

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

**El límite continuo en modelos matriciales
de triangulaciones dinámicas causales**

Blanca Alicia Castro Bermúdez

Tesis para obtener el título de

FÍSICO

bajo la tutela del

Dr. Tim A. Koslowski

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. Abril 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Castro
Bermúdez
Blanca Alicia
5551781787
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
310100144

2. Datos del tutor

Dr.
Tim Andreas
Koslowski

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Jerónimo Alonso
Cortez
Quezada

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Yuri
Bonder
Grimberg

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Robert
Oeckl

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Hugo Aurelio
Morales
Técotl

7. Datos del trabajo escrito.

El límite continuo en modelos matriciales de triangulaciones dinámicas causales
Número de páginas
2018

Resumen

En este trabajo se emplea la propuesta para imponer causalidad en el modelo matricial de Triangulaciones Dinámicas en 2-dimensiones, propuesto por Benedetti y Henson en [1], para tomar el límite continuo, haciendo uso del método desarrollado por Eichhorn y Koslowski en [2], donde se escribe la Ecuación del Grupo Funcional de Renormalización para modelos matriciales; con él se pueden encontrar las funciones beta, puntos fijos y exponentes críticos de la teoría. Los exponentes críticos obtenidos en este modelo matricial causal se comparan con los obtenidos en el modelo matricial euclidiano y en Triangulaciones Dinámicas Causales.

Agradecimientos

Con este trabajo concluyo mis estudios de Licenciatura en Física en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Aún si el título obtenido es un logro individual quiero agradecer en esta pequeña parte de mi tesis a las personas que me apoyaron a alcanzar mis metas.

A mi asesor, Tim Koslowski, que me propuso este proyecto, me guió en la marcha, contestó mis preguntas, discutió conmigo y me apoyó increíblemente en mis proyectos de posgrado. A Víctor Muñoz, por las charlas sobre Modelos Matriciales. Al Instituto de Ciencias Nucleares, por haberme facilitado el apoyo espaciotemporal ocupado en esta tesis. A la Universidad, porque ella puso a mi disposición los conocimientos que adquirí y, gracias a los cuales, completé este proyecto.

Y, finalmente, quiero agradecerle a mis papás, que me han ayudado financiera y moralmente durante toda mi vida académica, que siempre se ocuparon de que los estudios fueran mi única preocupación, y siempre me han ayudado a cumplir mis sueños.

“El espaciotiempo le dice a la materia cómo moverse
y la materia le dice al espaciotiempo cómo curvarse”

John Archibald Wheeler

Índice general

Resumen	II
Agradecimientos	III
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	4
2. Antecedentes	5
2.1. La integral de trayectoria en el caso gravitacional	5
2.2. Triangulaciones Dinámicas Euclidianas (EDT)	7
2.3. Triangulaciones Dinámicas Causales (CDT)	10
2.4. Modelos Matriciales	12
2.4.1. Imponiendo Causalidad	14
2.5. Renormalización	20
2.5.1. Grupo Funcional de Renormalización (FRG)	21
2.5.2. Ecuación de Wetterich (FRGE)	22

2.5.3. Funciones beta y exponentes críticos	25
2.6. Seguridad Asintótica	27
3. Desarrollo	29
3.1. FRGE en Modelos Matriciales	30
3.1.1. Análisis de Operadores	33
3.1.2. Funciones beta y exponentes críticos	34
3.2. CDT: El Modelo Matricial	38
3.3. Modelo No-Simétrico con C^2	38
3.3.1. Uso de la Ecuación de Wetterich	39
3.3.2. Análisis de Operadores	40
3.3.3. Forma general de las funciones beta	43
3.3.4. Una forma explícita para C	46
3.4. Modelo No-Simétrico con C^n	51
3.4.1. Uso de la Ecuación de Wetterich	51
3.4.2. Análisis de Operadores	52
3.4.3. Forma general de las funciones beta	53
3.4.4. Una forma explícita para C	55
4. Conclusiones	58
4.1. Resultados	58
4.2. Trabajo futuro	61

A. Gravedad 2-dimensional	63
B. Geometría Simplicial	65
C. Cálculo de trazas para $N = 2M$	68
D. Cálculo de trazas para $N = 4M$	70
Bibliografía	71

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El presente proyecto contempla el estudio de uno de los principales problemas en la Física contemporánea, que es poder construir una teoría de la Gravedad Cuántica [3]. En la actualidad, la mayoría de los fenómenos físicos pueden ser descritos usando la Relatividad General y la Física Cuántica, de manera que, parece ser, a grandes escalas están gobernados por interacciones gravitacionales, y a pequeñas escalas por las interacciones fuerte y electrodébil, que son descritas por la Mecánica Cuántica y la Teoría Cuántica de Campos.

Sin embargo, estas dos ramas de la Física tienen diferencias conceptuales muy importantes, por ejemplo, la Relatividad General nos dice que el espaciotiempo es dinámico y que no hay un marco de referencia preferencial, mientras que la Física Cuántica requiere de un fondo espaciotemporal fijo con una elección de dirección temporal. Y hay preguntas físicas que, al parecer, requieren de estas dos para hallar una respuesta, tal como cuál es la descripción cuántica detrás de la termodinámica de agujeros negros [4], cómo la estructura y dinámica del espaciotiempo influye en la dinámica de los campos cuánticos de materia y norma que conocemos, no sólo en el sentido de estudiar estos campos sobre un fondo curvo [5], sino el de explorar las interacciones de estos dos entes físicos, cuál es la física en las singularidades que

aparecen en la Relatividad General (agujeros negros, Big Bang) [6], entre otras.

Se han desarrollado muchos modelos para contestar estas preguntas [3] [7], entre ellos

- GRAVEDAD CUÁNTICA DE LAZOS, donde se escribe un Hamiltoniano gravitacional y se cuantiza de manera canónica. De esta manera, se obtiene un espacio de Hilbert y operadores (tales como área y volumen) bien definidos; sin embargo, no es claro cómo implementar la dinámica o, en otras palabras, cómo evolucionar los estados. Además, tampoco se sabe cómo, usando los estados y operadores en el espacio de Hilbert, recuperar la información geométrica del espaciotiempo [8].
- TEORÍA DE CUERDAS, donde se escribe la acción de una cuerda en D -dimensiones y se cuantiza canónicamente, para una cuerda cerrada se encuentra en su expansión perturbativa un estado no-masivo de espín 2, que se identifica como el gravitón (partícula mediadora de la interacción gravitacional); sin embargo, como ya se mencionó, esto es sólo en una expansión perturbativa, además la teoría debe vivir en 10 ó 26 dimensiones espaciotemporales para ser consistente [9].
- TRIANGULACIONES DINÁMICAS es un modelo discreto donde cada configuración del espaciotiempo, como variedad diferencial, se aproxima por una triangulación plana por pedazos y la acción gravitacional se escribe en estos términos (acción de Regge [10]).
- SEGURIDAD ASINTÓTICA, donde se trata a la Relatividad General como una teoría cuántica de campos usual y se buscan valores de las constantes de Newton y cosmológica para los cuales la teoría sea renormalizable [11].

Sin embargo, ninguno de ellos (y muchos más que existen) ha podido catalogarse como una Teoría de Gravedad Cuántica.

El enfoque que se estudia en esta tesis es el de Triangulaciones Dinámicas, donde la información geométrica del espaciotiempo 2-dimensional está codificada en la forma en que simples euclidianos planos (puntos, líneas, triángulos) se unen, y todas las configuraciones posibles se suman con una integral de trayectoria usando la acción de Regge [10].

Preguntas como ¿Cuál es la noción de causalidad en escenarios de altas energías donde la curvatura del espaciotiempo no es despreciable? ¿Es la causalidad una propiedad intrínseca del espaciotiempo o una propiedad efectiva de una teoría fundamental? ¿Puede la Relatividad General ser el límite IR de una teoría que acople consistentemente la dinámica del espaciotiempo con campos de materia y norma? Motivan mucho del trabajo en este campo.

Usando el concepto de gráfica dual de una triangulación, se puede ver que la dinámica antes descrita puede ser también expresada con una acción en términos de matrices de $N \times N$ [12]. Luego, para pasar al límite continuo, se lleva el tamaño de las matrices a infinito; esto puede ser relacionado con un punto fijo de la teoría, tomando a N como la escala de renormalización.

Por otro lado, sabemos que la teoría de campos descrita por el lagrangiano de Einstein-Hilbert tiene un punto fijo gaussiano (la teoría libre) alrededor del cual no se pueden hacer predicciones físicas; sin embargo, se ha conjeturado la existencia de un punto fijo no gaussiano donde las observables físicas de la teoría estén libres de divergencias (Seguridad Asintótica) [13]. Una de las herramientas más útiles usadas para investigar teorías de campos en este régimen es la Ecuación del Grupo Funcional de Renormalización (FRGE), o Ecuación de Wetterich [14]; la cual describe cómo varía la acción efectiva de una teoría respecto a la escala de energía (distancia o, en general, grados de libertad) en la que se estudia.

Así, el modelo de Triangulaciones Dinámicas y la Seguridad Asintótica, encuentran un punto en común. Esto es muy importante ya que, por un lado, la Seguridad Asintótica nos da un marco dónde estudiar las interacciones gravitacionales de los

campos del Modelo Estándar [15, 16]; mientras que las Triangulaciones Dinámicas nos ayudan a estudiar preguntas más fundamentales sobre la estructura intrínseca del espaciotiempo [17].

Una de las cuestiones que se puede estudiar directamente en esta última, es la estructura causal del espaciotiempo. En Triangulaciones Dinámicas Causales (CDT) se trabaja con triángulos que tienen dos tipos de lados: tipo-espacio y tipo-tiempo, y una restricción a considerar en la integral de trayectoria es que no se pueden juntar lados tipo-espacio con lados tipo-tiempo [18]. Si bien es cierto que una estructura causal se implementa desde la acción, no es obvio que la causalidad se presente cuando se toma el límite continuo de la teoría; en este sentido es que estos modelos nos podrían ayudar a contestar las preguntas planteadas anteriormente.

1.2. Objetivos

Este trabajo busca analizar un Modelo Matricial Causal de Triangulaciones Dinámicas en 2-dimensiones, donde la estructura causal se incorpora haciendo uso de un campo adicional fijo que media las interacciones del campo matricial dinámico [1]. Luego, para tomar el límite continuo, se usa la Ecuación del Grupo Funcional de Renormalización para encontrar las funciones beta, puntos fijos y exponentes críticos de la teoría.

Y, finalmente, se analiza si el modelo trabajado en la presente tesis tiene un límite continuo y si está en la clase de universalidad de Triangulaciones Dinámicas Euclidianas o en la de Triangulaciones Dinámicas Causales, para ello los exponentes críticos obtenidos se comparan con los resultados euclidiano [2] y causal [19].

Capítulo 2

Antecedentes

Como ya se mencionó, aquí se trabajará con un modelo matricial de Triangulaciones Dinámicas Causales, y se hará uso del Grupo Funcional de Renormalización para analizar su límite continuo, por lo que es importante aclarar que en este trabajo, y en el programa de Triangulaciones Dinámicas en general, se parte de la premisa de que *el marco de Teoría Cuántica de Campos estándar es suficiente para construir y entender la Gravedad Cuántica como una teoría fundamental, siempre y cuando las propiedades dinámicas, causales y no-perturbativas del espaciotiempo se implementen correctamente*[20].

2.1. La integral de trayectoria en el caso gravitacional

Desde mediados del siglo XX se conocen la Acción de Einstein-Hilbert (EH) y la Ecuación de la Relatividad General, así como la Mecánica Cuántica y la Integral de Trayectoria de Feynman. Por lo que parece inmediato unir estos dos modelos para escribir la función de partición cuántica de la Gravedad

$$Z(G, \Lambda) = \int \mathcal{D}\tilde{g}_{\mu\nu} e^{iS^{EH}[g_{\mu\nu}]}, \quad (2.1)$$

con

$$S^{EH} = \frac{1}{4\pi G} \int d^4x \sqrt{|g|} (\Lambda - R). \quad (2.2)$$

Sin embargo, en (2.1) aparece un objeto, $\mathcal{D}\tilde{g}$, que está directamente relacionado con el espacio de configuraciones donde vive la métrica g (o las variedades espaciotemporales). Sabemos, o al menos intuimos, que esta medida debería tener las siguientes características [21]:

1. Estar definida en $\frac{PsRiem(M)}{Diff(M)}$ para tener en cuenta las *invariancia bajo difeomorfismos*: si una métrica g_1 se relaciona con g_2 por medio de $g_1 = \Phi g_2$, éstas pertenecen a la misma clase de equivalencia, ya que representan la misma configuración física del espaciotiempo. Es decir,

$$\int \mathcal{D}\tilde{g} = \int_{\frac{PsRiem}{Diff}} \mathcal{D}g$$

donde \tilde{g} representa una órbita bajo la acción de difeomorfismos.

2. Admitir cortes IR y UV: la Relatividad General tiene poder predictivo en un rango de energía (distancia) bien definido, por lo que es una teoría efectiva.
3. Suprimir las contribuciones de métricas no-causales: el sumar sobre todas las posibles métricas con la acción (2.2), no garantiza que cada configuración sea causal (lo cual es una propiedad esencial en la Relatividad General), incluso si la condiciones de frontera lo son. Por lo que, si hay contribuciones de este tipo, las configuraciones causales deben dominar.
4. Tener claro cómo y si es necesario sumar sobre todas las posibles topologías: para empezar, al considerar que (2.1) es una suma sobre variedades, debería también sumarse sobre topologías; por otro lado, los espacios topológicos se pueden clasificar de acuerdo a varias características: homotopía, homología,

etc. Y no es claro con qué criterio se debe hacer esta suma, o incluso, esta suma debe hacerse (en este caso habría que justificar por qué). De hecho, en el caso 2-dimensional, a pesar de que la suma sobre topologías se puede expresar de una manera analítica, aún no se sabe cómo calcular esta suma en general (Ver Anexo 1).

De manera que (2.1), realmente se vería como

$$Z(G_N, \Lambda) = \sum_{Top(M)} \int_{\substack{PsRiem \\ Diff}} \mathcal{D}g_{\mu\nu} e^{iS^{EH}[g_{\mu\nu}]}, \quad (2.3)$$

expresión que ya muestra la complejidad del problema de cuantizar esta teoría (al menos con este método). Y esto, aún sin tener en cuenta el término no lineal $\sqrt{|g|}$ en (2.2).

Más aún, una teoría descrita por esta integral de trayectoria, en el marco usual de Teoría Cuántica de Campos (QFT), no lleva a predicciones físicas consistentes, ya que resulta ser perturbativamente no-renormalizable a 2-loops, para gravedad pura [22], y a 1-loop, acoplada a un campo escalar [23]. Esto puede sospechar al hacer un análisis dimensional de la constante de acoplamiento de Newton

$$[G] = [M]^{2-d}, \quad (2.4)$$

en d -dimensiones; por lo que en $d = 4$, tiene dimensiones de $[M]^{-2}$, lo que provoca que todas las amplitudes que se calculen diverjan a un orden suficientemente alto en el desarrollo perturbativo [24].

2.2. Triangulaciones Dinámicas Euclidianas (EDT)

En este modelo se busca explorar lo expuesto en 2.1 en un lenguaje discreto, donde la integral de trayectoria sobre variedades riemannianas se cambia por una suma

sobre variedades planas por pedazos (ppp). Esto usando una métrica con signatura euclidiana donde ya se hizo una rotación de Wick ($t \rightarrow i\tau$), esta transformación se hace para que la integral converja, sin embargo, en el contexto de Relatividad General tiene un significado físico claro, y es que con esta rotación se pasa de sumar sobre variedades Pseudo-Riemannianas a Riemannianas, lo que claramente altera la estructura del espaciotiempo a nivel fundamental. Se trabaja con la premisa (o esperanza) de que los resultados físicos son los mismos que trabajando directamente con una variedad Lorentziana. Este enfoque fue originalmente planteado por Regge [10], llegando a escribir la acción de Einstein-Hilbert en términos de geometría simplicial (Ver Anexo B).

El modelo de Triangulaciones Dinámicas es una variante de la formulación de Regge, donde se suma sobre triangulaciones abstractas en las que el tamaño de los lados está fijo [21]. De manera que (2.1) se escribe

$$Z^{DT}(k_{d-2}, k_d) = \sum_{T \in \mathcal{T}} e^{-S^{Regge}[T]}, \quad (2.5)$$

donde

$$S^{Regge}[k_{d-2}, k_d] = k_d N_d(T) - k_{d-2} N_{d-2}(T) + \frac{1}{2} k_{d-2} N_{d-2}(\partial T), \quad (2.6)$$

es la Acción de Einstein-Hilbert en d-dimensiones en la formulación de Regge y \mathcal{T} es el espacio de triangulaciones. Cabe decir, que el problema de la definición de \mathcal{T} en Triangulaciones Dinámicas se relaciona con el problema de definir la suma sobre topologías en la medida $\mathcal{D}\bar{g}$, por lo que se trabajará con una topología fija. N_i es el número de simplejos i-dimensionales, mientras que k_{d-2} y k_d son constantes de acoplamiento relacionadas con G y Λ de la forma

$$k_d \sim \frac{\Lambda}{G}, \quad k_{d-2} \sim \frac{1}{G}. \quad (2.7)$$

Las ventajas de trabajar con este modelo son, primero, que se obtiene directamente una discretización de la geometría sin hacer referencia a coordenadas, además de que este enfoque es no-perturbativo en el sentido de que la funcional (2.5) toma en cuenta geometrías que pueden diferir significativamente de soluciones clásicas; y finalmente, la longitud de los lados de los triángulos introduce una noción de corte UV.

De manera que en este lenguaje la gravedad se puede formular como un ensamble aleatorio de variedades ppp y, en particular, se puede aplicar lo que se sabe de fenómenos críticos con la idea de que el espaciotiempo continuo que vemos es el límite IR de esta teoría.

A partir de (2.5) se pueden calcular observables físicos, tales como el volumen promedio de un universo descrito por (2.6) con n-simplejos de lados de tamaño a , que es¹

$$\langle V \rangle \sim a^d \langle N_d \rangle, \quad (2.8)$$

donde

$$\langle N_d \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial k_d}, \quad (2.9)$$

es el número promedio de simplejos d-dimensionales en la triangulación. Así se puede notar que si queremos considerar el límite continuo donde el tamaño de los lados $a \rightarrow 0$, entonces $N \rightarrow \infty$ para que el volumen del universo se mantenga constante, por lo que ambas variables actúan como la escala de renormalización de la teoría [25].

Aunque esta formulación tiene ventajas conceptuales, son pocos los resultados analíticos que se pueden percibir, casi todos resultados han obtenido usando simulaciones

¹La constante de proporcionalidad en esta expresión es un factor geométrico que usualmente viene dado cuando se escribe (2.6) en unidades convenientes.

de Monte Carlo.

2.3. Triangulaciones Dinámicas Causales (CDT)

Como ya se mencionó en 2.2, en EDT se trabaja con una acción euclidiana, donde ya se realizó una rotación de Wick. Aunque este procedimiento es comúnmente usado en Teoría Cuántica de Campos usual, cuando se trata de describir la dinámica del espaciotiempo hay que analizar esta transformación más a fondo.

En particular, la rotación de Wick está bien definida cuando el espaciotiempo es estático y, por lo tanto, admite una foliación global². Sin embargo, en espaciotiempos curvos, en general, no se puede hacer esta transformación; además, la rotación de Wick no conmuta con la acción de difeomorfismos (principal simetría de la Relatividad General) y físicamente la estructura Lorentziana del espaciotiempo es lo que nos da una noción de causalidad en el universo. Por lo que en Gravedad Cuántica, donde concebimos la idea de sumar estadísticamente sobre todas las geometrías posibles, esto es realmente importante.

Con base en estas observaciones es que se comenzó a estudiar un modelo de Triangulaciones Dinámicas 2-dimensional que incorporara la noción de causalidad [18, 19]. En éste, el elemento básico son triángulos planos con dos tipos de lados: tipo-espacio y tipo-tiempo (ver fig. 2.1) estos se pegan para formar tiras de lados tipo-tiempo, dando la noción de una foliación.

De manera que la triangulación puede verse como una secuencia $t = 0, 1, \dots, T$ de simplejos 1-dimensionales, donde el espacio entre dos tiras t_i y t_{i+1} está formado por 2-simplejos Lorentzianos. Cabe decir, que en la triangulación no se permite pegar lados tipo-tiempo con lados tipo-espacio.

²Los axiomas de Osterwalder-Schrader [26] garantizan la existencia de una correspondencia entre los correladores calculados con acciones euclidianas y lorentzianas, siempre y cuando la QFT esté en un fondo plano y Minkowskiano.

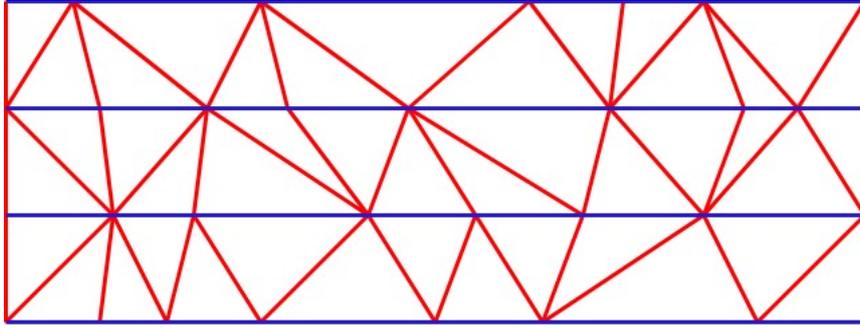


Figura 2.1: Triangulación con lados tipo-espacio(azul) y tipo-tiempo(rojo).

Estos lados, además, pueden diferir en tamaño y, de hecho, si $l_s^2 = a^2$ entonces $l_t^2 = -\alpha a^2$ con $\alpha > 0$. Por lo que en este sentido se puede hacer una “rotación de Wick” de la siguiente forma

$$e^{iSLor} \xrightarrow{l_t^2 \rightarrow -l_t^2} e^{-SEu}. \quad (2.10)$$

En este modelo se fija la topología de las rebanadas espaciales de espaciotiempo ya que, si en algún momento cambia su género (o se forman hoyos), los conos de luz se degeneran en el punto de bifurcación y, por lo tanto, no hay una estructura causal bien definida en esa región (ver fig.2.2).

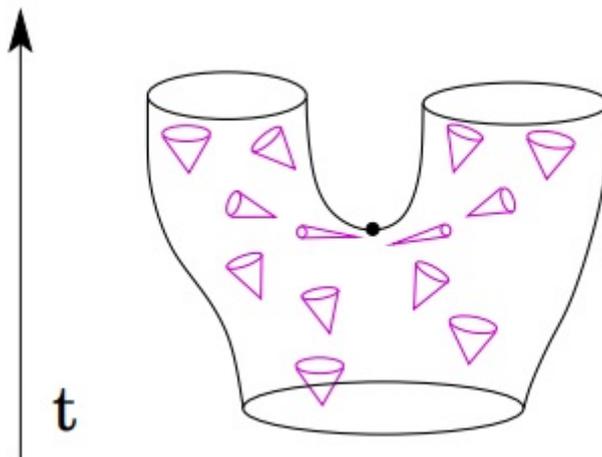


Figura 2.2: Efectos del cambio de género de la topología espacial en los conos de luz[27].

Es importante mencionar que el conjunto de triangulaciones euclidianas obtenido después de hacer esta transformación es más pequeño que el conjunto de triangulaciones que se tenía en 2.2, lo que refleja físicamente que la causalidad impone restricciones en la forma que puede tomar el espaciotiempo [27].

2.4. Modelos Matriciales

En términos cuantitativos, más avances se lograron en el campo de la Gravedad Cuántica 2-dimensional cuando se entendió que una acción de la forma

$$S^{EDT} = \frac{1}{2}Tr(\phi\phi^\top) - \frac{\lambda}{2}Tr((\phi\phi^\top)^2), \quad (2.11)$$

donde ϕ es una matriz hermítica de tamaño $N \times N$, lleva a una función de partición que genera gráficas conectadas (\mathcal{G}) que son duales a cuadrangulaciones de una variedad ppp (ver fig. 2.3), donde los vértices de la cuadrangulación son duales a caras de la gráfica dual, por lo que se establece una correspondencia completa y no ambigua entre ambas descripciones [28]. En este trabajo se usan cuadrangulaciones en vez de triangulaciones por motivos operacionales, con la idea en mente de que el límite continuo del modelo debería ser independiente de qué polígono se elija como fundamental en el ensamble estadístico. De manera que

$$Z = \sum_{\mathcal{G}} \frac{1}{s(\mathcal{G})} \lambda^{n(\mathcal{G})} \mathcal{A}_{\mathcal{G}} \quad (2.12)$$

con

$$\mathcal{A}_{\mathcal{G}} = N^{F(\mathcal{G})} \quad (2.13)$$

donde $n(\mathcal{G})$ es el número de vértices y $F(\mathcal{G})$ es número de caras de la gráfica \mathcal{G} y $s(\mathcal{G})$ es un factor de simetría, describe el mismo modelo estadístico que (2.5), con

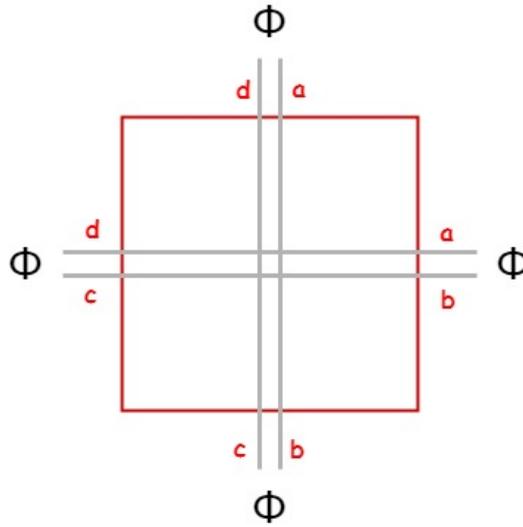


Figura 2.3: Construcción de una cuadrangulación a partir de un modelo matricial.

$$k_d \sim -\ln(\lambda), \quad k_{d-2} \sim \ln(N) \quad (2.14)$$

por lo que se le llama el modelo matricial de Triangulaciones Dinámicas 2-dimensionales [12].

Esta descripción es de gran utilidad ya que permite obtener resultados analíticos en gravedad pura y gravedad acoplada a materia [29], ya que se tiene un término cuadrático, $Tr(\phi\phi^\top)$, por lo que calcular funciones de correlación se reduce a calcular integrales gaussianas, tal como en QFT usual.

Además, los modelos matriciales admiten una expansión $1/N$ [30], y esto permite estudiar propiedades universales desde el punto de vista estadístico. Es decir, si se considera un reescalamiento de las constantes de acoplamiento en una acción de la forma (2.11),

$$\lambda_i \mapsto \frac{\lambda_i}{N^\alpha}, \quad (2.15)$$

en el límite $N \rightarrow \infty$ existe un valor del exponente α tal que todas las funciones beta

del modelo admiten una expansión perturbativa, aún cuando los acoplamientos λ_i no sean suficientemente pequeños. En este sentido es que la expansión $1/N$ captura información no-perturbativa del modelo.

En el caso de Triangulaciones Dinámicas, nos interesan los valores grandes de la constante de acoplamiento, ya que estos corresponden a superficies discretas con muchos componentes planos (simplejos), por lo que la expansión $1/N$ es relevante en la búsqueda de un límite continuo.

2.4.1. Imponiendo Causalidad

Siguiendo el razonamiento usado en 2.2 para construir el modelo matricial de Triangulaciones Dinámicas, se reemplaza la terminología de triangulaciones con la de gráficas duales, en este paso es importante notar que los lados tipo-tiempo en la triangulación se mapearán a lados tipo-espacio en la gráfica dual y viceversa, tal como se muestra en la fig. 2.4.

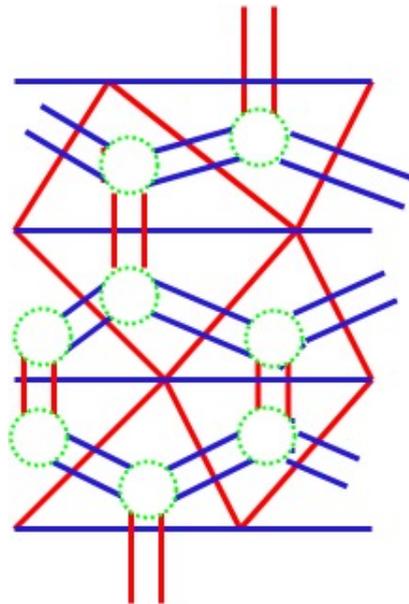


Figura 2.4: Gráfica dual a una triangulación Lorentziana.

Los lados de la gráfica dual están representados por propagadores de matrices; como en CDT se tienen dos tipos de lados y cada triángulo tiene dos lados tipo-tiempo y

uno tipo-espacio (ver fig. 2.1), ahora se tendrán dos matrices dinámicas en el modelo, A y B (para tipo-espacio y tipo-tiempo en la gráfica dual) y vértices de la forma AAB .

En CDT se tiene una restricción adicional, la topología de rebanadas espaciales no puede cambiar (ver fig. 2.2), esto se puede expresar en la gráfica dual imponiendo la condición de que en una cara sólo pueden haber 0 o 2 lados tipo-tiempo, ya que en un punto de bifurcación esto no se cumpliría (ver fig. 2.5).

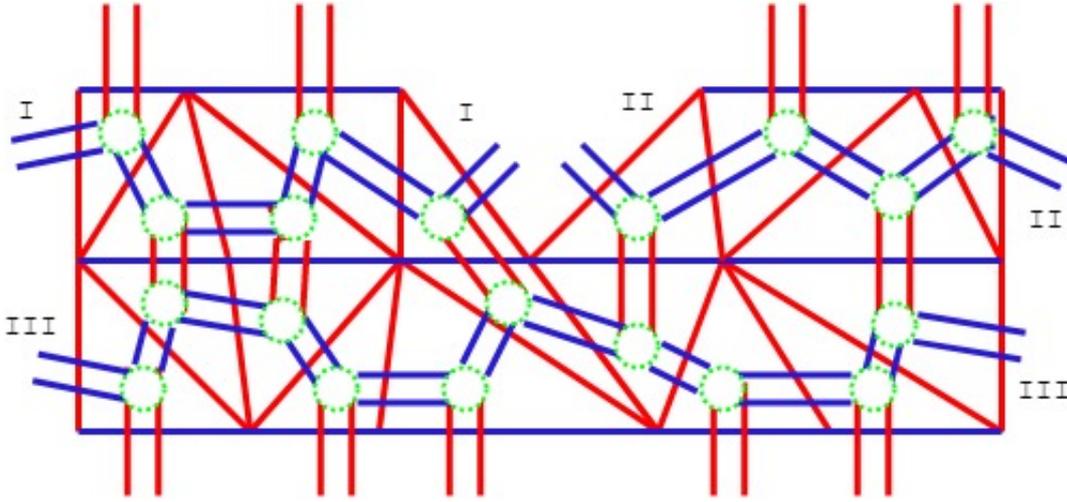


Figura 2.5: Cambio de topología espacial en la gráfica dual.

La función de partición que describe un modelo que cumpla con estas características fue propuesta en [1], y es

$$Z^{CDT} = \int dA dB e^{-N \text{Tr}(\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}(C^{-1}B)^2 - gA^2B)}, \quad (2.16)$$

donde A , B y C son matrices de tamaño $N \times N$, y C es una matriz externa que satisface la condición

$$\text{Tr}(C^m) = N\delta_{2,m} \quad \text{con } m \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

Analizando (2.16) se puede ver que los propagadores del modelo en el caso libre

($g = 0$) son

$$\langle A_{ij}A_{kl} \rangle_0 = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{kj}, \quad (2.18)$$

$$\langle B_{ij}B_{kl} \rangle_0 = \frac{1}{N} C_{il} C_{kj}, \quad (2.19)$$

$$\langle A_{ij}B_{kl} \rangle_0 = 0, \quad (2.20)$$

lo que implica que las únicas gráficas que contribuirán son las que tengan caras con dos o cero lados (propagadores) tipo-tiempo gracias a la condición (2.17).

Ahora hay que notar que en (2.16) se puede hacer la integración sobre B , ya que es una integral gaussiana; con lo que se obtiene

$$Z^{CDT} = \int dA e^{-NS^{CDT}}, \quad (2.21)$$

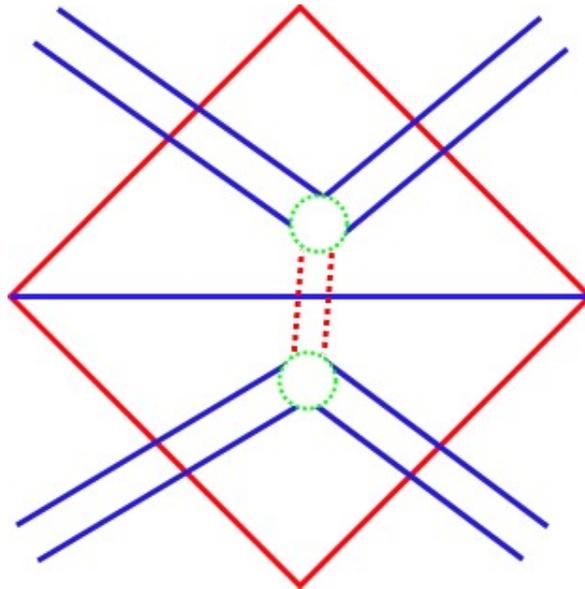
con

$$S^{CDT} = \frac{1}{2} \text{Tr}(AA^\top) - \frac{g^2}{2} \text{Tr}(AA^\top CAA^\top C). \quad (2.22)$$

Lo que gráficamente se puede interpretar como pegar los triángulos por sus lados tipo-espacio, o unir los propagadores tipo-tiempo en la gráfica dual, y usar cuadrangulaciones con lados tipo-espacio (ver fig. 2.6).

Por otro lado, se puede notar que (2.22) tiene una forma muy parecida a (2.11) en el caso euclidiano, con la diferencia de la matriz C en el término de interacción (ver fig. 2.7), lo que significa que esta matriz es la que codifica la estructura extra que tiene una triangulación causal con respecto a una euclidiana. En particular, si $C = 1$, $S^{CDT} = S^{DT}$; por lo que se puede ver que la condición (2.17) es fundamental para que esto no suceda.

Existencia de C

Figura 2.6: Integración sobre la matriz B .

Ya que, como vimos, la matriz C codifica toda la estructura causal de la cuadrangulación a partir de que se integra sobre los lados tipo-espacio en la triangulación (ver fig. 2.6), sería más que problemático que una matriz con la propiedad (2.17) no existiera, por suerte éste no es el caso.

Considere una matriz X de tamaño $N \times N$ con N valores propios (no necesariamente distintos) $\{x_i\}$, por lo que su polinomio característico es

$$P_X(t) = \prod_{i=1}^N (t - x_i), \quad (2.23)$$

que, a su vez, se puede escribir como

$$P_X(t) = \sum_{k=0}^N (-1)^k e_k t^{N-k}, \quad (2.24)$$

donde e_k está dado por

$$p_k(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i^k, \quad (2.26)$$

que precisamente es la traza de la k -ésima potencia de la matriz X , X^k . De manera que los coeficientes e_k del polinomio característico de X se pueden obtener de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e_1(x_1, \dots, x_N) &= Tr(X) \\ e_2(x_1, \dots, x_N) &= \frac{1}{2} ((Tr(X))^2 - Tr(X^2)) \\ e_3(x_1, \dots, x_N) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (Tr(X))^3 - \frac{3}{2} Tr(X)Tr(X^2) + Tr(X^3) \right) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.27)$$

Es decir, dada una matriz de $N \times N$ diagonalizable, uno siempre puede encontrar un polinomio cuyas raíces sean los valores propios de la matriz, dadas las trazas de sus N potencias. Por lo tanto, una matriz C que satisfaga la condición (2.17) estará determinada por las soluciones de la siguiente expresión:

$$P_C(t) = t^N - \frac{1}{2} N t^{N-2} + \frac{1}{8} N^2 t^{N-4} + \dots = 0. \quad (2.28)$$

Claro, que su existencia no garantiza que se pueda encontrar una expresión explícita para toda N , y, de hecho, sólo se puede obtener resultados numéricos para

- $N = 2$:

$$C = \text{diag}(-1, 1), \quad (2.29)$$

- $N = 4$:

$$C = \text{diag}(-1.09 - 0.45i, -1.09 + 0.45i, 1.09 - 0.45i, 1.09 + 0.45i), \quad (2.30)$$

- $N = 6$:

$$C = \text{diag}(1.02 + 0.70i, 1.02 - 0.70i, 1.37, \\ -1.02 + 0.70i, -1.02 - 0.70i, -1.37). \quad (2.31)$$

2.5. Renormalización

Hasta ahora se han presentado modelos en los que se trabaja con variedades descritas por triangulaciones, que son uniones de simplejos planos, esperando poder modelar de alguna forma el espaciotiempo clásico continuo, de manera que la dinámica clásica que conocemos (Relatividad General) surja en un límite de bajas energías a partir de una teoría más fundamental (en este caso, CDT).

Para estudiar cómo se comporta una teoría a distintas escalas existe una herramienta muy útil, el *Grupo de Renormalización*, que describe cómo los grados de libertad e interacciones que describen a un sistema físico cambian cuando lo estudiamos a distintas escalas (de energía, distancia, etc.), por ejemplo, en Estado Sólido [31, 32] se analiza cómo es que surgen las propiedades macroscópicas de los sólidos a partir del estudio estadístico de las propiedades cuánticas de los electrones, átomos y moléculas que los componen.

Por lo general, en sistemas modelados sobre retículas y con grados de libertad locales, el límite hacia el continuo está dado por una transición de segunda fase (segundo orden o *fenómenos críticos*) [33], ya que en ésta las observables físicas son finitas en todo momento, además de que no requieren una inyección de energía en el sistema (calor latente) para suceder.

Para un sistema termodinámico, estas transiciones se caracterizan por una temperatura crítica (T_c), cerca de la cual éste presenta un comportamiento colectivo a distancias grandes (comparadas, por ejemplo, con el tamaño de un átomo). Ahí el sistema físico se desacopla en dos escalas de longitud: la microscópica, por ejemplo el espacio en una red de átomos, y la macroscópica, caracterizada por la *longitud de*

correlación (ξ). Ésta última se define a partir de las funciones de correlación de dos puntos [34], que cerca del punto crítico decaen exponencialmente,

$$G^{(2)}(r) \sim e^{-\frac{r}{\xi}}, \quad (2.32)$$

lo que da una noción de átomo en el sistema macroscópico, es decir, una parte del sistema que se comporta como una sola componente. Usualmente cuando el sistema llega a su punto crítico (punto en el diagrama fase donde ocurre la transición) esta longitud diverge, lo que permite ignorar los fenómenos a escalas microscópicas y tomar el límite continuo para llegar a una descripción efectiva del sistema [35].

2.5.1. Grupo Funcional de Renormalización (FRG)

El Grupo Funcional de Renormalización (FRG) es una formulación de la renormalización, que permite explorar distintos métodos de análisis que no necesariamente dependen de tener una constante de acoplamiento pequeña, es decir, no-perturbativos [36].

Antes que nada, recordemos que la funcional generatriz de un sistema, $Z[J]$, ésta se puede escribir en términos de la funcional generatriz de diagramas conectados, $W[J]$, de la siguiente manera

$$Z[J] = \exp(-W[J]) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S^{clas}[\phi] + \int dx^4 J(x)\phi(x)\right) \quad (2.33)$$

donde S^{clas} es la acción clásica, \mathcal{N} es una constante de normalización, y a $J(x)$ se le llama *fente*, este término es importante ya que, si $|\Omega\rangle$ es el estado vacío de la teoría, las funciones conectadas de n -puntos[34] están dadas por

$$\langle \Omega | \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle = -\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} W[J]_{J=0}. \quad (2.34)$$

De manera que el campo efectivo se define como

$$\varphi(x) := -\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle, \quad (2.35)$$

por lo que, se puede poner a la acción en términos de este campo efectivo haciendo una transformación de Legendre, y así es como se llega a la Acción Efectiva

$$\Gamma[\varphi] = \inf_J \left(W[J] + \int d^4x J(x)\varphi(x) \right). \quad (2.36)$$

Usualmente se dice que esta es la acción cuántica de la teoría, con contra-parte clásica S , ya que contiene la información clásica (codificada en W) y las fuentes J , que dan lugar a las funciones de n -puntos (2.34). Además, esta acción satisface

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi}(x) = J(x), \quad (2.37)$$

en analogía con lo que se tiene en el caso clásico $\frac{\delta S}{\delta \phi}(x) = 0$, por lo que se dice que la acción cuántica satisface el principio de mínima acción salvo términos relacionados con fuentes.

2.5.2. Ecuación de Wetterich (FRGE)

Ahora, como ya se mencionó, uno comienza con la idea de que dado un sistema físico hay una teoría fundamental (descrita por la acción clásica S) que lo modela. Mientras que, asociada a ésta, hay una teoría efectiva descrita por una acción [37] Γ_k (2.42), que estará bien definida y podrá aportar predicciones físicas a una escala de energía definida (cortes IR y UV). De manera que en el espacio abstracto de acciones físicas, ambas estarán conectadas por una trayectoria parametrizada por la escala de energía (ver fig. 2.8).

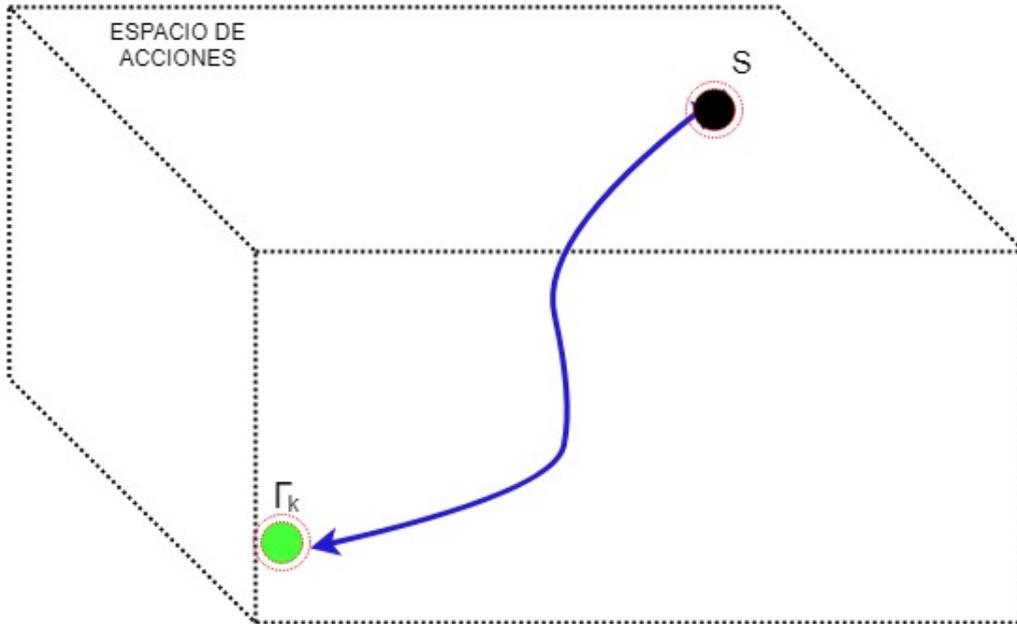


Figura 2.8: Espacio de acciones y cómo se conectan las acciones fundamental y efectiva.

De forma que se puede usar el Grupo de Renormalización justamente para estudiar estas trayectorias y encontrar acciones efectivas, o incluso comenzar con una acción efectiva y encontrar, por medio de estas trayectorias, la acción de la teoría fundamental.

Para eso es que se usará la Ecuación del Grupo Funcional de Renormalización (o de Wetterich), cuya solución describe el flujo de la acción efectiva en el Espacio de Acciones cuando la escala de energía cambia.

A continuación se deducirá esta ecuación usando un campo escalar ($\phi(x)$) por simplicidad, pero este análisis puede ser extendido a más de uno y otros tipos de campos. Considere la funcional generatriz con cortes IR y UV, $k < |p| < \Lambda$,

$$\exp(-W_{k,\Lambda}[J]) = \frac{1}{\mathcal{N}_{k,\Lambda}} \int \mathcal{D}_\Lambda \phi e^{-S[\phi] + J\phi - \Delta S_k[\phi]} \quad (2.38)$$

donde

$$\mathcal{N}_{k,\Lambda} = \int \mathcal{D}_\Lambda \phi e^{-S[\phi] - \Delta S_k[\phi]}, \quad (2.39)$$

$$\Delta S_k[\phi] = \int \frac{d^D p}{2(2\pi)^D} \phi(p) R_k(p) \phi(-p). \quad (2.40)$$

A R_k se le llama *regulador*, su función es amortiguar los modos de energía $k < |p|$ en la integral de trayectoria; por lo que funciona, justamente, como un regulador IR. Éste debe cumplir las siguientes características

$$\begin{aligned} \lim_{p^2 \ll k^2} R_k &> 0, \\ \lim_{k^2 \ll p^2} R_k &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} R_k &= \infty. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De esta manera se puede definir la Acción Efectiva Promedio, que dependerá de los cortes k (IR) y Λ (UV) (a partir que ahora no se escribirá Λ , pero hay que recordar que el corte UV sigue presente implícitamente), como

$$\Gamma_k[\varphi] = \inf_J \left(W_k[J] + \int d^4 x J(x) \varphi_k(x) \right) - \Delta S_k[\varphi], \quad (2.42)$$

y el respectivo campo efectivo promedio

$$\varphi_k(x) = -\frac{\delta W_k[J]}{\delta J(x)}. \quad (2.43)$$

De modo que (2.42) es una interpolación entre la acción cuántica efectiva completa $\Gamma_k \xrightarrow{k \rightarrow 0} \Gamma$, y la acción clásica renormalizada $\Gamma_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S_{ren}[\phi]$, gracias a las propiedades del regulador (2.41). Y en términos de ella se puede obtener la Ecuación de Wetterich[14, 38]

$$k\partial_k\Gamma_k = \frac{1}{2}Tr \left(\frac{k\partial_k R_k}{R_k + \Gamma_k^{(2)}} \right), \quad (2.44)$$

donde $\Gamma_k^{(2)}$ es la segunda derivada funcional de la acción efectiva promedio c.r. al campo $\phi(x)$. Esta ecuación es exacta en el espacio de acciones completo (el espacio expandido por todas las constantes de acoplamiento de los operadores compatibles con las simetrías de la acción) independientemente de la magnitud de los acoplamientos, por lo que captura efectos tanto perturbativos como no-perturbativos a todos los órdenes [39]. Además, el hecho de que esté en términos de la acción Γ_k , la hace independiente de la acción clásica fundamental S , por lo que esta ecuación trabaja sólo con los grados de libertad de la teoría para obtener el flujo de renormalización.

2.5.3. Funciones beta y exponentes críticos

En principio este análisis se debería hacer en un espacio de teorías definido por todas las constantes de acoplamiento, \bar{g}_i , cuyos operadores asociados, \mathcal{O}_i , son compatibles con las simetrías del modelo, sin embargo, ya que en la práctica no es posible resolver (2.44) de manera exacta, se ocupa una truncación [39] para la Acción Efectiva Promedio donde aparezcan sólo algunos de estos operadores

$$\Gamma_k[\varphi] = \sum_i^P \bar{g}_i(k) \mathcal{O}_i[\varphi], \quad (2.45)$$

y por lo tanto sólo se trabaja en un subespacio de teorías y lo que se obtiene es una proyección de la trayectoria mostrada en la fig. 2.8.

Sin embargo, al usar un ansatz de la forma (2.45), frecuentemente del lado derecho de (2.44) aparecen operadores extra que no aparecían en el ansatz, pero que satisfacen las simetrías del modelo (y cuyas constantes de acoplamiento expanden el espacio de teorías completo) y estos términos pueden contribuir a las funciones

beta de la truncación, aunque usualmente son fijados a cero. Esto último será de gran importancia en el este trabajo.

Ahora se ilustrará cómo obtener las funciones beta y exponentes críticos usando la FRGE, sin embargo, un ejemplo particular se desarrolla en 3.1 lo que clarifica este análisis. Primero hay que notar que las constantes de acoplamiento adimensionales en (2.45) son de la forma

$$g_i = \bar{g}_i Z^{-i/2} k^{-d_i}. \quad (2.46)$$

Por lo que al calcular el lado izquierdo de (2.44), justamente resultarán términos de la forma

$$k \partial_k Z := -\eta Z, \quad (2.47)$$

$$k \partial_k g_i := \beta_i, \quad (2.48)$$

que son las funciones beta de la teoría [31], éstas codifican la dependencia en la energía de las constantes de acoplamiento, es decir, qué tan fuertemente interactúan los campos (o partículas) a cada escala de energía. Los puntos fijos se alcanzan para valores de las constantes de acoplamiento donde $\beta_i(\{g_n^*\}) = 0$. Por lo que cerca de un punto fijo se puede escribir

$$\beta_i(\{g_n\}) \simeq \sum_j \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \Big|_{g_n^*} (g_j - g_j^*), \quad (2.49)$$

cuya solución es

$$g_i(k) = g_i^* + \sum_I C^I V_{Ii} \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-\theta_I}, \quad (2.50)$$

con

$$-\frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \Big|_{g_n^*} V_I = \theta_I V_I. \quad (2.51)$$

donde k_0 es una escala de energía de referencia y C^I es un vector constante. A $\{\theta_I\}$ se les llaman *exponentes críticos* y describen el comportamiento de las constantes de acoplamiento cerca de los puntos críticos [38]. Si $Re(\theta_I) < 0$ se le llama dirección irrelevante ya que en el IR ($k \ll k_0$) la dirección V_I no contribuye a comportamiento de la constante de acoplamiento cerca del punto fijo, además es una dirección repulsiva en el UV; mientras que si $Re(\theta_I) > 0$ se le llama dirección relevante ya que corresponde a un parámetro que es importante en el comportamiento del punto fijo en el IR, además es una dirección atractiva en el UV. En el caso $Re(\theta)_I = 0$ se le llama dirección marginal, y se necesita ir a órdenes más altos para determinar si es exactamente marginal, marginal relevante o marginal irrelevante.

2.6. Seguridad Asintótica

El significado de Seguridad Asintótica para un modelo, es la existencia de un punto fijo atractivo y no-gaussiano en el UV, es decir, que este punto fijo existe para valores distintos de cero (y finitos) de las constantes de acoplamiento adimensionales [40].

Como ya se mencionó, una teoría descrita por (2.1) (con todos los detalles mencionados en 2.1) alrededor del punto fijo gaussiano ($G, \Lambda \sim 0$) no lleva a predicciones físicas a escalas de energía por encima de la escala de Planck [23], por lo que se ha conjeturado la existencia de un punto fijo atractivo en el UV [13], es decir, que la Gravedad Cuántica es una teoría asintóticamente segura.

En este programa [11] se estudia el flujo de renormalización usando la ec. de Wetterich (2.44) y un ansatz de la forma (2.1)³, por lo que se pueden obtener funciones beta para las constantes de acoplamiento (G y Λ en la truncación S_{EH}) que contienen información no-perturbativa [42].

³También se usan otras truncaciones de la acción de Lovelock [41].

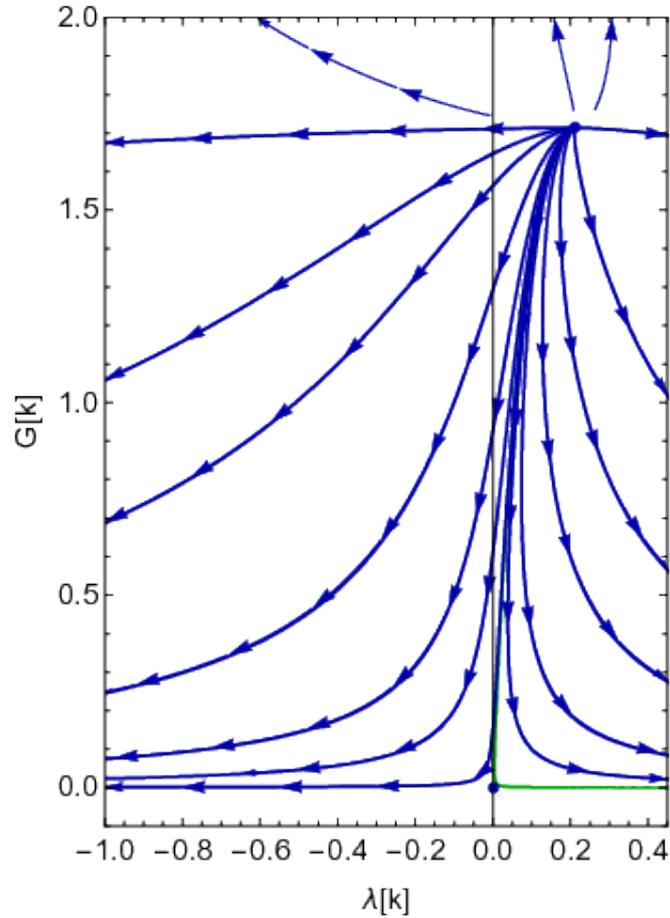


Figura 2.9: Flujo de las constantes de acoplamiento adimensionales, donde se observan dos puntos fijos: el gaussiano y el no-gaussiano. La dirección de las flechas indica UV \rightarrow IR [11].

Como se puede apreciar en la fig. 2.9, este estudio ha proporcionado evidencia de la existencia de un punto fijo no-gaussiano, donde la teoría es renormalizable en el sentido no-perturbativo.

En principio, al encontrar dicho punto fijo uno puede escribir la acción con acoplamientos renormalizados, S_{ren}^{EH} , con ella calcular todas las funciones de correlación de n-puntos y, finalmente, reconstruir la teoría cuántica usando el Teorema de Reconstrucción de Wightman [43]; sin embargo, nadie ha podido hacer esto de manera consistente aún [44].

Capítulo 3

Desarrollo

Hasta ahora se han descrito los modelos euclidiano y causal de triangulaciones dinámicas (EDT y CDT, respectivamente), así como sus correspondientes descripciones matriciales para el caso de 2-dimensiones.

Sin embargo, creemos vivir en un espacio 4-dimensional, por lo que es natural preguntarse cuál es la traducción de lo dicho hasta ahora para $d = 4$. La acción (2.6) fue ampliamente estudiada en este marco y se encontró que la transición de fase presente en 4-dimensiones es de primer orden [45], esto es problemático ya que, como ya se mencionó en 2.5, en una transición de fase de este tipo las observables geométricas, tales como el volumen del universo, divergirían.

Ésta fue la principal razón por la que se buscó incorporar una estructura causal en las triangulaciones [27]. A pesar de que la idea de implementar simplejos con lados o caras tipo-espacio y tipo-tiempo es clara, los cálculos que se pueden hacer en este marco están limitados principalmente a simulaciones de Monte Carlo (salvo algunos casos específicos como [46] en 2+1-dimensiones). Por lo que, para estudiar estos modelos en más de 2-dimensiones, se puede buscar trabajar con generalizaciones de modelos matriciales, es decir, modelos tensoriales [28].

En este marco es que es importante estudiar cómo implementar causalidad en un modelo 2-dimensional, ya que esto podría ayudar a desarrollar ideas de cómo hacerlo

en más dimensiones.

3.1. FRGE en Modelos Matriciales

Como ya se mencionó en 2.2, los modelos matriciales admiten una expansión $1/N$, lo que nos da una escala de renormalización. Además notando que la funcional generatriz de la Gravedad 2-dimensional (2.12) se puede escribir como una suma de contribuciones de variedades con género h

$$Z = \sum_h N^{2-2h} Z_h, \quad (3.1)$$

se puede ver que si se toma el límite $N \rightarrow \infty$ sólo sobrevivirán las superficies de género cero (esféricas). Así que para que más configuraciones topológicas contribuyan es necesario tomar los límites $N \rightarrow \infty$ y $g \rightarrow g_c$ simultáneamente, esto es llamado *límite de doble escalamiento*.

En esta sección se reproduce el análisis hecho en [2], donde primero, se escribe la Ecuación de Wetterich para modelos matriciales discretos

$$N\partial_N\Gamma_N[A] = \frac{1}{2}Tr \left(\frac{N\partial_N R_N}{R_N + \Gamma_N^{(2)}} \right). \quad (3.2)$$

Hay que notar que en (3.2) se está tomando N como una variable continua que codifica los grados de libertad del campo matricial A , y a diferencia de lo desarrollado en 2.5.1, este es un campo que no depende de parámetros continuos “x” (es decir, discreto), por lo que la traza del lado derecho de la ecuación es una suma discreta sobre índices matriciales (y no integrales como en el caso continuo).

Ahora, para emplear esta ecuación en el Modelo Matricial de Triangulaciones Dinámicas Euclidianas (2.11), se comienza proponiendo un ansatz de la forma

$$\Gamma_N = \frac{Z}{2}Tr(AA^\top) + \frac{\bar{g}_4}{4}Tr((AA^\top)^2) + \frac{\bar{g}_6}{6}Tr((AA^\top)^3), \quad (3.3)$$

donde $\bar{g}_4 = Z^2 N^{-1} g_4$ y $\bar{g}_6 = Z^3 N^{-2} g_6$ son las constantes de acoplamiento adimensionales que contienen toda la dependencia en N , y Z es la constante de normalización del campo A , y éste es una matriz real y no-simétrica de $N \times N$. Usualmente en modelos matriciales de triangulaciones dinámicas se usan matrices hermíticas, pero en [2] se encontró que para este análisis se puede usar sólo la parte real, así que esto es lo que se hará en este trabajo. Por lo que el lado izquierdo de (3.2) resulta ser

$$\begin{aligned} N\partial_N\Gamma_N = & -\eta\frac{Z}{2}Tr(AA^\top) + \frac{1}{4}Z^2N^{-1}(\beta_4 - g_4(2\eta + 1))Tr(AA^\top AA^\top) \\ & + \frac{1}{6}Z^3N^{-2}(\beta_6 - g_6(3\eta + 2))Tr(AA^\top AA^\top AA^\top). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para calcular el lado derecho de (2.44) se debe escoger un regulador, en este caso se usa

$$R_N^{abcd} = Z \left(\frac{N}{a+b} - 1 \right) \theta \left(1 - \frac{a+b}{N} \right) \delta^{ac} \delta^{bd}. \quad (3.5)$$

Luego, se debe derivar la acción efectiva dos veces con respecto al campo matricial A , por lo que resulta

$$\begin{aligned} \Gamma_N^{(2)} = & Z\delta^{ac}\delta^{bd} + \bar{g}_4[(AA^\top)^{db}\delta^{ac} + A^{ad}A^{cb} + (AA^\top)^{ac}\delta^{bd}] \\ & + \frac{1}{3}\bar{g}_6[\delta^{ac}(A^\top AA^\top A)^{db} + A^{ad}(AA^\top A)^{cb} + (AA^\top)^{ac}(A^\top A)^{db} \\ & + (AA^\top A)^{ad}A^{cb} + (AA^\top)^{ac}\delta^{bd}]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

El término $\Gamma_N^{(2)} + R_N$ se puede dividir en una parte que no dependa del campo A , y en otra que contenga toda esta dependencia

$$\Gamma_N^{(2)} + R_N = G_N + F_N[A], \quad (3.7)$$

así que, en este caso, el primer término está dado por

$$G_N = \frac{NZ}{a+b} \theta \left(1 - \frac{a+b}{N} \right) \delta^{ac} \delta^{bd}, \quad (3.8)$$

y su inverso (que será útil más adelante) es

$$P_N =: G_N^{-1} = \frac{a+b}{NZ} \theta \left(1 - \frac{a+b}{N} \right) \delta^{ac} \delta^{bd}. \quad (3.9)$$

Ahora, se puede expandir el lado derecho de (3.2) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\dot{R}}{R + \Gamma^{(2)}} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0} \left((-1)^k \text{Tr}(\dot{R}P(FP)^k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{R}P) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{R}PFP) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{R}PFPFP) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr}(\dot{R}PFPFPFP) + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

con

$$\dot{R}_N^{abcd} = \delta^{ac} \delta^{bd} \left[-\eta Z \left(\frac{N}{a+b} - 1 \right) + Z \frac{N}{a+b} \right] \theta \left(a - \frac{a+b}{N} \right). \quad (3.11)$$

Con la truncación propuesta, el primer término de (3.10) es de orden cero en la expansión en diagramas de Feynman ya que no hay contribuciones de F , el segundo término da lugar a diagramas con vértices de 2 y 4 patas, los cuales contribuyen a η y β_4 de acuerdo a (3.6) y (3.2); el tercer término da lugar a diagramas con vértices de 4 y 6 patas que contribuyen a β_4 y β_6 , y así sucesivamente.

3.1.1. Análisis de Operadores

Como ya se mencionó en 2.5.1, aunque (2.44) es una ecuación exacta, al usar una truncación en la acción efectiva promedio usualmente aparecerán operadores nuevos en su lado derecho, por lo que será de gran importancia hacer este análisis de operadores al calcular (3.10).

Para empezar, se separa el término F en (3.7) en sus partes proporcional a \bar{g}_4 , $F^{(4)}$, y proporcional a \bar{g}_6 $F^{(6)}$,

$$F_N^{(4)} = (AA^\top)^{db} \delta^{ac} + A^{ad} A^{cb} + (AA^\top)^{ac} \delta^{bd}, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} F_N^{(6)} = & \delta^{ac} (A^\top AA^\top A)^{db} + A^{ad} (AA^\top A)^{cb} + (AA^\top)^{ac} (A^\top A)^{db} \\ & + (AA^\top A)^{ad} A^{cb} + (AA^\top AA^\top)^{ac} \delta^{bd}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por lo que en (3.10) obtendremos trazas de productos de estos dos términos, que contienen toda la dependencia en el campo A y, por lo tanto, los operadores surgirán aquí.

Por ejemplo, en el término $Tr \left(F_N^{(4)} \right)$, que contribuye a η , ya que contiene operadores con AA^\top , es

$$Tr \left(F_N^{(4)} \right) = (AA^\top)^{bb} \delta^{aa} + A^{aa} A^{bb} + (AA^\top)^{aa} \delta^{bb}, \quad (3.14)$$

el segundo término del lado derecho se puede expresar como $Tr(A)Tr(A)$, éste es un operador multitraza y no aparece originalmente en (3.3), por lo que no se tomará en cuenta su contribución. Esto corresponde a proyectar sobre el subespacio expandido sólo por g_4 y g_6 .

A continuación se muestran los términos que contribuyen a β_4 y β_6 en este modelo.

$$Tr \left(F_N^{(6)} \right) = \delta^{aa} (A^\top A A^\top A)^{bb} + (A A^\top A A^\top)^{aa} \delta^{bb} \quad (3.15)$$

$$Tr \left(F_N^{(4)} F_N^{(4)} \right) = (A A^\top)^{db} (A A^\top)^{bd} \delta^{ac} + (A A^\top)^{ac} (A A^\top)^{ca} \delta^{bd} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} Tr \left(F_N^{(4)} F_N^{(6)} \right) &= (A A^\top)^{bd} (A^\top A A^\top A)^{bd} \delta^{ca} \delta^{ac} \\ &+ (A A^\top)^{ac} (A A^\top A A^\top)^{ca} \delta^{bd} \delta^{db} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} Tr \left(F_N^{(4)} F_N^{(4)} F_N^{(4)} \right) &= (A A^\top)^{db} (A A^\top)^{df} (A A^\top)^{fb} \delta^{ace} \\ &+ (A A^\top)^{ac} (A A^\top)^{ce} (A A^\top)^{ea} \delta^{bd} \delta^{df} \delta^{fb}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.1.2. Funciones beta y exponentes críticos

Con el análisis hecho hasta ahora se puede escribir la forma de las funciones beta del modelo de EDT descrito por (3.3),

$$-\frac{Z}{2} \eta Tr(AA^\top) = -\frac{1}{2} Tr(\dot{R} P F_N^{(4)} P) Z^2 N^{-1} g_4, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} N^{-1} Z^2 (\beta_4 - g_4(1 + 2\eta)) Tr((AA^\top)^2) &= -\frac{1}{2} Tr(\dot{R} P F_N^{(6)} P) Z^3 N^{-2} g_6 \\ &+ \frac{1}{2} Tr(\dot{R} P F_N^{(4)} P \dot{R} P F_N^{(4)} P) Z^4 N^{-2} g_4^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} N^{-2} Z^3 (\beta_6 - g_6(2 + 3\eta)) Tr((AA^\top)^3) &= Tr(\dot{R} P F_N^{(4)} P F_N^{(6)} P) Z^5 N^{-3} g_4 g_6 \\ &- \frac{1}{2} Tr(\dot{R} P F_N^{(4)} P \dot{R} P F_N^{(4)} P F_N^{(4)} P) Z^6 N^{-3} g_4^3. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por lo que, a partir de este punto, basta con escoger un ansatz para la matriz A y calcular las trazas explícitamente para obtener los correspondientes puntos y exponentes críticos.

A partir de aquí se procede a reproducir los resultados obtenidos en [2], usando el campo

$$A_{ab} = \delta_{ab}\theta(N - a), \quad (3.22)$$

por lo que los términos F evaluados en este ansatz toman la forma

$$F_N^{(4)} = 2\delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{cb}, \quad (3.23)$$

$$F_N^{(6)} = 3\delta^{ac}\delta^{bd} + 2\delta^{ad}\delta^{cb}. \quad (3.24)$$

Las funciones beta resultantes son

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{4g_4}{6 + g_4}, \\ \beta_4 &= g_4(1 + 2\eta) - \frac{1}{5}g_4^2(\eta - 5) + \frac{1}{3}g_6(\eta - 4), \\ \beta_6 &= g_6(2 + 3\eta) + \frac{1}{5}g_4^3(\eta - 6) - \frac{3}{5}g_4g_6(\eta - 5), \end{aligned} \quad (3.25)$$

sistema que presenta un punto fijo no trivial en

$$g_4^* = -0.288, \quad g_6^* = -0.061, \quad (3.26)$$

con exponentes críticos

$$\theta = 1.046, \quad \theta' = -1.080. \quad (3.27)$$

Como ya se dijo, los resultados expuestos en [2] fueron obtenidos usando este ansatz, sin embargo, para calcular las funciones beta usando (3.2) tenemos que escoger un regulador IR y un campo de prueba, y los resultados físicos en el límite continuo no deberían depender de esta elección. Por lo tanto, es de interés usar otro campo de prueba y analizar de qué forma esta elección afecta los cálculos y resultados.

En este caso, se calcularon las funciones beta usando el siguiente campo de prueba

$$A_{ab} = a\delta_{ab}\theta(N - a), \quad (3.28)$$

que resultan

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{6g_4}{15 + g_4}, \\ \beta_4 &= g_4(1 + 2\eta) - \frac{1}{18}g_4^2(\eta - 9) + \frac{1}{14}g_6(\eta - 8), \\ \beta_6 &= g_6(2 + 3\eta) + \frac{1}{22}g_4^3(\eta - 12) - \frac{6}{55}g_4g_6(\eta - 11), \end{aligned} \quad (3.29)$$

sistema que presenta un punto fijo no trivial en

$$g_4^* = -0.588, \quad g_6^* = -0.208, \quad (3.30)$$

con exponentes críticos

$$\theta = 1.033, \quad \theta' = -0.959. \quad (3.31)$$

Por lo que podemos ver que el límite continuo presenta una dirección relevante (exponente crítico positivo) y una dirección irrelevante (exponente crítico negativo), tal como en [2].

Hasta ahora, se ha trabajado con campos de prueba que tienen componentes dia-

gonales distintas de cero, A_i , para toda $i \in \{1, \dots, N\}$. Ya que N corresponde a la escala de renormalización, es importantes analizar el caso en que el campo de prueba tenga una máxima contribución en la diagonal, es decir, $A_i = 0$ para $i \geq N_0$, que físicamente quiere decir que trabajamos con un campo acotado y de norma finita. Con esta idea en mente, se propone el siguiente campo de prueba

$$A_{ab} = \delta_{1,a}\delta_{1,b}. \quad (3.32)$$

Con él se obtienen las siguientes funciones beta

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{3g_4}{3 + g_4}, \\ \beta_4 &= g_4(1 + 2\eta) - \frac{1}{3}g_4^2(\eta - 4) + \frac{2}{3}g_6(\eta - 3), \\ \beta_6 &= g_6(2 + 3\eta) + \frac{3}{10}g_4^3(\eta - 5) - g_4g_6(\eta - 4), \end{aligned} \quad (3.33)$$

sistema que presenta un punto fijo no trivial en

$$g_4^* = -0.202, \quad g_6^* = -0.026, \quad (3.34)$$

con exponentes críticos

$$\theta = 1.065, \quad \theta' = -1.050. \quad (3.35)$$

De nuevo, se obtienen exponentes críticos que indican una dirección relevante y una irrelevante, además de que los valores numéricos de estos son muy parecidos, por lo que podemos decir que los tres campos de prueba usados llevan a límites continuos en la misma clase de universalidad, es decir, la física macroscópica será la misma.

3.2. CDT: El Modelo Matricial

Ahora, llegamos a la parte de este trabajo donde se implementa la estructura causal en el modelo matricial de Triangulaciones Dinámicas, aquí se empieza por considerar la acción para CDT 2-dimensional propuesta en [1],

$$S = \frac{1}{2}Tr(AA^\top) - \frac{g_4^2}{2}Tr(AA^\top CAA^\top C), \quad (3.36)$$

con la condición (2.17), que impone rigidez en la cuadrangulación asociada.

Es importante analizar las simetrías de (3.36), ya que la acción efectiva promedio propuesta para usar la FRGE, (3.2), debe tener también estas simetrías. En particular, se puede ver que la transformación

$$\begin{aligned} A &\rightarrow AO \\ A^\top &\rightarrow O^\top A^\top, \end{aligned} \quad (3.37)$$

es una simetría de la acción, puesto que la combinación AA^\top es invariante. Por lo tanto tiene sentido proponer una acción efectiva que contenga trazas de estos productos, sin embargo, todavía se tiene libertad sobre cómo implementar la matriz C en ésta.

3.3. Modelo No-Simétrico con C^2

Primero se trabajará con un modelo en el que la condición (2.17) se usa fuertemente, en el sentido de que en la acción efectiva promedio propuesta no se usarán términos con más de dos matrices C . En este caso, se propone la siguiente acción efectiva promedio

$$\Gamma_N = \frac{Z}{2} \text{Tr}(AA^\top) + \sum_{n=2}^P \frac{\bar{g}_{2n}}{2n} \text{Tr}((AA^\top C)^2 (AA^\top)^{n-4}), \quad (3.38)$$

en particular, se usará la truncación de orden 6

$$\Gamma_N = \frac{Z}{2} \text{Tr}(AA^\top) + \frac{\bar{g}_4}{4} \text{Tr}(AA^\top C AA^\top C) + \frac{\bar{g}_6}{6} \text{Tr}(AA^\top C AA^\top C AA^\top), \quad (3.39)$$

donde, análogamente a (2.46), las constantes de acoplamiento adimensionales están dadas por

$$\begin{aligned} \bar{g}_4 &= Z^2 N^{\alpha_4} g_4 \\ \bar{g}_6 &= Z^3 N^{\alpha_6} g_6 \end{aligned} \quad (3.40)$$

con $\alpha_4, \alpha_6 \in \mathbb{Z}$, las cuales quedarán determinadas al tomar el límite $N \rightarrow \infty$.

3.3.1. Uso de la Ecuación de Wetterich

Para calcular el lado izquierdo de (3.2), hay que notar que toda la dependencia en N en la acción efectiva está codificada en las constantes de acoplamiento adimensionales (3.40), por lo tanto resulta

$$\begin{aligned} N \partial_N \Gamma_N &= -\eta \frac{Z}{2} \text{Tr}(AA^\top) + \frac{1}{4} Z^2 N^{\alpha_4} (\beta_4 - g_4 (2\eta - \alpha_4)) \text{Tr}(AA^\top C AA^\top C) \\ &\quad + \frac{1}{6} Z^3 N^{\alpha_6} (\beta_6 - g_6 (3\eta - \alpha_6)) \text{Tr}(AA^\top C AA^\top C AA^\top) \end{aligned} \quad (3.41)$$

En el lado derecho de (3.2) se debe derivar la acción efectiva con respecto al campo matricial, A

$$\begin{aligned}
\Gamma_N^{(2)} = & Z\delta^{ac}\delta^{bd} + \bar{g}_4[C^{ac}(A^\top CA)^{db} + (CA)^{ad}(CA)^{cb} + (CAA^\top C)^{ac}\delta^{db}] \\
& + \frac{1}{3}\bar{g}_6[\delta^{ac}(A^\top CAA^\top CA)^{db} + A^{ad}(CAA^\top CA)^{cb} + (AA^\top C)^{ac}(A^\top CA)^{db} + \\
& (AA^\top CA)^{ad}(CA)^{cb} + (AA^\top CAA^\top C)^{ac}\delta^{db} + C^{ac}(A^\top CAA^\top A)^{db} + \\
& (CA)^{ad}(CAA^\top A)^{cb} + (CAA^\top C)^{ac}(A^\top A)^{db} + (CAA^\top CA)^{ad}A^{cb} + \\
& (CAA^\top CAA^\top)^{ac}\delta^{db} + C^{ac}(A^\top AA^\top CA)^{db} + (CA)^{ad}(AA^\top CA)^{cb} + \\
& (CAA^\top)^{ac}(A^\top CA)^{db} + (CAA^\top A)^{ad}(CA)^{cb} + (CAA^\top AA^\top C)^{ac}\delta^{db}].
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Por lo que, si se utiliza el regulador (3.5), se puede usar el método descrito en 3.1, escribiendo

$$\Gamma_N^{(2)} + R_N = G_N + F_N[A], \tag{3.43}$$

donde el término F_N contiene toda la dependencia del campo A , y G_N es el tensor (3.8). Para luego usar la expansión (3.10).

3.3.2. Análisis de Operadores

Como ya se discutió en 3.1, cuando se trabaja con el lado derecho de la ec. de Wetterich, aparecen operadores que originalmente no estaban presentes en la acción efectiva, por lo que vale la pena analizar la estructura de los términos que surgirán al desarrollar la expansión (3.10).

Como ejemplo, sólo en esta sección, se analizará un a truncación con un acoplamiento de orden 8 además de los ya presentes en (3.39), es decir, con un término de la forma

$$\frac{\bar{g}_8}{8}Tr(AA^\top CAA^\top CAA^\top AA^\top). \tag{3.44}$$

Como ya se observó anteriormente, el término F_N puede dividirse en sus contribu-

ciones proporcionales a cada una de las constantes de acoplamiento; a \bar{g}_4 , $F_N^{(4)}$, a \bar{g}_6 , $F_N^{(6)}$, y a \bar{g}_8 , $F_N^{(8)}$. En este caso están dados por

$$F_N^{(4)} = C^{ac}(A^\top CA)^{db} + (CA)^{ad}(CA)^{cb} + (CAA^\top C)^{ac}\delta^{db}, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} F_N^{(6)} = & \delta^{ac}(A^\top CAA^\top CA)^{db} + A^{ad}(CAA^\top CA)^{cb} + (AA^\top C)^{ac}(A^\top CA)^{db} + \\ & (AA^\top CA)^{ad}(CA)^{cb} + (AA^\top CAA^\top C)^{ac}\delta^{db} + C^{ac}(A^\top CAA^\top A)^{db} + \\ & (CA)^{ad}(CAA^\top A)^{cb} + (CAA^\top C)^{ac}(A^\top A)^{db} + (CAA^\top CA)^{ad}A^{cb} + \\ & (CAA^\top CAA^\top)^{ac}\delta^{db} + C^{ac}(A^\top AA^\top CA)^{db} + (CA)^{ad}(AA^\top CA)^{cb} + \\ & (CAA^\top)^{ac}(A^\top CA)^{db} + (CAA^\top A)^{ad}(CA)^{cb} + (CAA^\top AA^\top C)^{ac}\delta^{db}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} F_N^{(8)} = & C^{ac}(A^\top AA^\top CA)^{db} + \delta^{ac}(A^\top AA^\top CAA^\top CA)^{db} \\ & + A^{ad}(AA^\top CAA^\top CA)^{cb} + (CAA^\top)^{ac}(A^\top AA^\top CA)^{db} \\ & + (CAA^\top A)^{ad}(AA^\top CA)^{cb} + (CA)^{ad}(AA^\top AA^\top CA)^{cb} \\ & + (CAA^\top AA^\top)^{ac}(A^\top CA)^{db} + (CAA^\top AA^\top A)^{ad}(CA)^{cb} \\ & + (CAA^\top AA^\top AA^\top C)^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ac}(A^\top CAA^\top CAA^\top A)^{db} \\ & + A^{ad}(CAA^\top CAA^\top A)^{cb} + (AA^\top C)^{ac}(A^\top CAA^\top A)^{db} \\ & + (AA^\top CA)^{ad}(CAA^\top A)^{cb} + (AA^\top CAA^\top C)^{ac}(AA^\top)^{db} \\ & + (AA^\top CAA^\top CA)^{ad}A^{cb} + (AA^\top CAA^\top CAA^\top)^{ac}\delta^{bd} \\ & + (AA^\top)^{ac}(A^\top CAA^\top CA)^{db} + (AA^\top A)^{ad}(CAA^\top CA)^{cb} \\ & + (AA^\top AA^\top C)^{ac}(A^\top CA)^{db} + (AA^\top AA^\top CA)^{ad}(CA)^{cb} \\ & + (AA^\top AA^\top CAA^\top C)^{ac}\delta^{bd} + C^{ac}(A^\top CAA^\top AA^\top A)^{db} \\ & + (CA)^{ad}(CAA^\top AA^\top A)^{cb} + (CAA^\top A)^{ac}(A^\top AA^\top A)^{db} \\ & + (CAA^\top CA)^{ad}(AA^\top A)^{cb} + (CAA^\top CAA^\top)^{ac}(A^\top A)^{db} \\ & + (CAA^\top CAA^\top A)^{ad}A^{cb} + (CAA^\top CAA^\top AA^\top)^{ac}\delta^{bd}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

De manera que las trazas de productos de (3.45), (3.46) y (3.47), efectivamente, darán lugar a una gran variedad de operadores que no están presentes en la acción efectiva promedio propuesta, (3.39), tales como $(Tr(CA))^2$, $Tr(CAA^\top C^2)Tr(A^\top CA)$, etc. Por lo que hay que encontrar los operadores que contribuyen a las funciones beta que nos interesan.

En las siguientes expresiones los términos en una caja son los que contribuyen estrictamente a las funciones beta que estamos buscando, los términos restantes contribuyen a las mismas funciones beta en el sentido de que los correspondientes diagramas conectados de Feynman tienen el número de patas externas requeridas (es decir, el número de matrices A correcto), pero no el número de matrices C correspondientes a los operadores originales (3.39), tal como $Tr(A^\top CA)$.

$$Tr\left(F_N^{(4)}\right) = C^{aa}(A^\top CA)^{bb} + (CAA^\top C)^{aa}\delta^{db} \quad (3.48)$$

$$Tr\left(F_N^{(6)}\right) = \boxed{\delta^{aa}(AA^\top CAA^\top C)^{bb}} + \boxed{3(AA^\top CAA^\top C)^{aa}\delta^{bb}} \\ + 2C^{aa}(A^\top CAA^\top A)^{bb} \quad (3.49)$$

$$Tr\left(F_N^{(8)}\right) = 2C^{aa}(A^\top AA^\top AA^\top CA)^{bb} + \boxed{4(CAA^\top AA^\top AA^\top C)^{aa}\delta^{bb}} \\ + \boxed{2\delta^{aa}(A^\top CAA^\top CAA^\top A)^{bb}} \quad (3.50)$$

$$Tr\left(F_N^{(4)}F_N^{(4)}\right) = \boxed{C^{ac}C^{ca}(A^\top CA)^{db}(A^\top CA)^{bd}} \\ + (CAA^\top C)^{ac}(CAA^\top C)^{ca}\delta^{bd}\delta^{db} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}
Tr \left(F_N^{(4)} F_N^{(6)} \right) &= \boxed{2C^{ac}C^{ca}(A^\top CA)^{db}(A^\top AA^\top CA)^{bd}} \\
&+ 3(CAA^\top C)^{ac}(AA^\top CAA^\top C)^{ca} \delta^{bd} \delta^{db} \\
&+ C^{aa}(A^\top CA)^{db}(A^\top CAA^\top CA)^{bd}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
Tr \left(F_N^{(4)} F_N^{(8)} \right) &= 4(CAA^\top C)^{ac}(CAA^\top CAA^\top AA^\top)^{ca} \delta^{bd} \delta^{db} + \\
&+ 2C^{aa}(A^\top CA)^{db}(A^\top AA^\top CAA^\top CA)^{bd} \\
&+ \boxed{2C^{ac}C^{ca}(A^\top CA)^{db}(A^\top AA^\top AA^\top CA)^{bd}}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
Tr \left(F_N^{(6)} F_N^{(6)} \right) &= \boxed{4C^{ac}C^{ca}(A^\top CAA^\top A)^{db}(A^\top AA^\top CA)^{bd}} \\
&+ 9(CAA^\top AA^\top C)^{ac}(AA^\top CAA^\top C)^{ca} \delta^{bd} \delta^{db} \\
&+ \delta^{ac} \delta^{ca} (A^\top CAA^\top CA)^{db} (A^\top CAA^\top CA)^{bd}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
Tr \left(F_N^{(4)} F_N^{(4)} F_N^{(4)} \right) &= C^{ac}C^{ce}C^{ea}(A^\top CA)^{db}(A^\top CA)^{fd}(A^\top CA)^{fb} \\
&+ (CAA^\top C)^{ac}(CAA^\top C)^{ce}(CAA^\top C)^{ea} \delta^{bd} \delta^{df} \delta^{fb}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
Tr \left(F_N^{(4)} F_N^{(4)} F_N^{(6)} \right) &= C^{ac}C^{ce} \delta^{ea} (A^\top CA)^{db} (A^\top CA)^{fd} (A^\top CAA^\top CA)^{fb} \\
&+ 2C^{ac}C^{ce}C^{ea} (A^\top CA)^{db} (A^\top CA)^{fd} (A^\top CAA^\top A)^{fb} \\
&+ 3(CAA^\top C)^{ac}(CAA^\top C)^{ce}(CAA^\top AA^\top C)^{ea} \delta^{bd} \delta^{df} \delta^{fb}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

3.3.3. Forma general de las funciones beta

Tomando en cuenta sólo los términos en caja obtenidos en 3.3.2, se puede visualizar la estructura de las funciones beta “formales” de este modelo, es decir, las que

sólo consideran las contribuciones de los operadores originalmente propuestos en la acción (3.39)

- $\eta \sim 0$,
- $\beta_4 \sim g_4 + g_6 + g_4^2$,
- $\beta_6 \sim g_6 + g_8 + g_4 g_6$,
- $\beta_8 \sim g_8 + g_{10} + g_4 g_8 + g_6^2$.

Donde se puede ver que sólo contribuirán términos lineales y cuadráticos en las constantes de acoplamiento, lo cual significa que las funciones beta de este modelo sólo tienen contribuciones de diagramas de uno y dos vértices.

Y, más aún, con este análisis se puede inducir la estructura general de las funciones beta para una truncación arbitraria de (3.38), las cuales están dadas por

- $$\eta = 0, \tag{3.57}$$

- si i es impar
$$\beta_{2i} = (i\eta - \alpha_{2i})g_{2i} + A_i g_{2(i+1)} + B_i g_{2i} g_4, \tag{3.58}$$

- si i es par
$$\beta_{2i} = (i\eta - \alpha_{2i})g_{2i} + A_i g_{2(i+1)} + B_i g_{2i} g_4 + C_i g_{(i+2)}^2. \tag{3.59}$$

Ésta es la primera diferencia encontrada entre el modelo causal y el euclidiano, la estructura de sus funciones beta. En el caso no causal se pueden tener contribuciones de cualquier orden en las constantes de acoplamiento, mientras que en el caso causal las contribuciones se restringen a términos de primer y segundo orden.

Ahora, para continuar analizando cómo afecta la presencia de la matriz C en este modelo, se usa el campo de prueba

$$A_{ab} = \delta_{ab}\theta(N - a), \quad (3.60)$$

y se calculan las funciones beta haciendo uso de los términos obtenidos en 3.3.2, la truncación de orden 6, (3.39) y una forma arbitraria para C . Por lo tanto, los términos F toman la forma

$$F_N^{(4)} = C^{ac}C^{db} + C^{ad}C^{cb} + C^{2ac}\delta^{db}, \quad (3.61)$$

$$F_N^{(6)} = \frac{1}{3} \left(4C^{2ac}\delta^{db} + 4C^{ad}C^{cb} + 4C^{ac}C^{db} + \delta^{ac}C^{2db} + \delta^{ad}C^{2cb} + \delta^{cb}C^{2ad} \right). \quad (3.62)$$

Y ahora, usando la expansión mostrada en (3.7), se puede calcular el lado izquierdo de la ec. de Wetterich, término por término.

$\text{Tr}(\dot{R}PFP)$

Contribuciones a β_4

$$\frac{1}{3}\bar{g}_6 \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^{N-a} [\dot{R}P^2] \left(\delta^{aa}C^{2bb} + 3C^{2aa}\delta^{bb} \right) \quad (3.63)$$

con

$$[\dot{R}P^2] = \left(Z \frac{N}{a+b} + \eta Z \left(1 - \frac{N}{a+b} \right) \right) \left(\frac{a+b}{NZ} \right)^2 \quad (3.64)$$

$\text{Tr}(\dot{R}PFPFP)$

Contribuciones a β_4

$$\bar{g}_4^2 \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^{N-a} \sum_{c=1}^N \sum_{d=1}^{N-c} [\dot{R}P^3] (C^{ac}C^{db}C^{ca}C^{bd}) \quad (3.65)$$

con

$$[\dot{R}P^3] = \left(Z \frac{N}{a+b} + \eta Z \left(1 - \frac{N}{a+b} \right) \right) \left(\frac{a+b}{NZ} \right)^2 \left(\frac{c+d}{NZ} \right) \quad (3.66)$$

Contribuciones a β_6

$$\frac{1}{3} \bar{g}_6 \bar{g}_4 \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^{N-a} \sum_{c=1}^N \sum_{d=1}^{N-c} [\dot{R}P^3] (2C^{ac}C^{ca}C^{db}C^{bd}) \quad (3.67)$$

Como se ve en estas expresiones, el uso de la ec. de Wetterich para obtener resultados numéricos requiere de una forma explícita para la matriz C , ya que hay que calcular trazas de C^2 modificadas por el regulador R .

3.3.4. Una forma explícita para C

Hasta ahora sólo se han obtenido expresiones generales que quedan en términos de C , y es que se ha usado una forma explícita para el campo matricial A , y una forma arbitraria para la matriz de rigidez de la cuadrangulación. Esto es debido a que, como ya se mencionó, encontrar una forma explícita para C , que satisfaga la condición (2.17), no es posible para N arbitraria. Sin embargo, podemos ocupar una matriz formada por las matrices mencionadas en 2.4.1, que satisfaga una condición deformada. En este trabajo se usa la matriz

$$C_{ab} = (-1)^a \delta_{ab}, \quad (3.68)$$

que satisface la condición

$$Tr(C^n) = 2M\delta_{2m,n}. \quad (3.69)$$

Donde M actúa como la escala de renormalización, dada por $N = 2M$, de forma que el límite $N \rightarrow \infty$ corresponde al límite $M \rightarrow \infty$.

Usando (3.68), los términos F , (3.45) y (3.46), quedan como

$$F_N^{(4)} = (-1)^{a+e}\delta^{ac}A^{\top de}A^{eb} + (-1)^{a+c}A^{ad}A^{cb} + (-1)^{a+c}(AA^{\top})^{ac}\delta^{db} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} F_N^{(6)} = & (-1)^{a+e}\delta^{ac}A^{\top de}(AA^{\top})^{eg}A^{gb} + (-1)^{a+c}A^{ad}(AA^{\top})^{ce}A^{eb} + \\ & (-1)^{a+c}(AA^{\top})^{ac}A^{\top de}A^{eb} + (-1)^{a+e}(AA^{\top})^{ae}A^{ed}A^{cb} + \\ & (-1)^{a+e}(AA^{\top})^{ae}(AA^{\top})^{ec}\delta^{db} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Ahora, se puede observar que, ya que la presencia de la matriz C dada por (3.68) en estos operadores, sólo agrega factores de $(-1)^j$, dejando el número de patas externas de los diagramas correspondientes invariantes, por lo que el uso de todos los términos en 3.3.2 está justificada.

Así que las funciones beta correspondientes no tendrán la forma obtenida en 3.3.3, sino que también tendrán contribuciones de vértices de orden mayor. Esto se puede ver explícitamente usando un ansatz para A y calculando, como se hará a continuación.

Tal como ya se mostró, usando el ansatz (3.22), se pueden calcular, orden a orden, los términos de la ec. de Wetterich, estos cálculos se muestran en el Apéndice C. Las funciones beta resultantes son

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{4g_4}{12 + g_4}, \\
\beta_4 &= g_4(1 + 2\eta) - \frac{1}{5}g_4^2(\eta - 5) + \frac{2}{9}g_6(\eta - 4), \\
\beta_6 &= g_6(2 + 3\eta) + \frac{1}{10}g_4^3(\eta - 6) - \frac{1}{2}g_4g_6(\eta - 5),
\end{aligned} \tag{3.72}$$

sistema que presenta un punto fijo no trivial en

$$g_4^* = -0.435, \quad g_6^* = -0.118, \tag{3.73}$$

con exponentes críticos

$$\theta = 1.033, \quad \theta' = -0.928, \tag{3.74}$$

con el escalamiento $\alpha_4 = -1, \alpha_6 = -2$ para las constantes de acoplamiento en (3.40).

Ya que uno de los objetivos de este trabajo es comparar los resultados en los modelos causal y no-causal, se usan también en el caso causal los ansatz mostrados en la sección 3.1.

A continuación se hace uso del ansatz (3.28), esta elección afecta el lado de de (3.2) sólo con la aparición de polinomios de N , como resultado de las trazas sobre A y C .

Por otro lado, los términos F se ven afectados de la siguiente manera

$$F_N^{(4)} = (b^2)C^{ac}C^{db} + (ab)C^{ad}C^{cb} + (a^2)C^{2ac}\delta^{db}, \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
F_N^{(6)} &= (b^4)\delta^{ac}C^{2db} + (ab^3)\delta^{ad}C^{2cb} + (a^3b)\delta^{cb}C^{2ad} + (2a^3b + 2ab^3)C^{ad}C^{cb} \\
&\quad + (3a^4 + a^2b^2)C^{2ac}\delta^{db} + (2a^2b^2 + 2b^4)C^{ac}C^{db},
\end{aligned} \tag{3.76}$$

para una forma arbitraria de C . Se puede ver que la estructura de índices es la misma forma que al usar el ansatz (3.22). Las expresiones sólo se ven afectadas por polinomios en los índices, así que podemos esperar un comportamiento similar de las trazas del lado derecho de (3.2) y, por lo tanto, una estructura similar de las funciones beta, las cuales se presentan a continuación

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{6g_4}{30 + g_4}, \\ \beta_4 &= g_4(1 + 2\eta) - \frac{1}{18}g_4^2(\eta - 9) + \frac{1}{21}g_6(\eta - 8), \\ \beta_6 &= g_6(2 + 3\eta) + \frac{1}{44}g_4^3(\eta - 12) - \frac{1}{11}g_4g_6(\eta - 11),\end{aligned}\tag{3.77}$$

sistema que presenta un punto fijo no trivial en

$$g_4^* = -0.902, \quad g_6^* = -0.387,\tag{3.78}$$

con exponentes críticos

$$\theta = 1.024, \quad \theta' = -0.858,\tag{3.79}$$

con el escalamiento $\alpha_4 = -1$, $\alpha_6 = -2$ para las constantes de acoplamiento en (3.40).

Ahora, usando el ansatz (3.32) las funciones beta resultantes son

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{3g_4}{6 + g_4}, \\ \beta_4 &= g_4(1 + 2\eta) - \frac{1}{3}g_4^2(\eta - 4) + \frac{4}{9}g_6(\eta - 3), \\ \beta_6 &= g_6(2 + 3\eta) + \frac{3}{20}g_4^3(\eta - 5) - \frac{1}{2}g_4g_6(\eta - 4),\end{aligned}\tag{3.80}$$

sistema que presenta un punto fijo no trivial en

$$g_4^* = -0.339, \quad g_6^* = -0.040, \quad (3.81)$$

con exponentes críticos

$$\theta = 1.052, \quad \theta' = -1.086, \quad (3.82)$$

con el escalamiento $\alpha_4 = -1, \alpha_6 = -2$ para las constantes de acoplamiento en (3.40).

Como se puede ver, usando la matriz C dada por (3.68) y los ansatz (3.22), (3.28) y (3.32) se obtiene un punto fijo no-gaussiano con una dirección relevante y una irrelevante tal como en [2], además del mismo escalamiento de las constantes de acoplamiento adimensionales .

Así mismo, estos cálculos se realizaron usando la matriz C formada por bloques de tamaño 4×4 en (2.30), dada por

$$C_{jj} = \begin{cases} 1.09(-1)^k - 0.45i & \text{si } j = 2k - 1 \\ 1.09(-1)^k + 0.45i & \text{si } j = 2k \end{cases} \quad (3.83)$$

que satisface la condición

$$Tr(C^n) = 4M\delta_{m,n}. \quad (3.84)$$

Donde $m = 2, 6, 8, 10, 14, 16, 18, 22, \dots$, M actúa como la escala de renormalización, dada por $N = 4M$, de forma que el límite $N \rightarrow \infty$ corresponde al límite $M \rightarrow \infty$.

Los cálculos se hacen usando el ansatz (3.22), y estos se muestran en el Apéndice D. El sistema resultante presenta un punto fijo no trivial en

$$g_4^* = -0.300, \quad g_6^* = -0.093, \quad (3.85)$$

con exponentes críticos

$$\theta = 1.008, \quad \theta' = -1.215, \quad (3.86)$$

con el escalamiento $\alpha_4 = -1, \alpha_6 = -2$ para las constantes de acoplamiento en (3.40).

3.4. Modelo No-Simétrico con C^n

Como ya se mencionó, el espacio de teorías donde puede vivir la acción efectiva promedio está dado por operadores que sean invariantes ante (3.37), lo que requiere que el campo matricial siempre aparezca en la combinación AA^\top , sin embargo el número de matrices C no queda fijado, por lo que ahora se trabajará con una acción que contenga más de dos de estas matrices, para analizar su límite continuo.

Considere una acción efectiva promedio de la siguiente forma

$$\Gamma_N = \frac{Z}{2} Tr(AA^\top) + \sum_{n=2}^P \frac{\bar{g}_{2n}}{2n} Tr((AA^\top C)^n). \quad (3.87)$$

De nuevo, se trabajará con la truncación de orden 6, por lo que se usa

$$\Gamma_N = \frac{Z}{2} Tr(AA^\top) + \frac{\bar{g}_4}{4} Tr(AA^\top CAA^\top C) + \frac{\bar{g}_6}{6} Tr(AA^\top CAA^\top CAA^\top C), \quad (3.88)$$

con las constantes de acoplamiento adimensionales dadas en (3.40).

3.4.1. Uso de la Ecuación de Wetterich

De manera análoga a lo hecho en el caso anterior, se puede escribir (3.88) en términos de las constantes de acoplamiento adimensionales y derivar con respecto a N , por lo que el lado izquierdo de (3.2) toma la forma

$$\begin{aligned}
N\partial_N\Gamma_N = & -\eta\frac{Z}{2}Tr(AA^\top) + \frac{1}{4}Z^2N^{\alpha_4}(\beta_4 - g_4(2\eta - \alpha_4))Tr(AA^\top CAA^\top C) \\
& + \frac{1}{6}Z^3N^{\alpha_6}(\beta_6 - g_6(3\eta - \alpha_6))Tr(AA^\top CAA^\top CAA^\top C)
\end{aligned} \tag{3.89}$$

En el caso del lado derecho de (3.2), el término $F_N^{(4)}$ tiene la misma forma que (3.45), pero el término $F_N^{(6)}$ tiene una forma diferente, ya que el acoplamiento de orden 6 en (3.88) es distinto al tratado anteriormente y adquiere la forma

$$\begin{aligned}
\Gamma_N^{(2)} = & Z\delta^{ac}\delta^{bd} + \bar{g}_4[C^{ac}(A^\top CA)^{db} + (CA)^{ad}(CA)^{cb} + (CAA^\top C)^{ac}\delta^{db}] \\
& + \bar{g}_6[C^{ac}(A^\top CAA^\top CA)^{db} + (CA)^{ad}(CAA^\top CA)^{cb} + (CAA^\top C)^{ac}(A^\top CA)^{db} \\
& + (CAA^\top CA)^{ad}(CA)^{cb} + (CAA^\top CAA^\top C)^{ac}\delta^{db}].
\end{aligned} \tag{3.90}$$

3.4.2. Análisis de Operadores

Como ya se discutió anteriormente, es importante analizar la estructura de los operadores resultantes en (3.10), ya que, usualmente, aparecerán términos distintos a los presentes en la acción inicial, que no contribuirán a las funciones beta que nos interesan.

Con la acción propuesta, (3.88), los términos F en (3.7) tienen la forma

$$F_N^{(4)} = C^{ac}(A^\top CA)^{db} + (CA)^{ad}(CA)^{cb} + (CAA^\top C)^{ac}\delta^{db}, \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned}
F_N^{(6)} = & C^{ac}(A^\top CAA^\top CA)^{db} + (CA)^{ad}(CAA^\top CA)^{cb} + (CAA^\top C)^{ac}(A^\top CA)^{db} \\
& + (CAA^\top CA)^{ad}(CA)^{cb} + (CAA^\top CAA^\top C)^{ac}\delta^{db},
\end{aligned} \tag{3.92}$$

En las expresiones siguientes, los términos en una caja corresponden a los que formalmente contribuyen a las funciones beta que se buscan, mientras que los restantes contribuyen en el sentido descrito en 3.3.2.

$$Tr \left(F_N^{(4)} \right) = C^{aa} (A^\top C A)^{bb} + (C A A^\top C)^{aa} \delta^{db} \quad (3.93)$$

$$Tr \left(F_N^{(6)} \right) = \boxed{C^{aa} (A^\top C A A^\top C A)^{bb}} + (C A A^\top C A A^\top C)^{aa} \delta^{bb} \quad (3.94)$$

$$Tr \left(F_N^{(4)} F_N^{(4)} \right) = \boxed{C^{ac} C^{ca} (A^\top C A)^{db} (A^\top C A)^{bd}} \\ + (C A A^\top C)^{ac} (C A A^\top C)^{ca} \delta^{bd} \delta^{db} \quad (3.95)$$

$$Tr \left(F_N^{(4)} F_N^{(6)} \right) = \boxed{C^{ac} C^{ca} (A^\top C A)^{db} (A^\top C A A^\top C A)^{bd}} \\ + (C A A^\top C)^{ac} (C A A^\top C A A^\top C)^{ca} \delta^{bd} \delta^{db} \quad (3.96)$$

$$Tr \left(F_N^{(4)} F_N^{(4)} F_N^{(4)} \right) = \boxed{C^{ac} C^{ce} C^{ea} (A^\top C A)^{db} (A^\top C A)^{fd} (A^\top C A)^{bf}} \\ + (C A A^\top C)^{ac} (C A A^\top C)^{ce} (C A A^\top C)^{ea} \delta^{bd} \delta^{df} \delta^{fb} \quad (3.97)$$

3.4.3. Forma general de las funciones beta

Por lo tanto, podemos ver que las funciones beta “formales” tendrán una estructura distinta a las encontradas en 3.3.3, ya que, en este caso, hay contribuciones de diagramas de vértices de 3 patas, aún sin que C tome una forma particular, como se puede ver en (3.97).

Ahora se da una forma explícita a la matriz A , (3.22), para analizar cómo afecta sólo la estructura de C . Para esto, primero se escriben los términos F correspondientes,

para $F_N^{(6)}$ se obtiene

$$F_N^{(6)} = C^{ac}C^{2db} + C^{ad}C^{2cb} + C^{2ac}C^{db} + C^{2ad}C^{cb} + C^{3ac}\delta^{db}, \quad (3.98)$$

mientras que $F_N^{(4)}$ está dado en (3.61). Por lo que, siguiendo el procedimiento expuesto en 3.3.3, se pueden calcular las funciones beta del sistema.

Hasta aquí, se puede notar que una primera característica de este modelo es que, al ocupar el ansatz (3.22), el término $\text{Tr}((AA^\top C)^3) = 0$, esto debido a la condición (2.17), por lo que no se puede obtener una función β_6 con la expansión (3.10).

$\text{Tr}(\dot{R}PFP)$

Contribuciones a η Como se puede ver en 3.4.2, no hay contribuciones a η .

Contribuciones a β_4

$$\bar{g}_6 \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^{N-a} [\dot{R}P^2][C^{aa}C^{2bb} + C^{3aa}\delta^{bb}] \quad (3.99)$$

$\text{Tr}(\dot{R}PFPFP)$

En este caso, el único término que contribuye es el proporcional a g_4^2 y, como $F_N^{(4)}$ no cambia, tampoco lo hace éste.

Por lo tanto, las funciones beta obtenidas tienen la forma

$$\beta_4 = (2\eta - \alpha_4)g_4 + D_2g_6 + E_2g_4^2, \quad (3.100)$$

$$\beta_6 = (3\eta - \alpha_i)g_6 + E_3g_4g_6 + F_3g_4^3 = 0, \quad (3.101)$$

por lo que, usando la ec. (3.101) se puede despejar g_6 y ponerla en función de g_4 , para luego sustituir en (3.100) y obtener el valor del punto fijo de la teoría (si es que existe).

3.4.4. Una forma explícita para C

Una vez más, se usa la forma explícita de la matriz C dada en (3.68), que satisface la condición deformada (3.69) con el objetivo de obtener una forma concreta de las funciones beta del modelo. De manera que $F_N^{(4)}$ está dado por (3.70) y $F_N^{(6)}$ tiene la forma siguiente

$$\begin{aligned} F_N^{(6)} = & (-1)^{a+e+g} \delta^{ac} A^{\top de} (AA^{\top})^{eg} A^{gb} + (-1)^{a+c+e} A^{ad} (AA^{\top})^{ce} A^{eb} + \\ & (-1)^{a+c+e} (AA^{\top})^{ac} A^{\top de} A^{eb} + (-1)^{a+c+e} (AA^{\top})^{ae} A^{ed} A^{cb} + \\ & (-1)^{a+c+e} (AA^{\top})^{ae} (AA^{\top})^{ec} \delta^{db}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Se puede notar, de nuevo, que la presencia de la matriz C en los términos F sólo agrega factores de $(-1)^j$, sin afectar el número de patas externas en los diagramas de Feynman correspondientes, por lo que está justificado el tomar en cuenta todos los términos en 3.4.2.

A continuación se usarán los campos de prueba (3.22) y (3.28) para obtener funciones beta explícitas y resultados numéricos para el punto fijo y exponentes críticos.

Usando el ansatz (3.22), las funciones beta resultantes son

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{4g_4}{12 + g_4}, \\ \beta_4 &= g_4(1 + 2\eta) - \frac{1}{5}g_4^2(\eta - 5) - \frac{1}{3}g_6(\eta - 3), \\ g_6 &= -\frac{2g_4^2(\eta - 6)}{5(\eta - 4)}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

sistema que presenta un punto fijo no trivial en

$$g_4^* = -0.881, \quad g_6^* = -0.453, \quad (3.104)$$

con exponentes críticos

$$\theta = 1.066, \quad (3.105)$$

con el escalamiento $\alpha_4 = -1, \alpha_6 = -1$ para las constantes de acoplamiento en (3.40).

En este caso sólo se puede obtener información sobre el flujo de renormalización para g_4 ya que $\beta_6 = 0$ en este caso, lo que permite únicamente encontrar el valor de g_6^* en términos de g_4^* . En cuanto a g_4 , se encuentra un valor del punto crítico cercano a los que se obtuvieron anteriormente, y una dirección relevante lo que es consistente con los los modelos matriciales de EDT, sin embargo, no se puede obtener información sobre el exponente crítico en la otra dirección del subespacio de teorías, por lo que no se sabe si es una dirección relevante o irrelevante.

Usando ahora el ansatz para A propuesto en (3.28), las funciones beta resultantes son las siguientes

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{6g_4}{30 + g_4}, \\ \beta_4 &= g_4(1 + 2\eta) - \frac{1}{18}g_4^2(\eta - 9) - \frac{5}{42}g_6(\eta - 7), \\ \beta_6 &= g_6(1 + 3\eta) + \frac{1}{154}g_4^3(\eta - 12), \end{aligned} \quad (3.106)$$

sistema que presenta un punto fijo no trivial en

$$g_4^* = -1.199 \pm 0.315i, \quad g_6^* = -0.051 \pm 0.463i, \quad (3.107)$$

con exponentes críticos

$$\theta = 1.002 \mp 0.299i, \quad \theta' = 0.006 \mp 0.523i, \quad (3.108)$$

con el escalamiento $\alpha_4 = -1, \alpha_6 = -1$ para las constantes de acoplamiento en (3.40).

Primero hay que notar que al usar el ansatz (3.28), sí se puede obtener información sobre el flujo de renormalización en el subespacio completo de acoplamientos g_4, g_6 . Por lo que se obtiene el valor del punto fijo y ambos exponentes críticos (puesto que sus valores son complejos y el flujo es real tenemos también el complejo conjugado).

Sin embargo, se puede observar que la parte real de ambos exponentes críticos es positiva, lo que nos dice que ambas direcciones son relevantes, lo que, traduciendo al lenguaje de triangulaciones dinámicas, nos diría que necesitamos más acoplamientos en la acción de Regge (2.6) en 2-dimensiones para alcanzar un punto fijo no-gaussiano.

Esto ya se podía sospechar al observar que en este modelo las constantes de acoplamiento, g_4 y g_6 , escalan con N de la misma manera, por lo que en el límite $N \rightarrow \infty$ ambas mantienen la misma relevancia en el modelo. Esto es algo que no sucede en el modelo no-causal [2], ni en los resultados obtenidos en 3.3.

Capítulo 4

Conclusiones

4.1. Resultados

Los resultados obtenidos hasta ahora en las secciones 3.1 y 3.3 se muestran en las siguientes tablas.

	δ		δ -mod.		δ -IR	
	Causal	Euclidiano	Causal	Euclidiano	Causal	Euclidiano
g_4^*	-0.435	-0.288	-0.902	-0.588	-0.339	-0.202
g_6^*	-0.118	-0.061	-0.387	-0.208	-0.040	-0.026

Cuadro 4.1: Comparación de puntos críticos obtenidos

	δ		δ -mod.		δ -IR	
	Causal	Euclidiano	Causal	Euclidiano	Causal	Euclidiano
θ	1.033	1.046	1.024	1.033	1.052	1.065
θ'	-0.928	-1.080	-0.858	-0.959	-1.086	-1.050

Cuadro 4.2: Comparación de exponentes críticos obtenidos

Lo primero que hay que decir es que en todos los casos analizados se obtuvo un flujo de renormalización no-trivial (al menos en una dirección) y un punto fijo no-gaussiano, estructura que se espera en un modelo matricial de Gravedad Cuántica.

Lo que se puede observar en las tablas 4.1 y 4.2 es que los valores del punto crítico difieren alrededor del 60% entre los resultados del modelo causal y euclidiano. Sin

embargo, todos los resultados conservan la misma estructura: tanto g_4^* como g_6^* tienen signo negativo y el valor absoluto de g_6^* es considerablemente más pequeño que el de g_4^* , lo que nos dice que el acoplamiento más importante cerca del punto fijo en magnitud será g_4 .

En cuanto a los exponentes críticos, se puede ver que difieren alrededor de 1% entre los resultados del modelo causal y euclidiano, además, y lo más importante, en todos los casos hay una dirección relevante (correspondiente a un exponente crítico positivo) y una irrelevante (correspondiente a un exponente crítico negativo), resultado deseable en un modelo matricial de Gravedad Cuántica.

También se pueden comparar los resultados obtenidos con cada ansatz, tanto en los casos causal como euclidiano. En el caso euclidiano, podemos ver que los valores del punto fijo difieren entre 40 – 105%, mientras que en el caso causal, el valor del punto crítico difiere entre 20 – 170%. Esto no es inconsistente ya que la FRGE no predice valores universales para las constantes de acoplamiento, sólo para sus razones adimensionales.

Para el exponente crítico relevante en el caso no-causal se puede observar que los valores difieren menos del 4%, mientras que en el caso causal el valor del exponente crítico relevante difiere menos del 3%; por lo que estos resultados no difieren de manera importante mientras se usen cualquiera de estos tres campos de prueba.

Por lo que, tanto en el modelo euclidiano como en el modelo causal que se trabajó en 3.3, los valores del punto crítico parecen depender fuertemente del ansatz que se usa, mientras que los valores de los punto críticos no.

Ahora, en el caso de modelos matriciales de EDT 2-dimensional, se han obtenido resultados exactos, por lo que se conoce el valor del exponente crítico relevante [29], $\theta_E = \frac{4}{5}$; mientras que en CDT también se conoce el valor de este exponente [19] en el caso 2-dimensional, $\theta_C = \frac{4}{3}$. Por lo que podemos comparar estos con los resultados obtenidos en este trabajo para analizar si este modelo, con la acción (3.39) y la

elección de matriz C (3.68), tienen un límite continuo más parecido a CDT o a modelos matriciales de EDT.

Haciendo este análisis se obtiene que hay una diferencia promedio del 0,29 entre los exponentes críticos obtenidos aquí y el de CDT, y una de 0,24 con respecto al exponente crítico de modelos matriciales de EDT en 2-dimensiones. Por lo tanto, con la precisión de las truncaciones usadas no podemos aún distinguir si el modelo descrito aquí (con las elecciones que se hicieron sobre las matrices A y C) está en la clase de universalidad de EDT o de CDT.

Más aún, en [47] se estudió un modelo matricial con dos tipos de matrices para representar lados tipo-espacio y tipo-tiempo en la triangulación, por lo que buscaba implementar causalidad en ella, sin embargo, en vez de usar una matriz C para imponer restricciones sobre la triangulación, usaron un factor de Boltzmann, $e^{-\beta}$, para suprimir las configuraciones no causales. En este caso se obtuvo un exponente crítico $\theta_B = \frac{6}{7}$, por lo que los exponentes críticos causales calculados en este trabajo difieren de éste 0,18 en promedio. Así que tal vez haya una interpretación más cercana a la del modelo en [47] que a CDT.

En cuanto a la estructura del modelo matricial de Triangulaciones Dinámicas que implementa causalidad propuesto en [1] y estudiado en este trabajo, se puede decir que sólo con la condición sobre la traza de C , (2.17), se puede hacer el análisis de operadores que induce el uso de la ec. de Wetterich, para llegar a una estructura general de las funciones beta “formales” como se mostró en 3.90, donde se vio que dichas funciones sólo tienen contribuciones de términos lineales y cuadráticos en las constantes de acoplamiento, sin importar la truncación o el orden al que se desarrolle el análisis, mientras que en el caso euclidiano no hay esta restricción.

Sin embargo, al momento de elegir una forma explícita y constante para C con una condición deformada sobre su traza, la estructura de las funciones beta también se deforma, dando lugar a contribuciones de términos de orden mayor a dos, y por lo tanto afectando el flujo de renormalización.

Finalmente se puede decir que aunque el modelo descrito por la acción (3.36) con la condición (2.17) efectivamente implementa causalidad en la triangulación, para pasar al límite continuo usando la ec. de Wetterich tuvimos que usar un ansatz para C que deformó en gran medida la condición original sobre su traza. De hecho, Benedetti y Henson mencionan algo relacionado en [1], conjeturando que si dicha condición sobre la traza se deforma, el modelo colapsaría a un modelo en la misma clase de universalidad de EDT.

4.2. Trabajo futuro

En cuanto al trabajo futuro que sugiere esta tesis está, primero, el hacer este mismo análisis usando otra elección para la matriz C , en particular, en este trabajo se usaron una matriz de tamaño $2M$ que incorpora M copias de la matriz (2.29), $\text{diag}(-1, 1)$ y una matriz de tamaño $4M$ que incorpora M copias de la matriz (2.30). Ya que, también se tiene la expresión numérica del caso $N = 6$, se puede trabajar con una matriz de rigidez de tamaño $6M$ con M copias de la matriz (2.31). Ya que esto implementará una condición menos débil sobre la traza de C que la que se usó en este trabajo, se espera que la cuadrangulación se mantenga más rígida y, por lo tanto, el límite continuo se parezca más a Triangulaciones Dinámicas Causales.

Además, la comparación de este futuro cálculo con el aquí hecho también sería interesante en el sentido de que, en este modelo matricial, la matriz C codifica la estructura causal y podemos elegir una forma de ella en particular; mientras que en el CDT, lo que permite hablar de una estructura de causalidad es que se elige una foliación preferencial (ver fig. 2.1), en el trabajo desarrollado en [48] se busca debilitar este punto, de manera que la no haya que escoger una foliación particular. De manera que sería interesante comparar las ideas y resultados de este trabajo con los cálculos hechos con distintas elecciones para la matriz C .

En cuanto a las ideas que surgieron a partir del estudio aquí presentado, podemos

ver que otra forma interesante de escribir la acción (2.22) es

$$S^{CDT} = \frac{1}{2} (A_{ab}A_{ba}^\top) - \frac{g^2}{2} (A_{ab}(A^\top C)_{bd}A_{de}(A^\top C)_{ea}), \quad (4.1)$$

que representa una acción con un término de interacción entre dos campos distintos, A y $A^\top C$, o también podemos escribir

$$S^{CDT} = \frac{1}{2} (A_{ab}A_{ba}^\top) - \frac{g^2}{2} (A_{\bar{a}b}A_{b\bar{c}}^\top A_{\bar{c}d}A_{d\bar{a}}^\top), \quad (4.2)$$

donde los índices con barra indican que hay una contracción con la matriz C , que representa una cuadrangulación con cuadrados anisotrópicos y rigidez (relacionada con la condición (2.17)).

La primera es una acción más parecida al modelo desarrollado en [47] donde se usan dos tipos de matrices y un factor de Boltzmann, por lo que sería interesante explorar a fondo la relación entre estos dos modelos.

La segunda es una acción donde la estructura que impone C queda codificada (esquemáticamente) en uno de los índices del campo matricial, por lo que se tienen los campo A_{ab} y $A_{a\bar{b}}$, donde este último presenta dos índices distintos que solo se pueden contraer sobre la misma clase, lo que puede llevar a ideas de modelos tensoriales de gravedad cuántica [49] donde los índices de los tensores tienen “color”.

Apéndice A

Gravedad 2-dimensional

La Relatividad General es una teoría invariante ante reparametrizaciones, por lo que puede ser formulada en un lenguaje independiente de coordenadas, esto es a lo que se ha llamado *invarianza bajo difeomorfismos* en 2.1. En esta tesis se trabaja en 2-dimensiones, en parte porque en este caso se puede estudiar el efecto de esta simetría al intentar cuantizar la teoría.

Si se considera una variedad M compacta, cerrada, conexa y orientable, la funcional generadora (2.1), en 2-dimensiones y después de hacer una rotación de Wick formal, se puede escribir de la siguiente manera [50]

$$Z_{2d}^{eu}(G, \Lambda) = \int \mathcal{D}\tilde{g}_{\mu\nu} e^{-S^{EH}[g_{\mu\nu}]}, \quad (\text{A.1})$$

donde (2.2) se puede escribir paramétricamente como

$$S_{2d} = \Lambda \int_M d^2\xi \sqrt{|g|} - \frac{1}{4\pi G} \int_M d^2\xi \sqrt{|g|} R(\xi). \quad (\text{A.2})$$

El primer término de esta expresión puede identificarse con el volumen de M , y, según el Teorema de Gauss-Bonnet, el segundo término es un invariante topológico, llamado la *característica de Euler*.

$$V_M = \int_M d^2\xi \sqrt{|g|}, \quad (\text{A.3})$$

$$\chi(h) = \frac{1}{4\pi} \int_M d^2\xi \sqrt{|g|} R(\xi) = 2 - 2h, \quad (\text{A.4})$$

donde h es llamado el género de la variedad. Por lo que (A.1) se puede escribir de la siguiente manera

$$Z_{2d}^{ec}(G, \Lambda) = \sum_{h \geq 0} e^{\frac{2-2h}{G}} Z(\Lambda) \quad (\text{A.5})$$

De modo que en 2-dimensiones esta teoría es topológica, ya que sólo depende del género y el volumen de la variedad; y por lo tanto, toda la dinámica clásica viene sólo de términos de borde (∂M) y de fijar la norma (escoger coordenadas).

Sin embargo, analizando (A.5), se puede ver que dada una topología fija todas las configuraciones del espaciotiempo pesan lo mismo en la integral de trayectoria; por lo que, desde el punto de vista cuántico, no hay una configuración clásica alrededor de la cual se pueda hacer una expansión $S = S^{clas} + S^{cuan}$.

Por estas razones es que el estudio de la gravedad cuántica 2-dimensional nos puede ayudar a entender la dinámica del espaciotiempo en más dimensiones.

Apéndice B

Geometría Simplicial

n-Simplejo Dado un conjunto de puntos $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^d$ ($d \geq n$) el n-simplejo asociado es el subespacio dado por

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i. \quad (\text{B.1})$$

donde $\sum \lambda_i = 1$ y a (x_0, \dots, x_n) se les llama *vértices* del simplejo. Algunos ejemplos se muestran en la figura B.1.

Cara Una cara de un n-simplejo es un simplejo cuyos vértices son un subconjunto de los vértices del otro.

Complejo Simplicial Es una colección finita de simplejos $\{\sigma_i\}$ tales que $\sigma_n \cap \sigma_m$ es una cara o el vacío. Se denota por K .

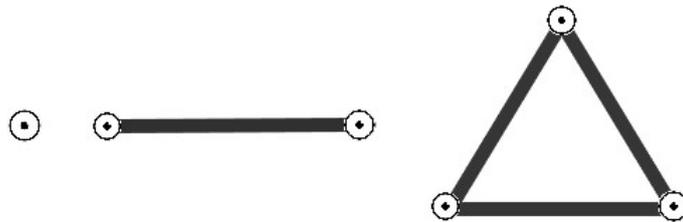


Figura B.1: De izquierda a derecha: 0-simplejo, 1-simplejo, 2-simplejo

Poliedro Dado un complejo simplicial K , su poliedro correspondiente es el conjunto

$$\mathcal{K} = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma. \quad (\text{B.2})$$

Triangulación Dada una variedad plana por pedazos (ppp), M , una triangulación es un complejo simplicial K junto con un homeomorfismo $\mathcal{K} \rightarrow M$.

Gráfica Dual Dado un complejo simplicial, se puede construir su Polígono Complejo o Gráfica Dual con el siguiente mapeo

$$\sigma_{n-k} \rightarrow \sigma_k^* \quad (\text{B.3})$$

2-DIMENSIONES

En 2-dimensiones hay 0,1,2-simplejos, estos últimos tienen la forma descrita en (B.1): $\sigma_2 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)x_0 + \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$. Si en cada 2-simplejo se define la función

$$g^{ab}(\lambda) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \lambda_a} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \lambda_b}, \quad (\text{B.4})$$

ésta es una **métrica** euclidiana, continua en cada cara (1-simplejo) y tiene la siguiente forma

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} l_1^2 & \frac{1}{2}(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2) \\ \frac{1}{2}(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2) & l_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

donde cada l_i tiene unidades de distancia. En estos términos se puede definir el escalar de curvatura en cada vértice ν como

$$R_\nu = 2 \frac{\delta_\nu}{dA_\nu}, \quad (\text{B.6})$$

con

$$dA_\nu = \frac{1}{3} \sum_{t:\nu \in t} A_t \quad (\text{B.7})$$

$$\delta_\nu = 2\pi - \sum_{t:\nu \in t} \alpha_{\nu,t}. \quad (\text{B.8})$$

Donde $t \in T$ son triángulos en la triangulación T , $\nu \in t$ y A_t son los vértices (0-simplejos) y el área del triángulo t , respectivamente. A δ_ν se le llama *ángulo de déficit*, y es una medida de curvatura ya que en espacio plano la suma de ángulos de triángulos que se pegan en un vértice es siempre 2π , por lo que $\delta_\nu = 0$, mientras que en espacios curvos esto no necesariamente es cierto.

Se puede ver que en este caso, 2-dimensional, la curvatura de la variedad ppp está codificada en los vértices de la triangulación, esto sugiere una idea general: la curvatura de una triangulación compuesta por n-simplejos está codificada en (n-2)-simplejos, lo que clarifica la ecuación (2.6).

Apéndice C

Cálculo de trazas para $N = 2M$

$\text{Tr}(\dot{R}PFP)$

Contribuciones a η

$$\bar{g}_4 \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^{N-a} [\dot{R}P^2] (\delta^{aa} \delta^{bb} + (-1)^{a+b} \delta^{aa} \delta^{bb}) \quad (\text{C.1})$$

Contribuciones a β_4

$$\frac{1}{3} \bar{g}_6 \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^{N-a} [\dot{R}P^2] (4\delta^{aa} \delta^{bb} + 2(-1)^{a+b} \delta^{aa} \delta^{bb}) \quad (\text{C.2})$$

$\text{Tr}(\dot{R}PFPFP)$

Contribuciones a β_4

$$\bar{g}_4^2 \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^{N-a} \sum_{c=1}^N \sum_{d=1}^{N-c} [\dot{R}P^3] (2\delta^{ac} \delta^{db} \delta^{ca} \delta^{bd}) \quad (\text{C.3})$$

Contribuciones a β_6

$$\frac{1}{3} \bar{g}_6 \bar{g}_4 \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^{N-a} \sum_{c=1}^N \sum_{d=1}^{N-c} [\dot{R}P^3] (5\delta^{ac} \delta^{ca} \delta^{bd} \delta^{db} + (-1)^{a+b} \delta^{ac} \delta^{ca} \delta^{db} \delta^{bd}) \quad (\text{C.4})$$

$\text{Tr}(\dot{R}PFPFPFP)$

Contribuciones a β_6

$$\bar{g}_4^3 \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^{N-a} \sum_{c=1}^N \sum_{d=1}^{N-c} \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^{N-e} [\dot{R}P^4] ((-1)^{a+b} \delta^{ac} \delta^{ce} \delta^{ea} \delta^{db} \delta^{fd} \delta^{bf} + \delta^{ac} \delta^{ce} \delta^{ea} \delta^{bdf}) \quad (\text{C.5})$$

con

$$[\dot{R}P^4] = \left(\frac{NZ}{a+b} - \eta \frac{NZ}{a+b} + \eta Z \right) \left(\frac{a+b}{NZ} \right)^2 \left(\frac{c+d}{NZ} \right) \left(\frac{e+f}{NZ} \right) \quad (\text{C.6})$$

Apéndice D

Cálculo de trazas para $N = 4M$

En este caso, la matriz C está formada por bloques de tamaño 4×4 de la forma

$$C_{jj} = \begin{cases} (-1)^k - i\xi & si \quad j = 2k - 1 \\ (-1)^k + i\xi & si \quad j = 2k \end{cases}, \quad (D.1)$$

que es una matriz compleja, por lo que los términos F' del modelo tendrán una parte conjugada, tal como se muestra a continuación

$$\Gamma_N^{(2)} = Z\delta^{ac}\delta^{bd} + \frac{\bar{g}_4}{2}[F_N^{(4)} + F_N^{*(4)}] + \frac{\bar{g}_6}{6}[F_N^{(6)} + F_N^{*(6)}] \quad (D.2)$$

Por otra parte, para calcular las funciones beta se usó la matriz de prueba (3.22), por lo que las trazas a calcular en la ec. de Wetterich son

$$Tr(F_N^{(4)}) = Tr(C)Tr(C) + Tr(C^2), \quad (D.3)$$

$$Tr(F_N^{(6)}) = \frac{1}{3}(4Tr(C^2) + 2Tr(C)Tr(C)), \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned}
Tr \left(F_N'^{(4)} F_N'^{(4)} \right) &= \frac{1}{2} (Tr(C^2)Tr(C^2) + 2Tr(CC^\dagger)Tr(CC^\dagger) \\
&+ Tr(C^{\dagger 2})Tr(C^{\dagger 2}) + Tr(C^4) + 2Tr(CC^\dagger CC^\dagger) + Tr(C^{\dagger 4})),
\end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}
Tr \left(F_N'^{(4)} F_N'^{(6)} \right) &= \frac{1}{12} (2Tr(C^2)Tr(C^2) + 4Tr(CC^\dagger)Tr(CC^\dagger) \\
&+ 2Tr(C^{\dagger 2})Tr(C^{\dagger 2}) + 3Tr(C^4) + 6Tr(CC^\dagger CC^\dagger) + 3Tr(C^{\dagger 4}) \\
&+ Tr(C)Tr(C^3) + Tr(C)Tr(C^\dagger CC^\dagger) + Tr(C^\dagger)Tr(C^{\dagger 3}) \\
&+ Tr(C^\dagger)Tr(CC^\dagger C)),
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
Tr \left(F_N'^{(4)} F_N'^{(4)} F_N'^{(4)} \right) &= \frac{1}{8} (2Tr(C^3)Tr(C^{\dagger 3}) + 6Tr(C^2 C^\dagger)Tr(C^{\dagger 2} C) \\
&+ Tr(C^6) + 3Tr(C^4 C^{\dagger 2}) + 3Tr(C^2 C^{\dagger 4}) + Tr(C^{\dagger 6})).
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Bibliografía

- [1] Dario Benedetti and Joe Henson. Imposing causality on a matrix model. *Phys. Lett.*, B678:222–226, 2009.
- [2] Astrid Eichhorn and Tim Koslowski. Continuum limit in matrix models for quantum gravity from the Functional Renormalization Group. *Phys. Rev.*, D88:084016, 2013.
- [3] Steven Carlip. Quantum gravity: A Progress report. *Rept. Prog. Phys.*, 64:885, 2001.
- [4] S. W. Hawking. Black holes and thermodynamics. *Phys. Rev. D*, 13:191–197, Jan 1976.
- [5] R.M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. University of Chicago Press, 1994.
- [6] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [7] Daniele Oriti. *Spin foam models of quantum space-time*. PhD thesis, Cambridge U., DAMTP, 2003.
- [8] Carlo Rovelli. Loop quantum gravity: the first twenty five years. *Class. Quant. Grav.*, 28:153002, 2011.
- [9] Steven B. Giddings. Is string theory a theory of quantum gravity? *Found. Phys.*, 43:115, 2013.

-
- [10] T. Regge. GENERAL RELATIVITY WITHOUT COORDINATES. *Nuovo Cim.*, 19:558–571, 1961.
- [11] Astrid Eichhorn. Status of the asymptotic safety paradigm for quantum gravity and matter. In *Black Holes, Gravitational Waves and Spacetime Singularities Rome, Italy, May 9-12, 2017*, 2017.
- [12] P. Di Francesco, Paul H. Ginsparg, and Jean Zinn-Justin. 2-D Gravity and random matrices. *Phys. Rept.*, 254:1–133, 1995.
- [13] S. Weinberg. “*Ultraviolet Divergences in Quantum Theories of Gravitation*,” *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [14] Christof Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Phys. Lett.*, B301:90–94, 1993.
- [15] Roberto Percacci and Daniele Perini. Asymptotic safety of gravity coupled to matter. *Phys. Rev.*, D68:044018, 2003.
- [16] Sarah Folkerts, Daniel F. Litim, and Jan M. Pawłowski. Asymptotic freedom of Yang-Mills theory with gravity. *Phys. Lett.*, B709:234–241, 2012.
- [17] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Semiclassical universe from first principles. *Phys. Lett.*, B607:205–213, 2005.
- [18] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Reconstructing the universe. *Phys. Rev.*, D72:064014, 2005.
- [19] Jan Ambjorn and R. Loll. Nonperturbative Lorentzian quantum gravity, causality and topology change. *Nucl. Phys.*, B536:407–434, 1998.
- [20] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Causal Dynamical Triangulations and the Quest for Quantum Gravity. In *Proceedings, Foundations of Space and Time: Reflections on Quantum Gravity: Cape Town, South Africa*, pages 321–337, 2010.

- [21] J. Ambjorn, M. Carfora, and A. Marzuoli. *The Geometry of Dynamical Triangulations*. Number v. 50 in Hefte Zur Zeitschrift "Der Unfallchirurg". Springer Berlin Heidelberg, 1997.
- [22] Marc H. Goroff and Augusto Sagnotti. The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity. *Nucl. Phys.*, B266:709–736, 1986.
- [23] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. One loop divergencies in the theory of gravitation. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.*, A20:69–94, 1974.
- [24] Claus Kiefer. *Quantum Gravity*. Oxford University Press, New York, 2007.
- [25] J. Laiho and D. Coumbe. Evidence for Asymptotic Safety from Lattice Quantum Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 107:161301, 2011.
- [26] Konrad Osterwalder and Robert Schrader. Axioms for euclidean green's functions. *Comm. Math. Phys.*, 31(2):83–112, 1973.
- [27] R. Loll. Discrete Lorentzian quantum gravity. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 94:96–107, 2001.
- [28] S. Carrozza. *Tensorial Methods and Renormalization in Group Field Theories*. Springer Theses. Springer International Publishing, 2014.
- [29] P. Di Francesco. 2D quantum gravity, matrix models and graph combinatorics. In *Application of random matrices in physics. Proceedings, NATO Advanced Study Institute, Les Houches, France, June 6-25, 2004*, pages 33–88, 2004.
- [30] Gerard 't Hooft. A Planar Diagram Theory for Strong Interactions. *Nucl. Phys.*, B72:461, 1974.
- [31] Jean Zinn-Justin. Quantum field theory and critical phenomena. *Int. Ser. Monogr. Phys.*, 77:1–914, 1989.
- [32] Jean Zinn-Justin. *Phase transitions and renormalization group*. 2007.

- [33] M. Sandhoff, H. Pfnür, and H.-U. Everts. First- and second-order phase transitions in a simple lattice gas model. *EPL (Europhysics Letters)*, 25(2).
- [34] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [35] David McComb and Uwe Täuber. Renormalization methods: A guide for beginners. 58:62–63, 06 2005.
- [36] Janos Polonyi. Lectures on the functional renormalization group method. *Central Eur. J. Phys.*, 1:1–71, 2003.
- [37] Giampiero Esposito, Alexander Yu. Kamenshchik, and Giuseppe Pollifrone. *Effective Action in Quantum Field Theory*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1997.
- [38] Alessandro Sfondrini. An introduction to universality and renormalization group techniques. *PoS, ModaveVIII:005*, 2012.
- [39] Juergen Berges, Nikolaos Tetradis, and Christof Wetterich. Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Phys. Rept.*, 363:223–386, 2002.
- [40] Roberto Percacci. Asymptotic Safety. pages 111–128, 2007.
- [41] Dario Benedetti, Pedro F. Machado, and Frank Saueressig. Asymptotic safety in higher-derivative gravity. *Mod. Phys. Lett.*, A24:2233–2241, 2009.
- [42] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Phys. Rev.*, D57:971–985, 1998.
- [43] A.S. Wightman and L. Garding. Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory. *Arkiv Fys.*, Vol: 28, 1 1965.
- [44] Elisa Manrique and Martin Reuter. Bare Action and Regularized Functional Integral of Asymptotically Safe Quantum Gravity. *Phys. Rev.*, D79:025008, 2009.

-
- [45] P. Bialas, Z. Burda, A. Krzywicki, and B. Petersson. Focusing on the fixed point of 4-D simplicial gravity. *Nucl. Phys.*, B472:293–308, 1996.
- [46] Dario Benedetti, R. Loll, and F. Zamponi. (2+1)-dimensional quantum gravity as the continuum limit of Causal Dynamical Triangulations. *Phys. Rev.*, D76:104022, 2007.
- [47] W. Beirl and D. A. Johnston. 2-D Lorentzian gravity as 2-D Euclidean gravity with Ising spins. 1996.
- [48] S. Jordan and R. Loll. Causal Dynamical Triangulations without Preferred Foliation. *Phys. Lett.*, B724:155–159, 2013.
- [49] Valentin Bonzom, Razvan Gurau, and Vincent Rivasseau. Random tensor models in the large N limit: Uncoloring the colored tensor models. *Phys. Rev.*, D85:084037, 2012.
- [50] Juri Rolf. *Two-dimensional quantum gravity*. PhD thesis, Bohr Inst., 1998.