



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Clasificación de Configuraciones  
Simplécticas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICA

PRESENTA:  
MARÍA FERNANDA SÁNCHEZ PEÑA

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. RODOLFO SAN AGUSTÍN CHI



Ciudad Universitaria, CDMX., 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Hoja de datos del jurado

### 1. Datos del alumno

Sánchez

Peña

María Fernanda

55 95 21 62

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

309217909

### 2. Datos del tutor

Dr.

Rodolfo

San Agustín

Chi

### 3. Datos del sinodal 1

Dr.

Vinicio Antonio

Gómez

Gutiérrez

### 4. Datos del sinodal 2

Dra.

María del Rocío

Sánchez

López

### 5. Datos del sinodal 3

Dr.

Pierre Michel

Bayard

### 6. Datos del sinodal 4

Dr.

José David

Flores

Peñaloza

### 7. Datos del trabajo escrito

Clasificación de configuraciones simplécticas

128 p

2018



*A mi familia y  
a todos los amantes de la geometría.*



# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer al Dr. Rodolfo San Agustín Chi, por ser un excelente profesor de la facultad de ciencias, por enseñarme lo increíble que es la geometría y ser un pilar importante en mi formación académica.

Agradezco que haya compartido su tiempo conmigo y toda la paciencia, ayuda, comprensión y conocimiento que me ofreció tanto en lo académico como en lo personal, antes, durante y espero en el futuro de este trabajo. Infinitas gracias por su profesionalismo y amistad.

También quiero agradecer a mi jurado integrado por el Dr. Vinicio Gómez, Dra. Rocío Sánchez, Dr. Pierre Bayard y Dr. David Flores, mencionados en orden de asignación, por haber aceptado ser mis sinodales, por su tiempo, comentarios, ayuda y correcciones para este trabajo.

Le agradezco a mi familia darme la libertad de elegir mi carrera, apoyarme en todo momento y respetar las decisiones que he tomado a lo largo de mi vida.

En especial quiero agradecer a mi mamá por apoyarme, aconsejarme y ayudarme siempre que lo necesito. Gracias por estar mi lado en todo momento y enseñarme a esforzarme y siempre dar lo mejor de mí. Gracias por todos los esfuerzos y sacrificios que hiciste para que nunca me faltara nada y tener una vida cada vez mejor. Siempre serás la mejor.

Le agradezco a mi papá por la comprensión, confianza y cariño que me tiene. Gracias por creer en mí y apoyarme. Gracias por ser la persona más consentidora del mundo y darme el mejor perro de toda la existencia.

Le agradezco a mi tía Pity por apoyarme, cuidarme y enseñarme que nada es tan difícil como parece y que puedo lograr grandes cosas.

También quiero agradecerle a todas las personas que durante la realización de este trabajo me motivaron, me ayudaron, me escucharon, me dieron ánimos, me enseñaron cosas nuevas, me compartieron su tiempo y me hicieron comentarios constructivos.



## VIII

Gracias también a todas las personas que estuvieron en mi vida y me ayudaron a ser una mejor persona.

Finalmente, quiero agradecer al único ser que, desde que llegó a mi vida, aguantó a mi lado durante todas las desveladas, mi perro Goldi. Gracias por iluminar mis días y cuidar mis noches. Gracias por quererme incondicionalmente.

Fernanda.

# Prefacio

A la mayoría de la gente lo primero que se le viene a la mente al decir la palabra *geometría* son un montón de ecuaciones o problemas llenos de cuentas probablemente tediosas que seguramente le dejaron resolver en algún momento de sus estudios, es decir, generalmente sólo se toma en cuenta la geometría analítica; pero la verdad es que existen muchos otros tipos de geometrías.

Cuando yo llegué a la facultad de ciencias como alumna de la carrera de matemáticas, una de las materias de primer semestre que me dejó maravillada fue “geometría moderna” (que de “moderna” tiene muy poco), pues no se necesita la posición de nuestra figura en el espacio, sus medidas ni comparar distancias, por lo que tampoco necesitamos ecuaciones de rectas, planos, etc. para poder hacer un análisis de éstas, todo lo que necesitamos son axiomas, algunos teoremas y propiedades de nuestras figuras. Esta materia está basada en una rama de las matemáticas llamada *geometría sintética*.

Si el lector no ha tenido la oportunidad de entrar a uno de estos cursos, los ejemplos básicos para ver cómo es esta geometría sería pensar en los teoremas de semejanza de triángulos o el teorema de Pitágoras, incluso con suerte a logrado escuchar de Euclides (325 a.C - 265 a.C), considerado el padre de la geometría, quién en su libro *Los elemetos* demuestra todas sus proposiciones de forma sintética.

Lamentablemente no hay muchos cursos avanzados en la facultad sobre geometría sintética, lo que nos haría llegar a pensar que no podemos llegar a hacer muchas cosas o que no tiene mucha relación con otras áreas de las matemáticas; una de las cosas que quiero mostrar en esta tesis, es que sí podemos lograr cosas avanzadas y que sí tiene relación con áreas como álgebra lineal, teoría de gráficas y combinatoria.

Nos enfocaremos en los elementos llamados *configuraciones*, que son tan sólo un conjunto de puntos y de rectas determinadas por algunos de ellos, por lo que es

importante saber que puntos son colineales y que rectas son concurrentes. Algo que debemos considerar es que usaremos espacios discretos, es decir, únicamente existen en el espacio los puntos que especificamos, ya que es usual pensar que una recta es una sucesión infinita de puntos. Y además, trabajaremos en particular con las configuraciones geométricas, que son las que se pueden dibujar.

El término “configuración” (*Konfigurazion*) fue dado por Theodore Reye (1838-1919) en su libro *Die Geometrie der Lage*, vols.I, II y III, Leipzig, 1909. Y las configuraciones que veremos en particular son la de Desargues (Girard Desargues (1591-1661)) y la de Reye, así como sus generalizaciones.

Acorde con [13] el primer libro de configuraciones que se tiene es *Geometrische Konfigurationen* escrito por Friedrich Levy (1888-1966) en 1929; y el más reciente es *Configurations of points and lines* de Branko Grünbaum (1929-actual) .

*“Hubo una época en que el estudio de las configuraciones estaba considerado como la rama más importante de la geometría”*

-D. Hilbert

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Grupos de 3-Transposiciones . . . . .	3
2.2. Formas . . . . .	7
2.3. Grupos Simpléticos . . . . .	19
<b>3. Espacios Parciales Lineales</b>	<b>21</b>
<b>4. Configuraciones Simpléticas y Ortogonales</b>	<b>27</b>
4.1. Configuraciones Simpléticas . . . . .	37
4.2. Configuraciones Ortogonales . . . . .	45
<b>5. Espacios Duales Afines</b>	<b>67</b>
5.1. Propiedad de Desargues . . . . .	68
5.2. Representación Universal . . . . .	76
5.3. Coclanes . . . . .	79
5.4. Propiedad de Reyé . . . . .	90
<b>6. Diagramas</b>	<b>95</b>
6.1. Existencia de diagramas . . . . .	100
<b>7. Conclusiones</b>	<b>105</b>
<b>8. Apéndice</b>	<b>111</b>
8.1. Teoría de Gráficas . . . . .	111
8.2. Álgebra Lineal . . . . .	112



# Capítulo 1

## Introducción

La idea principal para la realización de esta tesis fue entender, juntar y complementar los cuatro siguientes artículos:

*Diagramas para las configuraciones simplécticas y ortogonales* [1],

*Diagrams for symplectic type configurations* [2],

*Partial linear spaces with dual affine planes* [3],

*Diagrams in categories of partial linear spaces of order two* [4],

todos de H. Cárdenas, E. Lluis, G. Raggi-Cárdenas y R. San Agustín.

Aunque todas las definiciones técnicas aparecen en el capítulo correspondiente con sus referencias, para no extender demasiado el trabajo, supondremos que el lector está familiarizado con el lenguaje básico de las matemáticas, así como las definiciones y resultados básicos de geometría, gráficas y álgebra lineal, de no ser el caso o si se encuentran algunas dificultades en la lectura por conceptos que no definí, el lector puede consultar el Apéndice y para un estudio más profundo puede buscar en las siguientes referencias *Geometry and linear algebra* de I. Kaplasky [6], *Una introducción a la teoría de gráficas* de M.C. Curcó [11] y *Digraphs: Theory algorithms and applications* de J.Bang-Jensen [12] .

A lo largo de la carrera de matemáticas, trabajamos con espacios vectoriales sobre campos de característica diferente a dos. Contrastando, aquí únicamente trabajaremos con espacios vectoriales sobre el campo de elementos  $\{0, 1\}$  denotado por  $\mathbb{F}_2$ , por lo que es necesario familiarizarnos y conocer resultados relacionados con ésto para poder comprender esta tesis; estos resultados se incluirán en el capítulo de los preliminares, en el cuál también incluiremos conceptos y teoremas que nos servirán para demostrar resultados posteriores.

Nuestro objetivo principal es clasificar los espacios de Fischer reducidos sin planos afines, veremos que es posible hacerlo a partir de un diagrama, pero para eso primero debemos comprender ¿qué es un espacio de Fischer?, ¿qué es un diagrama? y ¿qué espacios tienen diagrama? lo cual será nuestra motivación y dará pauta para nuestra clasificación.

La idea de diagrama en relación a los espacios parciales lineales de orden dos y de grupos de 3-transposición aparece en artículos de Fischer, teniendo así, que para establecer el concepto de diagrama, podemos escoger entre grupos o espacios; aquí seguiremos el punto de vista geométrico.

Primero, como estos conceptos no son tan comunes en cursos de la facultad, comenzaremos con las definiciones básicas para entrar en materia, es necesario tener estas definiciones en mente para poder comprender esta tesis.

El procedimiento que seguiremos será: generar espacios parciales lineales a partir de una gráfica para entender el concepto de diagrama, después veremos que espacios tienen diagrama, para así generalizar y contestar las preguntas planteadas desde un punto de vista geométrico pero con herramientas algebraicas. Cabe mencionar que las configuraciones no reducidas se omiten en este trabajo pues los conocimientos para desarrollarlos son demasiados y harían muy extenso este trabajo. Dejando únicamente los espacios parciales lineales de orden dos reducidos. Si se desea obtener información sobre configuraciones no reducidas, el primer artículo que se debe consultar es *Diagrams for symplectic type configurations* de H. Cárdenas, E. Lluís, G. Raggi-Cárdenas y R. San Agustín [2].

En el proceso probaremos que todos los diagramas de un espacio  $P$  tienen la misma cardinalidad, así que podremos definir la dimensión del espacio simpléctico como la cardinalidad de cualquiera de sus diagramas.

Una observación importante es que demostraremos que hay espacios que tienen la misma dimensión pero no son isomorfos; para establecer un isomorfismo es necesario que los espacios tengan la misma cantidad de puntos.

Concluyendo así, que la clasificación buscada, puede darse generándolos a partir de diagramas.

# Capítulo 2

## Preliminares

Uno de los motivos de este capítulo es mostrar desde un punto de vista geométrico los grupos de 3-transposición para ver como se relaciona el álgebra, en particular los grupos, y la geometría. Estos grupos fueron estudiados por Bernd Fischer llegando a resultados importantes en relación a los grupos simples (véase *3-Transposition Groups* de M. Aschbacher [5] pag.1-5).

La parte más importante de este capítulo es la sección 2, basada en *Geometry and linear algebra, a second course* de I. Kaplansky [6] pues se muestra que en espacios vectoriales sobre campos de característica dos sólo hay 2 formas cuadráticas diferentes bajo equivalencia, resultado que nos será muy útil para la clasificación.

### 2.1. Grupos de 3-Transposiciones

**Definición 1.** Sea  $G$  un grupo finito, un conjunto de 3-transposición de  $G$ , es un conjunto  $D$  de involuciones de  $G$ , (es decir elementos de orden 2) tal que:

- $D$  es la unión de clases de conjugación de  $G$ .
- $D$  genera a  $G$ .
- Para todo  $a, b \in D$  el orden del producto  $ab$  es 1, 2 o 3.

Si  $D$  es un conjunto de 3-transposición en un grupo finito  $G$ , entonces llamamos a  $(G, D)$  un **Grupo de 3-Transposiciones**.

**Ejemplo 1.** En general, para  $S_n$  el grupo simétrico, la clase  $D$  de transposiciones forma una clase de conjugación de 3-transposiciones, pues:

Para  $t = (x, y)$  y  $s = (u, v)$  tenemos que:



$ts$  es de orden 2, si  $\{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset$

$ts$  es de orden 3, si  $\{x, y\} \cap \{u, v\} \neq \emptyset$

**Ejemplo 2.** Para ver cómo se relaciona esto con las configuraciones, veamos que pasa en  $S_4$ ,  $S_5$  y el caso especial  $S_6$  desde un punto de vista geométrico, estableciendo la relación siguiente:

\* A cada permutación le corresponde un punto.

\* Dos puntos son colineales si las permutaciones correspondientes son conjugadas. ( $\forall a, b \in G$   $a$  y  $b$  son conjugados si  $a = g^{-1} \circ b \circ g$  p.a.  $g \in G$ ).

• Para  $S_4$ :

Tenemos 24 permutaciones en total, las cuales están divididas en 5 clases de conjugación. Sea  $D$  únicamente la clase de conjugación que intercambia dos elementos, es decir, la clase siguiente:  $(ab)$ .

Utilizaremos la notación siguiente para los conjugados:

$$(ab)^{(ac)} = (ac)^{-1}(ab)(ac) = (cb).$$

De donde, obtenemos que:

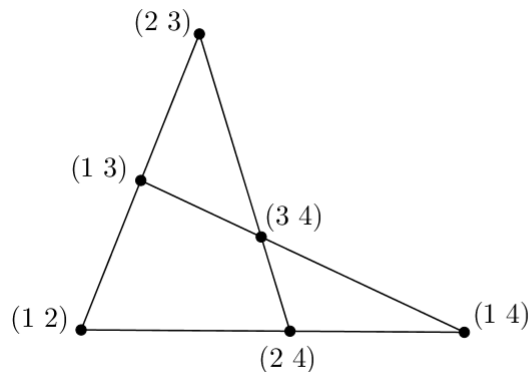
$$(1\ 2)^{(1\ 3)} = (2\ 3),$$

$$(1\ 2)^{(2\ 3)} = (1\ 3) \quad y$$

$$(1\ 3)^{(2\ 3)} = (1\ 2)$$

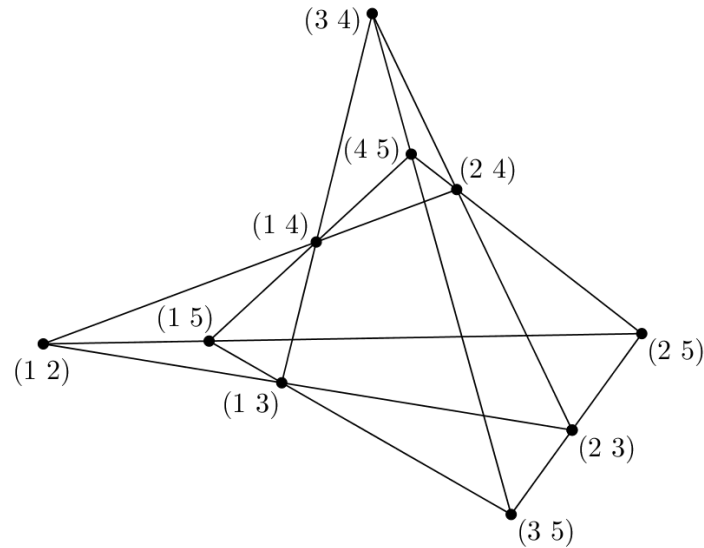
Es decir,  $(1\ 2)$ ,  $(1\ 3)$  y  $(2\ 3)$  son colineales.

Siguiendo el mismo procedimiento con los demás puntos, formamos un cuadrilátero completo.



• Para  $S_5$ :

Tenemos 120 permutaciones en total, divididas en 7 clases de conjugación. Análogamente, sea  $D$  únicamente la clase de conjugación que intercambia dos elementos  $(ab)$ . Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, obtenemos la configuración de Desargues: dos triángulos en perspectiva axial y central.



- Para  $S_6$ :

Tenemos 720 permutaciones divididas en 11 clases de conjugación. Aquí tenemos un caso especial pues  $D$  puede ser la clase de conjugación de las transposiciones  $(ab)$  o puede ser la clase de conjugación de la triple transposición, es decir  $(ab)(cd)(ef)$ . Siguiendo con el mismo procedimiento de los casos anteriores, la clase de las transposiciones genera a la configuración de la figura 2.1 y la clase de la triple transposición genera a la configuración de la figura 2.2.

Podemos observar que aunque sean distintas clases de conjugación, la configuración generada es la misma; desde el punto de vista algebraico ésto se debe a que  $S_6$  es el único grupo simétrico con automorfismos exteriores, para una mayor referencia véase en [9]. Mientras que desde el punto de vista geométrico, que es el que nos interesa, simplemente podemos establecer un isomorfismo entre configuraciones, es decir, establecer una función que mande puntos en puntos, rectas en rectas y que preserve la relación de incidencias.

En ambos casos la configuración generada es la configuración de Desargues generalizada; dos tetraedros en perspectiva.

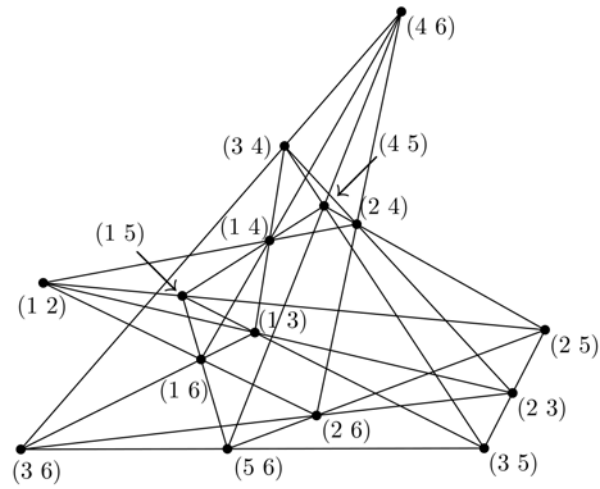


Figura 2.1: Configuración generada por las transposiciones.

$$\begin{array}{ll}
 a = (12)(34)(56) & i = (16)(23)(45) \\
 b = (13)(26)(45) & j = (14)(23)(56) \\
 c = (16)(24)(35) & k = (16)(25)(34) \\
 d = (15)(23)(46) & l = (12)(35)(46) \\
 e = (14)(25)(36) & m = (12)(36)(45) \\
 f = (15)(24)(36) & n = (15)(26)(34) \\
 g = (13)(25)(46) & o = (13)(24)(56) \\
 h = (14)(26)(35) &
 \end{array}$$

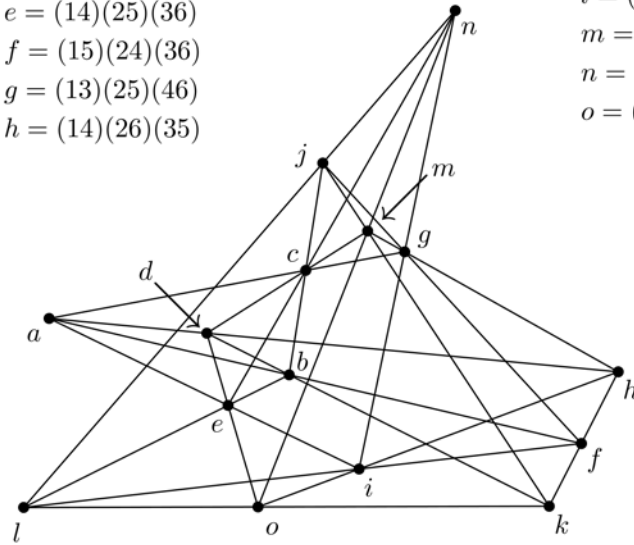


Figura 2.2: Configuración generada por la clase de la triple transposición.

## 2.2. Formas

Consideremos a  $V$  es un espacio vectorial  $n$ -dimensional sobre  $F$  y  $\theta$  un automorfismo de  $F$  de orden 1 ó 2, entonces:

**Definición 2.** Una **Forma Sesquilineal** en  $V$  respecto a  $\theta$  es una transformación:

$$f : V \times V \rightarrow F \text{ tal que } \forall x, y, z \in V \text{ y } \forall a \in F :$$

$$\begin{aligned} f(x + y, z) &= f(x, z) + f(y, z) & f(x, y + z) &= f(x, y) + f(x, z) \\ f(ax, y) &= af(x, y) & f(x, ay) &= a^\theta f(x, y) \end{aligned}$$

Se dice que si  $\theta = Id$  la forma es **Bilineal**. A  $f(x, y)$  se le puede denotar como  $(x, y)$  o  $x \cdot y$ , en la mayoría de este trabajo usaremos la segunda.

**Definición 3.** Dada la forma,  $\forall x, y \in V$  decimos que:

1. Es **Simétrica**, si es bilineal y  $x \cdot y = y \cdot x$ .
2. Es **Antisimétrica**, si es bilineal y  $x \cdot y = -(y \cdot x)$ .
3. Es **Simétrica Hermitiana**, si  $\theta$  es involución y  $x \cdot y = (y \cdot x)^\theta$ .

**Observación 1.** Consideremos una forma bilineal Antisimétrica.

Sea  $x = y$  entonces,  $x \cdot x = -(x \cdot x)$ , de donde  $2(x \cdot x) = 0$ .

- Si  $\text{Car}(F) \neq 2$  entonces,  $x \cdot x = 0$ .
- Si  $\text{Car}(F) = 2$  entonces, no podemos hacer esa deducción.

Más aún, la Simetría es equivalente la Antisimetría, pues:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= y \cdot x \\ x \cdot y - (y \cdot x) &= 0 \\ x \cdot y + (y \cdot x) &= 0 \\ x \cdot y &= -(y \cdot x) \end{aligned}$$

Con lo que surge la definición siguiente:

**Definición 4.** Dada una forma bilineal, decimos que es **Alternante** si  $\forall x \in V \quad x \cdot x = 0$ .

Con lo que concluimos lo siguiente:

- Si la  $\text{Car}(F) \neq 2$  entonces, Antisimetría es equivalente a Alternancia.
- Si la  $\text{Car}(F) = 2$  entonces, Antisimetría es equivalente a Simetría.

**Definición 5.** Dada una forma bilineal, decimos que  $x$  es **Ortogonal** a  $y$  si  $(x \cdot y) = 0$ . Denotado por  $x \perp y$ .

Si  $W$  es un subespacio de  $V$  ( $W \leq V$ ), llamamos **Complemento ortogonal de  $W$**  al conjunto:  $W^\perp := \{v \in V \mid (v \cdot w) = 0 \quad \forall w \in W\}$ .

Mientras que al complemento ortogonal de todo el espacio ( $V^\perp$ ), se le llama **Radical del espacio**.  $\text{Rad}(V) := \{v \in V \mid (v \cdot w) = 0 \quad \forall w \in V\}$ .

**Observación 2.**  $W^\perp$  también es un subespacio de  $V$ .

**Definición 6.** Decimos que la forma es **No degenerada** si  $\text{Rad}(V) = \{\bar{0}\}$ .

**Definición 7.** Dada una forma, decimos que:

1. Es **Ortogonal**, si es simétrica y no degenerada.
2. Es **Simpléctica**, si es antisimétrica y no degenerada.
3. Es **Unitaria**, si es simétrica hermitiana y no degenerada.

**Definición 8.** A un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita, junto con una forma simpléctica  $\cdot : V \times V \rightarrow F$  se le llama **Espacio Simpléctico** y se denota por la pareja  $(V, \cdot)$ .

**Definición 9.** Una **Forma Cuadrática** es una aplicación  $q : V \rightarrow F$  donde  $V$  es un espacio vectorial  $n$ -dimensional tal que  $\bar{x} \mapsto \bar{x}^t A \bar{x}$ , con  $A$  una matriz cuadrada, simétrica y de orden  $n$ . A esta matriz se le conoce como la matriz asociada de la forma cuadrática.

Es decir,

$$(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (2.1)$$

Lo cual, nos genera un polinomio homogéneo de grado 2 y  $n$  variables.

Por tanto, la palabra “forma” es sinónimo de “polinomio homogéneo”.

En 2 variables la forma está dada por la expresión  $ax^2 + bxy + cy^2$ .

Mientras que en general, para  $n$  variables podemos escribir  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ , pero debemos tener cuidado, pues nosotros trabajaremos con espacios vectoriales sobre campos de característica 2, así que si usamos  $A$  una matriz simétrica, es decir,  $a_{ij} = a_{ji}$  entonces, todos los términos cruzados quedarían eliminados.

El procedimiento usual para arreglar ésto es tomar en la suma lo siguiente:

- $a_{ij} = a_{ji}$ , si  $\text{Car}(F) \neq 2$ .
- $a_{ij}$  tal que  $i \leq j$ , si  $\text{Car}(F) = 2$ .

Una manera aún mejor de arreglar el problema es directamente pensar en el espacio vectorial  $V$  con una base  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .

Le asociaremos a cualquier vector  $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$ , el número en el campo  $F$  siguiente:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = q(x).$$

De donde la función  $q$  tiene las propiedades siguientes:

1.  $q(cx) = c^2 q(x) \ \forall c \in F, x \in V$ .
2. La función  $(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$  es bilineal.

*Demostración.* La siguiente demostración puede parecer algo tediosa pero todo se sigue directamente de la definición de  $q$  y de las propiedades del campo.

1. Sean  $c \in F$  y  $x \in V$ .

P.D.  $q(cx) = c^2 q(x)$ .

$$\begin{aligned}
q(cx) &= q(c(x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n)) \\
&= q(cx_1u_1 + cx_2u_2 + \cdots + cx_nu_n) \\
&= a_{11}c^2x_1^2 + a_{12}c^2x_1x_2 + \cdots + a_{nn}c^2x_n^2 \\
&= c^2\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j\right) \\
&= c^2q(x).
\end{aligned}$$

2. Sean  $x, y \in V$  y  $\alpha \in F$ .

Para la linealidad de la primer entrada:

• P.D.  $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$ .

Por una parte se tiene que:

$$\begin{aligned}
(x + z, y) &= q((x + z) + y) - q(x + z) - q(y) \\
&= q((x_1 + z_1 + y_1)u_1 + \cdots + (x_n + z_n + y_n)u_n) \\
&\quad - q((x_1 + z_1)u_1 + \cdots + (x_n + z_n)u_n) \\
&\quad - q(y_1u_1 + \cdots + y_nu_n) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} [(x_i + z_i + y_i)(x_j + z_j + y_j) - (x_i + z_i)(x_j + z_j) - y_iy_j] \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_ix_j + x_iz_j + x_iy_j + z_ix_j + z_iz_j + z_iy_j + y_ix_j + \\
&\quad + y_iz_j + y_iy_j - x_ix_j - x_iz_j - z_ix_j - z_iz_j - y_iy_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_iy_j + z_iy_j + y_ix_j + y_iz_j).
\end{aligned}$$

Y por otra parte, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(x, y) + (z, y) &= q(x, y) - q(x) - q(y) + q(z, y) - q(z) - q(y) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} ((x_i + y_i)(x_j + y_j) - x_i x_j - y_i y_j + (x_i + y_i)(x_j + y_j) \\
&\quad - z_i z_j - y_i y_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (z_i z_j + z_i y_j + y_i y_j + x_i x_j + x_i y_j + y_i x_j + y_i y_j \\
&\quad - z_i z_j - y_i y_j - x_i x_j - y_i y_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (z_i y_j + y_i z_j + x_i y_j + y_i x_j).
\end{aligned}$$

De donde, es claro que  $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$ .

- P.D.  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ .

Por una parte se tiene que:

$$\begin{aligned}
(\alpha x, y) &= q(\alpha x + y) - q(\alpha x) - q(y) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} [(\alpha x_1 + y_1)u_1 + \cdots + (\alpha x_n + y_n)u_n - \alpha^2 x_i x_j - y_i y_j] \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} [(\alpha x_i + y_i)(\alpha x_j + y_j) - \alpha^2 x_i x_j - y_i y_j] \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\alpha^2 x_i x_j + \alpha x_i y_j + \alpha x_j y_i + y_i y_j - \alpha^2 x_i x_j - y_i y_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\alpha x_i y_j + \alpha x_j y_i).
\end{aligned}$$



Y por otra parte, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \alpha(x, y) &= \alpha((q(x + y) - q(x) - q(y))) \\
 &= \alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij} [(x_i + y_i)(x_j + y_j) - x_i x_j - y_i y_j] \\
 &= \alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij} [(x_i x_j + x_i y_j + y_i x_j + y_i y_j) - \alpha x_i x_j - \alpha y_i y_j] \\
 &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (\alpha x_i y_j + \alpha x_j y_i)
 \end{aligned}$$

De donde, es claro que  $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$ .

Análogamente se obtiene la linealidad en la segunda entrada,, teniendo que la función  $(x, y)$  es bilineal.

$\therefore q$  cumple las propiedades 1 y 2. □

Inversamente, si tenemos una función  $q(x)$ , e introducimos una base  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  en el espacio vectorial, entonces podemos ver que  $q(x)$  esta dada por  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ , donde  $q(u_i) = a_{ii}$  y  $u_i \cdot u_j = a_{ij}$ .

De aquí, que tomaremos las propiedades 1 y 2 como las propiedades que definen las formas cuadráticas.

**Observación 3.** Si la característica de  $F$  es distinta de dos podemos notar que las nociones de forma cuadrática y forma simétrica bilineal son esencialmente las mismas, pues:

$$\forall x, y \in V \quad (x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y) = (y, x).$$

Mientras que si la característica de  $F$  es 2, la forma cuadrática es una forma alternante, ya que:

$$\begin{aligned}
 \forall x \in V \quad (x, x) &= q(2x) - q(x) - q(x) \\
 &= 4q(x) - 2q(x) \\
 &= 2q(x) = 0.
 \end{aligned}$$

**Afirmación:** Como consecuencia de que la forma es alternante y no degenerada, tenemos que la dimensión del espacio vectorial es par.

*Demostración.* Notemos que en particular para un espacio vectorial de dimensión 2 sobre un campo de característica 2 con una forma alternante no degenerada, tenemos vectores  $u, v \in V$  tales que  $u \cdot v \neq 0$ , entonces  $u \cdot v = 1$ , teniendo que el subespacio generado por  $\{u, v\}$  tiene la matriz asociada siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En general, sea  $V$  un espacio vectorial  $n$ -dimensional sobre un campo de característica 2 con una forma alternante no degenerada.

Sea  $\{u_1, \dots, u_n\}$  una base, definimos  $u_i \cdot u_j = a_{ij}$ .

Además, por ser alternante tenemos que  $a_{ij} = -a_{ji}$  y  $a_{ii} = 0$ .

Así, como a  $V$  lo podemos ver como la suma directa de subespacios de  $V$ , en particular, espacios de dimensión 2, tenemos que  $V$  tiene una base cuya matriz asociada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde, la dimensión es la suma de las dimensiones de estos subespacios.

$\therefore$  La dimensión de  $V$  es par.  $\square$

A una base de este tipo se le llama **Simpléctica**.

A continuación, veremos la teoría suficiente para demostrar que bajo equivalencia sólo existen dos formas cuadráticas distintas en espacios vectoriales sobre campos de característica 2.

En primer paso para el análisis es tomar una base simpléctica de un espacio vectorial  $V$ , relativa a la forma cuadrática  $\{u_1, v_1, \dots, u_m, v_m\}$ .

Si escribimos a  $V_i$  como el subespacio generado por  $\{u_i, v_i\}$ , entonces  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  es la descomposición relativa de la forma de  $V$ , de donde, si  $z \in V$  y  $z_i$  es su componente en  $V_i$  entonces,

$$q(z) = q(z_1) + \dots + q(z_m)$$

es decir, la suma directa descompone a  $q$  de una manera natural.

**Definición 10.** Sean  $V$  y  $V^*$  espacios cuadráticos sobre el mismo campo con  $q$  y  $q^*$  sus formas cuadráticas respectivamente.

Decimos que  $q$  es **equivalente** a  $q^*$  ( $q \sim q^*$ ) si existe una transformación lineal uno a uno  $\sigma : V \rightarrow V^*$  que preserva la forma, es decir,

$$q(x) = q(\sigma(x)) \quad \forall x \in V.$$

También decimos que  $\sigma$  es una **isometría** de  $V$  sobre  $V^*$ .

Y si  $q$  y  $q^*$  son dos formas diferentes en un mismo espacio vectorial  $V$ , entonces  $q \sim q^*$  si hay un cambio de base de  $V$  tal que  $q$  coincide con  $q^*$  con respecto a la nueva base.

Es decir, sea  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una base para  $V$  y sean

$$q(x_i) = \alpha_i \quad \text{y} \quad q^*(x_i) = \beta_i.$$

Si  $q \sim q^*$  entonces, debemos encontrar una nueva base  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  de  $V$  tal que  $q(y_i) = \beta_i$ . Más aún, si  $(\cdot)$  y  $(\cdot)^*$  son las formas bilineales asociadas a  $q$  y  $q^*$  respectivamente, entonces  $y_i \cdot y_j = (x_i \cdot x_j)^*$ .

Una forma cuadrática definida en un espacio cuadrático  $V$  de dimensión dos está dada por algún polinomio binario cuadrático, a saber,  $ax^2 + bxy + cy^2$  con  $a, b, c \in F$  tal que  $b \neq 0$ .

De donde si  $\{x_1, x_2\}$  es una base para  $V$  y  $\alpha x_1 + \alpha x_2$  es un elemento arbitrario de  $V$ , entonces  $q(\alpha x_1 + \alpha x_2) = a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2$ .

Ahora, note que  $x_1 \cdot x_2 = b$  y  $\{x_1, \frac{x_2}{b}\}$  también es una base para  $V$ . Más aún, como

$$\begin{aligned} x_1 \cdot \frac{x_2}{b} &= \frac{1}{b}(x_1 \cdot x_2) \\ &= \frac{1}{b}(b) = 1 \end{aligned}$$

tenemos que  $\{x_1, \frac{x_2}{b}\}$  es una base simpléctica para  $V$ , de donde

$$\begin{aligned} q\left(\frac{x_2}{b}\right) &= \left(\frac{1}{b}\right)^2 q(x_2) \\ &= \frac{c}{b^2} = d. \end{aligned}$$

Así, si  $\gamma x_1 + \delta \frac{x_2}{b}$  es un elemento arbitrario de  $V^*$ , entonces

$$q\left(\gamma x_1 + \delta \frac{x_2}{b}\right) = a\gamma^2 + \gamma\beta + d\delta^2.$$

Por lo tanto, toda forma binaria es equivalente a una forma definida por un polinomio con coeficiente 1 en el término  $xy$ .

Por ahora consideraremos solo las formas generadas por los polinomios de la forma  $ax^2 + xy + by^2$ , abreviándolo de la manera siguiente  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ; en el caso particular  $xy$  se denotará como la forma cero  $[\mathbf{0}, \mathbf{0}]$ .

Así, podemos reescribir  $q(z) = q(z_1) + \dots + q(z_r)$  como:

$q = [a_1, b_1] \oplus \dots \oplus [a_r, b_r]$  con  $2r = n$  y  $[a_i, b_i]$  la forma cuadrática en  $V_i$ .

De donde,  $q$  es generado por el polinomio siguiente:

$$a_1x_1^2 + x_1y_1 + b_1y_1^2 + a_2x_2^2 + x_2y_2 + b_2y_2^2 + \dots + a_rx_r^2 + x_ry_r + b_ry_r^2.$$

**Teorema 1.** *La suma es conmutativa,  $[a, b] \oplus [c, d] \sim [c, d] \oplus [a, b]$ .*

*Demostración.* Tomemos la base simpléctica  $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$  de  $V$  tal que

$$\begin{aligned} q(x_1) &= a, & q(y_1) &= b, \\ q(x_2) &= c, & q(y_2) &= d, \\ x_1 \cdot y_1 &= x_2 \cdot y_2 = 1, \\ x_1 \cdot x_2 &= x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2 = y_1 \cdot y_2 = 0. \end{aligned}$$

Queremos una base simpléctica  $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$  tal que:

$$\begin{aligned} q(u_1) &= c, & q(v_1) &= d, \\ q(u_2) &= a, & q(v_2) &= b, \\ u_1 \cdot v_1 &= u_2 \cdot v_2 = 1, \\ u_1 \cdot u_2 &= u_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot u_2 = v_1 \cdot v_2 = 0. \end{aligned}$$

Al tomar lo siguiente, se sigue directamente

$$\begin{aligned} u_1 &= x_2, & v_1 &= y_2, \\ u_2 &= x_1, & v_2 &= y_1. \end{aligned}$$

$$\therefore [a, b] \oplus [c, d] \sim [c, d] \oplus [a, b]. \quad \square$$

**Teorema 2.**  $[a, b] \oplus [c, d] \sim [a + c, d] \oplus [a, b + d]$ .

*Demostración.* Sea  $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$  una base simpléctica de  $V$  tal que

$$\begin{aligned} q(u_1) &= a, & q(v_1) &= b, \\ q(u_2) &= c, & q(v_2) &= d. \end{aligned}$$

Es claro que  $\{u_1 + u_2, v_2, u_1, v_1 + v_2\}$  también es una base simpléctica de  $V$ , entonces

$$\begin{aligned} q(u_1 + u_2) &= q(u_1) + q(u_2) + (u_1, u_2) \\ &= a + c + 0 \\ &= a + c. \end{aligned}$$

Análogamente,  $q(v_1 + v_2) = b + d$ .

$$\therefore [a, b] \oplus [c, d] \sim [a + c, d] \oplus [a, b + d]. \quad \square$$

**Teorema 3.** Si  $q$  es una forma cuadrática en un espacio vectorial 2-dimensional sobre un campo de característica 2 tal que existe un vector  $u \in V$ , tal que  $u \neq 0$  y  $q(u) = 0$ , es decir, representa al cero no trivialmente.

Entonces  $q \sim [0, 0]$ .

*Demostración.* Como existe un vector  $u \in V$  tal que  $u \neq 0$  y  $q(u) = 0$ . Completamos  $\{u\}$  a una base simpléctica  $\{u, v\}$ , tal que  $(u, v) = 1$  y  $q(v) = \alpha$  de donde,  $\{u, w\}$  con  $w = v + \alpha u$  también es una base simpléctica ya que:

$$\begin{aligned}(u, w) &= (u, v + \alpha u) \\ &= (u, v) + \alpha(u, u) \\ &= 1 + 0 = 1.\end{aligned}$$

Y por otra parte

$$\begin{aligned}q(w) &= q(v + \alpha u) \\ &= q(v) + \alpha^2 q(u) + \alpha(v, u) \\ &= \alpha + \alpha^2 0 + \alpha = 0.\end{aligned}$$

$\therefore q \sim [0, 0]$ . □

**Corolario 1.**  $[a, 0] \sim [0, 0] \sim [0, b]$  con  $a, b \in F$ .

*Demostración.* Como  $[a, 0] := q(z) = ax^2 + xy$ , si  $\{u, v\}$  es la base entonces,  $q(u) = a$  y  $q(v) = 0$ , es decir, la forma representa al cero no trivialmente. Por tanto, por el teorema anterior  $[a, 0] \sim [0, 0]$ . Análogamente  $[0, b] \sim [0, 0]$ . □

**Observación 4.** A partir de ahora, sólo consideramos el caso especial donde el campo de característica 2 es  $\mathbb{Z}_2$ , el campo de dos elementos  $\{0, 1\}$ . Y simplemente lo denotaremos como  $\mathbb{F}_2$ .

**Observación 5.** Consideremos los espacios vectoriales 2-dimensionales sobre  $\mathbb{F}_2$ , entonces tenemos cuatro posibilidades para las formas cuadráticas no triviales:

$$xy \quad x^2 + xy \quad xy + y^2 \quad x^2 + xy + y^2.$$

El resultado siguiente lo mencionan como comentario en [6] y lo demuestran con el invariante de Arf, pero debido a su importancia en este trabajo, lo pondremos como teorema y lo demostraremos de forma directa.

**Teorema 4.** *Sólo hay dos formas cuadráticas bajo equivalencia en los espacios vectoriales 2-dimensionales sobre  $\mathbb{F}_2$ .*

*Demostración.* Por el corolario 1, tenemos que:

$$xy \sim x^2 + xy \sim xy + y^2.$$

Basta ver que  $xy \approx x^2 + xy + y^2$ ; es decir, P.D.  $[0, 0] \approx [a, b]$ .

Por el teorema 3 basta ver que la forma  $[a, b]$  sólo manda el cero al cero.

Sea  $\{u, v\}$  una base simpléctica para  $V$  tal que:

$$u \cdot v = 1, \quad q(u) = a, \quad q(v) = b \quad \text{con } a, b \in \mathbb{F}_2 \quad \text{y } a, b \neq 0$$

Es decir, por estar en  $\mathbb{F}_2$ , tenemos que  $a = b = 1$ .

Supongamos que  $q(w) = 0$  p.a.  $w \neq 0 \in V$ .

Como  $w = xu + yv$  entonces,

$$\begin{aligned} 0 = q(w) &= q(xu + yv) = x^2q(u) + y^2q(v) + xy \\ &= ax^2 + by^2 + xy \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &0 = 1 \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción.

$\therefore [a, b]$  sólo manda el cero al cero.

Por lo tanto, solo hay dos formas cuadráticas bajo equivalencia en espacios vectoriales de dimensión dos sobre  $\mathbb{F}_2$ . □

En general, una forma cuadrática no degenerada sobre un campo de característica 2 es la suma directa de copias de  $xy$  y  $x^2 + xy + y^2$ .

Más aún, por el teorema 2 tenemos que la suma directa de dos copias de  $x^2 + xy + y^2$  puede ser escrita como la suma directa de dos copias de  $xy$ , pues:  $[a, 0] \oplus [0, b] \sim [a + 0, b] \oplus [a, 0 + b]$ .

Por lo tanto, en general podemos tener la suma directa de copias de  $xy$  o la suma directa de copias de  $xy$  y una copia de  $x^2 + xy + y^2$ .

Hasta aquí, tenemos toda la teoría necesaria para las formas cuadráticas sobre campos de característica 2 para adentrarnos al trabajo.

## 2.3. Grupos Simplécticos

En esta sección incluiremos un teorema que necesitaremos más adelante, pero como se puede notar, la teoría para llegar a él es muy extensa; y como el objetivo principal del trabajo no es este teorema, simplemente lo daremos por hecho. La demostración de la equivalencia, así como resultados relacionados se le deben a J. I. Hall y pueden verse en *Some 3-transposition groups with normal 2-subgroups* [7].

**Teorema 5.** *Sea  $G$  un grupo generado por una clase de conjugación  $D$  de 3-transposiciones del tipo simpléctico. Entonces existe una secuencia exacta como la que sigue:  $1 \rightarrow Q \rightarrow G/Z(G) \rightarrow G^* \rightarrow 1$ , donde  $G^*$  es isomorfo a alguno de los grupos finitarios  $FSym(\Omega)$ ,  $FO(V, q)$  o  $FSp(V, f)$  con  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}_2$ ,  $q$  y  $f$  dos formas no degeneradas de  $V$ . El 2-grupo elemental abeliano  $Q$  es la suma directa de módulos naturales de  $G^*$ . La imagen de  $D$  en  $G/Z(G)$  está determinada como la clase que contiene las transvecciones para cualquier complemento  $G^*$ , excepto cuando  $G$  es isomorfo a  $S_6$ .*

En muchas aplicaciones y en particular en este trabajo, es conveniente tener el teorema en una forma diferente pero equivalente, a saber:

**Teorema 6.** *Sea  $G$  un grupo con centro trivial generado por una clase de conjugación  $D$  de 3 transposiciones de tipo simpléctico. Entonces  $G$  es isomorfo a uno de los grupos  $TS_p(V, f)$  o  $TO(V, q)$  con  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}_2$ , o a  $TSym(\Omega, \Omega')$  para conjuntos disjuntos  $\Omega$  y  $\Omega'$ .*

*La clase  $D$  está únicamente determinada como la clase de transvección simpléctica de  $G$  excepto cuando  $|\Omega| = 6$  y  $\Omega' = \emptyset$ , en ese caso  $TSym(\Omega, \Omega')$  es  $S_6$ .*





# Capítulo 3

## Espacios Parciales Lineales

La primer pregunta que debemos resolver es ¿qué es un espacio parcial lineal?, aquí se muestra como se ven algunos, así como definiciones básicas para desarrollar el trabajo; es importante recordarlas.

**Definición 11.** Un **Espacio Parcial Lineal** es una pareja  $(X, \mathcal{L})$ , donde  $X$  es un conjunto cualquiera y  $\mathcal{L}$  es una colección de subconjuntos de  $X$  tal que  $\forall x, y \in X$  con  $x \neq y$ , los dos están en a lo más un elemento de  $\mathcal{L}$ .

**Ejemplo 3.** Los puntos y las rectas de un plano proyectivo  $PG(V)$  generado por un espacio vectorial de dimensión 3 sobre  $F$ , forman un espacio parcial lineal, pues cualesquiera dos puntos están sobre una recta.

**Definición 12.** Un **Espacio Parcial Lineal de orden 2** es la pareja  $(X, \mathcal{L})$ , donde a los elementos de  $X$  les llamaremos puntos y a los de  $\mathcal{L}$  rectas con las propiedades siguientes:

- Cada recta contiene 3 puntos
- 2 rectas son ajenas o se intersectan en un sólo punto

La notación usual para este tipo de espacios es:  $\mathbf{P}$

**Definición 13.** Decimos que dos puntos distintos son **colineales** si están sobre la misma recta.

**Ejemplo 4.** Es fácil darnos cuenta que en algún momento de la carrera estuvimos familiarizados con estos espacios, como los siguientes: el plano de Fano, la configuración de Pappus y un cuadrilátero completo, los cuales se observan en la figura 3.1.

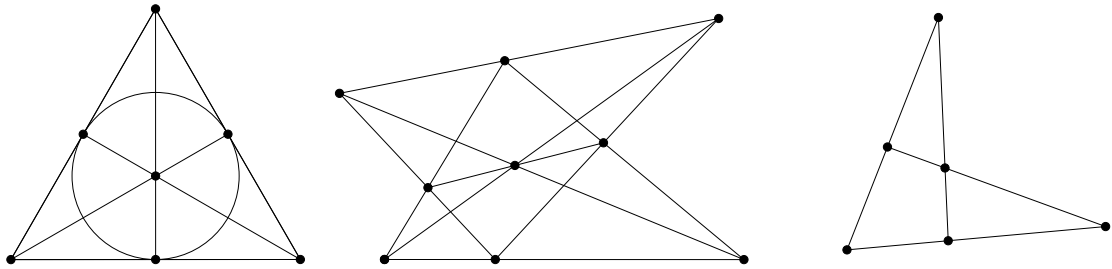


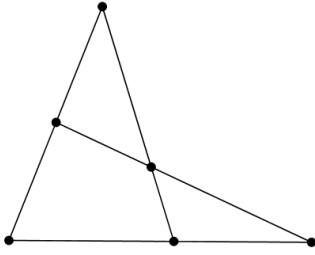
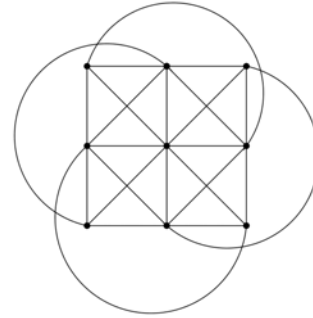
Figura 3.1: Fano, Pappus, Cuadrilátero completo.

**Definición 14.** Un **subespacio**  $Q$  de un espacio  $P$  es un subconjunto de puntos de  $P$  tal que si dos puntos de  $Q$  están sobre una recta, entonces el tercer punto de la recta también está en  $Q$ . (Lo que en geometría proyectiva se conoce como conjunto lineal).

**Definición 15.** Un **plano** en  $P$  es el subespacio generado por 2 rectas que se intersectan.

**Definición 16.** Un **Espacio de Fischer** es un espacio parcial lineal de orden 2 tal que:

Si  $l, m$  son dos rectas distintas que se intersectan en un punto, entonces el subespacio generado por ellas es isomorfo a un plano dual afín sobre  $\mathbb{F}_2$  (figura 2.2) o a un plano afín sobre  $\mathbb{F}_3$  (figura 2.3).

Figura 3.2: Plano dual afín sobre  $\mathbb{F}_2$ .Figura 3.3: Plano afín sobre  $\mathbb{F}_3$ .

Decimos que un espacio de Fischer es un espacio de **Tipo Simpléctico** si no tiene planos afines, es decir, dos rectas concurrentes generan un plano dual afín sobre  $\mathbb{F}_2$  (figura 2.2).

**Definición 17.** Un espacio  $P$  es **Reducido** si para cualesquiera dos puntos existe una línea que contiene a alguno de ellos y no al otro. Es decir,  $\forall a, b \in P \exists l \in P$  tal que  $a \in l$  y  $b \notin l$ .

**Ejemplo 5.** Un plano dual afín y Reyé (figura 2.4) no son reducidos.

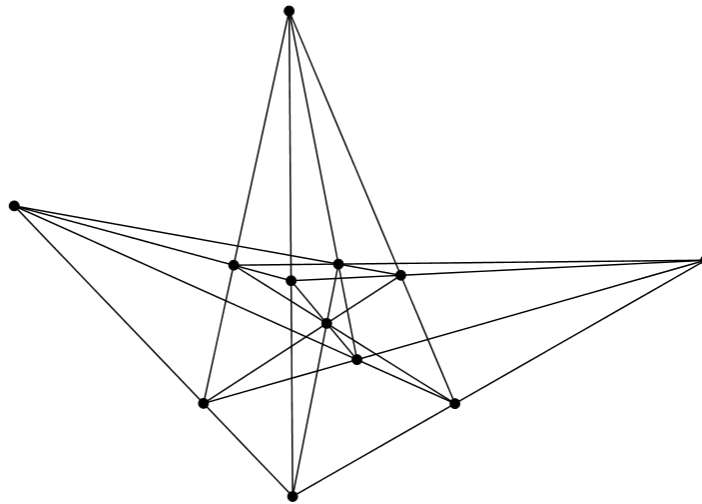


Figura 3.4: Configuración de Reyé.

Notemos que si tenemos un espacio parcial lineal  $P$ , éste o cualquier subconjunto de él tienen una estructura de gráfica cuando definimos a los puntos como vértices en la gráfica y a las aristas como pares de puntos colineales en  $P$ , es decir, le asociamos su **gráfica de colinealidad**, figura 3.5.

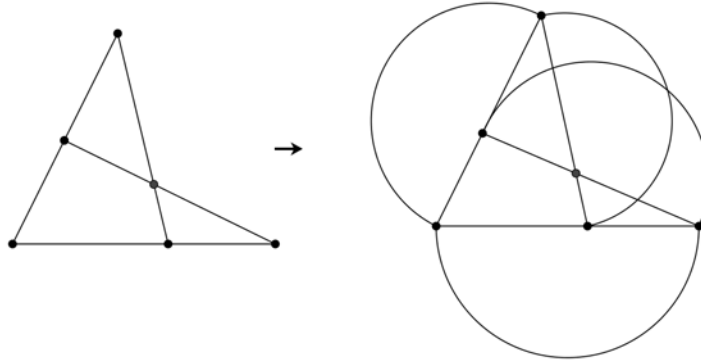


Figura 3.5: Espacio parcial lineal y su gráfica de colinealidad asociada.

**Observación 6.** *A partir de ahora, usando la noción usual de conexidad, consideraremos únicamente espacios conexos.  $P$  es conexo si su gráfica de conexidad también lo es.*

**Definición 18.** *Sean  $P, P'$  dos configuraciones, decimos que  $\phi : P \rightarrow P'$  es un **Homomorfismo** de configuraciones si  $\phi : X \rightarrow X$  es una función de puntos en puntos tal que manda rectas en rectas.*

Un **Diagrama de Dynkin** es una gráfica de una sólo componente conexa y con algunas aristas notables, en este trabajo sólo consideraremos los diagramas de Dynkin siguientes:

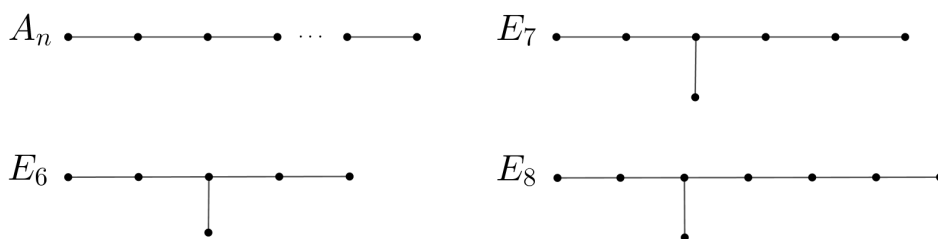


Figura 3.6: Diagramas de Dynkin.



# Capítulo 4

## Configuraciones Simplécticas y Ortogonales

Como se puede ver en [1] a partir de gráficas podemos generar espacios vectoriales y a su vez generar espacios parciales lineales, de donde se verá clara la relación que existe entre las gráficas, el álgebra y la geometría.

El objetivo principal de este capítulo es generar a las configuraciones simplécticas y a sus subconfiguraciones ortogonales, las cuales serán dos familias distintas gracias a que en espacios vectoriales sobre campos de característica dos existen bajo equivalencia solo dos formas cuadráticas diferentes (véase capítulo 2). Una de las cosas importantes es que introduciremos la noción de diagrama desde un punto de vista geométrico. Esta noción será la pauta de nuestra clasificación.

El procedimiento que seguiremos es el siguiente:

1. Consideremos una gráfica finita, sin aristas múltiples y sin lazos  $\Sigma$ .
2. Generamos un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}_2$ , con base los vértices de  $\Sigma$  y con producto interno definido en la base como sigue:

$$\begin{aligned}u \cdot v &= 1 && \text{si } u \text{ y } v \text{ son adyacentes} \\u \cdot v &= 0 && \text{en caso contrario}\end{aligned}$$

este espacio será denotado por  $\mathbb{F}_2\Sigma$ .



3. Ahora, si tomamos como puntos a los vectores de  $\mathbb{F}_2\Sigma$  y como rectas a los subconjuntos  $\{u, v, u + v\}$  tal que  $u \cdot v = 1$ .

Entonces obtenemos una 3-configuración, es decir, un espacio parcial lineal de orden 2, el cual seguiremos denotando como  $\mathbb{F}_2\Sigma$ .

**Lema 1.** *Sea  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{F}_2\Gamma$  y*

$$R = \{u = u_1 + \dots + u_n \mid u_i \in S, u_i \cdot (u_{i+1} + \dots + u_m) = 1, 1 \leq i \leq m-1\}.$$

*Entonces  $R$  es una configuración.*

*Demostración. P.D.* Si hay dos puntos colineales en  $R$  entonces, el tercer punto de la recta también está en  $R$ .

Sean  $u, v \in R$  tal que  $u \cdot v = 1$ .

Haremos la demostración por inducción sobre el número de sumandos de la expresión de  $u$ .

• **Base**  $i = 1$ , es decir,  $u = u_1$ , de donde,  $u \in S$ .

Como  $v \in R$  tenemos que  $v = v_1 + \dots + v_m$ .

Además como  $u \cdot v = 1$  entonces,  $u \cdot (v_1 + \dots + v_m) = 1$ .

Por lo tanto  $u + v = u + v_1 + \dots + v_m \in R$ .

• **Hipótesis de inducción** Supongamos cierto para  $r$  sumandos, es decir,  $(u_1 + \dots + u_r) + (v_1 + \dots + v_m) \in R$ .

• **Paso inductivo** *P.D.*  $(u_1 + \dots + u_{r+1}) + (v_1 + \dots + v_m) \in R$ .

Sea  $u = u_1 + u'_2$  tal que  $u'_2$  tiene  $r$  sumandos y  $u_1 \cdot u'_2 = 1$ .

Como  $u \cdot v = (u_1 + u'_2) \cdot v = u_1 \cdot v + u'_2 \cdot v = 1$  se tienen dos casos:

Caso 1  $u_1 \cdot v = 0$  y  $u'_2 \cdot v = 1$ .

Reescribimos  $u + v = u_1 + (u'_2 + v)$ .

Como  $u'_2$  tiene  $r$  sumandos, por la hipótesis de inducción  $u'_2 + v \in R$ .

Además, como  $u_1 \cdot (u'_2 + v) = 1$  entonces,  $u_1 + (u'_2 + v) = u + v \in R$ .

Caso 2  $u_1 \cdot v = 1$  y  $u'_2 \cdot v = 0$ .

Por base tenemos que  $u_1 \cdot v \in R$ , definimos  $v' = u_1 + v$ .

Entonces  $u'_2 \cdot v' = u'_2 \cdot (u_1 + v) = u'_2 \cdot 1 + u'_2 \cdot v = 1$  y nuevamente por hipótesis de inducción tenemos que  $u'_2 + v' = u + v \in R$ .

$\therefore R$  es una configuración. □

**Lema 2.** Sea  $\Gamma$  un árbol y  $S$  una subgráfica plena de  $\Gamma$  con  $r$  componentes. Sea  $v$  un vértice de  $\Gamma$  adyacente a  $t$  vértices de  $S$ . Entonces:

1. Si  $v \notin S$ , el número de componentes conexas de la subgráfica inducida por  $S \cup \{v\}$  es  $r-(t-1)$ .
2. Si  $v \in S$ , el número de componentes conexas de la subgráfica inducida por  $S \setminus \{v\}$  es  $r+(t-1)$ .

*Demostración.* Sea  $v \in \Gamma$  tal que  $v$  es adyacente a  $t$  vértices de  $\Gamma$ .

Note que los  $t$  vértices a los que es adyacente  $v$ , están en distintas componentes conexas, de lo contrario se formarían ciclos, contradiciendo que  $\Gamma$  es árbol.

1. Si  $v \notin S$ .

En gráfica  $S \cup \{v\}$ , los  $t$  vértices junto con  $v$  forman solo una componente conexa, es decir, se intercambian  $t$  componentes por una sola, entonces tenemos:  $r - t + 1 = r - (t - 1)$  componentes conexas.

2. Si  $v \in S$ .

En la gráfica  $S \setminus \{v\}$  al momento de quitar a  $v$  estaríamos desconectando  $t$  vértices, formando así  $t-1$  componentes nuevas, es decir, en total tenemos  $r+t-1 = r+(t-1)$  componentes conexas.

□

El resultado anterior se puede ilustrar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.** Consideremos una gráfica  $\Gamma$  y un subconjunto  $S$  de  $\Gamma$ . Sean  $v_1, v_2 \in \Gamma$  tal que  $v_1 \notin S$  y  $v_2 \in S$ . Como se puede ver en la figura 4.1.

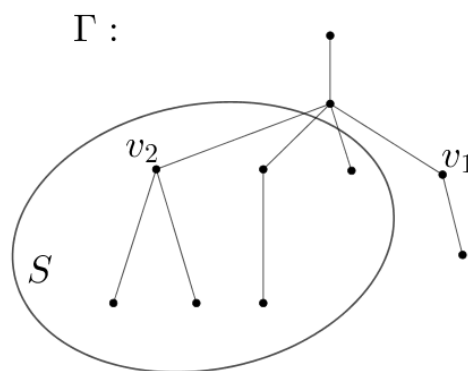
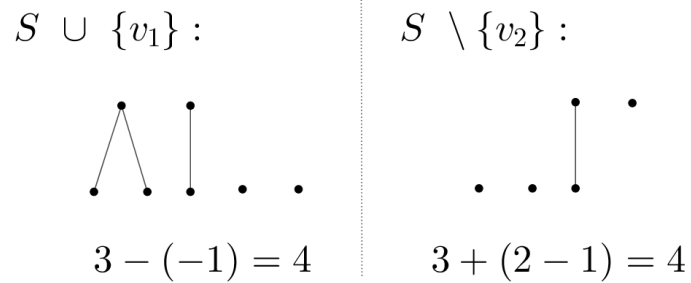


Figura 4.1:  $S$  subgráfica plena de un árbol  $\Gamma$ .

En este ejemplo en particular, es fácil ver que  $S$  tiene 3 componentes conexas y que las subgráficas inducidas por  $S \cup \{v_1\}$  y  $S \setminus \{v_2\}$  tienen 4 y 4 componentes conexas respectivamente pues:



Es importante señalar que en este caso, las dos subgráficas inducidas tienen el mismo número de componentes conexas, pero no siempre es así.

Además, como el espacio vectorial  $\mathbb{F}_2\Gamma$  se puede pensar como el conjunto de subconjuntos de los vértices de  $\Gamma$ , desde el punto de vista de teoría de gráficas, cada vector  $v \in \mathbb{F}_2\Gamma$  induce una subgráfica de  $\Gamma$ .

Denotaremos  $\nu(v)$  al número de componentes conexas de esta gráfica.

Lo cual se ilustra en el ejemplo siguiente:

**Ejemplo 7.** Sea  $\Gamma$  la gráfica siguiente.



Entonces  $\mathbb{F}_2\Gamma = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$

De donde obtenemos las subgráficas y sus componentes conexas correspondientes siguientes:

$$\{a\} \rightarrow \bullet a \rightarrow \nu(\{a\}) = 1$$

$$\{b\} \rightarrow \bullet b \rightarrow \nu(\{b\}) = 1$$

$$\{c\} \rightarrow \bullet c \rightarrow \nu(\{c\}) = 1$$

$$\{a, b\} \rightarrow \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ a \qquad b \end{array} \rightarrow \nu(\{a, b\}) = 1$$

$$\{a, c\} \rightarrow \bullet \qquad \bullet \rightarrow \nu(\{a, c\}) = 2$$

$$\{b, c\} \rightarrow \bullet \text{---} \bullet \rightarrow \nu(\{b, c\}) = 1$$

$$\{a, b, c\} \rightarrow \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \rightarrow \nu(\{a, b, c\}) = 1$$

**Lema 3.** Sea  $\Gamma$  un árbol. Si  $v \in \mathbb{F}_2\Gamma$  y  $a$  es un vértice de  $\Gamma$  entonces,  
 $\nu(v) \equiv \nu(v+a) \pmod{2}$  si y sólo si  $v \cdot a = 1$ .

Donde si  $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  entonces,  $v+a := \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{a\}$  y  $v \cdot a := v_1 \cdot a + \dots + v_n \cdot a$ .

*Demostración.* Sea  $a \in \Gamma$  y  $v \in \mathbb{F}_2\Gamma$  tal que la gráfica inducida por  $v$  tiene  $\nu(v) = k$ .

$\Leftarrow$ ] Supongamos que  $v \cdot a = 1$ .

Como  $v_1 \cdot a + \dots + v_n \cdot a = 1$  entonces,  $a$  es adyacente a un número  $t$  impar de vértices de la subgráfica inducida por  $v$ , de donde  $t-1$  es par.

Entonces por el inciso 1 del lema 2 (anterior), tenemos que:

- Si  $\nu(v) = k$  es impar.

Entonces  $\nu(v+a) = k - (t-1)$  es impar.

$\therefore \nu(v) \equiv \nu(v+a) \pmod{2}$ .

- Si  $\nu(v) = k$  es par.

Entonces si  $\nu(v+a) = k - (t-1)$  es par.

$\therefore \nu(v) \equiv \nu(v+a) \pmod{2}$ .

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $\nu(v) \equiv \nu(v + a) \pmod{2}$ .

Es decir,  $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  tiene las mismas componentes conexas que  $v + a = \{v_1, v_2, \dots, v_n, a\} \pmod{2}$ .

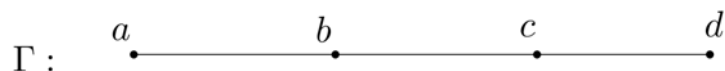
Como  $v = v + a \setminus \{a\}$  entonces por el inciso 2 del lema anterior, tenemos que:  $\nu(v) = k = k + (t - 1) = \nu(v + a) \pmod{2}$ , donde  $t$  es el número de vértices de la gráfica inducida por  $v$  colineales con  $a$ .

Entonces  $t$  debe ser un número impar.

$\therefore v \cdot a = 1$ .

Por lo tanto, de las dos implicaciones se concluye el teorema. □

**Ejemplo 8.** Sea  $\Gamma$  la gráfica siguiente:

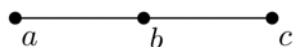


Para no hacer un abuso de notación, al vértice  $a \in \Gamma$  del teorema anterior lo llamaremos  $x$ . Y sólo mostraremos un caso, pues los demás son análogos.

$$\text{Si } v = \{a, b\} \rightarrow \bullet \xrightarrow{a} \bullet \xrightarrow{b} \nu(\{a, b\}) = 1$$

Si  $x = \{c\}$  entonces  $v + x = \{a, b, c\}$

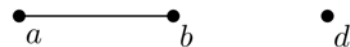
$v + x$  induce la gráfica siguiente :



$$\begin{aligned} \therefore \nu(v) &= 1 = \nu(v + x) \\ v \cdot x &= a \cdot c + b \cdot c = 1 \end{aligned}$$

Si  $x = \{d\}$  entonces  $v + x = \{a, b, d\}$

$v + x$  induce la gráfica siguiente :



$$\begin{aligned} \therefore \nu(v) &= 1 \neq 2 = \nu(v + x) \\ v \cdot x &= a \cdot d + b \cdot d = 0 \end{aligned}$$

**Definición 19.** La subconfiguración de  $\mathbb{F}_2\Gamma$  generada por los vértices de  $\Gamma$ , es decir, por la base del espacio vectorial, es la **configuración**  $C(\Gamma)$ .

Diremos también que  $C(\Gamma)$  está dada o asociada a  $\Gamma$ .

Y también decimos que  $\Gamma$  es un **Diagrama** para la configuración  $C(\Gamma)$ .

El siguiente ejemplo nos dará una idea visual de como se ven estas configuraciones y sus diagramas. Es importante recordar el procedimiento que se da al inicio de este capítulo para generarlas.

**Ejemplo 9.** Consideremos las gráficas siguientes, generemos el espacio vectorial  $\mathbb{F}_2\Gamma$  y después generemos el espacio parcial lineal correspondiente.

Es importante ver que el tercer paso del procedimiento restringe que puntos pertenecen a  $C(\Gamma)$  y de éstos, nos dice cuales son colineales.

Pues como se puede notar en la figura 4.3 y en la figura 4.5, las gráficas dadas tienen el mismo número de puntos pero la adyacencia de estos hace que no se genere la misma configuración.

Además, note que todos los planos de  $C(\Gamma)$  son también planos duales afines.

$$\Gamma : \begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \longrightarrow \mathbb{F}_2\Gamma : \{a, b, c, a+b, a+c, b+c, a+b+c, \emptyset\}$$

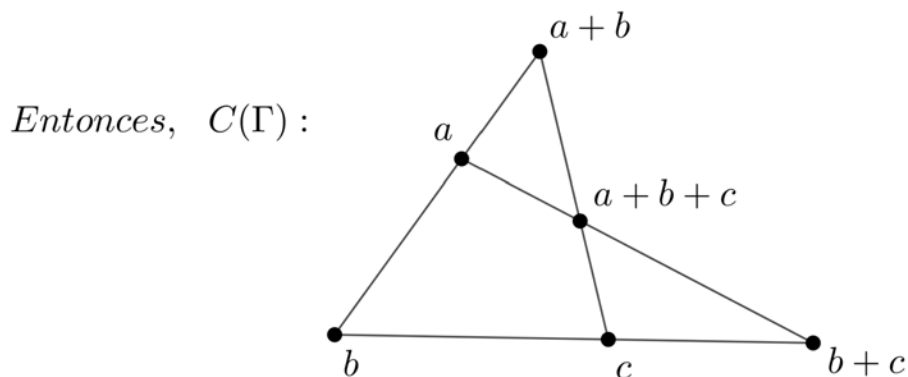


Figura 4.2:  $C(\Gamma)$  es un plano dual afín.

$$\Gamma : \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

$$\mathbb{F}_2\Gamma : \{a, b, c, d, a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d, \\ a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d, a+b+c+d, \emptyset\}$$

Entonces,  $C(\Gamma)$  :

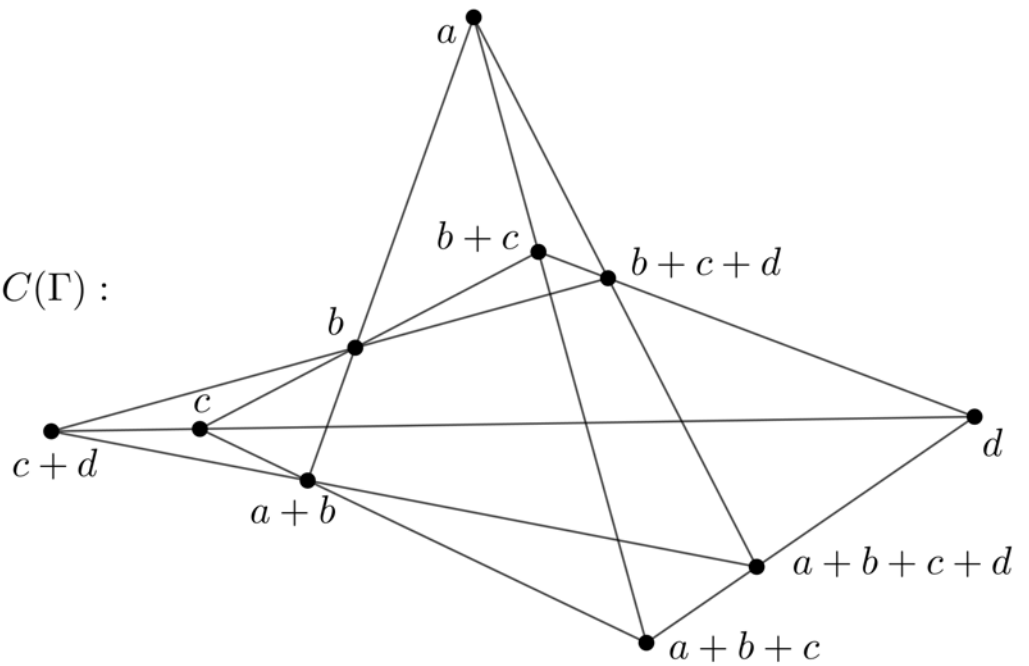


Figura 4.3:  $C(\Gamma)$  es la configuración de Desargues.

Aunque es fácil generar el espacio vectorial, pues los vectores son simplemente las posibles combinaciones que se pueden hacer con los vértices de  $\Gamma$ , puede llegar a ser un poco tedioso tener que hacer muchas combinaciones, en especial por que al aumentar un vértice se duplican las combinaciones posibles. En realidad el paso tres del procedimiento nos ahorra cuentas, pues no necesitamos todos los puntos del espacio vectorial, sólo los que generen rectas. Lo cual se puede ver en la siguiente gráfica.



$$\mathbb{F}_2\Gamma : \{a, b, c, d, e, a+b, a+c, a+d, a+e, b+c, b+d, b+e, c+d, c+e, d+e, a+b+c, \dots, a+c+d, b+c+d, \dots, a+b+c+d, \emptyset\}$$

Entonces  $C(\Gamma)$  :

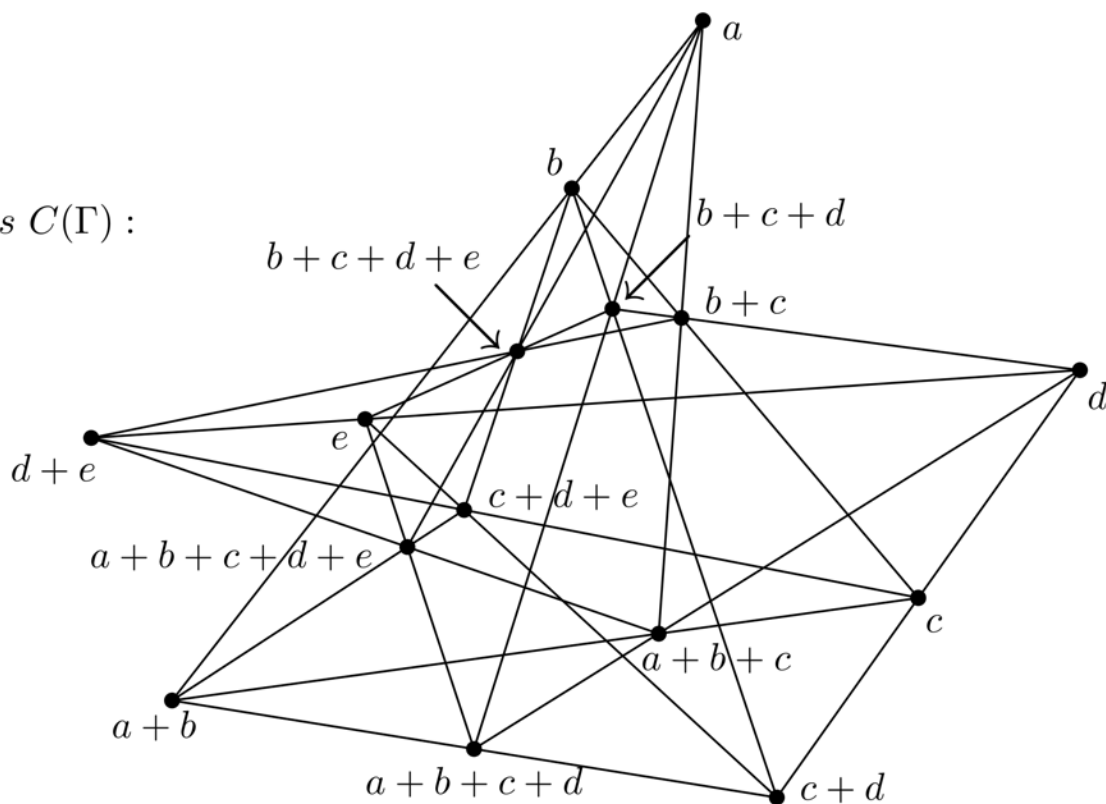


Figura 4.4:  $C(\Gamma)$  es la configuración de dos tetraedos en perspectiva.



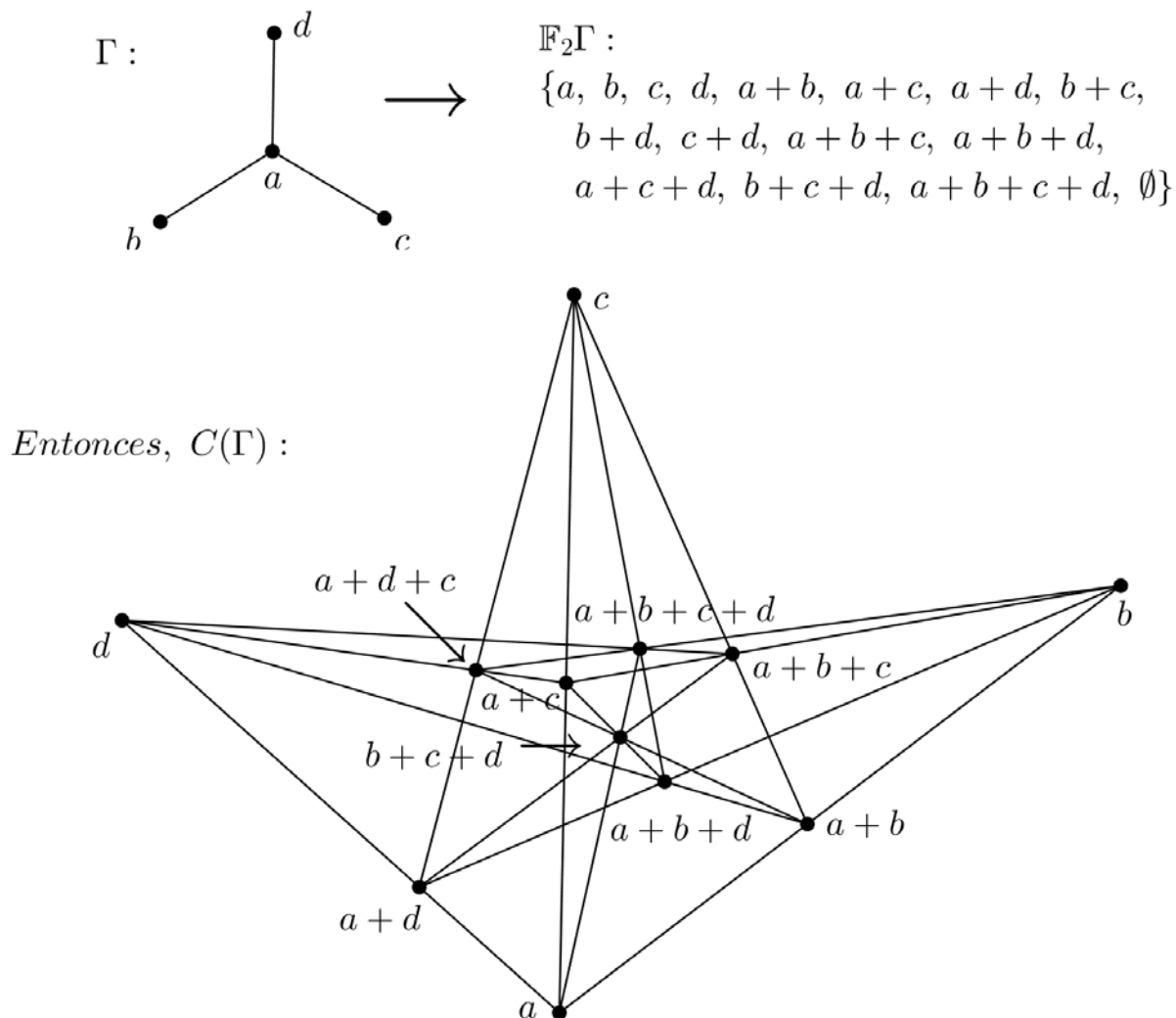


Figura 4.5:  $C(\Gamma)$  es la configuración de Reyé.

**Proposición 1.** Si  $v \in C(\Gamma)$  entonces  $\nu(v)$  es impar.

*Demostración.* Note que por definición de  $C(\Gamma)$  y por lema 1 tenemos que todos los puntos  $u \in C(\Gamma)$  son de la forma  $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  tal que  $u_i \in \Gamma$  y  $u_i \cdot (u_{i+1} + \dots + u_n) = 1$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ .

Haremos la demostración por inducción sobre el número de sumandos de  $u$ .

- **Base**  $u = u_1$ .

Entonces  $\nu(v) = 1$ , es decir, es impar.

- **Hipótesis de Inducción** Supongamos que para  $v = (u_1 + \dots + v_k) \in C(\Gamma)$  con  $k < n$  se tiene que  $\nu(v)$  es impar.

- **Paso Inductivo** Sea  $v = (u_1 + \dots + u_n) \in C(\Gamma)$ .

P.D.  $\nu(v)$  es impar.

Spg. reescribimos  $v = u_1 + w$  con  $w = u_2 + \dots + u_n$ .

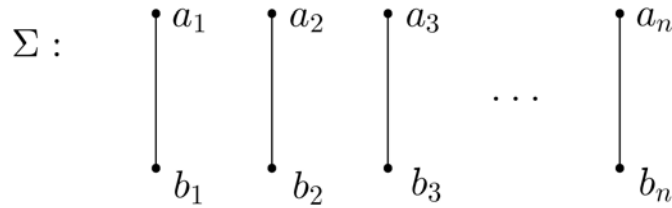
Como  $w \in C(\Gamma)$ , entonces por hipótesis de inducción  $\nu(w)$  es impar.

Además, como  $u_1 \in \Gamma$  y  $u_1 \cdot w = 1$ , entonces por lema 3 tenemos que  $\nu(u_1 + w) \equiv \nu(w) \pmod{2}$ .

$\therefore \nu(v)$  es impar. □

## 4.1. Configuraciones Simplécticas

Sea  $\Sigma$  la gráfica siguiente:



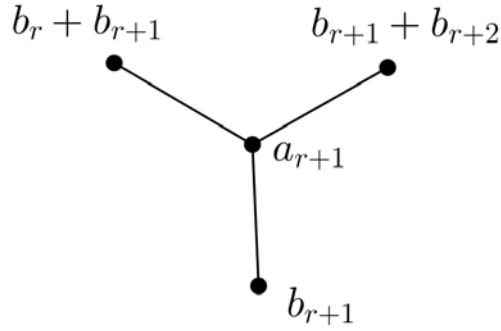
**Observación 7.** Note que al generar la configuración  $\mathbb{F}_2\Sigma$ , tenemos que existen dos componentes conexas:  $\mathbb{F}_2\Sigma \setminus \{0\}$  y  $\{0\}$ , pues del espacio vectorial se sigue que  $0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in V$ .

Además como a cada punto de la gráfica le corresponde un vector en la base del espacio, entonces la configuración  $\mathbb{F}_2\Sigma$  tiene  $2^{2n}$  puntos.

**Definición 20.** A la configuración  $\mathbb{F}_2\Sigma \setminus \{0\}$  se le denomina **configuración simpléctica** y se denota por  $\overline{Sp(2n, 2)}$ .

Es importante ver que por como esta definida la configuración simpléctica tenemos que su cardinalidad es  $2^{2n} - 1$ . Además, como es una subconfiguración de  $\mathbb{F}_2\Sigma$ , entonces todos los planos de  $\overline{Sp(2n, 2)}$ , son duales afines, es decir, es un espacio de Fischer sin planos afines. Más aún, a  $\Sigma$  se le conoce como **base hiperbólica** de  $\overline{Sp(2n, 2)}$ .

**Lema 4.** *La subconfiguración  $D$  de  $\overline{Sp(2n, 2)}$  generada por los puntos que aparecen en la subgráfica siguiente, contiene al punto  $b_r + b_{r+1} + b_{r+2}$ .*



*Demostración.* Como  $a_{r+1}, b_{r+1} \in D$  y  $a_{r+1} \cdot b_{r+1} = 1$ , entonces el punto  $a_{r+1} + b_{r+1} \in D$ .

Como  $b_r + b_{r+1} \in D$  y  $(a_{r+1} + b_{r+1}) \cdot (b_r + b_{r+1}) = 1$ , entonces  $a_{r+1} + b_r \in D$ .

Por otra parte,  $a_{r+1} + b_{r+1} + b_{r+2} \in D$ , de donde:

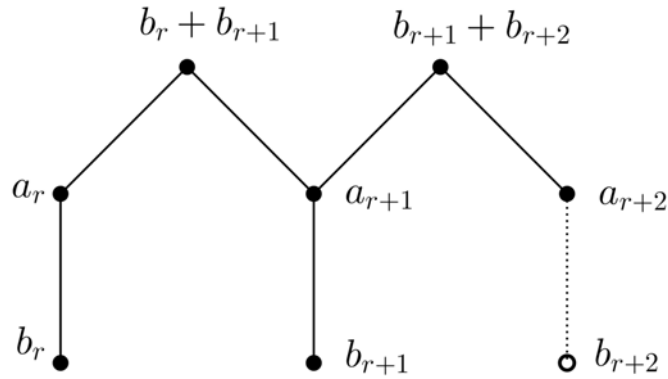
$$\begin{aligned} (a_{r+1} + b_r) \cdot (a_{r+1} + b_{r+1} + b_{r+2}) &= a_{r+1} \cdot a_{r+1} + a_{r+1} \cdot b_{r+1} + a_{r+1} \cdot b_{r+2} + \\ &\quad b_r \cdot a_{r+1} + b_r \cdot b_{r+1} + b_r \cdot b_{r+2} = \\ &= 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Entonces,  $(a_{r+1} + b_r) + (a_{r+1} + b_{r+1} + b_{r+2}) \in D$ .

$\therefore b_r + b_{r+1} + b_{r+2} \in D$ . □

**Lema 5.** *La subconfiguración  $D$  de  $\overline{Sp(2n, 2)}$  generada por los puntos:  $a_r, b_r, b_r + b_{r+1}, a_{r+1}, b_{r+1}, b_{r+1} + b_{r+2}$  y  $a_{r+2}$ , contiene al punto  $b_{r+2}$ .*

*La gráfica siguiente ilustra los siete puntos dados y el punto  $b_{r+2}$  que se obtiene:*



*Demostración.* Consideremos los puntos siguientes:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= b_r + b_{r+1} + b_{r+2} \\
 c_2 &= a_r + b_r + b_{r+1} \\
 c_3 &= a_r + b_r \\
 c_4 &= b_{r+1} + b_{r+2} + a_{r+2} \\
 c_5 &= b_{r+1} + a_{r+1} \\
 c_6 &= b_r + b_{r+1} + a_{r+1} \\
 c_7 &= b_{r+1} + b_{r+2} + a_{r+2}
 \end{aligned}$$

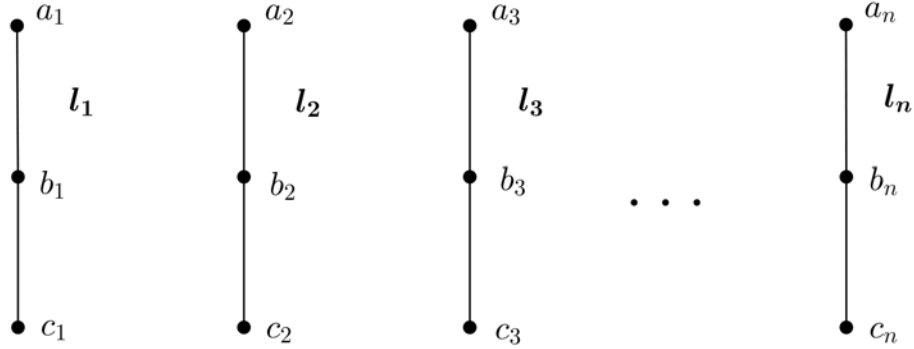
Por el lema anterior, se tiene que  $c_1 = b_r + b_{r+1} + b_{r+2} \in D$  y los demás  $c_i$   $i \in \{2, \dots, 7\}$  también, pues son el tercer punto de las rectas.

Como  $(c_1 + c_2 + \dots + c_{r-1}) \cdot c_r = 1$  con  $2 \leq r \leq 7$ , entonces  $c_1 + c_2 + \dots + c_r \in D$ , en particular  $c_1 + c_2 + \dots + c_7 \in D$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 (b_r + b_{r+1} + b_{r+2}) + (a_r + b_r + b_{r+1}) + (a_r + b_r) + (b_{r+1} + b_{r+2} + a_{r+2}) + (b_{r+1} + \\
 a_{r+1}) + (b_r + b_{r+1} + a_{r+1}) + (b_{r+1} + b_{r+2} + a_{r+2}) = b_{r+2} \in D
 \end{aligned}$$

$\therefore b_{r+2} \in D$ . □

En la configuración simpléctica  $\overline{Sp(2n, 2)}$  denotaremos con  $l_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) a las rectas  $\{a_i, b_i, c_i\}$  con  $c_i = a_i + b_i$  como se ilustra en la figura siguiente.



**Observación 8.** Un punto  $x$  de  $\mathbb{F}_2\Sigma$  está en  $\overline{Sp(2n, n)}$  si y solo si se escribe de la forma  $x = \sum_{i \in I} x_i$  con  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_i \in l_i$ ,  $I \neq \emptyset$

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{F}_2\Sigma$

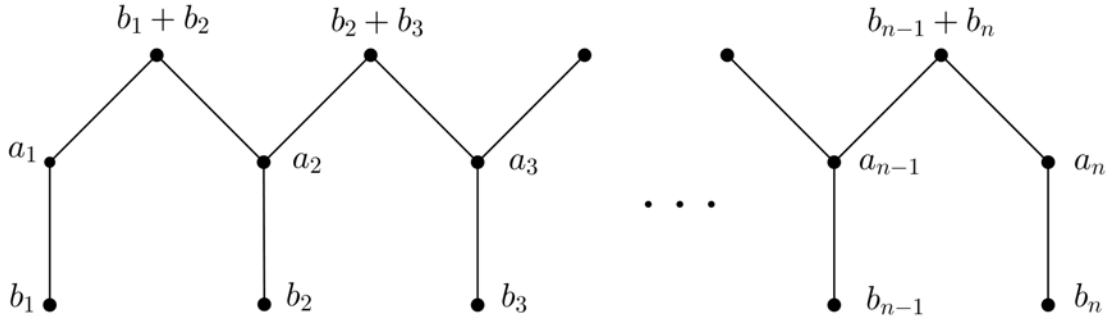
$\Rightarrow$ ] Sea  $x \in \overline{Sp(2n, 2)}$ , como  $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$  es base entonces,  $x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$  con  $\alpha_i, \beta_i \in \{1, 0\} \forall 1 \leq i \leq n$ , más aún, la suma de dos puntos en una misma recta equivale al tercer punto de ésta, entonces  $x = \sum_{i \in I} x_i$  con  $I = \{1, 2, \dots, n\} \neq \emptyset$ .

$\Leftarrow$ ] Sea  $x = \sum_{i \in I} x_i$  con  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $I \neq \emptyset$  para ver que  $x \in \overline{Sp(2n, 2)}$  basta probar que  $x \neq 0$ , pero esto nunca pasa pues  $I \neq \emptyset$ .

$\therefore \overline{Sp(2n, n)} \subset \mathbb{F}_2\Sigma$  y el único elemento en el que difieren es el 0. □

Para una mejor comprensión, cambiaremos la demostración del lema siguiente dada en [1].

**Lema 6.** Los  $3n-1$  puntos de  $\overline{Sp(2n, 2)}$  que se ilustran en el diagrama siguiente, generan, como configuración, a la configuración simpléctica total  $\overline{Sp(2n, 2)}$ .



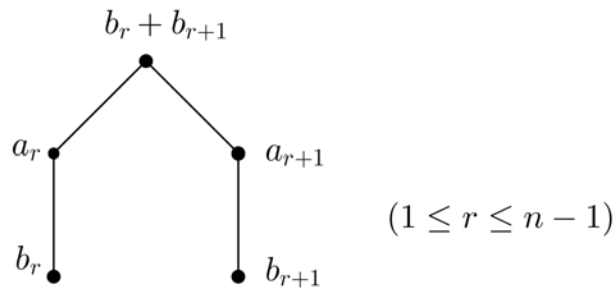
*Demostración.* Por la observación anterior, como los puntos de  $\overline{Sp(2n, 2)}$ , se escriben de la forma  $x = \sum_{i \in I} x_i$  con  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $I \neq \emptyset$ , primero haremos la demostración por inducción sobre la longitud de la suma, es decir, sobre la cardinalidad de  $I$  para índices consecutivos y después se verá para índices no consecutivos.

• **Base**  $|I| = 2$ .

Sean  $I = \{r, r + 1\}$  con  $1 \leq r \leq n - 1$ ,  $l_r = \{a_r, b_r, a_r + b_r\}$  y  $l_{r+1} = \{a_{r+1}, b_{r+1}, a_{r+1} + b_{r+1}\}$ .

Tomemos  $x_r \in l_r$  y  $x_{r+1} \in l_{r+1}$ .

P.D.  $x_r + x_{r+1} \in \overline{Sp(2n, 2)}$ .



Caso 1  $x_r = b_r$  y  $x_{r+1} = b_{r+1}$ .

Como  $b_r + b_{r+1} \in \overline{Sp(2n, 2)} \forall 1 \leq r \leq n - 1$ , no hay nada que demostrar.

Caso 2  $x_r \neq b_r$  y  $x_{r+1} = b_{r+1}$ .

Sea  $x'_r = x_r + b_r$ , como  $b_r + b_{r+1} \in \overline{Sp(2n, 2)}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} x'_r \cdot (b_r + b_{r+1}) &= (x_r + b_r) \cdot (b_r + b_{r+1}) = \\ &= x_r \cdot b_r + x_r \cdot b_{r+1} + b_r \cdot b_r + b_r \cdot b_{r+1} = \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

entonces,  $(x_r + b_r) + (b_r + b_{r+1}) = x_r + b_{r+1} \in \overline{Sp(2n, 2)}$ .

**Caso 3**  $x_{r+1} \neq b_{r+1}$ .

Sea  $x'_{r+1} = x_{r+1} + b_{r+1}$ , por los casos anteriores tenemos que  $x_r + b_{r+1} \in \overline{Sp(2n, 2)}$ , de donde:

$$\begin{aligned} x'_{r+1} \cdot (x_r + b_{r+1}) &= (x_{r+1} + b_{r+1}) \cdot (x_r + b_{r+1}) \\ &= x_{r+1} \cdot x_r + x_{r+1} \cdot b_{r+1} + b_{r+1} \cdot x_r + b_{r+1} \cdot b_{r+1} \\ &= 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

entonces,  $(x_{r+1} + b_{r+1}) + (x_r + b_{r+1}) = x_r + x_{r+1} \in \overline{Sp(2n, 2)}$ .

• **Hipótesis de Inducción** Supongamos que el lema es válido para  $|I| < n$ ; es decir, si  $I = \{s+1, s+2, \dots, s+k\}$  con  $s+k < n$  tenemos que:  $x_{s+1} + x_{s+2} + \dots + x_{s+k} \in \overline{Sp(2n, 2)}$ .

• **Paso Inductivo** Sea  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . *P.D.*  $\sum_{i \in I} x_i \in \overline{Sp(2n, 2)}$ . Definimos  $J = \{r+1, r+2, \dots, s\}$  y  $H = \{s+1, s+2, \dots, n\}$  con  $1 \leq r < s < n$ . Sean

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i \in I, i < r} x_i + x'_r + \sum_{j \in J} x_j \\ z &= x''_r + \sum_{h \in H} x_h \end{aligned}$$

(los cuáles están en  $\overline{Sp(2n, 2)}$  por hipótesis de inducción)

de donde,

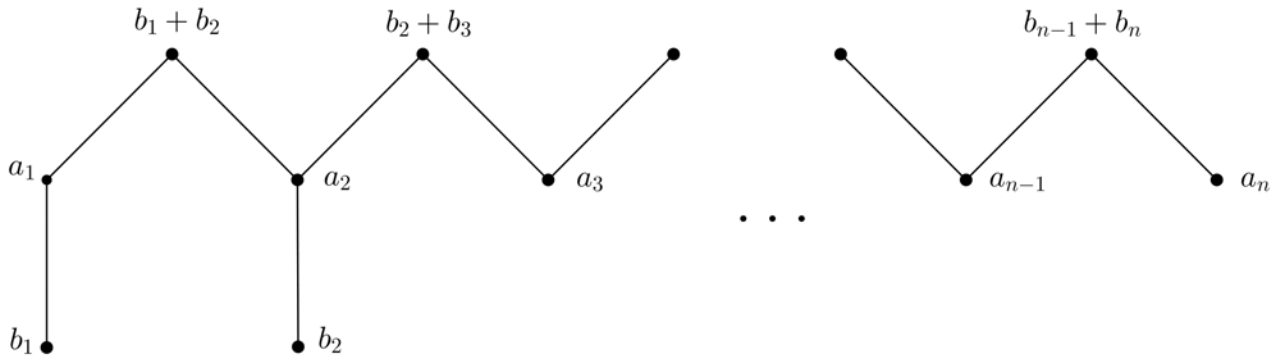
$$\begin{aligned} y \cdot z &= \left( \sum_{i \in I, i < r} x_i + x'_r + \sum_{j \in J} x_j \right) \cdot \left( x''_r + \sum_{h \in H} x_h \right) \\ &= 0 + (x'_r \cdot x''_r) + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } y + z &= \sum_{i \in I, i < r} x_i + (x'_r + x''_r) + \sum_{j \in J} x_j + \sum_{h \in H} x_h \\ &= x_1 + x_2 + \dots + (x'_r + x''_r) + x_{r+1} + \dots + x_s + \dots + x_n \\ &= \sum_{i \in I} x_i \in \overline{Sp(2n, 2)} \end{aligned}$$

Ahora, para índices no consecutivos, basta tomar  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$  y sumarle adecuadamente los  $x_j$  con  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  que no queremos que aparezcan.

Lo que concluye la prueba para cualquier subconjunto  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ .  $\square$

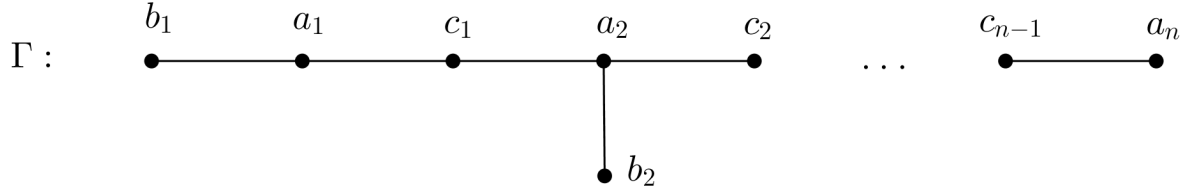
**Proposición 2.** Los  $2n+1$  puntos de  $\overline{Sp(2n, 2)}$  ilustrados como vértices de la gráfica siguiente generan a toda  $\overline{Sp(2n, 2)}$



*Demostración.* Es consecuencia inmediata de los dos lemas anteriores.  $\square$

**Teorema 7.** La configuración  $C(\Gamma)$  definida por el diagrama siguiente, es la configuración simpléctica  $\overline{Sp(2n, 2)}$ .





*Demostración.* Consideremos la función lineal  $\phi : \mathbb{F}_2\Gamma \rightarrow \mathbb{F}_2\Sigma$  definida en la base como sigue:

$$\begin{aligned} \phi(a_i) &= a_i & i &= 1, 2, \dots, n \\ \phi(b_i) &= b_i & i &= 1, 2 \\ \phi(c_i) &= b_i + b_{i+1} & i &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Por como definimos  $\phi$ , claramente se conserva el producto interior y  $\ker \phi = \text{rad}(\mathbb{F}_2\Gamma) = \{0, b_1 + b_2 + c_1\}$ , donde  $\phi$  induce un homomorfismo de configuraciones  $\varphi : C(\Gamma) \rightarrow \overline{Sp(2n, 2)}$ . Por la proposición 2 (anterior),  $\varphi$  es suprayectiva.

Veamos que es inyectiva:

Sean  $u, v \in C(\Gamma)$  tal que  $\varphi(u) = \varphi(v)$

Si  $u \neq v$  entonces  $u = v + r$  con  $r = b_1 + b_2 + c_1 \in \Gamma$ . Como  $v \cdot r = 0$ , por el lema 3  $v(v) \not\equiv v(v+r) \pmod{2}$ . Pero por la proposición 1,  $v$  y  $v+r$  son ambos impares.  $\square$

## 4.2. Configuraciones Ortogonales

Sea  $q$  una forma cuadrática en el espacio vectorial  $\mathbb{F}_2\Sigma$  asociada a su producto interno, es decir, una función  $q : \mathbb{F}_2\Sigma \rightarrow \mathbb{F}_2$  tal que:

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + x \cdot y.$$

**Definición 21.** Sea  $O = O^q = \overline{O^q(2n, 2)} = \{x \in \overline{Sp(2n, 2)} \mid q(x) = 1\}$ .

Si  $x, y \in O$  y son colineales entonces,  $x + y \in O$ , por lo que  $O$  es una subconfiguración de  $\overline{Sp(2n, 2)}$ .

Decimos que  $O^q$  es la **Configuración Ortogonal** determinada por la forma cuadrática  $q$ .

### Observación 9.

- Si  $x = \sum_i x_i$  con  $i \in I \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$  y  $x_i \in l_i$  entonces,  $q(x) = \sum_i q(x_i)$ ; es decir, se eliminan los productos cruzados pues los puntos de  $l_i$  con los puntos de  $l_j$  tal que  $i \neq j$  no son colineales.

- Si  $l$  es una recta de  $\overline{Sp(2n, 2)}$  entonces,  $O^q \cap l$  es toda la recta  $l$  o solamente un punto. En particular para toda recta  $l_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Observación 10.** Recordemos que en los espacios vectoriales sobre campos de característica 2, existen sólo dos formas cuadráticas bajo equivalencia.

Además, la forma cuadrática del espacio es la suma directa de las formas cuadráticas definidas en los subespacios de dimensión dos, más aún, la suma directa de dos copias de  $x^2 + xy + y^2$  puede ser reemplazada por la suma directa de dos copias de  $xy$ , sin cambiar la forma bajo equivalencia. (Véase en el capítulo 1, sección de formas).

Como generamos configuraciones a partir de un espacio vectorial, las propiedades del espacio también serán las propiedades de la configuración, teniendo lo siguiente:

- Si  $\Sigma_1$  es la gráfica donde  $q(a_1) = 1$  y  $q(b_1) = 0$ .

En el espacio vectorial  $\mathbb{F}\Sigma_1$  tendremos :

$$q(c_1) = q(a_1 + b_1) = q(a_1) + q(b_1) + a_1 \cdot b_1 = 1 + 0 + 1 = 0$$

Entonces, por el teorema 3, como  $c_1 \neq 0$  tenemos que  $q \sim [0, 0]$ .

$\therefore O^q = \overline{O^+(2n, 2)}$  (véase figura 4.6).

- Si  $\Sigma_2$  es la gráfica donde  $q(a_1) = 1$  y  $q(b_1) = 1$ .

En el espacio vectorial  $\mathbb{F}\Sigma_2$  tendremos :

$$q(c_1) = q(a_1 + b_1) = q(a_1) + q(b_1) + a_1 \cdot b_1 = 1 + 1 + 1 = 1.$$

Entonces, por el teorema 3, tenemos que  $q \sim [a, b]$ .

$\therefore O^q = \overline{O^-(2n, 2)}$  (véase figura 4.6).

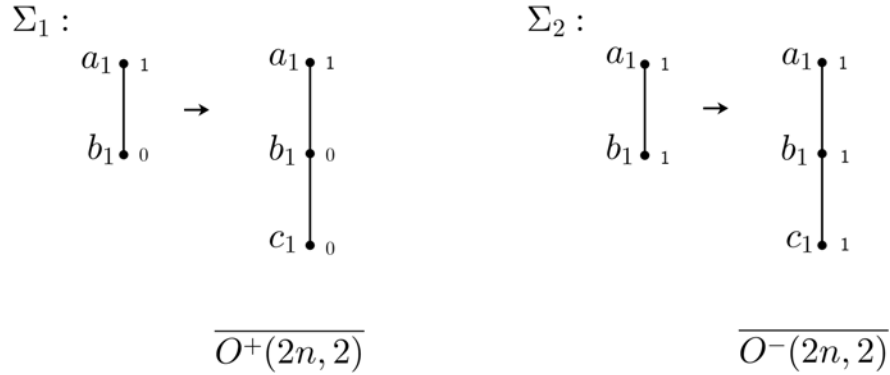


Figura 4.6:  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  desde un punto de vista geométrico.

**Lema 7.** Sea  $O \subset \overline{Sp(2n, 2)}$  con  $2 \leq n$  una configuración ortogonal.

1. Si  $x \in O$  entonces,  $x = y + y'$  con  $y, y' \notin O$ ,  $y \cdot y' = 1$ .
2. Si  $x \notin O$  entonces,  $x = y + y'$  con  $y, y' \in O$ ,  $y \cdot y' = 0$ .

*Demostración.* Lo demostraremos por inducción sobre  $|I|$ .

- **Base**  $|I| = 2$ , sea  $x = x_1 + x_2$ .

donde  $x_1 \in l_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$  y  $x_2 \in l_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ .

Caso 1  $x \in O$ , es decir,  $q(x) = q(x_1) + q(x_2) = 1$ .

Supongamos spg  $q(x_1) = 1$  entonces,  $q(x_2) = 0$ .

Como algún punto de  $l_2$  debe estar en  $O$ , sean spg  $q(y_2) = 1$  y  $q(z_2) = 0$ .

Subcaso 1.1  $q(y_1) = 0$ . Entonces  $q(z_1) = 0$ .

Así, reescribimos  $x = (y_1 + x_2) + z_1$ , de donde:

$$\begin{aligned} q(y_1 + x_2) &= q(y_1) + q(x_2) = 0 + 0 = 0, \\ q(z_1) &= 0 \quad y \\ (y_1 + x_2) \cdot z_1 &= y_1 \cdot z_1 + x_2 \cdot z_1 = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Subcaso 1.2  $q(y_1) = 1$ . Entonces  $q(z_1) = 1$ .

Así, reescribimos  $x = z_2 + (x + z_2)$ , de donde:

$$\begin{aligned} q(z_2) &= 0, \\ q(x + z_2) &= q(x) + q(z_2) + x \cdot z_2 = q(x) + q(z_2) + (x_1 + x_2) \cdot z_2 \\ &= q(x) + q(z_2) + x_1 \cdot z_2 + x_2 \cdot z_2 = 1 + 0 + 0 + 1 = 0 \\ y \quad z_2 \cdot (x + z_2) &= x \cdot z_2 + z_2 \cdot z_2 = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Caso 2  $x \notin O$ , es decir,  $q(x) = q(x_1) + q(x_2) = 0$ .

Subcaso 2.1  $q(x_1) = 1$  y  $q(x_2) = 1$ .

Como  $x_1 \cdot x_2 = 0$  no hay nada que hacer.

Subcaso 2.2  $q(x_1) = 0$  y  $q(x_2) = 0$ .

Como algún punto de  $l_1$  y alguno de  $l_2$  deben estar en  $O$ , spg sean  $q(y_2) = 1$  y  $q(z_2) = 0$ , así como  $q(y_1) = 1$  y  $q(z_1) = 0$ .

Así, reescribimos  $x = (y_1 + z_2) + (z_1 + y_2)$ , de donde:

$$\begin{aligned} q(y_1 + z_2) &= q(y_1) + q(z_2) = 1 + 0 = 1. \\ q(z_1 + y_2) &= q(z_1) + q(y_2) = 0 + 1 = 1 \quad y \text{ finalmente,} \\ (y_1 + z_2) \cdot (z_1 + y_2) &= y_1 \cdot z_1 + z_2 \cdot z_1 + y_1 \cdot y_2 + z_2 \cdot y_2 = 1 + 0 + 0 + 1 = 0. \end{aligned}$$

• **Hipótesis de Inducción** Supongamos que  $\forall m$  tal que  $2 < m < n$ , se cumplen caso 1 y 2.

• **Paso Inductivo** Sea  $x = \sum_i x_i$ ,  $x_i \in l_i$ ,  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $I \neq \emptyset$ . Podemos escribir spg  $x = x_1 + y$ , con  $y = \sum_{i>2} x_i$

Caso 1  $x \in O$ .

Supongamos spg  $q(x_1) = 1$  entonces,  $q(y) = 0$ .

Subcaso 1.1  $q(y_1) = 0$ . Entonces  $q(z_1) = 0$ .

Así, definimos  $x = (y_1 + y) + z_1$ , de donde:

$$\begin{aligned} q(z_1) &= 0, \\ q(y_1 + y) &= q(y_1) + q(y) = 0 + 0 = 0 \quad y \\ (y_1 + y) \cdot z_1 &= y_1 \cdot z_1 + y \cdot z_1 = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Subcaso 1.2  $q(y_1) = 1$ . Entonces  $q(z_1) = 1$ .

Como  $y = \sum_{i>2} x_i$  y  $q(y) = 0$  entonces, por hipótesis de inducción, tenemos que  $y = w_1 + w_2$  con  $w_1, w_2 \in O$  y  $w_1 \cdot w_2 = 0$ .

Así, reescribimos  $x = (y_1 + w_1) + (z_1 + w_2)$ , de donde:

$$\begin{aligned} q(y_1 + w_1) &= q(y_1) + q(w_1) + y_1 \cdot w_1 = 1 + 1 + 0 = 0, \\ q(z_1 + w_2) &= q(z_1) + q(w_2) + z_1 \cdot w_2 = 1 + 1 + 0 = 0, \quad y \\ (y_1 + w_1) \cdot (z_1 + w_2) &= y_1 \cdot z_1 + y_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot z_1 + w_1 \cdot w_2 = 1 + 0 + 0 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Caso 2  $x \notin O$ , es decir,  $q(x) = q(x_1) + q(y) = 0$ .

Subcaso 1  $q(x_1) = 1$  y  $q(y) = 1$ .

Como  $x_1 \cdot y = 0$  no hay nada que hacer.

Subcaso 2  $q(x_1) = 0$  y  $q(y) = 0$ .

Como  $y = \sum_{i>2} x_i$  y  $q(y) = 0$  entonces, por hipótesis de inducción, tenemos que  $y = w_1 + w_2$  con  $w_1, w_2 \in O$  y  $w_1 \cdot w_2 = 0$ .

Así, reescribimos  $x = (x_1 + w_1) + w_2$ , de donde:

$$\begin{aligned} q(x_1 + w_1) &= q(x_1) + q(w_1) + x_1 \cdot w_1 = 0 + 1 + 0 = 1 \\ q(w_2) &= 1 \quad y \text{ finalmente,} \\ (x_1 + w_1) \cdot w_2 &= x_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot w_2 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

□

**Lema 8.** *Todo punto de  $O \subset \overline{Sp(2n, 2)}$ ,  $3 \leq n$  es uno de los dos tipos siguientes:*

1.  $x = x_i + y$  con  $x_i \in l_i$ ,  $y = \sum_{i \neq j} x_j$ ,  $j \in I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $y \notin O$ .
2.  $x = z + z'$  con  $z, z'$  del tipo 1 y  $z \cdot z' = 1$ .

*Demostración.* Sea  $x = \sum_i x_i \in O$ , con  $i \in I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $I \neq \emptyset$ .

Spg sea  $i = 1$ .

Si  $x_1$  aparece entonces,  $x$  es del tipo 1.

Si  $x_i$  no aparece entonces, por el lema anterior  $x = z_1 + z_2$  con  $z_1, z_2 \notin O$  y  $z_1 \cdot z_2 = 1$ .

Así, tomando  $z := x_1 + z_1$  y  $z' := x_1 + z_2$  con  $x_1 \in O$  tenemos que  $z, z'$  son del tipo 1 y  $z \cdot z' = (x_1 + z_1) \cdot (x_1 + z_2) = x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot x_1 + z_1 \cdot z_2 = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$ , pues  $x_1 \cdot z_2$  y  $z_1 \cdot x_1$  son de tipo 1.  $\square$

**Teorema 8.** *Sea  $O$  una configuración ortogonal contenida en  $\overline{Sp(2(n+1), 2)}$  tal que  $l_1 \subset O$  y  $O \cap l_{n+1} = a_{n+1}$ . Entonces,*

$$(O \cap \overline{Sp(2n, 2)}) \cup \{b_n + b_{n+1}, a_{n+1}\} \text{ genera como configuración a } O.$$

*Demostración.* Sea  $C \subseteq O$  la configuración generada por el conjunto anterior.

Note que  $x_1 + b_j \in C$  con  $x_1 \in l_1$ , ya que:

$$q(x_1 + b_j) = q(x_1) + q(b_j) + x_1 \cdot b_j = 1 + 0 + 0 = 1 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n+1\}.$$

Tomemos en particular  $b_1 + b_{n+1}$  y  $c_1 + b_{n+1}$ , de donde:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (b_1 + b_{n+1}) &= a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_{n+1} = 1 + 0 = 1 \\ a_1 \cdot (c_1 + b_{n+1}) &= a_1 \cdot c_1 + a_1 \cdot b_{n+1} = 1 + 0 = 1 \\ b_1 \cdot (b_1 + b_{n+1}) &= b_1 \cdot b_1 + b_1 \cdot b_{n+1} = 0 + 0 = 0 \\ b_1 \cdot (c_1 + b_{n+1}) &= b_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot b_{n+1} = 1 + 0 = 1 \\ c_1 \cdot (b_1 + b_{n+1}) &= c_1 \cdot b_1 + c_1 \cdot b_{n+1} = 1 + 0 = 1 \\ c_1 \cdot (c_1 + b_{n+1}) &= c_1 \cdot c_1 + c_1 \cdot b_{n+1} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

generando un plano dual afín:

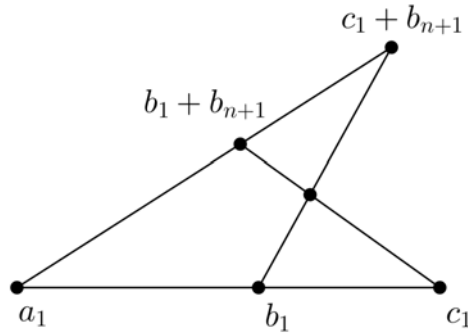


Figura 4.7: Plano dual afín generado

Sea  $x = \sum_{i \in I} x_i$  con  $i \in I \subseteq \{1, 2, \dots, n+1\}$ ,  $x \in O$ . Si en esta suma no aparece  $x_{n+1}$ , entonces  $x \in C$ .

Ahora, supongamos que  $x = w + x_{n+1}$  con  $w = \sum_{i \neq n+1} x_i$ .  
Además  $x \in C$  si  $1 = q(x) = q(w + x_{n+1}) = q(w) + q(x_{n+1})$  de donde  $q(w)$  debe ser 1, teniendo así los siguientes casos:

Caso 1  $x_{n+1} = b_{n+1}$ .

Por el lema anterior  $w$  es de tipo 1 ó de tipo 2.

**Tipo 1:** Entonces  $x = (x_1 + y) + b_{n+1}$  con  $y = \sum_{1 \neq i \neq n+1} x_i$ .  
Sea  $l_1 = \{x_1, x'_1, x''_1\}$ , de donde reescribimos  $x_1$  como  $x_1 = x'_1 + x''_1$ .  
Y así, reescribir  $x = (x'_1 + y) + (x''_1 + b_{n+1})$ .

Note que el primer sumando no tiene a  $x_{n+1}$  entonces está en  $C$  y el segundo sumando también está en  $C$  por lo observado en la figura 4.7.

$$\begin{aligned} \text{Como } (x'_1 + y) \cdot (x''_1 + b_{n+1}) &= x'_1 \cdot x''_1 + x'_1 \cdot b_{n+1} + y \cdot x''_1 + y \cdot b_{n+1} \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

tenemos que la suma está en  $C$ , es decir,  $(x'_1 + y) + (x''_1 + b_{n+1}) = x \in C$ .

**Tipo 2:** Entonces podemos escribir  $w = (x'_1 + y) + (x''_1 + y')$ , con  $y$  y  $y'$  sin  $b_{n+1}$   
y  $(x'_1 + y) \cdot (x''_1 + y') = 1$ .  
Y así, escribir  $x = (x'_1 + y) + (x''_1 + y' + b_{n+1})$ .  
Como los sumandos son de tipo 1, por lo que acabamos de demostrar se tiene que  $x'_1 + y \in C$  y  $x''_1 + y' + b_{n+1} \in C$ . Además

$$\begin{aligned} (x'_1 + y) \cdot (x''_1 + y' + b_{n+1}) &= (x'_1 + y) \cdot (x''_1 + y') + x'_1 \cdot b_{n+1} + y \cdot b_{n+1} \\ &= 1 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

entonces la suma está en  $C$ , es decir,  $x = (x'_1 + y) + (x''_1 + y' + b_{n+1}) \in C$ .

Caso 2  $x_{n+1} = c_{n+1}$ .

Como  $c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$  tenemos que  $x = w + c_{n+1} = (w + b_{n+1}) + a_{n+1}$ . Como  $(w + b_{n+1}) \cdot a_{n+1} = w \cdot a_{n+1} + b_{n+1} \cdot a_{n+1} = 0 + 1 = 1$  y ambos están en  $C$ , entonces  $x \in C$ .

Caso 3  $x_{n+1} = a_{n+1}$ .

Como  $1 = q(x) = q(w) + q(a_{n+1})$  y  $a_{n+1} \in C$  por hipótesis, entonces, en este caso tenemos que  $q(w) = 0$ , de donde, por el caso 2 de lema 7, podemos escribir  $w = u + u'$

con  $q(u) = q(u') = 1$  y  $u \cdot u' = 0$ .

Entonces  $x = (u + b_{n+1}) + (u' + c_{n+1})$ . Según los dos casos anteriores los dos sumandos están en  $C$ . Además

$$\begin{aligned} (u + b_{n+1}) \cdot (u' + c_{n+1}) &= u \cdot u' + u \cdot c_{n+1} + b_{n+1} \cdot u' + b_{n+1} \cdot c_{n+1} \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

entonces  $x \in C$ .

$\therefore (O \cap \overline{Sp(2n, 2)}) \cup \{b_n + b_{n+1}, a_{n+1}\}$  genera como configuración a  $O$ .  $\square$

El siguiente resultado aparece en [1] como una observación pero por su importancia aquí lo expresaremos como teorema, con su demostración correspondiente.

**Teorema 9.**  $O \cong \overline{O^+(2(n+1), 2)}$  si y sólo si  $O \cap \overline{Sp(2n, 2)} \cong \overline{O^+(2n, 2)}$  donde  $O \subseteq \overline{Sp(2(n+1), 2)}$  tal que  $l_1 \subset O$  y  $O \cap l_{n+1} = \{a_{n+1}\}$  y  $O^+$  es la configuración ortogonal determinada por la forma cuadrática  $q$  tal que  $q(a_i) = 1$  y  $q(b_i) = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

*Demostración.*

$\Leftarrow$ ] Por el teorema anterior tenemos que:

Por una parte  $(O \cap \overline{Sp(2n, 2)}) \cup \{b_n + b_{n+1}, a_{n+1}\}$  genera a  $O$ .

Y por otra parte  $\overline{O^+(2n, 2)} \cup \{b_n + b_{n+1}, a_{n+1}\}$  genera a  $\overline{O^+(2(n+1), 2)}$ .

Como  $O \cap \overline{Sp(2n, 2)} \cong \overline{O^+(2n, 2)}$  y le estamos agregando el mismo conjunto  $\{b_n + b_{n+1}, a_{n+1}\}$ , fuera de ellos obtenemos que los generados son isomorfos, es decir,  $O \cong \overline{O^+(2(n+1), 2)}$ .

$\Rightarrow$ ] Como  $O \cong \overline{O^+(2(n+1), 2)}$  se sigue que:

$O \cap \overline{Sp(2n, 2)} \cong \overline{O^+(2(n+1), 2)} \cap \overline{Sp(2n, 2)}$ .

Así, basta ver que  $\overline{O^+(2(n+1), 2)} \cap \overline{Sp(2n, 2)} = \overline{O^+(2n, 2)}$ .

$\supseteq$ ] Sea  $x \in \overline{O^+(2n, 2)}$ .

Por una parte tenemos que  $\overline{O^+(2n, 2)} \subset \overline{Sp(2n, 2)}$ .

Y por otra  $\overline{O^+(2n, 2)} \subset \overline{O^+(2(n+1), 2)}$ , es decir,  $x \in \overline{O^+(2(n+1), 2)}$  y  $x \in \overline{Sp(2n, 2)}$ . Por lo tanto  $x \in \overline{O^+(2(n+1), 2)} \cap \overline{Sp(2n, 2)}$ .

$\subseteq$ ] Sea  $x \in \overline{O^+(2(n+1), 2)} \cap \overline{Sp(2n, 2)}$ .

Entonces  $x \in \overline{O^+(2(n+1), 2)}$  y  $x \in \overline{Sp(2n, 2)}$ .



Como  $x \in \overline{O^+(2(n+1), 2)}$  entonces,  $q(x) = 1$ . Además como  $\overline{O^+(2n, 2)} \subset \overline{Sp(2n, 2)}$  y  $q(x) = 1$ , tenemos que  $x \in \overline{O^+(2n, 2)}$ .  $\square$

**Corolario 2.**  $O \cong \overline{O^-(2(n+1), 2)}$  si y solo si  $O \cap \overline{Sp(2n, 2)} \cong \overline{O^-(2n, 2)}$  donde  $O$  está definido de la misma manera que el teorema anterior.

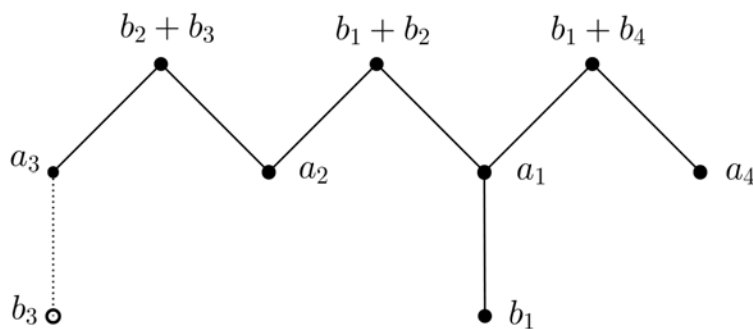
*Demostración.* Note que bajo equivalencia sólo hay dos formas cuadráticas en los espacios vectoriales sobre campos de característica 2, generando así sólo dos tipos de espacios ortogonales  $O^+$  y  $O^-$ .

Así por equivalencia lógica del si y solo si obtenemos:

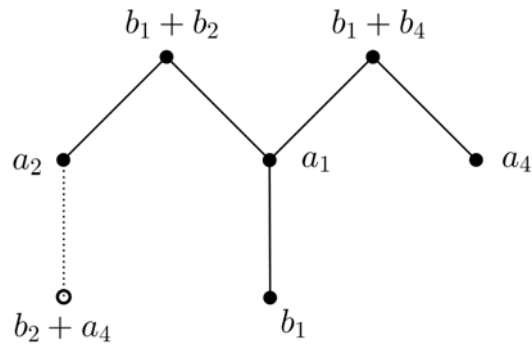
$O \not\cong \overline{O^+(2(n+1), 2)}$  si y solo si  $O \cap \overline{Sp(2n, 2)} \not\cong \overline{O^+(2n, 2)}$ .

$\therefore O \cong \overline{O^-(2(n+1), 2)}$  si y sólo si  $O \cap \overline{Sp(2n, 2)} \cong \overline{O^-(2n, 2)}$ .  $\square$

**Lema 9.** La subconfiguración  $D$  de  $\overline{Sp(8, 2)}$  generada por los vértices la gráfica siguiente contiene al punto  $b_3$ .



*Demostración.* Notemos primero que el punto  $b_2 + a_4$  está en la subconfiguración generada por los puntos de la gráfica siguiente



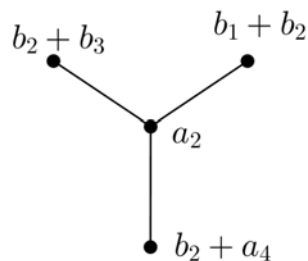
Ya que utilizando el lema 4 con los puntos  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $b_1 + b_2$  y  $b_1 + b_4$  como se muestran en la gráfica anterior, el punto  $b_1 + b_2 + b_4$  está en el generado.

Además el punto  $b_1 + b_4 + a_4$  también está pues es el tercer punto de la recta por  $b_1 + b_4$  y  $a_4$ .

Como  $(b_1 + b_2 + b_4) \cdot (b_1 + b_4 + a_4) = 1$  entonces,

$(b_1 + b_2 + b_4) + (b_1 + b_4 + a_4) = b_2 + a_4$  también está en la subconfiguración.

Ahora, utilizando nuevamente el lema 4 con los puntos  $b_2 + b_3$ ,  $a_2$ ,  $b_1 + b_2$ ,  $b_2 + a_4$ , como se muestra en la gráfica siguiente, tenemos que el punto  $b_1 + b_2 + b_3 + a_4$  también está en la subconfiguración.



Finalmente, consideremos los puntos siguientes:

$$c_1 = b_1 + b_2 + b_3 + a_4$$

$$c_2 = b_1 + a_1 + b_2$$

$$c_3 = a_1 + b_1$$

$$c_4 = b_2 + a_3 + b_3$$

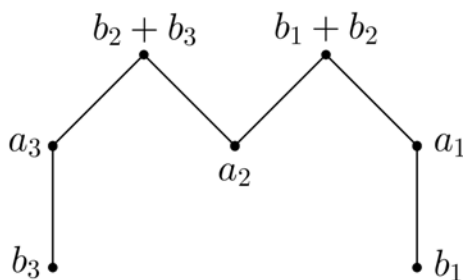
$$c_5 = a_2 + b_2 + a_4$$

$$c_6 = b_2 + a_3 + b_3$$

$$c_7 = b_2 + a_3 + b_3$$

Como  $(c_1 + c_2 + \dots + c_{r-1}) \cdot c_r = 1$  con  $2 \leq r \leq 7$ , entonces  $c_1 + c_2 + \dots + c_r$  también está en la configuración, en particular  $c_1 + c_2 + \dots + c_7 = b_3$  está en la configuración.  $\square$

**Lema 10.**  $D \cap \overline{Sp(6, 2)}$  generada por los vértices de la gráfica siguiente, es la configuración ortogonal  $O^+(6, 2)$ .



*Demostración.* Teniendo en cuenta la observación 10; si  $q$  es la forma cuadrática que vale 1 en  $\underline{a_1}$ ,  $\underline{b_1}$ ,  $\underline{a_2}$ ,  $\underline{a_3}$  y  $\underline{b_3}$  y  $\overline{O^+(6, 2)}$  es la configuración ortogonal, demostremos que  $O^q = \overline{O^+(6, 2)}$ .

Sean  $D_1, D_2, D_3$  los subespacios generados por  $\{a_1, b_1\}$ ,  $\{a_2, b_2\}$ ,  $\{a_3, b_3\}$  y  $q_1, q_2, q_3$  las formas definidas en cada uno respectivamente, de donde :

$$D_1 : q_1 \sim [a, b],$$

$$D_2 : q_2 \sim [0, 0] \quad y$$

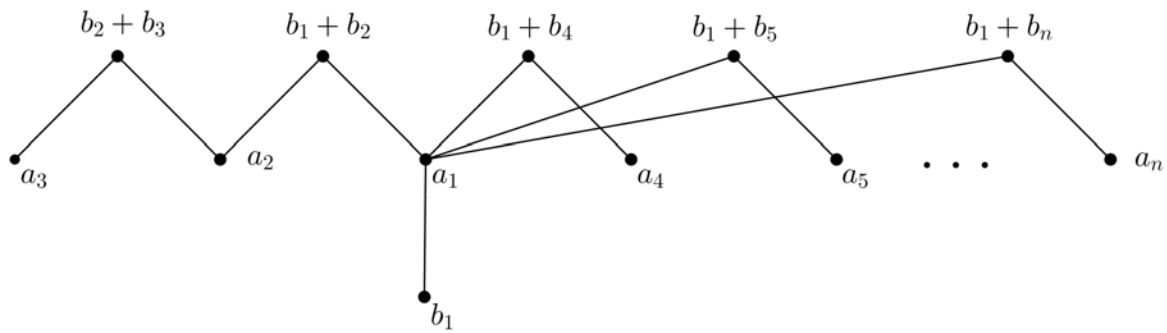
$$D_3 : q_3 \sim [a, b].$$

Entonces  $q = [a, b] \oplus [0, 0] \oplus [a, b] \sim [0, 0] \oplus [0, 0] \oplus [0, 0]$ .

Obteniendo que la configuración es del tipo  $O^+$ ; así la configuración generada por el diagrama está contenida en la configuración ortogonal.

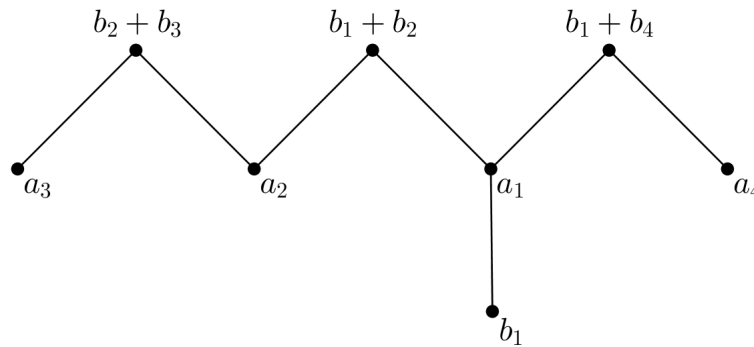
$\therefore$  Las configuraciones son iguales. □

**Proposición 3.** *La subconfiguración de  $\overline{Sp(2n, 2)}$  con  $n \geq 4$  generada por los vértices de la gráfica siguiente, es la configuración ortogonal  $O^+(2n, 2)$ .*



*Demostración.* La demostración se hará por inducción sobre  $n$ .

• **Base**  $n = 4$



Veamos que si la gráfica genera a la configuración  $O^q$  dada por la forma  $q$  tal que vale 1 en  $l_1, l_3, a_2, a_4$  y vale 0 en  $b_2, b_4$ . Entonces  $O^q = \overline{O^+(8, 2)}$ .

Consideremos la gráfica anterior en abstracto y llamémosla  $\Gamma$ . Directamente o por

conteo vemos que  $C(\Gamma)$  tiene 120 puntos.

Por otro lado, la transformación que manda la gráfica abstracta a la concreta es un isomorfismo que conserva el producto escalar.

Además como la imagen de  $\Gamma$  está contenida en  $O$  y  $O$  tiene 120 puntos, entonces  $O^q = \overline{O^+(8, 2)}$ .

• **Hipótesis de inducción** Supongamos que la gráfica genera a la configuración ortogonal  $\overline{O^+(2(n-1), 2)}$ .

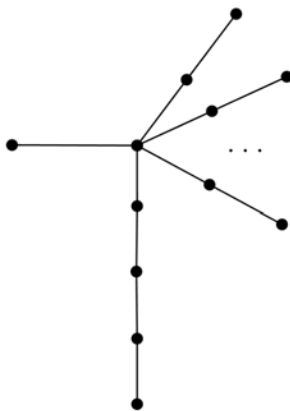
• **Paso inductivo** Por hipótesis de inducción tenemos que:

$\overline{O^+(2(n-1), 2)} \cong O \cap \overline{Sp(2(n-1), 2)}$ , donde  $O \subset \overline{Sp(2n, 2)}$  tal que  $l_1 \subset O$  y  $l_n \cap O = \{a_n\}$ . Por el teorema 9 tenemos que :

$O \cong \overline{O^+(2n, 2)}$  si y solo si  $O \cap \overline{Sp(2(n-1), 2)} \cong \overline{O^+(2(n-1), 2)}$ .

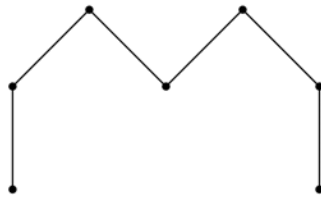
$\therefore O \cong \overline{O^+(2n, 2)}$ . □

**Teorema 10.** La configuración  $C(\Gamma)$  determinada por el diagrama tal que  $n \geq 4$  es la configuración ortogonal  $\overline{O^+(2n, 2)}$ .



*Demostración.* La función que envía los vértices de  $\Gamma$  en los vértices de la gráfica de la proposición anterior, se extiende a un isomorfismo lineal que conserva el producto escalar, de donde, se induce un isomorfismo entre  $C(\Gamma)$  y  $\overline{O^+(2n, 2)}$ .

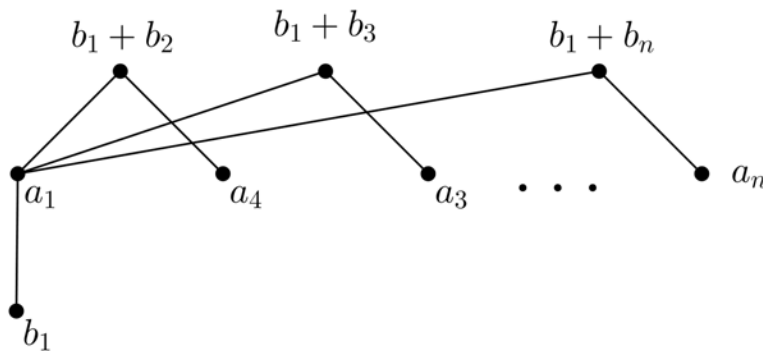
En el caso particular cuando  $n = 3$ , se tiene que  $\overline{O^+(6, 2)}$  está determinado por la gráfica siguiente:



es decir,  $\overline{O^+(6, 2)} = Cay(8)$ .

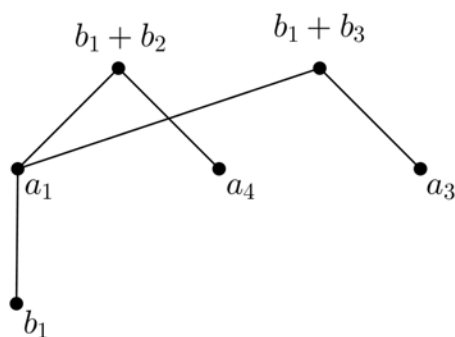
□

**Proposición 4.** La configuración generada en  $\overline{Sp(2n, 2)}$  con  $n \geq 3$  por los vértices de la gráfica siguiente, es la configuración ortogonal  $O^-(2n, 2)$ .



*Demostración.* La demostración se hará por inducción sobre  $n$ .

• **Base**  $n = 3$



Note que la gráfica genera a la configuración ortogonal  $O^q$ , dada por la forma cuadrática  $q$  tal que vale 1 en  $l_1, a_2, a_3$  y vale 0 en  $b_2, b_3$ , la cual es equivalente directamente por definición a la forma cuadrática que genera a  $\overline{O^-(6, 2)}$ .

Basta considerar a la gráfica anterior en abstracto, llamándola  $\Gamma$ , directamente se obtiene que  $C(\Gamma)$  tiene 36 puntos.

Por otro lado, la transformación lineal que manda la gráfica abstracta en la concreta es un isomorfismo que conserva el producto escalar.

Además como la imagen de  $\Gamma$  está contenida en  $O$  y  $O$  tiene 36 puntos, entonces  $O^q = \overline{O^-(6, 2)}$ .

• **Hipótesis de inducción** Supongamos que la gráfica genera la configuración ortogonal  $\overline{O^-(2(n-1), 2)}$ .

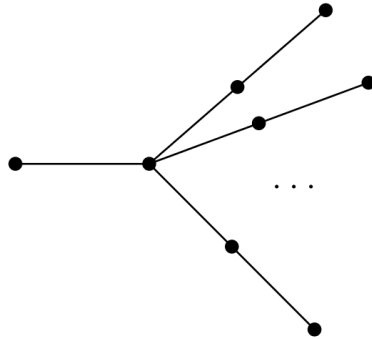
• **Paso inductivo**

Por hipótesis de inducción tenemos que  $\overline{O^-(2(n-1), 2)} \cong O \cap \overline{Sp(2(n-1), 2)}$ , donde  $O \subset \overline{Sp(2n, 2)}$  tal que  $l_1 \subset O$  y  $l_n \cap O = \{a_n\}$ , además por el corolario tenemos que :

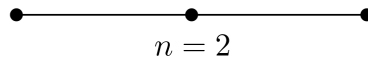
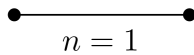
$O \cong \overline{O^-(2n, 2)}$  si y solo si  $O \cap \overline{Sp(2(n-1), 2)} \cong \overline{O^-(2(n-1), 2)}$ .

$\therefore O \cong \overline{O^-(2n, 2)}$ . □

**Teorema 11.** *La configuración  $C(\Gamma)$  determinada por el diagrama tal que  $n \geq 1$  es la configuración ortogonal  $\overline{O^-(2n, 2)}$ .*

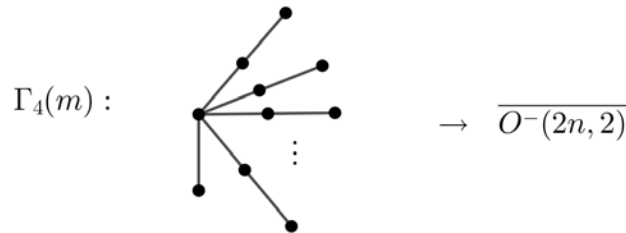
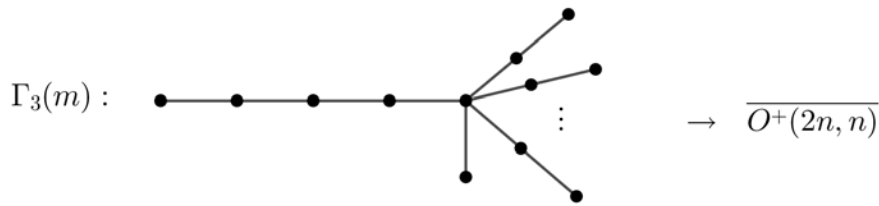
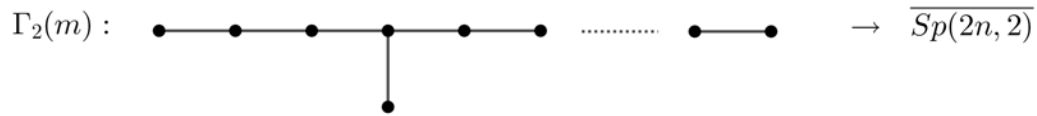


*Demostración.* Para los casos 1 y 2, los diagramas se reducen a:



Para los casos  $n \geq 3$  la función que envía los vértices de  $\Gamma$  en los vértices de la gráfica de la proposición anterior, se extiende a un isomorfismo lineal que conserva el producto escalar, de donde, se induce un isomorfismo entre  $C(\Gamma)$  y  $\overline{O^-(2n, 2)}$ .  $\square$

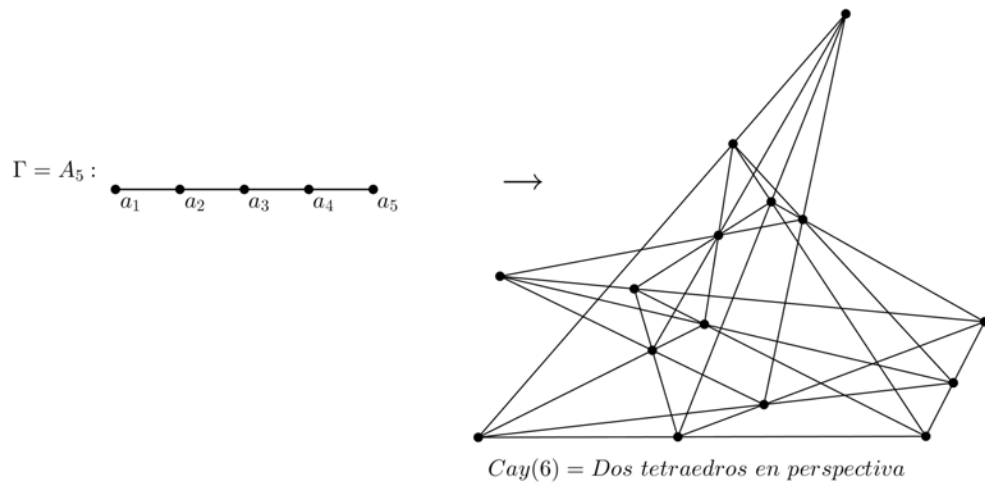
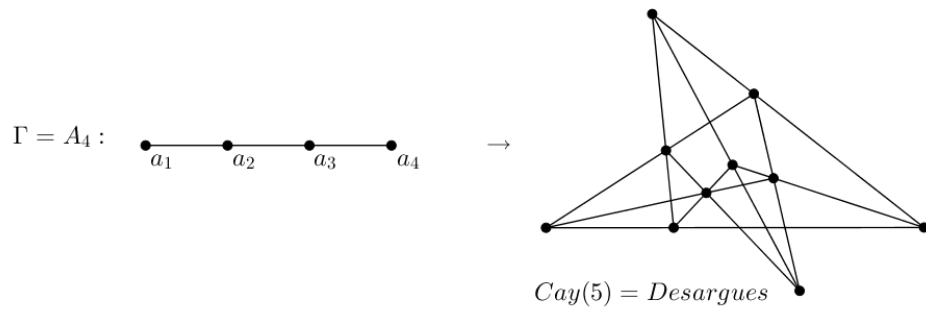
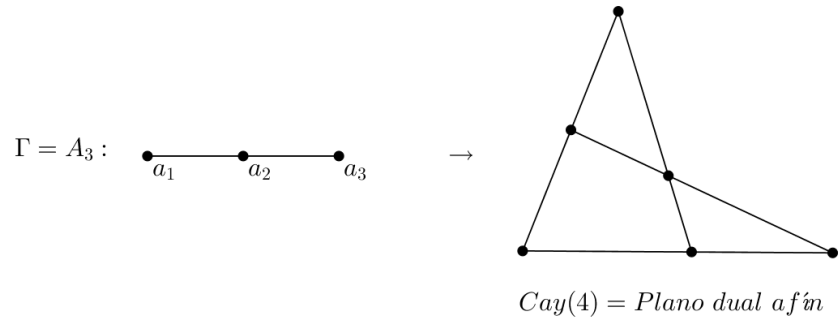
Con ésto concluimos que ciertos diagramas de Dynkin definen las configuraciones simplécticas reducidas  $\overline{Sp(2n, 2)}$  ( $n > 2$ ),  $\overline{O^+(2n, 2)}$  ( $n > 3$ ) y  $\overline{O^-(2n, 2)}$  ( $n > 2$ ).



Note que  $\Gamma_2(3)$ ,  $\Gamma_3(4)$ ,  $\Gamma_4(3)$  son los diagramas de Dynkin  $E_7$ ,  $E_8$  y  $E_6$  respectivamente.

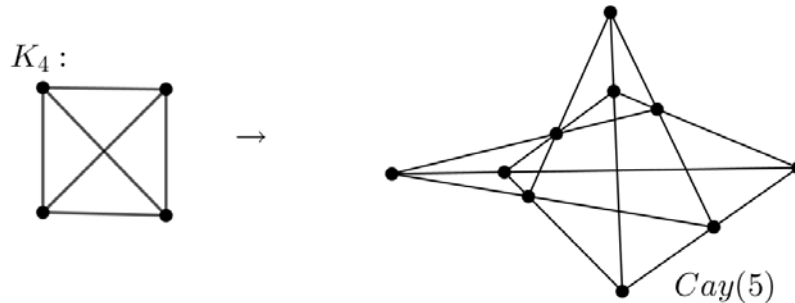
**Ejemplo 10.** Además, como ya habíamos visto en un ejemplo anterior, tenemos que los diagramas de Dynkin de tipo  $A_{m-1}$  también definen configuraciones (las cuales estudiaremos en el capítulo siguiente):





**Observación 11.** *Diferentes diagramas pueden definir la misma configuración. Por ejemplo el diagrama de Dynkin  $A_{m-1}$  y la gráfica completa con  $m-1$  vértices ( $K_{m-1}$ ) definen  $Cay(m)$ .*

*Como por ejemplo las siguientes:*



*Sin embargo, más adelante demostraremos que todos los diagramas para una configuración de tipo simpléctico tienen el mismo número de vértices.*

**Lema 11.** *Sea  $C$  un espacio de Fischer conexo, para cualesquiera  $a, b \in C$  puntos existe, un punto  $c \in C$  tal que  $c$  es colineal con  $a$  y con  $b$ .*

*Demostración.*

Caso 1 Si  $a \cdot b = 1$  entonces el tercer punto de la recta, es el punto buscado.

Caso 2 Si  $a \cdot b = 0$ .

Por ser conexo, existe una sucesión de longitud  $n$ ,  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$  tal que  $x_i \cdot x_{i+1} = 1$  con  $0 \leq i \leq n - 1$ .

Note que  $\{a, x_1, x_2\}$  generan un plano dual afín.

- Si  $a \cdot x_2 = 1$ .

Entonces  $x_0, x_2, \dots, x_n$  sigue siendo una sucesión de  $a$  a  $b$  pero de longitud  $n - 1$ .

Véase figura 4.8

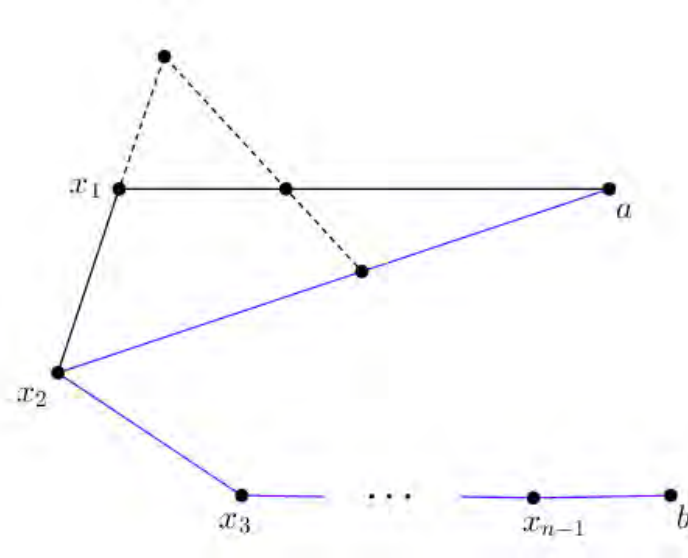


Figura 4.8: Si  $a$  es colineal con  $x_2$ .

- Si  $a \cdot x_2 = 0$ .

Entonces consideremos el plano generado por  $\{x_1, x_2, x_3\}$ .

Si  $x_1 \cdot x_3 = 1$ , entonces  $x_0, x_1, x_3, \dots, x_n$  sigue siendo una sucesión de  $a$  a  $b$  de longitud  $n - 1$ . Véase figura 4.9.

Si  $x_1 \cdot x_3 = 0$ , entonces note que  $x_3 \cdot z = 1$  con  $z$  el tercer punto de la recta por  $x_1, x_2$ . Además, como  $a \cdot x_2 = 0$  entonces  $a \cdot z = 1$ .

Así consideramos  $a, z, x_3, \dots, x_n$  sucesión de longitud  $n - 1$ . Véase figura 4.10.

Siguiendo con este procedimiento logramos reducir la longitud de la sucesión de 1 en 1 hasta llegar a una sucesión de longitud 2, es decir  $a, c, b$ .

$\therefore$  Existe  $c \in C$  tal que  $a \cdot c = b \cdot c = 1$ .

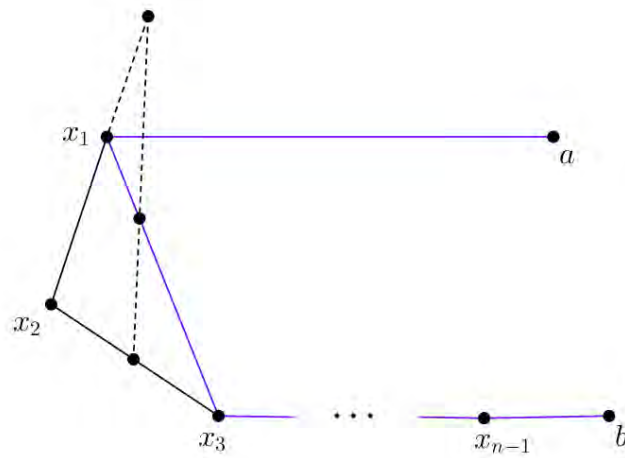


Figura 4.9: Si  $x_1$  es colineal con  $x_3$ .

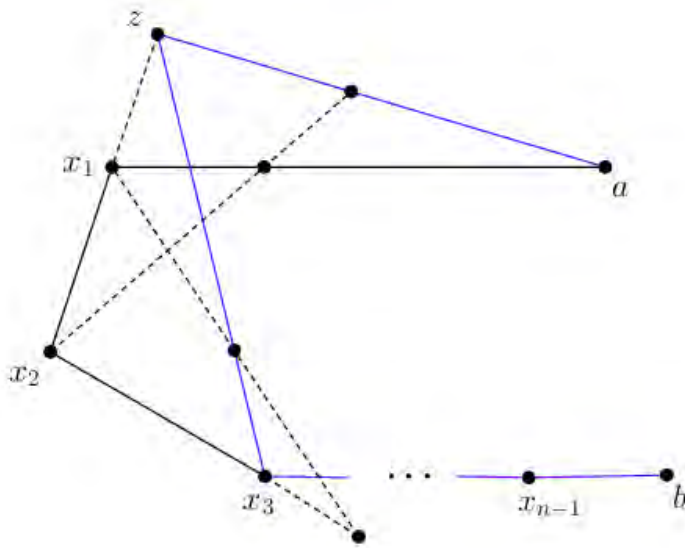


Figura 4.10: Si  $x_1$  no es colineal con  $x_3$ .

□

**Proposición 5.** *Sea  $D$  un conjunto de puntos en un espacio de Fischer  $C$ . Entonces el subespacio  $\langle D \rangle$  es el conjunto  $E$  de puntos  $c \in C$  tal que*

existe una secuencia  $s_1, s_2, \dots, s_h = c$  ( $s_i \in C$ ,  $s_1 \in D$ ) tal que:  
 $s_i$  y  $s_{i+1}$  son colineales ( $1 \leq i \leq h-1$ ) y el tercer punto  $d_{i+1}$  de la recta  
 que determinan  $l_i := \{s_i, s_{i+1}, d_{i+1}\}$  pertenece a  $D$ .

*Demostración.* P.D.  $\langle D \rangle = E$

$\supseteq$ ] Por construcción del conjunto  $E$  no hay nada que hacer.

$\subseteq$ ] Como  $D \subset E$  basta ver que  $E$  es un subespacio de  $C$ .

Sean  $p, q \in E$  dos puntos colineales y  $l = \{p, q, r\}$  la recta que determinan.

P.D.  $r \in E$ .

Haremos la demostración por inducción sin pérdida de la generalidad sobre la longitud  $m$  de la secuencia de  $q$ .

• **Base**  $m = 1$ , es decir,  $s_1 = q$ , por construcción de  $E$   $q \in D$ .

Como  $p \in E$ , sea  $s'_1, s'_2, \dots, s'_h = p$  su secuencia.

Entonces  $s'_1, s'_2, \dots, s'_h, s'_{h+1} = r$  es una secuencia de  $r$ , pues el tercer punto de la recta por  $s'_h$  y  $s'_{h+1}$  ( $p$  y  $r$ ) es  $q$  y tenemos que  $q \in D$ .

$\therefore r \in E$ .

• **Hipótesis de inducción** Supongamos que si  $q$  tiene una secuencia de longitud menor a  $m$  entonces  $r \in E$ .

• **Paso de inducción** Sea  $s_1, \dots, s_{m-1}, s_m = q$  una secuencia de  $q$ . Consideremos las rectas  $l = \{p, q, r\}$  y  $l_{m-1} = \{s_{m-1}, q, d_m\}$ , con  $d_m \in D$ .

Si son iguales, es decir,  $l = l_{m-1}$  no hay nada que probar, pues:

\* Si  $p = d_m$  y  $r = s_{m-1}$  entonces  $r$  tiene una secuencia de longitud  $m-1$  que cumple que  $s_i$  y  $s_{i+1}$  son colineales ( $1 \leq i \leq m-2$ ) y el tercer punto  $d_{i+1}$  de la recta que determinan están en  $D$ , lo que implica que  $r \in E$ .

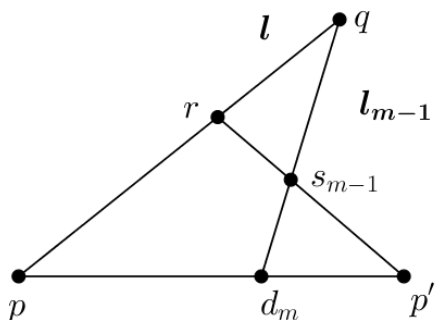
\* Si  $p = s_{m-1}$  y  $r = d_m$  entonces  $r$  tiene una secuencia de longitud 1 lo que implica que  $r \in E$ .

Supongamos que son diferentes, es decir  $l \neq l_{m-1}$ .

Como se intersecan en  $q$ , sea  $\Pi$  el plano que generan, como es un espacio de Fischer, podemos tener planos duales afines o planos afines, veamos los dos casos:

Caso 1  $\Pi$  es un plano dual afín.

Subcaso 1  $p$  colineal con  $d_m$ .



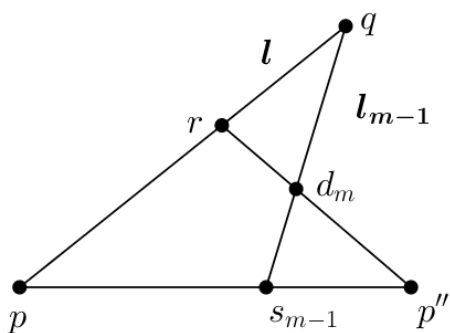
Sea  $p'$  el tercer punto de la recta que determinan  $p$  y  $d_m$ . Por hipótesis  $p \in E$  entonces, sea  $s_1, \dots, s_n = p$  una secuencia de  $p$ .

De donde,  $s_1, \dots, s_n, s_{n+1} = p'$  es una secuencia de  $p'$ , pues  $d_m \in D$  por hipótesis.

Por lo tanto,  $p' \in E$ .

Ahora, como  $s_{m-1}$ ,  $p'$  y  $r$  son colineales;  $s_{m-1}$  tiene una secuencia de longitud  $m - 1$  y  $p' \in E$  entonces, por hipótesis de inducción  $r \in E$ .

Subcaso 2  $p$  colineal con  $s_{m-1}$ .



Sea  $p''$  el tercer punto de la recta que determinan  $p$  y  $s_{m-1}$ . Por hipótesis  $p \in E$  y  $s_{m-1}$  tiene una secuencia de longitud  $m - 1$ ; así, por hipótesis de inducción  $p'' \in E$ , sea  $s_1, \dots, s_n = p''$  una secuencia de  $p''$ .

Ahora, como  $d_m \in D$  y  $p'' \in E$  entonces,  $s_1, \dots, s_n, s_{n+1} = r$  es una secuencia de  $r$ , pues  $d_m \in D$ . Por lo tanto,  $r \in E$ .

Caso 2  $\Pi$  es un plano afín.

Notemos que en este caso todos los puntos son colineales con todos, así que no se hará distinción de subcasos.

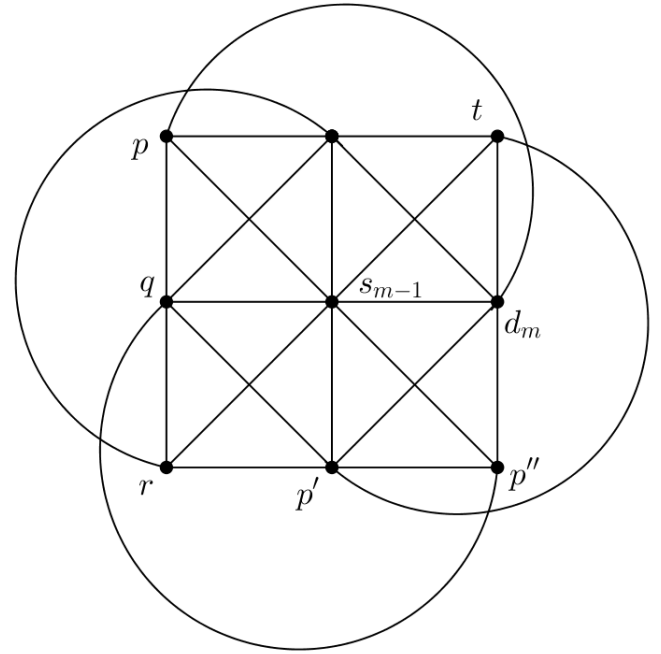
De la misma forma que el caso anterior, sean  $\{p, s_{m-1}, p''\}$  y  $\{p, d_m, p'\}$  las rectas generadas.

Por el caso anterior,  $p', p'' \in E$ .

Sea  $t$  el tercer punto de la recta determinada por  $p''$  y  $d_m$ .

Como  $p'' \in E$  y  $d_m \in D$  entonces,  $s_1, \dots, p'', t$  es una secuencia de  $t$ , de donde  $t \in E$ .

Y como  $s_{m-1}, t, r$  son colineales y  $s_{m-1}$  tiene una secuencia de longitud  $m-1$  y  $t \in E$  entonces, por hipótesis de inducción  $r \in E$ .



Con la demostración de los dos casos, se concluye que  $r \in E$ .

$\therefore E$  es un subespacio y  $\langle D \rangle = E$

□

# Capítulo 5

## Espacios Duales Afines

Ahora que sabemos cómo se ven los espacios parciales lineales a partir de su diagrama; estudiaremos en general sus características y propiedades para comprenderlos un poco mejor.

Decimos que  $P$  es un espacio parcial lineal dual afín si  $P$  sólo tiene planos duales afines, es decir,  $P$  es un espacio de Fischer con planos duales afines, brevemente, decimos que  $P$  es un espacio dual afín o  $P$  es un espacio de tipo simpléctico.

Si  $P$  es un espacio dual afín, diferente al trivial o a una sólo recta, entonces  $P$  tiene al menos dos puntos no colineales, más aún, tiene alguna de las propiedades siguientes:

- Propiedad de Desargues.

Cualquier par de puntos no colineales tiene exactamente cuatro puntos colineales a ambos.

- Propiedad de Reye.

Cualquier par de puntos no colineales tiene más de cuatro puntos colineales a ambos.

Las cuales demostraremos y estudiaremos a continuación. Para esto, introduciremos conceptos geométricos y algebraicos como la noción de coclan y representación universal.

A partir de esto, clasificaremos espacios dependiendo de sus propiedades.



## 5.1. Espacios duales afines con la propiedad de Desargues.

**Definición 22.** Sea  $\Omega$  un conjunto distinto del vacío. Definimos  $\mathcal{T}(\Omega)$  al espacio parcial lineal tal que sus puntos son de la forma  $\{a, b\} \subset \Omega$  con  $a \neq b$  y sus rectas son conjuntos de tres puntos de la forma  $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ .

**Observación 12.**  $\mathcal{T}(\Omega)$  es un espacio dual afín conexo con la propiedad de Desargues.

*Demostración.*

- Veamos que  $\mathcal{T}(\Omega)$  es un espacio dual afín.

Sean  $l_1 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$  y  $l_2 = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{a, d\}\}$  dos rectas que se intersecan. Véase figura 5.1.

Note que :

$\{b, c\}$  y  $\{b, d\}$  son colineales entonces, tenemos la recta  $\{\{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$ .

$\{a, c\}$  y  $\{a, d\}$  son colineales entonces, tenemos la recta  $\{\{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$ .

Las cuales se intersecan en  $\{c, d\}$ .

Al no tener más puntos colineales, concluimos que dos rectas cualesquiera que se intersecan solo generan un plano dual afín.

$\therefore \mathcal{T}(\Omega)$  es un espacio dual afín.

- Véamos que  $\mathcal{T}(\Omega)$  tiene la propiedad de Desargues.

Como el generado de dos rectas concurrentes es un plano dual afín, se tiene que dos puntos no colineales tienen 4 puntos colineales a ambos.

Basta ver que no existe otro colineal con los dos.

Sean  $\{a, c\}$  y  $\{b, d\}$  los dos puntos no colineales tal que los puntos siguientes:  $\{b, c\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{x, y\}$  son colineales a ambos. Véase figura 5.2.

Por como estan definidos los puntos y las rectas en  $\mathcal{T}(\Omega)$  y además, como  $\{x, y\}$  es colineal con  $\{a, c\}$  y  $\{b, d\}$  tenemos spg que  $x \in \{a, c\}$  y  $y \in \{b, d\}$ , pero para cualquier combinación que formemos caemos en alguna de las siguientes:  $\{b, c\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, d\}$ ; por lo que  $\{x, y\}$  diferente a los anteriores no existe.

$\therefore \mathcal{T}(\Omega)$  tiene la propiedad de Desargues.

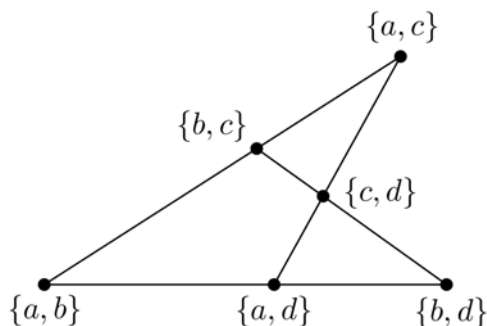


Figura 5.1:  $\mathcal{T}(\Omega)$  es espacio dual afín.

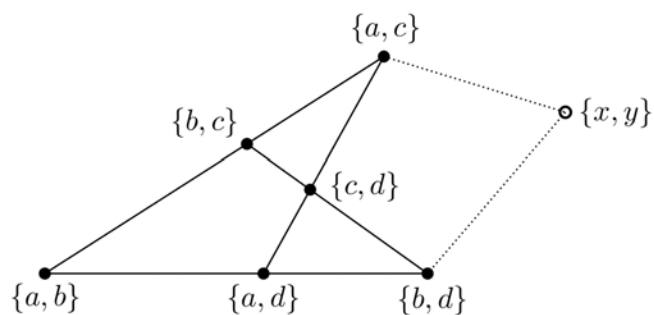


Figura 5.2:  $\mathcal{T}(\Omega)$  tiene la propiedad de Desargues.

□

El siguiente teorema se puede encontrar en [3]. Si se sigue la demostración, el lector podrá notar que algo falla con la función  $\phi$  definida en éste. Aquí hacemos un pequeño ajuste para corregir fallas y se detalla más la demostración.

**Teorema 12.** *Si  $P$  es un espacio dual afín conexo con la propiedad de Desargues entonces,  $P$  es isomorfo a un espacio  $\mathcal{T}(\Omega)$ .*

*Demostración.* Sea  $p \in P$  y  $l_0 = \{p, a, b\}$  una recta fija en  $P$ .

Sea  $\Omega'$  el conjunto de rectas que pasan por  $p$ .

Consideremos el espacio  $\mathcal{T}(\Omega)$  tal que  $\Omega = \{a, b\} \cup \Omega'$  y generemos  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

Note que tenemos tres tipos de puntos en  $\mathcal{T}(\Omega)$  :

1.  $\{a, b\}$ .
2.  $\{x, l\}$  con  $x \in \{a, b\}$  y  $l \in \Omega'$ .
3.  $\{l, l'\}$  con  $l, l' \in \Omega'$ .

Definimos una transformación  $\phi : \mathcal{T}(\Omega) \rightarrow P$  de la manera siguiente:

1.  $\phi(\{a, b\}) = p$ .

$$2. \phi(\{x, l\}) \begin{cases} y & \text{si } l = l_0 \text{ tal que } y \neq x \neq p, y \in l_0. \\ t & \text{si } l \neq l_0, \text{ con } t \text{ el \u00fanico punto de } l \text{ no colineal} \\ & \text{con } x \text{ en el plano generado por } l \text{ y } l_0. \end{cases}$$

3.  $\phi(\{l, l'\}) = w$ , con  $w$  el único punto en el plano generado por  $l$  y  $l'$  tal que  $t \neq p$  y  $t$  no colineal con  $p$ .

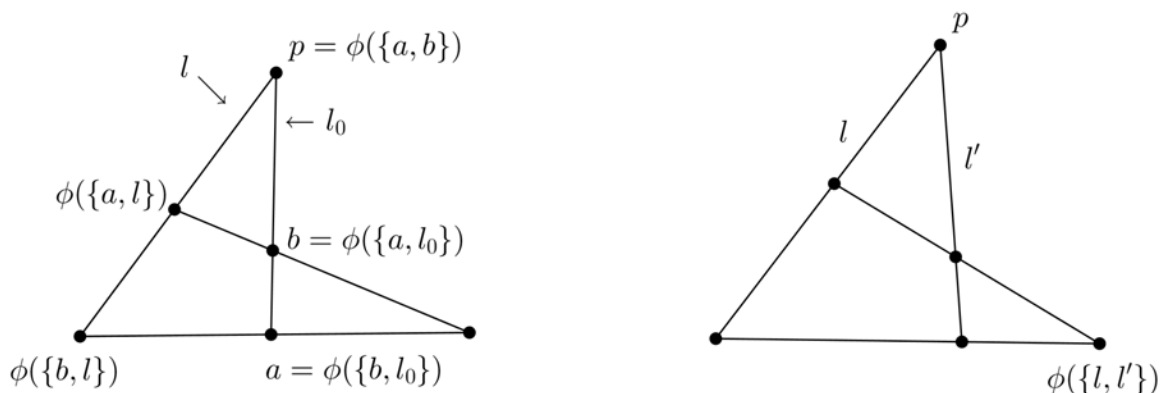


Figura 5.3: Vista gráfica de la función  $\phi$ .

Para demostrar el isomorfismo, basta demostrar que  $\phi$  es biyectiva. Consideremos las siguientes particiones:

- $\mathcal{T}(\Omega) = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$  con  $\mathcal{T}_i$  el conjunto de puntos del tipo  $i$ , donde  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
- $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$  con  $P_1 = \{p\}$ ,  $P_2$  el conjunto de puntos colineales con  $p$  y  $P_3$  el conjunto de puntos no colineales con  $p$  (distintos de  $p$ ).

Note que  $\phi(\mathcal{T}_i) \subset P_i$ , entonces basta probar que las respectivas restricciones son biyectivas.

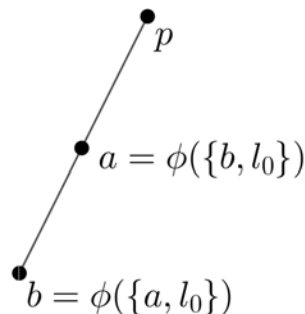
- Para  $i = 1$ ,  $\phi(\{a, b\}) = p$  no hay nada que probar.
  - Para  $i = 2$ 
    - \* P.D.  $\phi|_{\mathcal{T}_2}$  es suprayectiva.
- Sea  $t \in P_2$ . P.D. Existe  $\{x, l\} \in \mathcal{T}(\Omega)$  tal que  $\phi(\{x, l\}) = t$  con  $x \in \{a, b\}$  y  $l \in \mathcal{O}'$ .

Caso 1 si  $t \in l_0$ .

Por definición de  $l_0$ ,  $t \in \{a, b\}$  spg sea  $t = a$ .

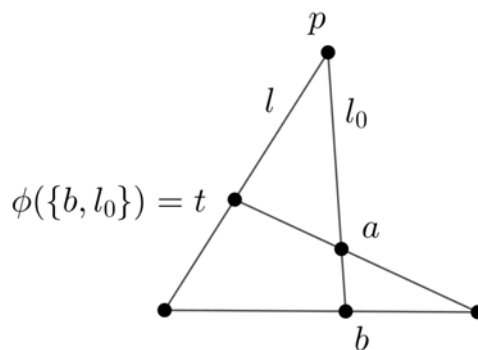
Además, por construcción de  $\mathcal{T}(\Omega)$  existe  $\{b, l_0\}$ ; así por definición de  $\phi$  tenemos que  $\phi(\{b, l_0\}) = a$ .

Para  $t = b$  el procedimiento es análogo considerando el punto  $\{a, l_0\} \in \mathcal{T}(\Omega)$ .



Caso 2 si  $t \notin l_0$ .

Como  $t \in P_2$ , entonces  $P$  y  $t$  son colineales. Sea  $l = \{p, t, k\}$  la recta que determinan. Además  $P$  es dual afín con la propiedad de Desargues, entonces consideremos el plano generado por  $l$  y  $l_0$ , spg sea  $t$  colineal con  $a$ . Por construcción de  $\mathcal{T}(\Omega)$  existe  $\{b, l_0\}$ ; así por definición de  $\phi$  tenemos que  $\phi(\{b, l_0\}) = t$  pues al ser colineales  $t$  y  $a$  se tiene que  $t$  y  $b$  no pueden ser colineales.



Cuando se tiene  $t$  colineal con  $b$ , el procedimiento es análogo considerando el punto  $\{a, l_0\} \in \mathcal{T}(\Omega)$ .

\* P.D.  $\phi | \mathcal{T}_2$  es inyectiva.

Si  $\phi(\{x, l\}) = \phi(\{x', l'\})$ . P.D.  $x = x'$  y  $l = l'$ .

Caso 1  $\phi(\{x, l\}) = \phi(\{x', l'\}) = y$  con  $y \in l_0$ .

Spg sea  $y = a$ . Por definición de  $\phi$  se tiene que  $l = l_0 = l'$  y además  $x = b = x'$ .

Cuando  $y = b$  es análogo.

Caso 2  $\phi(\{x, l\}) = \phi(\{x', l'\}) = t$  con  $t \notin l_0$ .

Consideremos el plano generado por  $l$  y  $l_0$ .

Si  $t$  es colineal con  $a$  entonces por definición de  $\phi$  tenemos que  $\{x, l\} = \{b, l\}$ .

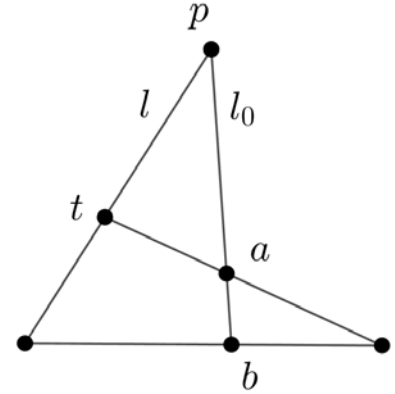
Si  $t$  es colineal con  $b$  entonces por definición de  $\phi$  tenemos que  $\{x, l\} = \{a, l\}$ .

De manera análoga con  $l'$  tenemos que

$\{b, l\} = \{b, l'\}$  o  $\{a, l\} = \{a, l'\}$ .

Y por la propiedad de Desargues se sigue que

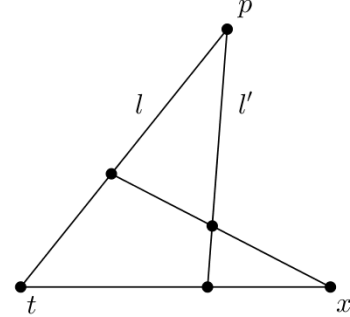
$\{b, l\} = \{b, l'\}$  o  $\{a, l\} = \{a, l'\}$ .



$\therefore \phi | \mathcal{T}_2$  es biyectiva.

- Para  $i = 3$ 
  - \* P.D.  $\phi | \mathcal{T}_3$  es suprayectiva.

Sea  $x \in P_3$ . Como  $P$  es conexo, existe un punto  $t \in P$  tal que  $t$  es colineal con  $p$  y también con  $x$ . Así, tomamos el plano generado por  $p$ ,  $t$ ,  $x$  teniendo dos rectas  $l$  y  $l'$  tal que  $\phi(\{l, l'\}) = x$ .



\*P.D.  $\phi | \mathcal{T}_3$  es inyectiva.

Si  $\phi(\{l_1, l_2\}) = \phi(\{l'_1, l'_2\})$  entonces, los planos generados por  $l_1, l_2$  y  $l'_1, l'_2$  tienen a  $p$  y a  $x$ , dos puntos no colineales.

Entonces por la propiedad de Desargues los planos son iguales, más aún, como  $l_1, l_2, l'_1, l'_2 \in \Omega'$  entonces,  $\{l_1, l_2\} = \{l'_1, l'_2\}$ .

$\therefore \phi | \mathcal{T}_3$  es biyectiva.

Ahora, veamos que  $\phi$  manda rectas a rectas.

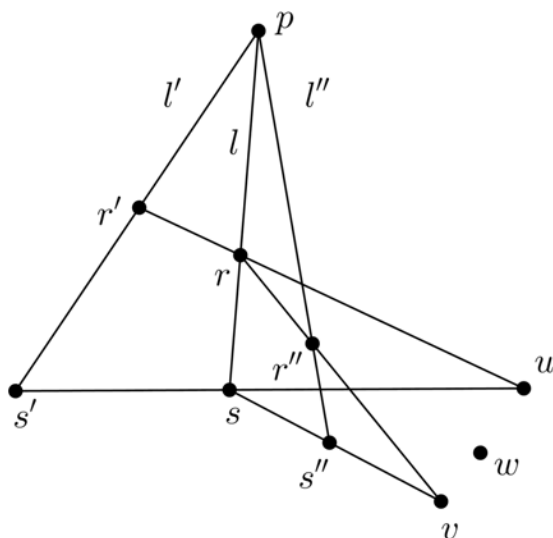
Sean  $l, l', l''$  rectas en  $\Omega'$ . Definimos:

$$\phi(\{l, l'\}) = u, \quad \phi(\{l, l''\}) = v, \quad \phi(\{l', l''\}) = w$$

es decir,  $u, v, w$  son el sexto punto del plano generado por las rectas  $l, l'$ ;  $l, l''$  y  $l', l''$  respectivamente.

Spg sea  $l_0 = l = \{p, r, s\}$ , donde  $r = a, s = b$ .

Así, por la definición de  $u$  nombramos a los puntos de  $l'$  como  $l' = \{p, r', s'\}$ , de manera análoga por definición de  $v$  nombramos a los puntos de  $l''$  como  $l'' = \{p, r'', s''\}$ , de donde obtenemos que  $\{r, r', u\}, \{s, s', u\}$  son rectas, y  $\{r, r', v\}, \{s, s', v\}$  también son rectas. véase la figura siguiente:

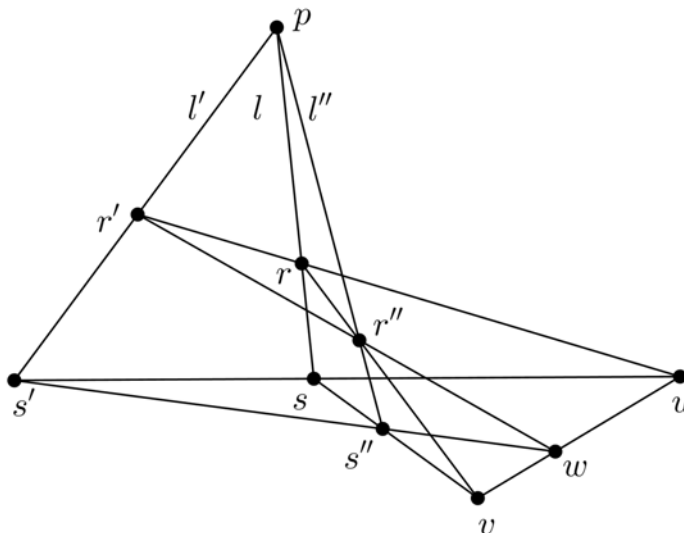


Para continuar con la demostración, primero necesitamos demostrar el resultado siguiente:

**Lema 12.** *En la figura anterior,  $\{u, v, w\}, \{r', r'', w\}$  y  $\{s', s'', w\}$  son rectas.*

*Demostración.* Note que por definición de  $\phi(\{l, l'\}) = u$ , tenemos que  $p$  y  $u$  no son colineales, entonces  $u$  y  $r''$  tampoco son colineales (de lo contrario,  $p$  y  $u$  tendrían más de cuatro puntos colineales a ambos contradiciendo la propiedad de Desargues).

Sea  $w'$  el sexto punto del plano generado por las rectas  $\{r, r', u\}$  y  $\{r, r'', v\}$ . Como  $u$  y  $r''$  no son colineales, entonces  $\{u, v, w'\}$  y  $\{r', r'', w'\}$  son rectas. Entonces la recta  $\{r', r'', w'\}$  pertenece al plano generado por  $l'$  y  $l''$ , teniendo así que  $w = w'$ . Más aún,  $\{s', s'', w\}$  también es una recta.



□

Ahora, para terminar la demostración del teorema, note que hay tres tipos de rectas en  $\mathcal{T}(\Omega)$ :

1.  $\{\{l, l'\}, \{l, l''\}, \{l', l''\}\}$
2.  $\{\{x, l\}, \{x, l'\}, \{l, l'\}\}$
3.  $\{\{a, b\}, \{a, l\}, \{b, l\}\}$

Finalmente, sea  $L$  una recta de  $\mathcal{T}(\Omega)$ . A continuación cada caso representará al tipo de recta que vamos a mandar bajo  $\phi$ .

Caso 1  $\phi(\{l, l'\}) = u$ ,  $\phi(\{l, l''\}) = w$  y  $\phi(\{l', l''\}) = v$ , por lema forman una recta.

Caso 2

Subcaso 1 si  $l \neq l_0$  y  $l' \neq l_0$ , entonces por lema forman una recta.

Subcaso 2 si  $l = l_0$  y  $l' \neq l_0$ , tenemos que: si  $x = a$  entonces,  $\phi(\{a, l_0\}) = b = s$ ,  $\phi(\{a, l'\}) = s'$  y  $\phi(\{l'_0, l'\}) = u$ , los cuales

forman una recta.

si  $x = b$  entonces,  $\phi(\{b, l_0\}) = a = r$ ,  $\phi(\{b, l'\}) = r'$  y  $\phi(\{l'_0, l'\}) = u$  los cuales forman una recta.

### Caso 3

Si  $l = l_0$ , entonces  $\phi(\{a, b\}) = p$ ,  $\phi(\{a, l_0\}) = b$  y  $\phi(\{b, l_0\}) = a$ , los cuales forman una recta.

Si  $l \neq l_0$ , sea  $l = \{p, t, q\}$ . Consideramos el plano generado por  $l$  y  $l_0$ . Si  $q, a$  son colineales y  $b, t$  son colineales entonces,  $\phi(\{a, l\}) = t$ ,  $\phi(\{b, l\}) = q$ . Análogamente si  $q, t$  son colineales y  $t, a$  son colineales.

$\therefore P \cong \mathcal{T}(\Omega)$ .

□

**Observación 13.** *Es fácil ver que si  $\phi : P \rightarrow P'$  es una transformación biyectiva entre dos espacios duales afines que manda rectas en rectas, entonces la imagen de dos puntos no colineales son dos puntos no colineales. Por lo tanto, toda recta de  $P'$  es la imagen de una recta de  $P$ .*



## 5.2. La representación universal y la forma cuadrática

Una de las definiciones importantes para establecer la relación entre el álgebra y la geometría es la siguiente:

**Definición 23.** Una **Representación lineal** de un espacio parcial lineal  $P$ , es una transformación inyectiva  $\phi : P \rightarrow V \setminus \{0\}$ , donde  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}_2$  tal que: si  $\{a, b, c\}$  es una línea en  $P$ , entonces  $\phi(a) + \phi(b) + \phi(c) = 0$ . El **grado** de la representación es la dimensión de  $V$ .

**Definición 24.** Decimos que la representación  $\phi : P \rightarrow V \setminus \{0\}$  es **Completa** si la imagen de  $P$  genera a  $V$ . Es decir,  $\phi(P)$  contiene una base de  $V$ .

**Definición 25.** Decimos que la representación lineal  $\phi : P \rightarrow V \setminus \{0\}$  es **Universal** si para cualquier otra representación  $\psi : P \rightarrow W$  existe una única transformación lineal  $T : V \rightarrow W$  tal que  $\psi = T \circ \phi$ .

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & V \\ & \searrow \psi & \downarrow \exists! T \\ & & W \end{array}$$

**Definición 26.** La representación  $\phi$  es **Simpléctica** si existe una forma bilineal simpléctica  $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{F}_2$  tal que:

$$\phi(a) \cdot \phi(b) = 1 \text{ si y solo si } a \text{ y } b \text{ son colineales en } P.$$

Sea  $P$  un espacio dual afín reducido y conexo.

En esta sección probaremos la existencia de una representación lineal  $\phi : P \rightarrow U$  y de una forma cuadrática  $q(P) : U \rightarrow \mathbb{F}_2$  tal que:

- $\phi$  es la representación universal de  $P$ .
- $q(\phi(a)) = 1$ , con  $a \in P$ .
- $\phi(a) \cdot \phi(b) = 1$  si y solo si  $a$  y  $b$  son colineales con la forma bilineal asociada a  $q$ . Teniendo así que la representación universal es simpléctica.

**Observación 14.** *Todo subconjunto  $v$  de  $P$  tiene una estructura de gráfica al definir las aristas en  $v$  como parejas de puntos colineales de  $P$ , es decir, podemos pasar de un espacio  $P$  a una gráfica asociándole su gráfica de colinealidad.*

Más aún, podemos considerar el espacio vectorial  $\mathbb{F}_2P$  cuyos vectores son las gráficas finitas  $v$ ; y la suma vectorial definida como la diferencia simétrica de conjuntos  $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

A su vez, definimos la función  $q : \mathbb{F}_2P \rightarrow \mathbb{F}_2$  como  $q(v) = \chi(v) \bmod 2$ , donde  $\chi(v)$  denota la **característica de Euler para gráficas**, es decir, el número de vértices menos el número de aristas.

Note que como estamos en característica 2 tenemos que  $v - a = v + a$ , para mayor referencia véase [10].

**Observación 15.** *Los puntos  $x_i$  de  $P$ , forman una base para  $\mathbb{F}_2P$ , pues: en el espacio vectorial estos puntos son de la forma  $\{x_i\}$ , los cuales son linealmente independientes, y más aún para generar un conjunto de  $n$  elementos basta tomar la combinación lineal de  $n$  vectores, es decir, la diferencia simétrica de  $n$  vectores.*

*Además por como está definida se obtiene que  $q(a) = 1 \quad \forall a \in P$ .*

**Proposición 6.** *La función  $q$  es una forma cuadrática en  $\mathbb{F}_2P$ .*

*Demostración.* Consideremos la forma bilineal simpléctica siguiente:

$\cdot : \mathbb{F}_2P \times \mathbb{F}_2P \rightarrow \mathbb{F}_2$  definida en la base como:

$$\{a\} \cdot \{b\} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ y } b \text{ son colineales en } P \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Sea  $q'$  la única forma cuadrática tal que  $q'(a) = 1 \quad \forall a \in P$  con la anterior forma simpléctica asociada.

Si  $v = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset P$ , entonces

$$\begin{aligned} q'(v) &= \sum_{i=1}^n q'(\{x_i\}) + \sum_{i < j} \{x_i\} \cdot \{x_j\} \\ &= n + m \bmod 2 \end{aligned}$$

donde  $n$  es la cantidad de vértices en  $v$  por definición de  $q'$  y  $m$  representa el número de aristas en  $v$ . Al tomar  $i < j$  nos aseguramos de no contar las aristas dos veces.

$\therefore q(v) = q'(v)$ . □

**Notación**

- $a \in P$ , si  $a$  es un punto de la configuración  $P$ .
- $\{a\} \in \mathbb{F}_2P$ , si es un vector en el espacio vectorial  $\mathbb{F}_2P$ .

Como  $q(P) : U \rightarrow \mathbb{F}_2$ , simplemente escribiremos  $q(a)$  con  $a \in P$ .

Ahora, consideremos el subespacio vectorial  $L$  de  $\mathbb{F}_2P$  **generado por las rectas de  $P$** , es decir,  $L = \langle \{\{a, b, c\} \mid a, b, c \text{ son colineales en } P\} \rangle$ , donde tenemos que: Si  $v \in L$  entonces se tienen los siguientes casos:

1.  $v$  es un línea  $\{a, b, c\}$ ,  
entonces,  $q(v) = 3 + 3 = 0 \pmod 2$ .
2.  $v$  es la suma de dos líneas que se intersectan,  
entonces,  $v = \{a, b, c\} \Delta \{a, e, f\} = \{b, c, e, f\}$  de donde,  
 $q(v) = 4 + 4 = 0 \pmod 2$ .
3.  $v$  es la suma de dos líneas que no se intersectan,  
entonces,  $v = \{a, b, c\} \Delta \{d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$  de donde,  
 $q(v) = 6 + 6 = 0 \pmod 2$ .

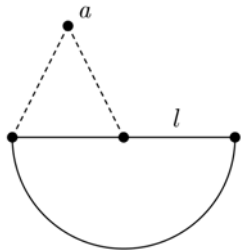
Por lo tanto, tenemos que  $q(v) = 0 \quad \forall v \in L$ .

**Lema 13.** *El subespacio vectorial  $L$  está contenido en el  $\text{Rad}(\mathbb{F}_2P)$ , es decir el radical dado por la forma bilineal simpléctica.*

*Demostración.* Sean  $a$  un punto de  $P$  y  $l$  una recta de  $P$ .

Entonces  $a \cdot l = q(a + l) + q(a) + q(l)$ .

De donde obtenemos los casos siguientes:



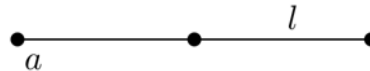
Caso 1  $a \notin l$  La gráfica  $a + l$  tiene cuatro vértices.

Y  $a$  no puede ser colineal a 2 puntos, pues dos rectas distintas se intersectan en un punto, entonces tiene:

- \* 3 aristas, si  $a$  no es colineal con ningún vértice de  $l$ .
- \* 5 aristas, si es colineal con algún vértice de  $l$ .

Caso 2  $a \in l$ .

La gráfica  $a + l$  tiene dos vértices y una arista.



En cualquier caso, podemos ver que  $q(a + l) = 1$ .

Entonces,  $q(a + l) + q(a) + q(l) = 1 + 1 + 0 = 0$ .

$\therefore a \cdot l = 0$ , es decir,  $L \subset \text{Rad}(\mathbb{F}_2P)$ . □

**Teorema 13.** *Sea  $P$  un espacio dual afín reducido. Entonces la composición*

$\phi : P \rightarrow \mathbb{F}_2P \rightarrow \mathbb{F}_2P/L = U$  *es la representación universal de  $P$ .*

*Además  $q$  induce una forma cuadrática en  $\mathbb{F}_2P/L$  tal que  $q(\phi(a)) = 1$  para todo  $a$  en  $P$ , más aún dados dos puntos  $a, b \in P$ , la forma simpléctica asociada es 1 si  $a, b$  son colineales en  $P$  y 0 en caso contrario.*

*Demostración.* Notemos primero que por proposición 6  $q$  es una función cuadrática en  $\mathbb{F}_2P$  y  $\mathbb{F}_2P/L \subset \mathbb{F}_2P$ , entonces  $\phi : \mathbb{F}_2P \rightarrow \mathbb{F}_2P/L$  induce una forma cuadrática en el cociente.

Además  $\phi(a) \in U$  y la clase de equivalencia de  $a$  es la misma  $a$ , de donde  $q(\phi(a)) = q(a) = 1 \forall a \in P$  y para la forma simpléctica asociada tenemos que  $\phi(a) \cdot \phi(b) = a \cdot b$ . Ahora, como  $P$  es reducido, si  $a, b \in P$  son dos puntos colineales, entonces existe un  $c \in P$  tal que  $\text{spg } c$  es colineal con  $a$  y no es colineal con  $b$ , es decir,  $c \cdot a = 1$  y  $c \cdot b = 0$  entonces,  $\phi(c) \cdot \phi(a) = 1$  y  $\phi(c) \cdot \phi(b) = 0$

Por lo tanto,  $\phi(a) \neq \phi(b)$ , es decir,  $\phi$  es inyectiva.

Y la propiedad universal se hereda de la propiedad universal del cociente. □

## 5.3. Coclanes

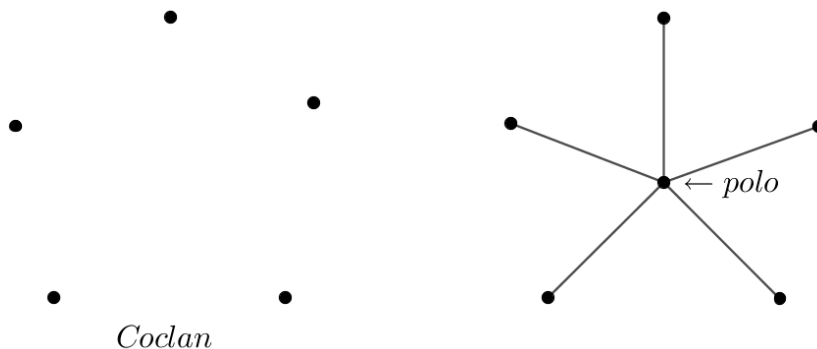
Los resultados siguientes nos ayudaran para la comprensión de espacios parciales lineales con la propiedad de Reye.

A partir de ahora, consideraremos lo siguiente:

- $P$  es un espacio dual afín conexo y reducido.
- $P \subset U$  es la representación universal de  $P$ .
- $q = q(P) : U \rightarrow \mathbb{F}_2$  la forma cuadrática definida por  $P$  y

$$x \cdot y = q(x + y) + q(x) + q(y), \text{ con } x, y \in U.$$

**Definición 27.** Decimos que  $C \subset P$  es un **coclán** si  $a \cdot b = 0 \quad \forall a, b \in C$ , es decir,  $C$  es un conjunto de puntos no colineales entre ellos. Además decimos que un punto  $p \in P$  es un **polo** del coclán si  $p \cdot c = 1 \quad \forall c \in C$ .



**Proposición 7.** Si  $C = \{a, b, c\} \subset P$  es un coclán y  $p \in P$  es un polo de  $C$ , entonces  $a + b + c \in P$

*Demostración.* Como  $p$  es polo de  $C$  entonces:

$$\begin{aligned} p \cdot a &= 1, \text{ entonces } p + a \in P \\ (p + a) \cdot b &= p \cdot b + a \cdot b = 1, \text{ entonces } (p + a) + b \in P \\ (p + a + b) \cdot c &= p \cdot c + a \cdot c + b \cdot c = 1, \text{ entonces } (p + a + b) + c \in P \\ (p + a + b + c) \cdot p &= p \cdot p + a \cdot p + b \cdot p + c \cdot p = 1 \\ &\text{entonces } 2p + a + b + c \in P. \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c \in P. \quad \square$$

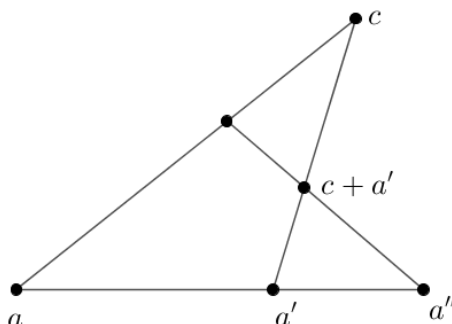
**Lema 14.** Sea  $l = \{a, a', a''\}$  una línea en  $P$ , definimos  $l^\perp = \{s \in P \mid s \cdot a = s \cdot a' = s \cdot a'' = 0\}$ . Si  $c \in P$  tal que  $c \cdot a = 1$ , entonces existe  $d \in P$  tal que:

- $d \cdot a = 0$
- $d \cdot s = c \cdot s$  para toda  $s \in l^\perp$ .

*Demostración.* Sea  $c \in P$  tal que  $c \cdot a = 1$  y sea  $l_1 = \{c, a, c + a\}$ .

Como  $l \cap l_1 \neq \emptyset$ , entonces generan el plano dual afín  $\{a, a', a'', c, c + a, d\}$  spg  $c \cdot a' = 1$ . Afirmación  $c + a'$  es el punto deseado  $d$ .

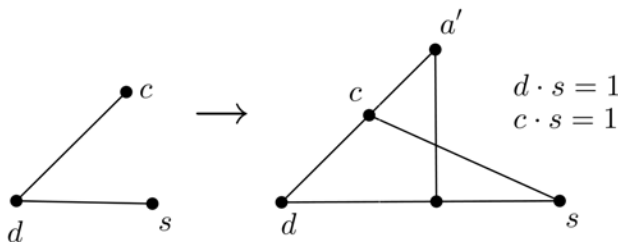
Pues  $d \cdot a = 0$  ya que un punto colineal a 2 puntos de una recta, no puede ser colineal con el tercer punto.



Ahora,

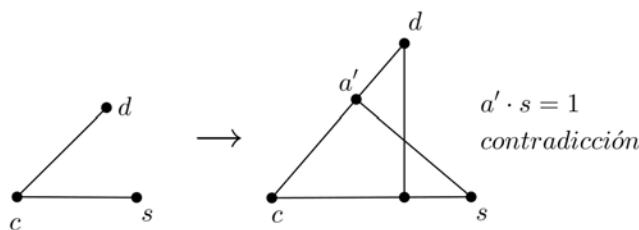
Caso 1 Si  $d \cdot s = 1$ , entonces  $\langle \{d, s, c\} \rangle$  es un plano dual afín y como  $s \in l^\perp$ , entonces  $s \cdot a' = 0$ .

Por lo tanto,  $c \cdot s = 1$ .



Caso 2 Si  $d \cdot s = 0$ , supongamos que  $c \cdot s = 1$  entonces,  $\langle \{d, c, s\} \rangle$  es un plano dual afín de donde,  $s \cdot a' = 1$  lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,  $c \cdot s = 0$ .



$\therefore$  Existe  $d \in P$  tal que  $d \cdot a = 0$  y  $d \cdot s = c \cdot s \quad \forall s \in l^\perp$ . □

**Lema 15.** Sea  $L = \{a_1, \dots, a_n\} \subset P$  un coclón y  $l, l'$  rectas en  $P$  tal que

- $a_1 \in l$  y  $a_i \in l^\perp \quad \forall i > 1$
- $a_2 \in l'$  y  $a_i \in l'^\perp \quad \forall i > 2$

Entonces, existe una recta  $l'' \in P$  tal que  $a_2 \in l''$  y  $a_i \in l''^\perp \quad \forall i \neq 2$ .

*Demostración.* Note que si  $a_1 \in l'^\perp$  entonces, basta tomar  $l'' = l'$ .

Mientras que si  $a_1 \notin l'^\perp$  entonces,  $a_1$  es adyacente a algún punto de  $l'$ .  
 Sea  $c \in l'$  tal que  $a_1 \cdot c = 1$   
 Por el lema 14 (anterior), existe  $d \in P$  tal que  $d \cdot a_1 = 0$  y  $d \cdot s = c \cdot s \quad \forall s \in l'^\perp$ .  
 Como  $a_2 \in l'^\perp$  por hipótesis, en particular tenemos que  $c \cdot a_2 = d \cdot a_2 = 1$   
 Así, tomamos

$$l'' = \{a_2, d, d + a_2\}, \text{ pues } l''^\perp = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$\therefore$  Existe  $l'' \in P$  tal que  $a_2 \in l''$  y  $a_i \in l''^\perp \quad \forall i \neq 2$ . □

**Corolario 3.** *Si  $a, b$  son dos puntos no colineales.  
 Entonces existen rectas  $l$  y  $l'$  tal que  $a \in l$ ,  $b \in l'^\perp$  y  $b \in l'$ ,  $a \in l'^\perp$ .*

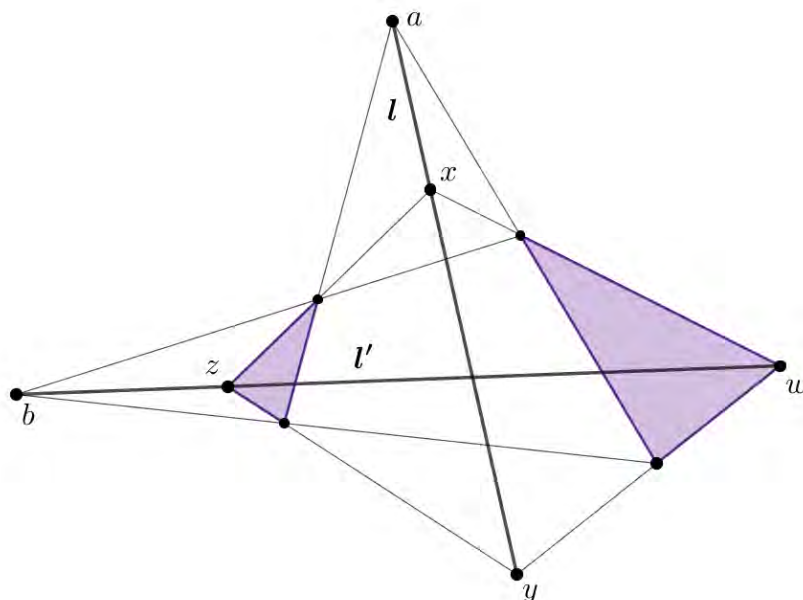
*Demostración.* Sean  $a, b \in P$  dos puntos no colineales.

Como  $P$  es reducido existe  $c \in P$  tal que  $\text{spg } c \cdot a = 1$  y  $c \cdot b = 0$ .  
 Tomemos  $l = \{a, c, a + c\}$ , de donde  
 $b \cdot a = 0$ ,  $b \cdot c = 0$  entonces,  $b \cdot (a + c) = 0$ . Por tanto,  $b \in l'^\perp$ .

Como  $\{a, b\}$  forman un coclón, se cumple por vacuidad el lema 15 (anterior), es decir, existe  $l' \in P$  tal que  $b \in l'$  y  $a \in l'^\perp$ .

$\therefore a \in l$ ,  $b \in l'^\perp$  y  $b \in l'$ ,  $a \in l'^\perp$ . □

**Ejemplo 11.** En la configuración de Desargues se tiene que si  $l = \{a, x, y\}$  y  $l' = \{b, w, z\}$  como las rectas de la figura siguiente:



Entonces,  $a \in l'^{\perp}$  y  $b \in l^{\perp}$ .

**Lema 16.** Sea  $C = \{a, b, c\} \subset P$  un coclán tal que  $a + b + c \notin \text{Rad}(U)$ . Entonces existe una recta  $l \in P$  tal que uno de los puntos de  $C$  está en  $l$  y los otros dos están en  $l^{\perp}$ .

*Demostración.* Como  $a + b + c \notin \text{Rad}(U)$  entonces, existe  $p \in P$  tal que  $p \cdot (a + b + c) = 1$ ,

de donde,  $p \cdot a + p \cdot b + p \cdot c = 1$ , teniendo los dos casos siguientes:

Caso 1 Spg sea  $p \cdot a = 1$  y  $p \cdot b = p \cdot c = 0$ .

Así, basta tomar  $l = \{p, a, p + a\}$ , pues:

$$b \cdot p = 0, \quad b \cdot a = 0 \quad \text{entonces,} \quad b \cdot (p + a) = 0.$$

$$c \cdot p = 0, \quad c \cdot a = 0 \quad \text{entonces,} \quad c \cdot (p + a) = 0.$$

$\therefore b, c \in l^{\perp}$ .

Caso 2  $p \cdot a = p \cdot b = p \cdot c = 1$ .

Es decir,  $p$  es polo de  $C$ . Por la proposición 7 tenemos que  $a + b + c \in P$ .

Como  $a$  y  $a + b + c$  son no colineales, por el corolario 3 tenemos que  $a \in l_1$ ,  $a + b + c \in l'_1$  y  $a \in l_1^{\perp}$ ,  $a + b + c \in l_1^{\perp}$ .

Sea  $l = \{q, a + b + c, a + b + c + q\}$ , de donde:



$$q \cdot (a + b + c) = q \cdot a + q \cdot b + q \cdot c = 1.$$

Por lo tanto,

si  $q \cdot b = 1$  y  $q \cdot c = 0$ , entonces como  $q \cdot a = 0$ , consideramos  $l = \{q, b, q + b\}$ .

si  $q \cdot b = 0$  y  $q \cdot c = 1$ , entonces como  $q \cdot a = 0$ , consideramos  $l = \{q, c, q + c\}$ .

$\therefore$  En cualquiera de los dos casos se cumple el teorema.  $\square$

**Proposición 8.** Sea  $C = \{a_1, a_2, a_3\}$  un coclón tal que  $a_1 + a_2 + a_3 \notin \text{Rad}(U)$ , entonces existen rectas  $l_1, l_2, l_3 \in P$  tal que  $a_i \in l_i$  y  $a_i \in l_j^\perp$  ( $i \neq j$ ).

*Demostración.* Por el lema 16 (anterior) existe una recta  $l_1 \in P$  tal que  $\text{spg } a_1 \in l_1$  y  $a_2, a_3 \in l_1^\perp$ .

Ahora, como  $a_2$  y  $a_3$  no son colineales, entonces por el corolario 3 se tiene que  $a_2 \in l$ ,  $a_3 \in l'$  y  $a_2 \in l'^\perp$ ,  $a_3 \in l^\perp$ .

Sea  $l = \{a_2, u, a_2 + u\}$ , así tenemos que:

$$a_1 \in l_1 \text{ y } a_2, a_3 \in l_1^\perp$$

$$a_2 \in l \text{ y } a_3 \in l^\perp.$$

Y por el lema 3 tenemos que existe  $l_2$  tal que  $a_2 \in l_2$  y  $a_1, a_3 \in l_2^\perp$ .

Análogamente, existe una recta  $l_3$  tal que  $a_3 \in l_3$  y  $a_1, a_2 \in l_3^\perp$ .

$\therefore$  Existen  $l_1, l_2, l_3 \in P$  tal que  $a_i \in l_i$  y  $a_i \in l_j^\perp$  ( $i \neq j$ ).  $\square$

**Definición 28.** Definimos al conjunto de puntos no colineales a un punto dado  $a$  (diferentes a el mismo) como  $\Gamma_a = \{b \in P, b \neq a \mid a \cdot b = 0\}$ .

**Proposición 9.** Sea  $a \in P$ . Entonces  $\Gamma_a$  es un subespacio conexo de  $P$ .

*Demostración.* Sean  $b, c \in \Gamma_a$  tal que  $b \neq c$ .

Si  $b \cdot c = 1$ , no hay nada que demostrar.

Supongamos que  $b \cdot c = 0$ . P.D. Existe  $u \in \Gamma_a$  tal que  $u \cdot b = u \cdot c = 1$ .

Sea  $p \in P$  un punto tal que  $p \cdot b = p \cdot c = 1$  (el cual existe pues  $P$  es conexo).

Si  $p \in \Gamma_a$ , entonces tomamos  $u = p$ .

Supongamos que  $p \notin \Gamma_a$ , es decir,  $p \cdot a = 1$ , de donde,  $(a + b + c) \cdot p = 1$ , teniendo así que  $a + b + c \notin \text{Rad}(U)$ .

Por tanto, por proposición 8, tenemos que existe una recta  $l$  tal que  $a \in l$  y  $b, c \in l^\perp$ . Así, aplicando el lema 14 a la recta  $l$  y al punto  $p$  concluimos que existe un punto  $u \in P$  tal que  $u \cdot a = 0$  y  $u \cdot s = p \cdot s$  para todo  $s \in l^\perp$ . Entonces como  $p \cdot b = p \cdot c = 1$ , tenemos que  $u \cdot b = u \cdot c = 1$ .

$\therefore \Gamma_a \subset P$  es conexo. □

**Corolario 4.** *La cardinalidad del conjunto de puntos colineales a dos puntos no colineales es la misma para cualesquiera dos puntos no colineales.*

*Demostración.* Definimos  $D_{xy} = \{z \in P \mid z \cdot x = z \cdot y = 1\}$  el conjunto de puntos colineales a dos puntos fijos.

Caso 1 Sean  $a, b$  y  $a, c$  dos pares de puntos no colineales, de donde  $b, c \in \Gamma_a$ .  
P.D. Existe  $f : D_{ab} \rightarrow D_{ac}$  biyección.

Subcaso 1 Si  $b \cdot c = 1$ .

Como  $b$  y  $c$  son colineales, sea  $b + c$  el tercer punto de la recta que determinan. Note que  $\{b, c, b + c\}$  va a generar planos duales afines con los puntos de  $D_{ab}$ , pues éstos son colineales con  $b$ . De la misma forma,  $\{b, c, b + c\}$  también va a generar planos duales afines con los puntos de  $D_{ac}$ .

De donde el punto  $b + c$  definirá la biyección entre ambos conjuntos haciendo una transvección entre los puntos. El procedimiento es el siguiente:

- \* Sean  $y \in D_{ab}$  y  $x \in D_{ac}$ .
- \* Con las rectas  $\{b, c, b + c\}$  y  $\{c, x, c + x\}$  generamos el punto  $b + c + x$ .  
Y con las rectas  $\{b, c, b + c\}$  y  $\{b, y, b + y\}$  generamos el punto  $b + c + y$ .
- \* Note que:  $x \in D_{ab}$ ,  $b + c + x \in D_{ac}$  y ambos son colineales con  $b + c$ .  
Así como  $y \in D_{ab}$ ,  $b + c + y \in D_{ac}$  ambos colineales con  $b + c$ .

Entonces podemos definir:  $x \xrightarrow{b+c} b + c + x$  y  $y \xrightarrow{b+c} b + c + y$ .

Análogamente con los demás puntos. La figura 5.4 ilustra esta idea.

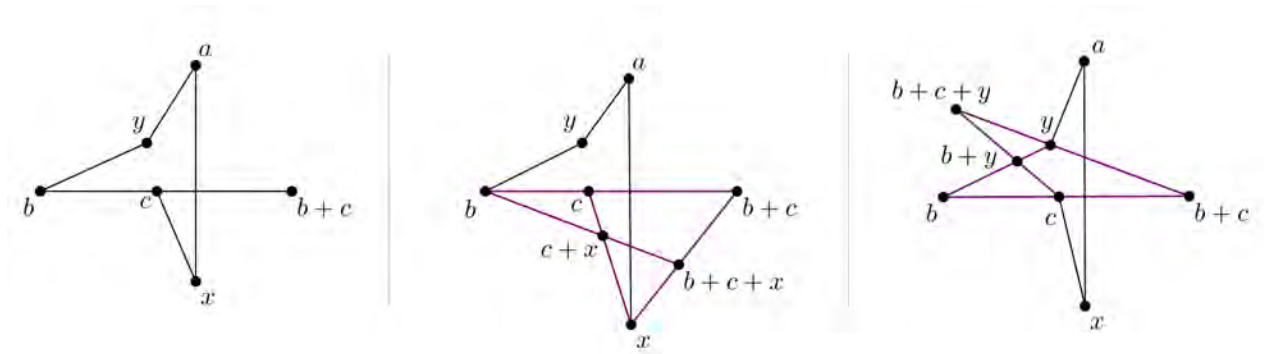
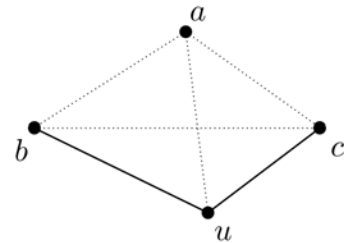


Figura 5.4: Procedimiento para la biyección de subcaso 1.

Subcaso 2 Si  $b \cdot c = 0$ .

Como  $b, c \in \Gamma_a$  y  $\Gamma_a$  es conexo por la proposición anterior, entonces existe  $u \in \Gamma_a$  tal que  $b \cdot u = 1 = c \cdot u$ . (En la figura las líneas punteadas representan la no colinealidad entre los puntos). Por una parte, consideremos  $a, u$  y  $a, b$  dos pares de puntos no colineales, de donde se cumple el subcaso 1.



Y por otra parte, consideremos  $a, u$  y  $a, c$  dos pares de puntos no colineales, de donde nuevamente se cumple el subcaso 1.

Así por transitividad, tenemos el mismo conjunto.

Por lo tanto, la biyección es la identidad.

Caso general Sean  $a, b$  y  $c, d$  dos pares de puntos no colineales.

Note que como son 4 puntos en general, puede pasar cualquiera los subcasos que aparecen en la figura 5.3.

Es fácil ver que todos pueden reducirse por transitividad al caso 1, por lo que se omitirá la demostración.

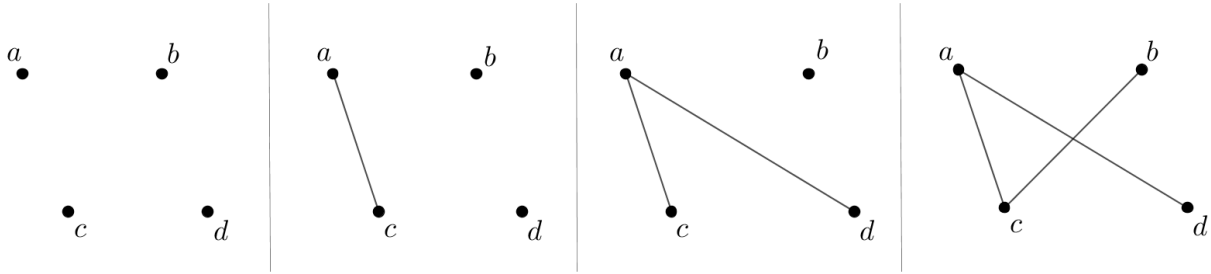
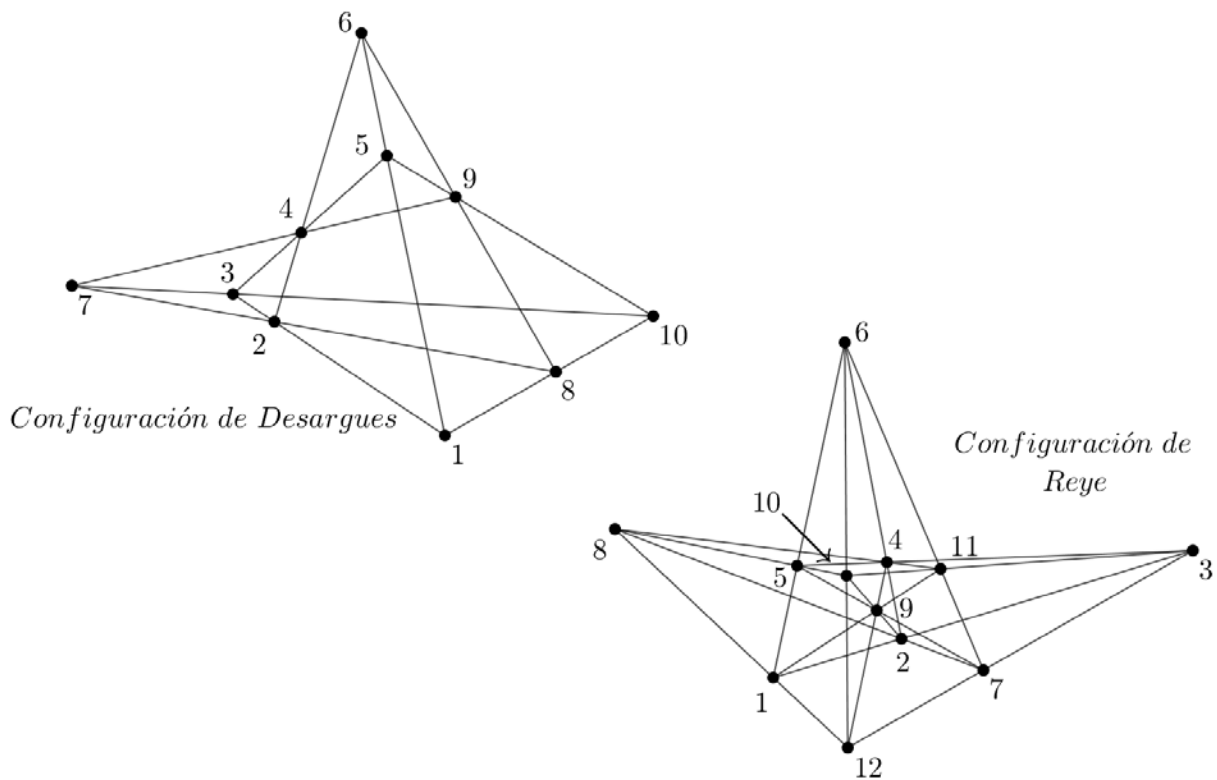


Figura 5.5: Subcasos de 4 puntos en general.

$\therefore$  Si un espacio dual afín, reducido y conexo tenemos que un par de puntos no colineales tienen 4 (o más de 4) puntos colineales a ambos, entonces para cualesquiera puntos no colineales también habrán 4 puntos colineales (o más de 4) a ambos.  $\square$

**Ejemplo 12.** Para una mejor visualización del resultado anterior, consideremos la configuración de Desargues y la configuración de Reyé.



En la configuración de Desargues:

Consideremos  $\Gamma_6 = \{3, 7, 10\}$ ,  
 $D_{6,3} = \{1, 2, 4, 5\}$  y  $D_{6,7} = \{2, 4, 8, 9\}$ .

$D_{6,3} \rightarrow D_{6,7}$  la definimos como:

$$\begin{array}{l} 2 \mapsto 2, \quad 1 \xrightarrow{10} 8 \\ 4 \mapsto 4, \quad 5 \xrightarrow{10} 9 \end{array}$$

$\therefore D_{6,3} \rightarrow D_{6,7}$  es biyectiva.

En la configuración de Reyé:

Consideremos  $\Gamma_6 = \{3, 8, 9\}$ ,  
 $D_{6,3} = \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 12\}$  y  
 $D_{6,8} = \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 12\}$ .

$\therefore D_{6,3} \rightarrow D_{6,8}$  es la identidad.

**Teorema 14.** Sean  $a, b \in P$  no colineales. Entonces el conjunto

$P_{a,b} = \{c \in P (c \neq a, b) \mid c \cdot a = c \cdot b = 0, a + b + c \notin \text{Rad}(U)\}$   
 es conexo.

*Demostración.* Sean  $c, d \in P_{a,b}$  tal que  $c \neq d$ .

Si  $c \cdot d = 1$  no hay nada que demostrar.

Supongamos que  $c \cdot d = 0$ . PD. Existe  $z \in P_{a,b}$  tal que  $z \cdot c = z \cdot d = 1$ .

Notemos que en particular  $\{a, b, c\}$  es un coclan y  $a + b + c \notin \text{Rad}(U)$ ,

entonces por la proposición 8, existe una recta  $l \in P$  tal que  $c \in l$  y  $a, b \in l^\perp$ .

Caso 1 Si  $d \notin l^\perp$ .

Entonces por definición existe  $z \in l$ ,  $z \neq c$  tal que  $z \cdot d = 1$ .

Por lo tanto,  $z$  es el punto buscado.

Caso 2 Si  $d \in l^\perp$ .

Como  $d \in P_{a,b}$ , consideremos el coclan  $\{a, b, d\}$ .

Por la proposición 8, existe una recta  $l' \in P$  tal que  $b \in l'$  y  $a, d \in l'^\perp$ .

Además note que  $\{c, b, a, d\}$  es un coclan, pues  $c \cdot d = 0$ , de donde:

$$c \in l \text{ y } b, a, d \in l^\perp$$

$$b \in l' \text{ y } a, d \in l'^\perp$$

Así por lema 15, tenemos que existe una recta  $l'' \in P$  tal que  $b \in l''$  y  $c, a, d \in l''^\perp$ .

Más aún, como  $\Gamma_a$  es conexo por la proposición 9, tenemos que existe  $z \in \Gamma_a$  tal que  $z \cdot a = 0$  y  $z \cdot c = z \cdot d = 1$ .

Por otra parte,

Si  $z \cdot b = 0$  entonces,  $z$  es el punto buscado.

Si  $z \cdot b = 1$  entonces, consideramos  $b \in l''$  por lema 14, tenemos que  $z'$  tal que  $z' \cdot b = 0$ , es decir,  $z'$  es el buscado.

$\therefore P_{a,b}$  es conexo. □

**Proposición 10.** *Sea  $\{a, b, c, d\}$  un coclán de  $P$  tal que  $a + b + c \in P$  y  $a + b + d \notin \text{Rad}(U)$ . Entonces  $a + b + d \in P$ .*

*Demostración.* Como  $c \cdot a = c \cdot b = 0$  y  $d \cdot a = d \cdot b = 0$  entonces,  $c, d \in P_{a,b}$ . Por teorema 14 (anterior), tenemos que existe  $p \in P_{a,b}$  tal que  $p \cdot c = p \cdot d = 1$  de donde  $p + c, p + d \in P$ .

Ahora, como

$$\begin{aligned} (a + b + c) \cdot (p + c) &= a \cdot p + b \cdot p + c \cdot p + a \cdot c + b \cdot c + c \cdot c \\ &= 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

entonces tenemos que  $(a + b + c) + (p + c) = a + b + p \in P$ .

De donde tenemos que

$$\begin{aligned} (a + b + p) \cdot (p + d) &= a \cdot p + b \cdot p + p \cdot p + a \cdot d + b \cdot d + p \cdot d \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

de donde  $(a + b + p) + (p + d) = a + b + d \in P$ . □

## 5.4. Espacios duales afines con la propiedad de Rey

Consideremos lo siguiente:

- $P$  un espacio dual afín, reducido y conexo.
- $\phi : P \subset U$  la representación universal de  $P$ .
- $O(q)$  el espacio cuadrático dado por la forma cuadrática  $q$  definida en  $P$ .

**Lema 17.** *Para cualquier  $v \in U$ ,  $v \neq 0$ , existe un coclón  $C \subset P$  tal que  $v = \sum_{a \in C} a$ . Más aún, si  $v \in O(q)$  entonces,  $v = \sum_{a \in C} a$  con  $C$  un coclón de cardinalidad impar.*

*Demostración.* Sabemos que  $v = \sum_{a \in C} a$  con  $|C|$  minimal.

Además si en la suma aparecen dos puntos colineales, podemos intercambiar estos dos puntos por el tercer punto de la recta que determinan, es decir, si  $a, a' \in C$  y  $a \cdot a' = 1$  entonces, tomamos  $C' = (C \setminus \{a, a'\}) \cup \{a + a'\}$ , siguiendo con este procedimiento, llegamos a sólo puntos no colineales, es decir, a un coclan.

Ahora, si  $v \in O(q)$  entonces,  $q(v) = q(\sum_{a \in C} a) = \sum_{a \in C} q(a) = 1$

Como  $q(\phi(a)) = 1$ , para que la suma sea 1,  $C$  debe tener un numero impar de elementos.  $\square$

**Lema 18.** *Si  $C \subset P$  es un coclón tal que  $|C| = n$ ,  $n > 3$ .*

*Entonces para cualquier  $m$ ,  $0 < m < n$  existe un coclón  $C' \subset C$  con  $|C'| = m$  tal que  $\sum_{a' \in C'} a' \notin \text{Rad}(U)$ .*

*Demostración.* Supongamos que no, es decir, para todo coclón  $C' \subset C$ ,  $\sum_{a' \in C'} a' \in \text{Rad}(U)$ .

Sea  $\{a_1, \dots, a_m\} \subset C$  con  $0 < m < n$  y sean  $b = a_1 + a_2 + \dots + a_m$  y  $c = a_1 + \dots + a_{m-1} + a_{m+1}$ .

Si  $b, c \in \text{Rad}(U)$  entonces  $b + c \in \text{Rad}(U)$ , es decir,  $a_m + a_{m+1} \in \text{Rad}(U)$ .

De donde, para todo  $d \in P$  tenemos que  $d \cdot a_m = d \cdot a_{m+1} = 0$  lo cual contradice que  $P$  sea reducido.

$\therefore \sum_{a' \in C'} a' \notin \text{Rad}(U)$ .  $\square$

El siguiente teorema se encuentra en [3]. Aquí se le agrega una ligera restricción para su debido funcionamiento.

**Lema 19.** *Consideremos a  $P$  con la propiedad de Rey. Si  $a, b \in P$  son dos puntos no colineales entonces, existe  $c \in P$  tal que  $a + b + c \in P$  y  $\{a, b, c\}$  es un coclan.*

*Demostración.* Como  $P$  es conexo, existe  $p \in P$  tal que  $p \cdot a = p \cdot b = 1$ . Sea  $\pi$  el plano que generan  $a, b$  y  $p$ .

Además, por la propiedad de Reyte, existe  $q \notin \pi$  tal que  $q \cdot a = q \cdot b = 1$ .

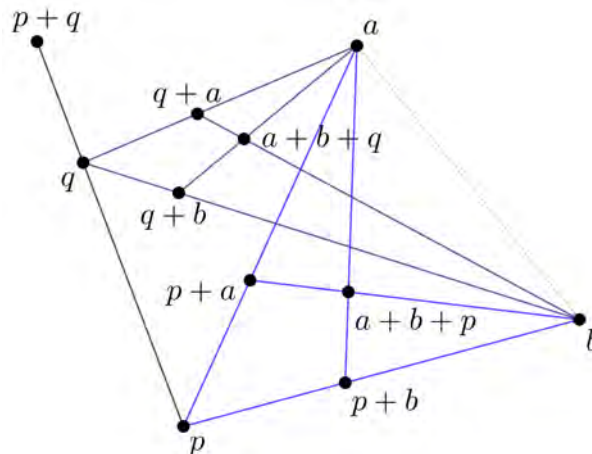
Caso 1 Si  $p \cdot q = 1$ .

Como  $p$  y  $q$  colineales podemos generar planos, como los que siguen:

$$\langle \{a, p, b\} \rangle = \{a, b, p, a+p, b+p, a+b+p\},$$

$$\langle \{a, q, b\} \rangle = \{a, b, q, a+q, b+q, a+b+q\}.$$

Ahora, como  $\{p, q, p+q\}$  y  $\{p, p+b, b\}$  se intersecan en  $p$ , entonces se genera el plano  $\{p, q, p+q, p+b, b, q+b\}$ .



Análogamente, como  $\{p, q, p+q\}$  y  $\{p, p+a, a\}$  se intersecan en  $p$ , entonces se genera el plano  $\{p, q, p+q, p+a, a, q+a\}$ .

Más aún, como las rectas  $\{p+q, p+b, q+b\}$  y  $\{p+q, p+a, q+a\}$  también generan el plano  $\{p+q, p+a, q+a, p+b, q+b, p+q+a+b\}$  como se puede ver en la figura 5.6

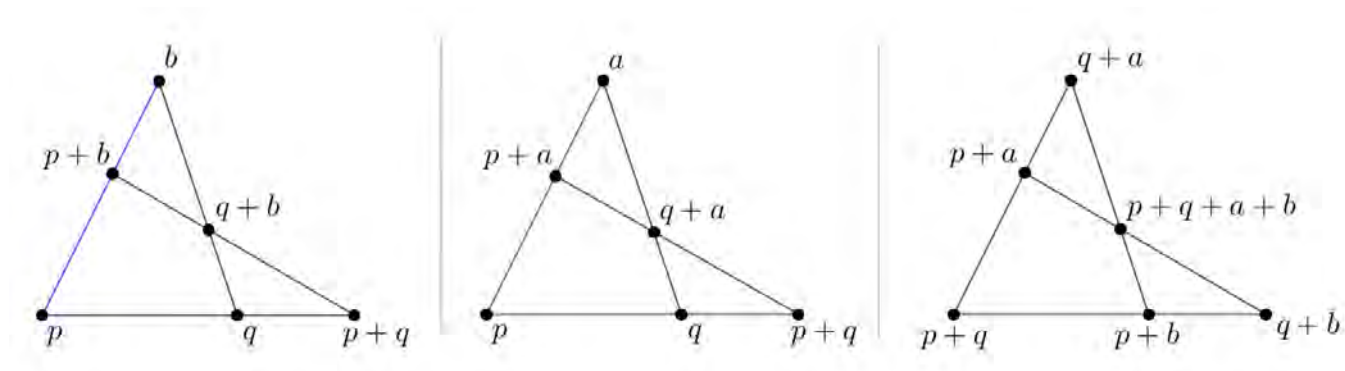


Figura 5.6: Planos que podemos generar.

Además, tenemos que:

$$(p+q+a+b) \cdot a = 1+1+0+0 = 0$$

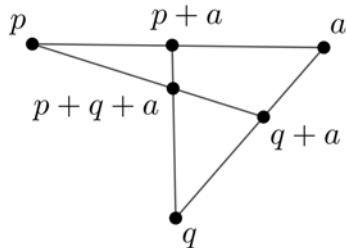
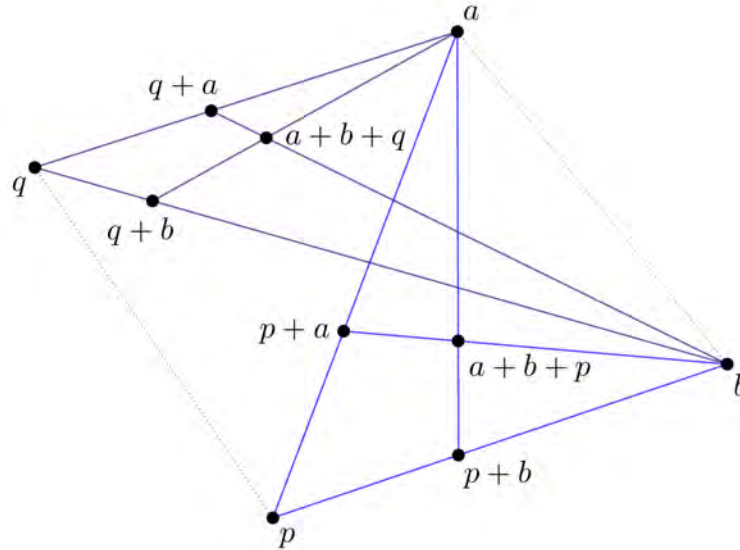


$$(p + q + a + b) \cdot b = 1 + 1 + 0 + 0 = 0$$

Por lo tanto,  $\{a, b, p + q\}$  es un coclan y  $a + b + p + q \in P$ , entonces basta tomar a al punto  $c$  como  $c = p + q$ .

Caso 2 Si  $p \cdot q = 0$ .

En la figura la línea punteada representa que dos puntos no son colineales.



Note que como  $\{a, p, p + a\}$  y  $\{q, a, q + a\}$  se intersecan en  $a$ , se genera el plano  $\{a, p, p + a, q, a, q + a, p + q + a\}$ .

De donde,

$$(p + q + a) \cdot a = 1 + 1 + 0 = 0$$

$$(p + q + a) \cdot b = 1 + 1 + 0 = 0$$

Por lo tanto,  $\{a, b, p + q + a\}$  es un coclan y  $a + b + (p + q + a) \in P$ , entonces basta tomar a al punto  $c$  como  $c = p + q + a$ .

$\therefore$  Si  $p, q$  son colineales, tomamos  $c = p + q$ .

Si  $p, q$  no son colineales, tomamos  $c = p + q + a$ . □

**Teorema 15.** *Sea  $P$  un espacio dual afín, reducido y conexo con la propiedad de Reyé. Sea  $P \subset U$  la representación universal de  $P$ .*

*Consideremos a  $q : U \rightarrow \mathbb{F}_2$  la forma cuadrática dada por  $P$ .*

*Entonces  $P = O(q)$  es el espacio cuadrático definido por  $q$ .*

*Demostración.* Como  $Rad(U) = \{x \in U \mid x \cdot y = 0 \ \forall y \in U\}$  y  $P$  es conexo entonces  $P \cap Rad(U) \neq \emptyset$ .

⊂] Se sigue directo por definición que  $q(a) = 1$  para toda  $a \in P$ .

⊃] Demostración por inducción. Sea  $v \in O(q)$

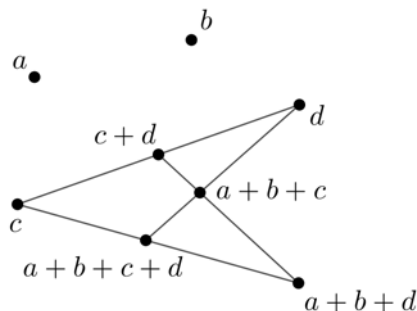
• **Base** Sea  $v = a + b + c$  con  $\{a, b, c\} \subset P$  un coclan.

Por lema 19, spg podemos completar  $\{a, b\}$  a un coclan  $\{a, b, d\}$  tal que  $a + b + d \in P$ .

Caso 1 Si  $\{a, b, c, d\}$  no es coclan.

Entonces  $c \cdot d = 1$ , de donde existe  $c + d \in P$ .

Además,  $(a + b + d) \cdot c = 0 + 0 + 1$ , entonces se forma un plano dual afín, teniendo que  $a + b + c \in P$ .



Caso 2 Si  $\{a, b, c, d\}$  es coclan.

Como  $a + b + d \in P$ , basta ver que  $a + b + d \notin Rad(U)$  para aplicar la proposición 10.

Como  $P$  es conexo, existe  $y$  tal que  $y \cdot c = 1$  y  $y \cdot (a + b + d) = 1$ , de donde  $y \cdot (a + b + d) = y \cdot a + y \cdot b + y \cdot d = 1$ .

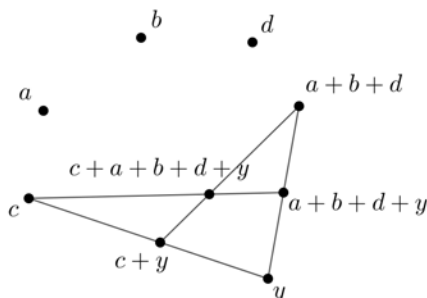
Subcaso 1  $y \cdot a = y \cdot b = y \cdot d = 1$ .

Entonces generamos el plano determinado por  $\{c, y, c + y\}$  y  $\{y, a + b + d, a + b + d + y\}$ , de donde obtenemos el punto  $a + b + d + y$ .

Además como  $a + b + d + y \cdot a + b + c = 1$ .

Por lo tanto  $a + b + c \notin Rad(U)$ .

Subcaso 2  $y \cdot a = 1$  y  $y \cdot b = y \cdot d = 0$ .



La demostración es análoga al subcaso anterior.

Por lo tanto, en cualquiera de los dos subcasos  $a + b + c \notin \text{Rad}(U)$ , por lo que  $a + b + c \in P$ .

• **Hipótesis de inducción** Sea  $v = b_1 + b_2 + \dots + b_m$  con  $3 \leq m < n$ , tal que  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  un coclan. Entonces  $v \in P$ .

• **Paso inductivo** Sea  $m = n - 2$ , por lema 18, tenemos un coclan  $C' \subset C$  con  $C' = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\}$  tal que  $a = a_1 + \dots + a_{n-2} \notin \text{Rad}(U)$ .

Entonces  $a \in O(q)$  y por hipótesis de inducción  $a \in P$ .

De donde,  $\{a, a_{n-1}, a_n\}$  es un coclan en  $P$ , entonces,  $v = a + a_{n-1} + a_n \in P$  por base de inducción.

$\therefore P = O(q)$ . □

**Observación 16.** *No todos los espacios cuadráticos  $O(q)$  tienen la propiedad de Reye. Como ejemplo, tenemos la configuración de Desargues, la cual es el espacio  $O(q) = \overline{O^-(4, 2)} = \mathcal{T}(\Omega)$ . Donde, claramente, no tiene la propiedad de Reye.*

*De lo anterior obtenemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \text{Propiedad de Reye} &\rightarrow P=O(q) \\ \text{Propiedad de Reye} &\leftarrow P=O(q). \end{aligned}$$

Con lo que podemos concluir que:

Si  $P$  es un espacio dual afín, conexo y reducido con la propiedad de Reye, entonces  $P = O(q)$  con  $q : V \rightarrow \mathbb{F}_2$  una forma no degenerada con  $\dim V > 6$  o  $\dim V = 6$  y  $O(q) = \overline{O^-(6, 2)}$ .

En los casos en que la dimensión de  $V$  es finita, los espacios cuadráticos son:

- Si  $\dim V = 2n$ , entonces  $O(q) = \overline{O^\epsilon(2n, 2)}$ , con  $\epsilon \in \{+, -\}$ .
- Si  $\dim V = 2n + 1$ , entonces  $O(q) = \overline{Sp(2n, 2)}$ .

## Capítulo 6

# Diagramas para Espacios Parciales Lineales de Orden 2

Hasta aquí ya sabemos como se ven estos espacios y sus diagramas, así como algunas de sus características. El objetivo ahora es tomar un espacio y ver si éste tiene diagrama y cuál es. Demostraremos que todos los espacios de este tipo tienen diagrama y con un sencillo teorema generaremos su diagrama.

Para esto, consideremos la categoría de los espacios parciales lineales de orden 2 (no necesariamente finitos) con planos duales afines; asumiremos siempre que los espacios son conexos.

A estos espacios también se les llama **Espacios de tipo simpléctico** y su categoría es denotada por  $\mathcal{S}_p$ . El siguiente resultado justifica el nombre de espacios de tipo simpléctico.

**Proposición 11.** *Un espacio parcial lineal  $P$  tiene una representación simpléctica si y solo si todos los planos de  $P$  son duales afines, es decir,  $P$  es de tipo simpléctico.*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $\phi : P \rightarrow V$  y  $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{F}_2$  es una representación simpléctica de  $P$ , veamos que sus planos son duales afines: Sean  $l_1 = \{a, b, c\}$  y  $l_2 = \{a, b', c'\}$  dos rectas en  $P$  que se intersecan en  $a$ , para ahorrar notación, escribiremos  $\phi(a)$  simplemente como  $a$ , de donde tenemos que  $a + b + c = 0$

y  $a + b' + c' = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot c = (a + b' + c') \cdot c \\ &= a \cdot c + b' \cdot c + c' \cdot c \\ &= 1 + b' \cdot c + c' \cdot c \end{aligned}$$

pues  $a$  y  $c$  son colineales, además como la suma debe ser 0, un producto debe ser 1 y el otro 0.

Spq sea  $b' \cdot c = 1$  y  $c' \cdot c = 0$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot c' = (a + b + c) \cdot c' \\ &= a \cdot c' + b \cdot c' + c \cdot c' \end{aligned}$$

como  $c \cdot c' = 0$ , se sigue que  $b \cdot c' = 1$ , es decir, son colineales.

Además notemos que

$$0 = (a + b + c) + (a + b' + c') = b + c + b' + c',$$

de donde  $b + c' = b' + c$ , es decir, son el mismo punto.

$\therefore l_1$  y  $l_2$  generan un plano dual afín.

$\Leftarrow$ ] Supongamos que  $P$  es del tipo simpléctico, veamos que tiene una representación simpléctica.

Por teorema 5,  $P = V \times P^*$ , donde  $V$  es un espacio vectorial y  $P^*$  es un espacio dual afín reducido.

Entonces por teorema 13,  $P^*$  tiene una representación simpléctica:

$\varphi : P^* \rightarrow U$ ,  $\cdot : U \times U \rightarrow \mathbb{F}_2$ , donde  $U = \mathbb{F}_2 P / L$  con  $L$  el subespacio de  $\mathbb{F}_2 P$  generado por las líneas de  $P$ .

Definimos:

$$\begin{aligned} \varphi' : V \times P^* &\rightarrow V \times U \quad \text{como } \varphi' = Id \times \varphi \quad \text{y} \\ \cdot' : (V \times U) \times (V \times U) &\rightarrow \mathbb{F}_2 \quad \text{como } (v_1, u_1) \cdot' (v_2, u_2) = u_1 \cdot u_2. \end{aligned}$$

Las cuales están bien definidas, pues:

Como  $Id$  y  $\phi$  están bien definidas, entonces  $\varphi'((v, a)) = (v, \varphi(a)) = (v, a)$ , más aún  $\varphi'$  hereda la inyectividad de  $Id$  y  $\varphi$ .

Mientras que, como  $(v_1, u_1) \cdot' (v_2, u_2) = (u_1 \cdot u_2)$  y  $u_1 \cdot u_2$  está bien definida, entonces  $\cdot'$  hereda la propiedad de  $\phi(a) \cdot \phi(b) = 1$  si y solo si  $a \cdot b = 1$ .

Finalmente, si  $\{(v_1, a), (v_2, b), (v_3, c)\}$  es una línea en  $V \times P^*$ , entonces por construcción anterior se tiene que  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$  y  $\{a, b, c\}$  es una línea en  $P^*$ , de donde

$$\varphi'(v_1, a) + \varphi'(v_2, b) + \varphi'(v_3, c) = (v_1, a) + (v_2, b) + (v_3, c) = (0, 0),$$

es decir,  $\varphi'$  es una representación lineal.

$\therefore \varphi'$  y  $\cdot'$  forman una representación simpléctica de  $P$ .

Concluyendo así con las dos implicaciones el teorema.  $\square$

En el teorema 13 la condición que implica la inyectividad de la representación simpléctica universal es que el espacio  $P$  sea reducido. En el siguiente resultado se demuestra para un espacio  $P$  no necesariamente reducido.

**Corolario 5.** *Todo espacio parcial lineal con sólo planos duales afines tiene una representación simpléctica universal.*

*Demostración.* Por la proposición anterior se tiene que si  $P$  es un espacio parcial lineal con sólo planos duales afines, entonces  $P$  tiene una representación simpléctica  $\varphi' : V \times P^* \rightarrow V \times U$ . Basta ver que es universal:

En particular  $\varphi' = Id \times \varphi$  es inyectiva y por la propiedad universal de  $\varphi$  se tiene que  $\varphi'$  también hereda la inyectividad.  $\square$

Recordemos la construcción que teníamos:

Si tenemos a  $\Gamma$  una gráfica conexa, construimos el espacio vectorial  $\mathbb{F}_2 P$  con base los vértices de  $\Gamma$  y definimos una forma bilineal simpléctica en la base como:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= 1 && \text{si } u \text{ y } v \text{ son adyacentes} \\ u \cdot v &= 0 && \text{en caso contrario} \end{aligned}$$

Finalmente consideramos al espacio parcial lineal con puntos definidos como los vectores de  $\mathbb{F}_2 P \setminus Rad(\mathbb{F}_2 P)$  y rectas definidas como los subconjuntos  $\{x, y, z\}$  tal que  $x \cdot y = 1$  y  $x + y + z = 0$ .

Definimos  $C(\Gamma)$  al subespacio de  $\mathbb{F}_2 P \setminus Rad(\mathbb{F}_2 P)$  generado por  $\Gamma$ .

**Observación 17.**  *$P$  y  $C(\Gamma)$  son espacios de tipo simpléctico.*

**Lema 20.** *Sea  $P$  un espacio de tipo simpléctico.*

*Si  $\psi : P \rightarrow V$  es una representación de  $P$  y existe una gráfica  $\Gamma \subset P$  tal que:*

1.  $\Gamma$  genera el espacio parcial lineal  $P$ .
2. Los vértices de  $\Gamma$  son una base para el espacio vectorial  $V$

*Entonces,  $\psi : P \rightarrow V$  es la representación universal de  $P$ .*

*Demostración.* Como  $P$  es del tipo simpléctico entonces por el corolario anterior,  $P$  tiene una representación simpléctica universal  $\phi : P \rightarrow U = \mathbb{F}_2\Gamma/L$ ; por hipótesis existe  $\psi : P \rightarrow V$ , entonces existe una única transformación lineal  $T : U \rightarrow V$  tal que  $\psi = T \circ \phi$ .

La restricción  $T|_{\phi(P)}$  es la inclusión  $P \subset V$  y además como  $\Gamma \subset P$  entonces  $T(\phi(\Gamma)) = \Gamma$ .

Ahora, por (2), los vértices de  $\Gamma$  son linealmente independientes en  $V$  y como  $\Gamma \subset P \subset V$  entonces se tiene que  $\phi(\Gamma)$  es linealmente independiente en  $U$  (conjuntos independientes van a conjuntos independientes bajo transformaciones lineales), más aún, como  $\phi(P)$  genera a  $U$  y de (1) tenemos que  $\langle \Gamma \rangle = \langle \langle \Gamma \rangle \rangle = \langle \phi(P) \rangle = U$ , entonces  $\Gamma$  es base para  $U$ .

Por lo tanto, las dos representaciones son equivalentes.

$\therefore \psi : P \rightarrow V$  es la representación universal de  $P$ . □

**Proposición 12.** *La representación  $C(\Gamma) \rightarrow \mathbb{F}_2\Gamma$  es la representación universal de  $C(\Gamma)$ .*

*Demostración.* Notemos que  $C(\Gamma)$  es un espacio de tipo simpléctico, entonces por el corolario 5 existe su representación universal.

Además por como construimos  $C(\Gamma)$ , tenemos que  $C(\Gamma) \subset \mathbb{F}_2\Gamma$  es una representación de  $P$ . Más aún, tenemos que  $\Gamma$  genera a  $C(\Gamma)$  y que  $\Gamma$  es una base para  $P = \mathbb{F}_2\Gamma \setminus \text{Rad}(\mathbb{F}_2P)$ , así utilizando el lema 20, se sigue que  $C(\Gamma) \rightarrow \mathbb{F}_2\Gamma$  es la representación universal de  $C(\Gamma)$ . □

**Definición 29.** *Sea  $C$  la categoría de los espacios parciales lineales de orden 2. Una gráfica  $D$  es un **Diagrama** para el espacio  $P \in C$  si  $D$  es una subgráfica inducida de  $P$  tal que genera al espacio  $P$  y para cualquier morfismo de gráficas  $g : D \rightarrow P'$  con  $P' \in C$ , existe un morfismo  $f : P \rightarrow P'$  en  $C$  tal que  $f|_D = g$ .*

**Teorema 16.** *Sea  $P$  un espacio parcial lineal de tipo simpléctico, supongamos que  $\Gamma$  es una subgráfica inducida de  $P$  tal que  $\Gamma$  genera a  $P$  como espacio parcial lineal. Entonces,  $\Gamma$  es un diagrama para  $P$  en la categoría  $S_p$  si y sólo si existe una representación lineal  $P \rightarrow V$  tal que  $\Gamma$  es una base para el espacio vectorial  $V$ .*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ] Supongamos que  $\Gamma$  es un diagrama para  $P \in S_p$ .

Como  $P \in S_p$ , existe su representación universal  $P \subset U$  (por corolario 5), consideremos la representación universal  $C(\Gamma) \subset \mathbb{F}_2\Gamma$  (por proposición 12).

Como  $\Gamma \subset C(\Gamma)$ , por la definición de diagrama tenemos que existe un morfismo entre espacios parciales lineales  $\varphi : P \rightarrow C(\Gamma)$  tal que  $\varphi \upharpoonright \Gamma$  es la identidad en  $\Gamma$ .

De donde, obtenemos  $P \rightarrow C(\Gamma) \rightarrow \mathbb{F}_2\Gamma$ .

Así, como  $P \subset U$  es universal, entonces existe una única transformación lineal  $T : U \rightarrow \mathbb{F}_2\Gamma$  tal que  $T \upharpoonright \Gamma$  es también la inclusión de  $\Gamma$  en  $\mathbb{F}_2\Gamma$ , entonces, como  $\Gamma$  genera a  $U$  y  $\Gamma$  es una base de  $\mathbb{F}_2\Gamma$ , tenemos que  $\Gamma$  es una base para  $U$ .

$\Leftarrow$ ] Supongamos que  $P$  tiene una representación lineal  $P \subset U$  tal que  $\Gamma$  es una base para  $U$ , note que por el lema 20 esta representación es universal.

Sea  $P' \in S_p$ , consideremos  $P' \subset U'$  su representación universal (corolario 5) y sea  $\alpha : \Gamma \rightarrow P'$  un morfismo de gráficas.

Como  $\alpha$  es un morfismo, tenemos que  $a$  y  $b$  son colineales en  $\Gamma$  si y sólo si  $\alpha(a)$  es adyacente a  $\alpha(b)$  en  $P'$ .

Por tanto, si  $(\cdot)$  y  $(\cdot)'$  son formas bilineales en  $U$  y  $U'$  respectivamente, entonces tenemos que:

$$\forall a, b \in \Gamma \quad a \cdot b = \alpha(a) \cdot' \alpha(b), \text{ más aún } \forall x, y \in U \quad x \cdot y = T(x) \cdot' T(y).$$

Ahora, veamos que  $T(P) \subset P'$ .

Como  $\Gamma$  genera a  $P$ , entonces para cualquier  $x \in P$  existe una secuencia  $x_1, \dots, x_n$  de puntos en  $\Gamma$  tal que  $x = x_1 + \dots + x_n$  y  $(x_1, \dots, x_i) \cdot x_{i+1} = 1$ .

Entonces  $T(x) = T(x_1 + \dots, x_{n-1}) + T(x_n)$ . Podemos asumir inductivamente que  $T(x_1 + \dots + x_{n-1}) \in P'$ . Pero como  $T(x_n)$  también está en  $P'$  y  $(x_1 + \dots + x_{n-1}) \cdot x_n = 1$ , entonces  $T(x_1 + \dots + x_{n-1}) \cdot' T(x_n) = 1$ , de donde  $T(x) \in P'$ .

Finalmente, por la definición de rectas en la representación universal, la restricción  $T \upharpoonright P : P \rightarrow P'$  es un morfismo de espacios parciales y  $T \upharpoonright P$  extiende a  $\alpha$ .  $\square$



## 6.1. Existencia de diagramas

El resultado siguiente nos da una caracterización para los diagramas de los espacios reducidos de tipo simpléctico con la propiedad de Reyé.

**Lema 21.** *Un espacio reducido y conexo de tipo simpléctico  $P$  tiene la propiedad de Reyé si y sólo si  $P$  contiene como subgráfica inducida al diagrama de Dynkin  $D_4$ .*

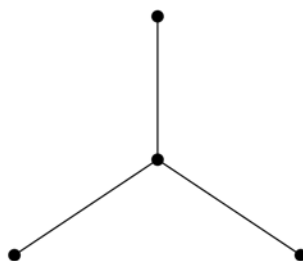


Figura 6.1: Diagrama de Dynkin  $D_4$

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ] Sea  $P \in S_p$  tal que contiene a la gráfica  $D_4$ , entonces el generado de  $D_4 \subset P$ , de donde  $P$  contiene las nueve líneas que se generan a partir de  $D_4$ , véase figura 6.2, teniendo más de cuatro puntos colineales a cualesquiera dos no colineales, es decir,  $P$  tiene la propiedad de Reyé.

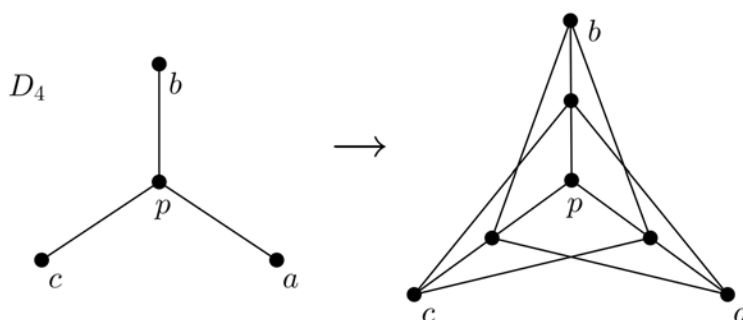


Figura 6.2:  $D_4 \Rightarrow$  Propiedad de Reyé

$\Rightarrow$ ] Sea  $P \in S_p$  reducido con la propiedad de Reyé, consideremos dos puntos no colineales  $a$  y  $b$ , entonces existe un plano dual afín que contiene a ambos, de donde

hay cuatro puntos colineales a  $a$  y  $b$ , más aún por la propiedad de Reyé, existe otro quinto punto  $p$  colineal a ambos.

Como  $P$  es reducido, sea  $L$  la recta que contiene a  $a$  y no contiene a  $b$ , entonces  $p$  es colineal con un punto  $d \in L$  con  $d \neq a$ .

Si  $c$  es el tercer punto sobre la línea por  $p$  y  $d$ , entonces formamos la subgráfica inducida  $D_4 = \{a, b, c, p\}$ . Véase figura 6.3.

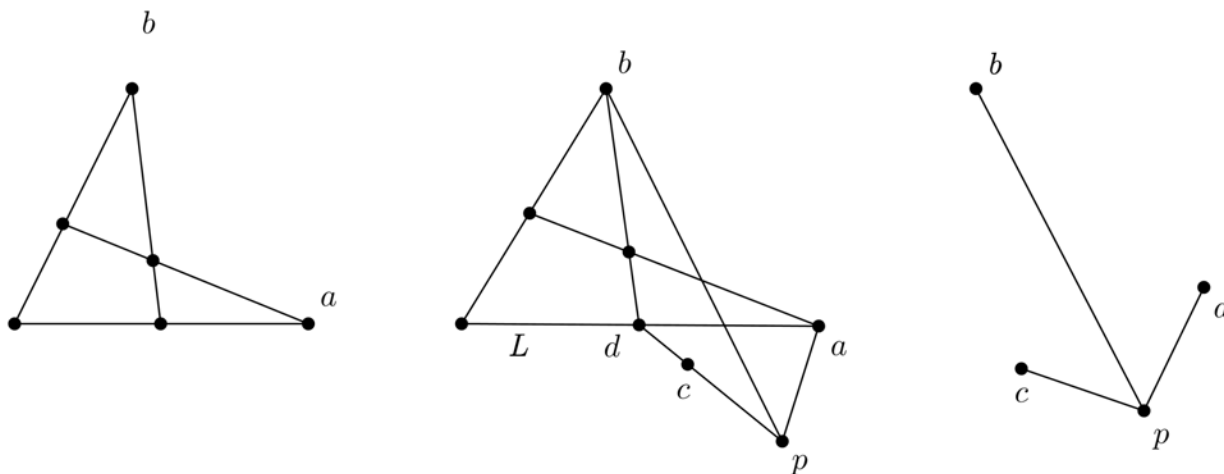


Figura 6.3: Propiedad de Reyé  $\Rightarrow D_4$

□

**Teorema 17.** *Sea  $P$  un espacio conexo y reducido de tipo simpléctico con la propiedad de Reyé, sea  $P \rightarrow U$  la representación universal de  $P$ . Si  $D$  es una subgráfica inducida de  $P$  tal que:*

*$D$  contiene al diagrama de Dynkin  $D_4$  como subgráfica inducida.*

*$D$  es conexa.*

*$D$  es una base para el espacio vectorial  $U$ .*

*Entonces,  $D$  es un diagrama para  $P \in S_p$ .*

*Demostración.* Note que:

- $C(D)$  es conexa pues  $D$  es conexa.
- $C(D)$  es reducido pues: sean  $a, b \in D$  dos puntos no colineales. Como  $a, b \in P$  y  $P$  es reducido entonces existe un punto  $c \in P$  tal que  $c \cdot a \neq c \cdot b$ .

Entonces  $c \cdot (a + b) = 1$ , pero como  $D$  es una base para  $U$  entonces existe un  $d \in D$

tal que  $d \cdot (a + b) = 1$ , de donde  $d \cdot a \neq d \cdot b$ , es decir,  $C(D)$  es reducido.

La restricción de la representación universal  $P \subset U$  a  $C(D) \subset U$  es también la representación universal de  $C(D)$  por la proposición 12.

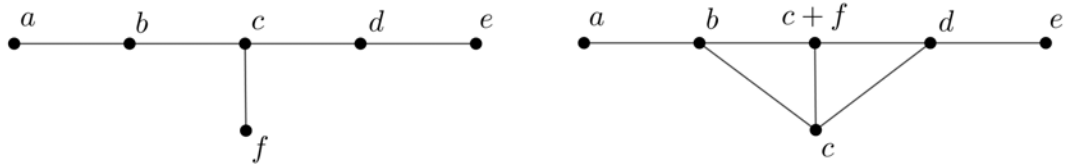
Más aún, como  $D$  genera a  $C(D)$  y  $D$  es una base de  $U$ , entonces  $C(D)$  y  $P$  definen la misma forma cuadrática en el espacio vectorial  $U$ .

Teniendo así dos espacios,  $P$  y  $C(D)$  que satisfacen las hipótesis del teorema 15 y con la misma forma cuadrática  $q$ .

Entonces,  $P = O(q) = C(D)$ .

$\therefore$  Por el teorema 16,  $D$  es diagrama para  $P$ . □

**Observación 18.** *La condición de tener el diagrama de Dynkin  $D_4$  no es necesaria. Por ejemplo las gráficas siguientes son diagramas para el espacio  $O^-(6, 2)$  el cuál tiene la propiedad de Reye.*



**Teorema 18.** *Todos los espacios en la categoría de espacios parciales lineales de tipo simpléctico  $S_p$  tienen diagramas.*

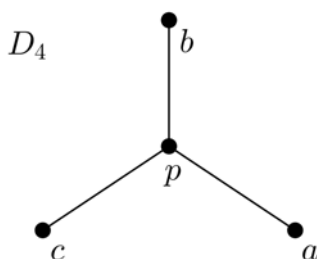
*Demostración.* Sea  $P \in S_p$ .

Caso 1  $P$  reducido con la propiedad de Reyé.

Por teorema 17 basta encontrar una subgráfica inducida  $D$  tal que:

- (1)  $D_4 \subset D$       (2)  $D$  conexa      (3)  $D$  contiene una base para  $U$

Por lema 21,  $D_4 \subset P$ .



Tenemos que  $\{a, b, c, p\}$  son linealmente independientes en la representación universal de  $P$  (ie.  $P \rightarrow \mathbb{F}_2 P \rightarrow U = \mathbb{F}_2 P/L$ ), pues  $\{a, b, c\}$  es un coclan y  $p$  su polo.

Al pasar a  $\mathbb{F}_2 P$  seguirán siendo independientes por como está definida la forma bilineal, la cual se preserva también en el cociente.

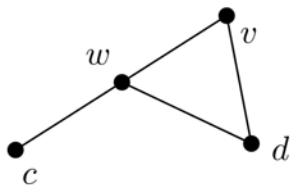
Ahora, por lema de Zorn,  $D_4$  puede ser extendido a una subgráfica conexa linealmente independiente maximal de  $P$ , a saber,  $D$ .

Hasta aquí sólo llevamos las condiciones (1) y (2)

Demostremos (3): como  $P$  genera al espacio vectorial  $U$ , es suficiente probar que  $P \subset V$  es el espacio vectorial generado por  $D$  en  $U$ .

Sean  $p \in P$  y  $d \in D$ .

- Si  $p$  es colineal con  $d$ . Entonces como  $D$  es maximal, entonces  $p \in V$ .
- Si  $p$  y  $d$  no son colineales.



Como  $P$  es conexo entonces existe  $v \in V$  tal que  $v$  es colineal con  $p$  y  $d$ . Consideremos la recta  $l_1 = \{p, v, w\}$  en  $P$ , entonces  $d$  y  $w$  son colineales. Por lo tanto  $v, w \in P$  y consecuentemente  $p \in V$ .

$\therefore$  Si  $P \in S_p$  es conexo y reducido con la propiedad de Reyé,  $P$  tiene diagrama.

Caso 2  $P$  reducido con la propiedad de Desargues.

Por el teorema 12,  $P = \mathcal{T}(\Omega)$ , es decir, un espacio parcial lineal cuyos puntos

son de la forma  $\{a, b\} \subset \Omega$  con  $\Omega$  un conjunto y  $a \neq b$ ; y rectas de la forma  $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ .

Sea  $\mathbb{F}_2\Omega$  el espacio vectorial con base los puntos de  $\Omega$ .

Consideremos el subespacio  $U = \{v \in \mathbb{F}_2\Omega \mid d(v, 0) \text{ es par}\}$  con  $d$  la distancia de Hamming, es decir, la distancia entre dos puntos (conjuntos)  $a$  y  $B$  definida como  $| (A \cap B)^C |$ . (Para mayor referencia sobre ésta, véase [8]).

Entonces  $\{a, b\} \mapsto a + b$  es una representación de  $\mathbb{F}_2\Omega$  en  $U$ .

Tomemos un elemento fijo  $u \in \Omega$ . Definimos  $\{\{u, a\} \in \mathcal{T}(\Omega)\} = D$ .

Entonces, la subgráfica  $D$  de  $\mathcal{T}(\Omega)$  genera a  $\mathcal{T}(\Omega)$  como espacio parcial lineal pues  $\{a, b\} = \{u, a\} + \{u, b\}$ , de donde  $D$  genera a  $U$  como espacio vectorial.

Más aún, si  $\{\{u, s\} \mid s \in S\} \subset D$  es un conjunto finito y  $\sum_{s \in S} \{u, s\} = 0$ , entonces  $|S|$  es par, de donde  $S = \emptyset$ .

Así,  $D$  es linealmente independiente y  $D$  es una base de  $U$ , es decir,  $D$  es diagrama para  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

$\therefore$  Si  $P \in S_p$  es conexo y reducido con la propiedad de Desargues,  $P$  tiene diagrama.

#### Caso general

Para el caso general, se considera a  $P$  un espacio conexo de tipo simpléctico. Es decir, ya no es hipótesis que  $P$  sea reducido. Debido a los temas que se abarcan para llegar a él, no se hará la demostración. Para ver la demostración véase en [4] y los temas necesarios en [2].

□

Por lo tanto, hemos probado que todos los espacios en la categoría  $S_p$ , tienen diagrama.

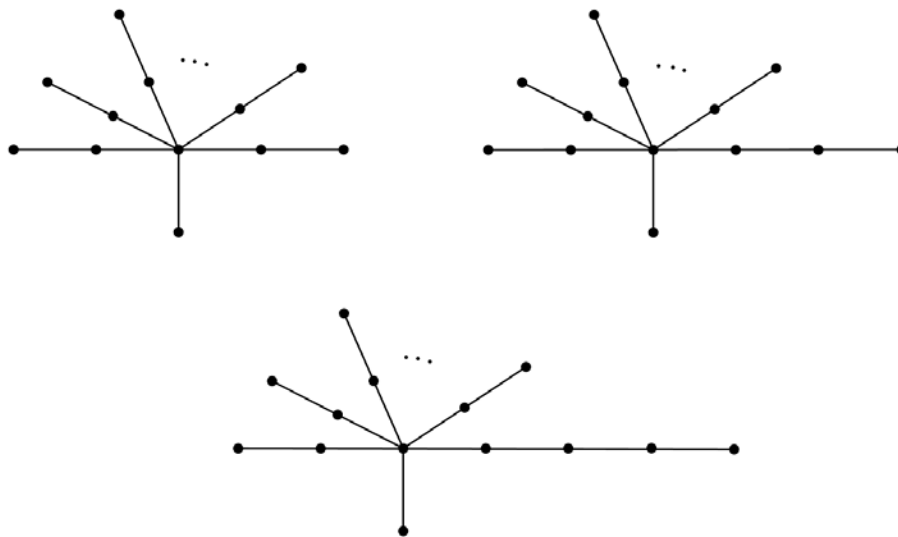
En el siguiente capítulo se hará la clasificación de estos espacios, así como las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 7

## Conclusiones

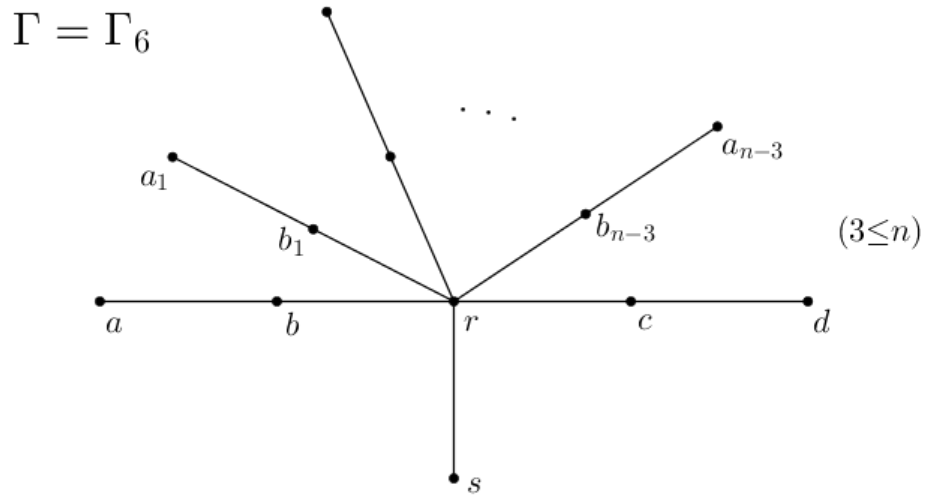
Como resultado final, daremos una aplicación del teorema anterior.

Ya hemos probado que los siguientes diagramas de Dynkin:



son diagramas para los espacios  $\overline{O^-(2n, 2)}$ ,  $\overline{S_p(2n, 2)}$ ,  $\overline{O^+(2n), 2}$  respectivamente. Pero ahora, daremos una prueba más corta para esto, aplicando solamente del teorema 18 (anterior).

Consideremos la gráfica siguiente:



Y el espacio vectorial  $\mathbb{F}_2\Gamma = U$ .

Sea  $P = C(\Gamma)$  el espacio parcial lineal generado por  $\Gamma$  en  $U$ .

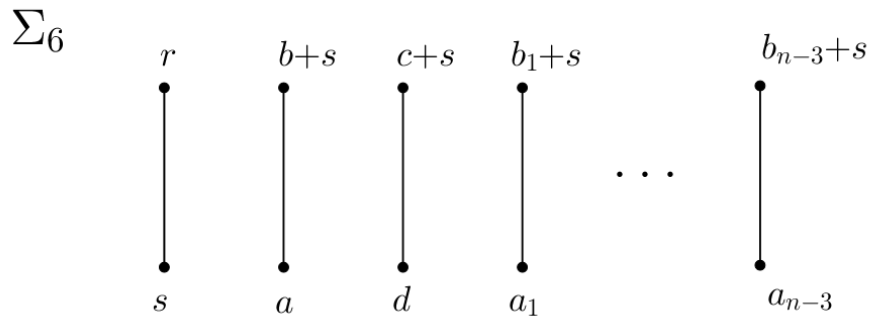
Por la proposición 11 y lema 12,  $P \subset U$  es su representación universal.

De donde,  $P$  es conexo, reducido y de tipo simpléctico.

Así, como  $\Gamma$  cumple con las condiciones (1), (2) y (3) del teorema 18 (anterior), entonces  $\Gamma$  es un diagrama para  $C(\Gamma)$ .

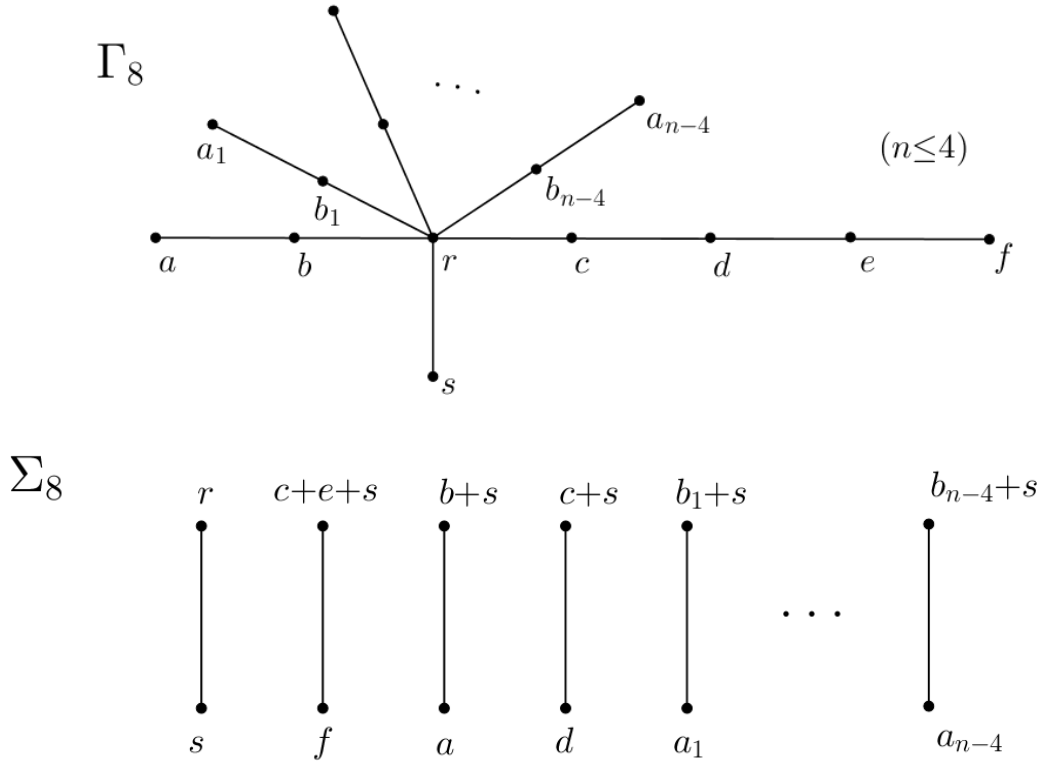
Además por las proposición 15, tenemos que  $C(\Gamma) = O(q)$ .

Buscando una base hiperbólica  $\Sigma_6$  de  $\mathbb{F}_2\Gamma$  podemos concluir que  $q = q^-$ .



$\therefore \Gamma$  es un diagrama para  $\overline{O^-(2n, 2)}$ .

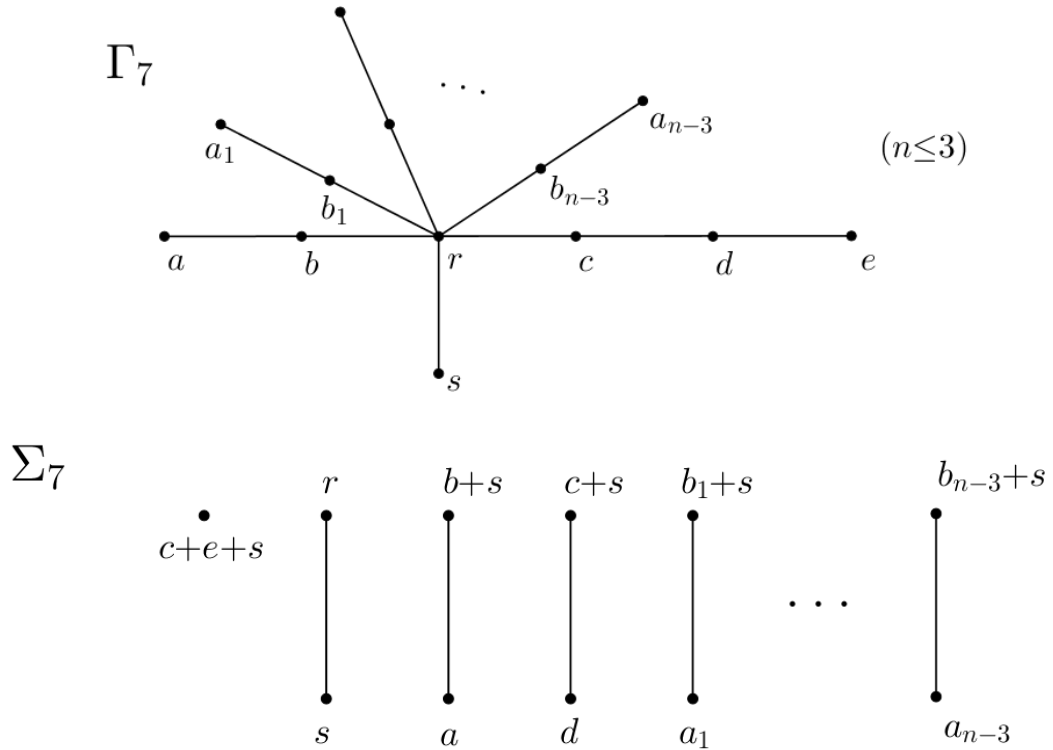
Análogamente, podemos ver que  $\Gamma_8$  es un diagrama para el espacio  $\overline{O^+(2n, 2)}$ , considerando la base hiperbólica  $\Sigma_8$ :



Como  $q = 1$  para dos líneas dadas en la base hiperbólica  $\Sigma_8$ , tenemos que  $q = q^+$ .  
 $\therefore \Gamma_8$  es un diagrama para  $\overline{O^+(2n, 2)}$

Finalmente, consideremos la gráfica  $\Gamma_7$  y la base hiperbólica  $\Sigma_7$  del espacio vectorial  $\mathbb{F}_2\Gamma$  de dimensión impar  $2n + 1$ :





Como el Radical del espacio es  $\{0, c + e + s\}$  y  $q(c + e + s) = 1$ , tenemos que  $q$  es no degenerada. Y análogamente a los casos anteriores,  $\Gamma_7$  es un diagrama para  $C(\Gamma_7) = O(q) = \overline{S_p(2n, 2)}$ .

Teniendo así, una construcción para llegar a partir de gráficas a espacios simplécticos, que a su vez tienen subespacios ortogonales.

E inversamente, a partir de una configuración llegar a su diagrama mediante una representación.

Por lo tanto, podemos contestar ¿Qué espacios tienen diagrama?

Todos los espacios en la categoría  $S_p$  tienen diagrama.

Lo que nos deja con la siguiente lista de todos los espacios de tipo simpléctico, junto con su cardinalidad y dimensión.

La lista nos muestra que dos espacios con la misma cardinalidad y dimensión son isomorfos.

Espacio	Cardinalidad	Dimensión
$\mathcal{T}(\Omega) \mid  \Omega  = n, n \geq 2$	$\binom{n}{2}$	$n - 1$
$\overline{O^-(2n, 2)} \mid n \geq 3$	$\binom{2^n+1}{2}$	$2n$
$\overline{O^+(2n, 2)} \mid n \geq 4$	$\binom{2^n}{2}$	$2n$
$\overline{S_p(2n, 2)} \mid n \geq 3$	$2^{2n} - 1$	$2n + 1$

Algunos casos particulares:

Espacio	Cardinalidad	Dimensión
$\overline{O^+(6, 2)} = \mathcal{T}(\Omega), \mid  \Omega  = 8$	28	7
$\overline{O^+(4, 2)}$ es no conexo = dos rectas disjuntas	6	-
$\overline{O^+(2, 2)} =$ un punto	1	1
$\overline{O^-(4, 2)} = \mathcal{T}(\Omega), \mid  \Omega  = 5 =$ Desargues	10	4
$\overline{O^-(2, 2)} = \mathcal{T}(\Omega), \mid  \Omega  = 3 =$ una recta	3	2
$\overline{S_p(4, 2)} = \mathcal{T}(\Omega), \mid  \Omega  = 6$	15	5
$\overline{S_p(2, 2)} = \mathcal{T}(\Omega), \mid  \Omega  = 3 =$ una recta	3	2
$\mathcal{T}(\Omega), \mid  \Omega  = 4$ es no reducido = plano dual afín	6	3



# Capítulo 8

## Apéndice

### 8.1. Teoría de Gráficas

En el caso en que el lector no esté familiarizado con la teoría de gráficas, aquí podrá encontrar las definiciones básicas que se usan en este trabajo. Para un mejor estudio véase [11].

**Definición 30.** Una **gráfica**  $G = (V(G), A(G))$  consiste en un conjunto no vacío de objetos llamados **vértices** ( $V(G)$ ) y un conjunto de pares no ordenados de vértices llamados **aristas** ( $A(G)$ ).

Si el conjunto de vértices es finito, se dice que la gráfica es finita.

**Definición 31.** Dada una aristas, llamamos extremos a los elementos del conjunto de vértices que la determinan. Se dice que estos dos vértices son **adyacentes** (y no adyacentes en caso contrario).

Análogamente, dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común.

Cuando los extremos de una arista son iguales, es decir, cuando la arista empieza y termina en el mismo lugar se le llama **lazo**.

A dos o más aristas con los mismos extremos se les llamamos **aristas múltiples**.

**Definición 32.** Decimos que una gráfica es **simple** si no tiene lazos ni aristas múltiples.

**Definición 33.** Dada una gráfica  $G$ , una **subgráfica**  $H$  de  $G$  es una gráfica tal que:  $V(H) \subset V(G)$  y  $A(H) \subset A(G)$ .

**Definición 34.** Sea  $G$  una gráfica y  $S$  un subconjunto de vértices de  $G$ , la subgráfica inducida por  $S$  (**subgráfica inducida por vértices**) es la subgráfica  $H$  de  $G$  tal que  $V(H) = S$  y dos vértices de  $H$  son adyacentes si y sólo si son adyacentes en  $G$ .

**Definición 35.** Se le llama **camino** a una sucesión de vértices  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  de una gráfica  $G$ , donde  $v_i, v_j$  son vértices adyacentes para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Además, se dice que es **cerrado** si  $u_1 = u_n$ .

**Definición 36.** Un **ciclo** es un camino cerrado  $(u_1, u_2, \dots, u_n = u_1)$  tal que  $u_i \neq u_j \quad \forall i \neq j$ .

**Definición 37.** Una **trayectoria** en una gráfica  $G$  es un camino en el que no se repiten vértices.

**Definición 38.** Decimos que una gráfica  $G$  es **conexa** si para cualquier par de vértices existe una trayectoria que los une.

**Definición 39.** Las **componentes conexas** de una gráfica  $G$  son las subgráficas que son máximas por contención con respecto a la propiedad de ser conexas.

**Definición 40.** Un **árbol** es una gráfica conexa sin ciclos.

## 8.2. Álgebra Lineal

Así mismo, en esta sección se encuentran unas de las definiciones básicas relacionadas con los espacios vectoriales. Para una mejor estudio véase [12].

**Definición 41.** Un **campo**  $K$  es un conjunto con dos operaciones  $+$  y  $\cdot$  (llamadas *suma* y *multiplicación*, respectivamente), tal que son cerradas en el conjunto y que  $\forall a, b, c \in K$  cumplen las siguientes propiedades:

- \*  $a + b = b + a \quad y \quad a \cdot b = b \cdot a.$
- \*  $(a + b) + c = a + (b + c) \quad y \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$
- \*  $\exists n \ 0, 1 \in K, \ 0 + a = a \quad y \quad 1 \cdot a = a.$
- \*  $\forall a, b \in K, \ \exists n \ c, d \in K, \ a + c = 0 \quad y \quad b \cdot d = 1.$
- \*  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

**Definición 42.** Un **espacio vectorial**  $V$  sobre un campo  $K$  consiste de un conjunto en el que están definidas dos operaciones (llamadas adición y producto escalar, respectivamente), tal que son cerradas en el espacio y que cumplen las siguientes propiedades:

- \*  $\forall x, y \in V, x + y = y + x.$
- \*  $\forall x, y, z \in V, (x + y) + z = x + (y + z).$
- \*  $\exists 0 \in V, x + 0 = x$  para todo  $x \in V.$
- \*  $\forall x \in V \exists y \in V, x + y = 0.$
- \*  $\forall 0 \in V, 1x = x.$
- \*  $\forall a, b \in K, (ab)(x) = a(bx).$
- \*  $\forall a, b \in K, a(x + y) = ax + ay.$
- \*  $\forall a, b \in K, (a + b)x = ax + bx.$

A los elementos del campo se les llama *escalares* y a los del espacio vectorial se les llama *vectores*.

**Definición 43.** Un subconjunto  $W$  de un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $K$  se llama **subespacio** de  $V$  si  $W$  es un espacio vectorial sobre el campo  $K$ , bajo las operaciones de suma y multiplicación escalar definidas en  $V$ .

**Definición 44.** Se dice que un espacio vectorial  $V$  es la suma directa de  $W_1$  y  $W_2$ , expresada como  $V = W_1 \oplus W_2$ , si  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios de  $V$  tales que  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$  y  $W_1 + W_2 = V$ .

**Definición 45.** Un subconjunto  $A$  de un espacio vectorial  $V$  se dice **linealmente dependiente** si existe un número finito de vectores  $v_1, \dots, v_n$  y escalares  $a_1, \dots, a_n$  no ceros tal que:

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0.$$

Un conjunto que no es linealmente dependiente, se llama **linealmente independiente**.

**Definición 46.** Sea  $S$  un subconjunto no vacío de un espacio vectorial  $V$ . Se le llama **generado de  $S$**  al conjunto que consiste en todas las combinaciones lineales de los vectores en  $S$ . Por convención el generado del conjunto  $\emptyset$  es  $\{0\}$ .

**Definición 47.** Una **base**  $\beta$  para un espacio vectorial  $V$  es un subconjunto linealmente independiente de  $V$  que genera a  $V$ .

Se dice que la cardinalidad de la base, es la *dimensión* de  $V$ .



# Bibliografía

- [1] H. Cárdenas, E. Lluís, G. Raggi-Cárdenas y R. San Agustín. (1997)  
*Diagramas para las configuraciones simplécticas y ortogonales*. Instituto de estudios con Iberoamerica y Portugal.
- [2] H. Cárdenas, E. Lluís, G. Raggi-Cárdenas y R. San Agustín. (1999)  
*Diagrams for symplectic type configurations*. Communications in Algebra.
- [3] H. Cárdenas, E. Lluís, G. Raggi-Cárdenas y R. San Agustín. (2002)  
*Partial linear spaces with dual affine planes*. Communications in Algebra.
- [4] H. Cárdenas, E. Lluís, G. Raggi-Cárdenas y R. San Agustín. (2010)  
*Diagrams in categories of partial linear spaces of order two*. Communications in Algebra.
- [5] M. Aschbacher. (1997) *3-Transposition Groups*. (1-2, 39-42, 91-94). Cambridge University Press.
- [6] I. Kaplansky. (1974) *Geometry and linear algebra, a second course*. (21-30). Chelsea Publishing Company.
- [7] J.I. Hall. (1986) *Some 3-transpositions groups with normal 2-subgroups*. London Mathematical Society.
- [8] A. Beutelspacher, U. Rosebaum. (1998) *Projective Geometry: From foundations to applications*. (182-183). Cambridge University Press.
- [9] R. San Agustín Chi. *Dos representaciones del hexagrama místico*. (69-71). Tesis, UNAM.
- [10] A. Hatcher (2001) *Algebraic Topology*. (85-86). Cambridge University Press.
- [11] M.C. Curcó, *Una introducción a la teoría de gráficas*. (7-9, 17-20, 31-35,67). Facultad de Ciencias, Vínculos matemáticos.



- [12] S. Friedberg, A. Insel, L. Spence. (2003) *Linear Algebra, 4 Edition*. (Capítulo 1, Apéndice C). Illinois State University.
- [13] T. Pisanski, B. Servatius. (2010) *Configurations from a graphical viewpoint*. (v-vii). Birkhäuser advanced texts.