



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA EN EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE  
RECURSOS NATURALES  
YACIMIENTOS

GEOMECÁNICA APLICADA A LA SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

MISAHIEL YEDRA PÉREZ

TUTOR PRINCIPAL

M.I. GARCÍA HERRERA MARIO GERARDO  
INSTITUTO MEXICANO DEL PETRÓLEO

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

---

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Samaniego Verduzco Fernando

Secretario: Dr. Camacho Velázquez Rodolfo Gabriel

Vocal: M.I. García Herrera Mario Gerardo

1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Rodríguez De La Garza Fernando

2<sup>d</sup> o. Suplente: Dr. Berumen Campos Sergio

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, Ciudad de México, México

**TUTOR DE TESIS:**

M.I. García Herrera Mario Gerardo

-----  
**FIRMA**

---

---

# Agradecimientos

*A la Universidad Nacional Autónoma de México, por darme la oportunidad de continuar mi desarrollo académico y la facilidad de realizar actividades deportivas y culturales en su hermoso campus universitario.*

*Al CONACYT, por brindarme el apoyo económico durante mis estudios.*

*A mis sinodales: Dr. Fernando Samaniego Verduzco, Dr. Rodolfo Gabriel Camacho Velázquez, Dr. Fernando Rodríguez de la Garza y el Dr. Sergio Berumen Campos, les agradezco las observaciones y comentarios realizadas a mi trabajo de investigación y aprovecho para resaltarles mi gran admiración por su trabajo y trayectoria profesional, la cual es sin duda, digna de reconocerse.*

*A mis profesores durante la maestría: Dra. Jetzabeth Ramírez Sabag, Dr. Eber Cinco Ley, Fis. Abraham de Swaan Oliva y al Dr. Erick Luna Rojero, por compartir su conocimientos y experiencias en clase.*

*En especial, a mi tutor el M.I. Mario Gerardo Herrera García, no solo por brindarme su apoyo en la realización de esta tesis, sino también, por impulsarme en busca de nuevos retos.*

*A mis padres, Ma. Del Pilar y José, por brindarme su apoyo incondicional en cada una de las acciones que he decidido emprender.*

*A mis hermanos, Ana Barbara y José, por brindarme su cariño y compañía a lo largo de estos años.*

---

# Resumen

La aplicación de la geomecánica en la industria petrolera ha venido cobrando fuerza desde hace ya varios años, la cual a sido aplicada con la finalidad de resolver problemáticas relacionadas a la compactación debida a la producción de hidrocarburos, subsidencia superficial, reactivación de fallas, además de su aplicación en la planificación de la perforación y en el fracturamiento hidráulico. En esta investigación se presenta la aplicación de la geomecánica en la simulación numérica de yacimientos, con el objetivo de incorporar el comportamiento mecánico de las rocas en las tareas de predicción y evaluación de los yacimientos petroleros.

Se presenta una descripción breve de los casos que demuestran la necesidad de considerar la geomecánica en el estudio del comportamiento de los yacimientos petroleros, tal y como es el caso de yacimientos del Mar del Norte, Sudamérica y del Golfo de México. Además, se detallan las bases para la aplicación de la geomecánica en la simulación numérica de yacimientos.

Posteriormente se presenta la explicación y derivación de los modelos matemáticos de flujo de fluidos considerando la deformación del medio poroso y del modelo de geomecánica empleado para determinar su deformación. Se considera flujo monofásico e isotérmico de un fluido de compresibilidad constante en un yacimiento heterogéneo y anisotrópico, cuyas propiedades petrofísicas están en función del esfuerzo medio y de la presión, suponiendo que la deformación del medio poroso ocurre de forma homogénea e isotrópica, de acuerdo con la teoría poroelástica lineal.

Se describen las estrategias principales de acoplamiento entre los modelos de flujo de fluidos y de geomecánica, así como la estrategia de acoplamiento realizada en este trabajo de investigación para el desarrollo de un simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos, en la que se emplea el método de diferencias finitas para su discretización.

Finalmente, la formulación matemática y numérica se probó resolviendo el problema de consolidación en una dimensión propuesto por Terzaghi, mientras que el simulador numérico desarrollado para esta investigación se empleo para evaluar diferentes aspectos en el comportamiento de los yacimientos petroleros, entre ellos: el efecto de las condiciones de frontera de cero desplazamiento y esfuerzo constante, así como el efecto de las propiedades elásticas y poroelásticas.



---

# Abstract

The application of geomechanics in the oil industry has been gaining strength in the last years, which has been applied in order to solve problems related to the compaction due to the production of hydrocarbons, surface subsidence, reactivation of faults, in addition to its application in the planning of drilling and hydraulic fracturing. This research, introduces the application of geomechanics in the numerical simulation of petroleum reservoirs, with the objective of incorporating the mechanical behavior of rocks in the tasks of prediction and evaluation of oil fields.

A brief description of the cases that demonstrate the requirement to consider geomechanics in the study of the behavior of oil deposits is presented, such as in the reservoirs from the North Sea, South America and the Gulf of Mexico. In addition, the theoretical basis for the application of geomechanics in the numerical simulation of reservoirs are detailed.

Subsequently, the explanation and derivation of the mathematical models of fluid flow is presented, considering the deformation of the porous medium and the geomechanics model used to determine that deformation. Monophasic and isothermal flow of a constant compressibility fluid in a heterogeneous and anisotropic reservoir is considered, whose petrophysical properties are a function of the average stress and pressure, assuming that the deformation of the porous medium occurs homogeneously and isotropically, according to the linear poroelastic theory.

The main coupling strategies between the fluid flow and geomechanics models are described, as well as the coupling strategy carried out in this research for the development of a coupled fluid flow and geomechanics simulator, which was discretized by finite difference method.

Finally, the mathematical and numerical formulation was tested solving Terzaghi consolidation problem, while the numerical simulator developed for this research was used to evaluate different aspects of the oil fields behavior, among which are: the effect of the boundary conditions of zero displacement and constant strength, as well as the effect of elastic and poroelastic properties.

---

---

# Lista de Figuras

2.1. Curva de esfuerzo de deformación para un comportamiento lineal elástico	6
3.1. Tensor de esfuerzos aplicado sobre el volumen elemental de formación.	15
3.2. Cambio de posición de punto de la formación.	19
3.3. Volumen elemental de roca.	28
4.1. Acoplamiento Iterativo	42
4.2. Procedimiento Iterativo Completamente Acoplado , Thomas, (2002).	44
4.3. Acoplamiento Explícito	45
4.4. Acoplamiento Iterativo para la construcción del simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos	50
5.1. Distribución de los nodos y celdas en 3D para el modelo de Geomecánica	54
5.2. Distribución de los nodos y celdas en 3D para el modelo de Flujo	58
6.1. Columna de roca sometida a una carga vertical	69
6.2. Consolidación en 1D para un tiempo de 0.005 segundos	71
6.3. Consolidación en 1D para un tiempo de 0.05 segundos	72
6.4. Consolidación en 1D para un tiempo de 0.5 segundos	72
6.5. Consolidación en 1D para tiempos de 0.005, 0.05 y 0.5 segundos	73
6.6. Solución analítica comparada con respecto a la solución numérica	74
6.7. Desplazamiento contra tiempo	76
6.8. Caso A. Yacimiento Confinado, Caso B. Yacimiento No confinado	79
6.9. Caída de presión en el yacimiento con cero desplazamiento como condición de frontera.	81
6.10. Distribución de la porosidad en el yacimiento con cero desplazamiento como condición de frontera.	82
6.11. Compactación de la cima del yacimiento en tres dimensiones. Caso A.	82
6.12. Caída de presión en el yacimiento con esfuerzo constante como condición de frontera.	84
6.13. Distribución de la presión en el yacimiento sometido a esfuerzos constantes como condición de frontera.	84
6.14. Compactación en la cima del yacimiento en tres dimensiones. Caso B.	85

6.15. Pwf contra el tiempo. . . . .	86
6.16. Variación del gasto del pozo contra el tiempo, para $P_{wf}$ =constante. . .	87
6.17. Presión media del yacimiento contra el tiempo. . . . .	88
6.18. Presión media del yacimiento contra el tiempo reportada por Dean et al. (2006). . . . .	88
6.19. Compactación en la cima del yacimiento contra el tiempo. . . . .	89
6.20. Compactación en la cima del yacimiento contra el tiempo reportada por Dean et al. (2006). . . . .	89
6.21. Compactación en la cima del yacimiento para diferentes valores del mó- dulo de Young . . . . .	92
6.22. Compactación en la cima del yacimiento para diferentes valores de la relación de Poisson . . . . .	93
6.23. Compactación en la cima del yacimiento para diferentes valores del co- eficiente de Biot . . . . .	94
6.24. Distribución de la porosidad inicial . . . . .	96
6.25. Distribución de la permeabilidad inicial . . . . .	97
6.26. Distribución de porosidad después de 300 días de simulación . . . . .	97
6.27. Distribución de la permeabilidad después de 1000 días de producción .	98
6.28. Variación de la permeabilidad en función de la porosidad . . . . .	98
6.29. Variación en el gasto de producción como efecto del decremento de la permeabilidad . . . . .	99

# Lista de Tablas

3.1. Definición de las propiedades elásticas . . . . .	22
3.2. Tabla de los Módulos Elásticos . . . . .	22
6.1. Tabla de datos para la columna de roca (Bai y Elsworth, 2000) . . . . .	69
6.2. Tabla de datos: Dean et al, SPE 79709 . . . . .	80
6.3. Propiedades elásticas . . . . .	80
6.4. Resultados. Yacimiento con cero desplazamiento en sus fronteras laterales	83
6.5. Resultados. Yacimiento sujeto a esfuerzos compresivos constantes . . . .	85
6.6. Características del yacimiento . . . . .	90
6.7. Propiedades elásticas y poroelásticas de la roca del yacimiento . . . . .	91
6.8. Efecto del módulo de Young, $E$ , en la compactación del yacimiento . . .	91
6.9. Efecto de la relación de Poisson en la compactación del yacimiento . . .	93
6.10. Efecto del coeficiente de Biot en la compactación del yacimiento . . . .	94
6.11. Propiedades del yacimiento . . . . .	95
6.12. Propiedades elásticas y poroelásticas de la roca . . . . .	96



# Contenido

<b>Lista de Figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Revisión de la Literatura de Geomecánica y Simulación Numérica</b>	<b>3</b>
2.1. Geomecánica . . . . .	5
2.1.1. Teoría Lineal de Elasticidad . . . . .	5
2.1.2. Teoría Lineal Poroelástica . . . . .	6
2.2. Geomecánica y Simulación de Yacimientos . . . . .	10
<b>3. Modelo matemático de Geomecánica y Flujo de Fluidos</b>	<b>13</b>
3.1. Modelo de Geomecánica . . . . .	14
3.1.1. Condiciones Iniciales y de Frontera . . . . .	25
3.2. Modelo de Flujo de Fluidos . . . . .	27
3.2.1. Ecuación de Estado . . . . .	31
<b>4. Estrategias de acoplamiento, completamente, parcialmente y no acoplado</b>	<b>39</b>
4.1. Completamente Acoplado . . . . .	40
4.2. Métodos Parcialmente Acoplados . . . . .	40
4.2.1. Acoplamiento iterativo . . . . .	41
4.2.2. Explícitamente acoplado . . . . .	44
4.3. Métodos No Acoplados . . . . .	46
4.3.1. Pseudo acoplado . . . . .	46
4.3.2. No acoplado . . . . .	47
4.3.3. Acoplamiento entre los modelos de geomecánica y flujo de fluidos	47
<b>5. Discretización del modelo de Geomecánica y Flujo de Fluidos en Diferencias Finitas</b>	<b>51</b>
5.1. Discretización del modelo de geomecánica . . . . .	52
5.1.1. Discretización del espacio . . . . .	53



5.1.2. Acoplamiento de las condiciones de frontera . . . . .	55
5.2. Discretización del modelo de flujo . . . . .	57
5.2.1. Malla de simulación . . . . .	58
5.2.2. Acoplamiento de las condiciones iniciales y de frontera . . . . .	61
5.3. Tratamiento del término fuente . . . . .	63
5.4. Linealización . . . . .	64
<b>6. Simulación numérica de geomecánica y flujo de fluidos en diferencias finitas</b>	<b>67</b>
6.1. Problema de consolidación en una dimensión . . . . .	68
6.1.1. Descripción del problema . . . . .	68
6.1.2. Solución al problema de consolidación . . . . .	70
6.1.3. Resultados . . . . .	71
6.1.4. Comparación de resultados . . . . .	73
6.2. Efecto de las condiciones de frontera de cero desplazamiento y esfuerzo constante, en el comportamiento de un yacimiento susceptible a esfuerzos	78
6.3. Efecto de las propiedades elásticas y poroelásticas de la roca en la compactación del yacimiento . . . . .	90
6.4. Cambio en las propiedades petrofísicas como efecto del incremento en el esfuerzo efectivo . . . . .	95
6.4.1. Descripción del problema . . . . .	95
<b>7. Conclusiones</b>	<b>101</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>104</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>105</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La aplicación de la geomecánica en la ingeniería de yacimientos ha venido cobrando fuerza en los últimos años, debido a la necesidad de resolver problemas en los que el comportamiento mecánico de las rocas impacta directamente en el de los yacimientos. Uno de estos casos se presenta durante la explotación de hidrocarburos, ya que con el decremento de la presión del yacimiento, se incrementan el esfuerzo efectivo que actúa sobre la estructura sólida de la roca, dando como resultado un efecto de compactación en el yacimiento Schutjens et al. (2012); Fredrick et al. (1998).

Se considera que las rocas de los yacimientos petroleros se encuentran sepultadas a cierta profundidad bajo la acción de un campo de esfuerzos, al mismo tiempo se encuentra actuando la presión que ejerce el fluido contenido en los poros, sobreponiéndose a dichos esfuerzos y generando un estado de equilibrio. Al iniciar la producción de hidrocarburos se genera un abatimiento de la presión del yacimiento, provocando un cambio en el estado de esfuerzos, específicamente, un incremento en el esfuerzo efectivo. Los cambios en el estado de esfuerzos generarán a su vez un cambio en el estado de deformación de la roca.

Generalmente y de forma convencional, la simulación numérica de yacimientos no considera la deformación del medio poroso. Si bien, se considera que el incremento del esfuerzo efectivo provoca la reducción del volumen del yacimiento, así como la expansión de los fluidos y los sólidos de la matriz de roca, generando una reducción en el volumen de poros y por lo tanto de la porosidad; se supone que estos cambios están únicamente en función de la presión, sin considerar el cambio de la porosidad en función del esfuerzo.

Las variaciones en los esfuerzos asociadas a la explotación de hidrocarburos pueden resultar extremadamente altas en yacimientos naturalmente fracturados o en yacimientos ligeramente consolidados, en los que la roca del yacimiento exhibe una resistencia mecánica menor dando como resultado una deformación considerable del yacimiento. Como consecuencia al cambio en los esfuerzos, la porosidad, compresibilidad y permeabilidad del yacimiento, pueden variar durante la producción de hidrocarburos (Nauroy, 2011; Osorio et al., 1997), los cuales se consideran como yacimientos susceptibles a esfuerzos (Chin et al., 1998).

Es conveniente entonces, que en tales casos, se considere la aplicación de la geomecánica en la simulación numérica de yacimientos, con la finalidad de describir correctamente su comportamiento, considerando el efecto de la producción de fluidos en las propiedades petrofísicas y modelar los efectos combinados de la producción de hidrocarburos con la deformación del yacimiento.

## Capítulo 2

# Revisión de la Literatura de Geomecánica y Simulación Numérica

La necesidad de aplicar la geomecánica en el estudio del comportamiento de los yacimientos petroleros puede demostrarse físicamente a través del efecto de subsidencia superficial. Este efecto ha sido reportado en yacimientos del Mar del Norte, Norteamérica, el Golfo de México, Sudamérica y Asia (Fredrick et al., 1998). En estos casos, cuando la presión del yacimiento decrece debido a la producción de hidrocarburos, la estructura sólida de la roca se compacta (Sayers y Schutjens, 2007). Cuando dicha compactación es transmitida hacia la superficie a través de las formaciones suprayacentes, se presenta el efecto de subsidencia superficial (Nagel, 1998).

Algunos casos en los que se ha reportado el efecto de subsidencia superficial, se citan a continuación:

Pratt y Johnson (1926) reportaron uno de los primeros casos de subsidencia superficial ocurrido en el campo Goose Creek en el estado de Texas, EUA., localizado a 400 metros de profundidad sobre la bahía Galveston, en el que concluyen que el hundimiento de la península de Gaillard de dicha bahía, sucedió debido al efecto de la extracción de aceite, agua y gas del campo Goose Creek.

Fredrick et al. (1998) presentan el caso del campo Belridge Diatomite, ubicado en la región Bakersfield al oeste de California, EUA., el cual es un yacimiento particularmente susceptible a la compactación inducida por la producción debido a la alta porosidad y compresibilidad de la roca del yacimiento. En este campo, aproximadamente 100 pozos han experimentado severos daños en la tubería de revestimiento debido a la compactación del yacimiento.

Merle et al. (1976) analizan el caso del yacimiento Venezolano, Bachaquero, en el que reportan una subsidencia superficial de 370 cm aproximadamente, indicativo de una severa compactación, cuyo volumen equivalente corresponde a 4.5% del volumen poroso inicial. La roca del yacimiento corresponde a una arena no consolidada con intercalaciones de lutita, las porosidades oscilan entre 30 y 40% y las permeabilidades van desde los 500 a 3500 md. Además, señalan que la subsidencia observada, indica

claramente a la compactación actúa como un mecanismo de empuje.

En la región del Mar del Norte, se encuentra ubicado el campo Ekofisk, en el cual se presenta el efecto de subsidencia superficial del lecho marino debido a la compactación del yacimiento. Si bien se determinó la posible compactación del yacimiento desde el inicio de la explotación del campo, se consideró que su efecto sería despreciable debido a la geometría y a la profundidad del yacimiento (Nagel, 1998), sin embargo, tiempo después de iniciada la explotación del yacimiento, la subsidencia del lecho marino fue evidente, afectando gravemente las instalaciones de producción y haciendo necesario un rediseño del proyecto inicial de explotación del campo y el monitoreo constante de la compactación. Se considera que la compactación en el campo Ekofisk se debe a la combinación de varios efectos, tales como la alta porosidad de la formación, la extensión areal relativa a la profundidad del yacimiento, el espesor del intervalo productor y a la alta declinación de la presión. Siendo esta última, la responsable del desplazamiento de los esfuerzos soportados por el fluido hacia la matriz de roca, ocasionando finalmente la compactación del yacimiento (Sylte et al., 1999).

Geertsma et al. (1973) presenta un análisis de varios casos de subsidencia superficial en campos de EUA. Si bien consideran que el hundimiento debido a la producción de hidrocarburos rara vez conduce a hundimientos graves, identificaron cuatro condiciones que se presentaron consistentemente en estos yacimientos:

- Una reducción significativa en la presión del yacimiento durante el periodo de producción.
- La producción se lleva a cabo mediante intervalos de producción de longitud considerable.
- La formación productora se identificó como una formación débilmente consolidada.
- La profundidad del yacimiento es considerablemente pequeña.

Para estimar el orden de magnitud de la compactación, definen el coeficiente de compactación uniaxial como función de la deformación vertical del yacimiento,  $\epsilon_z = dz/z$ . Dicho coeficiente puede definirse como la compactación de la formación por unidad de cambio en la presión de poro, como:

$$c_m = \frac{1}{z} \frac{dz}{dp}. \quad (2.1)$$

Encontraron también que el coeficiente de compactación uniaxial depende de un número de factores, tal como el tipo de roca, el grado de cementación, la porosidad y la profundidad del yacimiento.

Por otro lado, Jones et al. (1980) demuestran mediante pruebas de laboratorio realizadas a muestras de núcleos de arena que el esfuerzo efectivo, simulado mediante

presión de confinamiento, reduce la permeabilidad de yacimientos de gas de baja permeabilidad hasta en un 10 %.

Podría parecer que estos casos son la excepción más que la regla; sin embargo, yacimientos naturalmente fracturados, yacimientos de arenas no consolidadas o bien aquellos que han experimentado una fuerte caída de presión desde su etapa inicial de producción, son candidatos a experimentar una fuerte deformación y vale la pena aplicar una formulación adecuada para determinar su comportamiento.

## 2.1. Geomecánica

Para integrar los efectos que trae consigo la producción de hidrocarburos de los yacimientos petroleros, es necesario introducir en el estudio del comportamiento de los yacimientos, el análisis del comportamiento mecánico de la roca; para ello se requiere del empleo de la geomecánica, la cual, es la disciplina encargada de la predicción y administración de la deformación y fallamiento de la roca (Sayers y Schutjens, 2007). La mayoría de los problemas en esta área resultan por el cambio de los esfuerzos inducidos sobre la roca durante las operaciones de perforación y producción. En este trabajo, es de interés estudiar el comportamiento del yacimiento debido al cambio de los esfuerzos durante la producción de hidrocarburos y su aplicación en la simulación numérica de yacimientos.

A través de la geomecánica se puede considerar a las rocas que conforman los yacimientos petroleros como un medio continuo idealizado, en el que todas las cantidades mecánicas definidas se promedian sobre escalas temporales y espaciales.

Estas rocas se encuentran sometidas tanto a una carga interna como externa, que al igual que para cualquier material, una vez roto el equilibrio, resultará en una desestabilización estructural (deformación) o fallamiento mecánico. La carga interna la proporciona el fluido que satura los poros de la roca, mientras que la carga externa a la que están sometidas las rocas de los yacimientos petroleros se debe principalmente a la carga litostática.

### 2.1.1. Teoría Lineal de Elasticidad

Esta teoría representa la forma más sencilla de describir el comportamiento de los materiales sólidos para resistir, o recuperarse de una deformación causada por una fuerza que actúa sobre ellos. Corresponde a una simplificación de la teoría general de la elasticidad, en la que básicamente se asume que la relación entre el esfuerzo y la deformación del material ocurren de forma lineal a partir de la Ley de Hooke. Para un problema en una dimensión, la Ley de Hooke describe la dependencia lineal del esfuerzo y la deformación en términos del módulo de elasticidad,  $E$ , tal y como se observa en la **Figura 2.1**. Esta aproximación proporciona suficiente aproximación para la mayoría de los problemas en ingeniería. Esto significa que el tensor de deformación es una función

lineal del tensor de esfuerzos Jaeger et al. (2009).

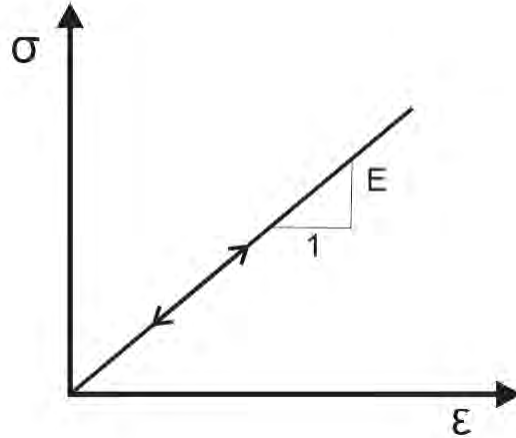


Figura 2.1: Curva de esfuerzo de deformación para un comportamiento lineal elástico

En esta teoría, se considera que las deformaciones ocurren de forma infinitesimal a partir de un proceso isotérmico y adiabático (Olivella y de Saracíbar Bosch, 2002).

### 2.1.2. Teoría Lineal Poroelástica

Es una extensión a la teoría lineal de la elasticidad que incluye el acoplamiento entre los fenómenos de difusión y deformación de un medio poroso. Puede aplicarse para calcular las deformaciones y los esfuerzos de un medio poroso que se encuentra saturado por un fluido, con una aproximación razonable, para deformaciones infinitesimales.

Esta teoría la desarrolló Biot (1941), a lo largo de varias publicaciones, tomando como base la teoría de la consolidación propuesta inicialmente por Terzaghi (1944), quien en sus estudios sobre mecánica de suelos, modeló el proceso de consolidación, considerando que los granos o partículas que constituyen la roca están más o menos juntos, debido a fuerzas moleculares, que proporcionan al medio poroso ciertas propiedades elásticas. Terzaghi observó en sus trabajos experimentales, que cuando se aplica una sobrecarga en la cima de una capa de arcilla de forma uniforme, se presenta un incremento en la presión de poro. El exceso de presión de poro, se disipa hacia la cima de la superficie de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (2.2)$$

donde  $p$  es la presión hidrostática,  $z$ , es el espesor de la columna de roca,  $t$ , es el tiempo y  $c$ , es la constante de difusión nombrada por Terzaghi como coeficiente de consolidación.

Adicionalmente, Terzaghi introdujo el concepto de esfuerzo efectivo,  $\sigma'_{i,j}$ , definido como la relación entre la presión de poro,  $p$ , y el esfuerzo total,  $\sigma$ .

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{i,j} + p\delta_{ij}, \quad (2.3)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker, definida como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (2.4)$$

De este modo el esfuerzo total, consiste de dos partes. Una parte,  $p$ , que actúa sobre el fluido y el sólido en todas las direcciones con la misma intensidad, el cual es denominado esfuerzo neutro. El balance  $\sigma'_1 = \sigma_1 + p$ ,  $\sigma'_2 = \sigma_2 + p$  y  $\sigma'_3 = \sigma_3 + p$  representa un exceso sobre el esfuerzo neutro, el cual se ejerce exclusivamente sobre la parte sólida de la roca. Esta fracción de el esfuerzo principal corresponde al esfuerzo efectivo (Wang, 2017).

Para una muestra de suelo, el esfuerzo efectivo puede ser suficientemente aproximado como la diferencia entre el esfuerzo aplicado y la presión de poro o del fluido, ya que tanto los granos que componen la muestra de suelo como el fluido pueden considerarse incompresibles en comparación con la compresibilidad de la muestra de suelo en su totalidad.

La expresión para el esfuerzo efectivo (ecuación 2.3) sería posteriormente generalizada empleando el coeficiente de Biot-Willis  $\alpha$ .

$$\sigma_{i,j} = \sigma'_{i,j} + \alpha p\delta_{ij}. \quad (2.5)$$

La aproximación poroelástica es el método preferido para caracterizar el proceso acoplado entre el flujo de fluidos y un medio poroso deformable. En esta teoría, Biot (1955) establece que cuando un material de estructura sólida se encuentra sujeto a un esfuerzo compresivo, se presenta una deformación volumétrica de la roca, la cual está compuesta de dos componentes:

- La deformación del sólido
- El cambio de volumen en el espacio poroso

Por su parte, el fluido contenido en los poros de la roca se toma en cuenta como una fase extra, lo cual implica que dos parámetros adicionales deben emplearse para describir el estado termodinámico del fluido: la presión y volumen. La existencia de fluido en los poros de la roca implica dos descripciones posibles; la descripción drenada, donde la presión del fluido es la variable termodinámica apropiada y no drenada, donde el contenido de masa es la variable más apropiada.



Considerando un medio poroso isotrópico completamente saturado por un fluido, la aplicación de esta teoría se centra en dos ecuaciones constitutivas que combinan el esfuerzo aplicado,  $\sigma$ , la deformación volumétrica,  $\epsilon$ , el incremento en el contenido de fluido,  $\xi$  y la presión de poro o del fluido,  $p$ , las cuales generalmente, se tratan indistintamente en esta teoría.

$$\epsilon = a_{11}\sigma + a_{12}p \quad (2.6)$$

$$\xi = a_{21}\sigma + a_{22}p \quad (2.7)$$

Las ecuaciones 2.6 y 2.7 establecen que los cambios en el esfuerzo aplicado y en la presión de poro producen un cambio en el volumen, mientras que los cambios en el esfuerzo y la presión de poro requieren de la extracción o inyección de un fluido, respectivamente. Por otro lado, los coeficientes,  $a_{ij}$  representan el cambio de variables dependientes  $(\epsilon, \xi)$  con respecto a las variables independientes  $(\sigma, p)$ .

Geertsma et al. (1957) presenta una teoría relacionada con la variación de volumen poroso,  $V_p$ , y del volumen bulk ó volumen total de roca,  $V_b$ , debido a la declinación de la presión en los yacimientos petroleros, tomando en cuenta la compresibilidad de la matriz de roca,  $c_s$ , la compresibilidad total de la roca,  $c_b$ , y la compresibilidad de poro,  $c_p$ . Establecen que tanto para la compresibilidad de poro, como para la compresibilidad total de la roca, pueden distinguirse dos diferentes tipos de variación: la variación del esfuerzo interno y la del esfuerzo externo. Señalan que la variación en el esfuerzo externo en un yacimiento petrolero es una consecuencia de la declinación en la presión de poro y depende de las condiciones de frontera. Para establecer estas condiciones de frontera es necesario considerar la distribución de esfuerzos en el medio poroso, la cual se determina por la orientación y la magnitud de los esfuerzos principales  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$  de la roca y por el valor de la presión de poro.

En ella considera, que para un medio poroso saturado por un fluido, el sistema total de esfuerzos puede dividirse en dos partes; en una componente hidrostática o principal y otra componente, denominada componente desviatoria.

La primera componente es:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}. \quad (2.8)$$

Se ha considerado que la teoría poroelástica lineal está restringida a un medio poroso isotrópico y homogéneo, la cual presenta buenos resultados para varios tipos de rocas como arenas, calizas y limonitas. Cabe notar que la variación interna o de poro, se debe al fluido, por lo tanto es siempre hidrostática.

Tanto el volumen de poro,  $V_p$  como el volumen total o "bulk",  $V_b$ , dependen únicamente de la componente hidrostática del esfuerzo y de la presión de poro, para los cuales se establece que cualquier cambio en el volumen poroso está dado por:

$$dV_p = \left( \frac{\partial V_p}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p d\bar{\sigma} + \left( \frac{\partial V_p}{\partial p} \right)_{\bar{\sigma}} dp, \quad (2.9)$$

$$dV_b = \left( \frac{\partial V_b}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p d\bar{\sigma} + \left( \frac{\partial V_b}{\partial p} \right)_{\bar{\sigma}} dp. \quad (2.10)$$

Chierici et al. (1967) consideran que la componente hidrostática del tensor de esfuerzos causa una variación en el volumen, mientras que la componente desviatoria solo genera un cambio de forma. Además, indica que en condiciones normales, la dirección del esfuerzo principal es vertical. A lo largo de esta dirección la componente,  $\sigma_{zz}$  del tensor de esfuerzos, debida a la sobrecarga, esta dada por:

$$\sigma_{zz} = \int_0^h g[\rho_w \phi + \rho_r(1 - \phi)] dh, \quad (2.11)$$

y las componentes horizontales principales  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{yy}$  dependen de las condiciones de frontera.

Así mismo establece que las relaciones siguientes de volumen, se cumplen dentro del limite elástico:

$$-\frac{dV_r}{V_r} = c_s dp + \frac{c_s}{1 - \phi} d(\sigma - p), \quad (2.12)$$

$$-\frac{dV_b}{V_b} = c_s dp + c_p d(\sigma - p), \quad (2.13)$$

$$\frac{dV_p}{V_p} = c_s dp + \frac{c_b - c_s}{\phi} d(\sigma - p). \quad (2.14)$$

Zimmerman et al. (1986) establecen que para un medio poroso sujeto a una presión externa de confinamiento,  $p_c$  y a una presión de poro interna,  $p_p$  en el que se consideran al menos dos volúmenes independientes entre si, el volumen total,  $V_b$  y el volumen poroso,  $V_p$ , es posible considerar cuatro diferentes compresibilidades:

$$c_{bc} = -\frac{1}{V_b} \left( \frac{\partial V_b}{\partial p_c} \right), \quad (2.15)$$

$$c_{bp} = \frac{1}{V_b} \left( \frac{\partial V_b}{\partial p_p} \right), \quad (2.16)$$

$$c_{pc} = -\frac{1}{V_p} \left( \frac{\partial V_p}{\partial p_c} \right), \quad (2.17)$$

$$c_{pp} = \frac{1}{V_p} \left( \frac{\partial V_p}{\partial p_p} \right). \quad (2.18)$$

Así mismo define los incrementos de deformación total o bulk y de poro, como:

$$d\epsilon_b = -c_{bc}dp_c + c_{bp}dp_p \quad (2.19)$$

$$d\epsilon_p = -c_{pc}dp_c + c_{pp}dp_p \quad (2.20)$$

La compresibilidad  $c_{bp}$ , la cual se llama compresibilidad pseudo-bulk, refleja la influencia de la presión de poro en el volumen bulk y representan el cambio del volumen total de la roca con respecto a la presión de confinamiento, cuando la presión de poro se mantiene constante. Esta compresibilidad se usa en el cálculo de la subsidencia de yacimientos petroleros, conforme la presión de poro declina y el volumen total ocupado por el yacimiento, decrece, de acuerdo con la ecuación 2.19.

Mientras que  $c_{bp}$  es el cambio en el volumen total de roca con respecto a la presión de poro, cuando la diferencia entre la presión de confinamiento y la del fluidos es constante ( $p_c - p = cte$ ). En este caso es positiva pues si la presión de poro se incrementa también el volumen total se incrementa.

Las otras dos compresibilidades,  $c_{pc}$  y  $c_{pp}$  corresponden a las compresibilidades de poro, y expresan el efecto de la variación de la presión en el volumen poroso. La compresibilidad  $c_{pp}$  es la compresibilidad que comúnmente se emplea en simulación de yacimientos, que en conjunto con la compresibilidad del fluido,  $c_f$ , se emplean para representar la compresibilidad total del sistema roca fluidos.

## 2.2. Geomecánica y Simulación de Yacimientos

La aplicación de la geomecánica en la simulación numérica de yacimientos, se logra mediante el acoplamiento de las ecuaciones que describen el flujo de fluidos en un medio poroso deformable, con las ecuaciones que establecen el equilibrio mecánico de las rocas. Existen diferentes estrategias para realizar el acoplamiento entre ambos modelos, las cuales se revisarán con mayor detalle en el Capítulo 4. A continuación se presentan algunos de los trabajos que establecen las bases para el desarrollo de los modelos matemático de ambos modelos y su aplicación en la industria petrolera.

Bear et al. (1991) presenta el desarrollo de un modelo de flujo de fluidos en un medio poroso deformable completamente saturado por un fluido, considerando que la fase sólida, a un nivel microscópico, preserva su volumen. Lo cual implica que la densidad del sólido permanece sin cambios, mientras que el medio poroso visto como un todo, puede sufrir deformación, la cual se manifiesta por cambios en la porosidad de la roca.

Verruijt (1969) presenta un estudio sobre el flujo de un fluido incompresible en un medio poroso capaz de deformarse, conectando la teoría de flujo de fluidos con la mecánica de suelos, para ello considera que cada una de las fases presentes en el medio poroso, satisfacen el principio de conservación de la materia, mientras que el medio poroso se comporta como un medio sólido elástico.

Chen et al. (1995) presentaron un desarrollo teórico y matemático para extender la formulación convencional de las ecuaciones de flujo de fluidos a una modelo de flujo acoplado a un modelo de geomecánica, basados en los trabajos de Verruijt y Bear para el modelo de flujo y en la teoría poroelástica de Biot para el desarrollo del modelo de geomecánica, para un medio homogéneo e isotrópico, considerando adicionalmente la compresibilidad de la fase sólida.

Osorio et al. (1997) presentaron un modelo tridimensional totalmente implícito completamente acoplado desarrollado para analizar las variaciones de presión que ocurren durante la producción de gas en yacimientos susceptibles a esfuerzos, empleando diferencias finitas. De acuerdo a sus resultados de simulación, concluyen que la reducción debida los cambios en el estado de esfuerzos y de la presión de poro, pueden afectar significativamente la producción en yacimientos de gas de baja permeabilidad, observando que en general, la permeabilidad decrece conforme se incrementa el tiempo de producción.

Chin et al. (1998) desarrollaron un modelo de geomecánica y flujo de fluidos completamente acoplado con el objetivo de analizar el comportamiento de yacimientos susceptibles a esfuerzos considerando flujo monofásico e isotérmico y para la deformación del medio un modelo elasto-plástico. De sus análisis concluyen que los efectos de la compactación no afectan la forma de la curva del comportamiento de la presión. Sin embargo, la forma de la curva de la presión cambia significativamente cuando estos efectos actúan en conjunto con cambios en la permeabilidad, lo cual ocurre cuando existe un incremento en el esfuerzo efectivo. Dejando ver que la permeabilidad inicial y la reducción de la permeabilidad causada por un nivel de esfuerzo parecen ser los factores más importantes en el comportamiento de este tipo de yacimientos.

Inoue y da Fontoura (2009) comparan la formulación de las ecuaciones de flujo de fluidos usadas en un simulador de flujo convencional para flujo monofásico en tres dimensiones, con las ecuaciones empleadas en un simulador completamente acoplado con un modelo de geomecánica, basado en la teoría poroelástica lineal.



# Capítulo 3

## Modelo matemático de Geomecánica y Flujo de Fluidos

### Objetivo

En este capítulo se presenta la explicación y derivación de los modelos matemáticos empleados para la descripción del flujo de fluidos en un medio poroso deformable.

En general, este problema puede resolverse mediante dos conjuntos de ecuaciones:

- El modelo de geomecánica

El cual tiene por objeto describir la deformación del yacimiento a través de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento mecánico de las rocas, considerando que se comportan como un medio homogéneo e isotrópico de acuerdo a la teoría poroelástica lineal, y de las relaciones constitutivas en función de las variables dinámicas y cinemáticas,

- El modelo de flujo de fluidos

El cual representa matemáticamente la relación entre el cambio de presión y la producción de hidrocarburos en función de las propiedades del yacimiento como porosidad, permeabilidad, para el caso de un medio poroso deformable.

### 3.1. Modelo de Geomecánica

A continuación se explica el desarrollo del modelo de geomecánica que será empleado para determinar la deformación del yacimiento de acuerdo a la teoría lineal poroelástica, considerando a las rocas que componen los yacimientos petroleros, como un medio poroso homogéneo e isotópico, el cual se encuentra completamente saturado por un fluido de compresibilidad constante.

El estudio de la deformación de las rocas se realiza desde un punto de vista macroscópico, considerando la mecánica del medio continuo. Cuando se trata de un medio sólido, su aplicación resulta obvia, sin embargo, en un medio poroso, la presencia de huecos dentro de un pequeña área, que se encuentran saturados por un fluido, genera discontinuidades que pueden alterar la magnitud del esfuerzo en esta área. Por lo anterior, las variables se interpretan como cantidades promedio.

Además de considerar que la deformación del fluido y de la estructura sólida de la roca no pueden tratarse de forma independiente (Fjar et al., 2008).

#### Volumen elemental de formación

Considerando el volumen elemental de formación mostrado en la **Figura 3.1**, como un sistema poroso interconectado, que a pesar de ser lo suficientemente pequeño (uno orden de magnitud más grande que un grano de roca) posee todas las propiedades de la roca del yacimiento, cuyo estado tenso-deformacional puede considerarse como el estado tenso-deformacional en cualquier punto de la roca.

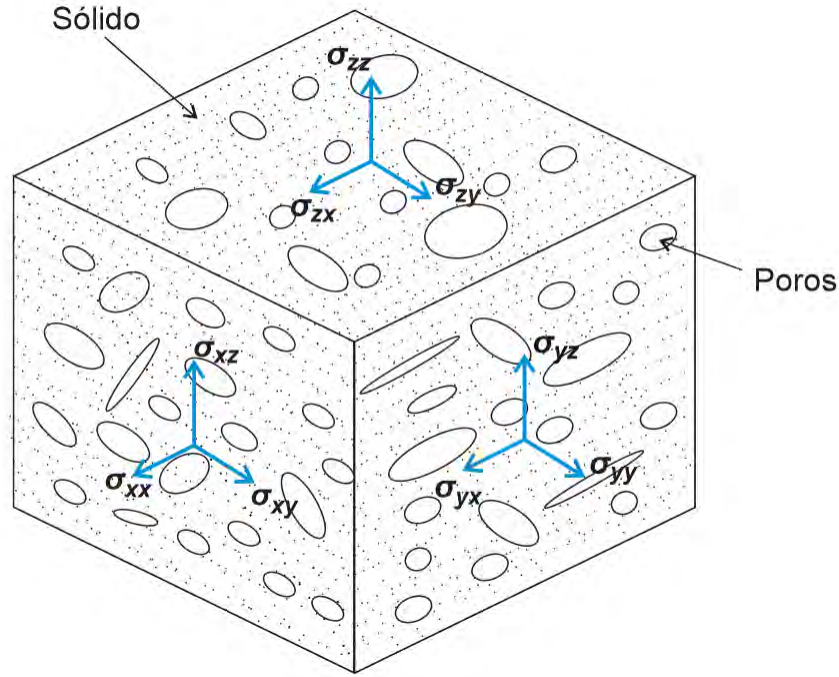


Figura 3.1: Tensor de esfuerzos aplicado sobre el volumen elemental de formación.

El estado de esfuerzos en cualquier punto del volumen elemental de formación puede representarse por medio de un tensor de segundo orden, denominado; tensor de esfuerzos,  $\sigma_{ij}(x, y, z)$ , el cual puede expresarse en términos de cada una de sus componentes como:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

El tensor de esfuerzos puede dividirse en dos componentes: una componente hidrostática y una desviatoria, de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$



y

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \bar{\sigma} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \bar{\sigma} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Cabe destacar que la resistencia mecánica a la compresión a los esfuerzos a los que se encuentra sometido el volumen elemental de formación, la soportan tres diferentes componentes de la roca cuando se encuentra saturada por un fluido. Dos de estos componentes, que ofrecen resistencia a la compresión, son la estructura sólida de la roca y el fluido que satura sus poros. Adicionalmente, los poros también ofrecen resistencia a la compresión, la cual depende del tamaño, forma, orientación y distribución de los poros. Por ejemplo, los poros más resistentes son los poros de forma esférica, mientras que los menos resistentes son los poros con forma ovalada; de hecho, si esta última forma está orientada perpendicularmente a la dirección del esfuerzo aplicado, esta forma de poro se cierra inmediatamente sin ofrecer resistencia alguna (Cheng, 2016).

En particular, el fluido responde de forma diferente a la aplicación de un esfuerzo, esencialmente a los esfuerzos de corte, por lo que el tensor de esfuerzos queda reducido a un tensor de orden cero (es decir a un escalar), conocido como presión de poro.

Esta presión es la presión del fluido contenido en los poros de la roca y es una cantidad escalar, ya que la presión del fluido produce una fuerza por unidad de área igual en todas las direcciones.

El esfuerzo y la presión de poro corresponden a las variables dinámicas en la teoría poroelástica y son las causantes del movimiento. Por convención se considera los esfuerzos compresivos como positivos y los esfuerzos tensionales como negativos.

## Ecuaciones de equilibrio

Se considera que un volumen elemental de formación que sometido a esfuerzos en cada una de sus caras, se encuentra en equilibrio mecánico, si tanto el equilibrio trasla-

cional y rotacional se cumplen en cada lapso de tiempo. De tal modo, las componentes del tensor de esfuerzos están en función de  $(x, y, z, t)$ . El equilibrio rotacional implica que el tensor de esfuerzos es simétrico, de modo que los esfuerzos que pueden ocasionar la rotación del elemento con respecto a un punto, se anulen entre si.

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz}. \quad (3.6)$$

El equilibrio traslacional involucra a las fuerzas de superficie en las caras laterales, provocadas por la acción de partículas vecinas y a las fuerzas de cuerpo, generadas por la acción de cuerpos a distancia . Este equilibrio indica que la fuerza neta aplicada en una misma dirección es cero. Por lo tanto, para la dirección  $x$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} & [\sigma_{xx}(x + \Delta x, y, z) - \sigma_{xx}(x, y, z)]\Delta y\Delta z + [\sigma_{yx}(x, y + \Delta y, z) - \sigma_{yx}(x, y, z)]\Delta x\Delta z \\ & + [\sigma_{zx}(x, y, z + \Delta z) - \sigma_{zx}(x, y, z)]\Delta x\Delta y + F_x(x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dividiendo entre  $\Delta x\Delta y\Delta z$ , tomando el límite cuando  $dV \rightarrow 0$  y realizando el mismo procedimiento en las direcciones  $y$  y  $z$ , se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0. \quad (3.10)$$

Las ecuaciones (3.8), (3.9), (3.10) se escriben generalmente en notación indicial, para facilitar su manejo y el desarrollo de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad (3.11)$$

donde los índices  $i$  y  $j$  representan a los ejes:  $x, y, z$ . El índice  $i$  es conocido como el índice libre ya que aparece una sola vez, mientras que el índice repetido  $j$  indica suma y  $j$  indica derivada. La ecuación (3.11) se conoce comúnmente como ecuación de Cauchy.

## Deformación

Al someter un cuerpo deformable a un sistema de cargas se generan estados de esfuerzos, los cuales a su vez provocarán estados de deformación. Para proporcionar una descripción completa del estado de deformación de un volumen elemental de roca, las deformaciones en cada una de las direcciones deben definirse, las cuales son las mismas que para un medio elástico sólido:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.12)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.13)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.14)$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3.15)$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (3.16)$$

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (3.17)$$

donde  $u, v$  y  $w$  son las componentes del vector desplazamiento,  $\mathbf{u}$ , en las direcciones  $x, y$  y  $z$ , respectivamente. El vector desplazamiento,  $\mathbf{u}$ , puede considerarse como el vector que va de la nueva posición,  $P^*$ , a la posición original,  $P$ , tal y como se muestra

en la **Figura 3.2**.

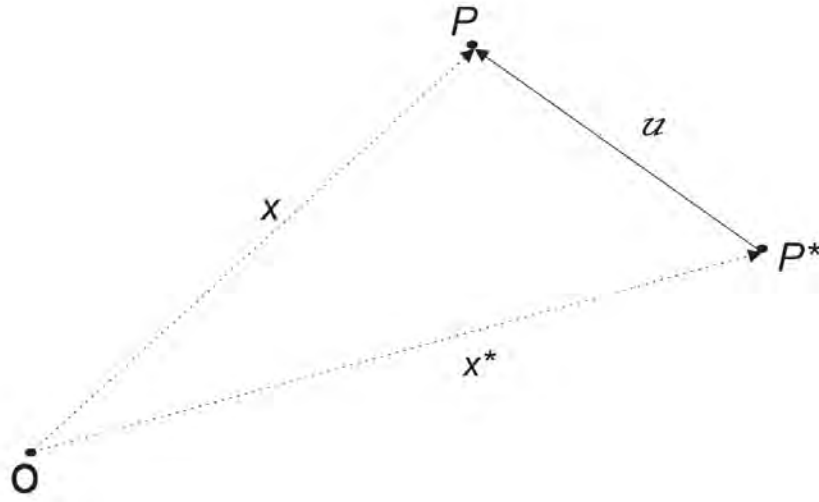


Figura 3.2: Cambio de posición de punto de la formación.

Al igual que el esfuerzo, la deformación es un tensor de segundo orden, por lo que podemos escribir:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Las deformaciones  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  y  $\epsilon_{zz}$  se denominan deformaciones longitudinales y representan el cambio relativo de longitud paralelo a los ejes coordenados. La convención de signos que se asume en Ciencias de la Tierra, considera la expansión como negativa, en caso contrario los valores de  $\epsilon$  son positivos.

La suma de las deformaciones longitudinales corresponde a la deformación volumétrica,  $\epsilon_v$ , la cual es independiente del sistema de coordenadas y se conoce también como deformación invariante.

$$\epsilon_v = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.19)$$

De igual forma que la deformación, el desplazamiento y el incremento del contenido de fluido, son unas de las variables cinemáticas principales en la teoría poroelástica.

Para el caso de un medio poroso saturado por un fluido, pueden considerarse dos tipos de deformación de acuerdo a las condiciones en que se lleve a cabo dicha deformación con respecto al fluido contenido. Un tipo de deformación se lleva a cabo manteniendo la presión del fluido constante. En este caso se permite la expulsión del fluido contenido en los poros durante la deformación del medio poroso por la acción de un esfuerzo. La aplicación del esfuerzo debe ocurrir lentamente para asegurar que la presión del fluido no se incremente en ningún momento. Por otro lado, cuando se impide la expulsión del fluido, la deformación ocurre manteniendo constante la masa de fluido contenido en los poros.

En general, la existencia de un fluido contenido en el espacio poroso de una roca, implica dos posibles descripciones: la descripción drenada y no drenada, asociadas a la presión y al contenido de fluido, respectivamente (Guéguen y Boutéca, 2004).

## Esfuerzo efectivo

El concepto de esfuerzo efectivo es de gran importancia en la teoría poroelástica. Fue introducido por Terzaghi (1925) y posteriormente generalizado por Biot (1956), y considera el efecto del fluido contenido en los poros de la roca, ante la aplicación de un esfuerzo; se define como la diferencia entre el esfuerzo total,  $\sigma_{ij}$ , menos la presión de poro,  $p$ .

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha\delta_{ij}p, \quad (3.20)$$

donde el coeficiente de Biot,  $\alpha$ , depende exclusivamente de la roca y es independiente al tipo de fluido contenido en los poros. Su valor varía entre 0.5 y 1. La delta de Kronecker se emplea para considerar el efecto de la presión del fluido, únicamente en las componentes normales del esfuerzo efectivo.

Entonces para cada uno de los elementos del tensor de esfuerzos expresado en términos del esfuerzo efectivo:

$$\begin{array}{lll}
 \sigma_{xx} = \sigma'_{xx} + \alpha p \sigma & \sigma_{xy} = \sigma'_{xy} & \sigma_{xz} = \sigma'_{xz} \\
 \sigma_{yx} = \sigma'_{yx} & \sigma_{yy} = \sigma_{yy} + \alpha p \sigma & \sigma_{yz} = \sigma_{yz} \\
 \sigma_{zx} = \sigma'_{zx} & \sigma_{zy} = \sigma'_{zy} & \sigma_{zz} = \sigma'_{zz} + \alpha p
 \end{array}$$

### Relación Esfuerzo-Deformación

En la teoría poroelástica lineal, las variables dinámicas y cinemáticas están relacionadas linealmente a través de las ecuaciones constitutivas; se considera a la roca como un material poroelástico, cuya relación entre los tensores de esfuerzo y deformación ocurren de forma lineal e isotrópica. A partir de la ecuación constitutiva para un material sólido y considerando una cantidad cinemática extra, que corresponde a la cantidad de fluido,  $\xi$ , la dependencia lineal del tensor de esfuerzos,  $\sigma_{ij}$ , con respecto a la deformación, queda expresada como:

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + 2G\frac{v_u}{1-2v_u}\epsilon_{kk}\delta_{ij} - BK_u\xi\delta_{ij}, \quad (3.21)$$

El contenido de fluido,  $\xi$ , puede expresarse en términos de la presión como:

$$\xi = -\alpha\epsilon_{kk} + \frac{\alpha}{K_u B}p \quad (3.22)$$

Se puede expresar la ecuación (3.21) en términos de la presión de poro, como:

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + 2G\frac{v}{1-2v}\epsilon_{kk}\delta_{ij} + \alpha p\delta_{ij}, \quad (3.23)$$

donde  $G$  es el módulo de corte;  $K_u$  y  $v_u$  son el módulo de bulk y la relación de Poisson sin drene, respectivamente. Cabe señalar que la deformación volumétrica,  $\epsilon_{kk}$ ,

se considera positiva en compresión, mientras que el contenido de fluido,  $\xi$ , se considera positivo para la inyección (de fluido).

Para un material elástico homogéneo e isotrópico, sólo son necesarias dos propiedades elásticas para definir su estado de deformación (Zoback, 2010).

Las constantes,  $\nu$ ,  $G$  y  $K$  son las propiedades elásticas de la roca, cuya definición se muestra en la **Tabla 3.1**.

Tabla 3.1: Definición de las propiedades elásticas

Módulo de Young	Relación de Poisson	Módulo de bulk, K	Módulo de corte
$E = \sigma_{zz}/\epsilon_{zz}$	$\nu = \epsilon_{xx}/\epsilon_{zz}$	$K = \sigma/\epsilon_v$	$G = \sigma_{xy}/\epsilon_{xy}$

Algunas relaciones entre los módulos elásticos se indican en la Tabla 3.2

Tabla 3.2: Tabla de los Módulos Elásticos

$K$	$E$	$\nu$	$G$	$\lambda$
$\lambda + \frac{2}{3}G$	$G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$	—	—
—	$9K \frac{K - \lambda}{3K - \lambda}$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$	$\frac{3}{2}(K - \lambda)$	—
—	$\frac{9KG}{3K + G}$	$\frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$	—	$K - \frac{2}{3}G$
$\frac{EG}{3(3G - E)}$	—	$\frac{E}{2G} - 1$	—	$G \frac{E - 2G}{(3G - E)}$
—	—	$\frac{3K - E}{6K}$	$\frac{3KE}{9K - E}$	$3K \frac{3K - E}{9K - E}$
$\lambda \frac{1 + \nu}{3\nu}$	$\lambda \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$	—	$\lambda \frac{1 - 2\nu}{2\nu}$	—
$G \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$	$2G(1 + \nu)$	—	—	$G \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$
—	$3K(1 - 2\nu)$	—	$3K \frac{1 - 2\nu}{2 + 2\nu}$	$3K \frac{\nu}{1 + \nu}$
$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	—	—	$\frac{E}{2 + 2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$

Resolviendo la ecuación (3.23) para la deformación se tiene:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] - \frac{\alpha}{3K} p \delta_{ij}. \quad (3.24)$$

Considerando la suma de las tres deformaciones normales:  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  y  $\epsilon_{zz}$  de la ecuación 3.24 la deformación volumétrica  $\epsilon_v$ , puede expresarse de la forma siguiente:

$$\epsilon_v = -c_b \bar{\sigma}', \quad (3.25)$$

donde,  $c_b$  es la compresibilidad del medio poroso, el inverso del módulo de bulk,  $c_b = 1/K$  y  $\bar{\sigma}' = \bar{\sigma} - \alpha p$ , el esfuerzo efectivo medio.

La deformación volumétrica es negativa, ya que se considera que el volumen poroso se reduce cuando el esfuerzo efectivo se incrementa.

La deformación total,  $\epsilon_{ij}$ , puede considerarse como la suma de las deformaciones poroelástica y libre. Un cambio uniforme de la presión de poro en un cuerpo sin restricciones producirá una deformación volumétrica libre y un cambio no uniforme en la presión o en un cuerpo restringido por ciertas condiciones de frontera puede causar deformación poroelástica (Wang, 2017).

Podemos expresar la ecuación 3.23 en términos de la constante de Lamé,  $\lambda$ , como:

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + \alpha p\delta_{ij}. \quad (3.26)$$

Sustituyendo esta última ecuación en las ecuaciones de equilibrio (3.8, 3.9, 3.10):

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial G\epsilon_{xx}}{\partial x} + 2\frac{\partial G\epsilon_{xy}}{\partial y} + 2\frac{\partial G\epsilon_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \lambda\epsilon_{kk}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha p}{\partial x} &= -F_x \\ 2\frac{\partial G\epsilon_{yx}}{\partial x} + 2\frac{\partial G\epsilon_{yy}}{\partial y} + 2\frac{\partial G\epsilon_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \lambda\epsilon_{kk}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha p}{\partial y} &= -F_y \\ 2\frac{\partial G\epsilon_{zx}}{\partial x} + 2\frac{\partial G\epsilon_{zy}}{\partial y} + 2\frac{\partial G\epsilon_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \lambda\epsilon_{kk}}{\partial z} + \frac{\partial \alpha p}{\partial z} &= -F_z \end{aligned} \quad (3.27)$$

Expresando las ecuaciones anteriores en función del vector desplazamiento, considerando a  $G$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  como constantes y despreciando las fuerzas de cuerpo:



$$\begin{aligned}
 G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\alpha \frac{\partial}{\partial x} p \\
 G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\alpha \frac{\partial}{\partial y} p \\
 G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\alpha \frac{\partial}{\partial z} p
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Finalmente se obtiene:

$$G \nabla^2 u + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3.29}$$

$$G \nabla^2 v + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{3.30}$$

$$G \nabla^2 w + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3.31}$$

Las ecuaciones (3.29), (3.30) y (3.31) son las ecuaciones que gobiernan el comportamiento mecánico de un medio poroso deformable deben cumplirse en cada instante de tiempo para un sistema en equilibrio mecánico. Se encuentran expresadas en términos del desplazamiento, como la variable cinemática principal y de la presión del fluido, como la variable dinámica. Así mismo pueden expresarse en función de la deformación como sigue:

$$G \nabla^2 \epsilon_{xx} + (G + \lambda) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} p, \tag{3.32}$$

$$G \nabla^2 \epsilon_{yy} + (G + \lambda) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial y} = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} p, \tag{3.33}$$

$$G \nabla^2 \epsilon_{zz} + (G + \lambda) \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial z^2} p. \tag{3.34}$$

### 3.1.1. Condiciones Iniciales y de Frontera

La definición completa del modelo de geomecánica involucra la descripción del estado tenso-deformacional al que se encuentra sometido el yacimiento, tanto inicialmente como en sus fronteras, las cuales deben satisfacer en la medida de lo posible las condiciones geológicas prevaletientes. El estado de deformación inicial establece las condiciones iniciales, mientras la distribución de esfuerzos en las fronteras del yacimiento, resultado de deformaciones en el pasado geológico determina las condiciones de frontera (Geertsma et al., 1957).

Las condiciones de frontera pueden describirse en términos de esfuerzos o deformaciones y deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio mecánico. Las condiciones en términos de deformación, establecen el desplazamiento de las fronteras, que se suponen generalmente igual a cero. Las condiciones en términos de esfuerzo que se suponen generalmente, son de carga o esfuerzo constante.

Empleando las diferentes condiciones de frontera mencionadas anteriormente, pueden describirse dos tipos de deformación; isotrópica y uniaxial, de la forma siguiente:

- Deformación isotrópica

En este caso se considera que las fronteras del yacimiento se encuentran sometidas a esfuerzos normales constantes, mientras que la base del yacimiento no sufre desplazamiento alguno. Estas condiciones pueden representarse de la forma siguiente:

$$u(0, t) = u_x(t) \qquad u(L_x, t) = u_x(t) \qquad t \geq 0, \qquad (3.35)$$

$$v(0, t) = u_y(t) \qquad v(L_y, t) = u_y(t) \qquad t \geq 0, \qquad (3.36)$$

$$w(0, t) = u_z(t) \qquad w(L_z, t) = 0. \qquad t \geq 0 \qquad (3.37)$$

- Deformación uniaxial

Este tipo de condiciones se supone para un yacimiento con una extensión areal considerable, de modo que es posible considerar que las fronteras laterales del yacimiento se mantienen rígidas y por lo tanto, el desplazamiento de cada una de ellas es cero, manteniendo el yacimiento confinado lateralmente.

$$u(0, t) = 0 \qquad u(L_x, t) = 0 \quad t \geq 0, \qquad (3.38)$$

$$v(0, t) = 0 \qquad v(L_y, t) = 0 \quad t \geq 0, \qquad (3.39)$$

$$w(0, t) = u_z(t) \qquad w(L_z, t) = 0 \quad t \geq 0. \qquad (3.40)$$

En este caso, únicamente se permite el desplazamiento en la dirección vertical considerando que la base del yacimiento no sufre desplazamiento, al igual que el caso de deformación isotrópica.

## 3.2. Modelo de Flujo de Fluidos

En este modelo se considera el flujo lineal de un solo fluido de compresibilidad constante, en un medio poroso homogéneo e isotrópico capaz de deformarse. Para ello se emplean los mismos principios físicos fundamentales que para un medio poroso no deformable, con la diferencia de que en este caso el balance de materia se realiza tanto para fase líquida como para la fase sólida, ya que se considera que ambos elementos se encuentran en movimiento (Verruijt, 1969; Bear, 2013).

De este modo se necesitan tres principios básicos fundamentales para la derivación del modelo.

- Ecuación de continuidad
- Ecuación de transporte
- Ecuación de estado

## Ecuación de continuidad

La aplicación del principio de conservación de materia en un medio poroso deformable se realiza tanto para el fluido como para el sólido. Consideraremos entonces el volumen de control de la **Figura 3.3** a través del cual ocurre el flujo, en el que ambos componentes satisfacen el principio de conservación de la materia (Bear et al., 1991), (Verruijt, 1969), lo cual es generalmente aceptado en el análisis del acoplamiento entre la teoría poroelástica lineal y de flujo de fluidos.

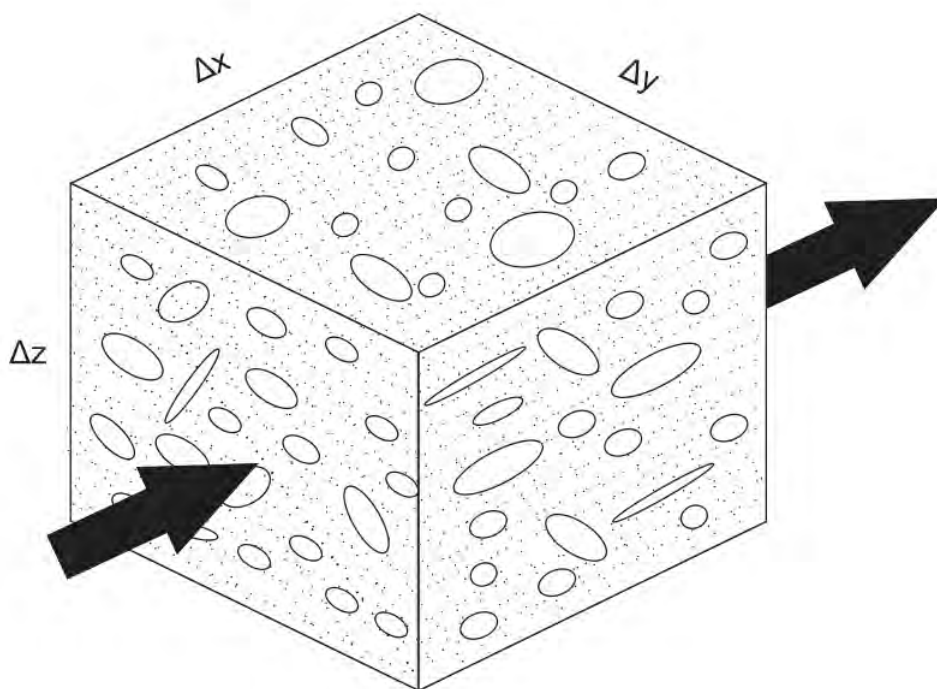


Figura 3.3: Volumen elemental de roca.

### Para el fluido

Considerando que el volumen elemental de roca tiene una porosidad,  $\phi$ , un volumen,  $V_b$ , y se encuentra saturado completamente por un fluido de densidad,  $\rho_f$ . La masa de fluido contenido en el volumen de control es;  $\phi\rho_f V_b$ . También se supone que el flujo

fluye por cada una sus caras, cuya área efectiva al flujo es;  $\phi\Delta x\Delta y$ ,  $\phi\Delta x\Delta z$  y  $\phi\Delta y\Delta z$ .

Aplicando el principio de conservación de materia, se tienen que:

$$\begin{aligned} & [(\rho_f v_f)_x - (\rho_f v_f)_{x+dx}] \phi \Delta y \Delta z + [(\rho_f v_f)_y - (\rho_f v_f)_{y+dy}] \phi \Delta x \Delta z + \\ & [(\rho_f v_f)_z - (\rho_f v_f)_{z+dz}] \phi \Delta x \Delta y \pm q \rho_f = \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} [(\phi \rho_f)_{t+\Delta t} - (\phi \rho_f)_t], \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde,  $q$ , representa los términos fuente o sumidero; considerando la extracción de masa como positiva.

Dividiendo ambos lados de la ecuación 3.41 por el volumen total de roca,  $-V_b = -\Delta x \Delta y \Delta z$  :

$$\frac{(\rho_f v_f \phi)_{dx}}{\Delta x} + \frac{(\rho_f v_f \phi)_{dy}}{\Delta y} + \frac{(\rho_f v_f \phi)_{dz}}{\Delta z} \mp \frac{q \rho_f}{V_b} = -\frac{[(\phi S \rho_f)_{dt}]}{\Delta t}. \quad (3.42)$$

Considerando el límite cuando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t$  tienden a cero, se puede expresar la ecuación 3.42 en forma diferencial :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi \rho_f v_f) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi \rho_f v_f) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi \rho_f v_f) \mp \frac{q \rho_f}{V_b} = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_f). \quad (3.43)$$

## Para el sólido

En este caso se considera que la masa del sólido contenido en el volumen elemental de roca es;  $(1 - \phi)\rho_s V_r$  y el área efectiva al flujo es  $(1 - \phi)\Delta y \Delta z$ ,  $(1 - \phi)\Delta x \Delta z$  y  $(1 - \phi)\Delta x \Delta y$ . Es importante notar que se considera el flujo de la fase sólida como un rigor matemático, sin embargo, el interés en realizar el balance másico del sólido se centra en obtener una relación para determinar la deformación del medio.

Aplicando la ecuación de balance de materia:

$$\begin{aligned} & [(\rho_s v_s)_x - (\rho_s v_s)_{x+dx}] (1 - \phi) \Delta y \Delta z + [(\rho_s v_s)_y - (\rho_s v_s)_{y+dy}] (1 - \phi) \Delta x \Delta z + \\ & [(\rho_s v_s)_z - (\rho_s v_s)_{z+dz}] (1 - \phi) \Delta x \Delta y = \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \{[(1 - \phi) \rho_s]_{t+\Delta t} - [(1 - \phi) \rho_s]_t\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación 3.44 por el volumen de roca,  $-v_b = -\Delta x \Delta y \Delta z$  :

$$\frac{[\rho_s v_s (1 - \phi)]_{dx}}{\Delta x} + \frac{[\rho_s v_s (1 - \phi)]_{dy}}{\Delta y} + \frac{[\rho_s v_s (1 - \phi)]_{dz}}{\Delta z} = -\frac{[(1 - \phi) \rho_s]_{dt}}{\Delta t} \quad (3.45)$$

Considerando nuevamente el límite cuando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t$  tienden a cero, se puede expresar la ecuación anterior en forma diferencial :

$$\frac{\partial}{\partial x} (1 - \phi) \rho_s v_s + \frac{\partial}{\partial y} (1 - \phi) \rho_s v_s + \frac{\partial}{\partial z} (1 - \phi) \rho_s v_s = -\frac{\partial}{\partial t} (1 - \phi) \rho_s. \quad (3.46)$$

Finalmente las ecuaciones de balance de materia tanto para el fluido como para el sólido son las siguientes:

$$\nabla \phi \rho_f v_f \mp \frac{q \rho_f}{V_b} = -\frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t}, \quad (3.47)$$

$$\nabla (1 - \phi) \rho_s v_s = -\frac{\partial (1 - \phi) \rho_s}{\partial t}. \quad (3.48)$$

## Ecuación de transporte

Para establecer el movimiento relativo entre ambas fases, es posible definir la velocidad total relativa del fluido,  $v$ , en función de la velocidad del fluido,  $v_f$ , y de la velocidad del sólido,  $v_s$ . Huyakorn (2012) considera que la velocidad medida de un fluido a través de un medio poroso, no es la velocidad verdadera del fluido, sino la velocidad relativa

del fluido, definiendo la velocidad total relativa del fluido como:

$$v = \phi(v_f - v_s). \quad (3.49)$$

Empleando la Ley de Darcy como ecuación de transporte, se puede expresar en términos de la velocidad relativa del fluido con respecto al sólido como:

$$v = -\frac{k}{\mu} \nabla \Phi, \quad (3.50)$$

donde, la permeabilidad ,  $k$ , de la roca, es un tensor simétrico,  $\mu$  es la viscosidad del fluido y  $\Phi$  representa el potencial de flujo, definido como:

$$\Phi = p - \gamma D, \quad (3.51)$$

Considerando que la profundidad,  $D$ , es positiva hacia abajo.

Podemos reescribir la Ecuación 3.50 como:

$$v = -\frac{k}{\mu} (\nabla p - \gamma \nabla D). \quad (3.52)$$

### 3.2.1. Ecuación de Estado

Para un fluido ligeramente compresible, su compresibilidad a temperatura ,  $T$ , constante, se define como:

$$c_f = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T. \quad (3.53)$$

Considerando los principios básicos descritos anteriormente, a continuación se muestra la derivación de la ecuación para flujo monofásico en un medio poroso deformable.



A partir de la ecuación de balance de materia del sólido:

$$-\rho_s v_s \nabla \phi + (1 - \phi) \nabla \rho_s v_s = -(1 - \phi) \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3.54)$$

Considerando la definición de la derivada material, como:

$$\frac{D}{Dt} F = \frac{\partial}{\partial t} F + v \nabla F. \quad (3.55)$$

Entonces, a partir de la ecuación (3.54) se puede expresar la derivada material de la porosidad de la forma siguiente:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1 - \phi}{\rho_s} \left( \frac{D\rho_s}{Dt} + \rho_s \nabla v_s \right) \quad (3.56)$$

Expresando la ecuación de balance de materia para el fluido, en términos de  $v_s$ , se tiene:

$$\nabla \phi \rho_f \left( \frac{v}{\phi} + v_s \right) + q \rho_f = - \frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t},$$

$$\nabla \rho_f v + \phi \rho_f \nabla v_s + q \rho_f = - \frac{\partial \phi \rho_f}{\partial t} - v_s \nabla \phi \rho_f.$$

Aplicando nuevamente el concepto de derivada total, se puede expresar la ecuación anterior de la forma siguiente:

$$\nabla \rho_f v + q \rho_f = - \frac{D\phi \rho_f}{Dt} - \phi \rho_f \nabla v_s. \quad (3.57)$$

Considerando flujo monofásico de aceite y sustituyendo la Ley de Darcy en la ecuación 3.57:

$$-\nabla \cdot \left[ \rho_o \frac{k}{\mu_o} (\nabla p - \gamma \nabla D) \right] \mp \frac{q \rho_o}{V_b} = - \frac{D\phi \rho_o}{Dt} - \phi \rho_o \nabla v_s. \quad (3.58)$$

Dividiendo la ecuación (3.58) por la densidad del aceite a condiciones estándar,

$\rho_{o,c.e.}$ ,

$$\nabla \left[ \frac{k}{B_o \mu_o} (\nabla p - \gamma \nabla D) \right] \pm q_o^* = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\phi}{B_o} \right) + \frac{\phi}{B_o} \nabla v_s, \quad (3.59)$$

donde  $q_o^*$  es el gasto de aceite por unidad de volumen de roca a condiciones estándar y  $B_o$  es el factor de volumen del aceite.

Sustituyendo la ecuación 3.56 en la ecuación 3.59:

$$\nabla \left[ \frac{k}{B_o \mu_o} (\nabla p - \gamma \nabla D) \right] + q^* = \frac{\phi}{B_o} \left[ \frac{1 - \phi}{\phi \rho_s} \frac{D \rho_s}{Dt} + B_o \frac{D}{Dt} \frac{1}{B_o} + \frac{1 - \phi}{\phi} \nabla v_s + \nabla v_s \right].$$

Considerando el término  $v_s \nabla \rho_s$  de la derivada total de la densidad despreciable con respecto a término  $\partial \rho_s / \partial t$ , se tiene que:

$$\nabla \left[ \frac{k}{B_o \mu} (\nabla p - \gamma \nabla D) \right] + q^* = \frac{\phi}{B_o} \left[ \frac{1 - \phi}{\phi \rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + B_o \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{B_o} + \frac{1}{\phi} \nabla v_s \right]. \quad (3.60)$$

A la izquierda de la ecuación 3.60 se tiene el término de flujo y el término fuente o sumidero, mientras el lado derecho de la ecuación corresponde al término de acumulación, el cual puede desarrollarse de acuerdo a la teoría poroelástica lineal, como se describe a continuación:

Siendo que el volumen total de roca,  $V_b$ , es igual al volumen de poros,  $V_p$ , más el volumen de sólidos,  $V_s$ .

$$V_s = V_b - V_p. \quad (3.61)$$

Se puede expresar el cambio del volumen de sólidos,  $V_s$ , con respecto al tiempo como:

$$\frac{1}{V_s} \frac{\partial V_s}{\partial t} = \frac{1}{V_b - V_p} \frac{\partial (V_b - V_p)}{\partial t} = \frac{1}{1 - \phi} \left( \frac{1}{V_b} \frac{\partial V_b}{\partial t} - \phi \frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial t} \right). \quad (3.62)$$

Geertsma et al. (1957) considera que el volumen total de la roca esta en función del esfuerzo medio,  $\bar{\sigma}$ , y de la presión de poro,  $p$ . Suponiendo que  $\bar{\sigma}$  y  $p$  se incrementan en la misma cantidad, determinó que  $V_p$  y  $V_b$  pueden expresarse de la forma siguiente:

$$\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial t} = \frac{1}{V_p} \left( \frac{\partial V_p}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \frac{1}{V_p} \left( \frac{\partial V_p}{\partial p} \right)_{\bar{\sigma}} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.63)$$

$$\frac{1}{V_b} \frac{\partial V_b}{\partial t} = \frac{1}{V_b} \left( \frac{\partial V_b}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \frac{1}{V_b} \left( \frac{\partial V_b}{\partial p} \right)_{\bar{\sigma}} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.64)$$

donde el esfuerzo medio,  $\bar{\sigma}$ , se define por medio de la ecuación 2.8 y se considera, que es la única componente del tensor de esfuerzos responsable de la deformación.

A partir de las compresibilidades;  $c_{bc}$ ,  $c_{bp}$ ,  $c_{pc}$  y  $c_{pp}$ , (ecuaciones 2.15-2.18) pueden definirse las relaciones siguientes con respecto a la porosidad y la compresibilidad de la matriz de roca,  $c_s$ , (Zimmerman et al., 1986):

$$c_{bp} = c_{bc} - c_s, \quad (3.65)$$

$$c_{pc} = \frac{c_{bc} - c_s}{\phi}, \quad (3.66)$$

$$c_{pp} = \frac{c_{bc} - c_s(1 + \phi)}{\phi}. \quad (3.67)$$

Empleando las relaciones (3.65)-(3.67) podemos expresar las ecuaciones (3.63) y (3.64), como:

$$-\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial t} = c_s \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c_b - c_s}{\phi} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad (3.68)$$

$$-\frac{1}{V_b} \frac{\partial V_b}{\partial t} = c_s \frac{\partial p}{\partial t} + c_b \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (3.69)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.68) y (3.69) en (3.62):

$$\frac{1}{V_s} \frac{\partial V_s}{\partial t} = \frac{1}{1-\phi} \left[ -c_s \frac{\partial p}{\partial t} - c_b \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \phi c_s \frac{\partial p}{\partial t} + (c_b - c_s) \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right].$$

Reduciendo términos:

$$\frac{1}{V_s} \frac{\partial V_s}{\partial t} = \frac{1}{1-\phi} \left( \phi c_s \frac{\partial p}{\partial t} - c_s \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} \right). \quad (3.70)$$

Sustituyendo la relación siguiente (Bai y Elsworth, 2000) :

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -\frac{1}{V_s} \frac{\partial V_s}{\partial t}, \quad (3.71)$$

en la ecuación (3.70), se obtiene:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{1}{1-\phi} \left( -\phi c_s \frac{\partial p}{\partial t} + c_s \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} \right) \quad (3.72)$$

Sumando y restado  $\frac{c_s \alpha}{1-\phi} \frac{\partial p}{\partial t}$  en la ecuación 3.72:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{1}{1-\phi} \left[ c_s (\alpha - \phi) \frac{\partial p}{\partial t} + c_s \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right]. \quad (3.73)$$

A partir de la ecuación 3.25, la derivada de la deformación volumétrica con respecto al tiempo se expresa como:

$$\frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = -c_b \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (3.74)$$

Sustituyendo la ecuación (3.74) en (3.73):

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{1}{1-\phi} \left[ c_s (\alpha - \phi) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c_s}{c_b} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \right]. \quad (3.75)$$

Finalmente, sustituyendo esta última expresión en la ecuación (3.60):

$$\nabla \left[ \frac{k}{B_o \mu} (\nabla p - \gamma \nabla D) \right] - q^* = \frac{\phi}{B_o} \left( \frac{c_s(\alpha - \phi)}{\phi} \frac{\partial p}{\partial t} + B_o \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{B_o} - \frac{c_s}{\phi c_b} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \nabla v_s \right). \quad (3.76)$$

Considerando la velocidad del sólido,  $v_s$ , en términos de la deformación volumétrica, como:

$$\nabla v_s = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (3.77)$$

y que:

$$\alpha = 1 - \frac{c_s}{c_b}. \quad (3.78)$$

La ecuación (3.76) se reduce a:

$$\nabla \left[ \frac{k}{B_o \mu} (\nabla p - \gamma \nabla D) \right] - q^* = \frac{\phi}{B_o} \left[ \frac{c_s(\alpha - \phi)}{\phi} \frac{\partial p}{\partial t} + B_o \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{B_o} + \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \right], \quad (3.79)$$

la cual es una ecuación no lineal de segundo orden en derivadas parciales que tiene como incógnitas a la presión,  $p$ , y a la deformación,  $\epsilon_v$ . De este modo, el término de la derecha de la ecuación (3.79) considera la contribución de cuatro componentes (Inoue y da Fontoura, 2009):

- La deformación volumétrica de la roca:  $\Delta \epsilon_v$ .
- La compresibilidad del sólido por la presión de poro:  $c_s(1 - \phi)\Delta p$  :
- La compresibilidad del sólido por el esfuerzo efectivo:  $-c_s/c_b(\Delta \epsilon + c_s \Delta p)$
- La compresibilidad del fluido por la presión de poro:  $c_f \phi \Delta p$

Otras expresiones equivalentes a la ecuación 3.79, son:

$$\nabla \left[ \frac{k}{B_o \mu} (\nabla p - \gamma \nabla D) \right] - q^* = S \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial t}, \quad (3.80)$$

donde:

$$S = c_f \phi + c_s (\alpha - \phi)$$

Y

$$\nabla \left[ \frac{k}{B_o \mu} (\nabla p - \gamma \nabla D) \right] - q^* = \frac{\phi}{B_o} \left[ \left( \frac{c_s (\alpha - \phi) + c_f \phi}{\phi} \right) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha}{\phi K} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right], \quad (3.81)$$

donde  $\bar{\sigma}$  es el esfuerzo medio y  $K$  es el módulo de bulk.

Por ultimo, se tienen un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:  $p$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ : tres ecuaciones que predicen la deformación poroelástica de la roca en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y la ecuación que determina la presión en el yacimiento.

$$\nabla \left[ \frac{k}{B_o \mu} (\nabla p - \gamma \nabla D) \right] - q^* = \frac{\phi}{B_o} \left[ \left( \frac{c_s (\alpha - \phi) + c_f \phi}{\phi} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \right]$$

$$G \nabla^2 u + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_v = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} p$$

$$G \nabla^2 v + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_v = -\alpha \frac{\partial}{\partial y} p$$

$$G \nabla^2 w + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_v = -\alpha \frac{\partial}{\partial z} p$$

De este modo, la solución al problema de flujo de fluidos en un medio poroso deformable viene dado por la solución de dicho sistema de ecuaciones, para lo cual existen diferentes enfoques de acoplamiento entre ambos sistemas.



# Capítulo 4

## Estrategias de acoplamiento, completamente, parcialmente y no acoplado

Existen diferentes metodologías para realizar el acoplamiento entre los modelos de flujo de fluidos y de geomecánica, el cual es posible ya que ambos modelos comparten las variables de presión y deformación. Por un lado, las ecuaciones de equilibrio mecánico están en términos de la presión del yacimiento, mientras que en el modelo de flujo aparece término de deformación volumétrica de la roca.

Idealmente es necesario resolver el problema de flujo de fluidos en conjunto con el problema de tensión deformación de la roca. Muchos de los problemas hidromecánicos se resuelven empleando una formulación completamente acoplada, la cual ha resultado ser la más apropiada. Sin embargo, existen otras formulaciones o enfoques que pueden emplearse satisfactoriamente.

Settari et al. (2001) describen varios métodos que se han empleado para combinar los modelos poroelásticos con los de flujo de fluidos. Clasificándolos de menor a mayor orden de acoplamiento como: desacoplados o no acoplados, explícitos, iterativos y completamente acoplados.



Estos métodos pueden combinar diferentes tipos de discretización de dominio para cada modelo. Generalmente se emplea el método de diferencias finitas para discretizar el modelo de flujo, mientras el modelo de geomecánica es discretizado empleando el método de elemento finito.

A continuación se presenta la descripción de las diferentes metodologías y enfoques que se han empleado para realizar el acoplamiento entre los modelos de flujo de fluidos y de geomecánica.

## 4.1. Completamente Acoplado

Bajo este enfoque, se resuelven las ecuaciones de flujo y las ecuaciones de tensión-deformación de la roca, de forma simultánea, por lo que el simulador debe tener la capacidad de manejar tanto las variables de flujo, que corresponden a las presiones y saturaciones, y las variables del modelo de geomecánica, que corresponden a los desplazamientos y las deformaciones (Dean et al., 2006; Gu et al., 2011). A diferencia de otros métodos, el método completamente acoplado asegura la consistencia interna al resolver las variables principales de forma simultánea, por lo que además se considera como el más estable de todas las técnicas de acoplamiento.

Tiene la ventaja de resolver implícitamente el cambio en la porosidad y los esfuerzos al mismo tiempo que las ecuaciones de flujo, lo cual puede resultar una diferencia significativa entre los métodos de acoplamiento parciales cuando hay iteraciones no lineales entre la roca y el fluido.

## 4.2. Métodos Parcialmente Acoplados

Existen varias alternativas al esquema completamente acoplado que han sido empleadas para resolver los modelos de geomecánica y flujo de fluidos exitosamente. Dentro de estas alternativas están los métodos de acoplamiento parcial. Bajo esta metodología

se resuelven los modelos de flujo y de geomecánica empleando diferentes simuladores para cada modelo o bien, mediante un módulo de geomecánica incluido en el proceso de solución del simulador de yacimientos.

Los métodos parcialmente acoplados pueden clasificarse como explícitos e iterativos, de acuerdo a la forma en que los simuladores interactúan entre si. Algunos autores los denominan también como acoplamientos en uno y doble sentido, respectivamente (Inoue y da Fontoura, 2009; Gu et al., 2011).

#### 4.2.1. Acoplamiento iterativo

En este esquema de acoplamiento las variables del modelo de flujo y de geomecánica se calculan de forma separada y secuencial, empleando diferentes simuladores para resolver cada modelo (Inoue y da Fontoura, 2009) .

Inicialmente se determina la distribución de presiones y de saturaciones, en el caso de flujo multifásico, mediante el simulador de yacimientos. Estos dos valores se transfieren al módulo de geomecánica para calcular los esfuerzos y las deformaciones. Posteriormente se ingresa un nuevo conjunto de porosidades y compresibilidades al simulador de flujo y se obtiene un nuevo conjunto para los valores de presión y saturación. Estos valores se retroalimentan al simulador de geomecánica y se evalúa el criterio de convergencia; si este criterio se cumple, se avanza al siguiente paso de tiempo.

Este acoplamiento es conocido también como acoplamiento en doble sentido o bidireccional, puesto que la deformación de la roca obtenida mediante el modelo de geomecánica se envía al modelo de flujo, en el que se modifican algunas propiedades petrofísicas . La tensión o deformación obtenida de la solución de equilibrio de esfuerzo se retroalimenta a la ecuación de fluido para modificar la porosidad.

La esencia del acoplamiento iterativo es el uso de una función especializada de porosidad durante la simulación. El módulo de geomecánica obtiene la presión del simulador de yacimientos y usa esta información para calcular las deformaciones y esfuerzos, mientras que la función de porosidad es empleada para calcular los términos de com-

presibilidad. Por su parte el simulador de yacimientos usa la función de porosidad con los nuevos factores de compresibilidad para calcular nuevamente las presiones en cada celda para el paso de tiempo siguiente (Tran et al., 2005).

La **Figura 4.1** muestra el proceso de acoplamiento iterativo empleando un módulo de geomecánica para determinar las deformación del yacimiento.

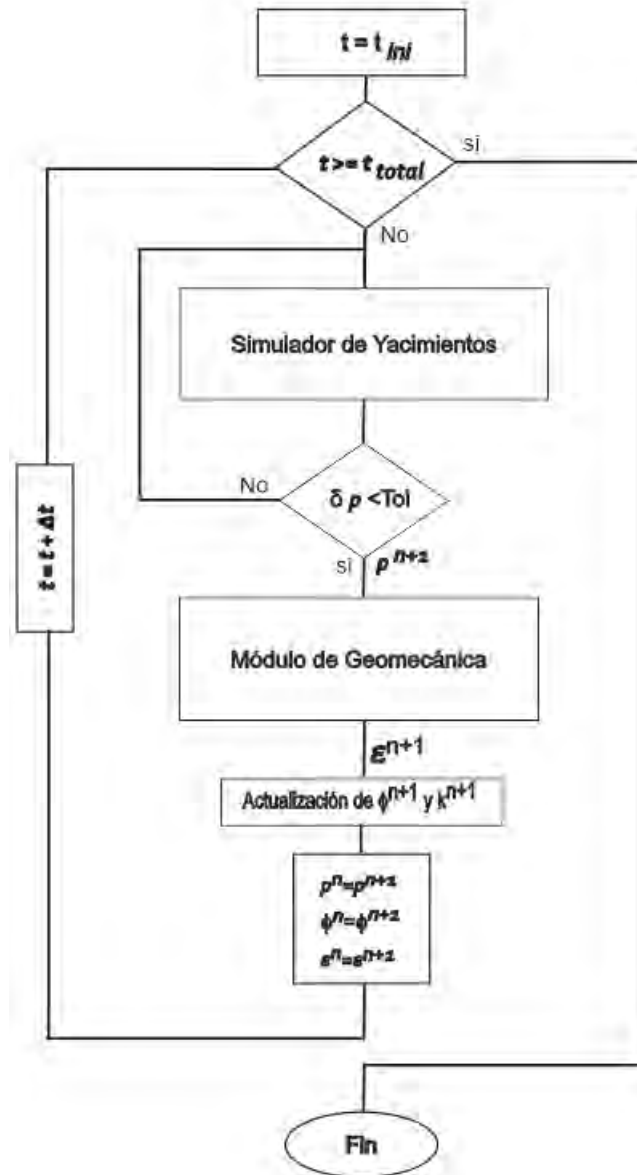


Figura 4.1: Acoplamiento Iterativo

Una vez que se alcanza la convergencia, la solución es comparable con la solución del método completamente acoplado, además se considera que este método es uno de los acoplamientos mas flexibles y convenientes, ya que el módulo de geomecánica puede acoplarse a cualquier simulador de yacimientos sin modificaciones substanciales. Ya sea que se cree una interfaz para operar ambos simuladores, o bien se implemente un módulo para realizar los cálculos de geomecánica en el simulador de yacimientos.

Una de las desventajas de este acoplamiento, es que puede requerir de un gran número de iteraciones para alcanzar la convergencia; sin embargo, una vez que se ha alcanzado la convergencia, la solución puede compararse con a la solución obtenida mediante el método completamente acoplado.

Thomas et al. (2002) proponen una combinación de los métodos completamente acoplado e iterativamente acoplado, como un procedimiento iterativo completamente acoplado.

El procedimiento consiste de una fase de inicialización y otra de solución. La fase de inicialización es un proceso iterativo para inicializar los modelos de flujo y geomecánica con la misma distribución de porosidad. Basados en la distribución de presión y saturación inicial, proporcionada por el modelo de yacimientos, el modelo de geomecánica resuelve las ecuaciones de equilibrio mecánico, para establecer el estado inicial de esfuerzos en el yacimiento. Posteriormente el modelo de geomecánica transmite los valores de porosidad inicial al modelo de flujo.

Para la etapa siguiente las presiones y saturaciones se proporcionan al modelo de geomecánica en cada una de las iteraciones realizadas por paso de tiempo. Por su parte el modelo de geomecánica itera hasta obtener la solución realizando las iteraciones necesarias hasta alcanzar la convergencia. Las porosidades en función de la presión se transfieren al modelo de flujo para usarse en la iteración siguiente. Esta secuencia continúa hasta que se alcance el criterio de convergencia establecido en el simulador de yacimientos, tal y como se muestra en la **Figura 4.2**

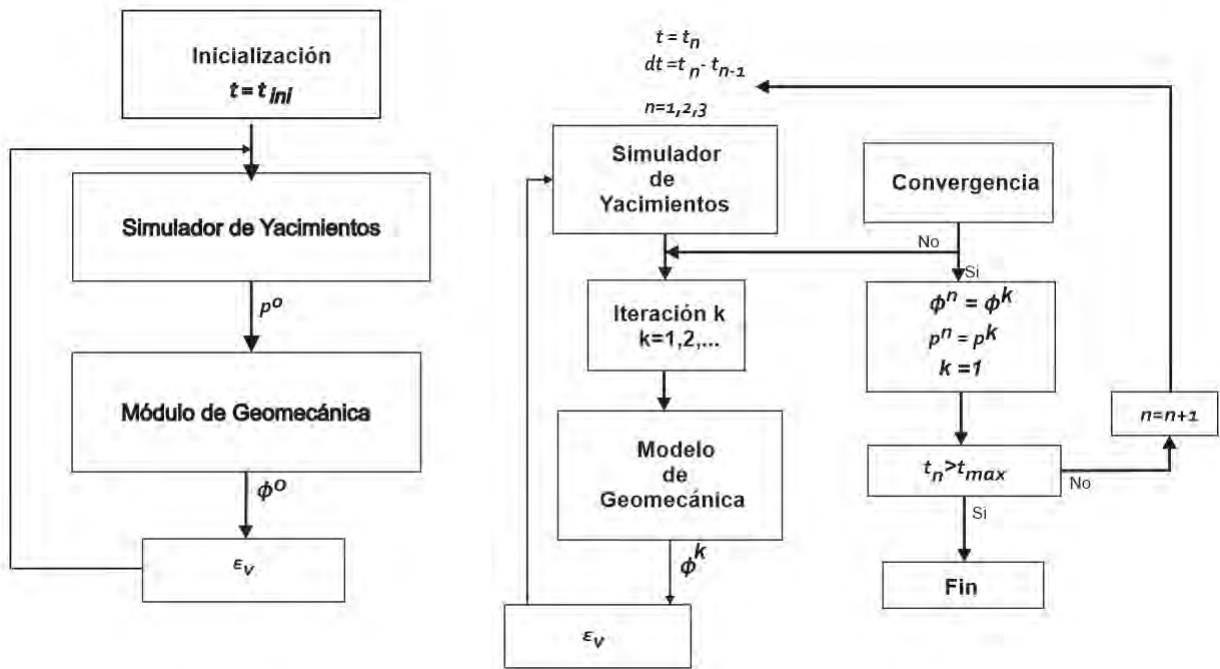


Figura 4.2: Procedimiento Iterativo Completamente Acoplado , Thomas, (2002).

#### 4.2.2. Explícitamente acoplado

Este acoplamiento se considera como un caso especial del acoplamiento iterativo, en el cual solo existe interacción entre los simuladores de flujo y de geomecánica en un sólo sentido, de ahí que también se le denomine acoplamiento unidireccional.

Al igual que en el acoplamiento iterativo, las ecuaciones de ambos modelos se resuelven de forma independiente. El simulador de yacimientos envía la información de presiones y saturaciones al modelo de geomecánica para el cálculo de la deformación. Sin embargo, en este caso, los resultados calculados no se envían de regreso al simulador de yacimientos, por lo tanto, el modelo de geomecánica no afecta la respuesta obtenida del simulador de yacimientos. La Figura 4.3 muestra el proceso de acoplamiento explícito.

Settari et al. (2001) establece que el acoplamiento explícito se logra retrasando los términos de acoplamiento un paso de tiempo, es decir, estos términos se tratan de forma explícita. Se empieza con la solución del simulador de yacimientos y con el cambio en el

esfuerzo conocido de un paso de tiempo previo. Posteriormente, usando la solución del modelo de flujo,  $\delta p^{n+1}$ , los esfuerzos son calculados a partir del modelo de geomecánica.

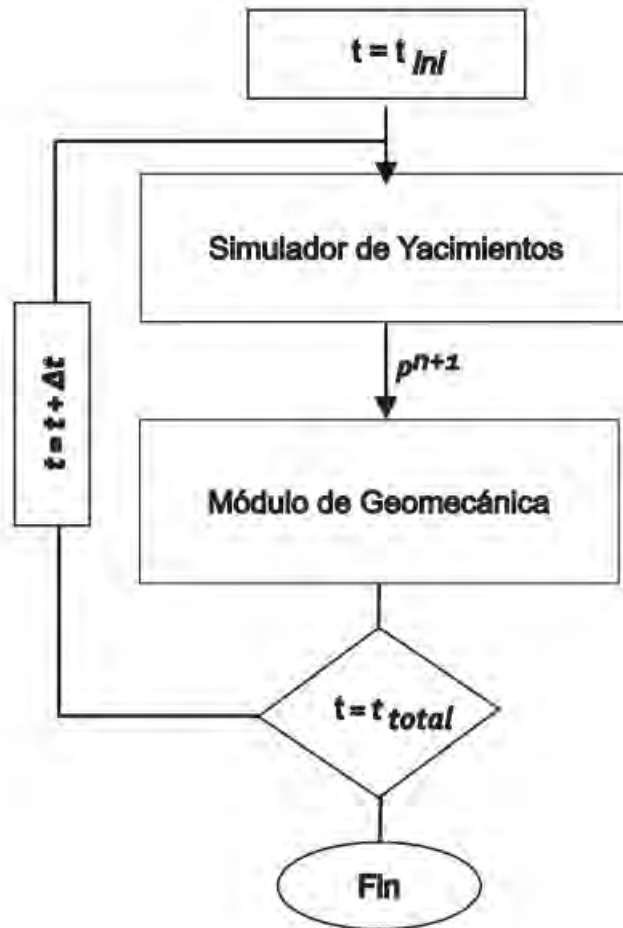


Figura 4.3: Acoplamiento Explícito

Según Dean et al. (2006) el algoritmo de acoplamiento explícito permite realizar los cálculos de geomecánica en una escala de tiempo diferente a la escala de tiempo empleada para el modelo de flujo. Lo cual resulta útil en problemas de subsidencia superficial ya que una mayor porción del tiempo de cálculo en la simulación puede emplearse en los cálculos de desplazamientos y deformaciones.

El cálculo de la deformación que sufre el medio poroso, puede calcularse sólo para ciertos lapsos de tiempo, la frecuencia de las actualizaciones que incorpora el modelo

de geomecánica, se controla a partir de la magnitud del cambio en el volumen poroso durante cada paso de tiempo. Si el volumen poroso cambia lentamente durante los lapsos de tiempo, entonces se requieren pocas actualizaciones del modelo de geomecánica (Minkoff et al., 2003).

Su principal ventaja es la de realizar los cálculos de esfuerzos y deformaciones solo para los pasos de tiempo seleccionados, ahorrando tiempo de cómputo.

Cabe recalcar que para los métodos parcialmente acoplados se requiere de la estimación de compresibilidades durante la simulación, ya que emplean un simulador de yacimientos convencional, y la compresibilidad se emplea como término de acoplamiento. Existen varias formas para realizar el cálculo de la compresibilidad, una primer aproximación consiste en usar simples suposiciones relacionadas a la variación de esfuerzos y deformación para cada problema, otra aproximación usa las variaciones de la presión y el volumen de los cálculos de geomecánica previos. Una tercer aproximación puede ser emplear aproximaciones a partir de las ecuaciones de equilibrio del modelo de geomecánica para calcular como las variaciones en la presión de poro afectan los desplazamientos. De cualquier modo, cuando se calcula dichas compresibilidades, es necesario establecer límites para tales estimaciones, ya que los valores demasiado grandes pueden generar errores numéricos y valores muy pequeños pueden generar oscilaciones o inestabilidad (Dean et al., 2006).

### 4.3. Métodos No Acoplados

Son aquellos métodos en que ambos simuladores, operan de forma independiente y no existe interacción alguna entre los modelos durante la simulación.

#### 4.3.1. Pseudo acoplado

Los acoplamientos de este tipo, son aquellos en los que el efecto de la geomecánica en el flujo de fluidos se determinan mediante correlaciones empíricas relacionadas

únicamente a parámetros de flujo como la porosidad y/o permeabilidad, las cuales se implementan en el simulador numérico de yacimientos. El tiempo de cálculo es muy corto comparado con cualquier otro método, ya que no es necesario implementar un módulo de geomecánica para realizar algún cálculo. Tran et al. (2005) señalan que el pseudo acoplamiento permite obtener una buena aproximación del fenómeno de compactación y así mismo, representa una forma de reproducir las observaciones de campo, sin emplear cálculos rigurosos para ello.

### **4.3.2. No acoplado**

En este caso los modelos de flujo y geomecánica se consideran problemas aislados y por lo tanto son resueltos de forma separada mediante dos sistemas de ecuaciones totalmente independientes entre si. De este modo, los modelos no interactúan durante la solución, de modo que el criterio del especialista es la única conexión entre los dos sistemas (Rodriguez, 2011).

Son pocos los problemas en que este tipo de metodología resulta conveniente. Tal es el caso de la deformación uniaxial o bien de la deformación isotrópica, debido a que presentan un patrón de deformación simple (Gu et al., 2011).

### **4.3.3. Acoplamiento entre los modelos de geomecánica y flujo de fluidos**

En esta investigación, los modelos de geomecánica y flujo de fluidos serán acoplados mediante un esquema iterativo. Generalmente, esta estrategia de acoplamiento involucra el empleo de un simulador de flujo de fluidos convencional para calcular las incógnitas de presiones y de saturación, si es el caso. A partir de estos valores se emplea un modelo de geomecánica para determinar los desplazamientos de cada una de las fronteras de las celdas o de los elementos, dependiendo si se considera el método de diferencias finitas o de elemento finito, respectivamente. Los desplazamientos son usados para determinar la



deformación del yacimiento y a través de ella, determinar el cambio en las propiedades petrofísicas, y como en los simuladores de flujo de fluidos convencionales no se considera la deformación del medio poroso, es necesario además de calcular el cambio en las propiedades petrofísicas, calcular un término de acoplamiento para interactuar entre el modelo de flujo y el modelo de geomecánica.

A diferencia de estos casos, el acoplamiento iterativo realizado en este trabajo se emplea el modelo de flujo de fluidos acoplado a la deformación del medio poroso tal y como se desarrolló en el capítulo anterior, para determinar las incógnitas de presión. A partir de la ecuación 3.81:

$$\nabla \left[ \frac{k}{B_o \mu} (\nabla p - \gamma \nabla D) \right] - q^* = \frac{\phi}{B_o} \left[ \frac{c_s(\alpha - \phi)}{\phi} \frac{\partial p}{\partial t} + c_f \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha}{\phi K} \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right] \quad (4.1)$$

En la que el término de acumulación se encuentra en función de la presión y del esfuerzo medio.

Una vez determinadas las incógnitas de presión a través de la ecuación 4.1, se emplea el modelo de geomecánica para determinar la deformación del medio poroso. La deformación obtenida es empleada para determinar los cambios en la porosidad. Adicionalmente puede determinarse el cambio en la permeabilidad. La Figura 4.4 detalla el proceso iterativo seguido por el simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos.

Para un medio poroso no deformable, el cambio del volumen poroso es tomado en cuenta mediante la dependencia de la porosidad en función de la presión debido a la compresibilidad de la roca,  $c_\phi$ , la cual se asume generalmente como constante, de modo que la porosidad  $\phi$  a la presión  $p$  puede expresarse como (Ertekin et al., 2001):

$$\phi = \phi^o [1 + c_\phi (p - p^o)] \quad (4.2)$$

donde  $p^o$ , y  $\phi^o$  representan la presión y la porosidad de referencia. La Ecuación 4.2 muestra que la porosidad se reduce en función de la porosidad de referencia en cuanto

la presión del fluido contenido en los poros decrece.

Para el caso de un yacimiento susceptible a esfuerzos, el incremento del esfuerzo efectivo traerá consigo la deformación de la roca, esta deformación impactará en la porosidad de la roca, que de acuerdo a la teoría poroelástica lineal, puede ser expresada como:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + [c_f \phi^n + c_s(\alpha - \phi^n)](p^{n+1} - p^n) + \alpha(\epsilon_{kk}^{n+1} - \epsilon_{kk}^n), \quad (4.3)$$

donde  $\phi^n$ ,  $\epsilon_{kk}^n$ ,  $p^n$  y  $\phi^{n+1}$ ,  $\epsilon_{kk}^{n+1}$ ,  $p^{n+1}$  representa la porosidad, deformación y presión al tiempo  $n$  y  $n + 1$ , respectivamente. La ecuación 4.3 será empleada para actualizar el valor de la porosidad en el simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos.

La deformación del yacimiento producto del incremento del esfuerzo efectivo, genera además de la compactación del yacimiento, cambios en la permeabilidad y compresibilidad de la roca (Gutierrez et al., 2001). Para rocas mecánicamente competentes estas propiedades no resultan afectadas por el incremento en el esfuerzo efectivo. Sin embargo, yacimientos cuyas propiedades son altamente susceptibles a esfuerzos y además la roca exhibe un comportamiento mecánico débil, la variación de dichas propiedades puede resultar considerable.

En esta investigación se supone que los cambios en la permeabilidad, son función de la porosidad o bien de la deformación volumétrica del yacimiento, que a su vez es función del esfuerzo medio efectivo, de este modo es posible emplear el modelo semi empírico propuesto de Kozeny-Carman, que determina el cambio de la permeabilidad en función de la porosidad como (Wong et al., 2000):

$$\frac{k}{k_o} = \left( \frac{\phi}{\phi^o} \right)^3 \frac{(1 - \phi^o)^2}{(1 - \phi)^2}, \quad (4.4)$$

donde  $k$  y  $k_o$  representan la permeabilidad actual e inicial, respectivamente y  $\phi$  y  $\phi^o$  la porosidad actual y la porosidad inicial.

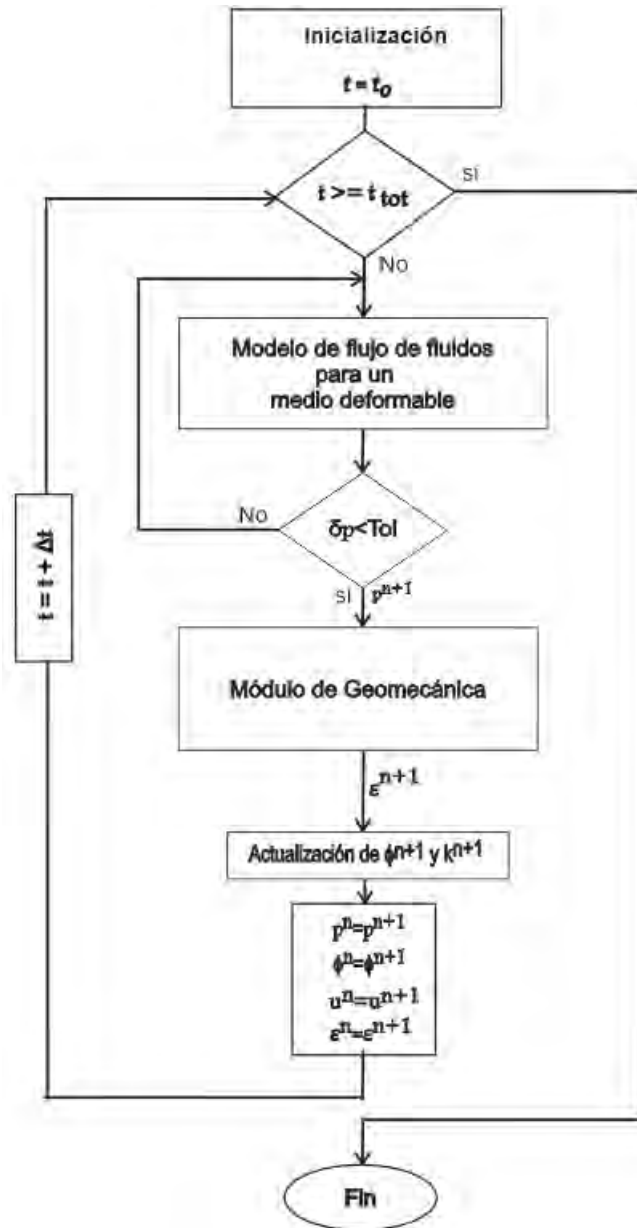


Figura 4.4: Acoplamiento Iterativo para la construcción del simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos

# Capítulo 5

## Discretización del modelo de Geomecánica y Flujo de Fluidos en Diferencias Finitas

A continuación se presenta la discretización de los modelos de geomecánica y de flujo de fluidos empleando el método de diferencias finitas para ambos, considerando una malla de simulación de nodos centrados en coordenadas cartesianas . De tal modo que la posición de las incógnitas del modelo de flujo;  $p(x, y, x, t)$ , están localizados en los nodos de las celdas, mientras que las incógnitas del modelo de geomecánica;  $u, v, w$ , están localizadas en las fronteras de las celdas.

## 5.1. Discretización del modelo de geomecánica

A partir de las ecuaciones (3.29), (3.30) y (3.31) considerando la aproximación en diferencias finitas, empleando nodos centrados, se obtiene:

$$G \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]_{i,j,k}^{n+1} + (G + \lambda) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} = -\alpha \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i,j,k}^{n+1}, \quad (5.1)$$

$$G \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]_{i,j,k}^{n+1} + (G + \lambda) \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} = -\alpha \left[ \frac{\partial p}{\partial y} \right]_{i,j,k}^{n+1}, \quad (5.2)$$

$$G \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]_{i,j,k}^{n+1} + (G + \lambda) \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} = -\alpha \left[ \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{i,j,k}^{n+1}, \quad (5.3)$$

Expresando en términos de operadores en diferencias se tiene:

$$G \left[ \left( \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2} \right) + \left( \frac{\Delta^2 u}{\Delta z^2} \right) \right]_{i,j,k}^{(n+1)} + (G + \lambda) \left[ \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} = -\frac{\alpha}{\Delta x} (\Delta p)_{i,j,k}^{n+1}, \quad (5.4)$$

$$G \left[ \left( \frac{\Delta^2 v}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{\Delta^2 v}{\Delta y^2} \right) + \left( \frac{\Delta^2 v}{\Delta z^2} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + (G + \lambda) \left[ \frac{\Delta}{\Delta y} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} = -\frac{\alpha}{\Delta y} (\Delta p)_{i,j,k}^{n+1}, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
 G \left[ \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right) + \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta z^2} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + (G + \lambda) \left[ \frac{\Delta}{\Delta z} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta y} + \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} \\
 = -\frac{\alpha}{\Delta z} (\Delta p)_{i,j,k}^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Para poder resolver los sistemas de ecuaciones generados por las ecuaciones (5.4), (5.5) y (5.6), Osorio et al. (1997) presentan una formulación totalmente implícita en la que emplean un procedimiento iterativo para determinar los desplazamientos  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$  y  $w^{n+1}$  a partir de una solución numérica previa.

En este caso, se resolverán las ecuaciones anteriores suponiendo que la deformación ocurre de forma homogénea. De este modo las caras de las celdas se desplazarán de forma paralela, lo cual permite despreciar los términos;  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}$  y reducir el número de incógnitas.

### 5.1.1. Discretización del espacio

Considerando la distribución de nodos y celdas en tres dimensiones del modelo de flujo (Figura 5.1), definiremos las posiciones de los nodos  $u$ ,  $v$  y  $w$  en las fronteras de las celdas para las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente, de tal modo que cada celda está definida por seis nodos  $(u_{i,j,k}, u_{i+1,j,k}, v_{i,j,k}, v_{i,j+1,k}, w_{i,j,k}, w_{i,j,k+1})$ , como se muestra en la Figura 5.1:

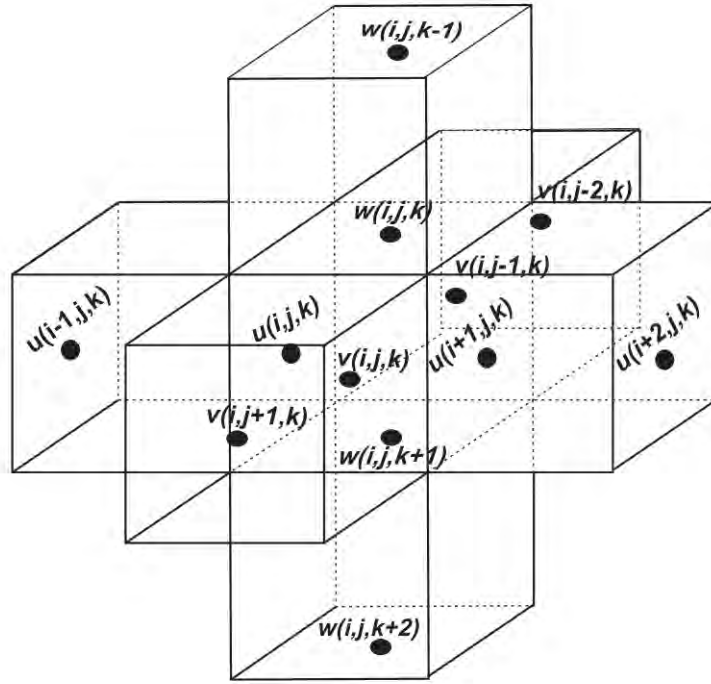


Figura 5.1: Distribución de los nodos y celdas en 3D para el modelo de Geomecánica

donde:  $i = 1, 2, 3 \dots I + 1$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots J + 1$  y  $k = 1, 2, 3, \dots K + 1$

Ya que las fronteras de las celdas se desplazan únicamente en forma paralela, las ecuaciones se reducen a la siguiente forma:

$$G \left( \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} \right)_{i,j,k}^{n+1} + (G + \lambda) \left( \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} \right)_{i,j,k}^{n+1} = -\frac{\alpha}{\Delta x} (\Delta p)_{i,j,k}^{n+1}, \quad (5.7)$$

$$G \left( \frac{\Delta^2 v}{\Delta y^2} \right)_{i,j,k}^{n+1} + (G + \lambda) \left( \frac{\Delta^2 v}{\Delta y^2} \right)_{i,j,k}^{n+1} = -\frac{\alpha}{\Delta y} (\Delta p)_{i,j,k}^{n+1}, \quad (5.8)$$

$$G \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta z^2} \right)_{i,j,k}^{n+1} + (G + \lambda) \left( \frac{\Delta^2 w}{\Delta z^2} \right)_{i,j,k}^{n+1} = -\frac{\alpha}{\Delta z} (\Delta p)_{i,j,k}^{n+1}. \quad (5.9)$$

Empleando diferencias centrales:

$$\begin{aligned} \frac{G}{\Delta x^2} (u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k})^{n+1} + \frac{G + \lambda}{\Delta x^2} (u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k})^{n+1} \\ = -\frac{\alpha}{\Delta x} (p_{i+1,j,k} - p_{i-1,j,k})^{n+1}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{G}{\Delta y^2} (v_{i,j-1,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j+1,k})^{n+1} + \frac{G + \lambda}{\Delta y^2} (v_{i,j-1,k} - 2v_{i,j,k} + v_{i,j+1,k})^{n+1} \\ = -\frac{\alpha}{\Delta y} (p_{i,j+1,k} - p_{i,j-1,k})^{n+1}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{G}{\Delta z^2} (w_{i,j,k-1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k+1})^{n+1} + \frac{G + \lambda}{\Delta z^2} (w_{i,j,k-1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k+1})^{n+1} \\ = -\frac{\alpha}{\Delta z} (p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k-1})^{n+1}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Se genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u_{i-1,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i+1,j,k}^{n+1} = -\frac{\alpha \Delta x}{(2G + \lambda)} (p_{i+1,j,k} - p_{i-1,j,k})^{n+1}, \quad (5.13)$$

$$v_{i,j-1,k}^{n+1} - 2v_{i,j,k}^{n+1} + v_{i,j+1,k}^{n+1} = -\frac{\alpha \Delta x}{(2G + \lambda)} (p_{i,j+1,k} - p_{i,j-1,k})^{n+1}, \quad (5.14)$$

$$w_{i,j,k-1}^{n+1} - 2w_{i,j,k}^{n+1} + w_{i,j,k+1}^{n+1} = -\frac{\alpha \Delta x}{(2G + \lambda)} (p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k-1})^{n+1}. \quad (5.15)$$

### 5.1.2. Acoplamiento de las condiciones de frontera

Considerando el caso de un yacimiento confinado lateralmente sometido a un esfuerzo de sobrecarga en su cima, cuya deformación ocurre de forma uniaxial de acuerdo a las ecuaciones (3.38)-(3.39).



Aproximando en diferencias finitas centrales se obtiene:

$$u_{1,j,k}^{n+1} = 0, \quad u_{I+1,j,k}^{n+1} = 0, \quad (5.16)$$

$$v_{i,1,k}^{n+1} = 0, \quad v_{i,J+1,k}^{n+1} = 0, \quad (5.17)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]_{i,j,1}^{n+1} = -\frac{\alpha}{2G + \lambda} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} \right]_{i,j,1}^{n+1}, \quad w_{i,j,K+1} = 0. \quad (5.18)$$

Por lo tanto:

$$u_{1,j,k}^{n+1} = 0, \quad u_{I+1,j,k} = 0, \quad (5.19)$$

$$v_{i,1,k}^{n+1} = 0, \quad v_{i,J+1,k} = 0, \quad (5.20)$$

$$w_{i,j,0}^{n+1} = \frac{2\alpha\Delta z}{2G + \lambda} (p_{i,j,1}^{n+1} - p_{i,j,1}^n) - (w_{i,j,2}^n - w_{i,j,0}^n) + w_{i,j,2}^{n+1}, \quad w_{i,j,K+1} = 0. \quad (5.21)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera para la dirección  $z$ , se obtiene:

Para  $k=1$ :

$$0 - 2w_{i,j,1}^{n+1} + 2w_{i,j,2}^{n+1} = \frac{\alpha\Delta x}{2G + \lambda} [(p_{i,j,1} - p_{i,j,0})^{n+1} - 2(p_{i,j,1}^{n+1} - p_{i,j,1}^n)] + (w_{i,j,2}^n - w_{i,j,0}^n). \quad (5.22)$$

Para  $k=K$

$$w_{i,j,K-1}^{n+1} - 2w_{i,j,K}^{n+1} + 0 = \frac{\alpha\Delta x}{2G + \lambda} (p_{i,j,K+1}^{n+1} - p_{i,j,K}^{n+1}). \quad (5.23)$$

Finalmente, al resolver cada sistema de ecuaciones se obtendrán los desplazamientos de cada frontera en función de la presión. La deformación de las celdas en cada una de las direcciones podrá obtenerse a partir de las ecuaciones 3.12-3.14. Una vez que se conoce la deformación que sufre el medio poroso, el cambio en los esfuerzos puede determinarse a partir de la ecuación 3.23.

## 5.2. Discretización del modelo de flujo

La representación matemática del problema de flujo de fluidos en un medio poroso deformable queda definida a partir de la Ecuación 3.81:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_x \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda_y \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial D}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_z \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right] \\ \pm q^* = \frac{\phi}{B_o} \left[ \left( \frac{c_s(\alpha - \phi) + c_f \phi}{\phi} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (5.24)$$

para:

$$0 < x < L_x; \quad 0 < y < L_y; \quad 0 < z < L_z,$$

donde

$$\lambda_i = \frac{k_i}{\mu B}.$$

Con las condiciones iniciales y de frontera siguientes:

$$p(x, y, z, t = 0) = p_{ini} + \gamma D \quad (5.25)$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{x=L} = 0, \quad (5.26)$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{y=L} = 0, \quad (5.27)$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right)_{z=L} = 0, \quad (5.28)$$

donde,  $p_{ini}$ , es la presión inicial de referencia.

### 5.2.1. Malla de simulación

Considerando una malla cartesiana de nodos centrados en tres dimensiones, se tiene la distribución de presiones siguiente alrededor del nodo  $(i, j, k)$ :

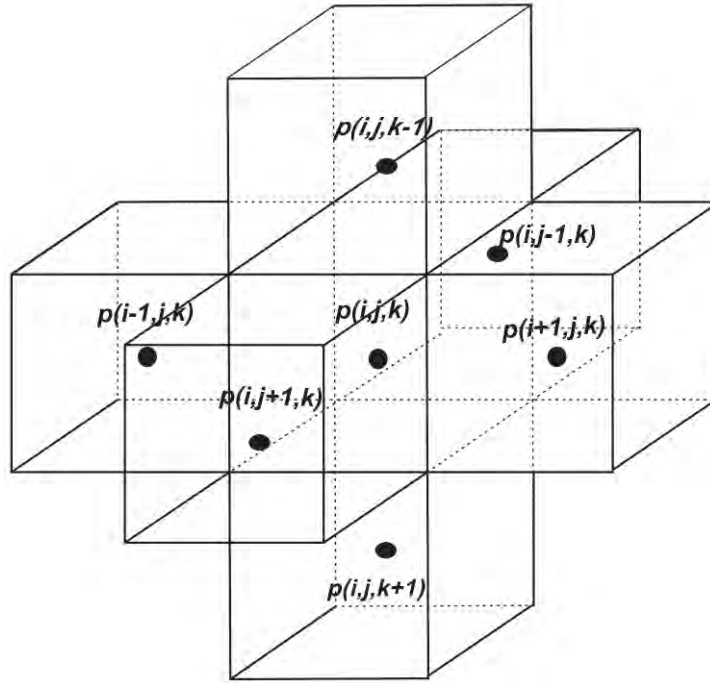


Figura 5.2: Distribución de los nodos y celdas en 3D para el modelo de Flujo

Empleando un esquema de aproximación totalmente implícito, la ecuación de flujo en cada una de las celdas de la malla de simulación, al nivel de tiempo  $n+1$ , corresponde a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_x \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda_y \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial D}{\partial y} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_z \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + [q^*]_{i,j,k}^{n+1} \\ = \left\{ \frac{\phi}{B_o} \left[ \left( \frac{c_s(\alpha - \phi) + c_f \phi}{\phi} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \right] \right\}_{i,j,k}^{n+1}, \quad (5.29) \end{aligned}$$

donde:

$$i = 1, 2, \dots, I$$

$$j = 1, 2, \dots, J$$

$$k = 1, 2, \dots, K$$

Aproximando el término de flujo mediante diferencias finitas centrales en espacio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_x \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda_y \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial D}{\partial y} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_z \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1} \approx \\ \frac{\Delta}{\Delta x} \left[ \frac{\lambda}{\Delta x} (\Delta p - \gamma \Delta D) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \frac{\Delta}{\Delta y} \left[ \frac{\lambda}{\Delta y} (\Delta p - \gamma \Delta D) \right]_{i,j,k}^{n+1} + \frac{\Delta}{\Delta z} \left[ \frac{\lambda}{\Delta z} (\Delta p - \gamma \Delta D) \right]_{i,j,k}^{n+1} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Aproximando el término de acumulación empleando diferencias finitas regresivas en el tiempo:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\phi}{B_o} \left[ \left( \frac{c_s(\alpha - \phi) + c_f \phi}{\phi} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \right] \right\}_{i,j,k}^{n+1} \approx \\ \left\{ \frac{\phi}{B_o} \left[ \left( \frac{c_s(\alpha - \phi) + c_f \phi}{\phi} \right) \frac{\Delta p}{\Delta t} + \frac{\alpha}{\phi} \frac{\Delta \epsilon_v}{\Delta t} \right] \right\}_{i,j,k}^{n+1} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Para el caso de deformación isotrópica:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = 0$$

y

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \epsilon_v,$$

por lo tanto:

$$\epsilon_v = \frac{\alpha p}{K}, \quad (5.32)$$

donde  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

Sustituyendo (5.32) en (5.31):

$$\left\{ \frac{\phi}{B_o} \left[ \left( \frac{c_s(\alpha - \phi) + c_f\phi}{\phi} + \frac{\alpha^2}{\phi K} \right) \frac{\Delta p}{\Delta t} \right] \right\}_{i,j,k}^{n+1} \quad (5.33)$$

Para el caso de deformación uniaxial:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = 0$$

y

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 0,$$

la deformación volumétrica puede aproximarse como (Gu et al., 2011):

$$\epsilon_v = \epsilon_{zz} = \frac{\alpha p}{K_v}, \quad (5.34)$$

donde  $K_v = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

Sustituyendo (5.34) en (5.31) :

$$\left\{ \frac{\phi}{B_o} \left[ \left( \frac{c_s(\alpha - \phi) + c_f\phi}{\phi} + \frac{\alpha^2}{\phi K_v} \right) \frac{\Delta p}{\Delta t} \right] \right\}_{i,j,k}^{n+1} \quad (5.35)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.30) y (5.33) para el caso de deformación isotrópica, en la ecuación ( 5.29) y multiplicando por el volumen de roca,  $V_b$ .

$$\begin{aligned} & T_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} \left[ p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k} - (\gamma\Delta D)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right]^{n+1} - T_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} \left[ p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k} - (\gamma\Delta D)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right]^{n+1} + \\ & T_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} \left[ p_{i,j+1,k} - p_{i,j,k} - (\gamma\Delta D)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right]^{n+1} - T_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} \left[ p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k} - (\gamma\Delta D)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right]^{n+1} + \\ & T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k} - (\gamma\Delta D)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ p_{i,j,k} - p_{i,j,k-1} - (\gamma\Delta D)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} + \\ & q_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\phi}{B_o} \right)_{i,j,k}^{n+1} \left\{ \left[ \frac{c_s(\alpha - \phi) + c_f\phi}{\phi} + \frac{\alpha^2}{\phi K} \right]_{i,j,k}^{n+1} (p_{i,j,k}^{n+1} - p_{i,j,k}^n) \right\} \quad (5.36) \end{aligned}$$

donde,  $T$ , es la transmisibilidad y para la dirección  $x$  se define como:

$$T = \frac{A}{\Delta x} \lambda. \quad (5.37)$$

### 5.2.2. Acoplamiento de las condiciones iniciales y de frontera

Expresando las condiciones iniciales y de frontera en diferencias centrales en espacio y regresivas en tiempo.

La distribución de presiones y deformaciones en el nivel de tiempo  $n = 0$  se expresan como:

$$p_{i,j,k}^n = p_{ini}, \quad (5.38)$$

$$\epsilon_{i,j,k}^n = 0. \quad (5.39)$$

Para

$$i = 1, 2, ..I \quad j = 1, 2, ..J \quad k = 1, 2, ..K$$

Considerando cero flujo a través de las fronteras se tiene que:

Para la dirección  $x$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{\frac{1}{2},j,k}^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta x_{\frac{1}{2},j,k}} [p_{1,j,k} - p_{0,j,k} - (\gamma \Delta D)_{\frac{1}{2},j,k}]^{n+1} = 0,$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{I+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta x_{I+\frac{1}{2},j,k}} [p_{I+1,j,k} - p_{I,j,k} - (\gamma \Delta D)_{I+\frac{1}{2},j,k}]^{n+1} = 0.$$

Para dirección  $y$ :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{i,\frac{1}{2},k}^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta y_{i,\frac{1}{2},k}} [p_{i,1,k} - p_{i,0,k} - (\gamma \Delta D)_{i,\frac{1}{2},k}]^{n+1} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial D}{\partial y}\right)_{i,J+\frac{1}{2},k}^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta y_{i,J+\frac{1}{2},k}} [p_{i,J+1,k} - p_{i,J,k} - (\gamma \Delta D)_{i,J+\frac{1}{2},k}]^{n+1} = 0.$$

Dirección z

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z}\right)_{i,j,\frac{1}{2}}^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta z_{i,j,\frac{1}{2}}} [p_{i,j,1} - p_{i,j,0} - (\gamma \Delta D)_{i,j,\frac{1}{2}}]^{n+1} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial D}{\partial z}\right)_{i,j,K+\frac{1}{2}}^{n+1} \approx \frac{1}{\Delta y_{i,j,K+\frac{1}{2}}} [p_{i,1,K+1} - p_{i,j,K} - (\gamma \Delta D)_{i,j,K+\frac{1}{2}}]^{n+1} = 0.$$

Al desarrollar la ecuación de flujo en cada una de las celdas  $(i, j, k)$  se sustituyen las ecuaciones anteriores. Por ejemplo, para la dirección x:

En  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} & T_{1+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} \left[ p_{1,j,k} - p_{1,j,k} - (\gamma \Delta D)_{1+\frac{1}{2},j,k} \right]^{n+1} - 0 + \\ & T_{1,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} \left[ p_{1,j+1,k} - p_{1,j,k} - (\gamma \Delta D)_{1,j+\frac{1}{2},k} \right]^{n+1} - T_{1,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} \left[ p_{i,j,k} - p_{1,j-1,k} - (\gamma \Delta D)_{1,j-\frac{1}{2},k} \right]^{n+1} + \\ & T_{1,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ p_{1,j,k+1} - p_{i,j,k} - (\gamma \Delta D)_{1,j,k+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{1,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ p_{1,j,k} - p_{1,j,k-1} - (\gamma \Delta D)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - \\ & q_{1,j,k}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{V_p}{B_o} \right)_{1,j,k}^{n+1} \left\{ \left[ \frac{c_s(\alpha - \phi) + c_f \phi}{\phi} + \frac{\alpha^2}{\phi K} \right]_{1,j,k}^{n+1} (p_{1,j,k}^{n+1} - p_{1,j,k}^n) \right\} \quad (5.40) \end{aligned}$$

En  $i = I$

$$\begin{aligned}
 & T_{1+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} \left[ p_{1,j,k} - p_{1,j,k} - (\gamma\Delta D)_{1+\frac{1}{2},j,k} \right]^{n+1} - 0 + \\
 & T_{1,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} \left[ p_{1,j+1,k} - p_{1,j,k} - (\gamma\Delta D)_{1,j+\frac{1}{2},k} \right]^{n+1} - T_{1,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} \left[ p_{i,j,k} - p_{1,j-1,k} - (\gamma\Delta D)_{1,j-\frac{1}{2},k} \right]^{n+1} + \\
 & T_{1,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ p_{1,j,k+1} - p_{i,j,k} - (\gamma\Delta D)_{1,j,k+\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - T_{1,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ p_{1,j,k} - p_{1,j,k-1} - (\gamma\Delta D)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} - \\
 & q_{1,j,k}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{V_p}{B_o} \right)_{I,j,k}^{n+1} \left\{ \left[ \frac{c_s(\alpha - \phi) + c_f\phi}{\phi} + \frac{\alpha^2}{\phi K} \right]_{I,j,k}^{n+1} (p_{I,j,k}^{n+1} - p_{I,j,k}^n) \right\} \quad (5.41)
 \end{aligned}$$

El mismo procedimiento se realiza para cada una de las direcciones.

### 5.3. Tratamiento del término fuente

El tratamiento de los términos fuente se realiza mediante el modelo de Peaceman, que considera el radio equivalente del pozo como (Ertekin et al., 2001):

$$r_{eq} = 0.28 \frac{\left\{ [(k_y/k_x)^{(1/2)}(\Delta x)^2] + [(k_x/k_y)^{(1/2)}(\Delta y)^2] \right\}^{1/2}}{(k_y/k_x)^{1/4} + (k_x/k_y)^{1/4}}. \quad (5.42)$$

La definición de radio equivalente puede usarse para relacionar la presión de fondo fluyendo del pozo,  $p_{wf}$ , con el gasto del pozo,  $q_{sc}$ , a través de la presión de la celda,  $p_{i,j,k}$ , y el índice de productividad,  $J_w$ , como:

$$q_{sc} = J_w(p_{i,j,k} - p_{wf}), \quad (5.43)$$

donde:

$$J_w = \frac{2\pi h(k_x k_y)^2}{\mu(\ln(r_{eq}/r_w) + s)}. \quad (5.44)$$



## 5.4. Linealización

La ecuación de flujo de fluidos corresponde a una ecuación diferencial en derivadas parciales no lineal, por tal motivo es necesario linealizar el sistema de ecuaciones generado a partir de la ecuación (5.36) para poder resolver el sistema. Empleando el método iterativo de Newton de linealización, se considera la función de residuos siguiente,  $F_{i,j,k}^{v+1}$ :

$$\begin{aligned}
 F_{i,j,k}^{v+1} &= F_{i,j,k}^{v+1}(p_{i-1,j,k}, p_{i,j-1,k}, p_{i,j,k-1}, p_{i,j,k}, p_{i+1,j,k}, p_{i,j+1,k}, p_{i,j,k+1}) \\
 &\simeq T_{i,j,k}^{n+1}[p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k} - (\gamma\Delta D)_{i,j,k}]^{n+1} - T_{i,j,k}^{n+1}[p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k} - (\gamma\Delta D)]^{n+1} + \\
 &\quad T_{i,j,k}^{n+1}[p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k} - (\gamma\Delta D)_{i,j,k}]^{n+1} - T_{i,j,k}^{n+1}[p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k} - (\gamma\Delta D)]^{n+1} + \\
 &\quad T_{i,j,k}^{n+1}[p_{i+1,j,k} - p_{i,j,k} - (\gamma\Delta D)_{i,j,k}]^{n+1} - T_{i,j,k}^{n+1}[p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k} - (\gamma\Delta D)]^{n+1} + \\
 &\quad q_{i,j,k}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{V_p}{B_o} \right)_{I,j,k}^{n+1} \left\{ \left[ \frac{c_s(\alpha - \phi) + c_f\phi}{\phi} + \frac{\alpha^2}{\phi K} \right]_{I,j,k}^{n+1} (p_{I,j,k}^{n+1} - p_{I,j,k}^n) \right\}. \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

Expandiendo la función de residuos en una serie de Taylor truncada hasta la primera derivada, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{\partial F_{i,j,k}}{\partial p_{i,j,k-1}} \right)^{(v)} \delta p_{i,j,k-1}^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_{i,j,k}}{\partial p_{i,j-1,k}} \right)^{(v)} \delta p_{i,j-1,k}^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_{i,j,k}}{\partial p_{i-1,j,k}} \right)^{(v)} \delta p_{i-1,j,k}^{(v+1)} + \\
 &\quad \left( \frac{\partial F_{i,j,k}}{\partial p_{i,j,k}} \right)^{(v)} \delta p_{i,j,k}^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_{i,j,k}}{\partial p_{i,j,k+1}} \right)^{(v)} \delta p_{i,j,k+1}^{(v+1)} + \left( \frac{\partial F_{i,j,k}}{\partial p_{i,j+1,k}} \right)^{(v)} \delta p_{i,j+1,k}^{(v+1)} + \\
 &\quad \left( \frac{\partial F_{i,j,k}}{\partial p_{i+1,j+1,k}} \right)^{(v)} \delta p_{i+1,j+1,k}^{(v+1)} = -F_{i,j,k}^{(v)}, \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\delta p_{i,j,k}^{v+1} = p_{i,j,k}^{v+1} - p_{i,j,k}^v \quad (5.47)$$

y representa los cambios iterativos de la presión.

El problema de flujo tridimensional genera una sistema heptadiagonal de ecuaciones que puede escribirse como:

$$[J]^v \delta p^{v+1} = -F^v, \quad (5.48)$$

donde  $[J]$  representa la matriz de derivadas de la función de residuos con respecto a la presión y  $\delta p^{n+1}$  el vector de incógnitas. Se considera que el proceso iterativo converge a la solución cuando el valor absoluto del cambio iterativo de la presión, es menor al valor de la tolerancia establecida,  $p_{Tol}$ .



## Capítulo 6

# Simulación numérica de geomecánica y flujo de fluidos en diferencias finitas

En este capítulo se presenta la solución al problema de consolidación en una dimensión para validar la formulación matemática y numérica de los modelos de flujo de fluidos y de geomecánica. Además, se presenta la aplicación del simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos desarrollado en este trabajo de investigación, en primer lugar, se resolvió un problema propuesto originalmente por Dean et al. (2006), en el que se evalúa el efecto de las condiciones de frontera de cero desplazamiento y de esfuerzo constante en el comportamiento del yacimiento, y validar el simulador numérico. Posteriormente se evalúa el efecto de las propiedades elásticas y poroelástica en la compactación que sufre el yacimiento y finalmente se determina el cambio en el comportamiento de producción debido a la variación de las propiedades petrofísicas conforme se lleva a cabo la explotación del yacimiento.

## 6.1. Problema de consolidación en una dimensión

El problema clásico de consolidación en una dimensión es un problema que involucra la deformación y el flujo de fluidos en un medio poroso. La consolidación es el proceso por el cual ocurre una reducción gradual en el volumen de un medio poroso debido al drene del fluido que satura completamente sus poros, el proceso continúa hasta que el exceso de la presión de poro del fluido, establecido por el incremento en el esfuerzo total, se ha disipado por completo (Craig, 2013).

El caso más simple de consolidación corresponde al problema de consolidación en una dimensión, originalmente planteado por Terzaghi (1923), el cual describe básicamente el desplazamiento vertical de fluido en una columna de roca debido a la aplicación de una carga constante,  $\sigma_{zz}$ , en la parte superior de la columna, durante un lapso de tiempo dado. La columna de roca se encuentra aislada lateralmente y en el fondo de modo que el flujo ocurre únicamente por la parte superior de la columna. Adicionalmente se considera que únicamente existe deformación uniaxial.

### 6.1.1. Descripción del problema

Considerando una columna de roca de 1 metro de longitud, aislada y confinada lateralmente y en el fondo, de modo que sólo se permite la expulsión de fluido por la parte superior de la columna, suponiendo que no existe deformación lateral. Tal y como se muestra en la **Figura 6.1**

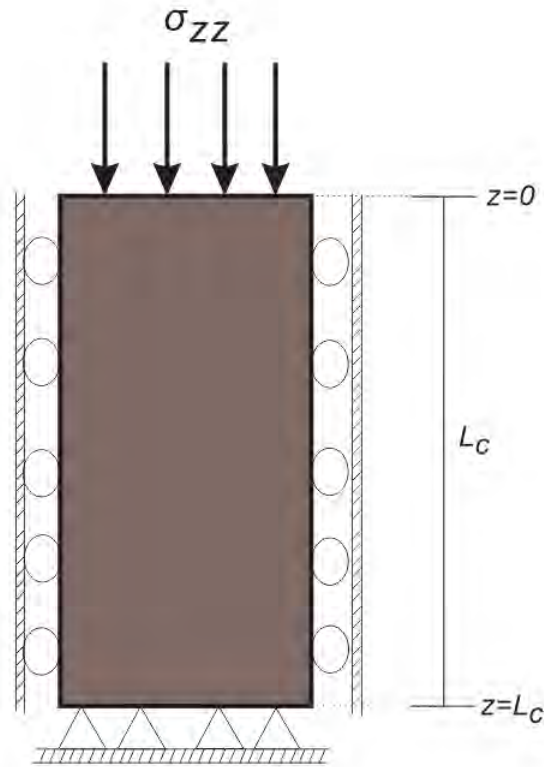


Figura 6.1: Columna de roca sometida a una carga vertical

La columna de roca se encuentra saturada completamente por un fluido y está sometida a una carga  $\sigma_{zz}$ , con una magnitud de  $1\text{Mpa}$ . Las propiedades petrofísicas y elásticas de la roca se muestran en la **Tabla 6.1**:

Tabla 6.1: Tabla de datos para la columna de roca (Bai y Elsworth, 2000)

Parámetro	Magnitud	Unidades
Modulo de Young, $E$	2.4	$\text{MN}/\text{m}^2$
Relación de Poisson, $\nu$	0.2	-
Relación de Poisson no drenado, $\nu_u$	0.4	-
Movilidad, $k/\mu$	0.5381	$\text{m}^4/\text{MN}\text{s}$
Porosidad, $\phi$	0.2	-
Coefficiente de Biot, $\alpha$	0.8929	-
Módulo de compresibilidad del fluido, $K_f$	0.1183	$\text{MN}/\text{m}^2$
Módulo de compresibilidad del sólido, $K_s$	12.445	$\text{MN}/\text{m}^2$

Las condiciones iniciales y de frontera están dadas como:

Condición inicial:

La presión inicial para el caso de una columna sometida a una carga vertical, puede expresarse en términos del coeficiente de Skempton,  $B$ , de la relación de Poisson no drenada,  $v_u$ , y del esfuerzo vertical,  $\sigma_{zz}$ , de la siguiente forma (Bai y Elsworth, 2000):

$$p_0 = \frac{B}{3} \left( \frac{1 + v_u}{1 - v_u} \right) \sigma_{zz}, \quad t = 0, \quad (6.1)$$

donde

$$B = \frac{3(v_u - v)}{\alpha(1 - 2v(1 + v_u))}. \quad (6.2)$$

Condición de frontera interna:

$$p = 0, \quad z = 0 \quad y \quad t > 0. \quad (6.3)$$

Condición de frontera externa:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad z = L_c \quad y \quad t > 0. \quad (6.4)$$

### 6.1.2. Solución al problema de consolidación

A partir del modelo de flujo para un medio poroso deformable (ecuación 3.81), considerando flujo en una sola dimensión en un medio homogéneo e isotrópico y despreciando los términos gravitacionales, se tiene:

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = (c_f \phi + c_s(\alpha - \phi) + \frac{\alpha^2}{K_v}) \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (6.5)$$

De tal modo, la solución al problema de flujo de fluidos en un medio deformable para el caso de deformación uniaxial, queda únicamente en términos de la presión.

La solución numérica de la ecuación (6.5) se realizó considerando una malla de 100

nodos, considerado los datos de la Tabla 6.1.

### 6.1.3. Resultados

Se obtuvo la presión del fluido a lo largo de la columna de roca mediante la solución numérica de la ecuación ( 6.5) para diferentes tiempos de simulación.

En la **Figura 6.2** se muestra la curva de la presión normalizada ( $p/p_o$ ) marcada con círculos de color azul, contra la profundidad, cuando el esfuerzo  $\sigma_{xx}$  se aplica durante un tiempo máximo de 0.005 segundos. La perturbación de la presión a este tiempo ha alcanzado aproximadamente un cuarto de la profundidad total de la columna. A partir de ese punto la presión se mantiene a la presión inicial.

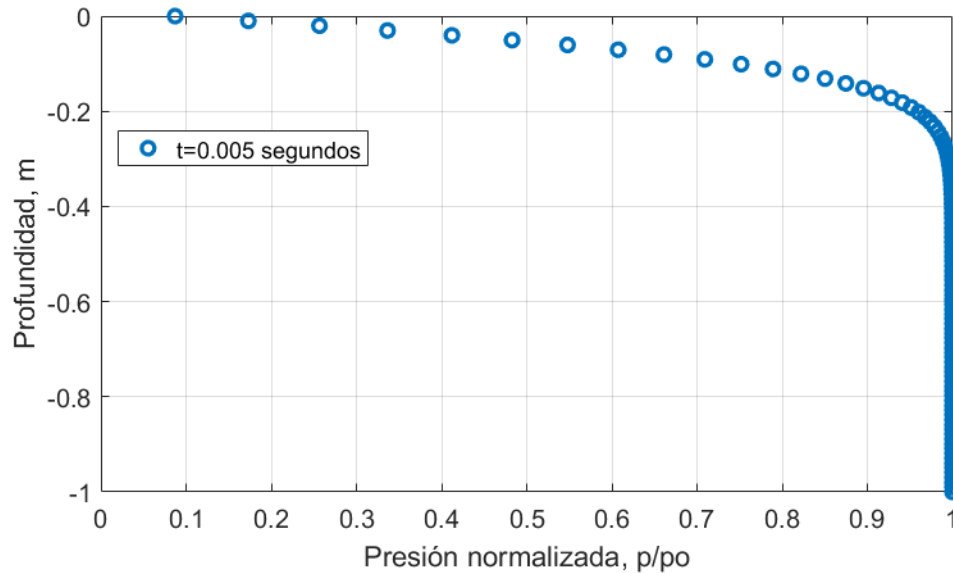


Figura 6.2: Consolidación en 1D para un tiempo de 0.005 segundos

La **Figura 6.3** muestra el comportamiento de la presión normalizada para un tiempo de 0.05 segundos, debido a la expulsión de fluido por la capa superior, en la cual se observa que el abatimiento de presión ha alcanzado una profundidad cercana a la profundidad total de la columna de roca.



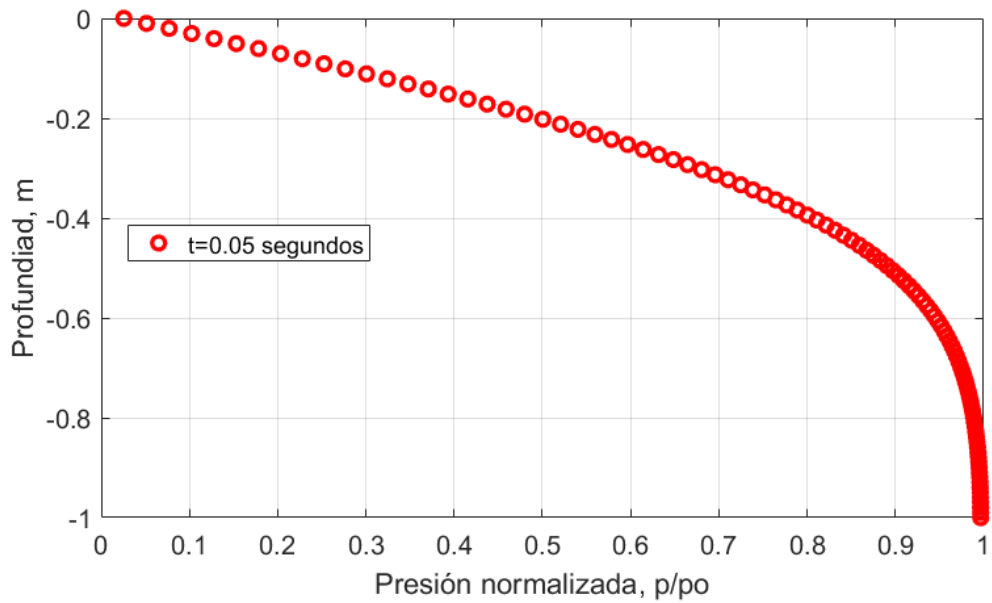


Figura 6.3: Consolidación en 1D para un tiempo de 0.05 segundos

En la **Figura 6.4** se muestra la distribución de presión para un tiempo total de simulación de 0.5 segundos. Para este tiempo, el abatimiento de la presión ha alcanzado el fondo de la columna.

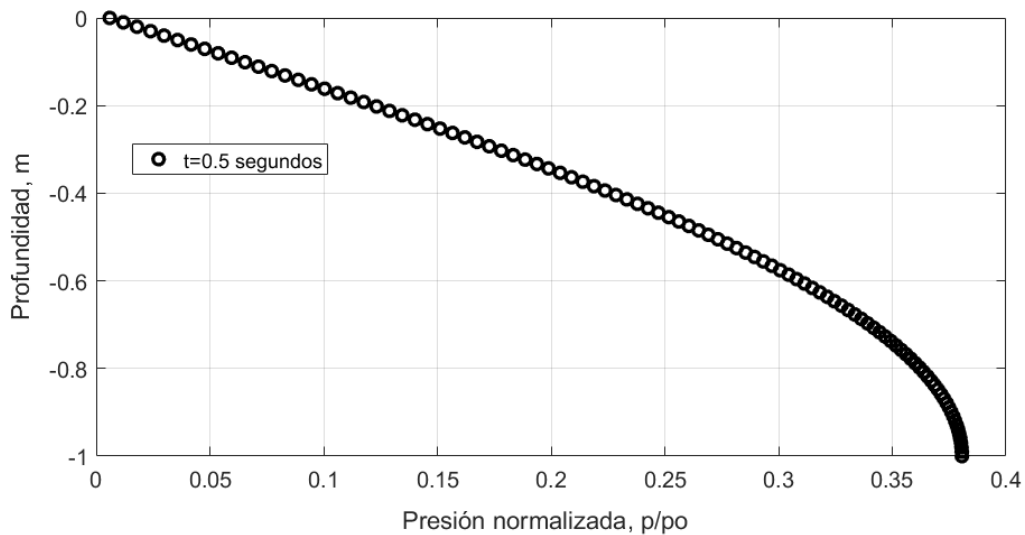


Figura 6.4: Consolidación en 1D para un tiempo de 0.5 segundos

El esfuerzo vertical aplicado genera la expulsión de fluido por la parte superior de la columna, generando un decremento en la presión de poro a lo largo de la distancia vertical de roca. Inicialmente, para tiempos suficientemente cortos ( $t=0.005$  seg. y  $t=0.05$  seg.) el decremento en la presión de poro no alcanza el extremo contrario a la superficie, permitiendo que la presión en el fondo de la columna se mantenga constante. Conforme se incrementa el tiempo, el decremento de presión alcanzará eventualmente la base de la columna, hasta mostrar un comportamiento dependiente de la frontera externa.

En la **Figura 6.5** se muestran las tres curvas anteriores para 0.005, 0.05 y 0.5 segundos.

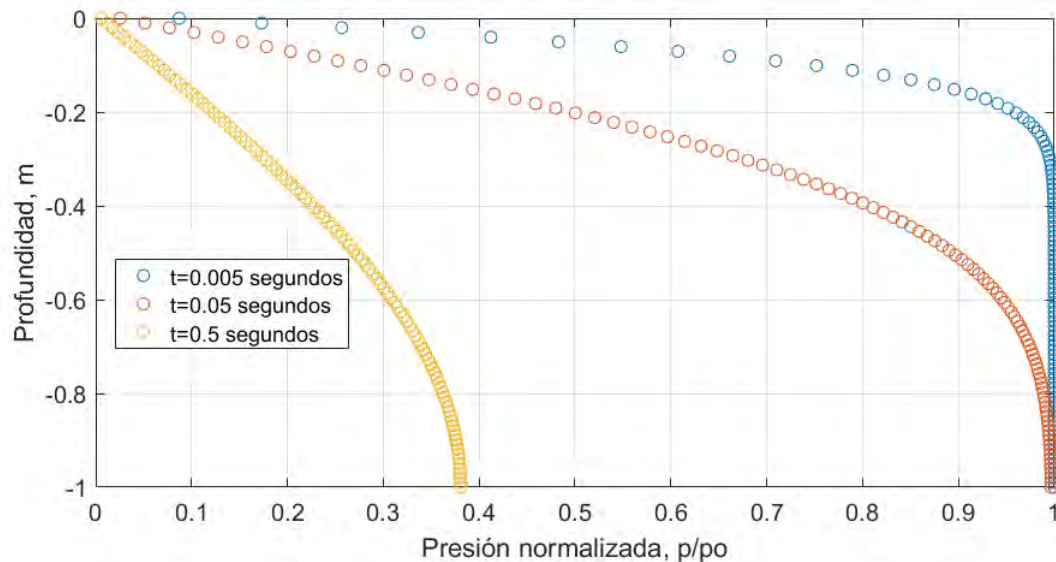


Figura 6.5: Consolidación en 1D para tiempos de 0.005, 0.05 y 0.5 segundos

#### 6.1.4. Comparación de resultados

(Bai y Elsworth, 2000) resuelven el problema de consolidación, empleando la expresión siguiente para su descripción :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = c_{dif} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (6.6)$$

donde la constante de difusión,  $c_{dif}$ , está definida como:

$$c_{dif} = \frac{2kG(1-v)(v_u - v)}{\alpha^2\mu(1-2v)^2(1-v_u)}, \quad (6.7)$$

Cuya solución analítica se expresa por medio de la ecuación 6.8:

$$p(z, t) = -\frac{4p_o}{n\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{n\pi}{2L_c} z \right) e^{(\frac{n\pi}{2L_c})c_{dif}t}, \quad (6.8)$$

donde  $L_c$  es la longitud de la columna de roca

La solución analítica y la solución numérica son comparadas usando los datos de la **Tabla 6.1** para  $t=0.005, 0.001, 0.05, 0.01$  y  $0.5$  segundos. Los resultados se muestran en la **Figura 6.6**.

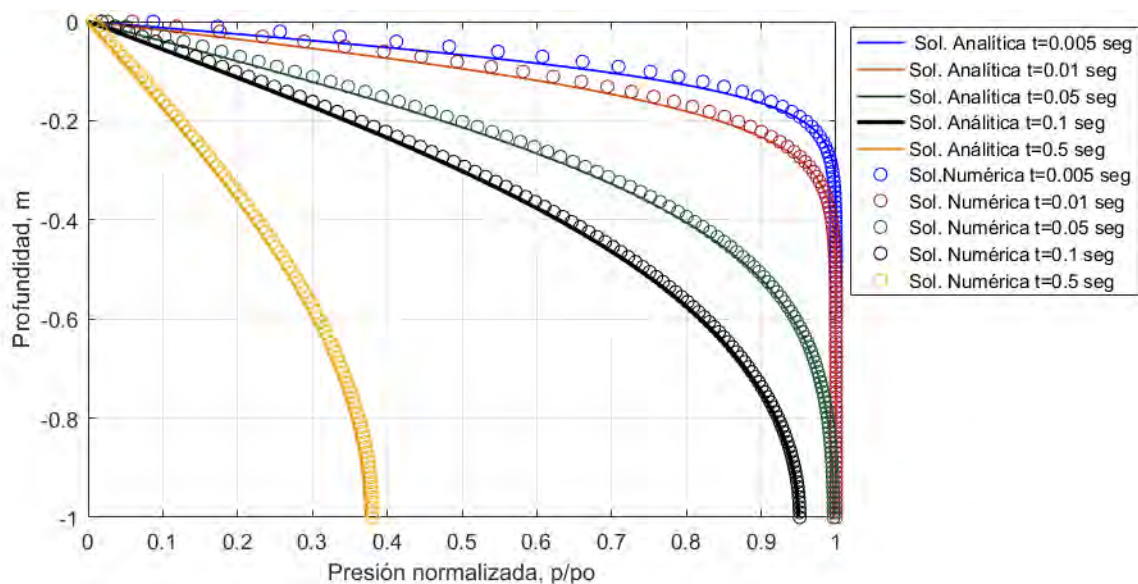


Figura 6.6: Solución analítica comparada con respecto a la solución numérica

La **Figura 6.6** muestra la distribución de la presión obtenida mediante la solución analítica a partir de la ecuación (6.8) y la solución numérica presentada en esta investigación representada para la ecuación (6.5). En ella se puede observar un que el comportamiento de la solución numérica mostrado con círculos, es bastante aproximado con respecto a la solución analítica (líneas continuas).

## Desplazamiento

El desplazamiento vertical que experimenta la columna de roca puede determinarse a partir del modelo de geomecánica, que para el caso de deformación uniaxial, se reduce a:

$$(2G + \lambda) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (6.9)$$

De acuerdo a las condiciones del problema, las condiciones de frontera para el modelo de geomecánica están dadas en función del desplazamiento de la base de la columna y de la carga ejercida en la cima de dicha columna. Por lo tanto, se tiene que:

$$w(L_z, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{\alpha}{2G + \lambda} \frac{\partial p}{\partial t} \quad t \geq 0. \quad (6.11)$$

La solución analítica a la ecuación (6.9), para determinar el desplazamiento de la columna está dada por la ecuación (6.12) (Bai y Elsworth, 2000):

$$u_x = u_x^o + u_{max}^\infty F(x, t), \quad (6.12)$$

donde:

$$F(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \left( \frac{m\pi x}{2L_c} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{m^2 \pi^2 C_{dif} t}{4L_c^2} \right) \right] \quad (6.13)$$

y

$$u_{max}^\infty = -\frac{(v - v_u)L_c \sigma_{xx}}{2G(1 - v)(1 - v_u)}. \quad (6.14)$$

$u_{max}^\infty$ , es el desplazamiento máximo de la columna cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Considerando que la deformación cuando  $x = L$  es igual a cero y como condición

---

inicial cuando  $t = 0$ :

$$u_x^o = -\frac{\sigma_{xx}L_c(1 - 2v_u)}{2G(1 - v_u)} \left(1 - \frac{x}{L_c}\right) \quad (6.15)$$

La **Figura 6.7** muestra las curvas de desplazamiento de la cima de la columna con respecto al tiempo para la solución analítica y para la solución numérica a partir de la ecuación (6.9).

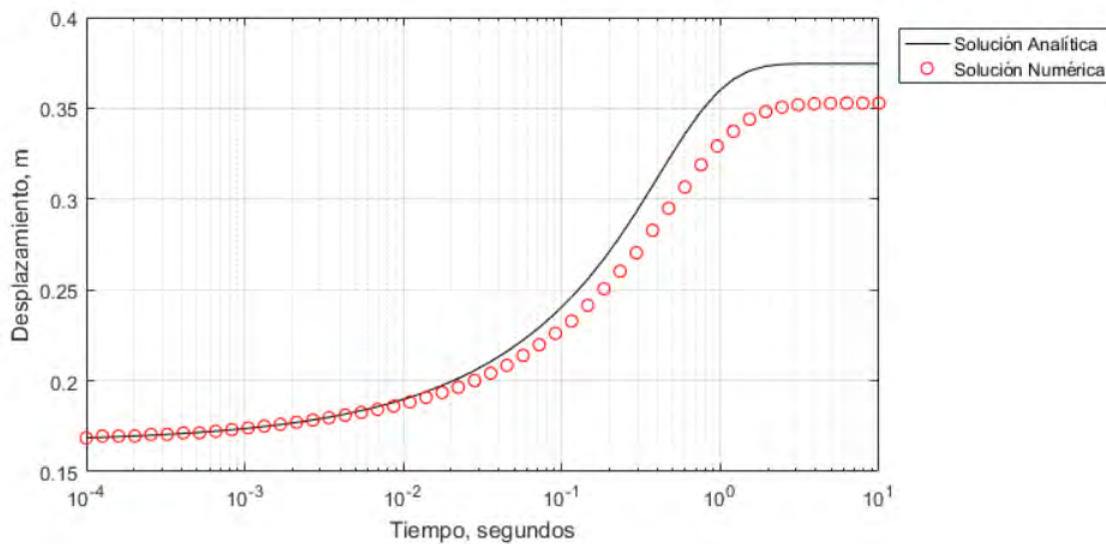


Figura 6.7: Desplazamiento contra tiempo

En la **Figura 6.7** se observa que las curvas de desplazamiento obtenidas mediante la solución analítica y numérica, parten de la deformación inicial instantánea, determinada por la ecuación 6.15; a partir de ese punto el desplazamiento de la cima de la columna comienza a incrementarse en función del decremento de la presión debido a la expulsión de fluido, hasta alcanzar la deformación máxima de 0.37 m aproximadamente.

El desplazamiento obtenido de forma numérica por diferencias finitas, presenta una diferencia en el desplazamiento calculado, obteniéndose una deformación máxima en este caso de de 0.35 m, indicando una diferencia de 0.02 m aproximadamente, con respecto a la solución analítica presentada por Bai y Elsworth (2000). Sin embargo,

cabe destacar que la deformación máxima de la solución analítica se calculó, sumando el término  $u_{max}^{\infty}$  para proporcionar un mejor resultado, mientras que la solución numérica es únicamente el resultado de la formulación matemática del modelo de geomecánica.

## 6.2. Efecto de las condiciones de frontera de cero desplazamiento y esfuerzo constante, en el comportamiento de un yacimiento susceptible a esfuerzos

En este caso se pretende evaluar el comportamiento de un yacimiento bajo diferentes condiciones de frontera para el modelo de geomecánica. Considerando que la variación de los esfuerzos externos en un yacimiento debido a la declinación de la presión dependen de las condiciones de frontera (Geertsma et al., 1957).

Este problem fue planteado originalmente por Dean et al. (2006) para la evaluación de diferentes estrategias de acoplamiento y de las condiciones de frontera, considerando para los parámetros poroelásticos,  $\alpha$  y  $S$ , valores de 1 y 0, respectivamente, lo cual indica, que si se considera la definición del coeficiente de Biot,  $\alpha$ , como:

$$\alpha = 1 - \frac{c_s}{c_b}, \quad (6.16)$$

la compresibilidad del sólido es cero. Aunque la compresibilidad del sólido no es el mecanismo principal de la deformación de la roca, es necesario para la interpretación completa de la teoría poroelástica (Chen et al., 1995).

En este caso, se consideran valores diferentes para  $\alpha$  y  $S$ . Los valores de  $\alpha = 1$  y  $S = 0$ , se emplean únicamente para comparar los resultados obtenidos en esta investigación con los de Dean et al. (2006).

## Descripción del problema

Se considera un yacimiento con una área de  $4.84 \times 10^6 \text{ ft}^2$  ( $4.49 \times 10^5 \text{ m}^2$ ) con un espesor de 200 pies ( $60.9 \text{ m}$ ), localizado a una profundidad de  $6000 \text{ pies}$  ( $1828.8 \text{ m}$ ) y una presión inicial de  $3000 \text{ psi}$ .

Se suponen dos casos:

Caso A: Yacimiento confinado. En este caso, se considera que las fronteras laterales del yacimiento no sufren ningún desplazamiento durante la producción de hidrocarburos, de este modo únicamente se permite la deformación vertical de la roca.

Caso B: Yacimiento no confinado. Para este caso, las fronteras laterales se encuentran sometidas a un esfuerzo normal de  $4000 \text{ psi}$ , de modo que se permite tanto la deformación vertical como la horizontal.

En la **Figura 6.8** se muestra una representación de ambos casos.

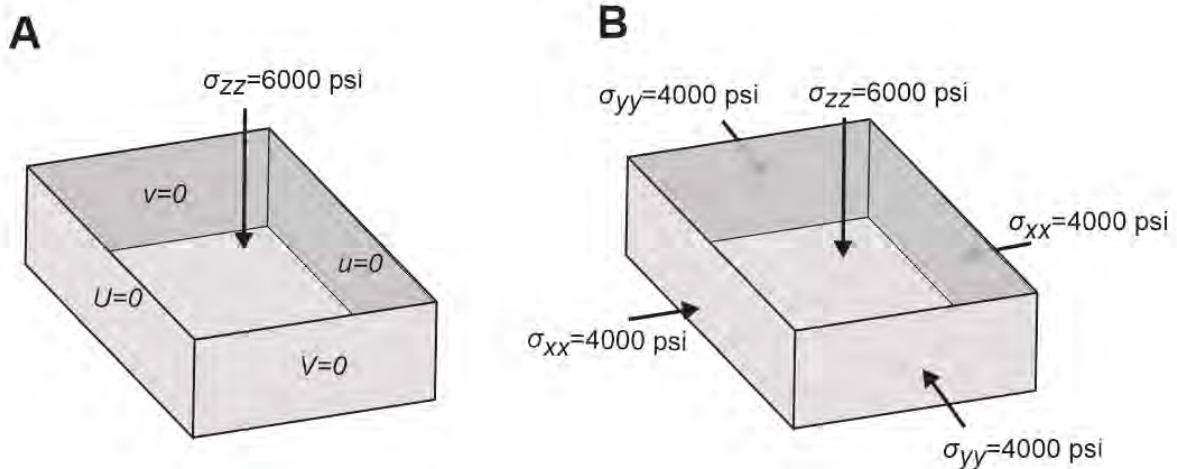


Figura 6.8: Caso A. Yacimiento Confinado, Caso B. Yacimiento No confinado

Las características y propiedades del yacimiento se muestran en la **Tabla 6.2**.



Tabla 6.2: Tabla de datos: Dean et al, SPE 79709

Parámetro	Magnitud	Unidades
Longitud x	2200	ft
Longitud y	2200	ft
Longitud z	200	ft
Permeabilidad horizontal, $k_x = k_y$	50	md
Permeabilidad vertical, $k_z$	5	md
Porosidad, $\varphi$	20	%
Viscosidad del fluido, $\mu$	1.0	cp
Compresibilidad del fluido, $c_f$	0.0	1/psi

La propiedades elásticas de la roca se muestran en la Tabla 6.3

Tabla 6.3: Propiedades elásticas

Módulo de Young, psi	Relación de Poisson	Módulo de bulk, psi	$\alpha$
$1 \times 10^4$	0.3	8333.0	0.89

La explotación del yacimiento se lleva acabo mediante un pozo que produce con un gasto constante de 15000 *bpd* localizado en el centro del yacimiento, el cual se encuentra terminado en todo el espesor del yacimiento.

Se empleó una malla de simulación de 21 nodos en la dirección  $x$ , 21 nodos en la dirección  $y$  y 10 nodos en la dirección  $z$ .

### Caso A. Condiciones de frontera de cero desplazamiento

En este caso el yacimiento se encuentra confinado lateralmente y sólo se permite el desplazamiento vertical. El esfuerzo de sobrecarga aplicado en la cima del yacimiento es de 6,000.0 *psi*. Las condiciones de frontera para este caso quedan descritas matemáticamente por las ecuaciones (3.38), (3.39), (3.40). En donde la deformación volumétrica,  $\epsilon_v$  es igual a la deformación vertical  $\epsilon_{zz}$ , mientras que  $\epsilon_{xx}$  y  $\epsilon_{yy}$  son iguales a cero.

Empleando el simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos desarrollado en esta investigación, se obtuvo: la caída de presión en el yacimiento, la distribución de

la porosidad y la compactación en la cima del yacimiento debida a la explotación del yacimiento para un tiempo total de simulación de 500 días.

En la **Figura 6.9** se muestra la distribución de la presión en el yacimiento a lo largo del eje  $x$  después de 50, 200 y 500 días de simulación, en la que cada una de las curvas muestran el mismo decremento de la presión hacia el centro del yacimiento debido a la presencia del pozo productor, localizado en el centro del yacimiento cuya producción se realiza a través de todo el espesor.

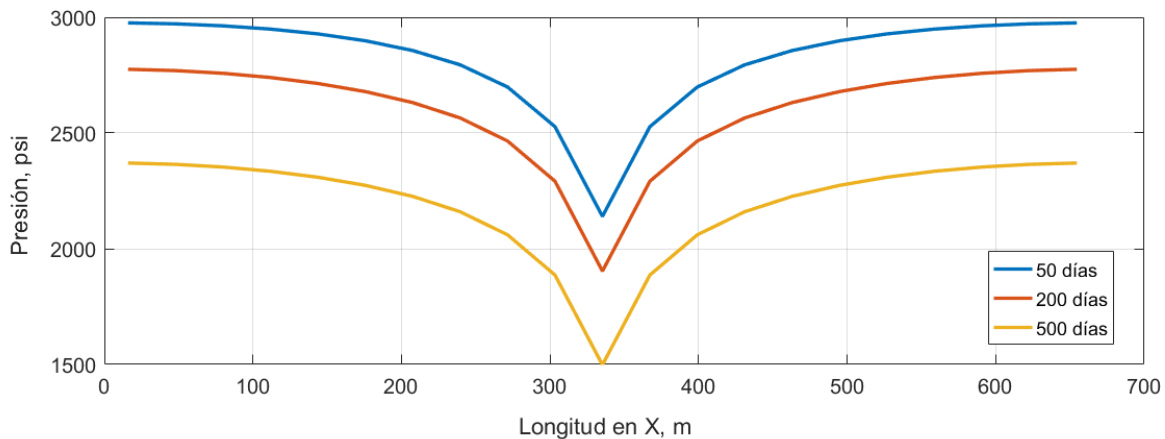


Figura 6.9: Caída de presión en el yacimiento con cero desplazamiento como condición de frontera.

La variación de la porosidad a lo largo del yacimiento se muestra en la **Figura 6.10** en la cual se observa un decremento de la porosidad conforme se incrementa el tiempo de explotación, siendo mayor hacia donde ocurre la mayor caída de presión en el yacimiento.

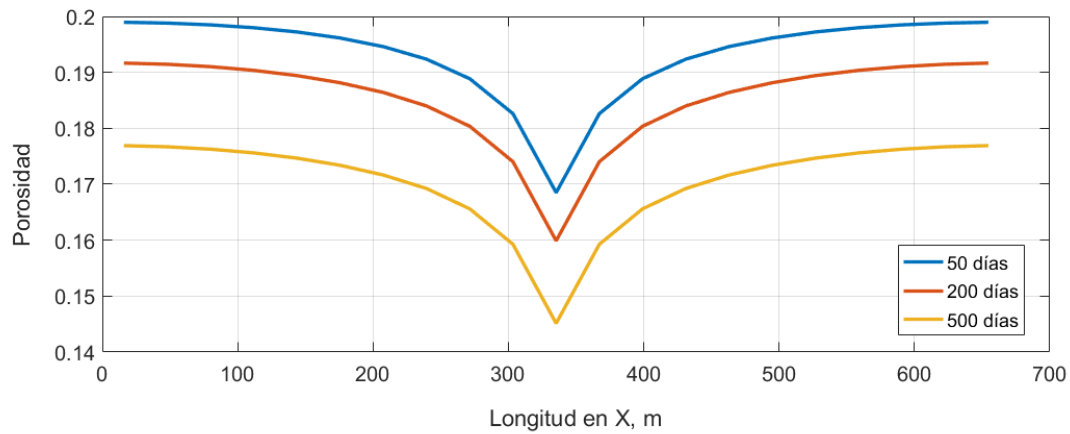


Figura 6.10: Distribución de la porosidad en el yacimiento con cero desplazamiento como condición de frontera.

Una característica esencial del simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos, es la predicción de la compactación del yacimiento en función del desplazamiento vertical. Para un tiempo total de simulación de 500 días, el yacimiento sufre una compactación de 3.75 metros en el centro del yacimiento y de 1.5 metros en las fronteras del yacimiento. La **Figura 6.11** muestra la compactación en la cima del yacimiento.

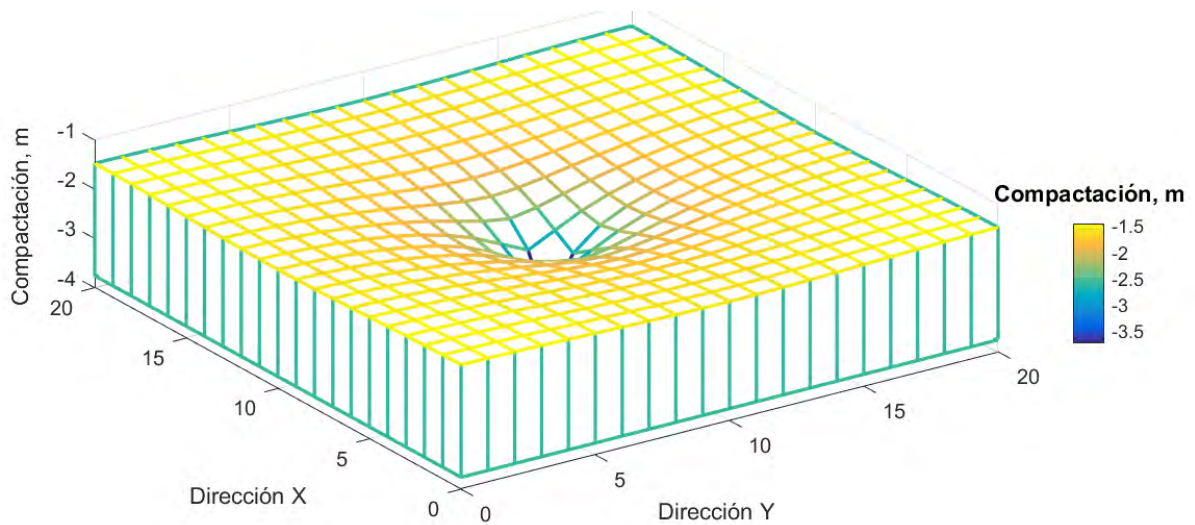


Figura 6.11: Compactación de la cima del yacimiento en tres dimensiones. Caso A.

En la **Tabla 6.4** se muestra el decremento de la presión media de el yacimiento y

los cambios en la porosidad, compactación y esfuerzo efectivo para 50, 200 y 500 días de simulación numérica. Se indica el cambio en la porosidad y compactación en la celda (11, 11, 1) que corresponde a la celda en la que se encuentra localizado el pozo productor y la compactación en la celda (21, 21, 1) que corresponde a la celda de una de las esquinas de la malla de simulación en donde la compactación del yacimiento, según se observa, no es tan severa.

Tabla 6.4: Resultados. Yacimiento con cero desplazamiento en sus fronteras laterales

Tiempo, días	$\phi_{(11,11,1)}$	Compactación $_{(11,11,1), m}$	Compactación $_{(21,21,1), m}$	$\Delta\bar{\sigma}'$ , psi
50	0.1685	-2.168	-0.0137	44
200	0.1600	-2.757	-0.3229	218
500	0.1473	-3.758	-1.5248	580

### Caso B. Condiciones de frontera sometidas a esfuerzo constante.

En este caso el yacimiento se encuentra sometido a la acción de esfuerzos normales de 4,000.0 psi en cada una de sus caras laterales y a un esfuerzo de sobrecarga de 6,000.0 psi. Se considera que el desplazamiento de la base del yacimiento es cero, al igual que el caso anterior. Estas condiciones pueden ser representadas empleando las ecuaciones (3.35), (3.36), (3.37):

En este caso la deformación volumétrica:

$$\epsilon_v = \epsilon_{xx} + \epsilon_{kk} + \epsilon_{zz} \tag{6.17}$$

De igual forma se emplea el simulador desarrollado en este trabajo para determinar la respuesta de la presión, el cambio en la porosidad y la compactación del yacimiento para un tiempo total de 500 días debido a la explotación del yacimiento mediante un pozo que produce a gasto constante de 15000 bpd.

La **Figura 6.12** muestra las distribuciones de la presión a lo largo del eje x, para los tiempos de 50, 200 y 500 días, respectivamente, en las que se observa la caída de presión en el yacimiento para condiciones de cero flujo y esfuerzo constante como condiciones

de frontera. En la que a diferencia del **Caso A** la caída de presión en el yacimiento es mucho menor tanto en las fronteras como en el centro del yacimiento.

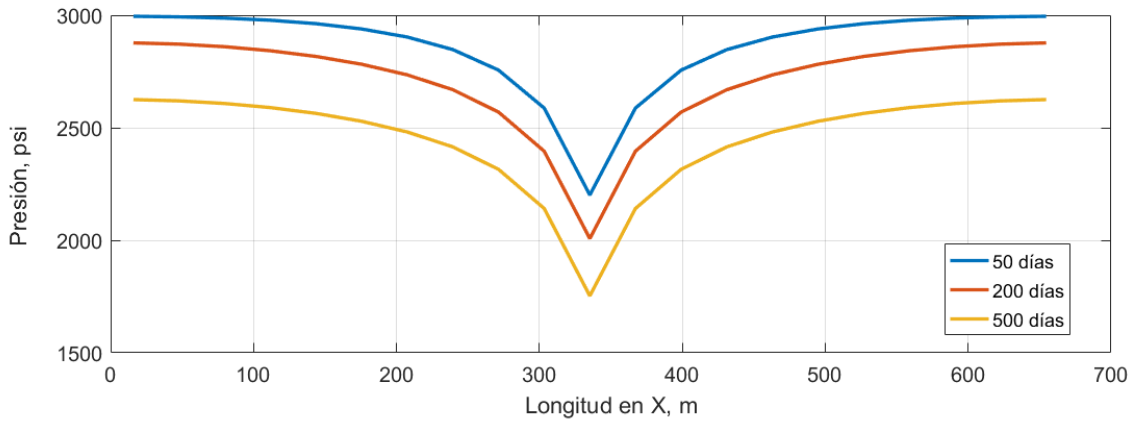


Figura 6.12: Caída de presión en el yacimiento con esfuerzo constante como condición de frontera.

La distribución de la porosidad para este caso se muestra en la **Figura 6.13**, en la que se observa una mayor reducción de la porosidad en el centro del yacimiento, debido al incremento en la deformación volumétrica que en este caso se compone además de la deformación vertical, de las deformaciones laterales.

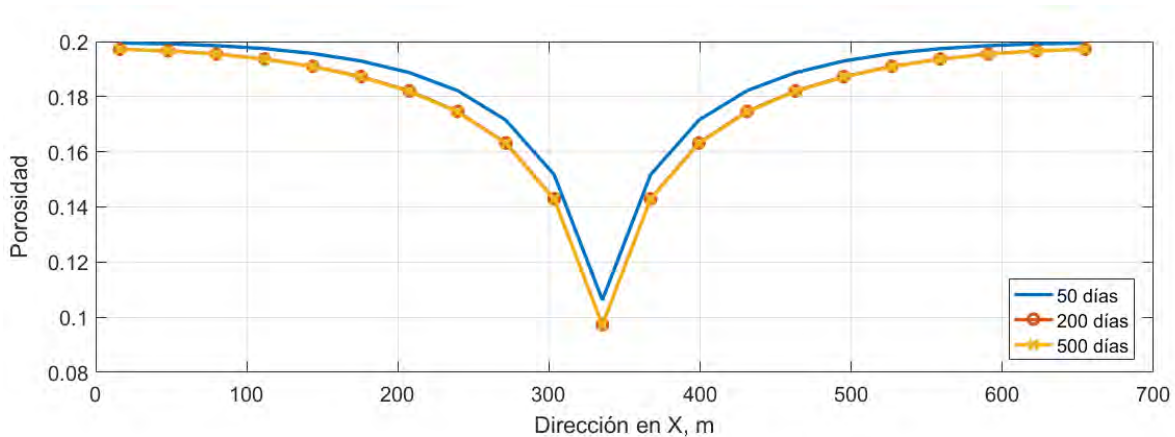


Figura 6.13: Distribución de la presión en el yacimiento sometido a esfuerzos constantes como condición de frontera.

La compactación para el caso del yacimiento sujeto a esfuerzos normales en sus caras laterales, se muestra en la **Figura 6.14** en la que se observa una compactación en el centro del yacimiento cercana a los 2 metros aproximadamente y alcanza una magnitud de 0.48 metros en las fronteras del yacimiento. La compactación en la cima del yacimiento es la acumulación de la compactación de cada una de las celdas inferiores, de modo que es en la cima del yacimiento es donde se observa la mayor compactación.

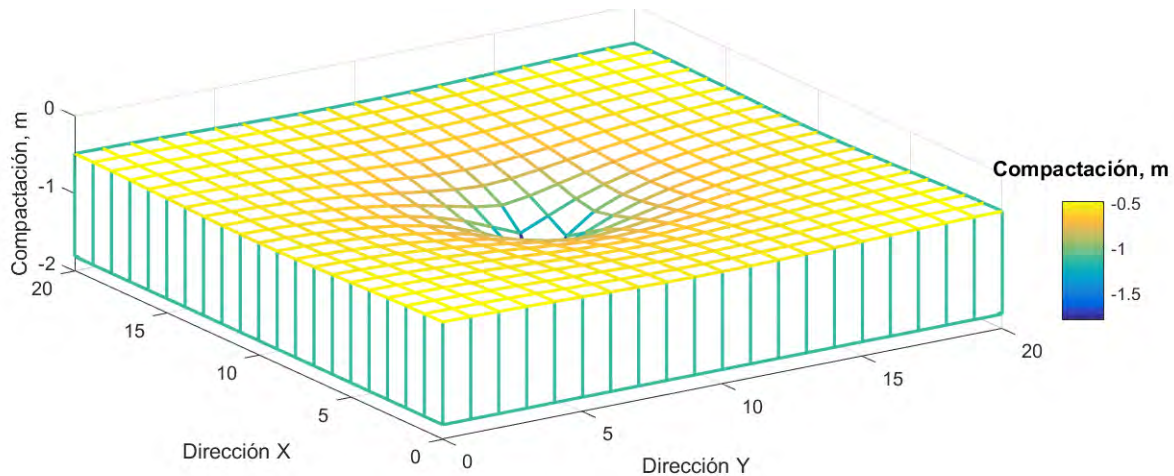


Figura 6.14: Compactación en la cima del yacimiento en tres dimensiones. Caso B.

La Tabla **6.5** muestra los cambios en la presión media, en la porosidad, compactación y el incremento del esfuerzo efectivo, para 50, 200 y 500 días de simulación numérica, para el caso de un yacimiento sujeto a esfuerzos normales constantes como condición de frontera.

Tabla 6.5: Resultados. Yacimiento sujeto a esfuerzos compresivos constantes

Tiempo, días	$\phi_{(11,11,1)}$	Compactación $_{(11,11,1)}$	Compactación $_{(21,21,1)}$	$\Delta\bar{\sigma}', psi$
50	0.11	-1.17	-0.002	26
200	0.099	-1.44	-0.129	138
500	0.098	-1.81	-0.48	356

Los resultados anteriores dan cuenta de una diferencia razonable en el comportamiento del yacimiento en función de las condiciones de frontera mecánicas, las cuales,

afectarán también la productividad del yacimiento debido al efecto en la presión del yacimiento. Esto puede observarse claramente si se considera el caso en el que el yacimiento produce mediante un pozo a presión constante. En la **Figura 6.15** se observa la gráfica de la presión de fondo fluyendo contra el tiempo para un pozo que produce a presión constante considerando las dos condiciones de frontera anteriores.

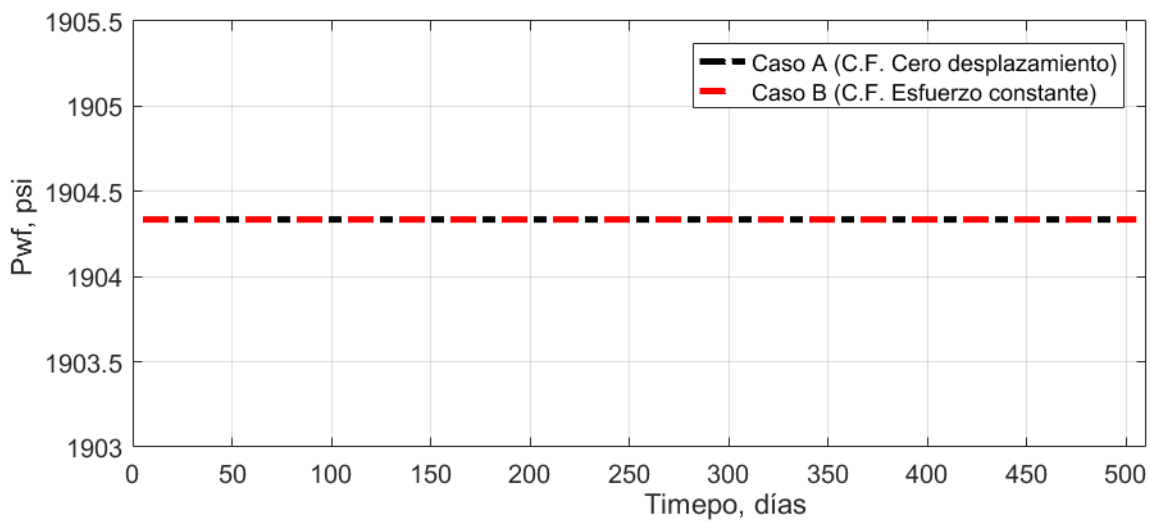


Figura 6.15: Pwf contra el tiempo.

En la **Figura 6.16** se observa claramente que el yacimiento no confinado, el cual se encuentra sometido a esfuerzos compresivos en cada una de sus caras, presenta un mayor gasto de producción en comparación con el yacimiento confinado lateralmente. El incremento en el gasto de producción del yacimiento se debe a que el yacimiento sujeto a esfuerzos en cada una de sus frontera laterales, permiten el desplazamiento lateral de las fronteras generando de este modo un mecanismo de empuje adicional.

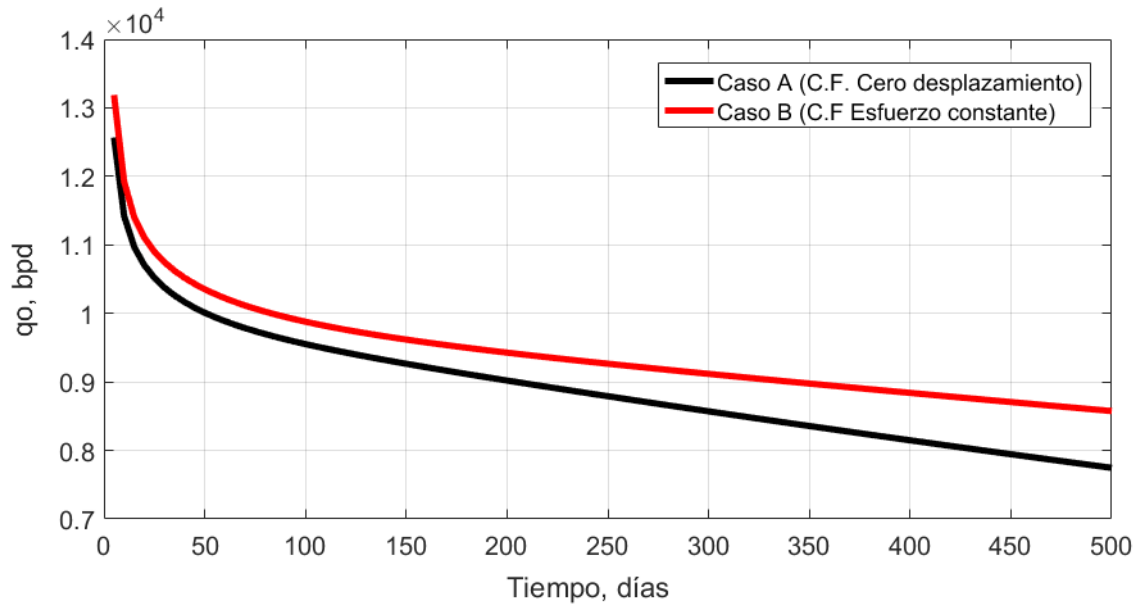


Figura 6.16: Variación del gasto del pozo contra el tiempo, para  $P_{wf}$ =constante.

Para validar el simulador numérico desarrollado en esta investigación se compararon los resultados obtenidos para la presión media y compactación del yacimiento contra los resultados reportados por Dean et al. (2006) para el caso en que  $\alpha = 1$  y  $S = 0$ .

En las Figuras 6.17 y 6.18 podemos observar el comportamiento de la presión media contra el tiempo considerando las condiciones de frontera de cero desplazamiento y esfuerzo constante, así como un gasto de 15000 bpd y los datos de la Tabla 6.2, obtenidos a partir del simulador desarrollado en esta investigación y por Dean et al. (2006), respectivamente.



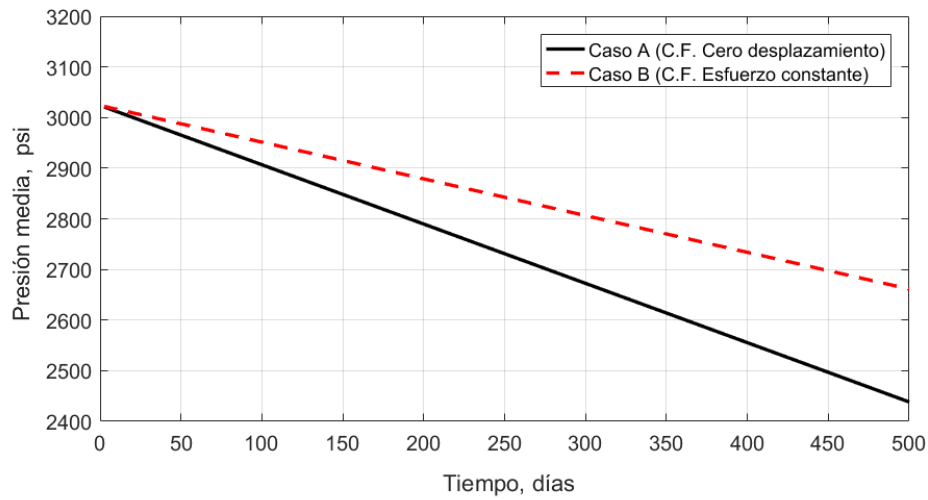


Figura 6.17: Presión media del yacimiento contra el tiempo.

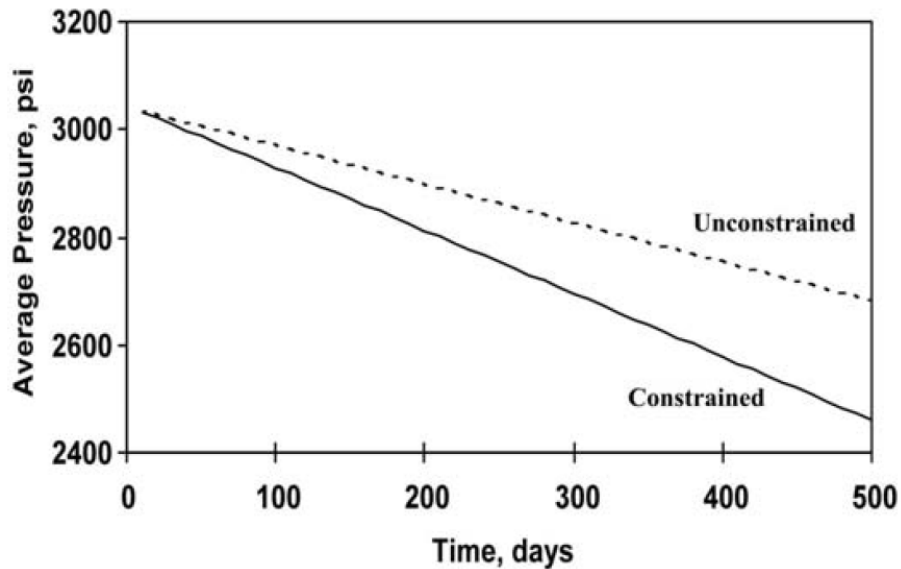


Figura 6.18: Presión media del yacimiento contra el tiempo reportada por Dean et al. (2006).

Por otro lado, en las Figuras 6.19 y 6.20 se puede observar el cambio en la compactación del yacimiento debido a las diferentes condiciones de frontera a partir de la solución numérica obtenida en esta investigación y por Dean et al. (2006), respectivamente.

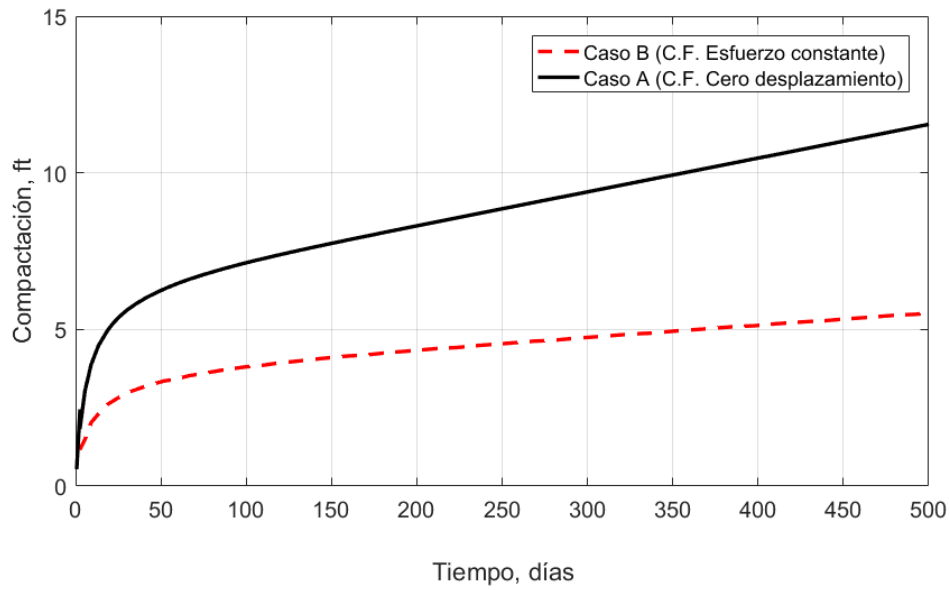


Figura 6.19: Compactación en la cima del yacimiento contra el tiempo.

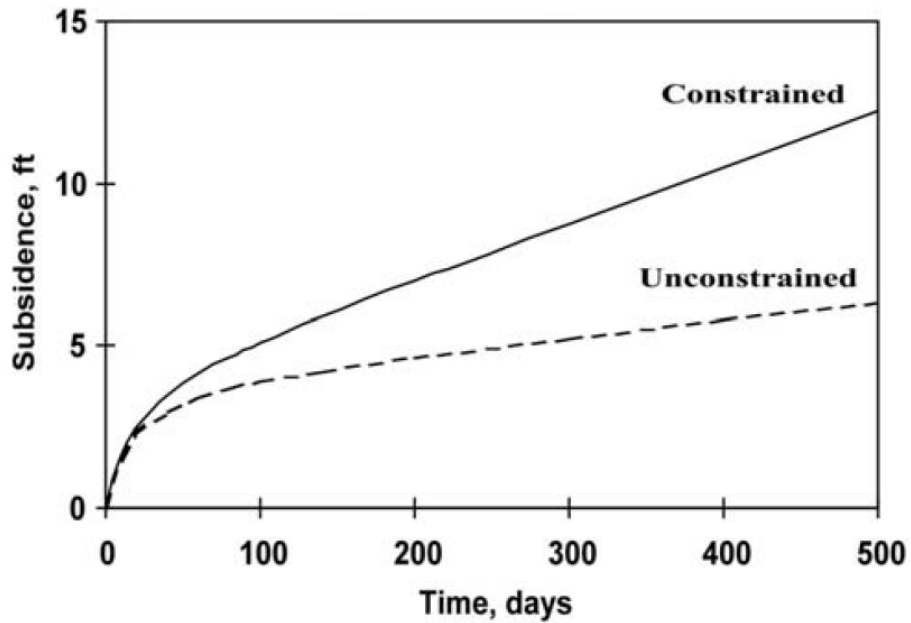


Figura 6.20: Compactación en la cima del yacimiento contra el tiempo reportada por Dean et al. (2006).

De las gráficas anteriores se observa que los resultados obtenidos para la presión media y la compactación del yacimiento a partir del simulador desarrollado en esta

investigación muestran una gran similitud a los resultados presentados por Dean et al. (2006).

### 6.3. Efecto de las propiedades elásticas y poroelásticas de la roca en la compactación del yacimiento

El incremento en el esfuerzo efectivo en un yacimiento susceptible a esfuerzos, debido a la reducción de la presión del yacimiento ocasionada por la producción de hidrocarburos, generará eventualmente la compactación del yacimiento, cuya magnitud dependerá de las propiedades elásticas y poroelásticas de la roca.

Considerando lo anterior, a continuación se evalúa el efecto de las propiedades elásticas y poroelásticas, tales como: el módulo de Young, la relación de Poisson y del coeficiente de Biot, los cuales son parámetros de entrada en el simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos, en la compactación que experimenta el yacimiento durante la producción de hidrocarburos.

Para ello se considera el caso de un yacimiento con las características siguientes (**Tabla 6.6**):

Tabla 6.6: Características del yacimiento

Parámetro	Magnitud	Unidades
Longitud x	3250	ft
Longitud y	3250	ft
Longitud z	328.0	ft
Presión inicial, $p_i$	3200	psi
Permeabilidad horizontal, $k_x = k_y$	100	md
Permeabilidad vertical, $k_z$	30	md
Porosidad, $\phi$	25	%
Factor de volumen a 1000 psi, $B_o$	1.58	m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup>
Viscosidad del fluido, $\mu$	1.0	cp
Compresibilidad del fluido, $c_f$	1.28x10 <sup>-5</sup>	1/psi

Se consideran las propiedades mostradas en la **Tabla 6.7** como caso base.

Tabla 6.7: Propiedades elásticas y poroelásticas de la roca del yacimiento

Módulo de Young, psi	Relación de Poisson	Coefficiente de Biot
$1 \times 10^4$ psi	0.24	0.8

La explotación del yacimiento se lleva a cabo por medio de un pozo productor localizado en el centro del yacimiento, terminado en todo el espesor, el cual opera a gasto constante de 2,000 bpd. La malla de simulación 21 celdas en la dirección  $x$ , 21 en la dirección  $y$  y 10 en la dirección  $z$ .

Para evaluar el efecto de las propiedades mecánicas la roca en la compactación del yacimiento, se realizan varias simulaciones cambiando únicamente el parámetro de interés en cada caso.

## Efecto del Módulo de Young

Se realizaron simulaciones con diferentes valores del Módulo de Young, manteniendo constante la relación de Poisson y el coeficiente de Biot. La **Tabla 6.8** muestra los resultados obtenidos para un tiempo total de simulación de 1000 días.

Tabla 6.8: Efecto del módulo de Young,  $E$ , en la compactación del yacimiento

$E$ , psi	$\nu$	$\alpha$	Compactación (11,11,1), m	Compactación (21,21,1), m
$1.0 \times 10^4$	0.24	0.8	-0.64	- 0.25
$2.54 \times 10^4$	0.24	0.8	- 0.41	- 0.26
$1.25 \times 10^5$	0.24	0.8	-0.24	-0.21
$2.54 \times 10^6$	0.24	0.8	-0.038	-0.037

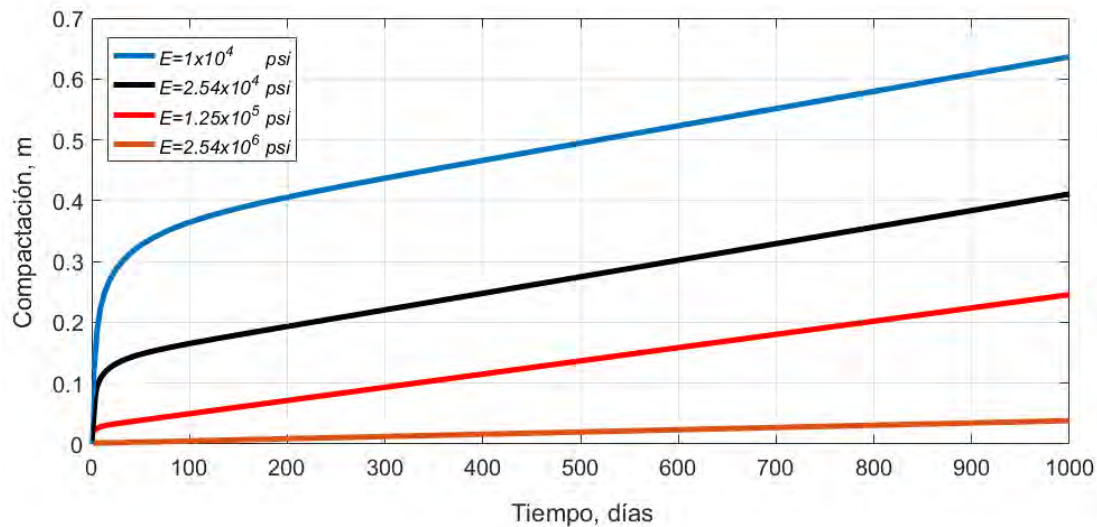


Figura 6.21: Compactación en la cima del yacimiento para diferentes valores del módulo de Young

En la **Figura 6.21** se muestra la compactación máxima en la cima del yacimiento para un tiempo total de 1000 días de producción, para diferentes valores del módulo de Young, en la cual se observa que la compactación del yacimiento decrece conforme se incrementa el valor del módulo de elasticidad. Esto indica, que las rocas más elásticas son rocas mecánicamente más competentes, experimentando menor deformación al incrementarse el esfuerzo efectivo, en las que los cambios en la porosidad y deformación de la roca, son mínimos.

### Efecto de la relación de Poisson, $\nu$

Para evaluar el efecto de la relación de Poisson en la compactación de la roca, se realizaron tres simulaciones para diferentes valores de  $\nu$ , manteniendo constante el Módulo de Young y el coeficiente de Biot. La **Tabla 6.9** muestra los resultados obtenidos para un tiempo total de simulación de 1000 días. La compactación (11,11,1), se refiere a la compactación en la celda (11,11,1), que corresponde a la celda ubicada en el centro y cima del yacimiento, en la cual se localiza el pozo productor. La compactación (21,21,1)

se refiere a la compactación en la celda de una de las esquinas del yacimiento.

De acuerdo con los resultados mostrados en la **Tabla 6.9** y en la **Figura 6.22** la roca exhibe una mayor compactación conforme decrece el valor de la relación de Poisson.

Tabla 6.9: Efecto de la relación de Poisson en la compactación del yacimiento

E, psi	$\nu$	$\alpha$	Compactación (11,11,1), m	Compactación (21,21,1), m
$1 \times 10^4$	0.24	0.8	- 0.64	-0.25
$1 \times 10^4$	0.30	0.8	- 0.63	-0.29
$1 \times 10^4$	0.40	0.8	- 0.59	-0.37

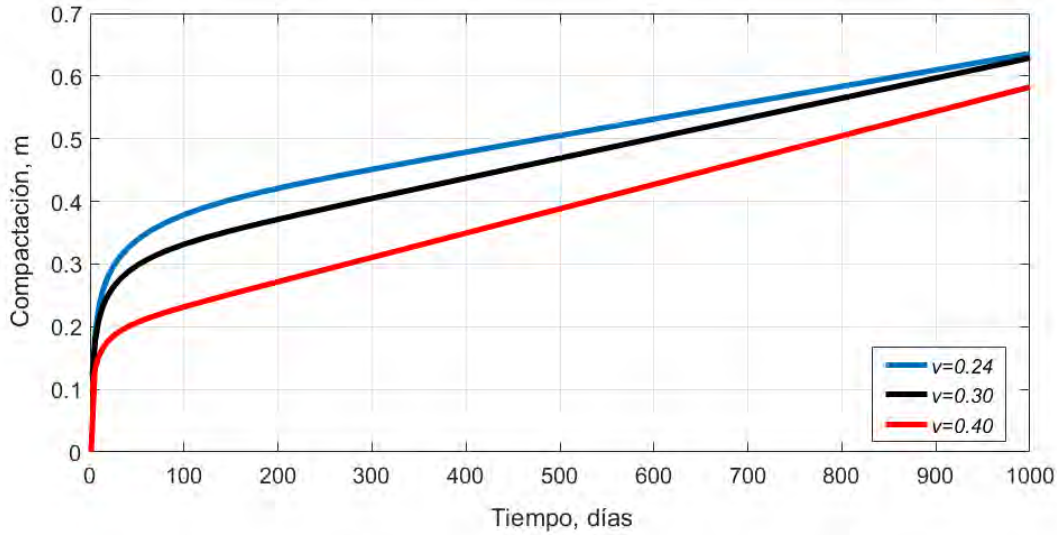


Figura 6.22: Compactación en la cima del yacimiento para diferentes valores de la relación de Poisson

### Efecto del coeficiente de Biot

Se realizaron tres corridas con diferentes valores del coeficiente de Biot, manteniendo constante la relación de Poisson y el Módulo de Young. La **Tabla 6.8** muestra los resultados obtenidos para un tiempo total de simulación de 1000 días.

La **Figura 6.23** muestra el efecto del coeficiente de Biot en la compactación del yacimiento. La compactación es mayor en cuanto mayor es el coeficiente de Biot.

Tabla 6.10: Efecto del coeficiente de Biot en la compactación del yacimiento

$E$ , psi	$\nu$	$\alpha$	Compactación (11,11,1), m	Compactación (21,21,1), m
$1 \times 10^4$	0.24	0.9	-0.67	-0.23
$1 \times 10^4$	0.24	0.8	-0.64	-0.25
$1 \times 10^4$	0.24	0.7	-0.61	- 0.26

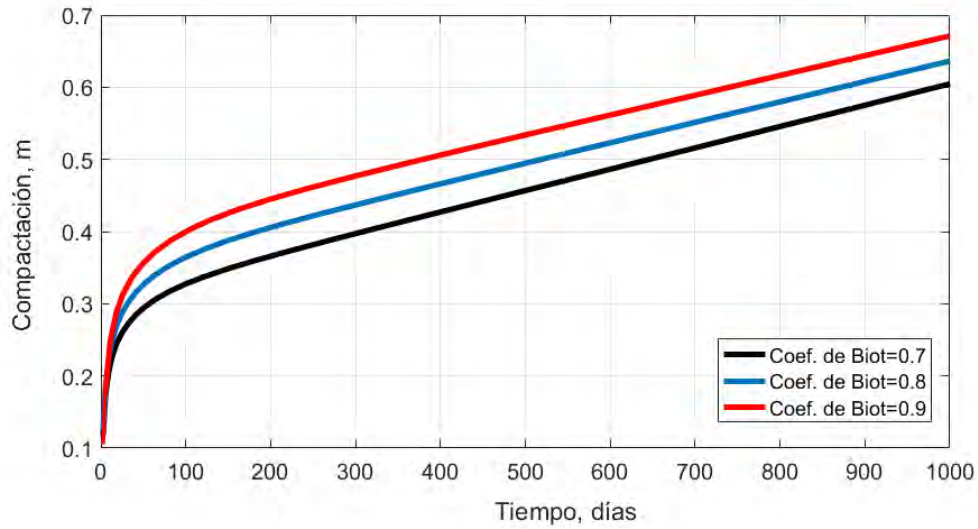


Figura 6.23: Compactación en la cima del yacimiento para diferentes valores del coeficiente de Biot

## 6.4. Cambio en las propiedades petrofísicas como efecto del incremento en el esfuerzo efectivo

La simulación numérica de yacimientos generalmente considera que la permeabilidad de la roca permanece constante, sin embargo, para yacimientos susceptibles a esfuerzos, la permeabilidad, así como la compresibilidad y porosidad de la roca, pueden verse severamente afectadas por el cambio en el estado de esfuerzos (Osorio et al., 1997; Chin et al., 1998; Cuisiat et al., 1998). Como consecuencia es necesario incluir estos cambios en las propiedades petrofísicas conforme ocurre la declinación de la presión en el yacimiento, para predecir correctamente su comportamiento.

### 6.4.1. Descripción del problema

Se considera un yacimiento con una área de  $1.44 \times 10^6$  ft<sup>2</sup> con un espesor de 120 ft. La cima del yacimiento se encuentra a 4600 pies de profundidad con una presión inicial de 2000 psi. Se supone que el yacimiento se encuentra confinado lateralmente, por lo que únicamente se permite su deformación vertical:  $\epsilon_{kk} = \epsilon_{zz}$ . Las propiedades y características del yacimiento se incluyen en la Tabla 6.11

Tabla 6.11: Propiedades del yacimiento

Parametro	Magnitud	Unidades
Longitud x	1200	ft
Longitud y	1200	ft
Longitud z	120	m
Permeabilidad en x, $k_x$	120	md
Permeabilidad en y, $k_y$	120	md
Permeabilidad vertical, $k_z$	50	md
Porosidad, $\phi$	25	%
Coefficiente de Biot, $\alpha$	0.9	
Compresibilidad del aceite, $c_f$	$4.76 \times 10^{-5}$	1/psi



Tabla 6.12: Propiedades elásticas y poroelásticas de la roca

Módulo de Young, $E$ , psi	Relación de Poisson	$\alpha$
$1,25 \times 10^4$	0.29	0.9

El yacimiento produce mediante un pozo localizado su centro a presión constante de 2800 psi; se considera que el radio del pozo es de 0.25 pies. Se emplea una malla de simulación de 21 celdas en la dirección  $x$ , 21 celdas en la dirección  $y$  y 10 celdas en la dirección  $z$ .

Para evaluar el efecto de la permeabilidad en el comportamiento del yacimiento se compara el gasto de producción de aceite obtenido para el caso en que no se consideran los cambios en la permeabilidad de la roca contra el gasto de producción de aceite obtenido considerando los cambios en la permeabilidad de la roca.

La distribución inicial de la porosidad y permeabilidad se muestran en las figuras 6.24 y 6.25, respectivamente.

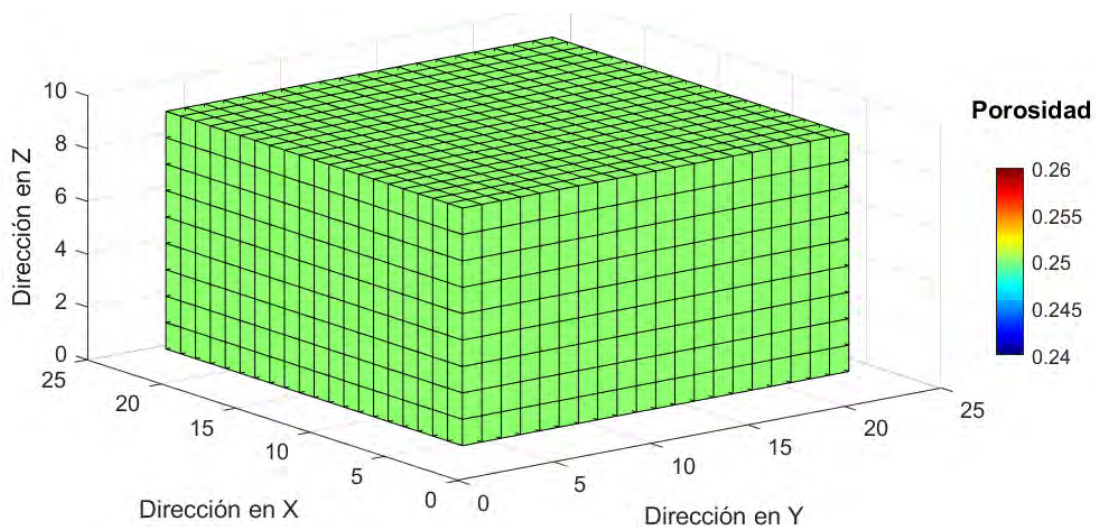


Figura 6.24: Distribución de la porosidad inicial

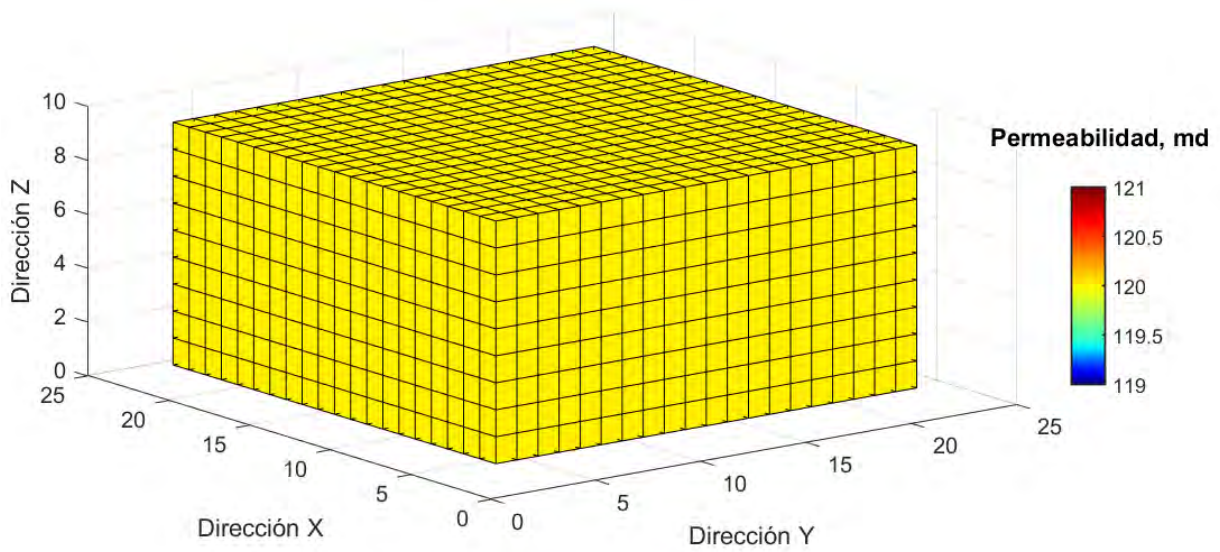


Figura 6.25: Distribución de la permeabilidad inicial

Después de 1000 días de simulación, la nueva distribución de la porosidad se muestra en la **Figura 6.26**, en la que se observa el mayor decremento de la porosidad en la zona cercana al pozo productor.

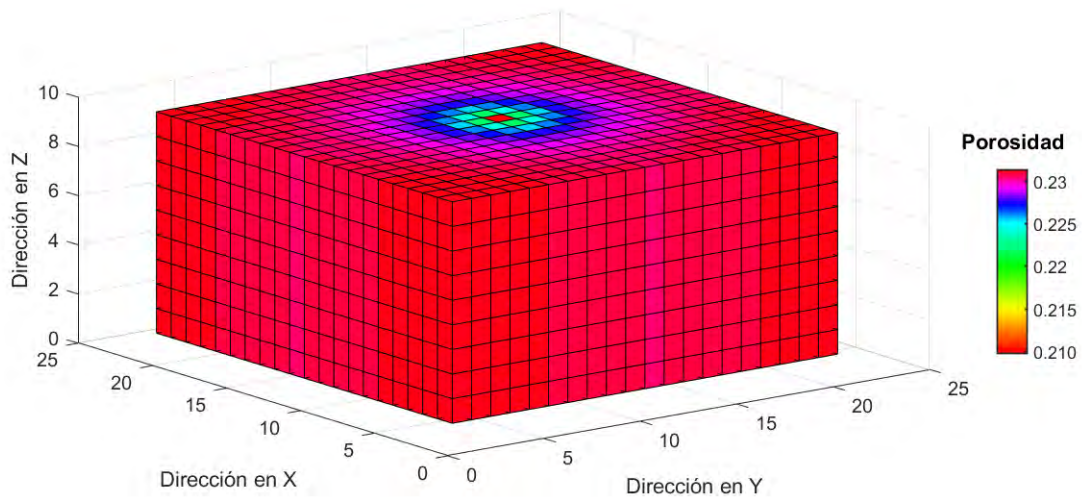


Figura 6.26: Distribución de porosidad después de 300 días de simulación

Incorporando la variación de la permeabilidad en función de los cambios de la poro-

---

según de acuerdo al modelo de Kozeni-Karman (ecuación 4.4), se obtuvo la distribución de permeabilidad siguiente, después de 1000 días de simulación.

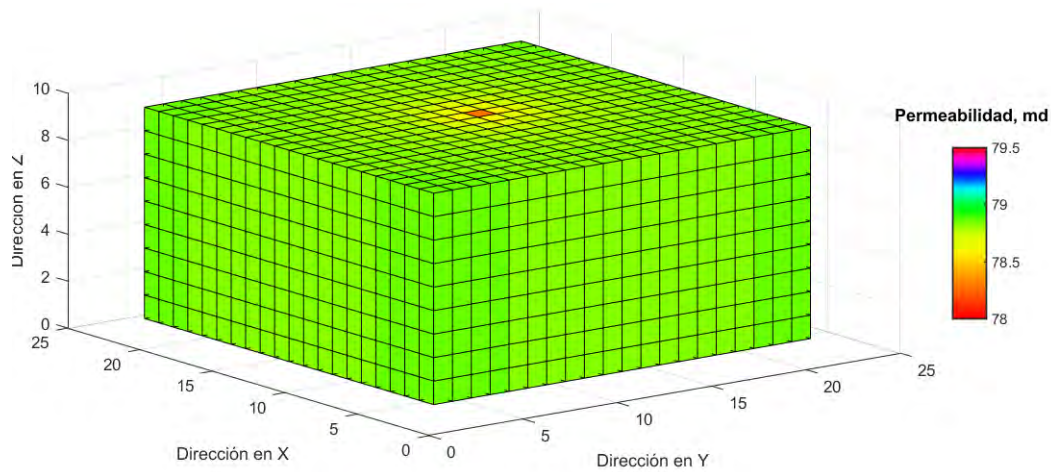


Figura 6.27: Distribución de la permeabilidad después de 1000 días de producción

La relación entre la permeabilidad y la porosidad obtenida a partir del modelo de Kozeni-Karman se muestra en la **Figura 6.28**.

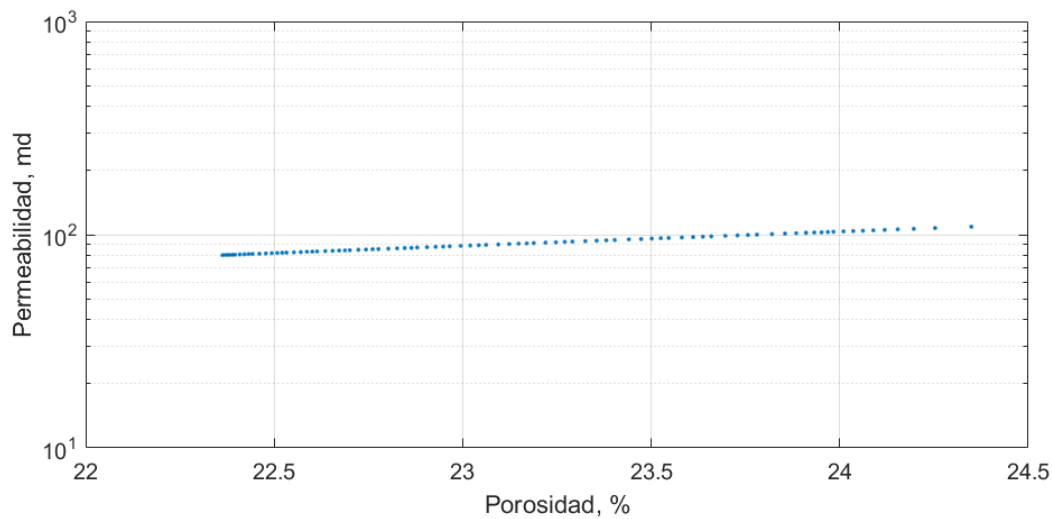


Figura 6.28: Variación de la permeabilidad en función de la porosidad

Si bien, en algunos casos el efecto de compactación del yacimiento puede actuar como

un mecanismo de empuje, cuando los efectos de la compactación debido al incremento en el esfuerzo efectivo, causan adicionalmente una reducción en la permeabilidad de la formación, la productividad del yacimiento puede resultar afectada .

En la **Figura 6.29** se observa el decremento en el gasto de producción como efecto de la reducción de la permeabilidad.

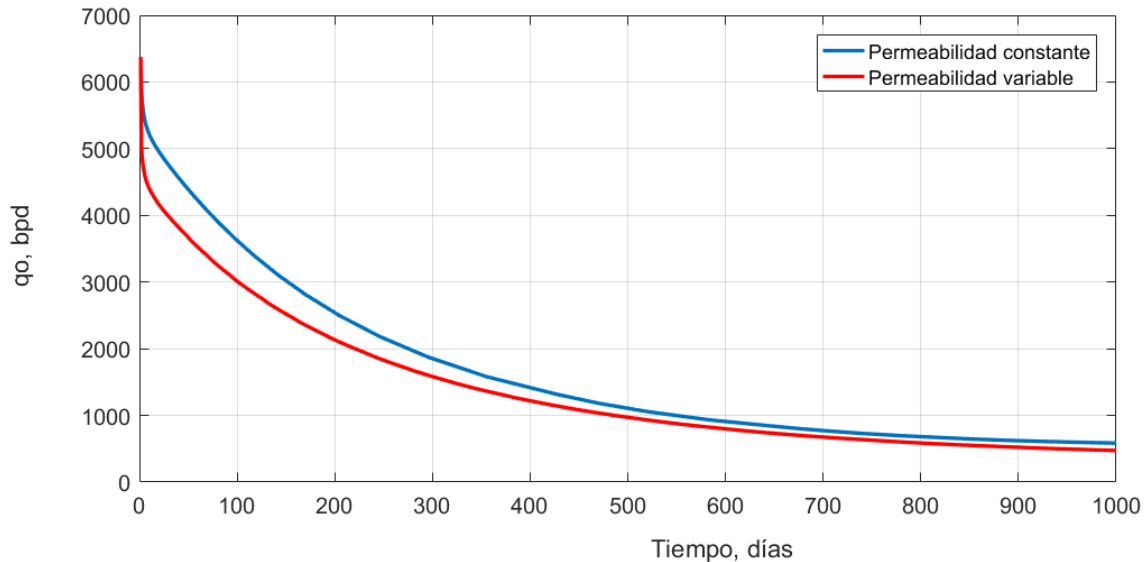


Figura 6.29: Variación en el gasto de producción como efecto del decremento de la permeabilidad

Esta variación en el gasto de producción debido a la reducción de la permeabilidad puede generar una sobrestimación en la predicción de la producción de aceite.

En cada uno de los casos presentados cuya solución se obtuvo mediante el simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos desarrollado para esta investigación , se logró identificar el efecto de las propiedades elásticas, poroelástica y petrofísicas de la roca, así como de las condiciones de frontera consideradas en el modelo de geomecánica, en el comportamiento del yacimiento, haciendo evidente la necesidad de considerar la geomecánica en la simulación numérica de yacimientos.



# Capítulo 7

## Conclusiones

La formulación matemática y teórica presentada en este trabajo para la aplicación de la geomecánica en la simulación numérica de yacimientos, considera flujo monofásico e isotérmico en un medio poroso que es susceptible a deformarse de acuerdo con la teoría poroelástica lineal. Con base en esta formulación se desarrolló un simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos en tres dimensiones, empleando el método de diferencias finitas para la discretización del espacio, considerando el cálculo de las presiones en los nodos de las celdas y el cálculo de los desplazamientos de las fronteras de dichas celdas.

Los modelos de geomecánica y flujo de fluidos se acoplaron empleando un esquema de acoplamiento iterativo, en el que el cálculo de las presiones en cada celda, determinadas mediante el modelo de flujo, se emplean en el modelo de geomecánica para determinar la deformación del yacimiento.

La formulación matemática y numérica se probó mediante la solución al problema de consolidación en una dimensión para una columna de roca, en donde se observó la reducción de la presión de poro y la deformación de la columna debido a la expulsión del fluido contenido. Mientras que el simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos, se aplicó para la solución de tres casos que muestran el efecto de las propiedades elásticas y poroelásticas en el comportamiento de los yacimientos petroleros.

En primer lugar, el simulador de geomecánica acoplado al flujo de fluidos se empleó para evaluar los efectos de diferentes condiciones de frontera, observando que las condiciones de esfuerzo constante producen una menor caída de presión y compactación en el yacimiento en comparación con las condiciones de cero desplazamiento. Además se observó un incremento en el gasto de producción a partir de las condiciones de esfuerzo constante, observando que en general, la compactación puede actuar como un mecanismo de empuje en el yacimiento.

Posteriormente se evaluaron los efectos de las propiedades elásticas y poroelásticas de la roca en la compactación del yacimiento, en donde se observó que la compactación del yacimiento es mayor conforme la magnitud del módulo de Young y de la relación de Poisson se incrementan, mientras que la compactación decrece a menor magnitud del coeficiente de Biot.

Finalmente se determinó la variación de las propiedades petrofísicas en función del cambio en el esfuerzo efectivo, en donde se observó una reducción en la porosidad y permeabilidad conforme disminuye la presión del yacimiento y se incrementa el esfuerzo efectivo, afectando finalmente la productividad del yacimiento.

# Nomenclatura

$p$	presión	psi
$\phi$	porosidad	
$t$	tiempo	días
$q$	gasto	bbl/día
$\sigma$	esfuerzo	psi
$\sigma'$	esfuerzo efectivo	psi
$\sigma_{i,j}$	tensor de esfuerzos	psi
$\bar{\sigma}$	esfuerzo medio	psi
$\alpha$	coeficiente de Biot-Willis	
$\delta$	delta de Cronecker	
$\epsilon$	deformación	
$\epsilon_{i,j}$	tensor de deformación	
$\epsilon_{kk}$	deformación volumetrica	
$\mathbf{u}$	vector desplazamiento	ft
$u$	desplazamiento en x	ft
$v$	desplazamiento en y	ft
$w$	desplazamiento en z	ft
$\xi$	Coeficiente de contenido de fluido	
$V_p$	Volumen poroso	ft <sup>3</sup>
$V_s$	Volumen de sólidos	ft <sup>3</sup>
$V_b$	Volumen total	ft <sup>3</sup>



$\rho_f$	densidad del fluido	$lb_m/ft^3$
$\rho_s$	densidad del sólido	$lb_m/ft^3$
$\rho_o$	densidad del aceite	$lb_m/ft^3$
$k$	permeabilidad	md
$\mu$	viscosidad	cp
$E$	Módulo de Young	psi
$G$	Módulo de corte	psi
$\lambda$	Constante de Lamé	psi
$K$	Módulo de bulk	psi
$K_v$	Módulo de bulk para deformación uniaxial	psi
$K_u$	Módulo de bulk sin drene	psi
$\nu$	Relación de Poisson	
$\nu_u$	Relación de Poisson sin drene	
$c_{bc}$	compresibilidad total a presión constante	$psi^{-1}$
$c_{bp}$	compresibilidad total a esfuerzo constante	$psi^{-1}$
$c_{pc}$	compresibilidad de poro a presión constante	$psi^{-1}$
$c_{pp}$	compresibilidad de poro a esfuerzo constante	$psi^{-1}$

# Bibliografía

- Bai, M. y Elsworth, D. (2000). *Coupled Processes in Subsurface Deformation, Flow, and Transport*. American Society of Civil Engineers.
- Bear, J. (2013). *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation.
- Bear, J., Buchlin, J. M., et al. (1991). *Modelling and applications of transport phenomena in porous media*, volume 5. Springer.
- Biot, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, 12(2):155–164.
- Biot, M. A. (1955). Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of applied physics*, 26(2):182–185.
- Biot, M. A. (1956). General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. *J. appl. Mech*, 23(1):91–96.
- Chen, H.-Y., Teufel, L., Lee, R., et al. (1995). Coupled fluid flow and geomechanics in reservoir study - theory and governing equations. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers.
- Cheng, A. H.-D. (2016). *Poroelasticity*, volume 27. Springer.
- Chierici, G., Ciucci, G., Eva, F., Long, G., et al. (1967). Effect of the overburden pressure on some petrophysical parameters of reservoir rocks. In *7th World Petroleum Congress*. World Petroleum Congress.

- Chin, L., Raghavan, R., Thomas, L., et al. (1998). Fully-coupled geomechanics and fluid-flow analysis of wells with stress-dependent permeability. In *SPE International Oil and Gas Conference and Exhibition in China*. Society of Petroleum Engineers.
- Craig, R. F. (2013). *Soil mechanics*. Springer.
- Cuisiat, F., Gutierrez, M., Lewis, R., Masters, I., et al. (1998). Petroleum reservoir simulation coupling flow and deformation. In *European Petroleum Conference*. Society of Petroleum Engineers.
- Dean, R. H., Gai, X., Stone, C. M., Minkoff, S. E., et al. (2006). A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics. *SPE Journal*, 11(01):132–140.
- Ertekin, T., Abou-Kassen, J. H., y King, G. R. (2001). *Basic Applied Reservoir Simulations*. Society of Petroleum Engineers.
- Fjar, E., Holt, R. M., Raaen, A., Risnes, R., y Horsrud, P. (2008). *Petroleum related rock mechanics*, volume 53. Elsevier.
- Fredrick, J., Deitrick, G., Arguello, J., DeRouffignac, E., et al. (1998). Reservoir compaction, surface subsidence, and casing damage: a geomechanics approach to mitigation and reservoir management. In *SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering*. Society of Petroleum Engineers.
- Geertsma, J. et al. (1957). The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks.
- Geertsma, J. et al. (1973). Land subsidence above compacting oil and gas reservoirs. *Journal of Petroleum Technology*, 25(06):734–744.
- Gu, E. W. H., Sammon, P. H., Da Costa, A. M., Cabral, L., de Souza Jr, L. C., Pao, W., et al. (2011). A study examining coupled geomechanics and reservoir fluid flow

- modeling. In *Canadian Unconventional Resources Conference*. Society of Petroleum Engineers.
- Guéguen, Y. y Boutéca, M. (2004). *Mechanics of fluid-saturated rocks*. 89.
- Gutierrez, M., Lewis, R., Masters, I., et al. (2001). Petroleum reservoir simulation coupling fluid flow and geomechanics. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 4(03):164–172.
- Huyakorn, P. S. (2012). *Computational methods in subsurface flow*. Academic Press.
- Inoue, N. y da Fontoura, S. A. (2009). Answers to some questions about the coupling between fluid flow and rock deformation in oil reservoirs. In *SPE/EAGE Reservoir Characterization & Simulation Conference*.
- Jaeger, J. C., Cook, N. G., y Zimmerman, R. W. (2009). *Fundamentals of rock mechanics*. John Wiley & Sons.
- Jones, F. O., Owens, W., et al. (1980). A laboratory study of low-permeability gas sands. *Journal of Petroleum Technology*, 32(09):1–631.
- Merle, H., Kentie, C., Van Opstal, G., Schneider, G., et al. (1976). The bachaquero study—a composite analysis of the behavior of a compaction drive/solution gas drive reservoir. *Journal of Petroleum Technology*, 28(09):1–107.
- Minkoff, S. E., Stone, C. M., Bryant, S., Peszynska, M., y Wheeler, M. F. (2003). Coupled fluid flow and geomechanical deformation modeling. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 38(1):37–56.
- Nagel, N. B. (1998). Ekofisk field overburden modelling.
- Nauroy, J.-F. (2011). *Geomechanics applied to the petroleum industry*. Editions Technip.
- Olivella, X. O. y de Saracíbar Bosch, C. A. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, volume 92. Univ. Politèc. de Catalunya.

- Osorio, J. G., Chen, H.-Y., Teufel, L. W., et al. (1997). Numerical simulation of coupled fluid-flow/geomechanical behavior of tight gas reservoirs with stress sensitive permeability. In *Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference*. Society of Petroleum Engineers.
- Pratt, W. E. y Johnson, D. W. (1926). Local subsidence of the goose creek oil field. *The Journal of Geology*, 34(7, Part 1):577–590.
- Rodriguez, H. (2011). Numerical reservoir simulation coupled with geomechanics state of the art and application in reservoir characterization. *Society of Petroleum Engineers*.
- Sayers, C. M. y Schutjens, P. M. (2007). An introduction to reservoir geomechanics. *The Leading Edge*, 26(5):597–601.
- Schutjens, P. M., Snippe, J. R., Mahani, H., Turner, J., Ita, J., Mossop, A. P., et al. (2012). Production-induced stress change in and above a reservoir pierced by two salt domes: a geomechanical model and its applications. *SPE Journal*, 17(01):80–97.
- Settari, A., Walters, D. A., et al. (2001). Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction. *Spe Journal*, 6(03):334–342.
- Sylte, J., Thomas, L., Rhett, D., Bruning, D., Nagel, N., et al. (1999). Water induced compaction in the ekofisk field. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers.
- Terzaghi, K. (1925). Principles of soil mechanics, settlement and consolidation of clay. *Engineering News-Record*, 95(3):874–878.
- Terzaghi, K. (1944). *Theoretical soil mechanics*. Chapman And Hali, Limited John Wiler And Sons, Inc; New York.

- Thomas, L., Chin, L., Pierson, R., Sylte, J., et al. (2002). Coupled geomechanics and reservoir simulation. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers.
- Tran, D., Nghiem, L., y Buchanan, L. (2005). Improved iterative coupling of geomechanics with reservoir simulation, paper spe 93244 presented at spe reservoir simulation symposium. *Society of Petroleum Engineers, Houston, Tex.*
- Verruijt, A. (1969). Elastic storage of aquifers. *Flow through porous media*, pages 331–376.
- Wang, H. F. (2017). *Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology*. Princeton University Press.
- Wong, R., Li, Y., et al. (2000). A stress-dependent model for permeability changes in oil sand due to shear dilation. In *Canadian International Petroleum Conference*. Petroleum Society of Canada.
- Zimmerman, R. W., Somerton, W. H., y King, M. S. (1986). Compressibility of porous rocks. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 91(B12):12765–12777.
- Zoback, M. D. (2010). *Reservoir Geomechanics*. Cambridge University Press.