torno al ritmo de disminución de la producción y a la manera de administrar este proceso. Solo una oleada de grandes descubrimientos o la implantación de procesos de recuperación mejorada en los yacimientos maduros, permitirá revertir esta tendencia.

2.1.1. Recuperación primaria

La producción inicial de los hidrocarburos aprovecha el gradiente de presión entre el pozo y el yacimiento existente para la extracción del crudo. El petróleo y el gas son desplazados hacia los pozos productores bajo producción primaria mediante:

- a) Expansión del fluido.
- b) Desplazamiento del fluido.
- c) Drenaje gravitacional.
- d) Expulsión capilar.

Cuando no existe ni acuífero ni inyección de fluidos, la recuperación de hidrocarburos se debe principalmente a la expansión del fluido.

2.1.2. Recuperación secundaria

Existe un proceso de recuperación del crudo en el cual la presión que existe en el pozo ya no es suficiente para empujar al fluido hacia el exterior del yacimiento, entonces puede emplearse gas natural o inyección de agua y su principal propósito es mantener la presión del yacimiento. Cuando el agua procede de un acuífero o es inyectada en los pozos, el recobro es acompañado de un mecanismo de desplazamiento, el cual puede ser ayudado por drenaje gravitacional o expulsión capilar. Para el caso de uso de gas, este se inyecta como fluido de desplazamiento para ayudar a la recuperación del crudo.

2.1.3. Recuperación terciaria o también conocida como recuperación mejorada (enhanced Oil Recovery, EOR)

Este método fue desarrollado para cuando los procesos de recuperación secundaria resultan poco efectivos.

Consiste en proporcionar energía al yacimiento ya sea añadiendo calor al yacimiento (vapor, agua caliente) o inyectando: solventes, inyección de hidrocarburos, inyección de dióxido de carbono, oxígeno, gel, polímeros; con la finalidad de proveer la energía necesaria para extraer el crudo. El mejor método a utilizar en un yacimiento dependerá de las propiedades del yacimiento como son: porosidad, permeabilidad, saturación del petróleo residual, agua, temperatura, presión, profundidad y propiedades del fluido del yacimiento como la viscosidad, gravedad API (medida de densidad, siglas en inglés American Petroleum Institute).

A diferencia del proceso de recuperación secundario este proceso considera cambios en las propiedades de la roca (como la mojabilidad) o del fluido (como la viscosidad o la tensión interfacial). Sin embargo, el mismo proceso se considera para casos donde la recuperación

primario no se utilizó por bajo potencial de recuperación. En algunos yacimientos es ventajoso iniciar un proceso de recuperación secundario o terciario antes de terminar la producción primaria. La EOR puede utilizarse en cualquier momento o etapa productiva del yacimiento [32, 16, 30].

2.2. Combustión in-situ

La aplicación del proceso de combustión in-situ, requiere de dos evaluaciones:

1. Un estudio teórico sobre el efecto de los parámetros más importantes (saturación, porosidad, permeabilidad, etc), esta evaluación se obtiene realizando simulaciones y modelos matemáticos.

2. Desarrollo experimental. Se logra realizando experimentos en tubos de combustión, con las características que se describirán en la sección 2.6. La finalidad es obtener información adicional que después será utilizada en campo tal como: temperatura del frente de combustión, temperatura de ignición, velocidad del frente de combustión, ancho del frente de combustión.

La combustión in-situ, se define como un proceso de recuperación de petróleo que emplea calor para ayudar a las recuperación del aceite, este calor es generado a partir de un proceso de combustión en el interior del tubo, se logra quemando una porción de aceite. La combustión se logra inyectando aire o un gas rico en oxígeno dentro de la formación, el aceite es llevado al final del tubo por medio de empuje de gas vigoroso (gases de combustión) y un empuje de agua (agua de combustión y formada por re-condensación).

El porcentaje de recuperación de aceite en una prueba hecha en el tubo de combustión, va a depender de la energía y el modo de proporcionar esa energía para formar el frente de combustión, de lo contrario puede ser que no se propague completamente a lo largo del tubo y no disminuya la viscosidad debido a una baja temperatura en el interior del tubo de combustión, y esto afecte directamente al porcentaje de recuperación.

Otro aspecto importante a tomar en cuenta es que el frente de combustión necesita un medio para poder transmitir eficientemente la energía generada por las reacciones en las diferentes etapas del proceso, este medio es el agua contenida en la mezcla antes de iniciar el experimento y después la producida por la combustión.

A continuación enumeramos algunas ventajas de usar el método de combustión in-situ

1. Térmicamente es el proceso de recuperación mas eficiente.
2. Usa aire el fluido más ampliamente disponible y menos caro, como material a inyectar.

3. Aún cuando en la mayoría de proyectos de SIC son implementados en yacimientos de petróleo pesado, también puede ser usado para yacimientos de petróleo ligero profundo.
4. La eficiencia de recuperación es mejor que otros procesos de recuperación de petróleo.
5. El proceso puede ser implementado como continuación de procesos de inundación de agua y/o vapor.
6. El proceso puede ser aplicado en yacimientos donde la inundación de agua y/o de vapor no ha tenido éxito.

La SIC es un proceso de recuperación único. Puede ser visto como un proceso de combinación. Abarca algunos aspectos de casi cada método de recuperación del petróleo conocido. Después de la inundación con agua, la SIC es quizás la técnica mejorada de recuperación de petróleo más ampliamente utilizada [16, 32, 28, 13].

2.3. Conceptos básicos

A continuación definiremos algunas de las propiedades importantes para caracterizar a un medio poroso.

2.3.1. Porosidad efectiva

La porosidad efectiva es el porcentaje de espacio poroso intercomunicado con respecto al volumen total de la roca. Por lo que se le considera un indicador de conductividad de fluidos. Las operaciones de recuperación son basadas en la determinación de su valor. Se define Matemáticamente como:

$$\text{porosidad efectiva} = \Phi(x, t) = \frac{\text{volumen poros internonectados}}{\text{volumen total roca}} \quad (2.3.1)$$

$$\Phi = \frac{V_P}{V_T}$$

Ocurre únicamente cuando cada poro está conectado por canales estrechos a otros poros, formando todo el conjunto de aberturas completamente interconectadas que forman los canales a través de los cuales pueden fluir los fluidos contenidos (ver la figura 2.3.1). La porosidad es un fenómeno que puede observarse en un yacimiento, en una muestra, o en un empacamiento de partículas de los que se usan en los laboratorios para pruebas de desplazamiento de fluidos [29, 2, 13]. La porosidad efectiva es una función de muchos factores litológicos, los más importantes son: tamaño de grano, empaque de los granos, cimentación,



Figura 2.3.1: Comunicación entre poros en un medio poroso.

clases de arcillas y estados de hidratación de la misma, heterogeneidad de tamaño de grano [27, 28, 15].

2.3.2. Porosidad absoluta

Se define como el porcentaje de espacio poroso total, con respecto al volumen total de la roca, sin tener en cuenta si los poros están interconectados entre si o no. Puede ocurrir que una roca tenga una porosidad absoluta y no cuente con conductividad de fluidos, debido a que no exista intercomunicación entre poros (por ejemplo la lava). Matemáticamente se expresa como:

$$\Phi = \frac{\text{volumen total} - \text{volumen de los granos}}{\text{volumen total de roca}} = \frac{V_T - V_G}{V_T} \quad (2.3.2)$$

$$\Phi = \frac{V_{pai}}{V_T}$$

en donde V_{pa} toma en cuenta tanto los poros aislados como los interconectados entre sí. La porosidad es un parámetro estático, no tiene relación con el movimiento de los fluidos, por lo que se define localmente como un promedio sobre la base de un volumen en un elemento representativo del medio poroso en estudio [29, 27, 28, 15].

2.3.3. Saturación

La saturación es una medida de la capacidad de almacenamiento en un yacimiento. Para estimar la cantidad de hidrocarburos presentes en un medio poroso, es necesario determinar la fracción de volumen poroso ocupado por cada uno de los fluidos presentes, a esta fracción es lo que se le llama saturación de un fluido. Matemáticamente la saturación S de un fluido

f (aceite, agua, gas) en un medio poroso, se define como el volumen del fluido V_f medido a la presión y temperatura a que se encuentra el medio poroso, entre el volumen poroso V_p .

$$S_f = \frac{\text{volumen del fluido}}{\text{volumen poroso}} = \frac{V_f}{V_p} \quad (2.3.3)$$

donde S_f es la saturación del fluido y f puede representar aceite, agua o gas. La saturación suele considerarse en forma puntual $S_f(x, y, z, t)$ y expresarse en porcentaje. Por definición, la suma de las saturaciones es 100 %, entonces $S_o + S_w + S_g = 1$ [13, 15].

2.3.4. Permeabilidad absoluta

La permeabilidad de la roca reservorio es una propiedad del medio poroso que cuantifica la capacidad de un material para permitir el paso de un fluido a través de un sistema de poros interconectados. Se puede definir a la permeabilidad absoluta como la capacidad que tiene la roca para conducir fluidos través de los poros interconectados. El concepto de permeabilidad es muy importante en la determinación de las características de flujo de los hidrocarburos en los yacimientos petróleo y gas, así como de aguas subterráneas en los acuíferos. La permeabilidad absoluta ocurre cuando la saturación (en una sola fase) del medio consiste de 100 % del fluido en movimiento.

La ecuación que determina la permeabilidad se conoce como *ley de Darcy*, la cual dice lo siguiente: "para un flujo lineal la velocidad de un fluido homogéneo en un medio poroso es proporcional a la fuerza de empuje (gradiente de presión en la dirección del flujo), e inversamente proporcional a la viscosidad". Darcy requiere que el fluido se adhiera a los poros de la roca, sea homogéneo, laminar, incompresible en un sistema lineal ocurra [15]. La ley de Darcy se expresa matemáticamente de la siguiente manera.

$$\kappa = \frac{\text{tasa de flujo}}{\text{gradiente de presión}} = -k \left(\frac{\frac{\text{Caudal}}{\text{Área}}}{\nabla \text{presión}} \right) = -\frac{q_x \mu_x L}{A \Delta P} = \quad (2.3.4)$$

La unidad de medida de la permeabilidad es darcy y milidarcy.

Donde

κ permeabilidad del medio

A sección transversal

L Longitud en dirección del flujo

ΔP gradiente de presión

q tasa o volumen de flujo hacia abajo

μ_x viscosidad del fluido

El signo negativo toma en cuenta que los fluidos se mueven desde el potencial más alto al más bajo. La permeabilidad es un tensor ya que depende de la dirección del flujo de fluidos, sin embargo para efectos prácticos se toma como un escalar [27, 28, 29].

2.3.5. Permeabilidad efectiva.

A diferencia de la permeabilidad absoluta que solo depende de las propiedades de la roca, la permeabilidad efectiva es una propiedad de la roca y los fluidos presentes en ella (esto es: agua, petróleo, gas o algún otro fluido).

Se define como una medida de la conductancia del medio poroso hacia un fluido cuando esta saturado por más de uno, es decir cuando la saturación es menor que el 100 %.

$$\kappa_x = -\frac{q_x \mu_x L}{A \Delta p} \quad (2.3.5)$$

κ_x Representa la permeabilidad para cada fase.

κ_w Permeabilidad relativa del agua

κ_o Permeabilidad relativa del aceite

κ_g Permeabilidad relativa del gas

Se mide la permeabilidad para cada uno de los fluidos, sin embargo la suma de las permeabilidades efectivas de múltiples fases siempre es menor o igual a la permeabilidad absoluta. Las permeabilidades efectivas se miden normalmente en el laboratorio en pequeñas muestras de núcleos y usualmente los datos son reportados como permeabilidades relativas

La permeabilidad dependiente de la saturación que es una medida que no es constante [27, 28, 29].

2.3.6. Permeabilidad relativa

Se define como la relación entre la permeabilidad efectiva y la permeabilidad absoluta. Existe K efectiva y relativa para los fluidos que generalmente se encuentran en los yacimientos como son: petróleo, gas y agua.

Se expresa matemáticamente como:

$$\kappa_{fx} = \frac{\text{permeabilidad relativa de fase}}{\text{permeabilidad absoluta}} \quad (2.3.6)$$

κ_{fx} Representa la relación entre la permeabilidad efectiva y absoluta para cada fase.

Existe una cierta correlación entre la permeabilidad y la porosidad relativa, considerando que si no existen poros interconectados en la roca esta sería impermeable [27, 28, 13].

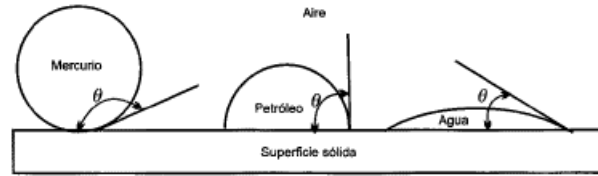


Figura 2.3.2: Representa una superficie solida en la que se han colocado pequeñas gotas de mercurio, aceite y agua. A medida que el ángulo de contacto disminuye, las características humectantes del líquido aumentan [28].

2.3.7. Mojabilidad

La mojabilidad o humectabilidad se refiere a la tendencia que tiene un fluido a adherirse o extenderse a una superficie sólida (ver la figura 2.3.2). En los yacimientos de petróleo, la roca es la superficie solida y los fluidos son el agua, petróleo y gas.

Es una propiedad importante en los yacimientos debido a que afecta el comportamiento capilar y de desplazamiento de los fluidos en las rocas del yacimiento. El grado de mojabilidad esta relacionado de la siguiente forma: la mojabilidad del gas es menor que la del aceite y esta a su vez menor que la del agua. La medida de mojabilidad se da cuando dos fluidos inmisible o superficie líquido-sólido están en contacto, el ángulo formado por ellos (medido sobre el agua) se llama ángulo de contacto θ .

1. $\theta = 180^{\circ}$ no existe mojabilidad
2. $\theta < 90^{\circ}$ se dice que el sistema es mojado por agua (ver figura 2.3.2).
3. $\theta > 90^{\circ}$ se dice que el sistema es mojado por aceite (ver figura 2.3.2).

El ángulo de contacto θ se relaciona con las energías de superficie por medio de la siguiente ecuación:

$$A_t = \sigma_{os} - \sigma_{ws} = \sigma_{ow} \cos \theta \quad (2.3.7)$$

donde σ_{os} es la energía interfacial entre el sólido y el petróleo. Sus unidades de medición $\frac{\text{dina}}{\text{cm}}$. Aquí σ_{ws} es la energía interfacial entre el agua y el sólido, A_t tensión de adhesión. La ecuación 2.3.7 representa el balance de fuerzas que actúan de contacto entre la superficie solida y los dos fluidos, da lugar a la tensión de adhesión [28, 28].

2.3.8. Presión capilar

Las fuerzas capilares en un yacimiento, se originan por la acción molecular de los fluidos inmiscibles (petróleo, agua, gas) que coexisten en dicho medio poroso. Estas son las fuerzas que retienen e impiden el vaciado total de fluidos en un yacimiento. En un medio poroso se

define como la capacidad que tiene un medio para absorber el fluido que lo moja y de repeler al no mojante, también se define como la diferencia de presión a través de la interfase entre el fluido de la fase no mojante y mojante

$$P_C = P_{NM} - P_M. \quad (2.3.8)$$

Donde

P_C Presión capilar

P_{NM} Presión no mojante

P_M Presión mojante

Cuando los fluidos están en contacto, las moléculas cercanas a la interfase se atraen desigualmente por sus vecinas. Si la interfase es curvada la presión sobre un lado (cóncavo con respecto al fluido más denso) excede la del otro lado (convexo con respecto al fluido más denso), esa diferencia corresponde a la presión capilar [15, 28, 28, 13].

2.3.9. Viscosidad

El movimiento de los fluidos es el análogo a la fricción en el movimiento de los sólidos, cuando un fluido fluye de modo que no disipa energía por medio de fuerzas viscosas, se dice que el fluido es no viscoso. Se define la viscosidad de un fluido como la una medida de su resistencia a las deformaciones graduales producidas por tensiones cortantes (tangenciales) o de tracción. Matemáticamente se define como la fuerza tangencial necesaria para mover una unidad de área de un plano por unidad de velocidad:

$$\vec{F}_\mu = \mu A \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \quad (2.3.9)$$

donde \vec{F}_μ vector de fuerza viscosa, μ coeficiente de viscosidad dinámica, $\frac{\partial u}{\partial y}$ es la tasa de deformación por cizallamiento o velocidad de cizallamiento local, esto suponiendo que el fluido se mueve a lo largo de líneas paralelas al eje x y y [13, 28].

2.4. Zonas que caracterizan a un proceso de combustión in-situ y su descripción experimental

El proceso de combustión in-situ está basado en la dirección de propagación del frente de combustión en relación con el flujo de aire. Existen dos tipos de combustión.

1. Frontal. El frente de combustión avanza en la dirección general de flujo de aire.

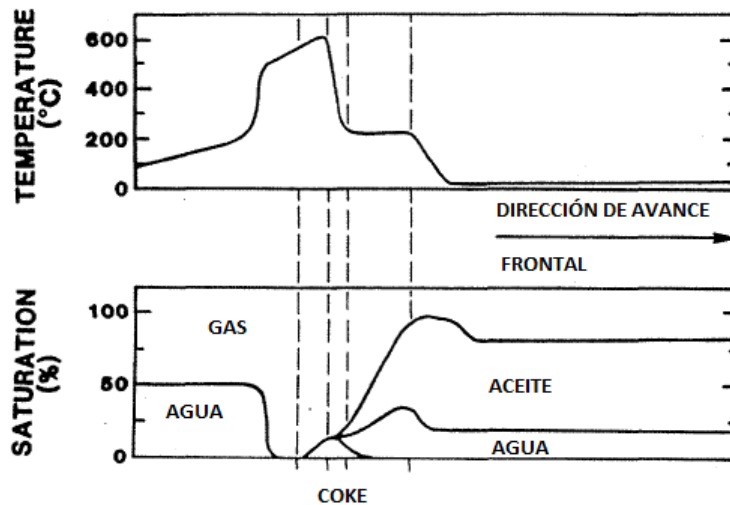


Figura 2.4.1: Esquema del perfil de saturación para el proceso de combustión in-situ. Cortesía del centro UNITAR Mehta y Moore, 1996.

2. Reversa. El frente de combustión se mueve en dirección opuesta al del flujo de aire.

Actualmente solo se practica la combustión frontal en campo [16], por esta razón solo mencionaremos este proceso. Existen dos tipos de combustión frontal.

1. Combustión frontal húmeda. Se le llama así cuando se inyecta aire y agua dentro del yacimiento a través del pozo de inyección. No mencionaremos más sobre este proceso pues estamos interesados en profundizar más sobre el proceso de combustión frontal seca.
2. Combustión frontal seca. Ocurre cuando únicamente se inyecta aire enriquecido con oxígeno en el yacimiento para sostener la combustión.

2.4.1. Combustión seca

En este mecanismo se inyecta aire dentro del pozo de inyección, durante un tiempo relativamente corto (algunos días), entonces el petróleo del yacimiento se enciende. El proceso de ignición es comúnmente generado usando quemadores de gas en el pozo, calentadores eléctricos o a través de inyección de agentes pirofórico (aceite de linaza), o fluidos calientes como el vapor.

Una vez ocurrida la ignición el frente de combustión es sostenido por un flujo de aire continuo. Mientras que el frente de combustión se mueve desde el pozo de inyección. Varias zonas están bien caracterizadas ver la figura 2.4.2, estas se desarrollan en el yacimiento entre el pozo inyector y productor. Dichas zonas son el resultado del transporte de calor, masa y

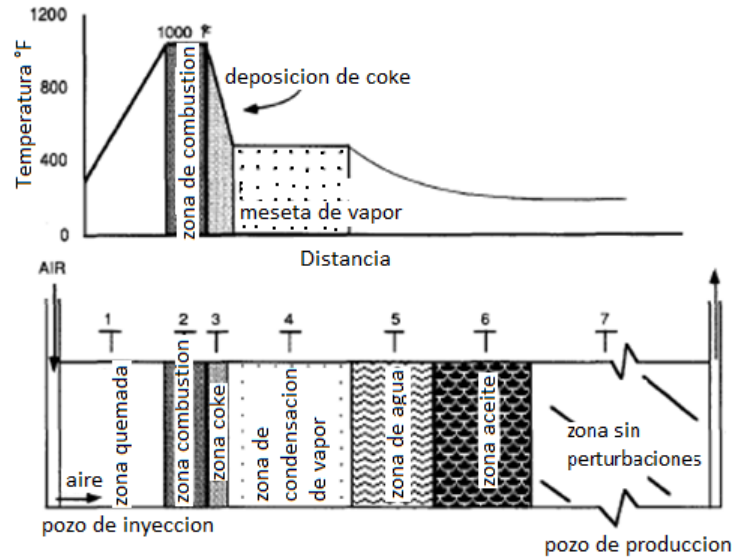


Figura 2.4.2: Zonas representativas que resultan del transporte de calor, masa y reacciones químicas que ocurren en el proceso de combustión in-situ [16].

reacciones químicas que ocurren en este proceso. En la parte inferior se pueden observar las zonas y su localización, en la gráfica superior se muestra la distribución de temperatura y la saturación del fluido desde el pozo inyector hasta el productor, como se puede ver en la figura 2.4.1. Esta representación es idealizada y usualmente se observa en experimentos realizados en tubos de combustión in-situ. En una situación real de campo existen transiciones entre las zonas [16].

1. Zona quemada. Es una región de arena limpia por donde fluye el aire y el proceso de combustión ya ha tomado lugar, en esta banda probablemente puede haber algún sólido orgánico que se conoce como coque. Esta zona tiene la temperatura más alta en un tiempo prolongado, generalmente exhibe alteraciones de minerales. Como consecuencia de tener un flujo continuo de aire ambiental, la temperatura de esta zona se ve incrementada desde la temperatura de formación cerca del pozo inyector, hasta la temperatura de combustión en la vecindad de la zona de combustión, ver la figura 2.4.2.
2. Zona de combustión. En esta zona se encuentra la temperatura más alta, tiene un espesor muy estrecho de apenas algunas pulgadas y es donde ocurre la reacción entre el oxígeno contenido en el aire y el combustible, por lo que ocurre la oxidación de alta temperatura. Aquí se genera la energía necesaria para mantener el frente de combustión. La oxidación a alta temperatura (quemado) produce primordialmente agua

y óxidos de carbono (monóxido de carbono CO y dióxido de carbono CO_2). En esta zona la cantidad de aceite quemado en la combustión es un dato importante por que determina la cantidad de aire que debe ser inyectado para quemar un determinado volumen del medio (ver la figura 2.4.2).

3. Zona de generación de coke. Este combustible se acumula después de la zona de combustión, a causa de la destilación de agua, descomposición química del hidrocarburo a altas temperaturas, craqueo. La alta temperatura generada del proceso de combustión causa que los componentes pesados del aceite formen gases de hidrocarburos y un residuo pesado llamado coke que se acumula en la roca, para el caso de componentes ligeros del aceite se vaporizan y son arrastradas por el flujo de gas y son llevadas hasta la zona de condensación y se mezclan con el crudo original.
4. Zona de condensación. En esta región el mayor porcentaje de aceite se desplaza a la parte final de esta banda y el restante es desplazado experimentando destilación con vapor. Esta zona es usualmente denominada como planicie de vapor, en ella el gradiente de presión es relativamente bajo, su temperatura dentro de esta zona es esencialmente plana entre (300–500°F), con una extensión entre 10 a 30 pies del frente de combustión, en esta región se encuentra vapor, petróleo, agua y gases de escape, debido a que estos fluidos se mueven rumbo al pozo productor. Dependiendo de la temperatura, el petróleo puede también sufrir un “visbreaking” (cambio de viscosidad) reduciendo la viscosidad del aceite, haciendo que fluya con mayor facilidad a través del medio poroso.
5. Zona de agua. Esta región tiene una temperatura más baja que la zona de condensación, la saturación del agua es más alta que la saturación original, esta zona se caracteriza por que empuja un banco de aceite y lo desplaza.
6. Zona de aceite. Esta banda contiene todo el petróleo que ha sido desplazado desde zonas anteriores, además los componentes ligeros del aceite que resultan del craqueo térmico de las zonas anteriores.
7. Zona no perturbada. Se trata de la última región, la cual aún no es afectada por el proceso de combustión, excepto que podría haber un pequeño incremento en la saturación del gas debido al flujo de gases de combustión.

2.5. Pruebas en un tubo de combustión in-situ (SIC)

La recuperación del crudo por frente de combustión es un fenómeno que requiere de una evaluación experimental y teórica sobre algunos parámetros que son necesarios para poder generar el fenómeno de combustión, por esta razón se realizan modelos experimentales para representar hasta cierta medida en un protocolo controlado en un laboratorio. El modelo más utilizado es conocido como tubo de combustión in-situ, el cual no representa una reproducción completamente apegada a la situación real de los pozos petroleros, sin embargo provee de algunos elementos indicativos para valorar y predecir al menos de una forma cualitativa el comportamiento de la situación real en campo [10]. De esta forma, un tubo de combustión consiste de un cilindro de acero inoxidable colocado verticalmente, se llena con una mezcla de arena, agua y aceite que fueron extraídos de los pozos petroleros, el tubo se calienta a cierta temperatura para hacer fluir el aceite que se enciende parcialmente para conducirse hasta su salida a través del frente de combustión. A continuación se describirán algunas de las características y procedimientos importantes que se utilizan en el diseño y funcionamiento en los tubos de combustión In- Situ [16, 10, 8, 9]. El procedimiento experimental en el tubo de combustión consiste de los siguientes pasos:

1. Primeramente se determina la cantidad de arena, arcilla, agua y aceite que deben mezclarse, con objetivo de lograr una porosidad equivalente a la deseada. Posteriormente se mezcla en un recipiente arena, arcilla y agua hasta que la mezcla sea homogénea y uniforme, entonces se añade el aceite y se repite el proceso hasta lograr la homogeneidad.
2. Después de que el tubo es colocado y asegurado en la posición vertical, se añade poco a poco la mezcla en el interior del cilindro, mientras se va llenando se utiliza un émbolo de metal pesado para comprimir la muestra, se continua con este procedimiento hasta que el tubo es llenado. Se deja un espacio en el extremo superior del cilindro para agrega un poco aceite de linaza para acelerar la ignición, el tubo de combustión fue llenado dejando un espacio para colocar arena limpia, con la finalidad de que al inyectar el aire el flujo llegue de manera homogénea a la mezcla, entonces el tubo se sella, ver la figura 2.5.1.
3. Se realiza pruebas de presión en el tubo para detectar fugas. Se coloca la resistencia eléctrica afuera del tubo a la altura de donde fue depositado el aceite de linaza, para proporcionar la energía suficiente para aumentar la temperatura T_0 del sistema, hasta

- el punto de ignición.
4. El tubo se cubre con una cinta de calentamiento que va a mantener a una temperatura inicial constante T_0 de todo el tubo.
 5. Se coloca una cinta de asbesto de tal forma que envuelva al sistema con la finalidad de evitar lo menos posible la disipación del calor hacia los alrededores.
 6. Se activa la cinta de calentamiento, entonces mientras la cinta de calentamiento lleva al sistema a la temperatura T_0 requerida, por el extremo superior del tubo se inyecta a razón constante un gas inerte, en este caso nitrógeno. Lo cual ayuda a mantener al sistema a una presión constante P_0 , además ayuda a que la muestra sea más homogénea y permite la formación de pequeños canales por donde puede desplazarse más fácilmente el combustible y de esta manera mejorar su recuperación.
 7. Una vez alcanzada la temperatura T_0 , se enciende la resistencia que por medio de una corriente eléctrica comienza gradualmente a aumentar la temperatura y una vez lograda T_c , el aceite se oxida o enciende debido a la presencia de oxígeno, se deja de inyectar nitrógeno y se inyecta aire a un flujo másico constante, la combustión ocurre y el gradiente de temperatura aumenta abruptamente.
 8. Una vez que la combustión se ha obtenido y se ha formado apropiadamente un frente de combustión robusto, un sensor de temperatura y un interruptor se encargarán de encenderse o apagarse tratando de mantener la temperatura del frente de combustión. Después de alcanzar la ignición el frente de combustión se mueve desde la parte superior a la inferior del tubo. Finalmente a intervalos iguales de tiempo se toman muestras de aceite, agua y gases obtenidos debido a la combustión del hidrocarburo.
 9. Los termopares están colocados equidistante-mente en el tubo, estos se encargan de recolectar los datos de temperatura. Cuando el frente de combustión llega al final del tubo el experimento concluye y se continúa con el análisis de datos obtenidos. Ver la figura 2.5.1.

2.6. Procedimiento experimental en tubos de combustión in-situ

Existen en la literatura distintos tubos de combustión con diferentes características y modos de operación, sin embargo en este trabajo se tomó como referencia el experimento



Figura 2.5.1: Tubo de combustión tomado de la literatura [9, 6].

y datos reportados en el trabajo de Cazares [10]. Si se quiere planear una prueba piloto es necesario entender los experimentos realizados en tubos de combustión y sus resultados ya que serán utilizados en campo.

Fue utilizado aceite de 27 API (American Petroleum Institute). Se define como $^{\circ}\text{API} = 41.5/\gamma_0 - 131.5$, donde γ_0 es la gravedad específica del petróleo (adimensional), y se denota como API o $^{\circ}\text{API}$. En el artículo se llevaron a cabo dos experimentos en un tubo de combustión de acero inoxidable, con las siguientes características físicas, ver la tabla 1:

Tabla 1. Datos correspondientes al tubo de combustión.

Diámetro externo (m)	Grosor interno (m)	Longitud (m)
0.079375	0.015875	0.9906

El tubo contiene aproximadamente 0.94996m de una mezcla de arena, agua, aceite; los valores de saturación, porosidad, entre otros parámetros que son mostrados en la tabla 2.

Tabla 2. Datos correspondientes a la mezcla.

Experimento	Saturación del aceite	Saturación del agua	Porosidad
1	0.325	0.23	0.41
2	0.383	0.275	0.41

Se colocó una banda aislante a lo largo del tubo, los extremos inferior y superior del cilindro no se aislaron para poder analizar el efecto que causa sobre los perfiles de temperatura. El aceite empleado tiene una energía de activación de $1.56 \times 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg-mol}}$ y 27 API. El espacio entre la muestra y la parte superior del tubo está cubierto por arena limpia. Un encendedor eléctrico se coloca en la parte externa y superior del tubo, la resistencia se conecta a una corriente eléctrica para aumentar gradualmente la temperatura del cilindro de combustión, hasta sobrepasar los 241°C , después se realiza la inyección de aire a $3.166 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

Las temperaturas cuando la ignición se produjo en el interior del tubo de combustión eran 427°C para el experimento 1 (ver la figura 2.6.2) y 462°C para el experimento 2 (ver la figura 2.6.3), ver los datos mostrados en la tabla 3, entonces el frente de combustión se va desplazando provocando un empuje de gases y líquidos de combustión desde la parte

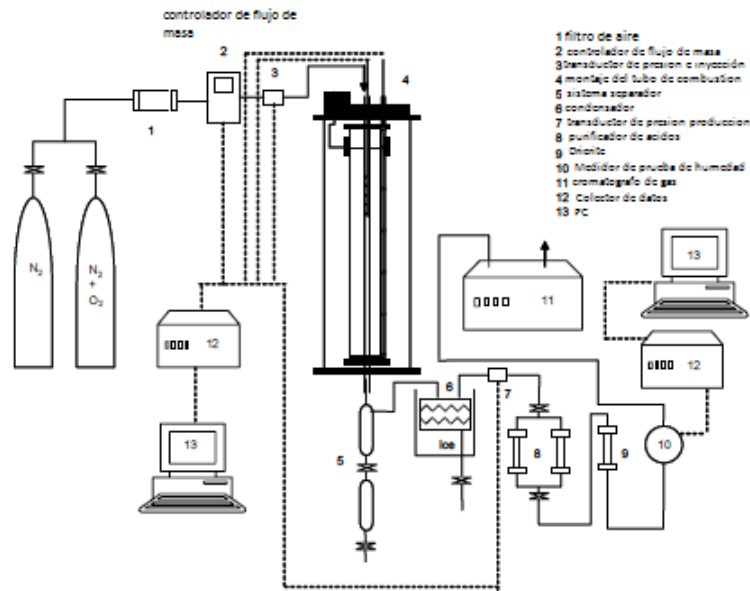


Figura 2.6.1: Dispositivo experimental

superior del tubo hacia la parte inferior. Se dice que se terminó el experimento cuando los fluidos salen por la parte inferior del cilindro y el paquete de arena ya ha sido quemada totalmente.

En la figura 2.6.2 se muestra el perfil de temperatura E-1, que tiene el frente de combustión con una anchura de aproximadamente de 0.05 m, es debido a que el encendedor eléctrico debe ser apagado 30 minutos después de se produjo la ignición. La producción de aceite y el agua se hizo cada 15 min., y el calor salió en el extremo inferior del tubo de combustión, de tal manera que se afectó la temperatura en el fondo del tubo de combustión incluso cuando se colocó un limite aislado.

Tabla 3

	Experimento 1	experimento 2
Temp. ignición (°C)	241	similar
Temp. frente combustión(°C)	427	462
Temp. del frente de combustión después de 2 h (°C)	324	2.55 h, la tem 355
velocidad del frente de combustión ($\frac{m}{s}$)	2.65×10^{-5}	3.41×10^{-5}
Ancho del frente de combustión (m)	0.05	espesor delgada
Presión en la frontera durante el experimento	$4.13 \times 10^5 Pa$	$4.13 \times 10^5 Pa$

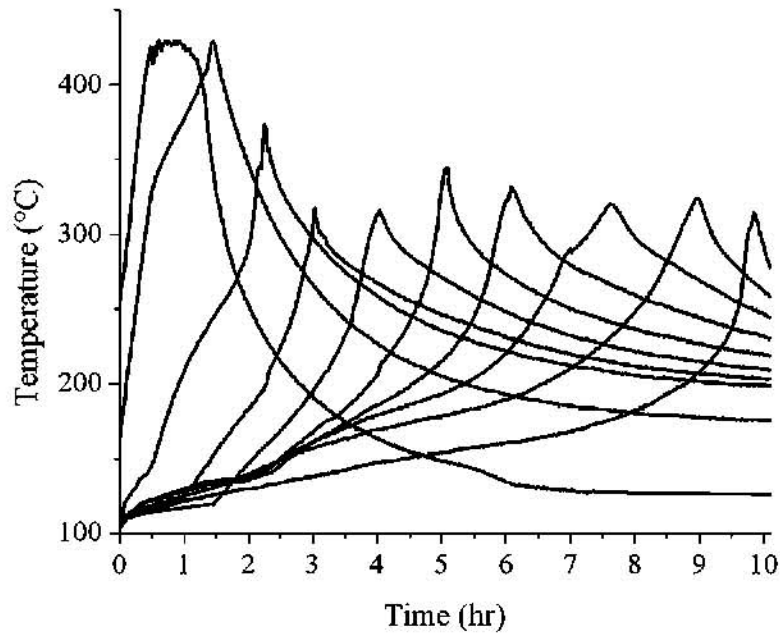


Figura 2.6.2: Perfil de temperatura del primer experimento (E-1), gráficas tomadas del trabajo de [10].

La recuperación de petróleo para el experimento E-1 fue de 84% y para E-2 de 73%. El menor porcentaje de recuperación de aceite en E-2, es debido a una mayor saturación de agua y aceite utilizada, por consiguiente la saturación de gas en E-2 es menor que en E-1.

A partir de lo anterior en el presente trabajo se elige trabajar únicamente con los perfiles de temperatura del E-1.

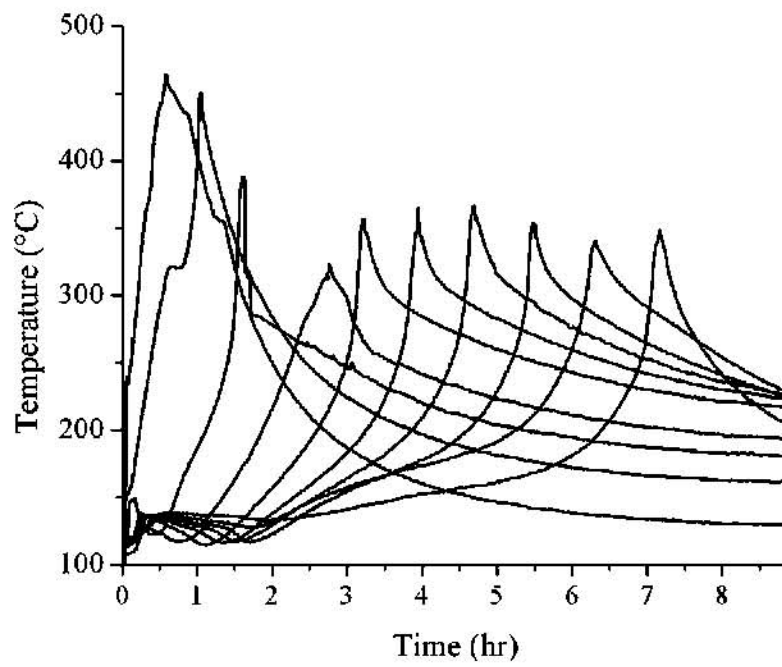


Figura 2.6.3: Perfil de temperatura del primer experimento (E-2), gráficas tomadas del trabajo de [10].

Capítulo 3

Planteamiento del Modelo Analítico

En este capítulo discutiremos los fundamentos de la ecuación que gobierna al perfil de temperaturas dentro del tubo de combustión a partir de los principios físicos y de los modelos más usuales. Así mismo, discutiremos algunos de los procedimientos analíticos que emplearemos en su solución para tomar en cuenta las condiciones de fronteras de nuestro sistema.

3.1. Deducción de la ecuación de calor

La ecuación de calor permite describir la variación de la temperatura en una región a lo largo del tiempo transcurrido. El interés de su estudio radica en que tiene numerosas aplicaciones en el campo de la ciencia. En términos matemáticos representa una ecuación diferencial en derivadas parciales parabólica cuya única incógnita es T , en el caso más simple las propiedades térmicas C_p , ρ y k dependen del material y por ello pueden ser función de la posición. La conductividad térmica k puede llegar a ser un tensor. En el caso especial en que estos coeficientes sean constantes escalares se obtiene la ecuación de calor sin fuentes [17, 22].

A partir de la ecuación general de Fourier [17] se deducirá la ecuación de calor .

$$\nabla^2 T = \frac{\kappa}{\rho C_p} \frac{dT}{dt}$$

donde

$\frac{\kappa}{\rho C_p}$ este término se le conoce como difusión térmica, depende de las características de cada material, y κ conductividad térmica

1

C_p capacidad calorífica o calor específico

ρ densidad

Supongamos que tenemos una región de material conductor encerrada en un volumen de control V . Si la temperatura en cada punto del material está descrita por una función $T(\mathbf{r}, t)$ entonces el calor específico a presión constante del material es una propiedad térmica del sistema definida por la expresión

$$C_p = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad (3.1.1)$$

donde Q es la cantidad de calor que hay que suministrar al material por unidad de masa m para elevar su temperatura en un grado manteniendo a presión constante. De esta manera la cantidad de calor infinitesimal suministrada al sistema por unidad de masa está dada por

$$\frac{dQ}{dV} = \rho C_p dT, \quad (3.1.2)$$

en donde hemos tomado en cuenta que $dm = \rho dV$ en donde ρ es la densidad del material. Si ahora consideramos la tasa de calor por unidad de tiempo entonces dicha expresión se transforma en

$$\frac{dQ}{dt} = \int dV C_p \rho \frac{dT}{dt}. \quad (3.1.3)$$

Entonces esta tasa de calor que entra al sistema es igual a menos la integral de flujo de calor \mathbf{J} por unidad de área, a través de la frontera del volumen de control [22]. Es decir

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.1.4)$$

en donde \mathbf{n} es un vector normal a la superficie cerrada [22]. Por tanto

$$\int dV \rho C_p \frac{dT}{dt} = -\oint_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.1.5)$$

Luego entonces si transformamos la integral de superficie del flujo de calor en una integral de volumen por medio del teorema integral de Gauss [22], se obtiene

¹La conductividad térmica varía dependiendo del tipo material.

Se define como la capacidad que tiene una sustancia de transferir la energía cinética de las moléculas a otras adyacentes o a sustancias con las que se encuentra en contacto, por ejemplo un metal tiene una κ más grande en comparación con el agua

Matemáticamente se define (para un material isotrópico la conductividad térmica es un escalar) como $\kappa = \frac{\dot{q}}{|\nabla|T}$, donde \dot{q} es el flujo de calor y $|\nabla|T$ es el gradiente de temperatura. Su unidad de medida es $\frac{j}{m \cdot s \cdot k}$ o $\frac{w}{K \cdot m}$ [17].

$$\int dV \left[\rho C_p \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right] = 0. \quad (3.1.6)$$

pero como el volumen de control es arbitrario de hecho no se necesitó de algún volumen en particular para esta deducción, entonces el integrando se debe anular por si mismo y se cumple por tanto [32].

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.1.7)$$

La ec. 3.1.7 Corresponde a la forma general de la ecuación de continuidad del flujo de energía térmica. En este punto es necesario agregar una ecuación constitutiva que caracterice el comportamiento del material a describir, esta relaciona el flujo de calor con la temperatura. Dicha ecuación constitutiva es la ley de Fourier que afirma que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura

$$\mathbf{J} = -\kappa \nabla T \quad (3.1.8)$$

Es una ecuación que establece que el flujo de calor por conducción en un medio homogéneo, isótropo, cercano al equilibrio y no toma en cuenta los retardos. En donde κ ($Wm^{-1}k^{-1}$) ordinariamente se considera constante para cada material, pero en realidad varia sensiblemente con la temperatura [25, 5].

También es conocida como la ecuación constitutiva de la conductividad térmica (es una relación entre las propiedades termodinámicas o mecánicas del sistema físico, presión, deformación densidad, volumen, temperatura, etc). Cabe aclarar que está ley solo es valida para variaciones de temperatura moderadas, de lo contrario las llamadas constantes físicas empezarían a cambiar, debido a que son dependientes de la temperatura. [17] Aquí \mathbf{J} es el flujo de calor (flujo por unidad de superficie y por unidad de tiempo) (Wm^{-2}).

Finalmente sustituyendo la ecuación constitutiva de Fourier ec. (3.1.8) en la ecuación de balance de calor ec. (3.1.7), obtenemos

$$\nabla^2 T = \frac{\kappa}{\rho C_p} \frac{dT}{dt} \quad (3.1.9)$$

o bien

$$\nabla^2 T = \alpha \frac{dT}{dt} \quad (3.1.10)$$

Esta es nuestra ecuación de calor para el caso en que no hay fuentes y las propiedades térmicas del material son constantes $\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p}$ es la difusión térmica. Nótese que esta ecuación describe como la energía térmica que está inicialmente concentrada en algún lugar, se

dispersa a través de la regiones contiguas, esto es lo que se conoce comúnmente como difusión. Otras cantidades físicas, además de la temperatura, se comporta de manera similar, cumpliendo la misma ecuación en derivadas parciales. Esta ecuación gobierna la concentración de compuestos químicos (contaminantes o perfumes) en ciertos solutos y situaciones particulares [23].

3.2. Ecuación que gobierna la energía del sistema

En esta sección haremos una revisión breve de la referencia [10] la cual ha sido mencionada antes en varias partes de este trabajo. En la sección anterior describimos la dinámica de la difusión en un material rígido y sólido porque la materia que lo compone no se le permitía desplazarse ni deformarse. Consideremos ahora que además del sólido o matriz porosa se tiene tres fluidos (gas, agua y aceite) caracterizados por sus densidades de masa ρ_g , ρ_w , ρ_o y el calores específicos c_g , c_w , c_o entonces si todos los sistemas están en equilibrio térmico localmente (matriz sólida, agua, aceite y gas), la tasa de calor por unidad de tiempo del lado izquierdo de la ec. (3.1.4) debe incluir las contribuciones de todos los materiales, es decir

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \left. \frac{dQ}{dt} \right|_w + \left. \frac{dQ}{dt} \right|_o + \left. \frac{dQ}{dt} \right|_g + \left. \frac{dQ}{dt} \right|_m \\ &= \int dV \left[\phi (S_w \rho_w c_w + S_o \rho_o c_o + S_g \rho_g f_s c_w \right. \\ &\quad \left. + S_g c_g \rho_g (1 - f_s)) \left. \frac{dT}{dt} \right|_f + (1 - \phi) c_m \rho_m \frac{dT}{dt} \right|_m \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

en donde hemos hecho uso de la ec. (3.1.3) para cada uno de los materiales involucrados. Aquí ϕ es la fracción de volumen ocupada por los poros con respecto al volumen total del sólido (porosidad), es decir volumen que tiene disponible los tres fluidos. Aquí S_w , S_o , y S_g son las fracciones de saturación de cada uno de los tres fluidos. En la fase gas existen dos subfases, f_s es la fracción de gas presente en la fase gaseosa y $(1 - f_s)$ corresponde a la fracción de vapor de agua. Estamos considerando el calor que entra y sale de una superficie de un volumen infinitesimal, pero si además suponemos que existe una fuente de calor interna que contribuye al calor o balance de calor (absorbe o pierde, energía térmica por conducción) [32], entonces se debe agregar a la ec. (3.1.4) dicho término, esto es

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{nd}S - \int dV U (T - T_0) \quad (3.2.2)$$

en donde T_0 temperatura inicial del sistema o temperatura ambiente y U es el coeficiente

de combustión de calor. Ahora bien para el fluido es necesario tomar en cuenta el transporte material de la energía de tal forma, que la derivada material o Lagrangiana de la temperatura (regla de la cadena) se puede expresar como:

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_f = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y} v_f \quad (3.2.3)$$

en donde v_f es la velocidad del fluido, suponiendo que solo estamos en una dimensión, entonces sólo tomaremos en cuenta la dirección en la que se mueven los fluidos en el tubo de combustión In-situ.

Mientras que la matriz o sólido no se desplaza, así que simplemente se tiene

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_m = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2.4)$$

Insertando estas expresiones en las ec. (3.2.1) y 3.2.3 la expresión resultante a su vez en la ec. 3.2.2 se obtiene

$$\begin{aligned} \int dV \left[(1 - \phi) c_m \rho_m \frac{\partial T}{\partial t} + \phi (S_w \rho_w c_w + S_o \rho_o c_o + \right. \\ \left. S_g \rho_g f_s c_w + S_g c_g \rho_g (1 - f_s)) \frac{\partial T}{\partial t} + \phi (S_w \rho_w c_w v_w + \right. \\ \left. S_o \rho_o c_o v_o + S_g \rho_g f_s c_w v_g + S_g c_g \rho_g (1 - f_s) v_g) \frac{\partial T}{\partial y} + \right. \\ \left. U(T - T_0) + \nabla \cdot \mathbf{J} \right] = 0 \quad (3.2.5) \end{aligned}$$

A continuación igualamos los integrados de ambos lados de la ecuación puesto el volumen de control considerado no tenía alguna relevancia particular, es decir

$$\begin{aligned} (1 - \phi) c_m \rho_m \frac{\partial T}{\partial t} + \phi (S_w \rho_w c_w + S_o \rho_o c_o + \\ S_g \rho_g f_s c_w + S_g c_g \rho_g (1 - f_s)) \frac{\partial T}{\partial t} + \phi (S_w \rho_w c_w v_w + \\ S_o \rho_o c_o v_o + S_g \rho_g f_s c_w v_g + S_g c_g \rho_g (1 - f_s) v_g) \frac{\partial T}{\partial y} = \\ - \frac{\partial J_y}{\partial y} - U(T - T_0). \quad (3.2.6) \end{aligned}$$

en donde J_y es la corriente de conducción de calor en la dirección hacia donde va el flujo (eje y). Tomando en cuenta a todos los medios, debemos satisfacer la ley de Fourier ec. (3.1.8), entonces por la superposición de todas las contribuciones

$$J_y = -(1 - \phi) \kappa_m \frac{\partial T}{\partial y} - \phi (S_w \rho_w \kappa_w + S_o \rho_o \kappa_o + S_g \rho_g f_s \kappa_w + S_g \rho_g \kappa_g (1 - f_s)) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.2.7)$$

Sustituyendo esta ecuación constitutiva en la ecuación de balance de energía dada arriba obtenemos después de asociar algunos términos se llega a

$$\begin{aligned} & \phi (S_w \rho_w c_w + S_o \rho_o c_o + S_g \rho_g f_s c_w + S_g c_g \rho_g (1 - f_s)) \frac{\partial T}{\partial t} + (1 - \phi) c_m \rho_m \frac{\partial T}{\partial t} \\ & + \phi (S_w \rho_w c_w v_w + S_o \rho_o c_o v_o + S_g \rho_g f_s c_w v_g + S_g c_g \rho_g (1 - f_s) v_g) \frac{\partial T}{\partial y} + U(T - T_0) \quad (3.2.8) \\ & = [(1 - \phi) \kappa_m + \phi (S_w \rho_w \kappa_w + S_o \rho_o \kappa_o + S_g \rho_g f_s \kappa_w + S_g \kappa_g \rho_g (1 - f_s))] \frac{d^2 T}{dy^2} \end{aligned}$$

Esta ecuación se complementa con las ecuaciones de conservación de masa para los fluidos involucrados en forma explícita cuando se propagan através de una matriz sólida que se presentan en el apéndice B, se discuten y argumentan brevemente las condiciones físicas y aproximaciones bajo las cuales es posible desacoplar la ecuación de energía para desarrollar el tipo de modelo en el que se sustenta el presente trabajo. Hemos en efecto, colocado esta discusión en un apéndice para no desviar la atención del lector de nuestros temas de interés. En el apéndice A hemos agregado un breve resumen sobre la derivación de la ecuación de continuidad en un medio poroso.

Ahora suponiendo que todas las componentes del sistema se mueven como si estuvieran en un cuerpo rígido, es decir que se mueven como si estuvieran en un solo frente común, esto significa que podemos suponer que todos los fluidos se mueven a una misma velocidad de arrastre que además es constante (ver apéndice B). Cada una de las saturaciones dependen de la posición y del tiempo, excepto el sólido.

Matemáticamente lo representamos haciendo un cambio de variable propuesto como en 3.2.9. Consideremos ahora el siguiente cambio de sistema de referencia que traslada el sistema al frente de calor. Si v_F es la velocidad del frente de calor entonces el siguiente cambio de coordenadas traslada el sistema al frente de calor.

$$x = y - v_F t, \quad \tau = t \quad (3.2.9)$$

Utilizando la regla de la cadena o el teorema de cambio de variable se tiene las siguientes expresiones para la derivadas parciales entre ambos sistemas de referencia

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = -v_F \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (3.2.11)$$

Por tanto sustituyendo cada una de las derivadas parciales se llega a

$$\begin{aligned}
& [-\phi v_F (S_w \rho_w c_w + S_o \rho_o c_o + S_g \rho_g f_s c_w + S_g c_g \rho_g (1 - f_s)) - (1 - \phi) v_F c_m \rho_m + \\
& \quad + \phi (S_w \rho_w c_w v_w + S_o \rho_o c_o v_o + S_g \rho_g f_s c_w v_g + S_g c_g \rho_g (1 - f_s) v_g)] \frac{\partial T}{\partial x} \\
U(T - T_0) + [\phi (S_w \rho_w c_w + S_o \rho_o c_o + S_g \rho_g f_s c_w + S_g c_g \rho_g (1 - f_s)) + (1 - \phi) c_m \rho_m] \frac{\partial T}{\partial t} = \\
& \quad [(1 - \phi) \kappa_m + \phi (S_w \rho_w \kappa_w + S_o \rho_o \kappa_o + S_g \rho_g f_s \kappa_w + S_g \kappa_g \rho_g (1 - f_s))] \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

y renombrado los coeficientes de la ecuación como:

$$\xi = \phi v_F (S_w \rho_w c_w + S_o \rho_o c_o + S_g \rho_g f_s c_w + S_g c_g \rho_g (1 - f_s))$$

$$\varrho = (1 - \phi) v_F c_m \tag{3.2.13}$$

$$\varsigma = \phi (S_w \rho_w c_w v_w + S_o \rho_o c_o v_o + S_g \rho_g f_s c_w v_g + S_g c_g \rho_g (1 - f_s) v_g) \tag{3.2.14}$$

$$\varpi = (1 - \phi) \kappa_m + \phi (S_w \rho_w \kappa_w + S_o \rho_o \kappa_o + S_g \rho_g f_s \kappa_w + S_g \kappa_g \rho_g (1 - f_s)) \tag{3.2.15}$$

$$\theta = \phi (S_w \rho_w c_w + S_o \rho_o c_o + S_g \rho_g f_s c_w + S_g c_g \rho_g (1 - f_s)) + (1 - \phi) c_m \rho_m \tag{3.2.16}$$

llegamos a la expresión

$$\alpha(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta(x) \frac{\partial T}{\partial x} - \gamma(x) (T - T_0) = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.2.17}$$

en donde podemos observar que los coeficientes ya no dependen del tiempo, pero aún dependen de la coordenada espacial x . Aquí estamos usando el hecho de que todos los fluidos se desplazan con la misma velocidad como se mostró en el apéndice B. También hemos utilizado la siguiente nomenclatura $\alpha = \frac{\varpi}{\theta}$ parámetro de difusión térmica, $\beta = \frac{-(\xi + \varrho - \varsigma)}{\theta}$ velocidad de la onda de convección $\gamma = \frac{1}{\theta}$ constante de perdida de calor.

Cabe aclarar que aquí tomaremos para los parámetros α , β , γ los valores efectivos y constantes que proviene de un análisis asistólico de envolvente lenta, que se detalla en el apéndice C, en el cual se puede observar que a pesar de ser funciones de la posición el comportamiento del perfil de temperatura es bastante similar al caso en el que estas cantidades son constantes siempre que éstas asuman su valores efectivos, definidos en el apéndice C.

3.2.1. Condiciones iniciales, de frontera

Para resolver la ecuación anterior de difusión-advención de calor que corresponde a una ecuación diferencial parcial de segundo orden (si consideramos la parte espacial y temporal), es necesario conocer una condición inicial (CI), normalmente para $t = 0$, que corresponde a la temperatura inicial, en nuestro caso la temperatura inicial no es constante sino que depende de x y t (tiempo), también es importante conocer las condiciones de frontera, en este caso particular las condiciones impuestas son las siguientes.

$$T(x, 0) = 0 \text{ condición inicial}$$

$$T(0, t) = T_c \text{ donde } T_c \text{ es el valor de la temperatura en el frente de combustión.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = 0 \text{ para el borde inferior del tubo de combustión.}$$

Dada la descripción de nuestro modelo podemos imponer las condiciones de frontera tipo Neumann ya que estas toman en cuenta el valor que adquiere el flujo de calor en la superficie considerada.

$$x = 0, \kappa \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = q_0 \text{ en la parte superior del tubo}$$

$$x = L, \kappa \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = q_L \text{ en la parte inferior del tubo.}$$

3.3. Método de la función de Green

Comentaremos primero sobre el método de imágenes en electrostática que fue introducido por primera vez por Lord Kelvin en 1848, corresponde a un método físico basado en las propiedades matemáticas del teorema de unicidad del potencial. El método evita resolver la ecuación de Poisson o de Laplace, y se aprovecha el hecho de que una superficie conductora es equipotencial. Su ventaja es que puede convertir un problema complejo en uno simple.

En electrostática podemos decir que dada una distribución de cargas, podemos encontrar una distribución alternativa en todo el espacio de más sencilla resolución en la región de análisis.

Para poder aplicar el método de imágenes, se tiene que satisfacer dos condiciones.

1. La carga o cargas imagen deben estar situadas en la región conductora. Esta condición es para satisfacer la ecuación de Poisson o de Laplace [18].

Matemáticamente podemos decir que dada una región D y una distribución original R_1 , y la alternativa R_2 en D :

$$\nabla^2 \phi_1 |_{D=0} = \nabla^2 \phi_2 |_{D=0}$$

2. La carga o distribución de cargas imagen deben estar situadas de manera que en la superficie o superficies conductoras el potencial sea cero o constante, para asegurar que se

satisfagan las condiciones en la frontera [19].

$$\phi_1 |_{Sup} = \phi_2 |_{Sup} \Rightarrow (\phi_1 = \phi_2) |_{Sup} = 0$$

Las aplicaciones del método son innumerables, entre ellas esta la solución de estudios de electrostática se usa para calcular potenciales, fuerzas y campos, otra aplicación entre muchas es en conductores con algún potencial V_0 frente a cargas o fuentes puntuales.

Las fuentes puntuales también son una herramienta útil para otro tipo de ecuaciones además de la ecuación de Laplace, en particular la ecuación de conducción de calor [21]. Cuando una fuente de calor unitaria e instantánea perturba a un medio entonces el frente de temperaturas espacio temporal estará gobernado por la función de Green. La solución específica a dicho problema dependerá notoriamente de las condiciones de frontera impuestas. El problema más simple de este tipo es aquel para el cual no existe ninguna frontera y el campo de temperaturas converge a cero en infinito. En orden de complejidad se agrega una frontera plana separando un par de medios con propiedades de conducción distintas en donde se deben imponer condiciones de frontera de continuidad tanto sobre el perfil de temperaturas como sobre sus derivadas normales al plano. Para resolver este problema se puede utilizar el concepto de fuentes imágenes delineado arriba para problemas electrostáticos. Es decir, si la fuente real se halla frente a la frontera plana mencionada, para que el campo de temperaturas satisfaga las condiciones de continuidad para la temperatura y la densidad de flujo de calor es útil agregar una fuente imaginaria colocada por detrás de la fronteras entre los medios a la misma distancia del plano que la fuente real. En el caso particular de que el segundo medio en donde no está la fuente real sea un peor conductor de calor que el primer medio entonces las líneas de densidad de flujo de calor tenderán a ser tangenciales al plano frontera y la intensidad de la fuente virtual o imaginaria de calor será casi de la misma que la fuente real, para que pueda expulsar del segundo medio de manera exacta las líneas de densidad de flujo provenientes de la fuente real. En este capítulo no haremos un estudio explícito de la solución de problemas por medio del método de la función de Green y el método de imágenes solo nos limitamos a comentar las ideas detrás de este procedimiento [18, 19, 17].

En el siguiente capítulo aplicaremos estos métodos para describir el comportamiento de una parte importante del perfil de temperaturas dentro de nuestro sistema, a saber el frente de calor dentro del tubo de combustión.

Capítulo 4

Solución Analítica del Modelo

A pesar de que aún no están completamente comprendidos los procesos físicos de recuperación térmica, se pueden proponer modelos matemáticos que se aproximen a los fenómenos físicos y químicos, sin embargo se sabe que implica grandes desafíos matemáticos. Debido a las razones explicadas anteriormente se formulan soluciones analíticas para casos idealizados y con ello se desprecian importantes aspectos físicos y químicos.

En este capítulo se establece y discute un modelo para describir la transferencia de calor que coincide con un modelo unidimensional ampliamente utilizado en la literatura [10, 6, 8] correspondiente a la ecuación de advección-difusión, en el cual se suponen condiciones de frontera tipo Neumann, las cuales describen una situación que permite el flujo de calor en las fronteras de la región unidimensional que representa un tubo de combustión in-situ. En el presente trabajo resolveremos el problema con condiciones a la frontera de manera analítica ofreciendo con ello la posibilidad de poder calcular a partir de un ajuste de las curvas de los perfiles de temperatura experimentales, las propiedades del medio. Es decir nuestro modelo será la base para establecer una metodología de inversión en la cual a partir de los valores experimentales para los perfiles de temperatura como función de la posición y el tiempo se pueda recuperar los valores de las propiedades del medio como (velocidad de onda de convección, constante de pérdida de calor, flujo de calor en las fronteras, difusión y advección térmica, ancho del perfil de temperatura gaussiano, flujo de calor, punto de ignición, etc). Para poder resolver la ecuación de advección-difusión es necesario considerar las características fundamentales que han sido observadas en experimentos realizados con tubos de combustión, tales como condiciones iniciales y de frontera, espesor de la zona de combustión, velocidad del flujo, longitud del tubo de combustión, porosidad, valores de saturación del agua y aceite, temperatura del frente de combustión, punto de ignición.

Ecuación de advección-difusión con fuente.

Consideremos la ecuación de advección-difusión 3.2.17 que gobierna la dinámica del perfil de temperatura del medio. Del lado derecho agregamos un término adicional que representa una fuente de calor de intensidad Q . Cabe mencionar que este término puede tomarse de manera alternativa solo a través de las condiciones iniciales como se discutirá abajo. El modelo matemático parte de la ec. 3.2.17 pero agregando el término de fuente, es decir:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial T}{\partial x} - \gamma(T - T_0) = \frac{\partial T}{\partial t} - Q\delta(x)\delta(t), \quad (4.0.1)$$

Hemos aproximada dicha fuente de calor como puntual e instantánea como lo indica la presencia de ambas funciones delta de Dirac en el espacio y en el tiempo. En los experimentos de tubo de combustión In Situ esta fuente de calor se consigue colocando una resistencia eléctrica en forma de anillo situada en un punto de la parte superior del tubo, al calentar considerablemente la porción estrecha del material que llena al tubo cercana a la resistencia la temperatura aumenta de manera súbita, ésta se enciende formando el frente de combustión que posteriormente comienza a desplazarse. Suponiendo que la región es mucho más estrecha que el largo del tubo y que la ignición ocurre en un tiempo mucho menor al tiempo en el que el frente de calor recorre al tubo, una fuente puntual e instantánea es una buen aproximación. El significado de cada uno de los términos involucrados en la ecuación diferencial parcial de arriba se describe a continuación:

$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ es el término de difusión que describe la forma en que se distribuye el calor en el medio, el cual es característico de la ecuación del calor. $\beta \frac{\partial T}{\partial x}$ es un término de advección (arrastre) es decir desplaza el perfil de temperaturas hacia adelante del frente de combustión, también es conocido como término de deriva. $\gamma(T - T_0)$ este término se encarga de que los frentes de temperatura no sean iguales, es decir hace asimétrico al frente. Gamma hace la diferencia entre el adelante, atrás y del centro del pico de temperatura. $Q\delta(x)\delta(t)$ corresponde a la fuente de calor instantánea o región ignición es decir al instante donde ocurre y es encendido del tubo de combustión. Aquí $\delta(x)$ es la función delta de Dirac que en este caso representa una fuente puntual. Q es la cantidad de calor que provee la fuente. $\frac{\partial T}{\partial t}$ es el término inercial que describe como evoluciona con el tiempo el perfil de temperatura su coeficiente reduce o aumenta la escala de respuesta temporal.

A partir del instante, $t = 0$, dejamos que la temperatura evolucione libremente. Estamos interesados en un modelo matemático que nos permita predecir la temperatura $T(x, t)$ para toda x en el intervalo que describe al tubo en todo tiempo transcurrido después del instante

inicial. La ec. 4.0.1 se resolverá a continuación utilizando la condición inicial 4.0.2.

$$T(x, 0) = T_0, \quad (4.0.2)$$

Es conveniente mencionar que alternativamente la presencia del término fuente en la ecuación diferencial parcial ec. (4.0.1) puede ser remplazada por la condición inicial siguiente

$$T(x, 0) = T_0 + T_c \delta(x/L), \quad (4.0.3)$$

en donde T_c es la temperatura de la región de ignición que estamos aproximado por un punto. Utilizaremos en este trabajo ambas representaciones en función de la conveniencia [20].

En las siguientes secciones construiremos cada una de las partes que conforman la solución general analítica de problema de conducción de calor en el tubo de combustión. Esta contiene tres partes a saber una estacionaria y dos transitorias. La parte estacionaria se encarga de satisfacer las condiciones de frontera de Neumann inhomogéneas que se refieren al flujo de calor por su extremos. Las partes transitorias son por un lado, la parte que describe el desplazamiento del frente de calor por el interior del tubo de un extremo a otro la cual se da en una escala de tiempo relativamente lenta (horas), y por otra, la sucesión de perfiles de temperatura que unen el estado de temperatura en el instante inicial en donde la temperatura es constante a excepción de la pequeña región calentada por la resistencia eléctrica que da origen a la ignición en el experimento. Esta segunda parte transitoria está caracterizada por una escala temporal mas rápida (minutos). Para resolver la ecuación de difusión advección con fuente de manera analítica, nos basamos en la literatura para apoyarnos en los fundamentos matemáticos [5, 22, 18, 20, 19, 21, 25], sin embargo cabe aclarar que la solución es de nuestra autonomía pues no se encuentra en la literatura.

4.1. Solución estacionaria

Aquí estudiaremos lo que llamaremos la parte estacionaria, que es una solución independiente del tiempo pero que es capaz de satisfacer las condiciones de frontera para el flujo de calor. Retomando nuestra ecuación de advección-difusión de calor para medios porosos (4.0.1).

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial T}{\partial x} - \gamma(T - T_0) = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4.1.1)$$

En donde se deben satisfacer las condiciones de frontera

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right| = q_1, \quad k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = q_2. \quad (4.1.2)$$

En donde q_1 y q_2 son las densidades de flujo de calor, k es la conductividad térmica de la matriz y L es la longitud del tubo.

Condición inicial cuando $t > 0$

$$T(x, t) = T_c \delta(x/L), \quad (4.1.3)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad (4.1.4)$$

en donde $\delta(x/L)$ es la función delta de Dirac.

Consideremos el siguiente cambio de variable

$$T_p = T - T_0. \quad (4.1.5)$$

donde T_p es la traslación de temperatura. Despejando de esta ecuación a T y sustituyendo en la ec. (4.1.1)

$$\alpha \frac{\partial^2 (T_p + T_0)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial (T_p + T_0)}{\partial x} - \gamma T_p = \frac{\partial (T_p + T_0)}{\partial t} \quad (4.1.6)$$

Por propiedades de suma de la derivada, separamos y sabiendo que la temperatura inicial es una constante obtenemos lo siguiente.

$$\alpha \frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial T_p}{\partial x} - \gamma T_p = \frac{\partial T_p}{\partial t} \quad (4.1.7)$$

Para resolver este problema con condiciones iniciales y de frontera es conveniente separar la solución como la suma de dos contribuciones, una de las cuales $w(x)$ representa el perfil de temperaturas estacionario que se alcanza una vez que el sistema llega al equilibrio térmico.

$$T_p(x, t) = w(x) + u(x, t) \quad (4.1.8)$$

Entonces por ahora solo resolveremos la solución estacionaria que es $w(x)$ y al final vamos a sumar las solución de la temporal con la espacial. Esto se expresa tomando $\partial w / \partial t = 0$ (por que solo estamos considerando la solución estacionaria) en la ec. (4.1.7) lo que conduce a:

$$\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma w = 0 \quad (4.1.9)$$

Cuya solución se puede obtener suponiendo que $w = \exp(\nu x)$. De esta manera llegamos a la siguiente expresión:

$$\alpha \nu^2 \exp(\nu x) + \beta \nu \exp(\nu x) - \gamma \exp(\nu x) = 0$$

$$\exp(\nu x)(\alpha \nu^2 + \beta \nu - \gamma) = 0$$

Obteniendo una ecuación homogénea con coeficientes constantes.

$$\alpha \nu^2 + \beta \nu - \gamma = 0$$

Entonces

$$\nu = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2}}{2\alpha} \quad (4.1.10)$$

$$\nu = -\frac{r}{L} \pm \frac{p}{L} \quad (4.1.11)$$

en donde $r = L\beta/(2\alpha)$, $p = L\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2}/2\alpha$, son parámetros adimensionales reales. Nótese que también hemos introducido la variable sin dimensiones $y = x/L$. Dado que la ec. (4.1.9) es una ecuación diferencial lineal homogénea en w , su solución general es la combinación lineal de las soluciones $w = \exp(\nu x)$ para los dos posibles valores de ν dados por ec. (4.1.10) es decir:

$$w(y) = \exp(-ry) (A \exp(py) + B \exp(-py)) / 2 \quad (4.1.12)$$

en donde A y B son constantes arbitrarias hasta este momento. Es conveniente expresar las funciones exponenciales en términos de las funciones seno y coseno hiperbólicos, es decir $e^{\pm py} = \cosh py \pm \sinh py$, con lo cual obtenemos

$$w(y) = \exp(-ry) (A \cosh py \pm B \sinh py) \quad (4.1.13)$$

Para evaluar las condiciones de frontera dadas por la 4.1.2 derivamos y al resultado lo evaluamos en cero.

$$L \frac{dw}{dy} = \exp(-ry) [-r (A \cosh py + B \sinh py) + p (-A \sinh py + B \cosh py)]$$

Para $x = 0$ en donde $y = \frac{x}{L}$, se tiene

$$q_1 = \frac{K}{L} (-Ar + Bp) \quad (4.1.14)$$

Evaluando la segunda condición de frontera $y = 1$ ($x = L$)

$$q_2 = \frac{K}{L} e^r [-r(A \cosh p + B \sinh p) + p(-A \sinh p + B \cosh p)] \quad (4.1.15)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones (4.1.14) y (4.1.15) para encontrar las constantes A y B .

$$A = \frac{(-\theta_1 p \coth p + \theta_2 p e^r \operatorname{csch} p + \theta_1 r)}{(p^2 - r^2)} \quad (4.1.16)$$

$$B = \frac{(\theta_1 p - \theta_1 r \coth p + \theta_2 e^r r \operatorname{csch} p)}{(p^2 - r^2)} \quad (4.1.17)$$

en donde hemos definido los parámetros adimensionales siguientes $\theta_i = q_i L / K$ con $i = 1, 2$. Luego entonces resolviendo para A y B e insertando las expresiones resultantes en la ec. (4.1.13) obtenemos la solución estacionaria.

$$w(y) = \exp(-ry) \left(\left(\frac{-\theta_1 p \coth p + \theta_2 p e^r \operatorname{csch} p + \theta_1 r}{p^2 - r^2} \right) \cosh py + \left(\frac{\theta_1 p - \theta_1 r \coth p + \theta_2 e^r r \operatorname{csch} p}{p^2 - r^2} \right) \sinh py \right).$$

Esta expresión nos proporciona el perfil estacionario no uniforme de temperaturas sostenido por las condiciones de frontera

4.2. Frente de Calor (transitorio lento)

Comenzaremos por mostrar que la primera solución transitoria mencionada arriba es una solución de la ecuación gobernante del modelo unidimensional que estamos estudiando. Analizaremos dicha solución bajo tres distintas condiciones de frontera. La primera solución se encontrará sin fronteras, la segunda bajo la influencia de una sola frontera y la tercera confinada entre dos fronteras.

4.2.1. Medio con fronteras muy lejanas

Con la finalidad de transformar la ec. (4.0.1) en una de las ecuaciones más estudiadas en la física matemática a saber la ecuación de difusión, se realiza una transformación de

coordenadas Galileanas:

$$x' = x + \beta t \quad (4.2.1)$$

$$t' = t \quad (4.2.2)$$

Así también se realiza el cambio de variable 4.1.5.

Eliminaremos un término de la primera derivada, como se muestra a continuación. En efecto utilizando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \beta \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}$$

Realizando las derivadas involucradas arriba llegamos a lo siguiente

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial (x + \beta t)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial (x + \beta t)}{\partial t} = \beta, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = 1.$$

Así que sustituyendo en la ec. (4.0.1)

$$\alpha \frac{\partial^2 T_p}{\partial x'^2} + \beta \frac{\partial T_p}{\partial x'} - \gamma T_p = \beta \frac{\partial T_p}{\partial x'} + \frac{\partial T_p}{\partial t'}$$

y cancelando términos se obtiene la ecuación diferencial de difusión;

$$\alpha \frac{\partial^2 T_p}{\partial x'^2} - \gamma T_p = \frac{\partial T_p}{\partial t'}. \quad (4.2.3)$$

La cual después de proponer el siguiente cambio de la variable dependiente $T_p = T' e^{-\gamma t'}$ (se aplica regla de la cadena) se puede simplificar aún más para conducir a

$$e^{-\gamma t'} \alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} - \gamma e^{-\gamma t'} T' = -\gamma T' e^{-\gamma t'} + e^{-\gamma t'} \frac{\partial T'}{\partial t'}.$$

Es interesante interpretar el cambio de variable dados por las ec. (4.2.1) y (4.1.10), en donde la fuente de calor (punto de ignición) es trasladada a velocidad β constante, esto significa que la dinámica de la ecuación es tal que la fuente se desplaza hacia adelante. Finalmente llegamos a la siguiente ecuación que es una ecuación de difusión de calor unidimensional con fuente.

$$\alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} = \frac{\partial T'}{\partial t'} - Q \delta(x') \delta(t'), \quad (4.2.4)$$

Es importante observar que en la ec. (4.0.1) función delta también cumple con la transformada de coordenadas galileanas, por lo que cumple con la condición bajo la cual la delta es cero si $x' \neq 0$ y por tanto $\delta(x)\delta(t) = \delta(x')\delta(t')$.

Esta ecuación inhomogénea es completamente equivalente a su ecuación homogénea asociada y una condición de frontera en el origen, como demostraremos a continuación. Mas aún, si fijamos nuestra atención en todos los puntos del dominio exceptuando el origen ($x \neq 0$) entonces podemos ignorar el término inhomogéneo o fuente dado por $Q\delta(x)\delta(t)$. Para resolver la ecuación homogénea resultante (sin fuente) se propone aplicar el método de separación de variables, por lo tanto supondremos que $T = S'(t)R'(x')$. Insertando esta expresión en la ecuación homogénea asociada a la ec. (4.2.4), obtenemos

$$\alpha \frac{1}{R'} \frac{d^2 R'}{dx'^2} = \frac{1}{S'} \frac{dS'}{dt'} \quad (x \neq 0) \quad (4.2.5)$$

Como se puede notar cada miembro de esta ecuación es por si mismo una función de variables distintas, a saber el lado izquierdo solo depende de x' y el lado derecho solo depende de t' . Sin embargo, ambas variables son independientes. De esta manera cada miembro por consistencia debe ser igual a una constante que escogemos como λ . Esto permite transformar la ecuación diferencial parcial en el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias:

$$\frac{1}{S'} \frac{dS'}{dt'} = \lambda, \quad (x \neq 0) \quad (4.2.6)$$

y

$$\alpha \frac{1}{R'} \frac{d^2 R'}{dx'^2} = \lambda \quad (x \neq 0) \quad (4.2.7)$$

La ecuación anterior es una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, se propone una solución de la forma $R' = \exp(mx')$, entonces se obtiene una ecuación característica de la forma $m = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}$. La solución general de esta última ecuación es la combinación lineal de las posibles soluciones individuales correspondientes a los dos valores posibles de m .

Por lo tanto las soluciones respectivas son.

$$S' = \exp(\lambda t') \quad (4.2.8)$$

$$R' = \begin{cases} E_1 \exp \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x' + F_1 \exp -\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x', & (x' < 0) \\ E_2 \exp \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x' + F_2 \exp -\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x', & (x' > 0) \end{cases} \quad (4.2.9)$$

en donde cada una de las soluciones de R' representan la parte izquierda y derecha del frente de combustión a excepción del origen que es donde se encuentra el punto de ignición

y F_1, F_2 y E_1, E_2 son constantes arbitrarias para ser determinadas mediante las condiciones de frontera.

Hasta este momento hemos ignorado la presencia del término inhomogéneo o fuente de calor. Para tomar en cuenta su efecto sobre la solución de la ecuación diferencial inhomogénea ec. (4.2.4) integramos la ecuación completa en torno al origen, en el intervalo $[-a, a]$ para obtener

$$\int_{-a}^a \left[\alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} - \frac{\partial T'}{\partial t'} \right] dx' = - \int_{-a}^a Q \delta(x) \delta(t) dx \quad (4.2.10)$$

primero integramos con respecto a x

$$\int_{-a}^a \left(\alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} \right) dx' - \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a T' dx' = -Q \delta(t) \quad (4.2.11)$$

ahora integrando con respecto a t

$$\alpha \int_0^{\Delta t} \frac{\partial T'}{\partial x'} \Big|_{-a}^a dt - \int_{-a}^a T' dx \Big|_0^{\Delta t} = -Q$$

$$\alpha \int_0^{\Delta t} \left(\frac{\partial T'}{\partial x'} \Big|_{a^+} - \frac{\partial T'}{\partial x'} \Big|_{a^-} \right) dt = \int_{-a}^a T' dx \Big|_{\Delta t} - \int_{-a}^a T' dx \Big|_0 - Q$$

sin embargo suponiendo que la temperatura es una función continua en cero

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^{+a} T' dx \Big|_{\Delta t \rightarrow 0}$$

en donde debido a que Δt es muy pequeño utilizamos el teorema del valor medio para integrales [22].

$$\frac{\partial T'}{\partial x'} \Big|_a - \frac{\partial T'}{\partial x'} \Big|_{-a} = \frac{-Q}{(\Delta t)\alpha} \quad (4.2.12)$$

Esta ecuación nos dice que existe una discontinuidad en la pendiente del perfil de temperaturas cuyo valor es proporcional a la intensidad de la fuente Q . Es decir el perfil de temperaturas no es diferenciable en $x' = 0$ y representa una condición de frontera adicional para el perfil de temperaturas.

Hemos utilizado la conocida propiedad de la función delta de Dirac que nos proporciona la expresión $\int_{-a}^a Q \delta(x) dx = Q$. Si además tomamos el límite cuando $a \rightarrow 0$ y suponemos que la temperatura es continua (antes y después de la fuente $x' = 0$)

$$T'(0^+) = T'(0^-) \quad (4.2.13)$$

El comportamiento físico esperado para el perfil de temperatura es que lejos del punto fuente $x' = 0$ la temperatura tienda a cero así que para la región situada a la izquierda de la fuente $x' < 0$ se tiene que $F_1 = 0$ en la ec. (4.2.9) mientras que para la región en la derecha $x' > 0$, $E_2 = 0$ debe ser cero. De esta forma la solución por regiones para R' puede ser expresada en la forma:

$$R' = \begin{cases} E_1 \exp \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x', & x' < 0 \\ F_2 \exp -\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x', & x' > 0 \end{cases} \quad (4.2.14)$$

Si pedimos que adicionalmente la temperatura $T' = S'(t)R'(x')$ satisfaga las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (4.2.13) y (4.2.12) se tiene que la primera de estas hace que $F_2 = E_1$. Por otro lado la segunda condición nos proporciona el valor de una de las constantes es decir $F_2 = (1/2)Q/\sqrt{\lambda\alpha}$. Sustituyendo estos resultados en la ec. (4.2.14) obtenemos la solución para todo punto la cual se puede expresar de manera compacta en términos de función valor absoluto como

$$R' = \frac{Q}{2\sqrt{\lambda\alpha}} \exp -\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} |x'|. \quad (4.2.15)$$

De hecho esta solución también satisface las condiciones de frontera del medio ilimitado para las cuales la temperatura se anula si $x' \rightarrow \pm\infty$.

Por tanto una solución de la ec. (4.2.5) está dada por $S'R'$ pero la solución general es superposición de estas soluciones para todos los valores de λ debido a que la ecuación diferencial parcial original es lineal, es decir:

$$T' = \int \exp(\lambda t') \left(\frac{Q}{2\sqrt{\lambda\alpha}} \exp -\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} |x'| \right) d\lambda. \quad (4.2.16)$$

Esta solución además tiende a cero para valores de x' muy lejano del pico en $x' = 0$.

Finalmente regresado a las variables sin primas tenemos.

$$T_p = \int_0^\gamma \exp((\lambda - \gamma)t) \left(\frac{Q}{2\sqrt{\lambda\alpha}} \exp -\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} |x + \beta t| \right) d\lambda, \quad (4.2.17)$$

donde los valores de λ se han restringido al intervalo $(0, \gamma)$, con la finalidad de que T_p no diverga cuando el tiempo transcurra ya que solo dentro de este intervalo la solución permanece finita para tiempos largos. Esta solución es válida en el espacio ilimitado, es decir cuando no se tiene ninguna frontera y corresponde a un frente de temperatura en forma de pico que se desplaza hacia la izquierda con velocidad β sin deformarse, sin embargo su amplitud puede disminuir debido al factor exponencial decayente. El caso en el que solo un

elemento del espectro es dominante $Q = Q_0\delta(\lambda - \lambda_0)$ ha sido estudiado en otros contextos [23].

4.2.2. Medio acotado por una frontera plana

Consideremos ahora un medio semi infinito acotado por una frontera plana localizada en $x = 0$. Para cumplir la condición de frontera (4.0.2)

$$T_p = (T - T_0)|_{x=0} = 0 \quad (4.2.18)$$

debemos agregar una imagen de la fuente en movimiento descrita por la expresión (4.2.17) que esté por detrás del plano frontera y se mueva en dirección opuesta de la fuente original. Es decir

$$T_p = \int_0^\gamma \exp((\lambda - \gamma)t) \frac{Q_0}{2\sqrt{\lambda\alpha}} \left(\exp - \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} |x + \beta t| + \exp - \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} |x - \beta t| \right) d\lambda. \quad (4.2.19)$$

Calculado la primera derivada espacial obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_p}{\partial x} = & - \int_0^\gamma \exp((\lambda - \gamma)t) \frac{Q(\lambda)}{2\sqrt{\lambda\alpha}} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \\ & \left(\text{sign}(x + \beta t) \exp - \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} |x + \beta t| + \text{sign}(x - \beta t) \exp - \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} |x - \beta t| \right) d\lambda \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Evaluando en cero (la condición referente al flujo).

$$q(t) = \left. \frac{\partial T_p}{\partial x} \right|_{x=0} = - \int_0^\gamma \exp((\lambda - \gamma)t) \frac{Q(\lambda)}{\alpha} \left(\exp - \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} |\beta t| \right) d\lambda. \quad (4.2.21)$$

Suponemos tan solo una contribución espectral. Es decir, asumimos que $Q(\lambda) = Q_0\delta(\lambda - \lambda_0)$. De esta manera la ec. (4.2.19) se reduce a

$$T_p = \exp((\lambda_0 - \gamma)t) \frac{Q_0}{2\sqrt{\lambda_0\alpha}} \left(\exp - \sqrt{\frac{\lambda_0}{\alpha}} |x + \beta t| + \exp - \sqrt{\frac{\lambda_0}{\alpha}} |x - \beta t| \right). \quad (4.2.22)$$

Que es físicamente válida si $\lambda_0 < \gamma$. Para este sistema la densidad de flujo de calor inyectado al sistema está dado por

$$q(t) = - \exp((\lambda_0 - \gamma)t) \frac{Q_0}{\alpha} \left(\exp - \sqrt{\frac{\lambda_0}{\alpha}} |\beta t| \right). \quad (4.2.23)$$

El cual corresponde a una función decreciente de la temperatura.

4.2.3. Región acotada por dos planos

En esta sección estudiaremos el comportamiento del sistema propio del trabajo de investigación que corresponde a un perfil de temperatura gobernada por la ec. (4.0.1) que se halla en una región acotada por dos planos en donde el flujo de calor satisface condiciones de frontera específicas y condiciones iniciales dadas.

En particular analizaremos el perfil producido por el frente de calor inducido externamente mediante una resistencia en forma de anillo que estrictamente es un perfil transitorio debido a que como mostraremos se desplaza a lo largo del tubo.

Dicha contribución describe la dinámica del frente de calor que se desplaza a velocidad constante por el medio y aunque es una solución transitoria su dependencia temporal es mucho mas lenta que el perfil de temperatura producido por el otro término transitorio que analizaremos en la siguiente sección.

En las secciones anteriores derivamos las funciones de Green asociadas a otras condiciones de frontera distintas. A saber, para un medio sin fronteras ec. (4.2.17) y para otro medio con un plano frontera (4.2.22). La función de Green para esta región además de cumplir las condiciones homogéneas sobre las derivadas evaluadas en los extremos de la región, debe satisfacer las dos condiciones sobre la fuente de calor dadas por ecs. (4.2.12) y (4.2.13). Con objeto de aplicar de manera más clara estas condiciones separamos la región de estudio en dos zonas. La primera que comprende la región entre uno de los planos y la fuente y la segunda entre la fuente y el segundo plano. Denotaremos por G_I y G_{II} las soluciones en cada uno de estas regiones (véase la figura 4.2.1). Las cuatro condiciones de frontera apenas mencionadas en términos de G_I y G_{II} toman la forma

$$\left. \frac{\partial G_I(x, x')}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.2.24)$$

$$G_I(x, x')_{x=x'} = G_{II}(x, x')_{x=x'} \quad (4.2.25)$$

$$\left. \frac{\partial G_{II}(x, x')}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.2.26)$$

$$\left. \frac{\partial G_I(x, x')}{\partial x} \right|_{x=x'} - \left. \frac{\partial G_{II}(x, x')}{\partial x} \right|_{x=x'} = \frac{-Q}{(\Delta t)\alpha} \quad (4.2.27)$$

En donde G_I y G_{II} asumen la forma dada por la ec. (4.2.9) pero similarmente se puede expresar como combinaciones lineales de senos y cosenos hiperbólicos

$$G_I = E_1 \cosh \left(x \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \right) + F_1 \sinh \left(x \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \right), \quad 0 < x < x' \quad (4.2.28)$$

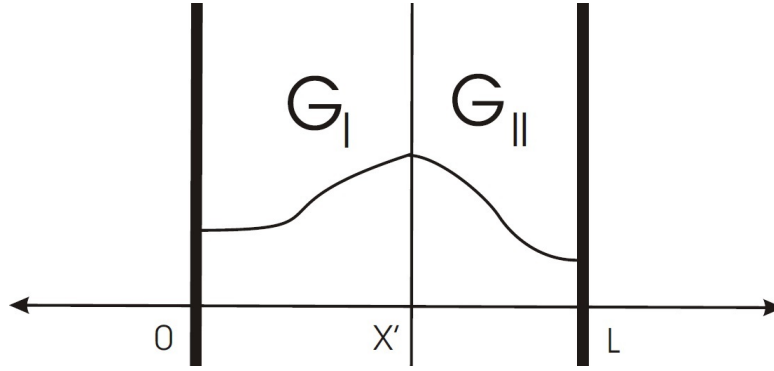


Figura 4.2.1: Se muestra esquemáticamente las regiones en que se divide el sistema para calcular la función de Green. Las líneas gruesas verticales son los bordes del sistema y la línea delgada la posición del frente de calor.

$$G_{II} = E_2 \cosh \left(x \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \right) + F_2 \sinh \left(x \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \right), \quad L > x > x' \quad (4.2.29)$$

en donde las constantes E_1 , E_2 , F_1 y F_2 se obtienen de imponer las condiciones de frontera anteriores. Nótese que G_I y G_{II} satisfacen las condiciones ecs. (4.2.24) y (4.2.26), respectivamente tomando

$$G_I = E_1 \cosh \left(x \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \right), \quad 0 < x < x' \quad (4.2.30)$$

$$G_{II} = A \cosh (x - L) \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}, \quad L > x > x' \quad (4.2.31)$$

mientras que las dos condiciones restantes dan lugar a las expresiones siguientes

$$E_1 \cosh \left(x' \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \right) - A \cosh (x' - L) \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} = 0, \quad (4.2.32)$$

y

$$E_1 \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \sinh \left(x' \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \right) - A \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \sinh (x' - L) \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} = \frac{-Q}{(\Delta t) \alpha}. \quad (4.2.33)$$

Existirá una solución única para E_1 y A siempre que el Wronskiano [22] no se anule lo cual implica que ambas funciones sean linealmente independientes. Esto es

$$w(x')v'(x') - v(x')w'(x') = C \quad (4.2.34)$$

que es conocida como la fórmula de Abel. Aquí hemos tomado

$$w(x) = \cosh \left(x \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \right), \quad v(x) = \cosh (x - L) \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}. \quad (4.2.35)$$

Luego si comparamos las expresiones ecs. (4.2.33) y (4.2.34) se tiene que basta tomar

$$A = \frac{Q \cosh\left(x' \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\right)}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \sinh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} L}, \quad E_1 = \frac{Q \cosh(x' - L) \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \sinh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} L}. \quad (4.2.36)$$

Finalmente sustituyendo estos valores en las ecuaciones definidas por las expresiones ecs. (4.2.30) y (4.2.31), ambas expresiones se pueden escribir de manera compacta de la siguiente forma

$$G(x, x') = \begin{cases} Q \frac{\cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(x' - L) \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \sinh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} L} & 0 < x < x' \\ Q \frac{\cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(x') \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(x - L)}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \sinh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} L} & L > x \geq x' \end{cases} \quad (4.2.37)$$

que es la función de un Green para una fuente confinada entre dos planos paralelos. Nótese claramente que esta función cumple con la propiedad $G(x, x') = G(x', x)$ requerida para cualquier función de Green [25], en donde los puntos de observación y fuente se intercambian. Ahora si sustituimos x' por su valor en la fuente calor $x' = \beta t$ e integramos sobre los valores permitidos de λ se llega a la ecuación $G(x, \beta t)$.

Así la solución transitoria lenta que describe el frente de onda es:

$$U_f(x, t) = \int_0^\gamma d\lambda \exp((\lambda - \gamma)t) G(x, \beta t) \quad (4.2.38)$$

En esta sección hemos construido un frente de calor cuya forma es muy similar a la observada experimentalmente por otros autores [10], para el perfil de temperatura de experimentos de combustión in-situ. Dicha solución nos servirá para construir la solución completa del perfil de temperatura con la ayuda de las soluciones restantes que se discuten en las siguientes secciones.

4.3. Parte transitoria rápida

Finalmente, calcularemos un segundo perfil transitorio de corta duración el cual tiene lugar usualmente los primeros minutos después de la ignición. Este se encargará de unir de forma continua el perfil de temperaturas en el instante inicial con el perfil en el cual el frente de calor ya se ha formado en torno al punto de ignición. Es decir, analizaremos ahora la otra contribución de la solución transitoria que hemos denominado como rápida en el sentido de que su tiempo de vigencia es del orden de minutos.

Para ello resolveremos también por separación de variables la ec. (3.2.17). Es decir proponemos que

$$T = T_0 + \Theta(t)\Upsilon(x) \quad (4.3.1)$$

en donde $\Theta(t)$ y $\Upsilon(x)$ son funciones de una sola variable, en este caso t y x respectivamente.

Insertando dicha función de prueba en la ec. (3.2.17) se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{1}{\Upsilon(x)} \left(\alpha \frac{d^2\Upsilon(x)}{dx^2} + \beta \frac{d\Upsilon(x)}{dx} - \gamma\Upsilon(x) \right) = \frac{1}{\Theta(t)} \frac{d\Theta(t)}{dt} \quad (4.3.2)$$

en donde cada uno de los miembros de esta ecuación son funciones de variables distintas x y t las cuales por construcción son independientes. Es decir, por consistencia igualemos por separado cada miembro a una constante λ_n para obtener

$$\alpha \frac{d^2\Upsilon(x)}{dx^2} + \beta \frac{d\Upsilon(x)}{dx} + (\lambda_n - \gamma)\Upsilon(x) = 0 \quad (4.3.3)$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = -\lambda_n\Theta(t). \quad (4.3.4)$$

La solución de la segunda ecuación diferencial es una simple exponencial es decir

$$\Theta(t) = \exp(-\lambda_n t) \quad (4.3.5)$$

mientras que la solución de la primera ecuación se busca de la forma $\Upsilon(x) = \exp(i\omega x)$ debido a que ésta es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Esto conduce a la siguiente ecuación algebraica

$$-\alpha\omega^2 + i\beta\omega + \lambda_n - \gamma = 0 \quad (4.3.6)$$

que tiene por soluciones

$$\omega_{\pm} = \frac{-i\beta \pm \sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{-2\alpha}. \quad (4.3.7)$$

La solución general de la ecuación para $\Upsilon(x)$ es simplemente la combinación lineal de la soluciones para estos dos valores distintos de ω , es decir

$$\Upsilon(x) = \exp\left(\frac{\beta}{2\alpha}x\right) \left(a \exp\left(i\frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}\right) + b \exp\left(-i\frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}\right) \right), \quad (4.3.8)$$

sin embargo ambas exponenciales de argumentos complejos es conveniente reescribirlas en términos de funciones senos y cosenos. Así las soluciones de ambas ecuaciones se escriben como

$$\Theta(t) = \exp(-\lambda_n t) \quad (4.3.9)$$

$$\Upsilon(x) = \exp\left(\frac{\beta}{2\alpha}x\right) \left(D_n \sin \frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}x + C_n \cos \frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}x \right) \quad (4.3.10)$$

en donde D_n y C_n son constantes arbitrarias que se escogen mediante las condiciones iniciales y de frontera. Así, debido a la linealidad de la ec. (3.2.17), la solución más general para esta parte del perfil transitorio de temperaturas será la combinación lineal de cada una de las soluciones para los diferentes valores del parámetro λ permitidos, es decir

$$u_2 = T_0 + e^{\frac{\beta}{2\alpha}x} \sum_{\lambda_n} e^{-\lambda_n t} \left(D_n \sin \frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}x + C_n \cos \frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}x \right) \quad (4.3.11)$$

en donde para que esta solución satisfaga las condiciones escritas en la ec. (4.2.24-4.2.26) es necesario que se satisfagan las expresiones

$$\frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha} D_n + \frac{\beta C_n}{2\alpha} = 0 \quad (4.3.12)$$

$$\frac{\beta e^{\frac{\beta L}{2\alpha}} (D_n \sin(\frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}L) + C_n \cos(\frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}L))}{2\alpha \frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}} + e^{\frac{\beta L}{2\alpha}} (D_n \cos(\frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}L) - C_n \sin(\frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}L)) = 0 \quad (4.3.13)$$

de donde eliminando D_n se llega a la expresión $\sin \frac{\sqrt{-\beta^2 + 4\alpha(\lambda_n - \gamma)}}{2\alpha}L = 0$ y por tanto $\lambda_n = \alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma$. Aquí n es un número entero positivo. De esta manera la última expresión sumada con la solución transitoria derivada en la sección 4.2 y correspondiente al frente de calor, queda como

$$u(x, t) - T_0 = \int_0^\gamma d\lambda \exp((\lambda - \gamma)t) G(x, \beta t) + \exp\left(\frac{\beta}{2\alpha}x\right) \exp(-\lambda_n t) \sum_{n=0}^{\infty} (D_n \sin n\pi x + C_n \cos n\pi x). \quad (4.3.14)$$

Aquí las constantes D_n y C_n se deben determinar mediante la condición inicial para el frente de temperaturas como se hará en la última sección.

4.4. Perfil de temperaturas completo

Recopilando las tres contribuciones deducidas para el frente de temperaturas se tiene que el perfil de temperatura está dado por la suma de las soluciones transitorias ec. (4.3.14) y la solución estacionaria ec. (4.1.13) es decir

$$\begin{aligned}
 T(x, t = 0) &= T_0 + \exp(-rx/L) \left(A \cosh p \frac{x}{L} + B \sinh p \frac{x}{L} \right) + \int_0^\gamma d\lambda \exp((\lambda - \gamma)t) G(x/L, \beta t) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n t + \frac{\beta}{2\alpha} x) \left(\cos n\pi \frac{x}{L} - \frac{\beta L}{2n\pi\alpha} \sin n\pi \frac{x}{L} \right)
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

En donde los coeficientes C_n se obtienen a partir de la condición inicial $T(x, 0) = T_0$ que conduce después de evaluar en el tiempo $t = 0$ a

$$\begin{aligned}
 0 &= \exp(-rx/L) \left(A \cosh p \frac{x}{L} + B \sinh p \frac{x}{L} \right) + \int_0^\gamma d\lambda G(x/L, 0) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{\beta}{2\alpha} x\right) \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha n\pi}{L\beta}\right)^2}}{\frac{2\alpha n\pi}{L\beta}} \sin\left(n\pi \frac{x}{L} - \arctan \frac{2\alpha n\pi}{L\beta}\right),
 \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

en donde hemos expresado la suma de las funciones $\sin u$ y $\cos u$ en términos de una amplitud Ξ y una fase ζ , es decir como $\Xi \sin(u - \zeta)$. Si suponemos que $Q(\lambda) = Q_0 \delta(\lambda - \lambda_0)$ además de hacer la traslación en la variable $z = x - (1/n\pi) \arctan \frac{2\alpha n\pi}{L\beta}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
 &\exp\left(-\frac{3r}{L} x\right) \left(A \cosh p \frac{x}{L} + B \sinh p \frac{x}{L} \right) + G(x/L, 0) = \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha n\pi}{L\beta}\right)^2}}{\frac{2\alpha n\pi}{L\beta}} \sin\left(n\pi \frac{z}{L}\right)
 \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

lo cual expresa la función de la izquierda como combinación lineal infinita de las funciones $\{\sin(n\pi \frac{z}{L}), n > 0, n \text{ entero}\}$. Es decir, se expresa como una serie de Fourier. Para encontrar los valores de los coeficientes de esta combinación lineal utilizaremos las propiedades de ortogonalidad y completas del conjunto de funciones $\{\sin(n\pi \frac{z}{L}), n > 0, n \text{ entero}\}$ en el intervalo $(0, L)$. Esto es

$$\frac{2}{L} \int_0^L dz \sin\left(n\pi \frac{z}{L}\right) \sin\left(m\pi \frac{z}{L}\right) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases} \tag{4.4.4}$$

en donde $\delta_{n,m}$ es la función delta de Kronecker. De esta manera, multiplicaremos la expresión (4.4.3) por $\sin(m\pi \frac{z}{L})$ para posteriormente integrar ambos lados de la expresión en el intervalo $(0, L)$. Esto conduce a

$$\int_0^L \left[\exp\left(-\frac{3r}{L}x\right) \left(A \cosh p \frac{x}{L} + B \sinh p \frac{x}{L} \right) + G(x/L, 0) \right] \sin(m\pi \frac{z}{L}) dz =$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha n\pi}{L\beta}\right)^2}}{\frac{2\alpha n\pi}{L\beta}} \int_0^L dz \sin(n\pi \frac{z}{L}) \sin(m\pi \frac{z}{L}) = -C_m \beta \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha m\pi}{L\beta}\right)^2}}{\alpha m\pi} \quad (4.4.5)$$

Aquí hemos utilizado la propiedad de ortogonalidad de la base de funciones senos ec. (4.4.5) para reducir la serie infinita a solo un término. Despejando el coeficiente C_m se obtiene

$$C_m = \frac{-\alpha m\pi}{\beta \sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha m\pi}{L\beta}\right)^2}} \int_0^L \left[e^{-\frac{3r}{L}x} \left(A \cosh p \frac{x}{L} + B \sinh p \frac{x}{L} \right) + G(x/L, 0) \right] \sin(m\pi \frac{z}{L}) dz. \quad (4.4.6)$$

Insertando en esta última ecuación (4.4.1) ya se tiene la solución general, que al calcular los parámetros A y B a partir de la ecs. (4.1.16) y (4.1.17), incluye tanto las partes estacionarias como a las transitoria de la solución. Es decir este perfil de temperatura describe la dinámica completa del sistema que incluye un perfil estacionario impuesto por las condiciones de frontera para el flujo de calor. También incluye ambas partes del perfil de temperaturas transitorios que contiene la contribución generada por el frente de calor inducido por las condiciones iniciales o fuente de calor instantáneo, y el perfil transitorio rápido que une de forma continua la condición inicial con dicho frente de calor.

A continuación procederemos a valorar en peso relativo de las distintas contribuciones para restringir nuestro análisis a la parte que delimitaremos por la condiciones física para confrontarla con resultados experimentales en el siguiente capítulo.

Notemos que el tercer término de esta expresión corresponde a la solución transitoria rápida que solo tiene relevancia durante los primeros minutos posteriores al encendido de la llama como a continuación mostramos sigue leyendo. En efecto los tiempos característicos para el decaimiento de cada uno de los modos en la suma del tercer término de la ec. (4.4.1) están dados por la expresión $1/\lambda_n = \left(\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma\right)^{-1}$ que nos muestra que los tiempos de decaimiento de los diversos modos son más cortos conforme el orden n del modo aumenta. De esta manera, el modo uno sería el que mas tarda en decaer con tiempo típico $1/\lambda_n = \left(\frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma\right)^{-1}$ que debe ser mucho menor que el tiempo necesario para que el frente calor descrito por el segundo término de la ec. (4.4.1) recorra el tubo L/β . Experimentalmente se encuentra que el primero dura minutos mientras que el segundo tarda horas. En este análisis prescindiremos del tercer término además consideramos que de todas las componente espectrales del segundo término solo una es distinta de cero. Obtenemos.

$$T_f(x, t) = T_0 + \exp(-rx/L) \left(A \cosh p \frac{x}{L} + B \sinh p \frac{x}{L} \right) + \exp((\lambda - \gamma)t) G(x/L, \beta t) \quad (4.4.7)$$

para el perfil de temperaturas dentro del tubo de combustión, En el siguiente capítulo utilizaremos esta expresión para comparar y ajustarla con datos experimentales tomados de la literatura.

Capítulo 5

Análisis General

En este capítulo completamos nuestro análisis realizando una simulación numérico simple y elemental de la ecuación gobernante para el perfil de temperaturas ec. (4.0.1) imponiendo condiciones iniciales y de frontera para tener una estimación global del orden de magnitud de los parámetros utilizados en una corrida característica. Esta simulación además nos muestra una concordancia cualitativa y cuantitativa con el tipo de soluciones analíticas del capítulo anterior. Además realizamos un ajuste de los parámetros de manera más fina utilizando la solución analítica obtenida en el capítulo anterior. Mostramos finalmente como a manera de ilustración bajo algunas condiciones adicionales el ajuste del frente de temperaturas se puede reducir a un ajuste lineal por intervalos dando lugar a expresiones analíticas para el calculo de los parámetros de transporte del medio que rellena el tubo de conducción.

5.1. Método numérico

Con el fin de realizar una estimación gruesa de la gran cantidad de parámetros involucrados en el modelo efectuaremos una simulación numérica lo cual además nos permite comparar y completar nuestro análisis. Resolvemos numéricamente la ec. (3.2.17) utilizando un método explícito de diferencias finitas progresivas. A continuación explicaremos los lineamientos generales del algoritmo. En un método numérico cada una de las derivadas parciales involucradas en la ecuación diferencial parcial se aproximan por cocientes de diferencias como se presentan a continuación

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= \frac{T(x, t+k) - T(x, t)}{k} + error \\ error &= -\frac{k}{2} \frac{\partial^2 u(x, t_m)}{\partial t^2}, \quad t < t_m < t+k\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \frac{T(x + h, t) - T(x, t)}{h} + error \quad (5.1.2)$$

$$error = -\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 T(x, t)}{\partial x^3} \quad (5.1.3)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{T(x + h, t) - 2T(x, t) + T(x - h, t)}{h^2} + error \quad (5.1.4)$$

$$error = -\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 T(x, t)}{\partial x^4}. \quad (5.1.5)$$

En términos generales solo es importante el orden de magnitud del error de truncamiento. Para efectuar el cálculo numérico será necesario definir una rejilla o malla en el plano $x - t$ definida por la asignación $(x_n, t_j) = (x_0 + nh, t_0 + jk)$ en donde x_0 y t_0 es un punto de referencia y n, j son números enteros. Los puntos (x_n, t_j) son los puntos de la rejilla. Las separaciones de la rejillas son h y k que se tomarán constantes por lo que la rejilla es uniforme y además con la misma magnitud lo que hace la rejilla cuadrada. Los valores de la temperatura evaluando en cada uno de los puntos de esta rejilla serán denotados por $T_{nj} = T(x_n, t_j)$.

De esta manera la ecuación diferencial de nuestro interés ec. (3.2.17) se puede aproximar de la siguiente forma [26].

$$D[T] = \alpha \left(\frac{T_{n+1,j} - 2T_{nj} + T_{n-1,j}}{h^2} \right) + \beta \left(\frac{T_{n+1,j} - T_{n,j}}{h} \right) - \gamma (T_n - T_0) - \frac{(T_{n,j+1} - T_{nj})}{k} = 0. \quad (5.1.6)$$

Esta discretización de la ecuación diferencial original se efectúa con el fin de obtener una aproximación útil que sea mas exacta en la media de que h y k tienda a cero. La ecuación diferencial parcial dada por la ec. (3.2.17) se resolvió numéricamente sujeta a las siguientes condiciones inicial

$$T(x, 0) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right), \quad (5.1.7)$$

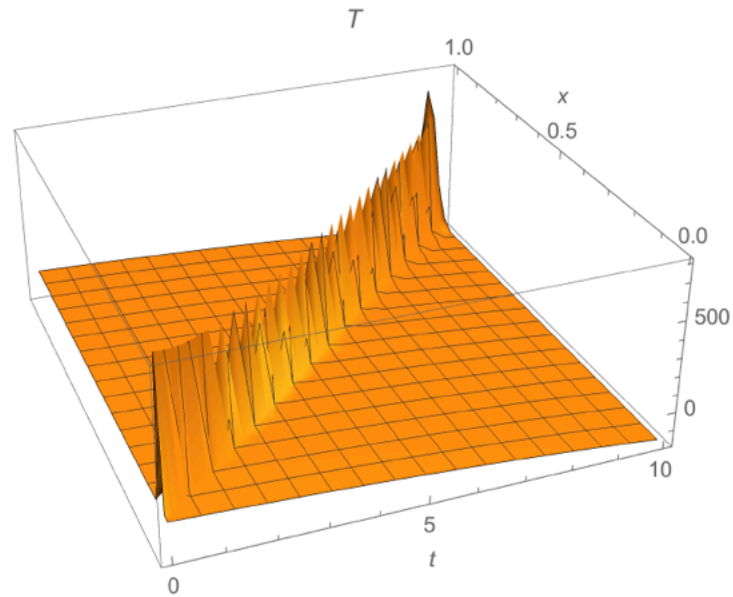
y de frontera

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = q_1, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) = q_2. \quad (5.1.8)$$

Es importante mencionar que hemos tomado como condición inicial una función gaussiana de dispersión σ centrada en $x_0 = 0.05$ la cual representa el frente calor inicial tomado en cuenta a lo largo del texto como el término inhomogéneo o fuente en la ec. (4.0.1). Cabe mencionar que en dicha ecuación el mencionado término es proporcional a la función delta

Parámetro	Valor simulación núm.
σ	0.01
x_0	0.05
θ_1	0.1
θ_2	0.2
α	1/40000
β	-1/30
γ	-0.1
q	25

Cuadro 5.1: Valores estimados por la simulación numérica

Figura 5.1.1: Perfil de temperaturas $T(^{\circ}C)$ como función de posición $x(\text{cm})$ y tiempo $t(\text{hr})$, calculado numéricamente por diferencias finitas

de Dirac y aquí lo hemos aproximado por una función gaussiana con dispersión finita basado en el hecho de que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}\right) \rightarrow \delta(x-x_0). \quad (5.1.9)$$

Sin embargo no podemos reducir la dispersión de la gaussiana indefinidamente por que está limitada por la separación de las rejillas de la malla h y k .

los valores obtenidos para los parámetros en la simulación numérica se muestra en el cuadro 5.1:

La Fig. 5.1.1 muestra claramente como el frente de calor cuya forma inicial es un perfil gaussiano se desplaza robustamente y prácticamente sin deformarse a velocidad constante

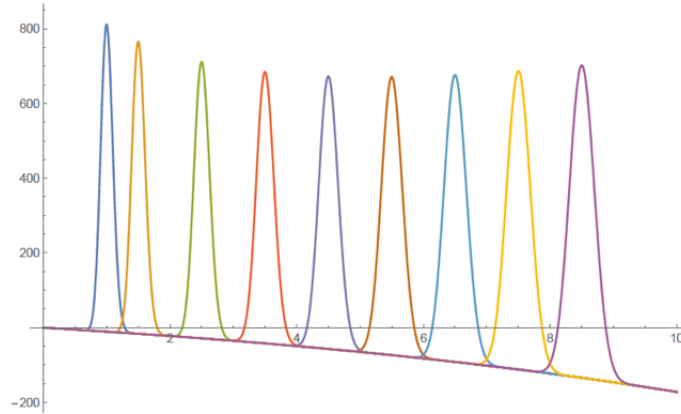


Figura 5.1.2: Perfiles de temperaturas en diez distintas posiciones como función del tiempo correspondientes a curvas de nivel de la Fig 5.1.1

a través del medio (tubo de combustión). La simulación incluye el tubo completo de un metro, el cual es recorrido en diez horas. La superficie de esta gráfica presenta algunas irregularidades en la región del frente de calor, sin embargo estas imperfecciones son espúreas como puede observarse en la gráfica 5.1.2. En dicha gráfica también se puede observar que la amplitud del frente de calor cambia en sus diversas posiciones de tal forma que es máxima cerca del borde superior del tubo, disminuye y posteriormente vuelve a crecer.

5.2. Formalismo de ajuste analítico

Como hemos comentado antes existen experimentos In Situ en donde se hacen simulaciones del frente de calor desplazándose dentro de un tubo controlado en un laboratorio. Estos experimentos usualmente proveen el perfil de temperatura como función del tiempo medidos cada cierto intervalo del orden de diez posiciones a lo largo del tubo. El objetivo de esta sección es discutir la forma en que la expresión dada por la ec. (4.4.7) puede ajustarse a algunos de los datos experimentales reportados en la literatura. La idea esencial es calcular la varianza global de todos los puntos experimentales con respecto a la curva teórica. Es decir, evaluamos los valores de posición y tiempo en la expresión dada por la ec. (4.4.7) y restamos su correspondientes valores experimentales de temperatura medidos, lo cual después de elevar al cuadrado y sumar sobre todos los valores de posiciones y tiempos nos proveerá la desviación de dicha representación, esto es

$$Var = \Sigma_{ij}(T_f(x_i, t_j) - T_{ij})^2. \quad (5.2.1)$$

Sin embargo este valor dependerá fuertemente de los valores que hallamos utilizado para los parámetros de T_f es decir r , p , α , β , γ , λ . Por tanto la forma más óptima de obtener dichos parámetros es minimizar esta función con respecto a los mencionados parámetros para obtener un sistema de ecuaciones acopladas a partir de las cuales se pueda determinar dichos parámetros resolviendo numéricamente las ecuaciones resultantes. Dicho cálculo para nuestra función T_f es algo largo y rebuscado para el caso mas general. No obstante a continuación desarrollaremos un caso simplificado por hipótesis adicionales para T_f con el objeto de ilustrar de manera clara este procedimiento.

Nótese que la expresión ec. (4.2.37) se puede entender como la superposición de un gran número de frentes de onda si desarrollamos en series la expresión para G considerando $\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}L$ un parámetro grande lo cual corresponde en términos generales a tener un tubo muy largo con respecto con el ancho del frente de calor. Es decir desarrollamos en serie de Taylor la función seno hiperbólico del denominador para expresar el resultado como una superposición de exponenciales reales

$$G = \begin{cases} Q \frac{\cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} (\beta t - 2L(n+1)) + \sum_{n=0}^{\infty} \exp -\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} (\beta t + 2Ln) \right) & x < \beta t \\ Q \frac{\cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} (\beta t)}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} (x - 2L(n+1)) - \sum_{n=0}^{\infty} \exp -\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} (x + Ln) \right) & x \geq \beta t \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Esto es cierto solo cuando el ancho de los frentes de onda $\sqrt{\alpha/\lambda}$ que forman la solución anterior tiene la estructura de picos lo cual significa matemáticamente que dependen como $\exp(-|z|/\varepsilon)$, en donde ε es un parámetro que caracteriza el ancho de cada pico. Como se puede ver de la ec. (4.2.37) dicho parámetro por $\varepsilon = \sqrt{\alpha/\lambda}$ usualmente el borde inferior del tubo se halla a una distancia del orden de un metro pero la velocidad de propagación del frente es tan lenta que es alcanzado en un tiempo del orden de diez horas de tal forma que antes de que esto ocurra la presencia del borde inferior sea prácticamente imperceptible.

Por esta razón supondremos que $\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}L \gg 1$ de tal forma que por lo de arriba

$$\begin{aligned} \lim_{L \gg \sqrt{\alpha/\lambda}} \frac{\cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} (\beta t - L)}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \sinh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} L} &= \frac{\left[\exp(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} (\beta t - L)) + \exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} (\beta t - L)) \right]}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \left[\exp(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} L) - \exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} L) \right]} \\ &\rightarrow \frac{\exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \beta t)}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} (1 + 2 \exp((\beta t - 2L)\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}) \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \beta t) \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{L \gg \sqrt{\alpha/\lambda}} \frac{\cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(x-L)}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \sinh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}L} &= \frac{\left[\exp(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(x-L)) + \exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(x-L)) \right]}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \left[\exp(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}L) - \exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}L) \right]} \\ &\rightarrow \frac{\exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x)}{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} (1 + 2 \exp((x-2L)\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}) \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

De esta manera la función de Green se reduce a

$$G(x, \beta t) = \begin{cases} Q \frac{\exp(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(x-\beta t)) + \exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(x+\beta t))}{2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} (1 + 2 \exp((\beta t - 2L)\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}) \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\beta t) & x < \beta t \\ Q \frac{\exp(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(\beta t - x)) + \exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(\beta t + x))}{2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} (1 + 2 \exp((x - 2L)\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}) \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x) & x \geq \beta t \end{cases} \quad (5.2.5)$$

la cual se puede escribir de forma compacta utilizando la definición de la función valor absoluto

$$G(x, \beta t) = Q \frac{\exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}|x - \beta t|)}{2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} F(x) \quad (5.2.6)$$

en donde $x_>$ es el valor más grande entre los valores $\max\{x, \beta t\}$, así mismo $x_<$ es el valor mas pequeño $\{x, \beta t\}$ son los valores máximo y mínimo de este par de variables. Aquí la función

$$F(x) = (1 + \exp(-2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x_<))(1 + 2 \exp((x_> - 2L)\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}) \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x_> \quad (5.2.7)$$

fue definida de tal forma la ec. (5.2.6) reproduce la expresión dada por ec. (5.2.5) de manera compacta.

Así el perfil de temperatura estará descrito por

$$T(x, t) = Q \frac{\exp(-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}|x - \beta t|)}{2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} \exp((\lambda - \gamma)t) F(x) \quad (5.2.8)$$

que se puede entender como la superposición de dos frentes de onda propagándose en direcciones opuestas con velocidades $-\beta$ y β . Ambos frentes parten en instante inicial del borde superior del tubo y posteriormente se separan de tal manera que el frente con velocidad positiva penetra el tubo y viaja a través de éste, mientras que el otro frente se mueve en dirección opuesta como si estuviera por arriba y fuera del tubo. Evidentemente este segundo frente es solamente una imagen virtual en el sentido discutido en la sección del método de imágenes, de tal forma que permite que satisfagan las condiciones de frontera en el borde superior.

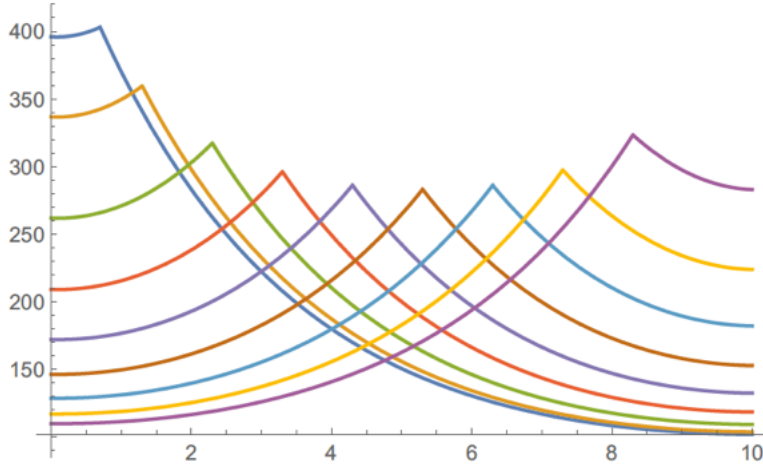


Figura 5.2.1: Perfiles de temperatura ($^{\circ}\text{C}$) como función del tiempo (hr) obtenidos a partir de la solución analítica dada por la ec. (4.4.7)

Consideremos el logaritmo del perfil de temperaturas descrito por la ec. (5.2.8), es decir

$$\ln T(x, t) = \ln \frac{Q}{2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} + (\lambda - \gamma)t - \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} |x - \beta t| + \ln [F(x)] \quad (5.2.9)$$

Para analizar la expresión resultante es conveniente separar la expresión en dos intervalos como sigue

$$\ln T(x, t) = \begin{cases} \ln \frac{Q}{2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} + (\lambda - \gamma - \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\beta)t + \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x + \ln(F(x)) & x < \beta t \\ \ln \frac{Q}{2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}} + (\lambda - \gamma + \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\beta)t - \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x + \ln(F(x)) & x \geq \beta t \end{cases} \quad (5.2.10)$$

De esta manera la relación entre $\ln T(x, t)$, t y x es lineal para cada uno de los intervalos si ocurre que $\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}L \gg 1$. Es decir, el ancho de los picos de temperatura es mucho menor que la longitud del tubo. Dada esta condición partiremos de los datos experimentales de temperatura como función del tiempo para las posiciones específicas de los diez transductores con el objeto de estimar las pendientes y ordenadas a través de ajustes lineales. Es decir, utilizando los datos experimentales podemos calcular

$$q = \ln \frac{Q}{2\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}}; \quad p_1 = \lambda - \gamma + \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\beta; \quad (5.2.11)$$

$$p_2 = \lambda - \gamma - \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\beta; \quad r = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \quad (5.2.12)$$

a partir los cual podemos determinar los parámetros de nuestro modelo

$$\begin{aligned}\lambda &= (p_1 + p_2)/2 + \gamma, \quad \beta = (p_1 - p_2)/(2r) \\ Q &= 2re^A, \quad \alpha = ((p_1 + p_2)/2 + \gamma)/r^2.\end{aligned}$$

Si por otro lado el último término de la ec. (5.2.10) no es despreciable puesto que el ancho de los frentes de temperatura no es mucho mas estrecho que la longitud del tubo, entonces la relación entre $y(x, t) = \ln T(x, t)$, t y x no es lineal. En consecuencia será necesario minimizar directamente las expresiones a partir de la varianza de los datos experimentales sometidos a la relación funcional de la ec. (5.2.10), es decir

$$\begin{aligned}Var &= \sum_i \sum_{(p_1-p_2)t_j < 2rx_i} (q + p_2t_j - rx_i + \ln(1 + e^{-2(p_1-p_2)t_j}) - y(x_i, t_j))^2 \\ &+ \sum_i \sum_{(p_1-p_2)t_j > 2rx_i} (q + p_1t_j + rx_i + \ln(1 + e^{-2rx_i}) - y(x_i, t_j))^2.\end{aligned}\quad (5.2.13)$$

Aquí la primera suma interior se efectúa para valores de los tiempos tales que la medida de temperatura se hicieron antes de que pasara el pico del frente de calor $(p_1 - p_2)t_j < 2rx_i$ para posteriormente realizar la suma sobre todas posiciones de los sensores de temperatura. El segundo término toma en cuenta las contribuciones del perfil de temperatura que se hallan por delante del frente de calor. Nótese que por construcción la función Var calcula la suma de los cuadrados de las diferencias verticales entre los puntos experimentales $y(x_i, t_j) = \ln T(x_i, t_j)$ y los valores que provee la curva analítica ec. (5.2.10). De esta manera cualquier diferencia en alguno de los puntos contribuirá a la suma total y está solo será nula si todos los puntos experimentales caen exactamente sobre la curva analítica. Sin embargo, la curva óptima será aquella cuyos parámetros reduzcan al mínimo el valor de la varianza.

Por tanto tomando la derivada de esta expresión respecto a cada uno de los parámetros q , p_1 , p_2 , r y A e igualando cada una de las expresiones resultantes a cero se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_{(p_1-p_2)t_j < 2rx_i} (q + p_1t_j + rx_i + \ln(1 + e^{-2rx_j}) - y(x_i, t_j)) + \\ \sum_i \sum_{(p_1-p_2)t_j > 2rx_i} (q + p_1t_j + rx_i + \ln(1 + e^{-2rx_i}) - y(x_i, t_j)) = 0\end{aligned}\quad (5.2.14)$$

$$\sum_i \sum_{(p_1-p_2)t_j > 2rx_i} t_j(q + p_1t_j + rx_i + \ln(1 + e^{-2rx_i}) - y(x_i, t_j)) - \sum_i \sum_{(p_1-p_2)t_j < 2rx_i} \frac{t_j e^{-2(p_1-p_2)t_j}}{1 + e^{-2(p_1-p_2)t_j}}(q + p_2t_j - rx_i + \ln(1 + e^{-2(p_1-p_2)t_j}) - y(x_i, t_j)) = 0 \quad (5.2.15)$$

$$\sum_i \sum_{(p_1-p_2)t_j < 2rx_i} t_j \left(\frac{1 + 3e^{-2(p_1-p_2)t_j}}{1 + e^{-2(p_1-p_2)t_j}} \right) (q + p_2t_j - rx_i + \ln(1 + e^{-2(p_1-p_2)t_j}) - y(x_i, t_j)) + \sum_i \sum_{(p_1-p_2)t_j > 2rx_i} x_i \tanh rx_i (q + p_1t_j + rx_i + \ln(1 + e^{-2rx_i}) - y(x_i, t_j)) = 0 \quad (5.2.16)$$

$$\sum_i \sum_{(p_1-p_2)t_j < 2rx_i} x_i (q + p_2t_j - rx_i + \ln(1 + e^{-2(p_1-p_2)t_j}) - y(x_i, t_j)) \quad (5.2.17)$$

$$+ \sum_i \sum_{(p_1-p_2)t_j > 2rx_i} \frac{t_j e^{-2(p_1-p_2)t_j}}{1 + e^{-2(p_1-p_2)t_j}} (q + p_2t_j - rx_i + \ln(1 + e^{-2(p_1-p_2)t_j}) - y(x_i, t_j)) = 0 \quad (5.2.18)$$

Este es un sistema de ecuaciones acopladas no lineales para los parámetros q , p_1 , p_2 , r y A . Insertando los valores de las mediciones experimentales $(x_i, t_j, \ln T(x_i, t_j))$ se establece un sistema de ecuaciones para dichos parámetros y se busca su solución numéricamente para determinar dichos parámetros los cuales darán el ajuste óptimo el cual reducirá al mínimo el valor de la varianza calculada.

Antes de terminar esta sección insistimos en el hecho de que para el caso mas general minimizamos la ec. (5.2.13) con respecto a los mismos parámetros q , p_1 , p_2 , r y A para obtener un sistema de ecuaciones algebraicas acopladas a partir de las cuales obtenemos los valores que minimizan la varianza. Hemos omitido estas expresiones para el caso mas general por brevedad y solo hemos mostrado los casos explícitos asociados a la condición simplificante $\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} L \gg 1$.

5.3. Ajuste de las curvas.

En las figuras (5.2.1) se muestran los perfiles de temperatura obtenidos a partir de la solución analítica con condiciones de frontera de flujo de calor en los bordes. Cada uno de estos corresponde a los valores de las temperaturas como función del tiempo para cada

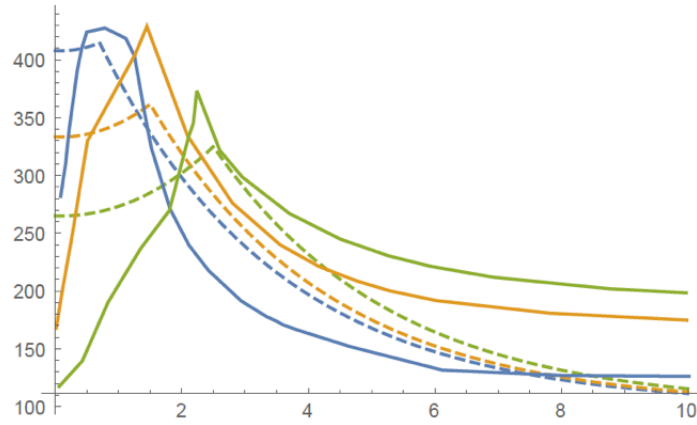


Figura 5.3.1: Ajuste de modelo analítico completo con datos experimentales tomados de la referencia [10] para los tres termopares más altos

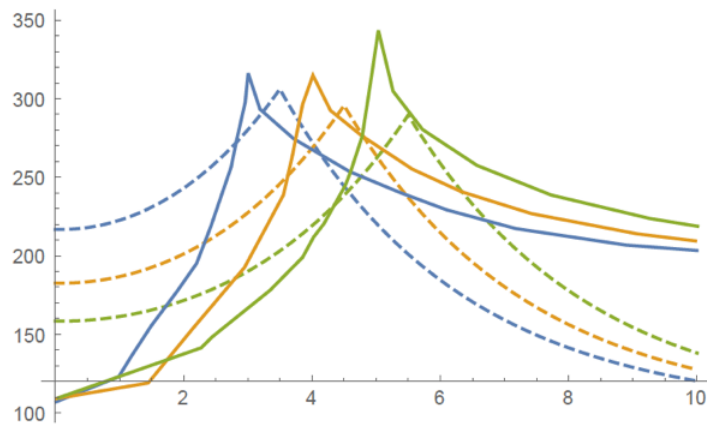


Figura 5.3.2: Lo mismo que para la Figuras 5.3.1 pero para los tres termopares de posiciones intermedias

parámetro	valor ajustado
λ	0.0003
x_0	0.05
θ_1	1
θ_2	2
α	1/40000
β	-1/10
γ	-0.1
σ	0.005

Cuadro 5.2: Valores estimados por el ajuste analítico

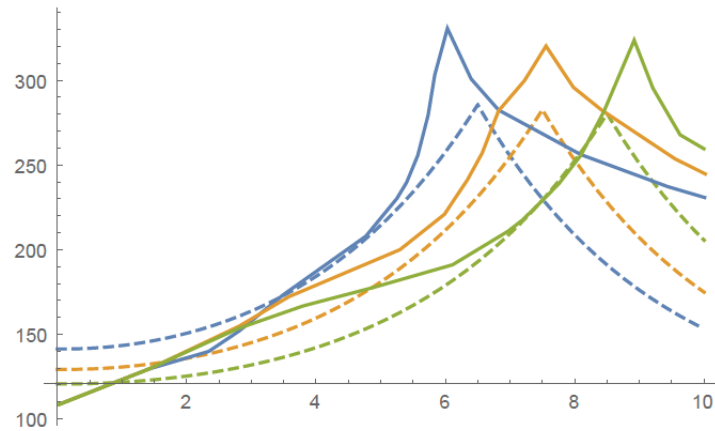


Figura 5.3.3: Lo mismo que para la figuras 5.3.1 pero para los tres termopares de posiciones más bajas

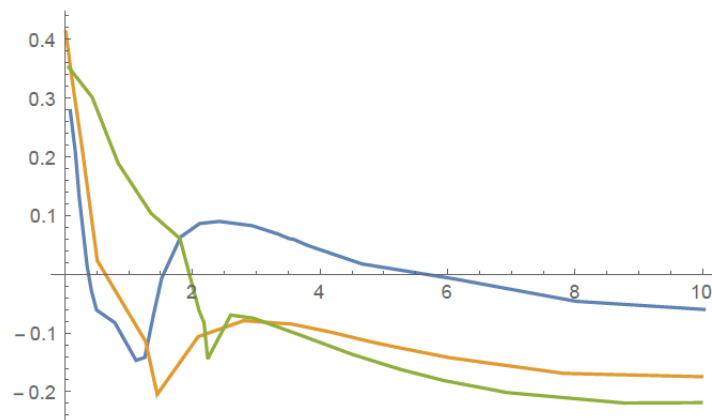


Figura 5.3.4: Errores relativos en las curvas de las figuras 5.3.1 correspondientes a los tres primeros termopares

una de las nueve posiciones de los sensores de temperatura utilizados en el experimento. La primera aproximación gruesa a los valores de los parámetros involucrados se hizo en la sección 5.1 mediante la simulación numérica basada en diferencias finitas. Posteriormente los valores de los mismos parámetros fueron refinados resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones acopladas discutido en la sección 5.2 los cuales fueron establecidos bajo la condición de minimizar la varianza definida en la sección anterior. Se observa una diferencia entre los perfiles de temperatura obtenidos experimentalmente de los resultados analíticos que es diferente en magnitud para cada una de las tres gráficas.

La gráficas 5.3.1, 5.3.2 y 5.3.3 muestran la comparación de los resultados analíticos y los experimentales para los perfiles de temperaturas. En estas gráficas las curvas continuas

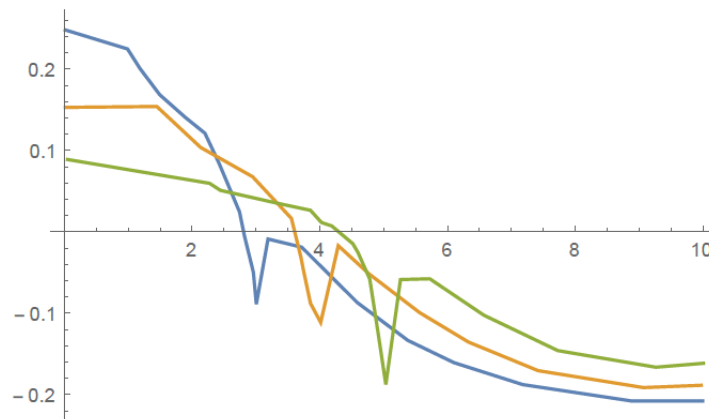


Figura 5.3.5: Lo mismo que en la figura 5.3.4 pero para los termopares en las posiciones de medición intermedias

representan los valores analíticos que aporta el modelo analítico mientras que los puntos corresponden a los valores experimentales tomados de la referencia [10]. Se nota de la figura 5.3.4 que los perfiles reportados por los dos primeros termopares, o los más altos, difieren mucho más del modelo analítico. De hecho la forma cualitativa del perfil de temperatura registrada por el primer termopar es cualitativamente distinta del resto de perfiles de temperatura sobretodo en la forma redondeada que tiene el frente de calor que presenta la región de más alta temperatura. Esta forma ensanchada del pico del frente de calor manifiesta como la región de combustión se encuentra más expandida espacialmente de lo que registran los otros termopares para los cuales de hecho el punto mas alto se transforma en una discontinuidad o pico en la pendiente del frente de temperaturas. Esto nos dice que justamente el frente de calor cuando pasa por el primer termopar, lo cual ocurre unos minutos después de haberse iniciado la combustión, es una región de algunos centímetros de grueso mientras que posteriormente dicha región se estrecha considerablemente dando lugar a los perfiles de temperatura registrados por todos los siguientes termopares. De esta manera podemos esperar que nuestra aproximación analítica sea mas lejana de los registros experimentales puesto que en este primer perfil el ancho de la región de combustión no es despreciable y existe un acoplamiento no local de la ecuación de energía con las ecuaciones de conservación de masa. De hecho los errores promedios asociados a este conjunto de curvas son considerablemente notables como se discute a continuación.

Las curvas presentadas en las figuras 5.3.2 y 5.3.3 por otro lado, son bastante mas cercanas a los datos experimentales aunque presentan errores globalmente menores al 10%.

Los valores provenientes de este ajuste se presentan en la tabla 5.1, cual podemos cuantificar evaluando directamente la función varianza dada por ec. (5.2.13) que nos da una medida de la bondad del ajuste que aquí hemos realizado. De hecho la desviación estándar relativa resulta del cociente $\sigma = \sqrt{Var/(N \ln T)}$ en donde N es el número de perfiles de temperatura utilizado en el cálculo. Para nuestro caso obtuvimos $\sigma = 16\%$. Con el objeto de confrontar de manera individual los errores locales de nuestra aproximación graficamos de manera individual las diferencias entre nuestra aproximación analítica y los datos experimentales. En efectos los errores relativos correspondientes a las gráficas (5.3.1), (5.3.2) y (5.3.3) se muestran en las gráficas (5.3.4), (5.3.5) y (5.3.6), respectivamente. Nótese en la figura (5.3.4) como los errores correspondientes a la zona del máximo del frente de combustión de la curva registrada por el primer termopar tienen errores hasta del 40%, posteriormente la magnitud de los errores dentro de la misma curva van disminuyendo rápidamente. Las curvas asociadas al segundo y tercer termopares también inician con errores grandes de 35% y 30% para decrecer una vez que se rebasa la región del máximo. Los errores locales en las gráficas (5.3.5) y (5.3.6) no superan el 20% y el 15% sin embargo para la mayoría de los puntos del tubo son menores que estos valores. En resumen, los errores locales en la vecindad de la región de combustión para los frentes medidos por los primeros termopares son hasta del 40% mientras que lejos de dicha región y para los frentes registrados por los otros termopares son muy pequeños. Esto causa que en conjunto y de manera global nuestra aproximación analítica presenta el error del 18%, comentado arriba.

Complementariamente mostramos también en la Fig. 5.3.7 los ajustes al perfil de temperatura obtenidos a través de la aproximación dada por la ec. (5.2.8) la cual se derivó utilizando la aproximación $\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} L \gg 1$. A diferencia de los perfiles de temperatura sin aproximación, la altura máxima del pico disminuye monótonamente mientras éste se desplaza. En este sentido es importante notar que la dependencia de la altura del pico en la figura (5.3.7) no es monótona.

En las figuras (5.3.8) (5.3.9) y (5.3.10) se muestran la confrontación de esta expresión aproximada con los datos experimentales. En este caso el cálculo de la desviación estándar relativa nos proporciona un valor poco mayor a $\sigma = 18.5\%$, mostrando que la expresión exacta es mejor aunque solo un poco. Si esta tendencia se confirmara a través de otras comparaciones resultaría útil emplear esta expresión simplificada para realizar la inversión del problema.

Cabe mencionarse que al igual que en el modelo exacto, las dos primeras curvas de la figura (5.3.8) correspondientes al primer y segundo termopares muestran, no solo diferencias

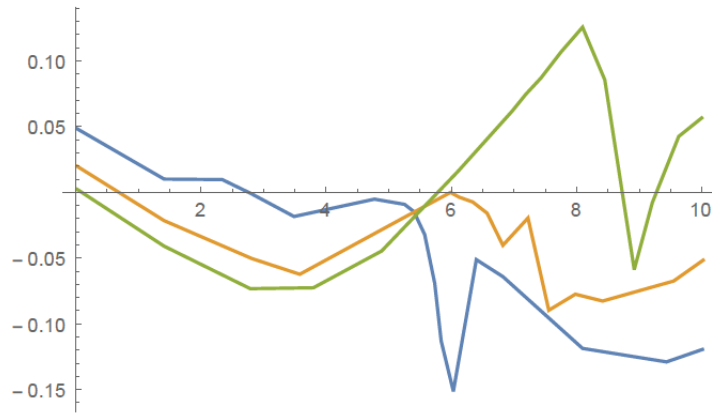


Figura 5.3.6: Lo mismo que en la figura 5.3.4 pero para las termopares en las posiciones de medición más bajas

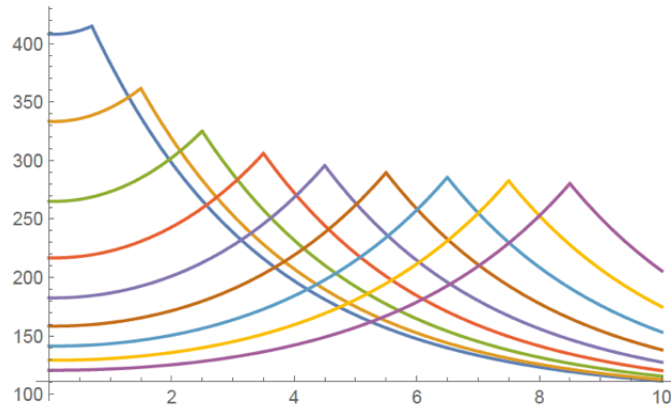


Figura 5.3.7: Perfiles de temperatura ($^{\circ}C$) como función del tiempo (hr) ajustados suponiendo la aproximación $\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}L \gg 1$.

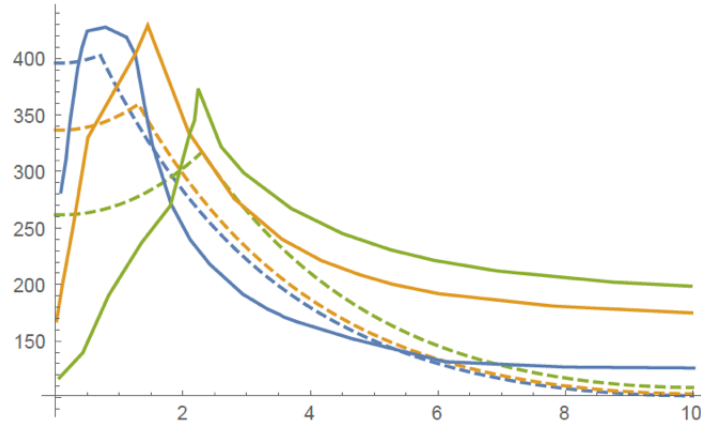


Figura 5.3.8: Ajuste de modelo analítico bajo la aproximación $\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}L \gg 1$ con datos experimentales tomados de la referencia [10] para los tres termopares más altos

cuantitativas sino cualitativas, si se toma en cuenta que la forma de la región de temperaturas más altas es redondeada en contraste del pico asumido por el modelo analítico. Sin embargo, la región posterior a esta zona es también bastante apegada al comportamiento registrado experimentalmente.

Por otro lado las gráficas (5.3.9) y (5.3.10) muestran que las curvas experimentales están bastante cercanas a las curvas que provee el modelo, sin embargo en este caso la altura de los máximos de los frentes correspondientes a cada termopar no muestran la misma tendencia.

Los errores relativos locales asociados a cada una de estas curvas también fueron calculados y muestran las mismas características encontradas para el modelo anteriormente discutido. Es decir, las confrontaciones correspondientes a los dos primeros termopares contribuyen con la mayor parte de los errores del orden del 40 % especialmente para los puntos en torno a la región en torno al máximo de temperatura o zona de combustión. El resto de los puntos y curvas asociadas a los otros termopares presentan errores relativos bastante más pequeños de tal forma que en conjunto y de manera global el error de la aproximación es del 18 %.

5.4. Discusión de los resultados

En este capítulo hemos realizado una simulación numérica del frente de calor desplazándose a lo largo del tubo de combustión utilizando el método de diferencias finitas. Estas nos sirvieron para estimar de manera gruesa los parámetros involucrados en la ecuación diferencial imponiéndose las condiciones iniciales y de frontera discutidas en la sección 5.1.

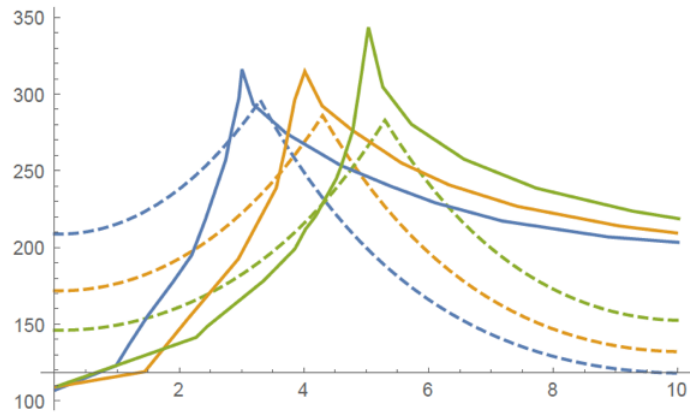


Figura 5.3.9: Lo mismo que en la figura 5.3.7 pero para los tres termopares intermedios.

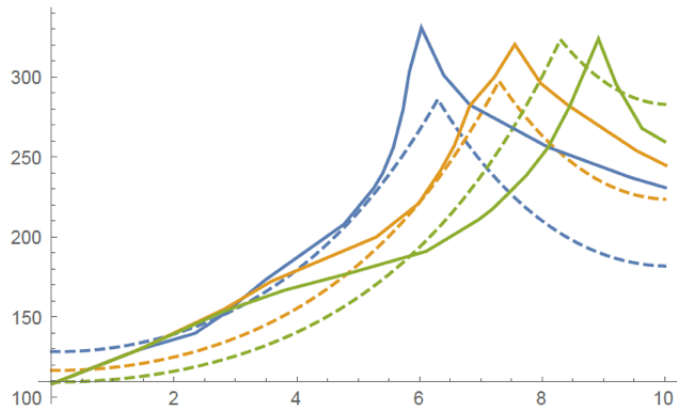


Figura 5.3.10: Lo mismo que en la figura 5.3.7 pero para los tres termopares de posiciones más bajas.

Impusimos además el comportamiento cualitativo del frente de calor observado en los experimentos. Posteriormente ajustamos el perfil de temperatura analítico obtenido en el capítulo 4 a un conjunto de datos experimentales reportados en la literatura mediante la minimización de su varianza en función de los parámetros del modelo analítico. Este procedimiento nos llevó a plantear un conjunto de ecuaciones algebraicas para los parámetros mencionados las cuales resolvimos numéricamente partiendo de los valores arrojados por la simulación numérica como primera aproximación. Cabe mencionar que la etapa numérica no es indispensable sin embargo redujo el tiempo para optimizar los parámetros correspondientes. Además de proveernos de una perspectiva complementaria que nos muestra la consistencia de nuestro modelo. Este ajuste de parámetros lo realizamos utilizando dos versiones del modelo analítico. El primero, el más exacto, para el cual solo ignoramos la parte transitoria rápida discutida en la última sección del capítulo 4 y el segundo en donde supusimos que el ancho del frente de calor es menor que el largo del tubo e ignoramos la parte estacionaria del perfil de temperaturas. Las comparaciones de ambos ajustes con las mediciones experimentales tomados de la literatura se muestran en las figuras (5.3.1)-(5.3.3) y (5.3.8)-(5.3.10). Una estimación cualitativa de la confiabilidad de estos ajustes lo obtuvimos calculando la desviación estándar relativa de cada ajuste la cual resultó ser de 15% para el primero y de 18.5% para el segundo. Esta relativamente corta diferencia entre la bondad de ambos ajustes deja ver que la diferencia entre ambos modelos es en cierta forma cualitativa como se puede ver comparando los perfiles de ambos frentes en las figuras (5.3.1) y (5.3.3) ya que solo consiste en un pequeño cambio en la dependencia de la altura de los frentes conforme se desplazan por el tubo. Este hecho podría sugerir utilizar el modelo más simplificado para realizar el ajuste y la inversión de datos para obtener las propiedades del medio bajo el argumento de simplificar el algoritmo utilizado.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se llevó a cabo un estudio analítico con validación numérica del perfil de temperaturas a través de un tubo de combustión In Situ. Se utilizó uno de los modelos unidimensionales más conocidos para describir dicho proceso. Estudiamos detalladamente cada una de las soluciones involucradas y asociadas a los distintos procesos involucrados en este fenómeno. Discutimos la manera en la cual las ecuaciones de masa de los fluidos involucrados se desacopla de la ecuación de energía asumiendo que todos éstos se desplazan simultáneamente en un mismo frente de onda. Cambiando de sistema de referencia la ecuación para el perfil de temperatura se obtiene una ecuación cuyos coeficientes dependen de la coordenada espacial que es resultado de la distribución de la distribución de los fluidos en torno al frente de combustión. Esta distribución de materiales en torno al frente se representa en la literatura actual del área a través de esquemas del perfil de saturación (Fig. 2.4.1) lo cual genera coeficientes para la ecuación de temperatura que son constantes por intervalos, lo que significa que el perfil de temperatura conserva globalmente su forma de exponenciales decaentes. Por esta razón resolvemos dicha ecuación utilizando el método asintótico de la envolvente lenta mediante el cual mostramos que el perfil de temperaturas es aproximadamente el mismo que si se propagara en un medio homogéneo con la condición de que las funciones en sus coeficientes sean sustituidas por sus valores efectivos los cuales resultan de un promedio ponderado de sus valores asumidos a lo largo del tubo.

De esta manera calculamos analíticamente el perfil de temperaturas estacionario soportado por las condiciones de frontera de flujo a través de los bordes del tubo. Calculamos los dos perfiles transitorios caracterizados por tiempos de respuesta distintos a saber minutos y horas. El primero encargado de unir la distribución de temperaturas al instante inicial con la correspondiente distribución que forma el frente de calor ya establecido. El segundo correspondiente propiamente al frente de calor desplazándose de manera robusta por el tubo

a velocidad constante para recorrer éste completamente y cambiando adiabáticamente su forma y amplitud. Así también calculamos numéricamente una solución simple del mismo proceso de conducción de calor utilizando diferencias finitas y mostramos que los resultados son consistentes tanto con la descripción analítica como con datos experimentales de este tipo de experimentos publicados en la literatura. La solución numérica nos permitió estimar de manera gruesa una parte de los valores de los parámetros involucrados en la ecuación diferencial parcial que describe nuestro fenómeno. Estos y el resto de los parámetros fueron determinados completamente ajustando nuestra solución analítica a los datos experimentales tomados de la literatura. Nuestro análisis sugiere un proceso mediante el cual podemos determinar los parámetros que caracterizan al medio que rellena al tubo de conducción mediante un ajuste los datos experimentales para el perfil de temperatura mencionados. Se observó que el mejor ajuste a los parámetros con 16 % de desviación estándar se consiguió con la solución analítica pero ignorando la parte transitoria rápida, esto es debido a que en esta parte no se está considerando la hipótesis de que el frente de onda sea más pequeño que la longitud del tubo.

Una de las ventajas de resolver analíticamente la ecuación de difusión advección con fuente es que nos permite encontrar los coeficientes de la ecuación a partir de los valores experimentales para diferentes tiempos y posiciones de cada termopar es decir a partir de este modelo tenemos las bases para poder realizar una inversión. Por tanto, partiendo de los perfiles de temperatura obtenidos experimentalmente por otros autores en experimentos en tubos de combustión in-situ, y de nuestra solución analítica de la ecuación de difusión advección con fuente; podemos obtener algunos de los parámetros bajo los cuales se realizó el experimento tales como: velocidad de onda de convección, constante de pérdida de calor, flujo de calor en las fronteras, difusión y advección térmica, perfil de temperatura gaussiana, flujo de calor, ubicación del punto de ignición.

Las desviaciones estándares más grandes que se obtuvieron entre el modelo analítico y los datos experimentales están cerca de los picos que corresponden al primero y segundo termopar, esto es debido a que en esa zona la temperatura supera la temperatura crítica mencionada en el apéndice A y la región en donde se efectúa la combustión es del orden de centímetros, por lo tanto la dinámica del flujo de las distintas componentes de masa es importante y eso fue lo que aproximamos nosotros por que estamos suponiendo que la región de combustión es despreciablemente angosta, en esos dos perfiles asociados se nota que la región de combustiones mide algunos centímetros.

El estudio analítico realizado en este trabajo puede servir además para estudiar la parte

transitoria rápida inicial (minutos) que ocurre cuando se inicia el experimento de combustión In Situ la cual no ha sido reportada explícitamente en la literatura hasta donde tenemos conocimiento. Una comparación de nuestra solución con valores experimentales para esa parte que podría considerarse como preámbulo del fenómeno término estudiado aquí, puede proveer información adicional sobre este fenómeno térmico. De hecho existe evidencia experimental que el gradiente de calentamiento en la cinta de ignición juega un rol muy importante en la formación del frente de combustión robusto, esto se refiere a que la energía proporcionada por la cinta de ignición se capaz de formar un frente de combustión con un ancho pequeño en comparación con la longitud del tubo, si cumple estas condiciones será menos propenso a verse afectado por el freno que representa el medio denso. Una vez logrado esto, las reacciones químicas que puedan existir entre el carburante y el combustible, serán primordiales para la exitosa propagación del frente de combustión y sobre todo para una recuperación de hidrocarburo suficiente. Todos estos fenómenos ocurren entre los primeros 70 minutos aproximadamente.

Otra de las mejoras importantes a este análisis que podemos considerar es que hay que tomar en cuenta, al menos en la región de los picos correspondientes al primer y segundo termopar donde el valor máximo del error porcentual del modelo alcanzó 40 %. Esta diferencia importante muestra que en esta región varias de las hipótesis utilizadas para construir el modelo no se sostienen. Por ejemplo la distribución de las diversas saturaciones deben ser radicalmente distintas de la distribución terminal alcanzada posteriormente. Mas aún, es posible que los frentes de masa correspondientes a cada uno de los fluidos se mueven a distintas velocidades dando lugar a un frente de calor cuya constitución va cambiando instante a instante y punto a punto. La solución numérica de las ecuaciones de masa acopladas a la ecuación de energía sería recomendable para ajustar el comportamiento medido en los dos primeros termopares. Sin embargo, la excelente coincidencia que se refleja por la pequeña varianza obtenida al enfrentar datos experimentales y modelo analítico muestra que en los siete termopares restantes las hipótesis de trabajo se cumplen.

Otra posible perspectiva de este trabajo es tomar en cuenta que la energía térmica se propaga a velocidad finita lo cual solo es posible describirlo si se sustituye la ley de Fourier una ecuación constitutiva que tome en cuenta esto. En la literatura contemporanea existen algunas propuestas para tomar en cuenta este punto y alguno de estos modelos se podría considerar para mejorar este aspecto.

Apéndice A

Conservación de la masa

A.1. Ecuaciones para la conservación de la masa de los fluidos

En este apéndice se deducirá la ecuación de conservación de la masa para un fluido que se mueve en el interior de un medio poroso, con el fin de revisar brevemente los conceptos involucrados en este proceso [11, 33]. Muchos problemas interesantes de fluidos multifásicos se pueden encontrar en el contexto de la ingeniería, como son aquellos que involucran dispersión y fases mixtas. Este tipo de problemas no siempre son fáciles de resolver. Ya sean multifluidos o modelos homogéneos basados en técnicas promedio sobre el espacio y/o el tiempo, pueden ser empleadas, para tomar en cuenta interfaces detalladas microscópicamente entre la frontera de fases no necesitan estar explícitamente identificadas, varias técnicas promedio son utilizadas, y se usan para obtener parámetros adimensionales que correlacionan los datos experimentales, tales como un mapa de flujo bifásicos. *La formulación instantánea local es fundamentalmente básica para todos los modelos de flujo de dos fases, independientemente del método promedio empleado.* Cuando cada sub-región es encerrada por interfaces que pueden ser consideradas como continuas, la formulación instantánea local es matemáticamente rigurosa. Consecuentemente todos los modelos de flujo de dos fases deberían empezar con esta formulación y proceder por aplicación de métodos de promedio apropiado. Por ejemplo *si el promedio espacial es realizado para cada fase individual dentro de un volumen de control multi fase, el modelo multi fase es obtenido.* Si el promedio es realizado sobre todas las fases en el volumen de control, el modelo homogéneo es obtenido.

El objetivo de utilizar varios métodos promedio son dobles:

1. *Para definir las propiedades promedio de un sistema multi fase y correlacionar los datos experimentales.*

2. Para obtener la solución de la ecuación gobernante, que puede ser usada para predecir las propiedades microscópicas del sistema multifásico.

El promedio Euleriano está basado en la descripción del espacio-tiempo de un fenómeno físico, en dicha descripción los cambios en varias variables dependientes, tales como: la velocidad, temperatura y presión, son expresadas como funciones de variables independientes como el espacio y tiempo. Uno puede promediar estas variables independientes sobre el espacio y tiempo [11, 33].

Para una función generalizada $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$, el promedio Euleriano más ampliamente utilizado incluye tiempo y volumen promedio. El tiempo promedio Euleriano es obtenido promediando las propiedades de flujo sobre un cierto periodo de tiempo Δt , para un punto fijo en un punto de referencia, es decir:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \Phi(x, y, z, t) dt \quad (\text{A.1.1})$$

Durante este periodo de tiempo, diferentes fases pueden fluir a través de un volumen de control fijo. El promedio de tiempo Euleriano es particularmente útil para flujos multifásicos turbulentos tanto como para los sistemas de fase dispersos.

El promedio volumétrico *Euleriano es usualmente empleado sobre un volumen elemental Δv , alrededor del punto fijo (x, y, z) en el fluido. Para un sistema multifásicos donde incluyen diferentes fases Π , el volumen total es igual a la suma de los volúmenes de fases individual*; es decir:

$$\Delta V = \sum_{k=1}^{\Pi} \Delta V_k. \quad (\text{A.1.2})$$

La fracción del volumen de la fase k . Por otro lado, ε_k está definido como la razón del volumen elemental ocupada por la fase k , y el volumen elemental total de todas las fases, es decir

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta V_k}{\Delta V} \quad (\text{A.1.3})$$

La fracción de volumen de todas las fases debe sumar la unidad $\sum_{k=1}^{\Pi} \varepsilon_k = 1$

El promedio de volumen Euleriano esta expresado como

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^{\Pi} \int_{\Delta V_k} \Phi_k(x, y, z, t) dV \quad (\text{A.1.4})$$

$\langle \Phi \rangle$ representa el promedio de todas las fases.

Para alguna variable o propiedad que está asociada con una fase particular, Φ_k , el valor de fase promedio de alguna variable o propiedad de esta fase es obtenida con la siguientes ecuaciones:

Promedio de fase intrínseco, es tomado *únicamente sobre el volumen de la fase k*

$$\langle \Phi_k \rangle^k = \frac{1}{\Delta V} \int \Phi_k dV \quad (\text{A.1.5})$$

Promedio para la fase extrínseca. Esta propiedad significa que *depende de la relación de fases con otras fases en un volumen elemental*. Para este caso es tomada sobre una fase particular un volumen elemental entero

$$\langle \Phi_k \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int \Phi_k dV \quad (\text{A.1.6})$$

Estos dos promedios de fase están relacionados por:

$$\langle \Phi_k \rangle = \varepsilon_k \langle \Phi_k \rangle^k \quad (\text{A.1.7})$$

El promedio de la fase intrínseca y extrínseca, definidas en las ecuaciones A.1.5 y A.1.6 están relacionadas con el promedio de volumen definido en la ecuación A.1.4

$$\langle \Phi \rangle = \sum_{k=1}^{\Pi} \langle \Phi_k \rangle = \sum_{k=1}^{\Pi} \varepsilon_k \langle \Phi_k \rangle^k \quad (\text{A.1.8})$$

La desviación de un valor intrínseco respectivo del promedio de fase es

$$\hat{\Phi}_k \equiv \Phi_k - \langle \Phi_k \rangle^k \quad (\text{A.1.9})$$

Cuando el producto de dos variables son promedios de fase, las siguientes relaciones son necesarias [?]:

$$\langle \Phi_k \Psi_k \rangle^k = \langle \Phi_k \rangle^k \langle \Psi_k \rangle^k + \langle \hat{\Phi}_k \hat{\Psi}_k \rangle^k, \quad (\text{A.1.10})$$

$$\langle \Phi_k \Psi_k \rangle = \varepsilon_k \langle \Phi_k \rangle^k \langle \Psi_k \rangle^k + \langle \hat{\Phi}_k \hat{\Psi}_k \rangle. \quad (\text{A.1.11})$$

Ahora bien para obtener el volumen promedio de las ecuaciones gobernantes, el volumen promedio de la derivada parcial con respecto al tiempo y al gradiente puede ser obtenido para el siguiente teorema de transporte general:

$$\left\langle \frac{\partial \Omega_k}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \Omega_k \rangle}{\partial t} - \frac{1}{\Delta V} \int_{A_k} \Omega_k \mathbf{V}_I \cdot \mathbf{n}_k dA \quad (\text{A.1.12})$$

Donde A_k es el área interfacial rodeando la fase k dentro del volumen de control ΔV , ΔV_k es el volumen ocupado por la fase k en el volumen de control ΔV , \mathbf{V}_I es la velocidad interfacial y \mathbf{n}_k es el vector normal unitario. El volumen promedio del gradiente es

$$\langle \nabla \Omega_k \rangle = \nabla \langle \Omega_k \rangle + \frac{1}{\Delta V} \int_{A_k} \Omega_k \mathbf{n}_k dA \quad (\text{A.1.13})$$

$$\langle \nabla \cdot \Omega_k \rangle = \nabla \cdot \langle \Omega_k \rangle + \frac{1}{\Delta V} \int_{A_k} \Omega_k \mathbf{V}_I \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{A.1.14})$$

Ahora aplicamos la teoría anteriormente descrita para nuestro caso particular, la ecuación de continuidad que se consideró como un flujo multifásico de fluidos. El promedio volumétrico de la ecuación de continuidad para la fase k se obtiene tomando el promedio global de las ecuaciones locales de continuidad para cada fase [11]

$$\left\langle \frac{\partial \rho_k}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) \rangle = 0 \quad (\text{A.1.15})$$

en donde ρ_k es la densidad y \mathbf{v}_k es la velocidad Euleriana para cada fase. Para intercambiar las derivadas parciales con los promedios es necesario tomar en cuenta los elementos de masa transferida a través de las fronteras de los volúmenes conteniendo cada fase, es decir consideremos la masa que pasa de una a otra fase (para una fase es una fuente y para la otra un sumidero). Esto da lugar a las siguientes expresiones

$$\frac{\partial \langle \rho_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle = - \sum_{j=1(j \neq k)}^N \dot{m}_{jk} \quad (\text{A.1.16})$$

en donde

$$\dot{m}_{jk} = - \frac{1}{\Delta V} \int \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{n}_k dA_k \quad (\text{A.1.17})$$

siendo \dot{m}_{jk} es la tasa de masa transferencia por unidad de tiempo y volumen de la fase j a la fase k debida a un cambio de fase. El promedio global de densidad de fase $\langle \rho_k \rangle$ está

relacionado con el promedio interno $\langle \rho_k \rangle^k$ a través de la expresión $\langle \rho_k \rangle = \phi_k \langle \rho_k \rangle^k$ como en A.1.7. De hecho $\langle \rho_k \rangle^k = \rho_k$, que es la densidad del fluido. Asimismo utilizando la relación para el producto de variables aleatorias respecto a un promedio ver las ecuaciones A.1.9 y A.1.10 A.1.11 después de haber utilizado las relaciones entre el promedio interno y el promedio global mencionada arriba. Sustituyendo estas expresiones en la ec. (A.1.16) se obtiene

$$\frac{\partial (\phi_k \langle \rho_k \rangle^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi_k \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k) = - \sum_{j=1(j \neq k)}^N \dot{m}_{jk} \quad (\text{A.1.18})$$

en donde las desviaciones del promedio $\langle \hat{\rho}_k \hat{v}_k \rangle$ son generalmente despreciables en comparación con el término $\phi_k \langle \rho_k \rangle^k \langle v_k \rangle^k$ debido a que son las correlaciones entre las variables de densidad y velocidad son por lo regular independientes, es decir los cambios entre ellas no están relacionadas, por tanto se han eliminado. Consideremos ahora el flujo de un fluido en un medio poroso [12]. Un fluido saturado puede ser considerado como que está formado por dos fases el medio poroso y el fluido. Como no existen cambios de fases entre estos medios, en este caso el lado derecho de la ecuación anterior es nulo por lo que se reduce a

$$\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \langle v \rangle) = 0 \quad (\text{A.1.19})$$

en donde para este caso $v = \langle v \rangle = \phi \langle v_k \rangle^k$ es la velocidad global o intrínseca de los fluidos que se transportan dentro de un medio poroso, la velocidad siempre será un promedio. A partir de esta deducción podemos analizar las ecuaciones de continuidad para un medio poroso, apéndice B

Apéndice B

Balance de masa en un tubo de combustión

En esta sección haremos una breve revisión del balance de materia en un tubo de combustión siguiendo de cerca los desarrollos de la referencia [8]. El tubo de combustión se representa como un medio poroso homogéneo en el que coexisten simultáneamente tres fluidos: combustible o aceite, agua y gas los cuales se pueden transformar entre ellos a través de procesos físicos como la evaporación o procesos químicos como la combustión [8]. Las ecuaciones de balance de masa en una dimensión son las siguientes.

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \rho_g S_g + \frac{\partial}{\partial x} \rho_g v = S + P \quad (\text{B.0.1})$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \rho_w S_w + \frac{\partial}{\partial x} \rho_w v = -P \quad (\text{B.0.2})$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \rho_o S_o + \frac{\partial}{\partial x} \rho_o v = -S \quad (\text{B.0.3})$$

Aquí la velocidad de cada fase está dado por $\nu = \frac{k_m}{\mu_m} \frac{\partial p}{\partial x}$ que es la ley de Darcy (véase sec (2.3.4)) y ρ_g , ρ_w y ρ_o son las densidades del gas, el agua y combustible; S_k es la saturación en sus diferentes fases; ϕ es la porosidad, k_m es la permeabilidad efectiva de la matriz sólida; μ_m viscosidad de la matriz sólida.

Similarmente, las ecuaciones de conservación de masa se pueden escribir para el oxígeno y el vapor de agua presentes en el gas de la siguiente forma

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} f_s \rho_g S_g + \frac{\partial}{\partial x} f_s \rho_g v = -M_a S \quad (\text{B.0.4})$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} f_a \rho_g S_g + \frac{\partial}{\partial x} f_a \rho_g v = P + M_s S \quad (\text{B.0.5})$$

en donde f_a es la fracciones de masa de oxígeno y f_s es la fracción de masa de vapor de agua. Aquí M_a es el cociente de oxígeno entre el vapor producido entre combustible quemado, y M_s es el cociente de vapor de agua consumido entre el vapor producido entre combustible quemado.

Las fuentes de masa de las ecuaciones anteriores son los miembros que hemos colocado al lado derecho de la igualdad y están gobernados por dos tipos de procesos: evaporación y combustión. La siguiente ecuación nos da la *cantidad de masa de agua líquida transformada en vapor o en sentido contrario la condensación del agua*.

$$P = ba(p^* - p_v) \quad (\text{B.0.6})$$

en donde p^* es la presión de vapor del agua y p_v es la presión parcial de su fase gaseosa. Aquí a es el área transversal interfacial y b coeficiente de evaporación o condensación. Se está suponiendo que el agua está efectivamente presente pero en caso contrario se toma a p^* como cero.

Si se supone que el combustible se quema directamente en la presencia del oxígeno y no ocurren reacciones intermedias dando lugar a otros procesos. *La razón de combustión puede calcularse con una expresión del tipo Arrhenius*

$$S = Z (\phi S_a \rho_g S_g)^m (\phi S_o \rho_o)^n \exp\left(-\frac{E}{R(T + 460)}\right) \quad (\text{B.0.7})$$

que expresa la creación de los productos de la combustión a partir de los compuestos recastaste. Aquí E es la energía de activación asociada a la reacción y R es la constante universal de los gases. Al proponer esta expresión como la razón de cambio de la cantidad de aceite consumido por unidad de tiempo . la concentración del producto es proporcional a las potencias m y n de las concentraciones de los reactantes presentes en consistencia con la argumentación esgrimida dentro de la cinética química usual. Es importante mencionar por una parte, que el factor de proporcionalidad incluye el término $\exp(-E/RT)$ que depende explícitamente de la temperatura y hace en principio que este sistema de ecuaciones para la conservación de la masa esté acoplado con la ecuación de balance de energía que tiene como variable dependiente a la temperatura. Por otra parte la presencia de dicho factor pondera de manera importante la proporción de reactantes que se transforman en productos, siendo estos considerables cuando la temperatura local del sistema iguala o sobrepasa el umbral $T(^{\circ}R) > E/R$, mientras que por debajo de este valor la fracción de los reactantes que llevan a cabo la combustión es despreciable. El valor de la energía de activación reportado en [8] es $E = 2200 \text{Btu} - \text{lb}/(\text{mol})$ mientras que la constante de los gases en unidades consistentes es

$R = 1.987 \text{ Btu} \cdot \text{lb} / (\text{mol}^0 R)$ así que $E/R = 1107^\circ R = 615^0 K$ lo que corresponde a un umbral $T(^{\circ}C) > 342^{\circ}C$. Así para temperaturas menores que este umbral la proporción de reactivos que se oxidan es despreciable debido a que el factor exponencial decayente de Arrhenius es prácticamente nulo cuando su exponente es mayor que 1. Si además observamos la gráficas experimentales de perfiles de temperaturas registradas en los experimentos de tubo de combustión In Situ Figs. (2.6.2) y (2.6.3), notamos que solo en los tres primeros perfiles el pico de la distribución de los dos primeros registros del frente temperaturas, tomados por los dos primeros termopares, (de arriba hacia abajo) supera este valor umbral. Es decir para resto de puntos del frente de combustión, la conversión de reactivos a productos se puede aproximar únicamente como que ocurre solamente para aquellos compuestos que se hallan justamente en el pico del frente de combustión que es el lugar en donde se registra la mayor temperatura. A dicha región se le suele llamar en la literatura la zona de combustión. De esta manera los coeficientes de la ecuación (5.1.6) se puede aproximar como constantes fuera de la pequeña región que define la zona de combustión. De hecho esta diferencia en escalas espaciales que están involucradas en los experimentos In Situ del tubo de combustión han permitido a varios autores desarrollar tratamientos asintóticos para describir este sistema [7].

B.1. Determinación del valor de las saturaciones.

Los siguientes cálculos matemático se realizan con la finalidad de poder determinar el valor de las saturación para cada uno de los componentes de la mezcla del tubo de combustión (agua, gas, aceite). En primer lugar buscamos encontrar el momento en que se sincronizan los 3 frentes de combustión (agua, gas y aceite) que dan lugar a la combustión ya que a partir de ese momento comienzan a moverse a velocidad constante como puede apreciarse entre cada cresta o valle del frente.

Partiremos de las ecuaciones de conservación de masa para las tres fases descritas en las expresiones B.0.1 B.0.2 B.0.3, así como de las expresiones definidas en B.0.4 B.0.5, que representan la cantidad de masa de agua líquida transformada en vapor B.0.6 y por último la ecuación de Arrhenius B.0.7, proporcionada en el apéndice B.

Ecuación de advección-difusión

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial T}{\partial x} - \gamma(T - T_0) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.1.1})$$

donde $\alpha = \frac{\varpi}{\rho}$, ϖ la asumimos como constante. Las variables $\alpha \beta \gamma$ fueron deducidas en el

capítulo 3, sección 3.2, ver 3.2.12

$$\beta = -\frac{1}{\theta} [(\phi v_F (S_w \rho_w c_w + S_o \rho_o c_o + S_g \rho_g f_s c_w + S_g c_g \rho_g (1 - f_s))) + ((1 - \phi) v_F c_m) -] \quad (\text{B.1.2})$$

$$\phi (S_w \rho_w c_w v_w + S_o \rho_o c_o v_o + S_g \rho_g f_s c_w v_g + S_g c_g \rho_g (1 - f_s) v_g)$$

$$\gamma = \frac{1}{\theta} \quad (\text{B.1.3})$$

$$\alpha = \frac{(1 - \phi) \kappa_m + \phi (S_w \rho_w \kappa_w + S_o \rho_o \kappa_o + S_g \rho_g f_s \kappa_w + S_g \kappa_g \rho_g (1 - f_s))}{\theta} \quad (\text{B.1.4})$$

$$\theta = \phi (S_w \rho_w c_w + S_o \rho_o c_o + S_g \rho_g f_s c_w + S_g c_g \rho_g (1 - f_s)) + (1 - \phi) c_m \rho_m \quad (\text{B.1.5})$$

Partiendo de la ecuación B.0.1, derivamos, despejamos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_g k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + S + P = \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g S_g)$$

$$\frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial k_g}{\partial S_g} \frac{\partial S_g}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho_g k_g}{\mu_g^2} \frac{\partial \mu_g}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_g k_g}{\mu_g} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + S + P = \phi \rho_g \frac{\partial S_g}{\partial t} \quad (\text{B.1.6})$$

La ec. B.1.6 es una ecuación diferencial parcial de primer orden lineal para la variable S_g . Para resolver la ecuación, se utiliza el método de las curvas características (ver por ejemplo ref [31]) la cual consiste en transformar la ecuación diferencial parcial en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Dichas ecuaciones se establecen en base a los coeficientes de la ecuación diferencial parcial original. Esto es

$$\frac{dx}{\frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial k_g}{\partial S_g} \frac{\partial p}{\partial x}} = -\phi \rho_g dt = -\frac{dS_g}{\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho_g k_g}{\mu_g^2} \frac{\partial \mu_g}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_g k_g}{\mu_g} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + S + P} \quad (\text{B.1.7})$$

Iguualamos la primera igualdad con la tercera

$$\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k_g \rho_g}{\mu_g^2} \frac{\partial \mu_g}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_g k_g}{\mu_g} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + S + P = -\frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial k_g}{\partial S_g} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{B.1.8})$$

dividiendo toda la ecuación anterior por $\frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x}$ obteniendo

$$\frac{\partial k_g}{\partial x} + \left(\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} - \frac{1}{\mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial x} + \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}{\frac{\partial p}{\partial x}} \right) k_g = -\frac{(S + P)}{\frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x}} \quad (\text{B.1.9})$$

Por el factor integrante

$$I = e^{\int \left(\frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} - \frac{1}{\mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) dx} = e^{\int \left(\ln \rho_g - \ln \mu_g + \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx} = e^{\ln \left(\frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x} \right)} = \left(\frac{\rho_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

El factor integrante se multiplica por la B.1.9, obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_g \rho_g}{\mu_g} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right) = -(S + P)$$

Integrando con respecto a x

$$\frac{k_g \rho_g}{\mu_g} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = - \int (S + P) dx + E$$

Una segunda ecuación diferencial ordinaria se puede establecer a partir de la segunda y tercera igualdad de la ec. (B.1.7) lo cual resulta ser

$$\phi \rho_g \frac{\partial S_g}{\partial t} = \frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \mu_g}{\mu_g^2} k_g \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_g k_g}{\mu_g} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + S + P$$

Suponiendo que $\frac{\partial p}{\partial x} = cte$, significa que la caída de presión con respecto a la longitud del tubo es constante. Entonces $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$

En esta hipótesis se considera que la presión cambia lentamente como función de la longitud del tubo en relación a la longitud total del tubo, de tal forma que en esta aproximación basta con considerar la primera derivada $\frac{\partial p}{\partial x}$ para tomar en cuenta sus variaciones.

Integramos con respecto a t

$$S_g = - \frac{1}{\phi \rho_g} \int (S + P) dt + \frac{1}{\phi \rho_g} \int k_g \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho_g}{\mu_g} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] dt + C \quad (\text{B.1.10})$$

$$S_g = - \frac{1}{\phi \rho_g} \int (S + P) dt + \frac{1}{\phi \rho_g} \int k_g \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho_g}{\mu_g} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] dt + u \left(\frac{k_g \rho_g}{\mu_g} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \int (S + P) dx \right) \quad (\text{B.1.11})$$

en donde u es también una función arbitraria pero de solo una variable independiente. Dado que una de las soluciones más representativa de la ecuación de continuidad es un frente de onda desplazándose a velocidad constantes además de que este mismo fenómeno se observa en los experimentos, supondremos que $u(r)$ es de hecho una función lineal para que la dependencia de S_g en x sea del mismo tipo que la respectiva dependencia de S_g en t , de tal suerte que S_g resulte ser una función explícita solamente de la variable $x/v - t$, que es la variable natural de un frente de onda, en donde v es la velocidad del frente de

onda. Si además tomamos en cuenta el hecho de que el término aportado por $u(r)$ debe ser adimensional como el primer término que aparece en la ec. (B.1.11), es conveniente escoger $s(r) = -r/(\rho_g v)$. Entonces la saturación para el agua, aceite y gas es:

$$S_g = -\frac{1}{\phi \rho_g} \int (S + P) dt + \frac{1}{\phi \rho_g} \int k_g \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho_g}{\mu_g} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] dt + \frac{1}{\rho_g v} \int (S + P) dx + \frac{k_g}{\mu_g v} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$S_g = \frac{1}{\phi \rho_g} \int k_g \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho_g}{\mu_g} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] dt - \frac{k_g}{\mu_g v} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_g} \int (S + P) \left[\frac{dx}{v} - \frac{dt}{\phi} \right] \quad (\text{B.1.12})$$

Finalmente se utiliza el mismo método se pueden calcular las saturaciones para el agua, aceite, gas de oxígeno y vapor de agua.

Apéndice C

Aproximación de envolvente lenta para la temperatura

Como se mencionó en el capítulo 3, sección 3.2, se realizará una aproximación asintótica de envolvente lenta, partiendo de la ecuación de difusión-advección definida en 3.2.17.

$$\alpha(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta(x) \frac{\partial T}{\partial x} - \gamma(x)(T - T_0) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Sn embargo comenzaremos utilizando el método de separación de variables $T = \mathfrak{S}(x)R(t) + T_0$

$$\alpha(x)R(t) \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial x^2} + \beta(x)R(t) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} - \gamma(x)\mathfrak{S}(x)R(t) - \mathfrak{S}(x) \frac{\partial R(t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{C.0.1})$$

$$R(t) \left(\alpha(x) \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial x^2} + \beta(x) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} - \gamma(x)\mathfrak{S}(x) \right) = \mathfrak{S}(x) \left(\frac{\partial R(t)}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\alpha(x) \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial x^2} + \beta(x) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} - \gamma(x)\mathfrak{S}(x)}{\mathfrak{S}(x)} = \frac{\frac{\partial R(t)}{\partial t}}{R(t)} = -\sigma$$

en donde $\mathfrak{S}(x)$ y $R(t)$ son funciones de una sola variable. Igualando independientemente cada expresión a la constante de separación σ obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$\alpha(x) \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial x^2} + \beta(x) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} - \mathfrak{S}(x)(\gamma(x) - \sigma) = -\mathfrak{S}(x)\sigma \quad (\text{C.0.2})$$

y

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t} = -R(t)\sigma \quad (\text{C.0.3})$$

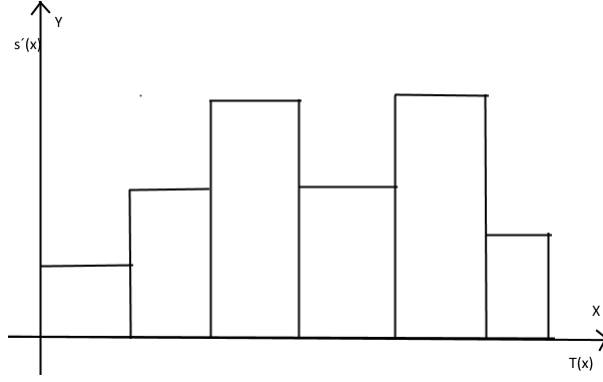


Figura C.0.1: Esquema de una función constante por intervalos

Primero resolvemos C.0.3, la única función que cumple que su derivada es proporcional a la función, es la función exponencial, por lo tanto $R(t) = ce^{-\sigma t}$. Por otro lado para resolver la ec. (C.0.2) proponemos la función de prueba $\mathfrak{S}(x) = e^{-s(x)}$, por lo que

$$\mathfrak{S}'(x) = -s'(x)e^{-s(x)}$$

$$\mathfrak{S}''(x) = s'(x)^2 e^{-s(x)} - s''(x)e^{-s(x)}, \text{ pero } s'(x)^2 \gg s''(x), \text{ entonces } \mathfrak{S}'(x) = s'(x)^2 e^{-s(x)}$$

sustituyendo en C.0.2

$$\alpha(x) \left(s'(x)^2 e^{-s(x)} \right) + \beta(x) \left(-s'(x)e^{-s(x)} \right) = -e^{-s(x)} \lambda$$

$$\alpha(x) \left(s'(x)^2 \right) - \beta(x) \left(s'(x) \right) + \lambda = 0 \quad (\text{C.0.4})$$

que es una ecuación algebraica para $s'(x)$ que podemos resolver para obtener

$$s'(x) = \frac{\beta(x) \pm \sqrt{\beta^2(x) - 4\alpha(x)(\lambda - \sigma)}}{2\alpha(x)}$$

integrando

$$s(x) = \int \left(\frac{\beta(x) \pm \sqrt{\beta^2(x) - 4\alpha(x)(\lambda - \sigma)}}{2\alpha(x)} \right) dx \quad (\text{C.0.5})$$

por lo tanto el perfil de temperatura está dado por

$$T = e^{-\alpha t} \left[C_+ e^{s_+(x)} + C_- e^{s_-(x)} \right]. \quad (\text{C.0.6})$$

Notemos que las funciones α , β , γ . involucradas en la ec. (C.0.5) son funciones de la posición pero son constantes por intervalos como se muestra en el esquema C.0.1. Esto

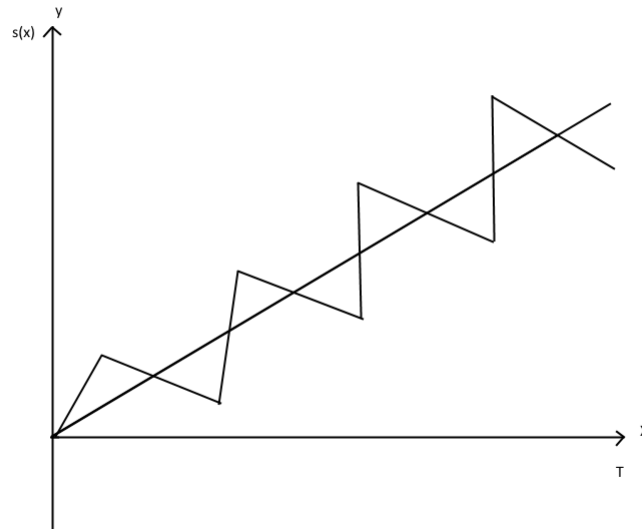


Figura C.0.2: Integral de la función del Figura anterior comparada con la integral del valor efectivo

es consecuencia del hecho de que las saturaciones también asumen valores constantes por intervalos como se muestra en el esquema (saturaciones). Por tanto la función $s'(x)$ tendrá la forma de una sucesión continua de rectas inclinadas con diferentes pendientes como se ve en el esquema C.0.2. Con el objeto de simplificar nuestra descripción aproximaremos dicha sucesión de rectas por una única recta con la condición de que el área bajo ésta sea la misma que la que está bajo la sucesión de rectas. Dicha condición en forma explícita toma la forma

$$s_{ef} \sum_{i=1}^N x_i = \int \frac{ds(x)}{dx} dx = \sum_{i=1}^N \frac{ds_i}{dx} x_i \quad (C.0.7)$$

en donde s_i son los valores constantes que asume la función en los intervalos de posición (x_{i-1}, x_i) como aparecen en el esquema 2a que corresponden a la fig. 2.4.1.

Esta aproximación es mucho menos burda si se toma en cuenta que además debemos tomar la exponencial decayente de estas funciones por lo que la diferencias entre ambas funciones sería exponencialmente pequeña si se compara los perfiles de temperaturas (véase Fig C.0.3). De esta manera llamaremos valores efectivos de α , β , γ a aquellos tomados por estas variables para dar lugar a la única recta de pendiente constante que sustituye a la curva formada por los segmentos de rectas. En este contexto la recta única representa la envolvente lenta de la sucesión de rectas con diferentes pendientes. Es decir en este trabajo tomaremos los valores efectivos y constantes para los parámetros mencionados lo cual es importante por

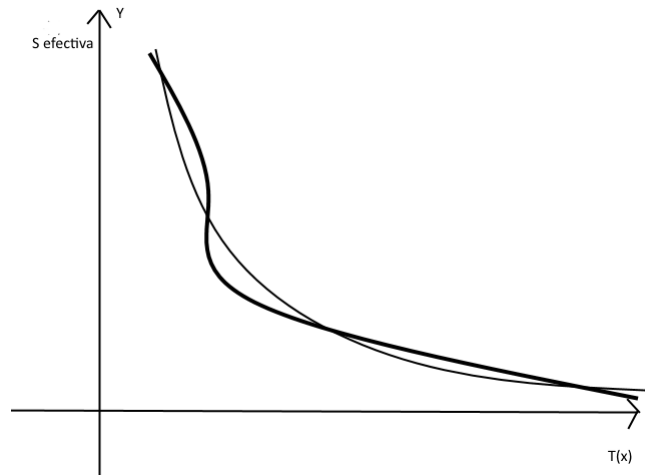


Figura C.0.3: Perfiles de temperaturas efectivo y realIntegra de la función del Figura anterior comparada con la integral del valor efectivo

que finalmente concluimos que a pesar de que los coeficientes sean contantes por intervalos se pueden aproximar como constantes siempre que se utilicen sus valores efectivos.

Bibliografía

- [1] Lake, L. W, Drilling Engineering, Volume II, Petroleum Engineering Handbook, 2006
- [2] M. Muskat, The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, first edition, McGraw-Hill book Company, 1937.
- [3] Prats M, Recuperación Mejorada de Hidrocarburos-Aplicaciones en Yacimientos Naturalmente Fracturados, Apuntes de curso, Depto. de Exploración y Explotación de Recursos Energéticos del Subsuelo, División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería, UNAM, 1997.
- [4] Boberg, T.C., Thermal methods of oil recovery, An Exxon Monograph Series , 1988.
- [5] Bailey, H. R., and Larkin, B. K., Conduction-convection in underground combustion, SPE Journal , vol. 219 , pp.320–331, 1960.
- [6] Rodriguez, J. R. (2004). Experimental and Analytical Study to Model Temperature Profiles and Stoichiometry in oxygen-enriched in-situ Combustion. Ph. D. Dissertation, College Station: Texas A&M University.
- [7] Akkutlu, I. Y., and Yortsos, Y. C., (2002) The Effect of Heterogeneity on in-situ Combustion: The Propagation Fronts in Layered Porous Media, presented at the SPE/DOE thirteenth symposium on improved oil recovery held in tulsa, Oklahoma SPE 75128.
- [8] Gottfried, B. S. (1965). A Mathematical model of thermal oil recovery in lineal system. Paper No. SPE 1117, SPE production research symposium, Tulsa, OK, May 3-4, pp. 196-210.
- [9] Penberthy, W. L., and Ramey, H. J. (1965). Design and operation of laboratory combustion tubes. Paper No. SPE 1290, SPE Annual Fall Meeting, Denver, CO. October 3-6, pp. 183-198.

- [10] Cazares-Candia, J. Cruz Hernández (2010). A Theoretical and Experimental Study of Combustion Tubes, Petroleum Science and Technology.
- [11] Faghri, A., and Zhang, Y., 2006, Transport Phenomena in Multiphase Systems, Elsevier, Burlington, MA.
- [12] Nield, D.A., and Bejan, A., 1999, Convection in Porous Media, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- [13] Rafael Rodriguez Nieto. Principios de Mecánica de Yacimientos, division de ingenieria en ciencias de la tierra, departamento de explotación del petróleo UNAM 1980.
- [14] Analoly B. Zololukhin, Jann-Rune Ursin, Fundamentals of Petroleum Reservoir Engineering, 1997.
- [15] Freddy Humberto Escobar Macualo, Ph. D., Fundamentos de Ingenieria de Yacimientos.
- [16] Partha S. Sarathi, in-situ Combustion Handbook-Principles and Practices, National Petroleum Technology office, U.S. Department of energy, tulsa, oklahoma, January 1999.
- [17] Donald Q. Kern, Procesos de Transferencia de Calor, continental, S. A de C.V., México, agosto de 1987, México D.F.
- [18] Matthew N. O. Sadiku, Elementos de Electromagnetismo, segunda edición, continental, S. A de C.V., Diciembre de 1993 México D. F. pg. 268
- [19] Juliusn Adams Stratton, Electromagnetic Theory, Massachusetts Institute of Technology, Wiley Interscience, University of Arizona 2007.
- [20] Richard Haberman, Applied Partial Differential Equations, Southern Methodis University, Prentice Hall third edition 2003.
- [21] Andreas Mandelis, Diffusion-wave fields : Mathematical Methods and Green Functions (New York, Springer Verlag, 2001)
- [22] Jerrold E. Marsden and Anthony J.Tromba, Calculo Vectorial, Addison-Wesley iberoamericana, tercera edición, 1991. 3.
- [23] Yuri N. Skiva y David Parra Guevara, Introducción a los métodos de dispersión y control de contaminantes, Universidad Nacional Autónoma de México 2011.

- [24] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, (Oxford University Press ,Oxford, 1959) 2da edición.
- [25] G. Arfken H. Weber and H. Harris, *Mathematical Methods for Physicist*, Academic Press, NewYork , 2012)
- [26] Willian H. Press et al, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (Cambridge 1986).
- [27] Lucio Carrillo Barandiaran, *apuntes de clase, Ingeniería de yacimientos*, Universidad Nacional De Ingeniería, Facultad de Ingeniería del Petróleo, edición 2006.
- [28] Jose S. Rivera, *practicass de ingeniera de yacimientos petrolíferos*, 2004.
- [28] Magdalena Paris de Ferrer, *Fundamentos de Ingeniería de Yacimientos*, Universidad de Zulia Venezuela de la facultad de Ingeniería del Petróleo, Ediciones Astro Data S.A. 1984
- [29] Sylvain J. Pirson, *Oil Reservoir Engineering*, Mc. Graw-Hill Book Company, Profesor de Ingenieria del Petróleo de la Universidad de Texas, 1965.
- [30] Zhangxin, Chen. *Reservoir Simulation, Mathematical Techniques in Oil Reco- very*. University of Calgary. Calgary, Alberta , Canada
- [31] *Elements of Partial Differential Equations*, Ian Sneddon, Mc. Graw-Hill Book Company, Tokio 1967.
- [32] Kay, *Mecánica de Fluidos y Transferencias de Calor*, Departamento de Energía Química de Cambridge1952
- [32] *Informe técnico 1, factores de recuperación de aceite y gas en México*, Comisión Nacional de Hidrocarburos, 4 de junio de 2010.
- [33] N. G. Van Kampen, , *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Elsevier, third edition, 2007.