UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sutilezas del Enfoque Palatini de la Relatividad General

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Johas David Morales Barroso

TUTOR

Dr. Yuri Bonder Grimberg

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

1. Datos del alumno
Morales
Barroso
Johas David
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
311190546

2. Datos del tutor
Dr.
Yuri
Bonder
Grimberg

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Chryssomalis
Chryssomalakos

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Pablo
Barberis
Blostein

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Marcelo
Salgado
Rodríguez

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Leonardo
Patiño
Jaidar

7. Datos del trabajo escrito
Sutilezas del Enfoque Palatini de la Relatividad General
56p
2018

Resumen

En este trabajo se trata el enfoque Palatini de la relatividad general para el caso en el que la acción de materia tiene una dependencia arbitraria en la conexión. Lo anterior se motiva conceptualmente desde el punto de vista de las estructuras matemáticas del espacio tiempo y la necesidad de una teoría que de explicación a los problemas de la relatividad general.

Motivado el tema central del trabajo, se habla de las matématicas necesarias para su estudio. Posteriormente se plantean dos formulaciones de relatividad general, la formulación métrica y la ya mencionada formulación afín-métrica o Einstein-Palatini. Se aborda el tema central del trabajo que es un tratamiento a la Palatini en la presencia de *lagrangianos de materia que tienen una dependencia arbitraria en la conexión espacio-temporal*. Se desarrolla la teoría haciendo el caso general, es decir, sin introducir una acción particular y se resuelve para la conexión. En este caso se encontraron sutilezas y se encontró la manera de realizarlo de manera consistente. De lo anterior resulta como caso particular aquel en el que se presumiblemente son equivalentes ambas formulaciones, el caso de vacío. Este se analiza con detalle, encontrando una posible discrepancia con la literatura.

Finalmente se introduce un lagrangiano particular de materia que depende de la conexión espacio-temporal y se le aplican ambas formulaciones. Como resultado concluimos que en general ambas formulaciones no llevan a efectos físicos iguales pues encontramos que, dadas ciertas condiciones sobre el campo en la teoría, éste puede gravitar de forma distinta en una formulación de como lo hace en la otra. Más aún, en el ejemplo propuesto se verá que la masa de un campo vectorial en el tratamiento a la Palatini actúa como constante cosmológica.

Agradecimientos

Primero lo primero. Quiero agradecer a mi mamá, Ana, sin la cual todo esto no sería posible. A Yuri por guiarme durante estos casi dos años y por ayudarme a seguir adelante. A quienes aceptaron ser parte del jurado de esta tesis: Chryssomalis, Pablo, Leonardo, Marcelo, Elías, Tim y a Héctor además por su valiosísimo apoyo en el último semestre.

En general a mi familia y en especial a quienes no llegaron a verme graduado, es decir, mis abuelos. También a mi papá y a todos sus hermanos, mis tíos, quienes motivaron un espíritu crítico en mi. A quienes ayudaron a mi familia, en particular a mi mamá y a mi, el licenciado Andrade y la maestra Emma.

De entre los que han sido mis profesores se llevan mención honorífica Ricardo Pizano, Martín Guzmán Flores, Fernando Aurelio López Hernández y Elsa María Cano.

A mis amigos, básicamente todo el equipo de fútbol y a Diego que ya no nos acompaña en él, también a los de la prepa Juan y Beto así como a "el padre", "el verde", "el barrios" y Mónica que también lo es desde la prehistoria.

A quienes me acompañaron a lo largo de la carrera, en especial a Brandon, a Fany y muy especialmente a Alejandra.

Quiero agradecer a la UNAM por permitirme tantos años de progreso personal y al Instituto de Ciencias Nucleares, por brindarme uno de los mejores espacios de la universidad.

También quiero agradecer a los proyectos PAPIIT-RA101818 y PAPIIT-IA105617 por las becas con las que conté este último año.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En esta introducción se habla de la teoría de la relatividad general a un nivel conceptual. Se habla de sus éxitos como teoría física y de los casos donde llega a fallar. Posteriormente se comentan algunas alternativas que buscan subsanar estos huecos en la teoría. Y finalmente se sumerge al lector en el tema central de este trabajo.

1.1. Las estructuras espacio-temporales y la teoría de la Relatividad General

La relatividad general es una teoría del *espacio-tiempo* [1]. Supone que el espacio-tiempo es una *variedad diferencial métrica* 4-dimensional, al decir que el espacio-tiempo es una variedad diferencial, asumimos que el espacio-tiempo mismo tiene alguna topología así como una estuctura diferencial. Además de las estucturas topológica y diferencial una variedad suele contar con otras estructuras como la estructura afín, que determina que líneas son rectas o la estructura métrica que sirve para medir distancias. Éstas estructuras son el "lápiz" la "regla" y el "compás" de Euclides para espacios geométricos más vastos que el plano euclidiano o el espacio euclidiano de Newton.

Es importante mencionar que las estructuras matemáticas antes mencionadas se encuentran presentes en la mecánica newtoniana. La teoría newtoniana tiene un tiempo y un espacio euclidiano tridimensional $\mathbb{E}^3$ estático. Más aún, es el espacio el que determina la trayectoria que han de seguir partículas libres, dicha trayectoria resulta ser rectilínea para ello necesitamos la estructura afín de $\mathbb{E}^3$, y uniforme para esto necesitamos la estructura métrica espacial de $\mathbb{E}^3$ y la métrica temporal, que se toma como la de $\mathbb{R}$.

Lo anterior revela la importancia de la estructura espacio-temporal en la primera ley de Newton.

> Primera ley: Todos los cuerpos se mantienen en su estado de descanso o de movimiento uniforme en línea recta, salvo que se les obligue a cambiar su estado mediante fuerzas impresas.

Para hacerse de contenido la primera ley de Newton necesita de la estructura espacio-temporal subyacente.

La teoría newtoniana puede formularse en una variedad de cuatro dimensiones [2], o en estructuras matemáticas más refinadas [3], incluso puede formularse en un espacio geométrico que no sea el espacio euclidiano tridimensional [4]. Incorporar las leyes dinámicas en una teoría de ese estilo es simple si se entiende la importancia de la estructura espacio-temporal en la primera ley de Newton. Las leyes dinámicas se anclan en la estructura espacio-temporal, en particular, tomando las "líneas rectas" del espacio matemático en cuestión, para lo cual es necesario que el espacio cuente con una estructura afín.

En relatividad general ocurre exactamente lo mismo; se asume una estructura intrínseca al espacio-tiempo y el movimiento de partículas libres es determinado por el mismo. Es decir, el espacio-tiempo está equipado con una estructura afín que distingue movimiento acelerado de movimiento no acelerado. Para partículas libres y de prueba la "trayectoria natural" son las geodésicas del espacio-tiempo, las "más rectas posibles", pero, el concepto de partícula "libre" no es el mismo que para la teoría newtoniana, como veremos más adelante.

La diferencia de la relatividad general con la física newtoniana es que **relatividad general es la dinámica del espacio-tiempo mismo**; en la descripción física moderna, el espacio-tiempo deja de ser un ente rígido "de fondo" y pasa a jugar un papel dinámico. El escenario estático en el que se desarrolló la Física durante 200 años pasa a tomar vida, a ser afectado por la materia y la energía que hay en el, y a afectar de manera recíproca a la materia y a la energía. El cambio de paradigma que significa promover el espacio-tiempo a un ente dinámico está íntimamente ligado a la idea de que la gravedad no es una fuerza. La gravitación en relatividad general, es una manifestación del espacio-tiempo. Un cuerpo orbitando sigue la trayectoria "más recta posible" que existe en un espacio-tiempo que no es plano, sino un espacio-tiempo *curvo* y dinámico afectado por la materia y la energía.

El principio de equivalencia juega un papel fundamental en la Física moderna y en el desarrollo de la relatividad general, este principio tiene numerosos enunciados [5, 6] pero, en espíritu, es el experimento de Galileo. El que los cuerpos "caigan igual" es lo que permite quitarle a la gravitación su estatus de fuerza. El no poder aislarse de la gravedad, hace pensar si en realidad es algo "ajeno" o se trata de una consecuencia de la geometría subyacente del espacio-tiempo. Al mismo tiempo, el principio de equivalencia permite localmente recuperar la *simetría de Lorentz*, es decir, localmente la Física es igual bajo rotaciones, traslaciones, etc. Lo anterior hace a la teoría bastante poderosa pues recuperamos la Física usual de manera local, esto tiene una realización matemática concreta llamada *coordenadas normales de Riemann*.

El hecho de que todo "caiga igual" tiene importancia experimental para la teoría. La luz, en la aproximación geométrica sigue "líneas rectas", una prueba primero para el principio de equivalencia y después para una teoría en particular es ver si la luz se dobla en presencia de una fuente gravitacional, este doblamiento se observa.

Una vez que hemos aceptado que el espacio-tiempo debe de ser un ente dinámico y que lo relevante es la geometría del mismo, solo falta preguntarnos de que manera han de interactuar el espacio-tiempo con el contenido de materia en él. La manera en que interactuan el espacio-tiempo con la materia y la energía en relatividad general está dada por las ecuaciones de Einstein [7],

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \tag{1.1}$$

donde R_{ab} es el *tensor de Ricci*, R es el *escalar de Ricci* o escalar de curvatura, g_{ab} es el *tensor métrico*. Del lado izquierdo de (1.1) se encuentra la geometría del espacio-tiempo, en particular, R_{ab} y R cuantifican la curvatura del espacio tiempo. Del lado derecho T_{ab} incorpora las densidades de materia y energía. Entonces lo que nos dicen las ecuaciones de Eintein es que la *curvatura del espacio-tiempo* es afectada por las densidades de energía y materia [8]. Por ende la gravitación es consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo. Decimos ecuaciones porque (1.1) es un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales parciales, acopladas no lineales, para la métrica del espacio-tiempo.

Esta manera particular de interactuar materia y energía con el espacio-tiempo es un postulado de la relatividad general. Existen dos motivaciones para tomar (1.1). La primera de ellas es que en el límite no relativista se recupera la gravitación newtoniana; la segunda de ellas es una *navaja de Ockham*, que es la manera elegante de decir, un argumento empírico extra sobre simplicidad como se explicará a continuación. Relatividad general acepta una formulación lagrangiana, al tomar la acción de la teoría como sigue,

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int R\sqrt{-g}d^4x + S_M, \tag{1.2}$$

donde $\kappa = 8\pi G c^{-4}$, R es el escalar de curvatura y S_M es la acción de materia. Cuando exigimos que la acción sea estacionaria respecto a g_{ab} recuperamos (1.1). El argumento sobre simplicidad sostiene que,

$$\mathscr{L}_G = \sqrt{-g}R, \tag{1.3}$$

es el lagrangiano gravitacional más simple que uno puede proponer utilizando elementos de curvatura. Una de las formas de modificar relatividad general es cambiar (1.2) como veremos más adelante.

En resumen, con las palabras "variedad diferencial métrica" se esta hablando de toda una poderosa estructura y maquinaria matemática que se le está otorgando al espacio-tiempo y que tiene gran relevancia física desde el punto de vista conceptual sobre lo que las teorías afirman y en particular sobre lo que la teoría de la relatividad general afirma. Las estructuras espacio-temporales están presentes en prácticamente toda la física al día de hoy y son de vital importancia para las formas que tenemos de describir a la naturaleza, desde la física newtoniana hasta el modelo estándar y por supuesto relatividad general.

1.2. Éxitos de relatividad general

Habiendo hablado someramente de lo que entendemos por relatividad general, hablaremos acerca de los éxitos experimentales que ha tenido la teoría. La relatividad general ha sido puesta a prueba mediante una gran variedad de experimentos [9]. Entre ellos podemos distinguir dos grandes grupos. Las pruebas clásicas, las cuales pueden llevarse acabo dentro del sistema solar, y las pruebas llamadas modernas de las cuales algunas tienen un caracter cósmico pues surgen de los eventos más agresivos existentes en nuestro universo, y otras que requirieron una increíble sofisticación técnica. La primera prueba para culquier teoría de la gravitación es reducirse, en algún límite, a la teoría newtoniana. La relatividad general se reduce a la gravitación newtoniana en el límite no relativista [10].

Las pruebas clásicas

1. La precesión del perihelio de Mercurio [11]. Relatividad general explica el que la órbita de Mercurio precese, problema abierto durante cientos de años y que no encuentra explicación en la gravitación newtoniana.

2. Curvatura de la luz en presencia de objetos masivos [12]. Esta es la prueba experimental que catapultó la teoría, debido en gran parte a que la teoría newtoniana predice que no hay desviacíon de la luz, sin embargo dicho doblamiento de la luz se observa.

3. El retraso de Shapiro [13]. Relatividad general predice un retraso en las señales comparado con el caso newtoniano, es decir, a los fenómenos electromagnéticos les toma más tiempo propagarse cuando se transmiten cerca de una fuente gravitacional. Dicho retraso se observa al transmitir señales a cualquier sonda espacial en el sistema solar.

Las pruebas modernas

1. *Gravity Probe B* [14]. Gravity Probe B mide efectos de *arrastre gravitacional*. Estos efectos aparecen al tener objetos orbitando (o lo que es lo mismo, en caída libre). El primero de ellos consiste en lo siguiente: Se tiene un objeto girando alrededor de algún eje de giro en el espacio-tiempo que representaría tener un planeta estático, al completar una vuelta existirá un cambio en el eje de giro no predicho por la teoría newtoniana [15]. El segundo de ellos también consiste en un cambio en el eje de giro. Éste es causado por un espacio-tiempo que "rota", dicha rotación genera un arrastre gravitacional, que se ve reflejado en un arrastre del eje de giro del giroscopio orbitando. El experimento consiste en poner en órbita 4 giroscopios, y ambos efectos predichos por relatividad general se observan.

2. Sistemas de pulsares binarios. Observacionalmente se encontró que los sistemas de pulsares binarios reducen su periodo orbital conforme transcurre el tiempo. Un sistema de pulsares binarios consiste en un par de estrellas de neutrones que aparentemente emiten radiación de manera periódica, esto es debido a que suelen tener una dirección privilegiada en la cual emiten. Debido a la detección de dicha radiación podemos conocer el periodo orbital de estos sistemas [16]. Usando relatividad general y tomando en cuenta la radiación gravitacional emitida por los pulsares orbitando se llega a una explicación del fenómeno por lo cual fue otorgado el premio nobel de Física 1993.

3. Detección de ondas gravitacionales . Las ondas gravitacionales son una de las primeras predicciones de la teoría. Y fueron detectadas por primera vez en el 2016 [17].

Debido a todo este éxito experimental, relatividad general es la descripción moderna de la gravitación.

1.3. Problemas de la relatividad general

A pesar de los éxitos experimentales de la teoría de la relatividad general, existen varias razones para considerarla una aproximación a una teoría más fundamental.

Incompatibilidad con la mecánica cuántica Como se mencionó en la sección 1.1, la teoría afirma que el espacio-tiempo interactua con la materia y energía en él, sin embargo, a nivel fundamental, la descripción que tenemos de éstos es mediante la mecánica cuántica, y la relatividad general es incompatible con ella.

El problema de las singularidades Existen soluciones en relatividad general, (es decir espacio-tiempos) en los cuales aparecen singularidades, y, de hecho, es un comportamiento usual asumiento que la materia es "bien comportada". Este es el contenido de los teoremas de singularidades de Hawking y Penrose [18].

Problemas cosmológicos Desde la gravitación newtoniana persiste el problema de la materia oscura [19, 20], esta es la manera de llamar a un hipotético tipo de fuente gravitacional que las observaciones astronómicas no revelan, pues este tipo de materia no emitiría radiación electromagnética. La materia oscura gravita como la materia usual y se acumularía cerca de las galaxias explicando así las curvas de rotación galáctica. El otro gran problema es la energía oscura. Las observaciones astronómicas revelan una expansión acelerada del universo. La cosmología relativista primitiva era consiente de que un universo estático es inestable, por lo mismo físicamente no viable. El problema es que la expansión acelerada no se explica mediante materia usual, es por ello que la energía oscura es otro tipo hipotético de fuente gravitacional que explica la expansión acelerada del universo. La constante cosmológica Λ [21] es un candidato a ser la energía oscura. Más aún, utilizando relatividad general la materia y energía oscura deberían de componer la gran mayoría de matería en el universo [22].

1.4. Gravedad modificada

En vista de los problemas que tiene la relatividad general, existen diversos intentos de llevar la relatividad general hacia una mejor descripción. En esta sección se hace una clasificación de dichos intentos así como una breve descripción de los mismos, con el objetivo de situar el trabajo subsecuente.

1.4.1. Modificaciones a la dinámica, f(R)

Como mencionamos en la sección 1.1 la dinámica de relatividad general es la dinámica del espacio-tiempo, y está dada por la acción (1.2). Al mismo tiempo se mencionaron dos argumentos a su favor; el primero la recuperación de la teoría newtoniana,el segundo la simplicidad del lagrangiano. Sin embargo si nos olvidamos de la simplicidad, cualquier lagrangiano con el cual recuperemos la teoría newtoniana es igual de válido para la acción. En particular podemos escribir un lagrangiano que sea función del escalar de curvatura como sigue,

$$S = \int \frac{f(R)}{2\kappa} \sqrt{-g} d^4 x, \tag{1.4}$$

donde $f(R)$ es una función bien comportada del escalar de curvatura. A partir de (1.4) se obtienen las ecuaciones de movimiento [23]. Este tipo de teorías han sido propuestas para explicar la expansión acelerada del universo, así como para generar inflación en el universo temprano usando la geometría del espacio-tiempo en lugar de incorporar energía oscura para la expasión acelerada [24] o un campo escalar para la inflación en relatividad general.

1.4.2. Inclusión de la torsión

La torsión cuantifica el que paralelogramos infinitesimales cierren. Relatividad general en su versión estándar usa una conexión de Levi-Civita sin torsión (véase sección 2.1), sin embargo, existen diversas teorias donde se incorpora la torsión. Un largo grupo de estas teorías está basada en la idea de que la descripción de la gravedad no es en términos de la curvatura de una variedad sino de la torsión de un espacio plano. A este paradigma suele llamársele *gravedad teleparalela* [25, 26].

Una incorporación más natural de la torsión a relatividad general es la teoría de Einstein-Cartan [27], donde se tratan variedades de Riemann-Cartan, es decir, se sigue usando la curvatura del espacio-tiempo como entidad dinámica, a diferencia de la gravedad teleparalela, pero se incorpora la torsión. El incorporar la torsión en una teoría de este tipo agrega grados de libertad. Esta es una de las primeras modificaciones a la relatividad general y es una de las más naturales pues parte de una acción análoga para variedades de Riemann-Cartan de (1.2). En la teoría de Einstein-Cartan la fuente de torsión es la densidad de espín en el espacio-tiempo.

1.4.3. Reducción de simetrías

Violaciones de Lorentz

Una posibilidad en la busqueda de nueva Física son las violaciones de la simetría de Lorentz. Esto puede describirse mediante una teoría efectiva [28]. Por otro lado, una teoría factible debe contener tanto a la relatividad general como al modelo estándar, y quizás términos suprimidos en ambos sectores. Cuando añadimos los posibles términos que no respetan la simetría de Lorentz, obtenemos una teoría efectiva conocida como *la extensión del modelo estándar* [29, 30].

Grupo reducido de difeomorfismos

Gravedad unimodular es una modificación de relatividad general en la cual suele hacerse la suposición de que el elemento de volumen $\sqrt{-g}$ no es un ente dinámico, es decir, la métrica espacio-temporal es la variable dinámica, pero el elemento de volumen está restringido por $\sqrt{-g} = \varepsilon$ [31], donde ε es una constante. Este tipo de enfoque es atractivo por el hecho de que existe un elemento de volumen privilegiado. Por lo tanto, los difeomorfismos permitidos son aquellos que preservan la condición sobre el elemento de volumen. Este tipo de trabajos buscan resolver el problema de la constante cosmológica partiendo de primeros principios. La manera de lograr que $\sqrt{-g} = \varepsilon$ suele ser mediante multiplicadores de Lagrange.

1.4.4. Acoples no-mínimos

Suele hacerse una separación en la acción de una teoría entre el *sector gravitacional* y el *sector de materia*. Esto es porque la acción se escribe de la siguiente manera,

$$S = S_G(g) + S_M(g, \phi), \tag{1.5}$$

donde ϕ representa a los campos no gravitacionales. En una acción de este estilo se dice que la materia está *acoplada mínimamente* pues existe una clara distinción entre la parte de la acción que depende solo de la geometría, así como una parte que depende de los campos de materia. Sin embargo, esto no tiene porque ser así, uno puede proponer cualquier lagrangiano y de él extraer las ecuaciones de movimiento de la teoría. Un ejemplo icónico de ello es la teoría de Brans-Dicke [32] en la cual tenemos un campo escalar acoplado *no-mínimamente*, la acción de dicha teoría es

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\varphi R - \omega \frac{\partial_a \partial^a \varphi}{\varphi} + 16\pi \mathscr{L}_M(\varphi, g) \right] d^4x, \tag{1.6}$$

donde φ es un campo escalar, ω es una constante, $\partial_a \partial^a = g^{ab} \partial_a \partial_b$. En esta teoría el campo escalar actua como una *"constante" de gravitación universal variable*, lo cual permite ajustar las observaciones de materia y energía oscura.

1.5. Enfoque Palatini de la Relatividad General

La relatividad general acepta dos formulaciones en el formalismo lagrangiano, el formalismo estándar, *a la Einstein-Hilbert* o formulación métrica, y el tratamiento *a la Palatini*, Einstein-Palatini o formulación afín-métrica (para un tratamiento histórico ver [33]). La diferencia entre ellas reside en los grados de libertad en la teoría. El enfoque Palatini es la realización matemática de que la estructura afín y métrica son independientes. En algunas situaciones, dichas formulaciones son equivalentes (llevan a una conexión compatible con la métrica y a las ecuaciones de Einstein [34]), en estos casos el hacer el tratamiento a la Palatini resulta ser solo una elección al momento de tomar las variaciones de la acción. Sin embargo, es posible construir algunas teorías en las cuales no sea así, o que al menos, no resulte totalmente claro desde un inicio.

El objetivo de este trabajo es contrastar ambas formulaciones; investigar un caso en el que posiblemente las formulaciones no son equivalentes, pues, a pesar de ser equivalentes en algunos casos, el tratamiento a la Palatini suele llevar a fenomenológia distinta cuando se considera gravedad modificada, y materia que tiene una dependecia “usual” en la conexión [35]. El caso que aquí se trata es en el que la materia tiene una *dependencia arbitraria en la conexión espacio-temporal* más la acción de Einstein-Hilbert.

Veremos que el tratamiento a la Palatini resulta en “correcciones” a el caso estándar. Dado que la conexión en la formulación Einstein-Palatini es independiente del tensor métrico puede pensarse en que estamos tratando una teoría con un “campo tensorial”, sin embargo, ese campo aparece tanto en el sector gravitacional como en el sector de materia de la teoría, por lo que sería como un acople no-mínimo. Cabe señalar que no se realizará el tratamiento más general posible, pues se tomará que la *torsión* del espacio tiempo es idénticamente cero. También asumiremos que la dimensión del espacio-tiempo es 4.

Durante el trabajo se hará una observación acerca de un punto fino sobre la afirmación de que para el caso en el cual tenemos vacío, o no existe dependencia de la conexión en el sector de materia, las dos formulaciones son totalmente equivalentes como se menciona en la literatura, por ejemplo [36, 37]. Se desarollará la teoría para el caso general y finalmente se llevará a un plano más concreto en el cual se puedan comparar ambas formulaciones, esto se hará mediante una acción particular de materia.

Capítulo 2

Conexión y Curvatura

En este capítulo se introduce la herramienta matemática necesaria para los própositos de este trabajo. Empezamos hablando de la conexión espacio-temporal y su relación con la estructura métrica del espacio-tiempo. Después en la sección 2.2 se introduce la curvatura de una variedad, se analiza el caso particular de una variedad métrica y se analiza cuando la conexión no es métrica. Finalmente se construyen los tensores necesarios para los propósitos de este trabajo. Para una resumen de la notación utilizada en este capítulo véase el apéndice A.

2.1. La Conexión Espacio-Temporal

La relatividad general describe el espacio-tiempo en términos de una variedad diferencial con métrica g_{ab} cuya ecuación de movimiento es (1.1), sin embargo dicha ecuación emplea el concepto de curvatura para el cual es necesario incorporar una estructura adicional conocida como conexión.

La métrica es un campo tensorial en el espacio tiempo, por ello comenzamos definiendo campo tensorial. Un campo tensorial es un mapeo multilineal definido en cada punto de la variedad a los números reales, es decir,

$$T_{ab}\left(v^a + w^a\right) = T_{ab}\, v^a + T_{ab}\, w^a, \tag{2.1}$$

$$T_{ab}\left(m^b + l^b\right) = T_{ab}\, m^b + T_{ab}\, l^b. \tag{2.2}$$

Un operador derivada ∇ en una variedad M es un mapeo entre campos tensoriales del tipo (k,l) a un campo tensorial $(k,l+1)$, que satisface 5 condiciones [38].

1. Linealidad
$\nabla_c\left(\alpha A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_\ell} + \beta B^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_\ell}\right) = \alpha\nabla_c\left(A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_\ell}\right) + \beta\nabla_c\left(B^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_\ell}\right).$

2. Regla de Leibnitz
$\nabla_e\left(A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_\ell} B^{c_1\ldots c_k}{}_{d_1\ldots d_\ell}\right)$
$= \nabla_e\left(A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_\ell}\right) B^{c_1\ldots c_k}{}_{d_1\ldots d_\ell} + A^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_\ell} \nabla_e\left(B^{c_1\ldots c_k}{}_{d_1\ldots d_\ell}\right).$

3. Conmuta con contracciones de índices
$\nabla_d \left(A^{a_1 \ldots c \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots c \ldots b_\ell} \right) = \nabla_d A^{a_1 \ldots c \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots c \ldots b_\ell}$.

4. Consistencia con la noción de que los vectores tangentes son derivadas direccionales de campos escalares en la variedad
$t(f) = t^a \nabla_a f$.

5. Libre de torsión $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$.

Puede demostrarse que debe existe un tensor $T^c{}_{ab}$, antisimétrico en a y b tal que,

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c{}_{ab} \nabla_c f. \tag{2.3}$$

El tensor $T^c{}_{ab}$ se llama tensor de torsión y por lo tanto, lo que nos dice la condición 5 es que la torsión es idénticamente cero.

Más aún, en una teoría física del espacio-tiempo, la condición de torsión cero es suceptible a pruebas experimentales [39], no hay a la fecha ningún tipo de soporte experimental mediante el cual podamos decir que una teoría física deba aceptar que la torsión del espacio-tiempo es idénticamente cero. Es por ello que imponer que la torsión del espacio tiempo es cero resulta ser una hipótesis más de la teoría física en cuestión.

Por otra parte, la diferencia de dos operadores derivada actúa como tensor [38], sean ∇ un operador derivada arbitrario, $\widetilde{\nabla}$ el operador derivada de Levi-Civita y ∂ las derivadas parciales respecto a las coordenadas

$$(\nabla_a - \widetilde{\nabla}_a)\omega_b = -C^c{}_{ab}\omega_c, \qquad \forall \omega_c, \tag{2.4}$$
$$(\nabla_a - \partial_a)\omega_b = -\Gamma^c{}_{ab}\omega_c, \tag{2.5}$$
$$(\widetilde{\nabla}_a - \partial_a)\omega_b = -\widetilde{\Gamma}^c{}_{ab}\omega_c. \tag{2.6}$$

En todos los casos el signo negativo se toma por convención y dado que nuestros operadores derivada son libres de torsión, $C^c{}_{ab}$, $\Gamma^c{}_{ab}$ y $\widetilde{\Gamma}^c{}_{ab}$ son simétricos en los índices inferiores, por ejemplo,

$$C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}, \tag{2.7}$$

a Γ, C, $\widetilde{\Gamma}$ se les conoce como *conexión*. Dadas las definiciones anteriores tenemos la siguiente igualdad de utilidad más adelante,

$$\Gamma^c{}_{ab} - \widetilde{\Gamma}^c{}_{ab} = C^c{}_{ab}. \tag{2.8}$$

Dada una conexión tenemos una noción de *transporte paralelo* de vectores,

$$t^b \nabla_b v^a = 0, \tag{2.9}$$
$$t^b \widetilde{\nabla}_b v^a = 0. \tag{2.10}$$

En (2.9) y (2.10) se muestra la ecuación de transporte paralelo para dos conexiones diferentes. La ecuación (2.9) dice que el vector v^a es transportado paralelamente a lo largo del vector t^b pues “no cambia”. Es por esto que dar una conexión equivale a dar la estructura afín del espacio.

Cuando se tiene una variedad métrica existe una manera canónica de fijar la conexión a las parciales y es conocida como la conexión de Levi-Civita. Relatividad general en su versión estándar toma *a priori* una conexión de este tipo, es decir impone que

$$\widetilde{\nabla}_a g_{bc} = 0, \tag{2.11}$$

dicho de otra manera, el operador derivada actuando sobre el tensor métrico es idénticamente cero. Por esto todo a lo que se le sobreponga tilde está relacionado con relatividad general (para mayor detalle véase el apéndice A). La condición 2.11 se le conoce como condición de metricidad o decimos que el operador derivada ∇ es compatible con la métrica.

Fijar la conexión con (2.11) y utilizando (2.6) nos lleva a que la conexión de Levi-Civita se puede escribir como,

$$\widetilde{\Gamma}^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left[\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\right], \tag{2.12}$$

éstos son los símbolos de Christoffel y es la conexión utilizada en relatividad reneral. Dada la ecuación (2.4) podemos calcular como actua el nuevo operador derivada sobre el tensor métrico.

$$\nabla_a g_{bc} = -C^d{}_{ac} g_{bd} - C^d{}_{ab} g_{dc}, \tag{2.13}$$

entonces al tomar un operador derivada arbitrario tenemos *no-metricidad* en la teoría, donde entendemos como no-metricidad el hecho de que el operador derivada actuando en la métrica no es cero.

Sin embargo, como hemos mencionado, la conexión es una entidad, en principio, independiente de la métrica que le damos a nuestro espacio. Más aún, podemos tener variedades sin métrica pero con alguna noción de transporte paralelo. Todas estas estructuras suelen confundirse en relatividad general pues ahí la única variable dinámica es la métrica y el resto de las entidades geométricas vienen en términos de esta. En el enfoque Palatini, a diferencia de la formulación métrica, si se consideran a la métrica y a la conexión como entidades independientes.

2.1.1. Descomposición de la conexión

Como veremos más adelante, aunque la conexión $\Gamma^c{}_{ab}$ será la variable dinámica en la teoría, el tensor $C^c{}_{ab}$ también resultará de gran importancia. Es por ello que con el fin de poder manipular $C^c{}_{ab}$, proponemos una separación en sus dos trazas posibles y una parte sin trazas. Mostramos dicha descomposición para un tensor $(1,2)$ D dimensional, para una dimensionalidad arbitraria, y después exigiremos una dimensionalidad particular del espaciotiempo.

Dicha descomposición se ve como,

$$C^c{}_{ab} = g_{ab}\left[\frac{(D+1)\tau^c - 2\lambda^c}{D(D+1)-2}\right] + \frac{2}{D(D+1)-2}\delta^c_{(a}\left[D\lambda_{b)} - \tau_{b)}\right] + \Delta C^c{}_{ab}, \tag{2.14}$$

donde $\Delta C^c{}_{ab}$ es simétrico en los dos índices inferiores, dado que C cumple con la misma simetría. Observemos que nuestra descoposición deja de tener sentido cuando

$D = 1$. La descomposición está construida de tal forma que se cumplen las siguientes igualdades,

$$g^{ab} C^c{}_{ab} = \tau^c, \tag{2.15a}$$

$$C^d{}_{db} = \lambda_b, \tag{2.15b}$$

$$g^{ab} \Delta C^c{}_{ab} = 0, \tag{2.15c}$$

$$\Delta C^d{}_{db} = 0. \tag{2.15d}$$

Cuando tomamos $D = 4$, la descomposición para el tensor $C^c{}_{ab}$ es,

$$C^c{}_{ab} = \frac{1}{4} g_{ab} \left(\frac{10\tau^c - 4\lambda^c}{9} \right) + \frac{1}{9} \delta^c_{(a} \left[4\lambda_{b)} - \tau_{b)} \right] + \Delta C^c{}_{ab}. \tag{2.16}$$

2.2. Curvatura

El tensor de curvatura, es la conmutación de segundas derivadas,

$$R_{abc}{}^d \omega_d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\, \omega_c, \qquad \forall \omega. \tag{2.17}$$

Para hacer el cálculo de forma general introducimos un nuevo operador derivada $\hat{\nabla}$ arbitrario pero sin torsión y la conexión $\hat{C}^c{}_{ab}$ que lo liga a ∇ que también es arbitrario. Entonces,

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \omega_c &= \hat{\nabla}_a (\nabla_b \omega_c) - \hat{C}^g{}_{ab} \nabla_g \omega_c - \hat{C}^g{}_{ac} \nabla_b \omega_g \\ &= \hat{\nabla}_a \left(\hat{\nabla}_b \omega_c - \hat{C}^d{}_{bc} \omega_d \right) - \hat{C}^g{}_{ab} \nabla_g \omega_c - \hat{C}^g{}_{ac} \left(\hat{\nabla}_b \omega_g - \hat{C}^d{}_{bg} \right) \\ &= \hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b \omega_c - \omega_d \hat{\nabla}_a \hat{C}^d{}_{bc} - \hat{C}^d{}_{bc} \hat{\nabla}_a \omega_d - \hat{C}^g{}_{ab} \nabla_g \omega_c - \hat{C}^g{}_{ac} \hat{\nabla}_b \omega_g + \hat{C}^g{}_{ac} \hat{C}^d{}_{bg} \omega_d, \end{aligned}$$

Antisimetrizando en a y b obtenemos el tensor de Riemann,

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} \omega_c = 2\hat{\nabla}_{[a} \hat{\nabla}_{b]} \omega_c - 2\hat{\nabla}_{[a} \hat{C}^d{}_{b]c} \omega_d + 2\hat{C}^g{}_{[a|c|} \hat{C}^d{}_{b]g} \omega_d. \tag{2.18}$$

En el caso de relatividad general basta elegir en ∇ como el operador de Levi-Civita (2.11) y $\hat{\nabla}$ como ∂_a, de donde obtenemos la expresión del tensor de Riemann en relatividad general

$$(\widetilde{\nabla}_a \widetilde{\nabla}_b - \widetilde{\nabla}_b \widetilde{\nabla}_a) \omega_c = \widetilde{R}_{abc}{}^d \omega_d, \tag{2.19}$$

que después de intercambiar los operadores derivada usando (2.6) es

$$\widetilde{R}_{abc}{}^d = -2\partial_{[a} \widetilde{\Gamma}^d{}_{b]c} + 2\widetilde{\Gamma}^g{}_{[a|c|} \widetilde{\Gamma}^d{}_{b]g}. \tag{2.20}$$

Donde $\widetilde{R}_{abc}{}^d$es el tensor de Riemann asociado con $\widetilde{\nabla}$.

Dado que estamos interesados en el tensor de Riemann asociado a ∇ (2.17), podemos tomar las conmutaciones de segundas derivadas utilizando (2.4) para escribirlo en términos de $C^c{}_{ab}$, $R_{abc}{}^d(C)$ o (2.5) para escribirlo en términos de $\Gamma^c{}_{ab}$, $R_{abc}{}^d(\Gamma)$, por supuesto debe ocurrir que $R_{abc}{}^d(C) = R_{abc}{}^d(\Gamma)$, pues es el mismo tensor.

Utilizando (2.5) para intercambiar los operadores derivada obtenemos algo análogo a (2.20)

$$R_{abc}{}^{d}(\Gamma) \quad = \quad -2\partial_{[a}\Gamma^{d}{}_{b]c} + 2\Gamma^{g}{}_{[a|c|}\Gamma^{d}{}_{b]g}, \tag{2.21}$$

donde ponemos Γ para referirnos al hecho de que en la forma explícita aparece esa conexión. Haciendo lo mismo con (2.4) obtenemos

$$R_{abc}{}^{d}(C) = \widetilde{R}_{abc}{}^{d} - 2\widetilde{\nabla}_{[a}C^{d}{}_{b]c} + 2C^{g}{}_{[a|c|}C^{d}{}_{b]g}, \tag{2.22}$$

donde ponemos C para referirnos al hecho de que está en términos de $C^{c}{}_{ab}$.

Ahora usando (2.8) para sustituir $\Gamma^{c}{}_{ab}$ en (2.21) y utilizando (2.6) para intercambiar operadores derivada, obtenemos

$$R_{abc}{}^{d}(\Gamma) = \widetilde{R}_{abc}{}^{d} - 2\widetilde{\nabla}_{[a}C^{d}{}_{b]c} + 2C^{g}{}_{[a|c|}C^{d}{}_{b]g}, \tag{2.23}$$

que es lo que se esperaba. Sin embargo, por motivos conceptuales que se analizan en la sección 2.5.2 es conveniente mantener tanto (2.21) como (2.22) aunque sean iguales. En lo que resta del capítulo nos referiremos siempre a (2.22), y lo haremos como simplemente $R_{abc}{}^{d}(C) = R_{abc}{}^{d}$.

Finalmente, los ingredientes que faltan para las ecuaciones de Einstein (1.1) o la acción de Einstein-Hilbert (1.2) son el *Tensor de Ricci* definido como,

$$R_{ab} = R_{acb}{}^{c}, \tag{2.24}$$

y el *escalar de curvatura* definido como,

$$R = g^{ab}R_{ab}. \tag{2.25}$$

Es importante hacer notar que así como tenemos varios tensores de Riemann, en principio también tenemos varios tensores de Einstein. Sin embargo, las definiciones (2.24) y (2.25) son genéricas. Es decir, tenemos el tensor de Einstein construido como

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R, \tag{2.26}$$

y el tensor de Einstein propiamente que es el que utilizamos en relatividad general,

$$\widetilde{G}_{ab} = \widetilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\widetilde{R}. \tag{2.27}$$

Es importante mencionar que en relatividad general el tensor de Einstein (2.27) satisface

$$\widetilde{\nabla}^{a}\widetilde{G}_{ab} = 0. \tag{2.28}$$

Recordemos además la siguiente propiedad del tensor de Einstein,

$$g^{ab}G_{ab} = g^{ab}R_{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}g_{ab}R = R - 2R = -R, \tag{2.29}$$

lo cual implica que las ecuaciones de Einstein en vacío son,

$$R_{ab} = 0, \tag{2.30}$$
$$\tag{2.31}$$

o en la formulación métrica,

$$\widetilde{R}_{ab} = 0. \tag{2.32}$$

Es importante analizar en que caso se regresa a relatividad general en (2.22) y en (2.4), es fácil observar del tensor de Riemann,

$$R_{abc}{}^{d} = \widetilde{R}_{abc}{}^{d} - 2\widetilde{\nabla}_{[a}C^{d}{}_{b]c} + 2C^{g}{}_{c[a}C^{d}{}_{b]g} \tag{2.33}$$

que podemos recuperar relatividad general si $C \to 0$ de donde obtendríamos $\widetilde{R}_{abc}{}^{d} = R_{abc}{}^{d}$, y que $\nabla = \widetilde{\nabla}$.

A continuación estudiaremos las simetrías que tiene el tensor de Riemann $R_{abc}{}^{d}$ y en la seccion (2.4) relacionaremos (2.26) y (2.27).

2.3. Simetrías del Tensor de Riemann

En esta sección se analiza qué simetrías posee el tensor de Riemann construido con (2.4), es decir, (2.22). De las simetrías conocidas de relatividad general *i.e.*, para el tensor (2.20) tres de ellas se siguen cumpliendo

$$R_{abc}{}^{d} = -R_{bac}{}^{d}, \tag{2.34a}$$
$$R_{[abc]}{}^{d} = 0, \tag{2.34b}$$
$$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e} = 0. \tag{2.34c}$$

La primera de ellas (2.34a) se cumple por la definición del tensor de Riemann (2.17). La segunda se sigue del hecho de que para operadores derivada sin torsión y un campo vectorial dual arbitrario ω_c, siempre se cumple que $\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]} = 0$. Esto se puede probar relacionando ∇_a con ∂_a, y usando la conmutatividad de las parciales y la simetría de la conexión $\Gamma^{c}{}_{ab}$. Entonces tenemos

$$0 = 2\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]} = \nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]} - \nabla_{[b}\nabla_a\omega_{c]} = R_{[abc]}{}^{d}\omega_d \qquad \forall\omega. \tag{2.35}$$

La última de estas simetrías se conoce como *identidad de Bianchi*. Para probarla aplicamos la conmutación de segundas derivadas sobre la derivada de un campo vectorial dual. Entonces obtenemos

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\nabla_c\omega_d = R_{abc}{}^{e}\nabla_e\omega_d + R_{abd}{}^{f}\nabla_c\omega_f. \tag{2.36}$$

Por otro lado tenemos

$$\nabla_a(\nabla_b\nabla_c\omega_d - \nabla_c\nabla_b\omega_d) = \nabla_a(R_{bcd}{}^{e}\omega_) = \omega_e\nabla_aR_{bcd}{}^{e} + R_{bcd}{}^{e}\nabla_a\omega_e. \tag{2.37}$$

Si antisimetrizamos en a, b y c las ecuaciones (2.36) y (2.37), podemos igualarlas, de donde

$$R_{[abc]}{}^{e}\nabla_e\omega_d + R_{[ab|d}{}^{f}\nabla_{c]}\omega_f = \omega_e\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e} + R_{[bc|d|}{}^{e}\nabla_{a]}\omega_e, \tag{2.38}$$

el primer término del lado izquierdo es idénticamente cero por (2.34b) mientras que los segundos términos de ambos lados se cancelan entre sí (existe una permutación par de a, b y c que permite ver esto). Por lo tanto lo que obtenemos

$$\omega_e\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e} = 0, \tag{2.39}$$

de donde se sigue (2.34c).

Una cuarta de ellas no se cumple más, debido a que el operador derivada no es el de Levi-Civita

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\, g_{cd} = R_{abcd} + R_{abdc} \neq 0. \tag{2.40}$$

$$\left(\widetilde{\nabla}_a\widetilde{\nabla}_b - \widetilde{\nabla}_b\widetilde{\nabla}_a\right) g_{cd} = \widetilde{R}_{abcd} + \widetilde{R}_{abdc} = 0. \tag{2.41}$$

Sin embargo, es posible calcular (2.40) utilizando la ecuación (2.33), es decir, valerse del hecho de que $\widetilde{R}_{abc}{}^{d}$ sí la cumple, por lo que

$$R_{abcd} + R_{abdc} = -2g_{ed}\widetilde{\nabla}_{[a}C^{e}{}_{b]c} - 2g_{ce}\widetilde{\nabla}_{[a}C^{e}{}_{b]d} + 2g_{ed}C^{g}{}_{c[a}C^{e}{}_{b]g} + 2g_{ce}C^{g}{}_{d[a}C^{e}{}_{b]g} =: \Lambda_{abcd}, \tag{2.42}$$

donde hemos definido Λ_{abcd} como la parte que rompe la simetría que conocemos de relatividad general.

$$R_{abcd} = -R_{abdc} + \Lambda_{abcd}. \tag{2.43}$$

Además Λ_{abcd} cumple con las siguientes simetrías

$$\Lambda_{abcd} = \Lambda_{[ab](cd)}, \tag{2.44}$$

es decir, es antisimétrico en los primeros dos índices y simétrico en tercero y cuarto índices. La última de las simetrías del Riemann conocidas en relatividad general, la cual se sigue de (2.34a), (2.34b), y de la equivalente en relatividad general de (2.40), es decir, (2.41), no se sigue en este caso. Sin embargo, también es posible calcularlo utilizando la ecuación (2.33) valiéndose del hecho de que $\widetilde{R}_{abc}{}^{d}$ si la satisface, obteniendo

$$R_{abcd} - R_{cdab} = -2g_{ed}\widetilde{\nabla}_{[a}C^{e}{}_{b]c} + 2g_{ed}C^{g}{}_{c[a}C^{e}{}_{b]g}. \tag{2.45}$$

2.4. Tensor de Einstein

Una vez conocido el tensor de Riemann (2.33), podemos calcular sus trazas como en (2.25) y (2.24) obteniendo el tensor de Ricci y el escalar de Ricci para después con ellos construir el tensor de Einstein $G_{ab} = G_{ab}(C)$. Escribamos entonces el tensor de Ricci y el escalar de Ricci,

$$R_{ab} = \widetilde{R}_{ab} - 2\widetilde{\nabla}_{[a}C^{d}{}_{d]b} + 2C^{g}{}_{b[a}C^{d}{}_{d]g}, \tag{2.46a}$$

$$R = \widetilde{R} - 2g^{ab}\widetilde{\nabla}_{[a}C^{d}{}_{d]b} + 2g^{ab}C^{g}{}_{b[a}C^{d}{}_{d]g}. \tag{2.46b}$$

Entonces el tensor de Einstein asociado a ∇ se relaciona con $\widetilde{G}_{ab}$ de la forma

$$G_{ab} = \widetilde{G}_{ab} - 2\widetilde{\nabla}_{[a}C^{d}{}_{d]b} + 2C^{g}{}_{[a|b|}C^{h}{}_{h]g} + g_{ab}g^{cd}\widetilde{\nabla}_{[c}C^{h}{}_{h]d} - g_{ab}g^{cd}C^{g}{}_{[c|d|}C^{h}{}_{h]g}. \quad (2.47)$$

Introduciendo la descomposición de C, (2.16) en el tensor de Einstein,

$$\begin{aligned} G_{ab} &= \widetilde{G}_{ab} - \left(\widetilde{\nabla}_a\lambda_b - \widetilde{\nabla}_d C^{d}{}_{ab}\right) + C^{g}{}_{ab}\lambda_g - C^{g}{}_{hb}C^{h}{}_{ag} + g_{ab}\widetilde{\nabla}_c\left(\frac{\lambda^c - \tau^c}{2}\right) \\ &- \frac{g_{ab}}{2}\left[\tau^g\lambda_g - g^{cd}C^{g}{}_{hd}C^{h}{}_{cg}\right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Observamos que en la ecuación (2.48) todos los términos en la ecuación son necesariamente simétricos, a excepción de $\widetilde{\nabla}_a\lambda_b$. Como consecuencia de haber utilizado la descomposición de C, hemos ubicado la parte que puede romper la simetría del tensor de Einstein. En general el tensor de Einstein para una conexión arbitraria no tiene porque ser simétrico, dicho enunciado proviene de la simetría del tensor de Ricci pues el resto es proporcional a la métrica.

Finalmente, introduciendo los términos cuadráticos en C (véase apéndice B) obtenemos el tensor de Einstein en estas variables

$$\begin{aligned} G_{ab} &= \widetilde{G}_{ab} + g_{ab}\left[\frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_d\left(\frac{7\lambda^d - 4\tau^d}{9}\right) + \frac{g^{ik}}{2}\Delta C^{g}{}_{hi}\Delta C^{h}{}_{gk} + \frac{1}{4\cdot 9^2}\tau_g\tau^g - \frac{11}{9^2}\tau^g\lambda_g \right. \\ &- \left.\frac{1}{2\cdot 9^2}\lambda_g\lambda^g\right] - \widetilde{\nabla}_a\lambda_b + \widetilde{\nabla}_d\Delta C^{d}{}_{ab} + \frac{1}{9}\widetilde{\nabla}_{(a}\left(4\lambda_{b)} - \tau_{b)}\right) + \Delta C^{h}{}_{ab}\left[\frac{\tau_h - 5\lambda_h}{9}\right] \\ &+ \frac{11}{9^2}\lambda_a\lambda_b - \frac{1}{9^2}\tau_{(a}\lambda_{b)} - \frac{22}{4\cdot 9^2}\tau_a\tau_b - \frac{1}{2\cdot 9}g_{h(b}\Delta C^{h}_{a)g}\left(10\tau^g - 4\lambda^g\right) - \Delta C^{g}{}_{hb}\Delta C^{h}{}_{ag}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

En resumen, en este capítulo hemos construido los tensores de importancia tanto para relatividad general como para el propósito de este trabajo. Una vez obtenido el tensor de Einstein $G_{ab}(C)$ lo hemos escrito en términos del tensor de Einstein de relatividad general (2.27) como de la descomposición de C vista en la sección (2.1.1)

2.5. Formulaciones Lagrangianas

En esta sección se aborda la discución acerca de las dos formulaciones variacionales de relatividad general, el caso estándar y el enfoque Palatini. Se hace incapié en el hecho de que dar una acción no es suficiente para determinar una teoría; hay que especificar los grados de libertad de la misma.

2.5.1. Formulación Lagrangiana de Relatividad General

La relatividad general acepta dos formulaciones en el formalismo lagrangiano, ambas dadas por la acción de Einstein-Hilbert (1.2). La diferencia entre ellas reside en los grados de libertad de la teoría. La formulación original o estándar considera al espacio-tiempo como una variedad diferencial métrica (M,g) y a la conexión espacio-temporal se fija por la condición (2.12), por ende, la única variable dinámica es la métrica del espacio-tiempo. Escribiendo explícitamente las dependencias,

$$S = S_G[g] + S_M[g,\phi] = \int \left[\widetilde{R}(g) + 16\pi\widetilde{\mathscr{L}_M}(\phi,g)\right]\sqrt{-g}d^4x, \tag{2.50}$$

donde ϕ representa a todos los campos de materia en la teoría, y $\widetilde{R}(g)$ es el escalar de curvatura definido con el operador derivada compatible con g_{ab}.

Pidiendo que la acción sea estacionaria,

$$0 = \delta S = \int \left(\left[\widetilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\widetilde{R} - 8\pi\widetilde{T}_{ab}\right]\delta g^{ab} + 16\pi\frac{\delta\widetilde{\mathscr{L}_M}}{\delta\phi}\delta\phi\right)\sqrt{-g}d^4x, \tag{2.51}$$

donde hemos utilizado que la variación del tensor de Ricci $\widetilde{R}_{ab}$ respecto a la métrica es un término de frontera y $\delta\left(\sqrt{-g}\right) = -g_{ab}\sqrt{-g}\delta g^{ab}/2$ y

$$\widetilde{T}_{ab} = -\frac{\alpha_M}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\widetilde{\mathscr{L}_M}}{\delta g^{ab}}. \tag{2.52}$$

Lo anterior nos lleva a las ecuaciones de movimiento de la teoría,

$$\widetilde{G}_{ab} = 8\pi\widetilde{T}_{ab} \tag{2.53}$$

$$\frac{\delta\widetilde{\mathscr{L}_M}}{\delta\phi} = 0, \tag{2.54}$$

es decir, las ecuaciones de Einstein para el espacio-tiempo y las ecuaciones que deben satisfacer los campos.

2.5.2. Enfoque Palatini de la Relatividad General

El enfoque Palatini es la realización matemática de que tanto la métrica como la conexión pueden ser consideradas como estructuras independientes. Es decir, no se impone que el operador derivada sea el compatible con la métrica y la conexión al ser dinámica tendrá una ecuación de movimiento. En otras palabras, lo que estamos haciendo es cambiar los grados de libertad de la teoría, pasando de la métrica a la métrica y la conexión. Lo anterior repercute en que los tensores geométricos *i.e.* Riemann, Ricci, etc., ahora son función de una conexión arbitraria ${\Gamma^c}_{ab}$. En principio ambas formulaciones no tienen por qué ser equivalentes, sin embargo, analizando el caso general veremos en qué casos son equivalentes.

Escribiendo la acción de la teoría con las dependencias explícitas,

$$S = \int \sqrt{-g}\left[g^{ab}R_{ab}(\Gamma) + 16\pi\mathscr{L}_M(\phi,g,\Gamma)\right]d^4x, \tag{2.55}$$

aquí es importante mencionar la razón conceptual por la que se toma a ${\Gamma^c}_{ab}$ como la variable independiente de la teoría en lugar de ${C^c}_{ab}$, aunque realizar la variación de la acción de Einstein-Hilbert respecto a ${\Gamma^c}_{ab}$ o ${C^c}_{ab}$ lleva a un “sector geométrico” análogo en las ecuaciones de movimiento, no sucede lo mismo en la parte de materia, siendo precisos, no se cumple en general que $\frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta g^{ab}}(g,\phi,C) = \frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta g^{ab}}(g,\phi,\Gamma)$. La razón es que al tomar a ${C^c}_{ab}$ como la variable independiente aparece de manera natural $\widetilde{\nabla}$ que depende de g^{ab} vía Christoffels (2.6). El tratamiento variando respecto a ${C^c}_{ab}$ es equivalente en el caso que el lagrangiano de materia no depende de la conexión, tratado en [36]. Hacer lo anterior para una teoría en la cual hay dependencia en la conexión de la acción de materia lleva a inconsistencias que se describirán más adelante. Mientras que si tomamos a ${\Gamma^c}_{ab}$ como la variable independiente no surgen inconsistencias, dado que ∂ no tiene dependecia con el tensor métrico, pues solo depende de la elección de coordenadas en la variedad.

Obteniendo las ecuaciones de movimiento, tomando que la acción es estacionaria,

$$\begin{aligned} 0 = \delta S \quad &= \quad \int \sqrt{-g}\left(\left[R_{(ab)} - \frac{1}{2}g_{ab}R + g^{cd}\frac{\delta R_{cd}}{\delta g^{ab}} - 8\pi T_{ab}\right]\delta g^{ab}\right. \\ &+ \quad \left.\left[g^{cd}\frac{\delta R_{cd}}{\delta {\Gamma^c}_{ab}} - 16\pi{\Sigma_c}^{ab}\right]\delta{\Gamma^c}_{ab} + 16\pi\frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta\phi}\delta\phi\right)d^4x, \end{aligned} \tag{2.56}$$

donde,

$$ {\Sigma_c}^{ab} \quad = \quad -\frac{1}{16\pi}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta{\Gamma^c}_{ab}}, \tag{2.57}$$

$$ T_{ab} \quad = \quad -\frac{1}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta g^{ab}}. \tag{2.58}$$

Observese que en la variación aparece la parte *simétrica* del tensor de Ricci, esto es porque la variación respecto a la métrica (la cual por definición es un tensor simétrico) solo toma en cuenta la parte simétrica. El tensor de Ricci construido con una conexión arbitraria en general no es simétrico (como se comentó en la sección 2.4). El término $g^{cd}\frac{\delta R_{cd}}{\delta g^{ab}}$ es cero, pues como hemos dicho, el tensor de Ricci solo depende de la conexión la cual es independiente de la métrica, por lo que obtenemos una ecuación análoga a (2.53)

Utilizando (2.21) es posible calcular las variaciones del tensor de Ricci $R_{ab}(\Gamma)$ respecto a la conexión,

$$ g^{cd}\delta R_{cd} = -2g^{cd}\partial_{[c}\delta{\Gamma^e}_{e]d} + 2g^{df}\delta({\Gamma^g}_{d[f}{\Gamma^e}_{e]g}). \tag{2.59}$$

La variación del primer término

$$ \int[-\partial_a{\Gamma^d}_{dc} + \partial_d{\Gamma^d}_{ac}]g^{ac}\sqrt{-g}d^4x, \tag{2.60}$$

debe realizarse integrando por partes, usamos la regla de Leibniz de las parciales para introducir el elemento de volumen $\sqrt{-g}$. Haciendo esto obtenemos

$$ \int\left(\delta{\Gamma^d}_{dc}\partial_a[g^{ac}\sqrt{-g}] - \partial_a[\delta{\Gamma^d}_{dc}g^{ac}\sqrt{-g}] + \partial_d[\delta{\Gamma^d}_{ac}g^{ac}\sqrt{-g}] - \delta{\Gamma^d}_{ac}\partial_d[g^{ac}\sqrt{-g}]\right)d^4x, \tag{2.61}$$

donde tenemos dos términos de frontera, segundo y tercer términos, con el elemento de volumen adecuado. Además recordado que debemos simetrizar, pues $\Gamma^c{}_{ab}$ es simétrico en sus índices inferiores obtenemos,

$$\int \left(-\partial_d[g^{ac}\sqrt{-g}] + \delta_d^{(a}[g^{|e|c)}\sqrt{-g}]\right)\delta\Gamma^d{}_{ac}d^4x. \tag{2.62}$$

Ahora para obtener la contribución a la ecuación de movimiento debemos dividir por $1/\sqrt{-g}$. Finalmente la contribución a la ecuación de movimiento es

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(-\partial_d[g^{ac}\sqrt{-g}] + \delta_d^{(a}[g^{|e|c)}\sqrt{-g}]\right). \tag{2.63}$$

Para simplificar lo anterior usamos la regla de Leibniz en las parciales y la igualdad $\partial_d\sqrt{-g}/\sqrt{-g} = \partial_d ln(\sqrt{-g}) = \widetilde{\Gamma}^e{}_{ed}$, obtenemos

$$2\widetilde{\Gamma}^{(a}{}_{de}g^{|e|c)} - \delta_d^{(a}\widetilde{\Gamma}^{c)}{}_{eb}g^{eb} - g^{ac}\widetilde{\Gamma}^b{}_{db} = -F_d{}^{ad}(\widetilde{\Gamma}), \tag{2.64}$$

donde la última igualdad se sigue por la definición de $F_c{}^{ab}$ (véase apéndice A).

Calculando la variación del segundo término,

$$\begin{aligned}
& 2g^{df}\delta(\Gamma^g{}_{d[f}\Gamma^e{}_{e]g})\sqrt{-g} \\
= \; & g^{df}\delta\left[\Gamma^g{}_{df}C^e{}_{ef} - \Gamma^g{}_{de}\Gamma^e{}_{fg}\right]\sqrt{-g} \\
= \; & g^{df}\left[\delta\Gamma^g{}_{df}\Gamma^e{}_{ef} + \Gamma^g{}_{df}\delta\Gamma^e{}_{ef} - \delta\Gamma^g{}_{de}\Gamma^e{}_{fg} - \Gamma^g{}_{de}\delta\Gamma^e{}_{fg}\right]\sqrt{-g} \\
= \; & g^{df}\left[\Gamma^e{}_{ec}\delta^a_d\delta^b_f + \delta^a_c\Gamma^b{}_{df} - \Gamma^b{}_{fc}\delta^a_d - \Gamma^b{}_{dc}\delta^a_f\right]\delta\Gamma^c{}_{ab}\sqrt{-g} \\
= \; & \left[\Gamma^e{}_{ec}g^{ab} + \delta_c^{(a}\Gamma^{b)}{}_{df}g^{df} - 2\Gamma^{(b}{}_{fc}g^{a)f}\right]\delta\Gamma^c{}_{ab}\sqrt{-g} && (2.65) \\
= \; & F_c{}^{ab}(\Gamma)\delta\Gamma^c{}_{ab}\sqrt{-g}, && (2.66)
\end{aligned}$$

donde el último de los renglones se sigue por la definición de $F_c{}^{ab}$.

Por lo tanto

$$-F_c{}^{ab}(\widetilde{\Gamma}) + F_c{}^{ab}(\Gamma) = 16\pi\Sigma_c{}^{ab}, \tag{2.67}$$

y en virtud de la ecuación (2.8) obtenemos,

$$F_c{}^{ab}(C) = 16\pi\Sigma_c{}^{ab}. \tag{2.68}$$

En resumen, hemos variado respecto a $\Gamma^c{}_{ab}$, sin embargo, tenemos una ecuación extra que relaciona el contenido de materia con $C^c{}_{ab}$, es decir, una ecuación extra que en el caso de relatividad general. Las ecuaciones de la teoría son entonces

$$\begin{aligned}
G_{(ab)} &= 8\pi T_{ab}, && (2.69) \\
F_c{}^{ab}(C) &= 16\pi\Sigma_c{}^{ab}, && (2.70) \\
\frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta\phi} &= 0. && (2.71)
\end{aligned}$$

Una vez hechas las variaciones, podemos relacionar con libertad $\Gamma^c{}_{ab}$, $\widetilde{\Gamma}^c{}_{ab}$ y $C^c{}_{ab}$ utilizando (2.8). Por lo tanto en adelante no hablaremos de $\Gamma^c{}_{ab}$, solo de $C^c{}_{ab}$ y los tensores geométricos para ese caso ya se han estudiado en el capítulo 2.

En este punto es importante hacer varias comparaciones entre las dos formulaciones.

- Estrictamente hablando, si el lagrangiano de materia contiene un término cinético (involucra derivadas) entonces depende de la conexión, sin embargo, en casos usuales el lagrangiano de materia tiene una dependencia en la conexión con "simetrías" por lo que no depende de la conexión. Por ejemplo, en *Einstein-Maxwell*; el lagrangiano de materia $\mathscr{L}_M = -F^{ab}F_{ab}/4$ está construido con una *2-forma*, es decir, $F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$, dada la simetría de $C^c{}_{(ab)}$ y la antisimetría de $F_{[ab]}$ tenemos que $F_{ab} = \widetilde{\nabla}_a A_b - \widetilde{\nabla}_b A_a = \partial_a A_b - \partial_b A_a$. Lo cual nos dice que la acción es independiente de la conexión. En estos casos, es decir, $\Sigma^c{}_{ab} = 0$, recuperamos una conexión métrica (véase sección 3.2).

- Es importante notar que la ecuación de movimiento asociada con $C^c{}_{ab}$ es una ecuación algebraica para $C^c{}_{ab}$. Algo similar ocurre en la teoría de Einstein-Cartan donde la ecuación para la torsión resulta ser una ecuación algebraica donde la fuente es la densidad de espín.

Independientemente de la sutileza mencionada para el caso en el $\Sigma_c{}^{ab} = 0$, buscamos casos en los cuales la acción de materia dependa explícitamente de la conexión espacio-temporal para investigar si en esos casos ambas formulaciones son equivalentes, o nos llevan a cosas diferentes. Para ello partiendo de (2.69) escribimos una "ecuación efectiva" usando (2.47), es decir,

$$\widetilde{G}_{ab} = 8\pi T_{ab} + \widetilde{\nabla}_{(a}C^d{}_{b)d} - \widetilde{\nabla}_d C^d{}_{ab} - 2C^g{}_{[a|b|}C^h{}_{h]g} - g_{ab}g^{cd}\widetilde{\nabla}_{[c}C^h{}_{h]d} + g_{ab}g^{cd}C^g{}_{[c|d|}C^h{}_{h]g}. \tag{2.72}$$

El lado derecho de la ecuación lo tomamos como la definición del tensor de energía-momento efectivo tal que,

$$\widetilde{G}_{ab} = 8\pi T^{eff}_{ab}. \tag{2.73}$$

Lo que queremos hacer es quitar las dependencias en $C^c{}_{ab}$ de (2.73), para ello resolvemos la ecuación (2.70) y la introducimos en (2.73). Es importante hacer notar que en general $T_{ab}(g, C, \phi)$, es decir, depende de la conexión. Una vez eliminadas todas las dependencias en $C^c{}_{ab}$ tenemos una ecuación de Einstein análoga al caso estándar de relatividad general la cual puede compararse con (2.53).

Capítulo 3

La Conexión de Palatini

El objetivo de este capítulo es resolver la ecuación (2.70) para $C^c{}_{ab}$, en términos de $\Sigma_c{}^{ab}$. $\Sigma_c{}^{ab}$ tiene, a diferencia de $C^c{}_{ab}$, una interpretación física, pues viene de la variación de la acción de materia. En el capítulo 2 hicimos una descomposición de $C^c{}_{ab}$. Una descomposición análoga puede hacerse para $\Sigma_c{}^{ab}$, en concreto, $16\pi\Sigma = 16\pi\Sigma(\sigma,\rho,\Delta\Sigma)$, donde $\Delta\Sigma$ es la parte sin trazas, y $\sigma_c = \Sigma_c{}^{ab}g_{ab}$, $\rho^b = \Sigma_a{}^{ab}$ las trazas. Haciendo uso de la ecuación de movimiento, relacionamos las trazas de $C^c{}_{ab}$ con las trazas de $\Sigma_c{}^{ab}$, dicho matemáticamente, $\tau = \tau(\rho,\sigma)$, $\lambda = \lambda(\rho,\sigma)$, o equivalentemente, $\rho = \rho(\tau,\lambda)$, $\sigma = \sigma(\tau,\lambda)$.

De la misma manera que relacionamos la parte con trazas podemos relacionar la parte sin trazas, considerando que tenemos, $\Delta\Sigma = h(\Delta C)$, donde h es cierta función que se determinará al hacer los cálculos, que las relaciona y que resolveremos para $\Delta C^c{}_{ab}$, con base en una combinación de un par de propuestas que, en inicio no funcionaron por si solas. Las igualdades encontradas en este capítulo serán, en su momento, introducidas en el tensor de Einstein efectivo descrito en el capítulo anterior.

3.1. Resolviendo para la conexión

La ecuación de movimiento (3.1), se expresa únicamente como una ecuación algebraica de $C^c{}_{ab}$.

$$16\pi\Sigma_c{}^{ab} = C^{(b}{}_{de}g^{|de|}\delta_c^{a)} + C^d{}_{dc}g^{ab} - 2C^{(b}{}_{ce}g^{|e|a)} \tag{3.1}$$

$\Sigma_c{}^{ab}$ tiene una simetría análoga a $C_c{}^{ab}$, es simétrico en sus dos superíndices como consecuencia de que es la variación del lagrangiano respecto a $C^c{}_{ab}$.

$$\Sigma_c{}^{ab} = -\frac{\alpha_M}{16\pi}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta\Gamma^c{}_{ab}} \tag{3.2}$$

Sustituimos la descomposición de $C^c{}_{ab}$ (2.16) directamente en la ecuación de movimiento (3.1), con lo cual obetenemos

$$16\pi\Sigma_c{}^{ab} = \tau^{(b}\delta_c^{a)} + \lambda_c g^{ab} - \frac{1}{9}\delta_c^{(b}\left[2\lambda^{a)} + 4\tau^{a)}\right] - \frac{1}{9}g^{ab}\left[4\lambda_c - \tau_c\right] - 2\Delta C^{(b}_{ce}g^{a)e}, \tag{3.3}$$

es decir, ${\Sigma_c}^{ab}$ dado como función de τ, λ y $\Delta {C^c}_{ab}$.

Paralelamente hacemos un proceso análogo al realizado con ${C^c}_{ab}$, podemos calcular una descomposición en trazas para ${\Sigma_c}^{ab}$, (en $D=4$)

$$ {\Sigma_c}^{ab} = \frac{1}{4} g^{ab} \left(\frac{10\sigma_c - 4\rho_c}{9} \right) + \frac{1}{9} \delta_c^{(a} \left[4\rho^{b)} - \sigma^{b)} \right] + \Delta {\Sigma_c}^{ab}, \tag{3.4} $$

como consecuencia, la descomposición cumple las ecuaciones,

$$ {\Sigma_c}^{ab} g_{ab} = \sigma_c, \tag{3.5a} $$
$$ {\Sigma_a}^{ab} = \rho^b, \tag{3.5b} $$
$$ g_{ab} \Delta {\Sigma_c}^{ab} = 0, \tag{3.5c} $$
$$ \Delta {\Sigma_a}^{ab} = 0. \tag{3.5d} $$

Dado que tenemos una descomposición de ${C^c}_{ab}$ en trazas (2.16), en este punto podemos calcular facilmente las trazas de $16\pi {\Sigma_c}^{ab}$ como función de las trazas de ${C^c}_{ab}$ utilizando la ecuación de movimiento (3.1).

$$ 16\pi g_{ab} {\Sigma_c}^{ab} = 2\lambda_c + \tau_c, \tag{3.6a} $$
$$ 16\pi {\Sigma_c}^{cb} = \frac{3\tau^b}{2}. \tag{3.6b} $$

De las ecuaciones anteriores podemos despejar τ y λ en términos de las trazas de ${\Sigma_c}^{ab}$

$$ \tau^b = \frac{2}{3} 16\pi {\Sigma_c}^{cb}, \tag{3.7a} $$
$$ \lambda_c = 8\pi {\Sigma_c}^{ab} g_{ab} - \frac{16\pi}{3} {\Sigma_a}^{ad} g_{dc}. \tag{3.7b} $$

Recordando que la descomposición esta hecha de tal manera que,

$$ g_{ab} {\Sigma_c}^{ab} = \sigma_c, \tag{3.8a} $$
$$ {\Sigma_a}^{ab} = \rho^b. \tag{3.8b} $$

Obtenemos entonces que las ecuaciones (3.6) son

$$ 16\pi\rho_c = 2\lambda_c + \tau_c, \tag{3.9a} $$
$$ 16\pi\rho^b = \frac{3}{2}\tau^b, \tag{3.9b} $$

las ecuaciones para τ y λ en términos de las trazas de ${\Sigma_c}^{ab}$ dadas en las ecuaciones (3.7) se ven de esta manera.

$$ \tau_c = \frac{2}{3} 16\pi\rho_c, \tag{3.10a} $$
$$ \lambda_c = 8\pi\sigma_c - \frac{16\pi}{3}\rho_c. \tag{3.10b} $$

Hemos entonces realizado la primera parte del cálculo $\tau = \tau(\sigma, \rho)$, $\lambda = \lambda(\sigma, \rho)$: relacionar las trazas de $C^c{}_{ab}$ y de $\Sigma_c{}^{ab}$.

Multiplicando por el factor de 16π, el tensor $16\pi\Sigma_c{}^{ab}$ tiene trazas que aparecen en la ecuación de movimiento, éstas pueden expresarse en términos de τ y λ mediante las ecuaciones (3.9). Sustituyendo dichas expresiones, encontramos que la descomposición de $16\pi\Sigma_c{}^{ab}$ es,

$$16\pi\Sigma_c{}^{ab} = \frac{1}{9} g^{ab} [5\lambda_c + \tau_c] + \frac{1}{9} \delta_c^{(a} \left[5\tau^{b)} - 2\lambda^{b)}\right] + 16\pi\Delta\Sigma_c{}^{ab}. \tag{3.11}$$

Igualando (3.3) y (3.11),

$$\begin{aligned} \tau^{(b} \quad \delta_c^{a)} + \lambda_c g^{ab} - \frac{1}{9}\delta_c^{(b}\left[2\lambda^{a)} + 4\tau^{a)}\right] - \frac{1}{9} g^{ab} [4\lambda_c - \tau_c] - 2\Delta C^{(b}_{ce} g^{a)e} \\ = \quad \frac{1}{9} g^{ab} [5\lambda_c + \tau_c] + \frac{1}{9}\delta_c^{(a}\left[5\tau^{b)} - 2\lambda^{b)}\right] + 16\pi\Delta\Sigma_c{}^{ab} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Notamos que los coeficientes de ambos lados de la igualdad anterior son iguales, por lo que al final esta igualdad se puede resumir en,

$$16\pi\Delta\Sigma_c{}^{ab} = -2\Delta C^{(b}{}_{ce} g^{a)e}. \tag{3.13}$$

En lo que se refiere a resolver esta ecuación para $\Delta C^c{}_{ab}$, debemos proponer $\Delta C = f(\Delta\Sigma)$, debe ser libre de trazas por consistencia con (2.15), debe ser simétrica en dos de sus índices por consistencia con (2.7), y debe resolver la ecuación (3.13). Consideremos

$$\Delta C^c{}_{ab} = -8\pi g_{aa'} g_{bb'} g^{cc'} \Delta\Sigma_{c'}{}^{b'a'} \tag{3.14}$$

Esta propuesta cumple con las simetrías que debe cumplir, es simétrico en los dos índices inferiores, estamos aprovechando la simetría de $\Delta\Sigma^c{}_{ab}$ bajando esos índices simétricos. También cumple con no tener trazas pues aprovecha la virtud de $\Delta\Sigma^c{}_{ab}$ de ser libre de trazas. A pesar de todo lo anterior, no es aceptable como solución ya que, después de introducirlo en la ecuación (3.13),

$$16\pi\Delta\Sigma_c{}^{ab} = 16\pi g_{cc'} \Delta\Sigma_{b'}{}^{c'(a} g^{b)b'} = 16\pi\Delta\Sigma^{(a|}{}_c{}^{|b)}, \tag{3.15}$$

donde observese como los índices no coinciden; propongamos una nueva solución a la ecuación (3.13). Tomemos en consideración la siguiente propuesta,

$$\Delta C^c{}_{ab} = -16\pi g_{d(a} \Delta\Sigma_{b)}{}^{dc} = -16\pi\Delta\Sigma_{(ab)}{}^c, \tag{3.16}$$

dicha propuesta cumple con las restricciones necesarias sobre simetría y ser libre de trazas. Introduciendo en la ecuacion (3.13),

$$\begin{aligned} 16\pi\Delta\Sigma_c{}^{ab} &= 32\pi g_{d(c} \Delta\Sigma_{e)}{}^{d(b} g^{a)e} \\ &= 16\pi\left[g_{dc}\Delta\Sigma_e{}^{d(b} g^{a)e} + g_{de}\Delta\Sigma_c{}^{d(b} g^{a)e}\right] \\ &= 16\pi\left[\Delta\Sigma^{(a|}{}_c{}^{|b)} + \delta_d^{(a}\Delta\Sigma_c{}^{|d|b)}\right] \\ &= 16\pi\left[\Delta\Sigma^{(a|}{}_c{}^{|b)} + \Delta\Sigma_c{}^{(ab)}\right], \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$16\pi\Delta\Sigma_c{}^{ab} = 16\pi\left[\Delta\Sigma^{(a|}{}_c{}^{|b)} + \Delta\Sigma_c{}^{(ab)}\right] \tag{3.17}$$

De la ecuación (3.17) hay dos cosas por decir, la primera es que con su segundo término atinamos en todo, simetría, parte libre de trazas, más aun, concuerda en índices después de introducir en la (3.13). No obstante, el primer término es un término espurio, si nos detenemos a observar con cuidado, podremos percibir que es el mismo tipo de término no deseado que se obtuvo en (3.15), por lo que, restando (3.14) a (3.16), eliminamos los términos no deseados.

Finalmente, la solución a (3.13) es,

$$\Delta C^c{}_{ab} = -16\pi g_{d(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{dc} + 8\pi g_{ad}g_{bb'}g^{cc'}\Delta\Sigma_{c'}{}^{db'} \tag{3.18}$$

Para terminar, en este capítulo hemos obtenido, $\Delta C = \Delta C(\Delta\Sigma)$, $\tau = \tau(\rho)$, $\lambda = \lambda(\rho,\sigma)$, concretamente,

$$\begin{aligned}
\tau_c &= \frac{2}{3}16\pi\rho_c, && (3.19)\\
\lambda_c &= 8\pi\sigma_c - \frac{16\pi}{3}\rho_c, && (3.20)\\
\Delta C^c{}_{ab} &= -16\pi g_{d(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{dc} + 8\pi g_{ad}g_{bb'}g^{cc'}\Delta\Sigma_{c'}{}^{db'}. && (3.21)
\end{aligned}$$

Dadas las ecuaciones anteriores es posible calcular $C^c{}_{ab}$ introduciendo sus partes en la expresión de la sección (2.1.1). Lo que sigue es introducir estas ecuaciones en (2.49) para obtener el tensor de Einstein

3.1.1. Tensor de Einstein

El objetivo de esta sección es mostrar el tensor de Einstein del capítulo 2 y llevarlo a las variables físicas. Para el cálculo explícito véase el apéndice C. El resultado es

$$\begin{aligned}
G_{ab} &= \widetilde{G}_{ab} + g_{ab}\left[\frac{4\pi}{9}\widetilde{\nabla}_d\left(7\sigma^d - 10\rho^d\right) + \frac{5}{2\cdot 9}\left(\frac{16\pi}{3}\right)^2\rho_c\rho^c - \frac{21}{2\cdot 9^2}\frac{(16\pi)^2}{3}\sigma_c\rho^c\right.\\
&- \left.\frac{1}{2\cdot 9^2}(8\pi)^2\sigma_c\sigma^c + \frac{(8\pi)^2}{2}\left[2g_{a'b'}\delta\Sigma_k{}^{ja'}\Delta\Sigma_j{}^{b'k} - g_{hd}g_{eg}g^{a'b'}\Delta\Sigma_{a'}{}^{dg}\Delta\Sigma_{b'}{}^{eh}\right]\right]\\
&- 8\pi\widetilde{\nabla}_a\sigma_b + \frac{16\pi}{3}\widetilde{\nabla}_a\rho_b + \frac{32\pi}{9}\widetilde{\nabla}_{(a}\left[\sigma_{b)} - \rho_{b)}\right] - \frac{1}{9}\left(\frac{16\pi}{3}\right)^2\rho_a\rho_b + \frac{11}{9^2}(8\pi)^2\sigma_a\sigma_b\\
&- \frac{12}{9^2}\frac{(16\pi)^2}{3}\sigma_{(a}\rho_{b)} + \widetilde{\nabla}_d\left[-16\pi g_{e(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{ed} + 8\pi g_{ae}g_{bb'}g^{dc'}\Delta\Sigma_{c'}{}^{eb'}\right]\\
&- \frac{1}{2\cdot 9}(16\pi)^2\left(\left[g_{hb}g_{d(a}\Delta\Sigma_{g)}{}^{dh} + (a\leftrightarrow b)\right](\sigma^g - 4\rho^g) + g_{gg'}g_{a'(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{a'g'}(4\rho^g - \sigma^g)\right)\\
&+ \frac{(8\pi)^2}{9}\left\{-2g_{d(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{dh}\left[5\sigma_h + \frac{14}{3}\rho_h\right] + g_{ad}g_{bb'}g^{hc'}\Delta\Sigma_{c'}{}^{db'}\left[\frac{14}{3}\rho_h + 5\sigma_h\right]\right\}\\
&- (8\pi)^2\left[2g_{aa'}g_{bb'}\Delta\Sigma_k{}^{ja'}\Delta\Sigma_j{}^{b'k} - 2g_{aa'}g_{eb}g_{hh'}g^{gg'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_g{}^{eh} + g_{hd}g_{eg}\Delta\Sigma_a{}^{dg}\Delta\Sigma_b{}^{eh}\right]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

En resumen, en este capítulo hemos utilizado la descomposición de $C^{c}{}_{ab}$ para resolver la ecuación de movimiento (2.70), hemos introducido las partes de $\Sigma_c{}^{ab}$ en el tensor de Einstein (2.49), para obtener una teoría como la que fue descrita en (2.73) teniendo ahora un T^{eff}_{ab} que solo depende de las componentes de materia de la teoría y ya no de la conexión.

3.2. Equivalencia de las dos formulaciones

El caso que $\Sigma_c{}^{ab} = 0$ es particularmente interesante, realizando el mismo prodecimiento de este capítulo, es decir, sacar las trazas de la ecuación de movimiento, llegamos a que las trazas de $C^{c}{}_{ab}$ son cero. Lo restante a considerar es la descomposición de $C^{c}{}_{ab}$, la parte sin trazas es

$$\Delta C^{(a}{}_{ce}g^{b)e} = 0. \tag{3.23}$$

Por supuesto una solución es que $\Delta C^{c}{}_{ab} = 0$, como lo mostraría la ecuación (3.18), lo cual implicaría que $C^{c}{}_{ab} = 0$, sin embargo, no consideramos que la ecuación (3.23) sea suficiente para hacer dicha afirmación. Por otro lado lo que implica (3.23) es que $\nabla_c g^{ab} = 0$ y en consecuencia $\nabla_c g_{ab} = 0$. Es decir, tenemos un operador compatible con la métrica. Al hacer el tratamiento a la Palatini en el caso de vacío recuperamos las ecuaciones de Einstein, así como la condición de metricidad de operador derivada ∇. En el caso de vacío no es necesario hacer la suposición *a priori* sobre el operador derivada, dicha información ya se encuentra en la acción de Einstein-Hilbert. En cualquier caso, es importante notar que el formalismo nos lleva a la condición de metricidad, como se señala en [34], y no a la conexión de Levi-Civita como se señala en [36, 37]. Por supuesto, posteriormente puede relacionarse al operador derivada ∇ con parciales y entonces usar como conexión la conexión de Levi-Civita, pero el formalismo nos arroja con condición de metricidad.

3.3. Ejemplo de la teoría Einstein-Palatini

En este capítulo analizamos un caso particular de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores. Partiendo de la misma acción, se hace el tratamiento estándar 3.3.1 y luego el tratamiento a la Palatini, se resuelve para $C^{c}{}_{ab}$ y se construye el tensor de Einstein efectivo para posteriormente contrastar ambos resultados buscando soluciones particulares en las teorías para las cuales el contenido de materia gravite de formas distintas.

La acción a estudiar es

$$S = \int \sqrt{-g}\left[g^{ab}R_{ab} + \frac{16\pi}{2}\left((\nabla_c v^c)^2 - m^2 g_{ab}v^a v^b\right)\right] d^4x, \tag{3.24}$$

donde v^a es un campo vectorial. La motivación para estudiar una teoría de este tipo es que, como se ha mencionado, necesitamos que la acción de materia dependa de la conexión, pero además queremos que sea una teoría sencilla, es decir, solo tener algunas partes de la descomposición de $\Sigma_c{}^{ab}$.

3.3.1. Relatividad General

En relatividad general tenemos que variar respecto al campo v^a y respecto al tensor métrico, pues se asume que el operador derivada es métrico. Es importante recordar que los símbolos de Christoffel aparecen al pasar a parciales y deben ser variados respecto a la métrica pues están dados *a priori*. Consideremos la variación respecto a v^a

$$\begin{aligned}\delta S_M &= \int \sqrt{-g}\frac{16\pi}{2}\left[2\widetilde{\nabla}_d v^d \widetilde{\nabla}_a \delta v^a - 2m^2 g_{ba} v^b \delta v^a\right] d^4x \\ &= -\int \sqrt{-g}16\pi \left[\widetilde{\nabla}_a \left[\widetilde{\nabla}_d v^d\right] + m^2 g_{ba} v^b\right] \delta v^a d^4x, \end{aligned} \tag{3.25}$$

donde en el último paso hemos integrado por partes. De (3.25) es fácil ver que la ecuación de movimiento para v^a es

$$\widetilde{\nabla}_a \widetilde{\nabla}_d v^d + m^2 v_a = 0. \tag{3.26}$$

Calculando $\widetilde{\nabla}_b v_a$ a partir de la ecuación (3.26) y usando el hecho de que no hay torsión es posible demostrar que,

$$\widetilde{\nabla}_a v_b - \widetilde{\nabla}_b v_a = 0. \tag{3.27}$$

Ahora consideramos la variación de la acción de materia respecto a la métrica,

$$\begin{aligned}\delta S_M = \int \sqrt{-g}\Big\{ & 8\pi \left[-\frac{1}{2} g_{ab}\left((\widetilde{\nabla}_c v^c)^2 - m^2 v^2\right) - m^2 v_a v_b\right] \delta g^{ab} \\ & + 16\pi \widetilde{\nabla}_d v^d v^e \delta \widetilde{\Gamma}^c{}_{ce}\Big\} d^4x, \end{aligned} \tag{3.28}$$

Calculando la variación de los Christoffels, obtenemos

$$\begin{aligned} 8\pi \widetilde{T}_{ab} &= 8\pi \left[g_{ab}\left(\frac{1}{2}(\widetilde{\nabla}_c v^c)^2 - \frac{1}{2} m^2 v^2 - \widetilde{\nabla}_e \left[\widetilde{\nabla}_d v^d v^e\right]\right) - m^2 v_a v_b\right] \\ &= -8\pi \left[g_{ab}\left((\widetilde{\nabla}_c v^c)^2 + \frac{1}{2} m^2 v^2 + v^e \widetilde{\nabla}_e \left[\widetilde{\nabla}_d v^d\right]\right) + m^2 v_a v_b\right], \end{aligned} \tag{3.29}$$

por lo que

$$\widetilde{G}_{ab} = -8\pi \left[g_{ab}\left((\widetilde{\nabla}_c v^c)^2 + \frac{1}{2} m^2 v^2 + v^e \widetilde{\nabla}_e \left[\widetilde{\nabla}_d v^d\right]\right) + m^2 v_a v_b\right] \tag{3.30}$$

Por consistencia debemos ver si $\widetilde{\nabla}^a \widetilde{T}_{ab} = 0$, y es fácil demostrarlo utilizando la ecuación de movimiento (3.26) y su consecuencia (3.27).

3.3.2. Variación a la Palatini

Para esta sección debemos recordar que variaremos respecto a la conexión $\Gamma^c{}_{ab}$, g_{ab}. Dado que, en general, no tenemos una conexión métrica, $\nabla_a v^a \neq \nabla^a v_a$. Tomamos la variacion de la acción de materia, respecto a la métrica

$$\delta S_M = \int \sqrt{-g}\left[8\pi\left(-\frac{1}{2} g_{ab}\left\{(\nabla_c v^c)^2 - m^2 v^2\right\} + m^2 g_{ac} g_{bd} v^c v^d\right) \delta g^{ab}\right] d^4x, \tag{3.31}$$

de donde se sigue que

$$T_{ab} = \frac{1}{2} g_{ab} \left[(\nabla_c v^c)^2 - m^2 v^2 \right] - m^2 v_a v_b, \tag{3.32}$$

Aquí es donde se analiza la diferencia de variar respecto a $C^c{}_{ab}$ o respecto a $\Gamma^c{}_{ab}$. Si variaramos respecto a $C^c{}_{ab}$ obtendríamos un término extra, el cual vendría de variar los Christoffels. Este término lleva a inconsistencias, como por ejemplo que $\widetilde{\nabla}^a \widetilde{G}_{ab} \neq 0$. Es por ello que la variación se toma respecto a $\Gamma^c{}_{ab}$ y no respecto a $C^c{}_{ab}$ aunque en las demás variaciones obtengamos las mismas ecuaciones de movimiento. Aquí se ve la importancia de especificar las variables dinámicas de una teoría, mientras una lleva a inconsistencias, la otra lleva a una formulación precisa.

De lo anterior

$$G_{ab} = 8\pi \left[\frac{1}{2} \left((\nabla_c v^c)^2 - m^2 v^2 \right) - m^2 v_a v_b \right] \tag{3.33}$$

Tomando la variación respecto a $\Gamma^c{}_{ab}$

$$\delta S_M = \int \sqrt{-g} \frac{16\pi}{2} \nabla_e v^e \delta \left(\nabla_d v^d \right) d^4 x, \tag{3.34}$$

y ahora,

$$\begin{aligned} \delta \left(\nabla_d v^d \right) &= \delta \left(\partial_d v^d + \Gamma^d{}_{db} v^b \right) \\ &= v^b \delta \left(\Gamma^c{}_{cb} \right) \\ &= v^b \delta^a_c \delta \left(\Gamma^c{}_{ab} \right) \\ &= v^{(b} \delta^{a)}_c \delta \Gamma^c{}_{ab}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Juntando las ecuaciones (3.34) y (3.35) obtenemos

$$16\pi \Sigma_c{}^{ab} = -16\pi \nabla_e v^e v^{(b} \delta^{a)}_c. \tag{3.36}$$

Este último resultado es igual al que se obtendría variando respecto a $C^c{}_{ab}$. En consecuencia

$$F^c{}_{ab} = -16\pi \nabla_e v^e v^{(b} \delta^{a)}_c. \tag{3.37}$$

En la variación respecto a v^a podemos olvidarnos de la sutileza empleada al considerar Γ y tomar a C en la variación. Esto es porque al calcular la variación tomamos el resto de las variables constantes, es decir, Γ y g y por ende $\widetilde{\Gamma}$ y C. Uno de los motivos para hacerlo de esta manera es integrar por partes más fácilmente. Entonces,

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int \sqrt{-g} \frac{16\pi}{2} \left[2\nabla_c v^c \delta(\nabla_a v^a) - 2m^2 g_{ab} v^b \delta v^a \right] d^4 x \\ &= \int \sqrt{-g} 16\pi \left[-\widetilde{\nabla}_a \nabla_c v^c + \nabla_c v^c C^e{}_{ea} - m^2 g_{ab} v^b \right] \delta v^a d^4 x, \end{aligned} \tag{3.38}$$

y se sigue que la ecuación de movimiento es

$$\widetilde{\nabla}_a \nabla_c v^c - \nabla_c v^c C^e{}_{ea} + m^2 v_a. \tag{3.39}$$

En conclusión, hemos obtenido las ecuaciones de movimiento de la teoría, lo que sigue es resolver la ecuación (3.37) utilizando lo desarrolado en el capítulo 3.

Resolviendo para la conexión

Dada la descomposición en trazas tanto de $\Sigma_c{}^{ab}$ como de $C^c{}_{ab}$, en particular utilizando las ecuaciones (3.7) podemos obtener las trazas de $C^c{}_{ab}$ si conocemos las trazas de $\Sigma_c{}^{ab}$. Las trazas de $\Sigma_c{}^{ab}$ son

$$\sigma_c = -\frac{5}{2}\nabla_e v^e v_c, \tag{3.40}$$

$$\rho^b = -\nabla_e v^e v^b, \tag{3.41}$$

además es sencillo ver que Σ no contiene parte sin trazas y tampoco una parte proporcional a g_{ab}. Por lo tanto, utilizando (3.7) las trazas de $C^c{}_{ab}$ son

$$\lambda_c = \frac{16\pi}{3}\nabla_d v^d v_c, \tag{3.42}$$

$$\tau^b = -16\pi\frac{5}{3}\nabla_d v^d v^b. \tag{3.43}$$

Con lo anterior y usando (2.16) llegamos a resolver para $C^c{}_{ab}$

$$C^c{}_{ab} = -8\pi\nabla_d v^d v^c g_{ab} + \frac{16\pi}{3}\nabla_d v^d \delta^c_{(a} v_{b)}. \tag{3.44}$$

Es fácil ver que aún falta un paso por realizar pues $\nabla_d v^d$ depende de λ_d,

$$\lambda_c = \frac{16\pi}{3}\left[\widetilde{\nabla}_d v^d + \lambda_d v^d\right] v_c, \tag{3.45}$$

contrayendo con v^c y despejando $\lambda_c v^c$ obtenemos,

$$\lambda_c v^c = \frac{\frac{16\pi}{3}}{1-\frac{16\pi}{3}v^2} v^2 \widetilde{\nabla}_d v^d, \tag{3.46}$$

donde $v^2 = g_{cd}v^c v^d$ por lo cual,

$$\nabla_d v^d = \frac{\widetilde{\nabla}_d v^d}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}. \tag{3.47}$$

Podemos ahora sustituir en todas las ecuaciones de la sección (3.3.2) las dependencias en λ, pero dado que el lado izquierdo de (3.47) es más compacto seguiremos escribiendo $\nabla_d v^d$, manteniendo en mente esta última igualdad. Con todo lo anterior podemos escribir la ecuación de movimiento una vez que se ha resuelto para la conexión,

$$\widetilde{\nabla}_a \nabla_c v^c - \frac{16\pi}{3}(\nabla_c v^c)^2 v_a + m^2 v_a = 0. \tag{3.48}$$

Es interesante ver que utilizando (3.39) y (3.47) podemos encontrar una relación exactamente igual que en el caso de relatividad general,

$$\widetilde{\nabla}_a v_b - \widetilde{\nabla}_a v_b = 0, \tag{3.49}$$

cabe señalar que dada la anti-simetrización en realidad es válido para cualquier operador derivada,

$$\nabla_a v_b - \nabla_b v_a = 0. \tag{3.50}$$

Finalmente notar que el denominador tiene problemas cuando $v^2 = 3/16\pi$. Por lo tanto asumimos que nos encontramos en una región en la cual $v^2 \neq 3/16\pi$. Podemos ver que la dimensión del espacio-tiempo entra en juego en este punto, pues lo que tenemos haciendo en calculo explícito utilizando (2.14) es $(8\pi(D-2))/(3)$ lo cual para $D = 4$ es el caso que tenemos. Lo que resta es construir el tensor de Einstein efectivo, T_{ab}^{eff}, incorporando los valores de las trazas de $\Sigma_c{}^{ab}$ particulares de esta teoría.

Construcción del tensor de energía-momento efectivo

Dado que tenemos las trazas de $\Sigma_c{}^{ab}$ y de $C^c{}_{ab}$ podemos construir el tensor de Einstein efectivo utilizando tanto (2.49) como (3.22). Es un buen ejercicio ver si ambas construcciones resultan en el mismo tensor. Después de realizar los cálculos obtenemos la ecuación de Einstein

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_{ab} &= 8\pi g_{ab}\left[\frac{(\nabla_d v^d)^2}{2} - \frac{m^2 v^2}{2} - \widetilde{\nabla}_d\left[\nabla_e v^e v^d\right] - \frac{8\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2 v^2\right] \\ &+ 8\pi v_a v_b\left[\frac{16\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2 - m^2\right],\end{aligned} \tag{3.51}$$

usando la ecuación de movimiento (3.39) obtenemos,

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_{ab} &= 8\pi g_{ab}\left[\frac{(\nabla_d v^d)^2}{2} + \frac{m^2 v^2}{2} - \widetilde{\nabla}_d v^d \nabla_e v^e - 8\pi(\nabla_d v^d)^2 v^2\right] \\ &+ 8\pi v_a v_b\left[\frac{16\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2 - m^2\right]\end{aligned} \tag{3.52}$$

donde tenemos dos términos extras respecto al caso de relatividad general, y que vienen pesados por factores de 8π, o si reintroducimos G . Sin embargo, hay que recordar que dado lo estudiado en las secciones anteriores $\nabla_d v^d = (\widetilde{\nabla}_d v^d)?(1 - \frac{16\pi}{3}v^2)$, por lo que los términos no son exactamente los del caso estándar. Por consistencia con (2.28) debemos asegurarnos de que (3.52) sea libre de divergencia, lo cual sucede (véase apéndice D.2).

3.3.3. Einstein-Palatini vs. Einstein-Hilbert

En esta sección contrastamos los resultados de todo el escrito con el tratamiento en el caso usual buscando soluciones a la ecuación de movimiento y observando como gravitan.

Einstein-Hilbert

Buscamos ahora soluciones a la ecuación de movimiento (3.26) para ver de que manera gravitan en la ecuación de Einstein. Comenzamos distinguiendo entre dos situaciones.

1. Si pedimos divergencia constante $\widetilde{\nabla}_c v^c = A \neq 0$ y $m^2 = 0$ tenemos una familia infinita de soluciones, la divergencia del campo puede tener cualquier valor y en consecuencia tenemos que nuestro campo gravita como una constante cosmológica positiva,

$$\widetilde{G}_{ab} = -8\pi g_{ab} A^2. \tag{3.53}$$

2. Por otro lado podemos solo pedir que el campo tenga divergencia constante, lo cual implicaría que $m^2 = 0$ y, en consecuencia, tenemos la misma situación descrita anteriormente.

   Hacer esta distinción parece redundante pero en el otro formalismo son situaciones distintas.

Einstein-Palatini

1. Si de igual manera pedimos $m^2 = 0$ y divergencia constante $\nabla_c v^c = B \neq 0$, dada la ecuación (3.48), la divergencia solo puede tener un valor, cero. En dicho caso el campo gravita como vacío

$$\widetilde{G}_{ab} = 0. \tag{3.54}$$

2. Si por otro lado tenemos divergencia constante existe una solución particular para la cual la masa no es cero, $16\pi(\nabla_c v^c)^2/3 = m^2$. En este caso la divergencia es constante pero no puede tomar cualquier valor, está naturalente ligada a la masa, cosa que no ocurrió en el tratamiento estándar. Más aún, el tomar este valor particular de la masa anula aquello que no gravita como constante cosmológica i.e., lo que es proporcional a $v_a v_b$, por lo tanto es posible ver que de igual manera el campo gravita como una constante cosmológica positiva

$$\widetilde{G}_{ab} = -8\pi g_{ab} B^2. \tag{3.55}$$

   Mientras que en Einstein-Hilbert si no anulamos la masa el campo sí gravitará con términos proporcionales a $v_a v_b$ y si la fijamos tenemos una infinidad de posibles valores para la “constante cosmológica” en el tratamiento a la Palatini obtenemos un valor fijo ligado a la masa del campo. En esta situación hablar de constante cosmológica es equivalente a hablar de la masa de un campo vectorial con divergencia constante en el tratamiento a la Palatini.

   En resumen, después de tomar un ejemplo particular es posible ver que las dos formulaciones no llevan a situaciones físicas equivalentes empezando por el hecho de que el campo no admite el mismo tipo de soluciones hasta el hecho de que, dichas soluciones gravitan de diferente manera.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se trató el enfoque Palatini de la relatividad general en el caso en el que la acción gravitacional es Einstein-Hilbert y la acción de materia depende de la conexión. Se trabajó el caso general para un lagrangiano arbitrario de materia y se estudió el caso de vacío con detalle, donde se observó la equivalencia con la formulación métrica. Es importante observar que la teoría en este caso lo que asegura es la condición de metricidad, no fija la conexión a ser la de Levi-Civita. En el caso general se recurrió a descomponer la conexión espacio-temporal y, con ello, resolver la ecuación de movimiento de la conexión. Con lo anterior se construyó un tensor de energía-momento efectivo, el cual es equiparable al tensor de energía momento de la formulación métrica. Finalmente se utilizó una acción de materia particular para contrastar ambas formulaciones.

Al contrastar ambas formulaciones mediante una acción particular de materia, se observó que pidiendo condiciones similares al campo, puede gravitar de maneras radicalmente diferentes, en un caso vacío, en otro caso como constante cosmológica. Por lo tanto, en estos casos las formulaciones no son equivalentes. Una observación de este trabajo es que para el caso en el que hay presencia de materia que depende de la conexión es necesario asegurarse de que la conexión sea independiente de la métrica. Esto se logra incorporando una conexión extra para realizar las variaciones de la acción, lo cual asegura que la teoría sea consistente. En retrospectiva, se concluye que en el caso de vacío uno puede ser poco cuidadoso y no incorporar una conexión auxiliar pues las formulaciones son equivalentes.

Por otro lado es interesante analizar el caso de $f(R)$ en el tratamiento a la Palatini. Incluso cuando la materia no está acoplada a la conexión, si se sale de la acción de Einstein-Hilbert, naturalmente la ecuación de movimiento de la conexión cambia y por ende las formulaciones no son equivalentes. Analizar el caso cuando además la materia depende de la conexión es una posible proyección a futuro.

Por otro lado, es posible obtener una expresión para la divergencia del tensor de energía-momento usando que la acción de materia es invariante bajo difeomorfismos. En la formulación métrica, obtenemos que el tensor de energía-momento tiene divergencia cero. Es posible realizar un procedimiento análogo en el caso Einstein-Palatini, en el cual el tensor de energía-momento no tiene divergencia igual a cero, sin embargo, el que debe de ser libre de divergencia es el tensor de energía-momento efectivo. Como trabajo futuro se encuentra la demostración de que, en efecto, el tensor de energía-momento efectivo es libre de divergencia para el caso general, usando que la acción de materia es invariante bajo difeomorfismos.

Finalmente mencionar que en todo el trabajo se utilizó el formalismo lagrangiano. La relatividad general acepta una formulación hamiltoniana [40, 41], en el cual también puede estudiarse el tratamiento a la Palatini [36, 42], como otro posible trabajo a futuro se encuentra analizar el programa hamiltoniano cuando la materia depende de la conexión.

Apéndice A

Notación y convenciones

Durante todo el trabajo se utiliza una métrica espacio-temporal con signatura +2 y los tensores geométricos se han definido como en [38]. Los índices se "bajan" y "suben" con la métrica del espacio-tiempo y su inversa,

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c, \tag{A.1a}$$

$$B_{ab}{}^{cd} g_{ce} g^{af} = B^f{}_{be}{}^d. \tag{A.1b}$$

La dimensión del espacio-tiempo se asume como $D = 4$ salvo donde se indique lo contrario. Los índices del alfabeto latino son índices abstractos, los cuales únicamente señalan el carácter tensorial del objeto en cuestión. Durante el trabajo se utiliza la notación usual para señalar que un conjunto de índices aparece de manera simétrica o anti-simétrica, es decir,

$$A_{(ab)} = \frac{1}{2}\left(A_{ab} + A_{ba}\right), \tag{A.2a}$$

$$A_{[ab]} = \frac{1}{2}\left(A_{ab} - A_{ba}\right). \tag{A.2b}$$

Además usaremos una convención propia a partir de la sección 2.5.2 sobreponiendo una tilde para designar a la contraparte usual de relatividad general. Por ejemplo, la tilde sobre ∇ representa al operador derivada de Levi-Civita, el que por definición satisface,

$$\widetilde{\nabla}_a g_{bc} = 0, \tag{A.3}$$

donde g_{bc} es el tensor métrico.

Más aún, se sobre pone tilde a otros objetos matemáticos tales como tensores, por ejemplo

$$\widetilde{R}_{abc}{}^d = \left(\widetilde{\nabla}_a \widetilde{\nabla}_b - \widetilde{\nabla}_b \widetilde{\nabla}_a\right) \omega_c, \tag{A.4}$$

para indicar que es el tensor de Riemann construido con el operador derivada de Levi-Civita, que es el utilizado en relatividad general.

Durante el trabajo se utilizan 3 conexiones

$$\left(\nabla_a - \widetilde{\nabla}_a\right)\omega_b = -C^c{}_{ab}\,\omega_c, \tag{A.5}$$

$$\left(\nabla_a - \partial_a\right)\omega_b = -\Gamma^c{}_{ab}\,\omega_c, \tag{A.6}$$

$$\left(\widetilde{\nabla}_a - \partial_a\right)\omega_b = -\widetilde{\Gamma}^c{}_{ab}\,\omega_c, \tag{A.7}$$

en todos los casos el signo negativo se toma por convención. Además dichas conexiones pueden relacionarse mediante

$$\Gamma^c{}_{ab} - \widetilde{\Gamma}^c{}_{ab} = C^c{}_{ab}. \tag{A.8}$$

En el capítulo 2 se contruyen los tensores geométricos de la teoría. Durante todo el trabajo se sigue la convención usada en el libro de Wald y para evitar confusiones con nuestra notación de la tilde se agregan las definiciones siguientes,

$$R_{ab} = R_{adb}{}^{d}, \tag{A.9a}$$

$$\widetilde{R}_{ab} = \widetilde{R}_{adb}{}^{d}, \tag{A.9b}$$

$$R = g^{ab}R_{ab}, \tag{A.9c}$$

$$\widetilde{R} = g^{ab}\widetilde{R}_{ab}, \tag{A.9d}$$

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R, \tag{A.9e}$$

$$\widetilde{G}_{ab} = \widetilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\widetilde{R}, \tag{A.9f}$$

También en la sección 2.5.2 se habla de un tensor $F_c{}^{ab}$, el cual se define de la siguiente manera

$$F_c{}^{ab}(C) = C^d{}_{dc}g^{ab} + \delta_c^{(b}C^{a)}{}_{dc}g^{dc} - 2C^{(a}{}_{ec}g^{|e|b)} \tag{A.10}$$

$$F_c{}^{ab}(\Gamma) = \Gamma^d{}_{dc}g^{ab} + \delta_c^{(b}\Gamma^{a)}{}_{dc}g^{dc} - 2\Gamma^{(a}{}_{ec}g^{|e|b)} \tag{A.11}$$

$$F_c{}^{ab}(\widetilde{\Gamma}) = \widetilde{\Gamma}^d{}_{dc}g^{ab} + \delta_c^{(b}\widetilde{\Gamma}^{a)}{}_{dc}g^{dc} - 2\widetilde{\Gamma}^{(a}{}_{ec}g^{|e|b)}, \tag{A.12}$$

además por (A.8) y la "linealidad" de $F_c{}^{ab}$ se sigue que

$$-F_c{}^{ab}(\widetilde{\Gamma}) + F_c{}^{ab}(\Gamma) = 16\pi\Sigma_c{}^{ab}. \tag{A.13}$$

A lo largo del trabajo se utiliza una notación como sigue, $G(\sigma,\rho)$, ésta indica que el tensor G es función de los tensores σ y ρ, por ejemplo,

$$G_{ab} = \sigma_{ab} + g_{ac}\rho_b^c. \tag{A.14}$$

También durante todo el trabajo se utilizan unidades tales que $G = c = 1$, salvo donde se escriben de manera explícita.

Apéndice B

Construcción de los tensores geométricos

En el capítulo 2 se introduce el tensor $C^c{}_{ab}$, y se construyen los tensores de Riemann, Ricci y Einstein de la teoría. El propósito de este apéndice es mostrar el cálculo de construcción de dichos tensores en términos de las partes de $C^c{}_{ab}$ y los tensores geométricos usados en relatividad general.

B.1. Términos cuadráticos en la conexión

Comenzamos con los términos cuadráticos en $C^c{}_{ab}$, así como su contraparte escalar *i.e.*, $C^g{}_{hb}C^h{}_{ag}$ y $g^{ab}C^g{}_{hb}C^h{}_{ag}$. Escribiendo explícitamente el cálculo,

$$\begin{aligned} C^g{}_{hb}C^h{}_{ag} &= \left[\frac{1}{4}g_{hb}\left(\frac{10\tau^g-4\lambda^g}{9}\right)+\frac{1}{9}\delta^g_{(h}\left[4\lambda_{b)}-\tau_{b)}\right]+\Delta C^g{}_{hb}\right] \\ &\times \left[\frac{1}{4}g_{ag}\left(\frac{10\tau^h-4\lambda^h}{9}\right)+\frac{1}{9}\delta^h_{(a}\left[4\lambda_{g)}-\tau_{g)}\right]+\Delta C^h{}_{ag}\right] \end{aligned}$$

Tenemos en principio 9 términos diferentes, sin embargo, dado que es un término cuadrático el número se puede reducir a 6, calculemos cada uno de ellos.

Términos cuadráticos

1. El primero de ellos,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}g_{hb}\left(\frac{10\tau^g-4\lambda^g}{9}\right)\frac{1}{4}g_{ag}\left(\frac{10\tau^h-4\lambda^h}{9}\right) \\ =\ & \frac{1}{4^2}\frac{1}{9^2}\left(100\tau_a\tau_b-40\tau_a\lambda_b-40\tau_b\lambda_a+16\lambda_a\lambda_b\right) \\ =\ & \frac{1}{4^2}\frac{1}{9^2}\left(100\tau_a\tau_b-80\tau_{(a}\lambda_{b)}+16\lambda_a\lambda_b\right) \end{aligned} \quad \text{(B.1)}$$

2. El segundo de ellos,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{9}\delta^g_{(h}\left[4\lambda_{b)}-\tau_{b)}\right]\frac{1}{9}\delta^h_{(a}\left[4\lambda_{g)}-\tau_{g)}\right] \\
= \; & \frac{1}{2}\frac{1}{9}\left(\delta^g_h\left[4\lambda_b-\tau_b\right]+\delta^g_b\left[4\lambda_h-\tau_h\right]\right)\frac{1}{2}\frac{1}{9}\left(\delta^h_a\left[4\lambda_g-\tau_g\right]+\delta^h_g\left[4\lambda_a-\tau_a\right]\right) \\
= \; & \frac{1}{4}\frac{1}{9^2}\left\{\delta^g_a\left[4\lambda_b-\tau_b\right]\left[4\lambda_g-\tau_g\right]+\delta^g_g\left[4\lambda_b-\tau_b\right]\left[4\lambda_a-\tau_a\right]\right. \\
& \left.+\left[4\lambda_b-\tau_b\right]\left[4\lambda_a-\tau_a\right]+\delta^h_b\left[4\lambda_h-\tau_h\right]\left[4\lambda_a-\tau_a\right]\right\} \\
= \; & \frac{7}{4}\frac{1}{9^2}\left[4\lambda_b-\tau_b\right]\left[4\lambda_a-\tau_a\right],
\end{aligned} \tag{B.2}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}\delta^g_{(h}\left[4\lambda_{b)}-\tau_{b)}\right]\frac{1}{9}\delta^h_{(a}\left[4\lambda_{g)}-\tau_{g)}\right] &= \frac{7}{4}\frac{1}{9^2}\left(16\lambda_a\lambda_b-4\tau_a\lambda_b-4\tau_b\lambda_a+\tau_a\tau_b\right) \\
&= \frac{7}{4}\frac{1}{9^2}\left(16\lambda_a\lambda_b-8\tau_{(a}\lambda_{b)}+\tau_a\tau_b\right).
\end{aligned} \tag{B.3}$$

3. El último término cuadrático es el término trivial

$$\Delta C^g{}_{hb}\Delta C^h{}_{ag}, \tag{B.4}$$

que es trivial ya que *a priori* no podemos decir más sobre el.

Términos cruzados

4. Consideremos el siguiente término del que tampoco podemos decir mucho,

$$\frac{1}{4}g_{hb}\left(\frac{10\tau^g-4\lambda^g}{9}\right)\Delta C^h{}_{ag}, \tag{B.5}$$

aunque recordemos que para hacer el cálculo completo debemos considerar $(a \leftrightarrow b)$,

$$\frac{1}{4}g_{hb}\left(\frac{10\tau^g-4\lambda^g}{9}\right)\Delta C^h{}_{ag}+(a\leftrightarrow b)=\frac{1}{2}\frac{1}{9}g_{h(b}\Delta C^h{}_{a)g}\left(10\tau^g-4\lambda^g\right) \tag{B.6}$$

5. Existen, por otro lado, términos con ΔC que requieren mayor cálculo, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}\delta^g_{(h}\left[4\lambda_{b)}-\tau_{b)}\right]\Delta C^h{}_{ag} &= \frac{1}{2}\frac{1}{9}\Delta C^h{}_{ag}\left(4\delta^g_h\lambda_b+4\delta^g_b\lambda_h-\delta^g_h\tau_b-\delta^g_b\tau_h\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{9}\Delta C^h{}_{ab}\left(4\lambda_h-\tau_h\right)
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Al igual que (B.6) debemos sumar a este término la contraparte simétrica, en símbolos, $(a \leftrightarrow b)$, debido a lo anterior, lo que realmente aparecerá en el cálculo final es,

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}\delta^{g}_{(h}\left[4\lambda_{b)} - \tau_{b)}\right]\Delta C^{h}{}_{ag} + (a \leftrightarrow b) &= \frac{1}{2}\frac{1}{9}\Delta C^{h}{}_{ab}\left(4\lambda_h - \tau_h\right) + (a \leftrightarrow b) \\ &= \frac{1}{9}\Delta C^{h}{}_{ab}\left(4\lambda_h - \tau_h\right), \qquad \text{(B.8)}\end{aligned}$$

pues ΔC es simétrico.

6. Finalmente,

$$\begin{aligned}& \frac{1}{4}g_{hb}\left(\frac{10\tau^g - 4\lambda^g}{9}\right)\frac{1}{9}\delta^{h}_{(a}\left[4\lambda_{g)} - \tau_{g)}\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9^2}g_{hb}(10\tau^g - 4\lambda^g)\left[4\delta^h_a\lambda_g + 4\delta^h_g\lambda_a - \delta^h_a\tau_g - \delta^h_g\tau_a\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9^2}(10\tau^g - 4\lambda^g)\left[4g_{ab}\lambda_g + 4g_{gb}\lambda_a - g_{ab}\tau_g - g_{gb}\tau_a\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9^2}(10\tau^g - 4\lambda^g)\left[g_{ab}\left(4\lambda_g - \tau_g\right) + g_{gb}\left(4\lambda_a - \tau_a\right)\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9^2}\left[g_{ab}(10\tau^g - 4\lambda^g)\left(4\lambda_g - \tau_g\right) + \left(10\tau_b - 4\lambda_b\right)\left(4\lambda_a - \tau_a\right)\right]. \qquad \text{(B.9)}\end{aligned}$$

Calculando por separado,

$$\begin{aligned}(10\tau^g - 4\lambda^g)\left(4\lambda_g - \tau_g\right) &= 40\tau^g\lambda_g - 10\tau^g\tau_g - 16\lambda^g\lambda_g + 4\lambda^g\tau_g \\ &= 44\tau^g\lambda_g - 10\tau^g\tau_g - 16\lambda^g\lambda_g. \qquad \text{(B.10)}\end{aligned}$$

Así como,

$$(10\tau_b - 4\lambda_b)(4\lambda_a - \tau_a) = 40\tau_b\lambda_a - 10\tau_b\tau_a - 16\lambda_b\lambda_a + 4\lambda_b\tau_a. \qquad \text{(B.11)}$$

Introduciendo (B.10), (B.11) en (B.9),

$$\begin{aligned}& \frac{1}{4}g_{hb}\left(\frac{10\tau^g - 4\lambda^g}{9}\right)\frac{1}{9}\delta^{h}_{(a}\left[4\lambda_{g)} - \tau_{g)}\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9^2}\left[g_{ab}(44\tau^g\lambda_g - 10\tau^g\tau_g - 16\lambda^g\lambda_g) + 40\tau_b\lambda_a - 10\tau_b\tau_a - 16\lambda_b\lambda_a + 4\lambda_b\tau_a\right].\end{aligned} \qquad \text{(B.12)}$$

Sumemos ahora el intercambio de índices $(a \leftrightarrow b)$,

$$\begin{aligned}& \frac{1}{4}g_{hb}\left(\frac{10\tau^g - 4\lambda^g}{9}\right)\frac{1}{9}\delta^{h}_{(a}\left[4\lambda_{g)} - \tau_{g)}\right] + (a \leftrightarrow b) \\ =\ & \frac{1}{4}\frac{1}{9^2}\left[g_{ab}(44\tau^g\lambda_g - 10\tau^g\tau_g - 16\lambda^g\lambda_g) + 40\tau_{(b}\lambda_{a)} - 10\tau_b\tau_a - 16\lambda_b\lambda_a + 4\lambda_{(b}\tau_{a)}\right] \\ =\ & \frac{1}{4}\frac{1}{9^2}\left[g_{ab}(44\tau^g\lambda_g - 10\tau^g\tau_g - 16\lambda^g\lambda_g) + 44\tau_{(b}\lambda_{a)} - 10\tau_b\tau_a - 16\lambda_b\lambda_a\right].\end{aligned} \qquad \text{(B.13)}$$

Suma

Debemos ahora sumar (B.1), (B.3) (B.4), (B.6), (B.8), (B.13)

$$\begin{aligned}
& C^g{}_{hb}C^h{}_{ag} \\
= \; & \frac{1}{4}\frac{1}{9^2}\left[g_{ab}(44\tau^g\lambda_g - 10\tau^g\tau_g - 16\lambda^g\lambda_g) + 44\tau_{(b}\lambda_{a)} - 10\tau_b\tau_a - 16\lambda_b\lambda_a\right] \\
= \; & \frac{1}{4^2}\frac{1}{9^2}\left(100\tau_a\tau_b - 80\tau_{(a}\lambda_{b)} + 16\lambda_a\lambda_b\right) \\
+ \; & \frac{7}{4}\frac{1}{9^2}\left(16\lambda_a\lambda_b - 8\tau_{(a}\lambda_{b)} + \tau_a\tau_b\right) \\
+ \; & \frac{1}{2}\frac{1}{9}g_{h(b}\Delta C^h{}_{a)g}(10\tau^g - 4\lambda^g) + \frac{1}{9}\Delta C^h{}_{ab}(4\lambda_h - \tau_h) + \Delta C^g{}_{hb}\Delta C^h{}_{ag}. \qquad \text{(B.14)}
\end{aligned}$$

El último renglón de B.14 contiene solo términos diferentes, no agrupables o irreducibles. El problema se reduce a encontrar los coeficientes que acompañan a $\tau_a\tau_b$, $\lambda_a\lambda_b$ y $\tau_{(a}\lambda_{b)}$.

$$\begin{aligned}
C^g{}_{hb}C^h{}_{ag} \;=\; & \frac{22}{4\cdot 9^2}\tau_a\tau_b + \frac{25}{9^2}\lambda_a\lambda_b - \frac{8}{9^2}\tau_{(a}\lambda_{b)} + \frac{1}{4\cdot 9^2}g_{ab}(44\tau^g\lambda_g - 10\tau^g\tau_g - 16\lambda^g\lambda_g) \\
+ \; & \frac{1}{2\cdot 9}g_{h(b}\Delta C^h{}_{a)g}(10\tau^g - 4\lambda^g) + \frac{1}{9}\Delta C^h{}_{ab}(4\lambda_h - \tau_h) + \Delta C^g{}_{hb}\Delta C^h{}_{ag} \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}$$

Contrayendo los índices que quedan libres con g^{ab},

$$g^{ab}C^g{}_{hb}C^h{}_{ag} = -\frac{1}{18}\tau^g\tau_g + \frac{1}{9}\lambda^g\lambda_g + \frac{4}{9}\tau_g\lambda^g + g^{ab}\Delta C^g{}_{hb}\Delta C^h{}_{ag} \qquad \text{(B.16)}$$

B.2. Tensor de Einstein

Después de introducir (B.15) y (B.16) en el tensor de Einstein (2.47) queda el trabajo de agrupación de términos, el propósito de ésta sección es mostrar un poco el desarrollo algebraico del tensor de Eistein.

Después de hacer dicha sustitución,

$$\begin{aligned}
G_{ab} \;=\; & \widetilde{G}_{ab} - \widetilde{\nabla}_a\lambda_b - \frac{g_{ab}}{2}\tau^g\lambda_g + g_{ab}\widetilde{\nabla}_c\left(\frac{\lambda^c - \tau^c}{2}\right) \\
+ \; & \widetilde{\nabla}_d\left[\frac{1}{4}g_{ab}\left(\frac{10\tau^d - 4\lambda^d}{9}\right) + \frac{1}{9}\delta^d_{(a}\left[4\lambda_{b)} - \tau_{b)}\right] + \Delta C^d{}_{ab}\right] \\
+ \; & \lambda_g\left[\frac{1}{4}g_{ab}\left(\frac{10\tau^g - 4\lambda^g}{9}\right) + \frac{1}{9}\delta^g_{(a}\left[4\lambda_{b)} - \tau_{b)}\right] + \Delta C^g{}_{ab}\right] \\
+ \; & \frac{g_{ab}}{2}\left[-\frac{1}{18}\tau^g\tau_g + \frac{1}{9}\lambda^g\lambda_g + \frac{4}{9}\tau_g\lambda^g + g^{cd}\Delta C^g{}_{hc}\Delta C^h{}_{dg}\right] \\
- \; & \frac{22}{4\cdot 9^2}\tau_a\tau_b - \frac{25}{9^2}\lambda_a\lambda_b + \frac{8}{9^2}\tau_{(a}\lambda_{b)} - \frac{1}{4\cdot 9^2}g_{ab}(44\tau^g\lambda_g - 10\tau^g\tau_g - 16\lambda^g\lambda_g) \\
- \; & \frac{1}{2\cdot 9}g_{h(b}\Delta C^h{}_{a)g}(10\tau^g - 4\lambda^g) - \frac{1}{9}\Delta C^h{}_{ab}(4\lambda_h - \tau_h) - \Delta C^g{}_{hb}\Delta C^h{}_{ag}, \qquad \text{(B.17)}
\end{aligned}$$

desarrollando un poco obtenemos,

$$
\begin{aligned}
G_{ab} &= \widetilde{\nabla}_{ab} - \frac{g_{ab}}{2}\tau^g\lambda_g + \widetilde{\nabla}_c\left(\frac{\lambda^c - \tau^c}{2}\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{9}g_{ab}\widetilde{\nabla}_d(10\tau^d - 4\lambda^d) \\
&+ \frac{1}{4}\frac{1}{9}g_{ab}(10\tau^g\lambda_g - 4\lambda^g\lambda_g) + \lambda_g\Delta C^g{}_{ab} + \widetilde{\nabla}\Delta C^d{}_{ab} \\
&+ \frac{1}{9}\widetilde{\nabla}_{(a}\left[4\lambda_{b)} - \tau_{b)}\right] + \frac{1}{9}\lambda_{(a}\left[4\lambda_{b)} - \tau_{b)}\right] \\
&+ \frac{g_{ab}}{2}\left[-\frac{1}{18}\tau^g\tau_g + \frac{1}{9}\lambda^g\lambda_g + \frac{4}{9}\tau_g\lambda^g + g^{cd}\Delta C^g{}_{hc}\Delta C^h{}_{dg}\right] \\
&- \frac{22}{4\cdot 9^2}\tau_a\tau_b - \frac{25}{9^2}\lambda_a\lambda_b + \frac{8}{9^2}\tau_{(a}\lambda_{b)} - \frac{1}{4\cdot 9^2}g_{ab}(44\tau^g\lambda_g - 10\tau^g\tau_g - 16\lambda^g\lambda_g) \\
&- \frac{1}{2\cdot 9}g_{h(b}\Delta C^h{}_{a)g}(10\tau^g - 4\lambda^g) - \frac{1}{9}\Delta C^h{}_{ab}(4\lambda_h - \tau_h) - \Delta C^g{}_{hb}\Delta C^h{}_{ag}, \qquad \text{(B.18)}
\end{aligned}
$$

agrupando términos y simplificando obtenemos finalmente el tensor de Eistein,

$$
\begin{aligned}
G_{ab} &= \widetilde{G}_{ab} + g_{ab}\left[\frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_d\left(\frac{7\lambda^d - 4\tau^d}{9}\right) + \frac{g^{ik}}{2}\Delta C^g{}_{hi}\Delta C^h{}_{gk} + \frac{1}{4\cdot 9^2}\tau_g\tau^g - \frac{11}{9^2}\tau^g\lambda_g\right. \\
&- \left.\frac{1}{2\cdot 9^2}\lambda_g\lambda^g\right] - \widetilde{\nabla}_a\lambda_b + \widetilde{\nabla}_d\Delta C^d{}_{ab} + \frac{1}{9}\widetilde{\nabla}_{(a}\left(4\lambda_{b)} - \tau_{b)}\right) + \Delta C^h{}_{ab}\left[\frac{\tau_h + 5\lambda_h}{9}\right] \\
&+ \frac{11}{9^2}\lambda_a\lambda_b - \frac{1}{9^2}\tau_{(a}\lambda_{b)} - \frac{22}{4\cdot 9^2}\tau_a\tau_b - \frac{1}{2\cdot 9}g_{h(b}\Delta C^h_{a)g}(10\tau^g - 4\lambda^g) - \Delta C^g{}_{hb}\Delta C^h{}_{ag}.
\end{aligned}
$$
(B.19)

Apéndice C

Cambio de Variables del Tensor de Einstein

En este apéndice se desarrollan los cálculos explícitamente para llevar el tensor de Einstein (2.49) a (3.22).

C.1. Términos escalares

Para calcular el tensor de Einstein y el escalar de Ricci en nuestras nuevas variables, el primer término de interés es, $\Delta C^{g}{}_{ha}\Delta C^{h}{}_{bg}$

$$\begin{aligned}\Delta C^{g}{}_{ha}\Delta\Sigma^{h}{}_{bg} &= \left[-16\pi g_{d(h}\Delta\Sigma_{a)}{}^{dg} + 8\pi g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\right] \\ &\times \left[-16\pi g_{e(b}\Delta\Sigma_{g)}{}^{eh} + 8\pi g_{bb'}g_{gk}g^{hj}\Delta\Sigma_{j}{}^{b'k}\right],\end{aligned} \tag{C.1}$$

el desarrollo de la ecuación anterior consta de 4 partes,

$$\begin{aligned}= \;& (16\pi)^2 \overbrace{g_{d(h}\Delta\Sigma_{a)}{}^{dg}g_{e(b}\Delta\Sigma_{g)}{}^{eh}}^{(A)} - 16\times 8\pi^2 \overbrace{g_{d(h}\Delta\Sigma_{a)}{}^{dg}g_{bb'}g_{gk}g^{hj}\Delta\Sigma_{j}{}^{b'k}}^{(B)} \\ - \;& 16\times 8\pi^2 \underbrace{g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}g_{e(b}\Delta\Sigma_{g)}{}^{eh}}_{(C)} + (8\pi)^2 \underbrace{g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}g_{bb'}g_{gk}g^{hj}\Delta\Sigma_{j}{}^{b'k}}_{(D)}.\end{aligned} \tag{C.2}$$

Comenzemos calculado (D).

$$\begin{aligned}g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}g_{bb'}g_{gk}g^{hj}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_{j}{}^{b'k} &= \delta^{j}_{h'}\delta^{g'}_{k}g_{aa'}g_{bb'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_{j}{}^{b'k} \\ &= g_{aa'}g_{bb'}\Delta\Sigma_{k}{}^{ja'}\Delta\Sigma_{j}{}^{b'k}.\end{aligned} \tag{C.3}$$

Hagamos ahora el cálculo para (C).

$$g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}g_{e(b}\Delta\Sigma_{g)}{}^{eh} = \frac{1}{2}g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\left[g_{eb}\Delta\Sigma_{g}{}^{eh} + g_{eg}\Delta\Sigma_{b}{}^{eh}\right], \quad \text{(C.4)}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}(C) &= \frac{1}{2}\left[g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}g_{eb}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_{g}{}^{eh} + g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}g_{eg}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_{b}{}^{eh}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}g_{eb}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_{g}{}^{eh} + g_{hh'}g_{aa'}\delta_{e}^{g'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_{b}{}^{eh}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}g_{eb}\Delta\Sigma_{g}{}^{eh}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'} + g_{hh'}g_{aa'}\Delta\Sigma_{b}{}^{eh}\Delta\Sigma_{e}{}^{h'a'}\right]. \qquad \text{(C.5)}\end{aligned}$$

El cálculo para (B) es análogo al de (C), obtenemos,

$$(B) = \frac{1}{2}\left[g_{bb'}g_{gk}\Delta\Sigma_{d}{}^{b'k}\Delta\Sigma_{a}{}^{dg} + g_{bb'}g_{da}g_{gk}g^{hj}\Delta\Sigma_{j}{}^{b'k}\Delta\Sigma_{h}{}^{dg}\right]. \qquad \text{(C.6)}$$

Finalmente (A),

$$\begin{aligned}&g_{d(h}\Delta\Sigma_{a)}{}^{dg}g_{e(b}\Delta\Sigma_{g)}{}^{eh}\\ =\;& \frac{1}{4}\left[g_{dh}\Delta\Sigma_{a}{}^{dg} + g_{da}\Delta\Sigma_{h}{}^{dg}\right]\left[g_{eb}\Delta\Sigma_{g}{}^{eh} + g_{eg}\Delta\Sigma_{b}{}^{eh}\right]\\ =\;& \frac{1}{4}\left[g_{dh}g_{eb}\Delta\Sigma_{a}{}^{dg}\Delta\Sigma_{g}{}^{eh} + g_{dh}g_{eg}\Delta\Sigma_{a}{}^{dg}\Delta\Sigma_{b}{}^{eh}\right.\\ +\;& \left. g_{da}g_{eb}\Delta\Sigma_{h}{}^{dg}\Delta\Sigma_{g}{}^{eh} + g_{da}g_{eg}\Delta\Sigma_{h}{}^{dg}\Delta\Sigma_{b}{}^{eh}\right]\end{aligned} \qquad \text{(C.7)}$$

Tenemos que sumar (C.7), (C.6), (C.5), (C.3),

$$\begin{aligned}&\Delta C^{g}{}_{ha}\Delta C^{h}{}_{bg}\\ =\;& \frac{(16\pi)^2}{4}\left[\underbrace{g_{dh}g_{eb}\Delta\Sigma_{a}{}^{dg}\Delta\Sigma_{g}{}^{eh}}_{a} + g_{dh}g_{eg}\Delta\Sigma_{a}{}^{dg}\Delta\Sigma_{b}{}^{eh} + \underbrace{g_{da}g_{eb}\Delta\Sigma_{h}{}^{dg}\Delta\Sigma_{g}{}^{eh}}_{b} + \underbrace{g_{da}g_{eg}\Delta\Sigma_{h}{}^{dg}\Delta\Sigma_{b}{}^{eh}}_{c}\right]\\ -\;& \frac{16\times 8\pi}{2}\left[g_{hh'}g_{aa'}g^{gg'}g_{eb}\Delta\Sigma_{g}{}^{eh}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'} + \underbrace{g_{hh'}g_{aa'}\Delta\Sigma_{b}{}^{eh}\Delta\Sigma_{e}{}^{h'a'}}_{c}\right]\\ -\;& \frac{16\times 8\pi}{2}\left[\underbrace{g_{bb'}g_{gk}\Delta\Sigma_{d}{}^{b'k}\Delta\Sigma_{a}{}^{dg}}_{a} + g_{bb'}g_{da}g_{gk}g^{hj}\Delta\Sigma_{j}{}^{b'k}\Delta\Sigma_{h}{}^{dg}\right]\\ +\;& (8\pi)^2\underbrace{g_{aa'}g_{bb'}\Delta\Sigma_{k}{}^{ja'}\Delta\Sigma_{j}{}^{b'k}}_{b}.\end{aligned} \qquad \text{(C.8)}$$

Notemos que todos los coeficientes terminan siendo $(8\pi)^2$, por ello podemos poner dicho factor como un factor global. Además los términos marcados con la misma letra se cancelan debido a que son iguales y de signo contrario, los terminos restantes se agrupan de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\Delta C^g{}_{ha}\Delta C^h{}_{bg} &= (8\pi)^2\Big[2g_{aa'}g_{bb'}\Delta\Sigma_k{}^{ja'}\Delta\Sigma_j{}^{b'k} - 2g_{aa'}g_{bb'}g_{hh'}g^{gg'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_g{}^{b'h}\\ &+ g_{hd}g_{eg}\Delta\Sigma_a{}^{dg}\Delta\Sigma_b{}^{eh}\Big]. \qquad (C.9)\end{aligned}$$

Para la contraparte escalar obtenemos

$$\begin{aligned}&g^{ab}\Delta C^g{}_{ha}\Delta C^h{}_{bg}\\ =\ & g^{ab}\,(8\pi)^2\Big[2g_{aa'}g_{bb'}\Delta\Sigma_k{}^{ja'}\Delta\Sigma_j{}^{b'k} - 2g_{aa'}g_{bb'}g_{hh'}g^{gg'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_g{}^{b'h}\\ +\ & g_{hd}g_{eg}\Delta\Sigma_a{}^{dg}\Delta\Sigma_b{}^{eh}\Big]\\ =\ & (8\pi)^2\Big[2g_{a'b'}\Delta\Sigma_k{}^{ja'}\Delta\Sigma_j{}^{b'k} - 2g_{ae'}g_{hh'}g^{gg'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_g{}^{eh} + g_{hd}g_{eg}g^{ab}\Delta\Sigma_a{}^{dg}\Delta\Sigma_b{}^{eh}\Big]\\ =\ & (8\pi)^2\Big[2g_{a'b'}\Delta\Sigma_k{}^{ja'}\Delta\Sigma_j{}^{b'k} - g_{hd}g_{eg}g^{ab}\Delta\Sigma_a{}^{dg}\Delta\Sigma_b{}^{eh}\Big] \qquad (C.10)\end{aligned}$$

Otras componentes de importancia son: $\tau_c\tau^c$, $\lambda_c\lambda^c$, $\tau_c\lambda^c$.

$$\tau_c\tau^c = \left(\frac{2}{3}16\pi\right)^2\rho_c\rho^c. \qquad (C.11)$$

De igual manera haciendo uso de (3.20)

$$\begin{aligned}\lambda_c\lambda^c &= \left(8\pi\sigma_c - \frac{16\pi}{3}\rho_c\right)\left(8\pi\sigma^c - \frac{16\pi}{3}\rho^c\right)\\ &= (8\pi)^2\,\sigma_c\sigma^c - \frac{(16\pi)^2}{3}\sigma_c\rho^c + \left(\frac{16\pi}{3}\right)^2\rho_c\rho^c \qquad (C.12)\end{aligned}$$

Usando tanto (3.19) y (3.20).

$$\begin{aligned}\tau_c\lambda^c &= \frac{2}{3}16\pi\rho_c\left(8\pi\sigma^c - \frac{16\pi}{3}\right)\\ &= \frac{(16\pi)^2}{3}\rho_c\sigma^c - 2\left(\frac{16\pi}{3}\right)^2\rho_c\rho^c \qquad (C.13)\end{aligned}$$

Existe un término en la parte escalar del tensor de Einstein (2.49) que va como la divergencia de las trazas de $C^c{}_{ab}$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_d \left(\frac{7\lambda^d - 4\tau^d}{2\cdot 9}\right) &= \widetilde{\nabla}_d \left(\frac{7\left(8\pi\sigma^d - \frac{16\pi}{3}\rho^d\right) - 4\left(\frac{2}{3}16\pi\rho^d\right)}{2\cdot 9}\right) \\
&= \widetilde{\nabla}_d \left(\frac{28\pi\sigma^d - \frac{56}{3}\pi\rho^d - \frac{64}{3}\pi\rho^d}{9}\right) \\
&= \frac{4\pi}{9}\widetilde{\nabla}_d \left(28\sigma^d - 40\rho^d\right) \\
&= \frac{4\pi}{9}\widetilde{\nabla}_d \left(7\sigma^d - 10\rho^d\right) \qquad \text{(C.14)}
\end{aligned}$$

C.2. Escalar de Ricci

Para obtener el escalar de Ricci, solo nos faltaría calcular otro término que va como divergencia de las trazas de $C^c{}_{ab}$,

$$\begin{aligned}
-\widetilde{\nabla}_c\lambda^c + \widetilde{\nabla}_c\tau^c &= -\widetilde{\nabla}_c \left[8\pi\sigma^c - \frac{16\pi}{3}\rho^c\right] + \widetilde{\nabla}_c \left[\frac{2}{3}16\pi\rho^c\right] \\
&= -\widetilde{\nabla}_c \left[8\pi\sigma^c - \frac{16\pi}{3}\rho^c - \frac{2}{3}16\pi\rho^c\right] \\
&= -8\pi\widetilde{\nabla}_c\sigma^c + 16\pi\widetilde{\nabla}_c\rho^c \qquad \text{(C.15)}
\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que el escalar de Ricci en las nuevas variables es,

$$\begin{aligned}
R &= \widetilde{R} - 8\pi\widetilde{\nabla}_c\sigma^c + 16\pi\widetilde{\nabla}_c\rho^c - \left(\frac{16\pi}{3}\right)^2 \rho_c\rho^c - \frac{(8\pi)^2}{9}\sigma_c\sigma^c + \frac{2}{3}\frac{(16\pi)^2}{3}\sigma_c\rho^c \\
&+ (8\pi)^2 \left[2g_{a'b'}\Delta\Sigma_k{}^{ja'}\Delta\Sigma_j{}^{b'k} - g_{hd}g_{eg}g^{ab}\Delta\Sigma_a{}^{dg}\Delta\Sigma_b{}^{eh}\right]. \qquad \text{(C.16)}
\end{aligned}$$

C.3. Términos Proporcionales a la Parte sin Trazas

Primero. El primero de ellos que aparece en el tensor de Einstein es,

$$\begin{aligned}
\Delta C^h{}_{ab}\left[\frac{\tau_h + 5\lambda}{9}\right] &= \left[-16\pi g_{d(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{dh} + 8\pi g_{ad}g_{bb'}g^{hc'}\Delta\Sigma_{c'}{}^{db'}\right] \\
&\times \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}16\pi\rho_h + 5\left(8\pi\sigma_h - \frac{16\pi}{3}\rho_h\right)\right]
\end{aligned} \qquad \text{(C.17)}$$

Calculamos aparte lo que va como ρ y σ.

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}16\pi\rho_h + 5\left(8\pi\sigma_h - \frac{16\pi}{3}\rho_h\right) &= \frac{2}{3}16\pi\rho_h + 40\pi\sigma_h + \frac{5}{3}16\pi\rho_h \\ &= \frac{7}{3}16\pi\rho_h + 40\pi\sigma_h \\ &= 8\pi\left(\frac{14}{3}\rho_h + 5\sigma_h\right), \qquad \text{(C.18)}\end{aligned}$$

introduciendo en (C.17)

$$\begin{aligned}&\Delta C^h{}_{ab}\left[\frac{\tau_h + 5\lambda}{9}\right] \\ &= (8\pi)^2\left[-2g_{d(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{dh} + g_{ad}g_{bb'}g^{hc'}\Delta\Sigma_{c'}{}^{db'}\right]\left[\frac{14}{3}\rho_h + 5\sigma_h\right] \\ &= (8\pi)^2\left\{-2g_{d(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{dh}\left[5\sigma_h + \frac{14}{3}\rho_h\right] + g_{ad}g_{bb'}g^{hc'}\Delta\Sigma_{c'}{}^{db'}\left[\frac{14}{3}\rho_h + 5\sigma_h\right]\right\}. \qquad \text{(C.19)}\end{aligned}$$

Segundo. Calculemos ahora $g_{h(b}\Delta C^h{}_{a)g}(10\tau^g - 4\lambda^g)$, conviene empezar por calcular $g_{h(b}\Delta C^h{}_{a)g}$, sin embargo, es importante notar que hay una simetrización para $\Delta\Sigma_c{}^{ab}$ implícita en $\Delta C^c{}_{ab}$. Comencemos entonces por calcular

$$\begin{aligned}g_{ha}\Delta C^h{}_{bg} &= g_{ha}\left[-16\pi g_{d(b}\Delta C_{g)}{}^{dh} + 8\pi g_{bb'}g_{gg'}g^{hh'}\Delta\Sigma_{h'}{}^{b'g'}\right] \\ &= -16\pi g_{ha}g_{d(b}\Delta C_{g)}{}^{dh} + 8\pi g_{bb'}g_{gg'}\delta_a^{h'}\Delta\Sigma_{h'}{}^{b'g'} \\ &= -16\pi g_{ha}g_{d(b}\Delta C_{g)}{}^{dh} + 8\pi g_{bb'}g_{gg'}\Delta\Sigma_a{}^{b'g'}, \qquad \text{(C.20)}\end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}g_{h(a}\Delta C^h{}_{b)g} &= \frac{1}{2}\left[-16\pi g_{ha}g_{d(b}\Delta C_{g)}{}^{dh} + 8\pi g_{bb'}g_{gg'}\Delta\Sigma_a{}^{b'g'} + (a\leftrightarrow b)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-16\pi\left[g_{hb}g_{d(a}\Delta\Sigma_{g)}{}^{dh} + (a\leftrightarrow b)\right] + 16\pi g_{gg'}g_{a'(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{a'g'}\right]. \qquad \text{(C.21)}\end{aligned}$$

Podemos deshacernos del $1/2$ global calculando $5\tau^g - 2\lambda^g$ en lugar de $10\tau^g - 4\lambda^g$

$$\begin{aligned}5\tau^g - 2\tau^g &= 5\left(\frac{2}{3}16\pi\rho^g\right) - 2\left(8\pi\sigma^g - \frac{16\pi}{3}\rho^g\right) \\ &= 16\pi\,(4\rho^g - \sigma^g), \qquad \text{(C.22)}\end{aligned}$$

poniendo todo junto

$$\begin{aligned}g_{h(a}\Delta C^h{}_{b)g}(10\tau^g - 4\lambda^g) &= (16\pi)^2\left(-\left[g_{hb}g_{d(a}\Delta\Sigma_{g)}{}^{dh} + (a\leftrightarrow b)\right] + g_{gg'}g_{a'(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{a'g'}\right)(4\rho^g - \sigma^g) \\ &= (16\pi)^2\left(\left[g_{hb}g_{d(a}\Delta\Sigma_{g)}{}^{dh} + (a\leftrightarrow b)\right](\sigma^g - 4\rho^g) + g_{gg'}g_{a'(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{a'g'}(4\rho^g - \sigma^g)\right). \qquad \text{(C.23)}\end{aligned}$$

C.4. Términos tensoriales

Comencemos por el término que puede romper la simetría de el tensor de Einstein.

$$
\begin{aligned}
-\widetilde{\nabla}_a\lambda_b &= \widetilde{\nabla}_a\left(8\pi\sigma_b - \frac{16\pi}{3}\rho_b\right) \\
&= -8\pi\widetilde{\nabla}_a\sigma_b + \frac{16\pi}{3}\widetilde{\nabla}_a\rho_b
\end{aligned}
\tag{C.24}
$$

Observemos como la parte que puede romper la simetría del tensor de Einstein ahora involucra a las dos trazas de $\Sigma_c{}^{ab}$, en contraposición, con C de la cual solo se involucra λ, una de las trazas.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{9}\widetilde{\nabla}_{(a}\left(4\lambda_{b)} - \tau_{b)}\right) &= \frac{1}{9}\widetilde{\nabla}_{(a}\left(4\left(8\pi\sigma_{b)} - \frac{16\pi}{3}\rho_{b)}\right) - \frac{2}{3}16\pi\rho_{b)}\right) \\
&= \frac{1}{9}\widetilde{\nabla}_{(a}\left(32\pi\sigma_{b)} + \left[-4\frac{16}{3} - 2\frac{16}{3}\right]\pi\rho_{b)}\right) \\
&= \frac{32\pi}{9}\widetilde{\nabla}_{(a}\left[\sigma_{b)} - \rho_{b)}\right]
\end{aligned}
\tag{C.25}
$$

$$
\tau_a\tau_b = \left(\frac{2}{3}16\pi\right)^2\rho_a\rho_b \tag{C.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_a\lambda_b &= \left(8\pi\sigma_a - \frac{16\pi}{3}\rho_a\right)\left(8\pi\sigma_b - \frac{16\pi}{3}\rho_b\right) \\
&= (8\pi)^2\sigma_a\sigma_b - 8\pi\frac{16\pi}{3}\sigma_a\rho_b - \frac{16\pi}{3}8\pi\rho_a\sigma_b + \left(\frac{16\pi}{3}\right)^2\rho_a\rho_b \\
&= (8\pi)^2\sigma_a\sigma_b - \frac{(16\pi)^2}{3}\sigma_{(a}\rho_{b)} + \left(\frac{16\pi}{3}\right)^2\rho_a\rho_b
\end{aligned}
\tag{C.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{(a}\lambda_{b)} &= \frac{2}{3}16\pi\rho_{(a}\left[8\pi\sigma_{b)} - \frac{16\pi}{3}\rho_{b)}\right] \\
&= \frac{(16\pi)^2}{3}\rho_{(a}\sigma_{b)} - 2\left(\frac{16\pi}{3}\right)\rho_a\rho_b
\end{aligned}
\tag{C.28}
$$

Finalmente el tensor de Einstein es,

$$
\begin{aligned}
G_{ab} \;=\;& \widetilde{G}_{ab} + g_{ab}\left[\frac{4\pi}{9}\widetilde{\nabla}_d\left(7\sigma^d - 10\rho^d\right) + \frac{5}{2\cdot 9}\left(\frac{16\pi}{3}\right)^2 \rho_c\rho^c - \frac{21}{2\cdot 9^2}\frac{(16\pi)^2}{3}\sigma_c\rho^c\right.\\
-\;& \left.\frac{1}{2\cdot 9^2}(8\pi)^2\sigma_c\sigma^c + \frac{(8\pi)^2}{2}\left[2g_{a'b'}\delta\Sigma_k{}^{ja'}\Delta\Sigma_j{}^{b'k} - g_{hd}g_{eg}g^{a'b'}\Delta\Sigma_{a'}{}^{dg}\Delta\Sigma_{b'}{}^{eh}\right]\right]\\
-\;& 8\pi\widetilde{\nabla}_a\sigma_b + \frac{16\pi}{3}\widetilde{\nabla}_a\rho_b + \frac{32\pi}{9}\widetilde{\nabla}_{(a}\left[\sigma_{b)} - \rho_{b)}\right] - \frac{1}{9}\left(\frac{16\pi}{3}\right)^2\rho_a\rho_b + \frac{11}{9^2}(8\pi)^2\sigma_a\sigma_b\\
-\;& \frac{12}{9^2}\frac{(16\pi)^2}{3}\sigma_{(a}\rho_{b)} + \widetilde{\nabla}_d\left[-16\pi g_{e(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{ed} + 8\pi g_{ae}g_{bb'}g^{dc'}\Delta\Sigma_{c'}{}^{eb'}\right]\\
-\;& \frac{1}{2\cdot 9}(16\pi)^2\left(\left[g_{hb}g_{d(a}\Delta\Sigma_{g)}{}^{dh} + (a\leftrightarrow b)\right](\sigma^g - 4\rho^g) + g_{gg'}g_{a'(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{a'g'}(4\rho^g - \sigma^g)\right)\\
+\;& \frac{(8\pi)^2}{9}\left\{-2g_{d(a}\Delta\Sigma_{b)}{}^{dh}\left[5\sigma_h + \frac{14}{3}\rho_h\right] + g_{ad}g_{bb'}g^{hc'}\Delta\Sigma_{c'}{}^{db'}\left[\frac{14}{3}\rho_h + 5\sigma_h\right]\right\}\\
-\;& (8\pi)^2\left[2g_{aa'}g_{bb'}\Delta\Sigma_k{}^{ja'}\Delta\Sigma_j{}^{b'k} - 2g_{aa'}g_{eb}g_{hh'}g^{gg'}\Delta\Sigma_{g'}{}^{h'a'}\Delta\Sigma_g{}^{eh} + g_{hd}g_{eg}\Delta\Sigma_a{}^{dg}\Delta\Sigma_b{}^{eh}\right]
\end{aligned}
\tag{C.29}
$$

Apéndice D

Einstein-Palatini

D.1. Relación

En este apéndice se realizan los cálculos fundamentales no desarrollados en la sección (2.5.2). El primero de ellos corresponde a la identidad que se mencionó es válida tanto para el caso estándar como para la formulación afín (3.27). Combinando la ecuación de movimiento para v^a (3.39) y (3.47) obtenemos,

$$\widetilde{\nabla}_a \left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2} \right] - \frac{16\pi}{3} \left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2} \right]^2 v_a + m^2 v_a = 0. \tag{D.1}$$

Podemos despejar v_a de la siguiente manera,

$$v_a = \frac{1}{\frac{16\pi}{3}\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2} \right]^2 - m^2} \widetilde{\nabla}_a \frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}, \tag{D.2}$$

dado lo anterior calculamos $\widetilde{\nabla}_b v_a$ obteniendo,

$$\widetilde{\nabla}_b v_a = \frac{1}{\frac{16\pi}{3}\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2} \right] - m^2} \widetilde{\nabla}_b \widetilde{\nabla}_a \frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2} + \widetilde{\nabla}_a \left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2} \right] \widetilde{\nabla}_b \left[\frac{1}{\frac{16\pi}{3}\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2} \right]^2 - m^2} \right], \tag{D.3}$$

observese como en el primer término podemos cambiar el orden de $\widetilde{\nabla}_b \widetilde{\nabla}_a \rightarrow \widetilde{\nabla}_a \widetilde{\nabla}_b$ dado que actúan sobre un escalar y no hay torsión. Podemos volver a utilizar la ecuación de movimiento (B.10) pero ahora para v_b,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_b v_a &= \widetilde{\nabla}_a v_b + \frac{\frac{16\pi}{3} v_b}{\frac{16\pi}{3}\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}\right]^2 - m^2}\widetilde{\nabla}_a\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}\right]^2 \\ &+ \widetilde{\nabla}_a\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}\right]\widetilde{\nabla}_b\left[\frac{1}{\frac{16\pi}{3}\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}\right]^2 - m^2}\right], \qquad \text{(D.4)}\end{aligned}$$

finalmente el segundo término despues de usar la regla de la cadena, $\widetilde{\nabla}_a\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}\right]^2 = 2\frac{\widetilde{\nabla}_d v^d}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}\widetilde{\nabla}_a\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}\right]$ y volver a utilizar la ecuación de movimiento obtenemos $\frac{32\pi}{3} v_a v_b\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}\right]$, mientras que en el tercer término después de utilizar la regla de la cadena y la ecuación de movimiento es $-\frac{32\pi}{3} v_a v_b\left[\frac{\widetilde{\nabla}_c v^c}{1-\frac{16\pi}{3}v^2}\right]$, por lo que obtenemos la ecuación antes dicha,

$$\widetilde{\nabla}_b v_a - \widetilde{\nabla}_a v_b = 0. \qquad \text{(D.5)}$$

D.2. Divergencia del tensor de energía-momento

Por consistencia hay que asegurarnos de que la divergencia del tensor de energía-momento efectivo (3.52) sea cero, ese es el propósito de esta sección. Para ello usaremos el resultado de la sección anterior (D.5), así como la "equivalencia" de operadores derivada (3.47).

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^a T^{eff}_{ab} &= \widetilde{\nabla}_b\left[\frac{(\nabla_c v^c)^2}{2} + \frac{m^2 v^2}{2} - 8\pi(\nabla_d v^d)^2 v^2\right] - \widetilde{\nabla}_d v^d \widetilde{\nabla}_b \nabla_e v^e - \nabla_e v^e \widetilde{\nabla}_b \widetilde{\nabla}_d v^d \\ &+ \widetilde{\nabla}^a(v_a v_b)\left[\frac{16\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2 - m^2\right] + v_a v_b \widetilde{\nabla}^a\left[\frac{16\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2\right], \qquad \text{(D.6)}\end{aligned}$$

desarrollando uno de los términos en concreto,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^a(v_a v_b)\left[\frac{16\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2 - m^2\right] &= v_b \widetilde{\nabla}^a v_a\left[\frac{16\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2 - m^2\right] \\ &+ v_a \widetilde{\nabla}^a(v_b)\left[\frac{16\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2 - m^2\right], \qquad \text{(D.7)}\end{aligned}$$

el segundo término de (D.6) al sumarse con el primero del lado derecho de (D.7) suman cero, por la ecuación de movimiento, pues después de factorizar un $\widetilde{\nabla}_c v^c$ lo que queda es menos la ecuación de movimiento (3.39). Además dado que $v_a \widetilde{\nabla}^a v_b = \frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_b v^2$ por

(D.5), todos los términos con masa desaparecen, llegamos a

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^a T^{eff}_{ab} &= \nabla_c v^c \widetilde{\nabla}_b \left[\nabla_e v^e - \widetilde{\nabla}_e v^e\right] - 8\pi \widetilde{\nabla}_b \left[(\nabla_d v^d)^2 v^2\right] + \left[\frac{8\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2\right] \widetilde{\nabla}_b v^2 \\ &+ v_a v_b \widetilde{\nabla}^a \left[\frac{16\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2\right],\end{aligned} \tag{D.8}$$

ahora usamos (3.47) en el primer término,

$$\nabla_e v^e - \widetilde{\nabla}_e v^e = \nabla_e v^e - \nabla_e v^e (1 - \frac{16\pi}{3} v^2) = \frac{16\pi}{3} v^2 \nabla_e v^e, \tag{D.9}$$

de lo anterior obtenemos,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^a T^{eff}_{ab} &= \frac{16\pi}{3} \nabla_c v^c \widetilde{\nabla}_b \left[\nabla_e v^v v^2\right] - 8\pi \left[v^2 \nabla_d v^d \widetilde{\nabla}_b \nabla_c v^c + \nabla_c v^c \widetilde{\nabla}_b \left[\nabla_d v^d v^2\right]\right] \\ &+ \left[\frac{8\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2\right] \widetilde{\nabla}_b v^2 + v_a v_b \widetilde{\nabla}^a \left[\frac{16\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2\right] \\ &= -\frac{8\pi}{3} \nabla_c v^c \left[v^2 \widetilde{\nabla}_b \left[\nabla_d v^d\right] + \nabla_d v^d \widetilde{\nabla}_b v^2\right] - 8\pi v^2 \nabla_d v^d \widetilde{\nabla}_b (\nabla_c v^c) \\ &+ \left[\frac{8\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2\right] \widetilde{\nabla}_b v^2 + v_a v_b \widetilde{\nabla}^a \left[\frac{16\pi}{3}(\nabla_d v^d)^2\right] \\ &= -\frac{2}{3} 16\pi v^2 \nabla_d v^d \widetilde{\nabla}_b (\nabla_c v^c) + \frac{2}{3} 16\pi v_a v_b \nabla_e v^e \widetilde{\nabla}^a (\nabla_d v^d) \\ &= \frac{2}{3} 16\pi \nabla_e v^e \left[-v^2 \widetilde{\nabla}_b (\nabla_c v^c) + v_a v_b \widetilde{\nabla}^a (\nabla_d v^d)\right] = 0.\end{aligned} \tag{D.10}$$

Donde el último paso se vale de nuevo por la ecuación de movimiento.

Bibliografía

[1] A. Einstein, “The Formal Foundation of the General Theory of Relativity,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, vol. 1914, pp. 1030–1085, 1914.

[2] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, ser. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=cmPDAgAAQBAJ

[3] V. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=UOQlBQAAQBAJ

[4] T. Maudlin, *Philosophy of Physics: Space and Time*, ser. Princeton Foundations of Contemporary Philosophy. Princeton University Press, 2012. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=dN1YkELW0rUC

[5] W. Rindler, *Essential Relativity: Special, General, and Cosmological*, ser. Texts and monographs in physics. Springer, 1977. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=0J_dwCmQThgC

[6] E. Okon, “El principio de equivalencia en gravedad cuántica,” *Metatheoria–Revista de Filosofía e Historia de la Ciencia*, vol. 3, no. 2, pp. 65–80, 2013.

[7] A. Einstein, “Die feldgleichungen der gravitation,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 844-847*, 1915.

[8] R. Geroch, *General Relativity from A to B*, ser. A Phoenix book. University of Chicago Press, 1981. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=rwPDssnbHPEC

[9] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 17, no. 1, p. 4, Jun 2014. [Online]. Available: https://doi.org/10.12942/lrr-2014-4

[10] S. Weinberg, *Gratvitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley India Pvt. Limited, 2008. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=-QH2PgAACAAJ

[11] C. Magnan, "Complete calculations of the perihelion precession of Mercury and the deflection of light by the sun in general relativity," 2007.

[12] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, "A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919," *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, vol. A220, pp. 291–333, 1920.

[13] I. I. Shapiro, "Fourth test of general relativity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 789–791, Dec 1964. [Online]. Available: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.789

[14] C. W. F. Everitt *et al.*, "Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, no. 22, p. 221101, Jun. 2011.

[15] J. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison-Wesley, 2003. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=ZHgpAQAAMAAJ

[16] J. M. Weisberg and J. H. Taylor, "Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis," *ASP Conf. Ser.*, vol. 328, p. 25, 2005.

[17] B. P. Abbott *et al.*, "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger," *Physical Review Letters*, vol. 116, p. 061102, Feb 2016. [Online]. Available: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102

[18] S. Hawking and G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, ser. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=QagG_KI7Ll8C

[19] G. Bertone and D. Merritt, "Dark matter dynamics and indirect detection," *Modern Physics Letters A*, vol. 20, no. 14, pp. 1021–1036, 2005. [Online]. Available: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217732305017391

[20] N. Vittorio and J. Silk, "Fine-scale anisotropy of the cosmic microwave background in a universe dominated by cold dark matter," *Astrophys. J.*, vol. 285, pp. L39–L43, 1984.

[21] S. Weinberg, "The cosmological constant problem," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, pp. 1–23, Jan 1989. [Online]. Available: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1

[22] ——, *Cosmology*, ser. Cosmology. OUP Oxford, 2008. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=nqQZdg020fsC

[23] L. G. Jaime, L. Patino, and M. Salgado, "Robust approach to $f(R)$ gravity," 2010.

[24] L. G. Jaime and M. Salgado, "Cosmic acceleration in asymptotically Ricci flat universe," 2017.

[25] Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. D. Laurentis, and E. N. Saridakis, "f(T) teleparallel gravity and cosmology," 2015.

[26] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel gravity: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 173.

[27] A. Trautman, "Einstein-Cartan theory," 2006.

[28] V. A. Kostelecký and R. Potting, "CPT, strings, and meson factories," *Phys. Rev. D*, vol. 51, pp. 3923–3935, Apr 1995. [Online]. Available: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.3923

[29] V. A. Kostelecký, "Gravity, Lorentz violation, and the standard model," *Phys. Rev. D*, vol. 69, p. 105009, May 2004. [Online]. Available: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.69.105009

[30] Y. Bonder, "The elusive part of the standard-model extension gravitational sector," in *Proceedings of the Seventh Meeting on CPT and Lorentz Symmetry*. World Scientific, 2017, pp. 181–184.

[31] Y. Bonder and C. Corral, "Unimodular Einstein–Cartan gravity: Dynamics and conservation laws," 2018.

[32] C. Brans and R. H. Dicke, "Mach's principle and a relativistic theory of gravitation," *Phys. Rev.*, vol. 124, pp. 925–935, Nov 1961. [Online]. Available: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.925

[33] M. Ferraris, M. Francaviglia, and C. Reina, "Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 "Palatini's method" discovered by einstein in 1925," *General Relativity and Gravitation*, vol. 14, no. 3, pp. 243–254, Mar 1982. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/BF00756060

[34] E. Schrödinger, *Space-Time Structure*, ser. Cambridge Science Classics. Cambridge University Press, 1950. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=XDDeVD_QZfcC

[35] G. J. Olmo, "Palatini approach to modified gravity: $f(R)$ theories and beyond," 2011.

[36] N. Dadhich and J. M. Pons, "On the equivalence of the Einstein-Hilbert and the Einstein-Palatini formulations of general relativity for an arbitrary connection," *General Relativity and Gravitation*, vol. 44, no. 9, pp. 2337–2352, Sep 2012. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/s10714-012-1393-9

[37] A. N. Bernal, B. Janssen, A. Jiménez-Cano, J. A. Orejuela, M. Sánchez, and P. Sánchez-Moreno, "On the (non-)uniqueness of the Levi-Civita solution in the Einstein-Hilbert–Palatini formalism," *Physics Letters B*, vol. 768, pp. 280 – 287, 2017. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931730179X

[38] R. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=9S-hzg6-moYC

[39] Y. Bonder, "Torsion or not torsion, that is the question," *International Journal of Modern Physics D*, vol. 25, no. 12, p. 1644013, 2016.

[40] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, "Canonical variables for general relativity," *Phys. Rev.*, vol. 117, pp. 1595–1602, Mar 1960. [Online]. Available: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.117.1595

[41] ——, "Republication of: The dynamics of general relativity," *General Relativity and Gravitation*, vol. 40, no. 9, pp. 1997–2027, Sep 2008. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1

[42] G. J. Olmo and H. Sanchis-Alepuz, "Hamiltonian formulation of Palatini $f(R)$ theories à la Brans-Dicke theory," *Phys. Rev. D*, vol. 83, p. 104036, May 2011. [Online]. Available: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.104036