



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Soluciones clásicas de teorías de Yang-Mills
con acoplamiento al invariante de
Chern-Pontryagin

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Licenciado en Física

PRESENTA:

Gabriel Efraín Condés Luna

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos



Ciudad Universitaria, Ciudad de México
2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Condés
Luna
Gabriel Efraín
72 2571-7223
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
413082570

2. Datos del tutor

Dr.
Luis Fernando
Urrutia
Ríos

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Manuel
Torres
Labansat

4. Datos del sinodal 2

Dr.
José David
Vergara
Oliver

5. Datos del sinodal 3

Dr.
José Antonio Rafael
García
Zenteno

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Mariano
Chernicoff
Minsberg

7. Datos del trabajo

Soluciones clásicas de teorías de Yang-Mills con acoplamiento al invariante de Chern-Pontryagin
72 pp.
2018

Índice general

1. Introducción	1
2. Teorías de Yang-Mills	7
2.1. Un Ejemplo de Teoría de Norma: Electrodinámica Escalar	7
2.2. Simetrías Globales No-Abelianas	9
2.3. Invariancia de Norma No-Abeliana y Campos de Norma: El Grupo $SU(2)$. .	11
2.4. Generalización a $SU(n)$	14
3. Ejemplos de Solitones Topológicos	17
3.1. Kink	17
3.2. Un Teorema Sobre la Ausencia de Solitones	19
3.3. El <i>Vortex</i>	23
4. El Dyon de Julia-Zee	29
4.1. Modelo de Georgi-Glashow	29
4.2. Las Ecuaciones de Movimiento y El Ansatz	30
4.3. Solución Explícita en el Límite de BPS	32
4.4. Carga Eléctrica y Magnética	34
4.5. Discusión del carácter topológico de la solución	35
5. Solución con el Término-θ	39
5.1. Acción y Ecuaciones de Movimiento	39
5.2. Las Ecuaciones de Movimiento y El Ansatz	40
5.3. Solución Explícita	41
5.4. Cantidades Físicas de la Solución	46

6. Resumen y Conclusiones	51
A. Elementos de Teoría de Grupos y Álgebras de Lie	53
B. Invariancia de los Términos que Contienen a las Componentes ϕ^a del Campo Escalar en la Acción (4.1)	57
C. Obtención de las Ecuaciones de Movimiento y del Campo Eléctrico y Magnético en Términos del Ansatz.	59
D. El Término Chern-Pontryagin	63
E. Cálculo de las Ecuaciones (5.21), (5.25) y (5.25)	67

Capítulo 1

Introducción

Cuando una partícula cargada electricamente se mueve de forma acelerada ésta emite radiación electromagnética. Esto ocurre debido a la forma en la que las partículas cargadas interactúan con el campo electromagnético. Dicha interacción esta dada, en la acción, por el término

$$S_{int} = C \int d^4x [j^\mu A_\mu], \quad (1.1)$$

en el Lagrangiano de la electrodinámica, donde C es una constante, $A_\mu = (-\phi, \mathbf{A})$, donde ϕ es el potencial eléctrico y \mathbf{A} el potencial vectorial, $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$, siendo ρ la densidad de carga eléctrica libre y \mathbf{j} la corriente eléctrica libre, y donde se usa la convención de suma de Einstein con la métrica $g = \text{diag}(-, +, +, +)$

$$\begin{aligned} j^\mu A_\mu &= j^0 A_0 + j^1 A_1 + j^2 A_2 + j^3 A_3 \\ &= -\rho\phi + j^1 A^1 + j^2 A^2 + j^3 A^3. \end{aligned}$$

Uno podría preguntarse si existe algún principio misterioso que determina esta forma tan específica en la cual la materia cargada se acopla al campo electromagnético. Y la respuesta es que sí, dicho principio es llamado el *principio de invariancia de norma local*.

El objeto fundamental con el que describimos a la electrodinámica es el campo vectorial $A_\mu(x)$. Sin embargo, éste no representa una cantidad física, puesto que existe toda una familia de campos vectoriales que representan la misma física, los cuales están relacionados a través de las transformaciones de norma

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (1.2)$$

donde Λ es una función del *espaciotiempo*.

El *principio de invariancia de norma local* nos dice que en una teoría de norma todas las cantidades físicas, así como su acción y ecuaciones de movimiento deben ser invariantes bajo las transformaciones de norma (1.2). A un objeto que satisfaga esta condición se le conoce como invariante de norma.

Una acción que describa a la electrodinámica debe satisfacer una serie de condiciones [1]:

- Debe ser un invariante de Lorentz.
- Debe ser un invariante de norma.
- La variación sobre dicha acción debe dar como resultado ecuaciones diferenciales de segundo orden, por lo tanto las derivadas de los campos no deben aparecer a potencias mayores a la cuadrada..
- La variación sobre dicha acción debe dar como resultado ecuaciones diferenciales lineales, por lo tanto los campos no deben aparecer a potencias mayores a la cuadrada.

La acción más simple para el campo vectorial libre que satisface estas condiciones es

$$S_{Atibre} = \tilde{C} \int d^4x [F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}], \quad (1.3)$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y donde \tilde{C} es una constante.

El término que describa la interacción entre el campo electromagnético y un conjunto de partículas cargadas, representadas por la corriente j^μ , debe acoplar al campo vectorial con dicha corriente de tal forma que se satisfagan las condiciones anteriormente enlistadas. La única condición que el término (1.1) no satisface de forma trivial es la de ser un invariante de norma. Probemos que efectivamente es un invariante de norma. Usando las transformaciones (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} S'_{int} &= C \int d^4x [j^\mu A'_\mu] \\ &= C \int d^4x [j^\mu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda)] \\ &= S_{int} + C \int d^4x [j^\mu \partial_\mu \Lambda] \\ &= S_{int} + C \left(- \int d^4x [\Lambda \partial_\mu j^\mu] + \int dS_\mu [\Lambda j^\mu] \right). \end{aligned}$$

El tercer término es la integral sobre una superficie en el infinito. En una situación física las cargas están localizadas, de esta manera $j^\mu \rightarrow 0$ cuando $x^\mu \rightarrow \infty$, por lo tanto la última

integral es cero. Además, por la conservación de la corriente eléctrica se tiene que $\partial_\mu j^\mu = 0$. Así la segunda integral es cero, dando como resultado la invariancia de norma de la acción

$$S'_{int} = S_{int}. \quad (1.4)$$

Como podemos ver, la invariancia de norma es la que determina la forma en la que el campo electromagnético interactúa con las cargas.

La electrodinámica es la primera teoría conocida en satisfacer la invariancia de norma. Es posible generalizar las transformaciones de norma (1.2) a transformaciones más complicadas, dando como resultado las llamadas *teorías de norma*. En la actualidad es un hecho bien conocido que las interacciones fuerte, débil y electromagnética entre partículas elementales se rigen bajo el *principio de invariancia de norma local*, por lo tanto dichas interacciones se describen usando teorías de norma

En las últimas décadas ha crecido una barrera en el lenguaje empleado en las matemáticas y la física, esto debido al nivel de especialización que ha alcanzado cada campo. Sin embargo, el estudio de la teoría de campos, en particular las teorías de norma, han tenido que recurrir frecuentemente al uso de ideas y resultados de las matemáticas modernas, promoviendo el restablecimiento de una comunicación interdisciplinaria entre matemáticos y físicos.

La teoría clásica de campos ofrece toda una variedad de ecuaciones diferenciales, las cuales vienen de dos conjuntos de ecuaciones que describen las interacciones fundamentales: por un lado las ecuaciones de Yang-Mills [1954], con las cuales modelan las fuerzas electromagnética, fuerte y débil, y por otro lado las ecuaciones de Einstein [1915], las cuales describen a la gravedad. Muchos fenómenos físicos, derivados del rompimiento simetría, se manifiestan a partir de soluciones a ecuaciones no lineales para los campos, dando lugar a entes tales como vórtices, monopolos, dyones, instantones, etc. Recientemente este tipo de soluciones, llamados solitones, ha atraído la atención de analistas matemáticos que buscan generar resultados sobre su existencia [2].

Por otro lado, en un medio material, las ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos están descritos por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde \mathbf{E} es el vector de campo eléctrico, \mathbf{B} el vector de inducción magnética, \mathbf{D} el vector de

desplazamiento, \mathbf{H} el vector del campo magnético, ρ es la densidad de carga libre eléctrica y \mathbf{J} el vector de densidad de corriente libre. Para resolver las ecuaciones homogéneas se define a los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} en términos los potenciales ϕ y \mathbf{A} como

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.6)$$

Un medio material está caracterizado por las relaciones

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad (1.7)$$

llamadas relaciones constitutivas, las cuales permiten resolver las ecuaciones no homogéneas en (1.5). Existen medios materiales caracterizados por las relaciones constitutivas

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} - \frac{\theta\alpha}{\pi}\mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} + \frac{\theta\alpha}{\pi}\mathbf{E}, \quad (1.8)$$

donde ϵ y μ son respectivamente la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, α la constante de estructura fina y θ es un parámetro adicional denominado la polarización magnetoeléctrica del medio. Los materiales descritos por estas ecuaciones constitutivas son conocidos como medios- θ , y a la teoría efectiva que los describe se le conoce como electrodinámica- θ .

Las relaciones constitutivas (1.8) inducen densidades efectivas de carga y de corriente

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{\alpha}{4\pi^2}\mathbf{B} \cdot \nabla\theta, \quad \mathbf{J} = \frac{c\alpha}{4\pi^2}(\nabla\theta) \times \mathbf{E} - \frac{\alpha}{4\pi^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\mathbf{B}, \quad (1.9)$$

Por lo tanto, como puede notarse, una característica de la electrodinámica- θ es la aparición del efecto magnetoeléctrico, mediante del cuál campos eléctricos inducen campo magnéticos y viceversa. Esto debido a que la presencia de un campo eléctrico inducirá la existencia de una corriente efectiva, como se puede ver en la ec.(1.9) en todos los puntos donde $\nabla\theta \neq 0$, produciendo de esta manera un campo magnético.

Podemos apreciar el efecto magnetoeléctrico [3] si consideramos el arreglo de la fig.1.1, en el cual el semi-espacio superior ($z > 0$) está caracterizado por las constantes de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética ϵ_1 y μ_1 y el semi-espacio inferior ($z < 0$) por las constantes ϵ_2 y μ_2 . Además, consideremos el caso particular en el cual θ tiene un valor constante por partes

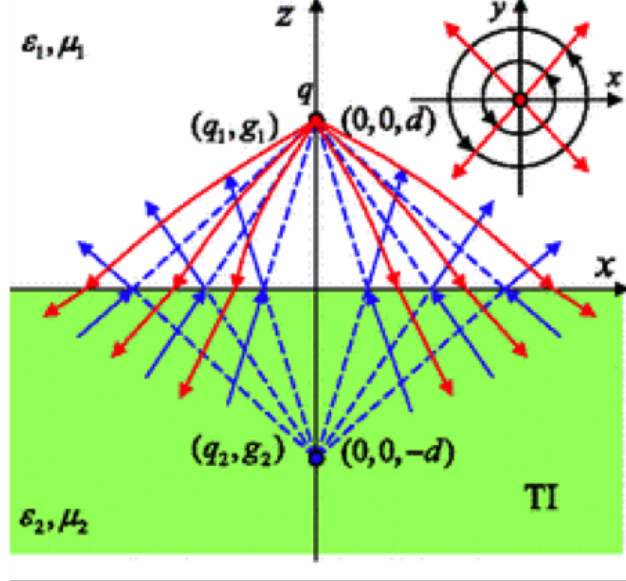


Figura 1.1

$$\theta = \begin{cases} -\pi & , \quad z < 0 \\ \pi & , \quad z > 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Una carga eléctrica puntual se localiza en el punto $(0, 0, d)$. Las ecuaciones de Maxwell, las relaciones constitutivas y las condiciones de frontera habituales constituyen un problema con condiciones a la frontera [4]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z|_{z=0^+} &= 2\alpha\mathbf{B}_z|_{z=0}, \\ \mathbf{B}_{||}|_{z=0^+} &= -2\alpha\mathbf{E}_z|_{z=0}, \\ \mathbf{B}_z|_{z=0^+} &= 0, \\ \mathbf{E}_{||}|_{z=0^+} &= 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde $\mathbf{E}_{||}$ y $\mathbf{B}_{||}$ representan, respectivamente, las componentes tangenciales al plano $z = 0$ de \mathbf{E} y \mathbf{B} . Para resolver el problema, usando el método de imágenes, se asume que, en el semi-espacio inferior el campo eléctrico está dado por una carga eléctrica efectiva q/ε_1 y una carga imagen q_1 en $(0, 0, d)$, mientras que el campo magnético está dado por una carga magnética puntual g_1 en $(0, 0, d)$. En el semi-espacio superior el campo eléctrico está dado por la carga q/ε_1 en $(0, 0, d)$ y una carga eléctrica imagen q_2 en $(0, 0, -d)$ y el campo magnético está dado por una carga puntual imagen g_2 en $(0, 0, -d)$. Este ansatz satisface las ecuaciones de Maxwell en ambos lados y, restringiéndonos al caso en que $\varepsilon_1 = \mu_1 = \varepsilon_2 = \mu_2 = 1$, se debe cumplir que

$$\begin{aligned}
q_1 &= q_2 \\
&= -\frac{\alpha^2 P^2}{1 + \alpha^2 P^2} q, \quad \text{con} \quad P = \frac{\theta}{2\pi}, \\
g_1 &= -g_2 \\
&= -\frac{\alpha P}{1 + \alpha^2 P^2} q,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

para que las condiciones de frontera (1.11) se satisfagan. Notemos que siempre que $q \neq 0$ el campo magnético será distinto de cero. En este ejemplo es claro cómo, en la teoría efectiva conocida como electrodinámica- θ , la presencia de cargas eléctricas induce también un campo magnético

En esta tesis estudiamos las consecuencias de una generalización de la teoría efectiva de la electrodinámica- θ a una teoría de Yang-Mills, en relación con las soluciones que presentan dyones en estas últimas. En el Capítulo 2 se hace una breve revisión de qué son y como se construyen las teorías de Yang-Mills. En el capítulo 3 estudiamos algunos ejemplos de solitones topológicos para, en el Capítulo 4, revisar la solución del dyon de Julia-Zee, que es un solitón topológico que aparece en el modelo de Georgi-Glashow con grupo de norma $SU(2)$ [5]. A lo largo de este trabajo de tesis siempre que hagamos mención del modelo de Georgi-Glashow, sin especificar el grupo de norma, estaremos haciendo referencia al modelo con grupo de norma $SU(2)$. Finalmente, en el Capítulo 5, se modifica el modelo de Georgi-Glashow para incluir la generalización de la electrodinámica- θ a una teoría de Yang-Mills y se busca encontrar una solución análoga al dyon de Julia-Zee en este nuevo modelo. En el Apéndice A se exponen algunos resultados sobre álgebras y grupos de Lie, los cuales se ocupan a lo largo de la tesis.

En el Apéndice C se obtienen las ecuaciones de movimiento empleadas para obtener la solución de Julia-Zee, así como los campos eléctrico y magnético para esta solución, también se calcula la contribución del término- θ a las ecuaciones de movimiento para el modelo de Georgi-Glashow modificado en el Capítulo 5. En el Apéndice D se muestran algunas propiedades del término de Chern-Pontryagin para caso no-abeliano. Finalmente, en el Apéndice E se deducen algunas expresiones importantes para la obtención de la solución encontrada en el Capítulo 5.

Capítulo 2

Teorías de Yang-Mills

2.1. Un Ejemplo de Teoría de Norma: Electrodinámica Escalar

El caso de la electrodinámica escalar es un caso prototípico y es de gran interés para nosotros, ya que a partir de él construiremos una teoría de norma [5]. En los cálculos posteriores emplearemos la métrica $g = \text{diag}(-, +, +, +)$ y usaremos unidades naturales ($c = \hbar = 1$). Nuestra intención es construir un Lagrangiano que contenga al campo escalar complejo, al campo electromagnético y que sea invariante de norma, es decir que sea invariante bajo las transformaciones locales de $U(1)$

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &\longrightarrow \phi'(\mathbf{x}) = e^{i\alpha(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x}), \\ \phi^*(\mathbf{x}) &\longrightarrow \phi'^*(\mathbf{x}) = e^{-i\alpha(\mathbf{x})}\phi^*(\mathbf{x}), \\ A_\mu(\mathbf{x}) &\longrightarrow A'_\mu(\mathbf{x}) = A_\mu(\mathbf{x}) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Las acciones de cada campo libre, por separado, son

$$S_A = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right], \quad S_\phi = \int d^4x \left[-\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi^* - m^2\phi\phi^* \right].\tag{2.2}$$

La acción del campo electromagnético es claramente invariante bajo las transformaciones de norma dadas en la ec. (2.1), pero la acción del campo escalar no. Los problemas nacen en los términos con derivadas

$$\partial_\mu\phi' = e^{i\alpha(\mathbf{x})}[\partial_\mu\phi + i\partial_\mu\alpha(x)\phi] \neq e^{i\alpha(\mathbf{x})}\partial_\mu\phi.\tag{2.3}$$

Para que esta teoría sea invariante de norma debemos promover la derivada normal ∂_μ a

una nueva derivada D_μ , llamada derivada covariante, de tal forma que se satisfaga

$$(D_\mu\phi)' = e^{i\alpha(x)}D_\mu\phi. \quad (2.4)$$

Notemos que si

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (2.5)$$

se satisface la invariancia de norma. En efecto

$$(D_\mu\phi)' = \partial_\mu\phi' - ieA'_\mu\phi = e^{i\alpha}\partial_\mu\phi + e^{i\alpha}\phi\partial_\mu\alpha - ieA_\mu e^{i\alpha}\phi - e\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha e^{i\alpha}\phi = e^{i\alpha}D_\mu\phi. \quad (2.6)$$

Hay que notar que si tomamos a ϕ^* como un campo independiente, su derivada covariante es el complejo conjugado de $D_\mu\phi$.

Por lo tanto podemos decir que la siguiente acción con el campo escalar ϕ y A_μ es invariante de norma:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - D^\mu\phi(D_\mu\phi)^* - m^2\phi\phi^* \right]. \quad (2.7)$$

El campo escalar y el potencial vectorial se acoplan con los términos no lineales: $A_\mu\phi^*\partial_\mu\phi$ y $A_\mu A_\mu\phi^*\phi$. La ecuación de movimiento para el campo ϕ es

$$D^\mu D_\mu\phi - m^2\phi = 0, \quad (2.8)$$

y la ecuación para ϕ^* es el complejo conjugado de la ec. (2.8). De la variación de la acción respecto al campo A_μ obtenemos la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (2.9)$$

donde

$$j^\nu = -i[\phi^*D^\nu\phi - (D^\nu\phi)^*\phi], \quad (2.10)$$

que es invariante de norma. En virtud de las ecuaciones de movimiento, esta corriente se conserva: $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Finalmente, concluimos en esta sección que cuando pedimos que el Lagrangiano sea invariante de norma debemos promover las derivadas convencionales a nuevas derivadas covariantes, y como consecuencia obtenemos una corriente j^ν que es invariante de norma y conservada usando las ecuaciones de movimiento.

2.2. Simetrías Globales No-Abelianas

Notemos que la acción del campo escalar S_ϕ es invariante bajo transformaciones locales de $U(1)$, que es un grupo abeliano. Ahora estamos interesados en estudiar teorías con simetrías globales no abelianas, para después promoverlas a teorías con simetrías no abelianas locales. El modelo más simple con simetría no abeliana global es el modelo de N campos escalares complejos ϕ_i con el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi_i^* \partial_\mu \phi_i - m^2 \phi_i^* \phi_i - \lambda (\phi_i^* \phi_i)^2. \quad (2.11)$$

Es claro que esta teoría tiene simetría $U(1)$, pero consideremos un elemento $w \in SU(N)$ independiente de las coordenadas. En términos de las componentes matriciales de w los campos transforman como

$$\phi_i \longrightarrow \phi'_i = w_{ij} \phi_j. \quad (2.12)$$

La invariancia del Lagrangiano es evidente dado que:

$$\phi_i'^* \phi'_i = \phi_k^* w_{ik}^* w_{ij} \phi_j = \phi_k^* (w^\dagger w)_{kj} \phi_j = \phi_k^* \phi_k. \quad (2.13)$$

Podemos mencionar más ejemplos de teorías con simetrías no abelianas, como los siguientes:

1. Supongamos que tenemos dos conjuntos de N campos escalares en forma de vector columna ϕ y χ , con el Lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi - \lambda_1 (\phi^\dagger \phi)^2 - \partial^\mu \chi^\dagger \partial_\mu \chi \\ & - m_\chi^2 \chi^\dagger \chi - \lambda_2 (\chi^\dagger \chi)^2 - \lambda_3 [(\phi^\dagger \chi)^2 + (\chi^\dagger \phi)^2]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Es claro que este Lagrangiano es invariante bajo la transformación del grupo $SU(N)$

$$\begin{aligned} \phi' & \longrightarrow w\phi, \\ \chi' & \longrightarrow w\chi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2. Supongamos ahora que tenemos un doblete de campos escalares $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ que transforma bajo la representación fundamental de $SU(2)$ y además tenemos un triplete ξ^a con $a = 1, 2, 3$ de campos reales, que transforma bajo $SU(2)$ con la representación adjunta.

Para ver como transforman los campos ξ^a definimos la matriz

$$\xi = \tau^a \xi^a, \quad (2.16)$$

donde τ^a son las matrices de Pauli. Empleando la definición de la representación fundamental y la adjunta tenemos

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = w\phi, \\ \xi &\longrightarrow \xi' = w\xi w^{-1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde $w \in SU(2)$. Un Lagrangiano invariante puede ser construido como

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - \lambda_1 (\phi^\dagger \phi)^2 + \partial^\mu \xi^\dagger \partial_\mu \xi - \lambda_2 (\xi^\dagger \xi)^2 - \lambda_3 \phi^\dagger (\xi) \phi. \quad (2.18)$$

La invariancia del Lagrangiano es evidente si notamos la invariancia de los términos $(\xi^a \xi^a)^2$ y $\phi^\dagger (\tau^a \xi^a) \phi$. Al ser $\frac{\tau^a}{2}$ los generadores hermitianos de $SU(2)$, éstos están dotados de la siguiente propiedad

$$\text{Tr}(\tau^a \tau^b) = 2\delta^{ab}. \quad (2.19)$$

De esta forma

$$\xi^a \xi^a = \frac{1}{2} \text{Tr}(\xi^2).$$

Es claro que esta ecuación es invariante bajo las transformaciones (2.17), dado que podemos conmutar las matrices dentro de la traza. Finalmente veamos el término

$$\phi^\dagger \xi' \phi' = (\phi' w^\dagger)(w \xi w^{-1})(w \phi) = \phi^\dagger \xi \phi. \quad (2.20)$$

Por lo tanto el lagrangiano (2.18) es invariante bajo las transformaciones (2.17).

2.3. Invariancia de Norma No-Abeliana y Campos de Norma: El Grupo $SU(2)$

En esta sección nos propondremos generalizar el caso de la electrodinámica escalar con grupo de norma $U(1)$, al caso en el que el grupo de norma sea no-abeliano. Consideremos de nuevo una teoría de dos campos complejos escalares

$$\phi = (\phi_1, \phi_2)^T, \quad (2.21)$$

con el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2. \quad (2.22)$$

Como se vió este Lagrangiano es invariante bajo transformaciones globales de $SU(2)$. Ahora lo que haremos es tratar de modificar el Lagrangiano para que se invariante de norma bajo transformaciones de norma locales de $SU(2)$. Es decir queremos promover la simetría para transformaciones

$$\phi \longrightarrow \phi' = w(\mathbf{x})\phi, \quad w(\mathbf{x}) \in SU(2). \quad (2.23)$$

Como en los casos anteriores la parte del potencial del Lagrangiano es invariante bajo estas transformaciones, y como en el caso de la electrodinámica escalar el problema está en el término con las derivadas:

$$\partial_\mu \phi' = w(\mathbf{x})\partial_\mu \phi + \partial_\mu w(\mathbf{x})\phi. \quad (2.24)$$

De nuevo, para arreglar el problema, promovemos la derivada normal a una derivada covariante que satisfaga que

$$(D_\mu \phi)' = w(\mathbf{x})D_\mu \phi. \quad (2.25)$$

De esta forma proponemos

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi. \quad (2.26)$$

Ahora veamos qué condiciones debe satisfacer A_μ . Veamos primero cómo debe transformar. Se tiene que

$$D_\mu \phi' = \partial_\mu \phi' + A'_\mu \phi' = w\partial_\mu \phi + A'_\mu w\phi + \partial_\mu w\phi, \quad (2.27)$$

y necesitamos que ésto sea igual a $wD_\mu\phi = w\partial_\mu\phi + wA_\mu\phi$, de donde se sigue que

$$\partial_\mu w + A'_\mu w = wA_\mu. \quad (2.28)$$

Es decir A_μ debe transformar como

$$A'_\mu = wA_\mu w^{-1} + w\partial_\mu w^{-1}, \quad (2.29)$$

donde hemos usado que

$$ww^{-1} = 1 \implies \partial_\mu(ww^{-1}) = 0. \quad (2.30)$$

Aproximando a $w = 1 + \epsilon(\mathbf{x})$ alrededor de la identidad, donde $\epsilon(\mathbf{x})$ está en el algebra de $SU(2)$, se tiene a primer orden que

$$w(\mathbf{x})\partial_\mu w^{-1}(\mathbf{x}) = -\partial_\mu\epsilon(\mathbf{x}). \quad (2.31)$$

De esta forma A_μ toma su valores en el algebra de Lie.

Por lo tanto las transformaciones de norma, con el grupo de norma $SU(2)$, son

$$\begin{aligned} A_\mu &\longrightarrow A'_\mu = wA_\mu w^{-1} + w\partial_\mu w^{-1}, \\ \phi &\longrightarrow \phi' = w\phi. \end{aligned} \quad (2.32)$$

El Lagrangiano para el campo escalar que es invariante de norma es

$$\mathcal{L}_\phi = -D^\mu\phi^\dagger D_\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2. \quad (2.33)$$

Una de las primeras diferencias que notamos en el caso no-abeliano, es que cuando nos restringimos a transformaciones globales, el campo vectorial A_μ transforma de forma no trivial

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = wA_\mu w^{-1}. \quad (2.34)$$

Ahora veamos como cambia el Lagrangiano para el campo A_μ . Inspirados en cómo transforma A_μ bajo las transformaciones de norma, le pedimos al campo $F_{\mu\nu}$ que transforme bajo estas en la representación adjunta

$$F'_{\mu\nu} = w(\mathbf{x})F_{\mu\nu}w^{-1}(\mathbf{x}). \quad (2.35)$$

De esta forma, al ser $SU(2)$ un grupo compacto, el Lagrangiano invariante de norma será de la forma $\text{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$. Esperaríamos que $F_{\mu\nu}$ tuviera una forma parecida a $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,

sin embargo esta expresión no transforma de forma apropiada. Para que transforme según la ec. (2.35) debemos agregar el término extra $[A_\mu, A_\nu]$, de tal forma que el campo $F_{\mu\nu}$ que transforma como queremos es

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (2.36)$$

Entonces el Lagrangiano para A_μ libre invariante de norma es

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2e^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (2.37)$$

donde e^2 es una constante positiva. En el Lagrangiano tenemos términos de 2do y 3er orden en A_μ , por lo cual en esta teoría A_μ interactúa consigo mismo.

Como sabemos un elemento A_μ del álgebra $SU(2)$ puede ser expresado en términos de los generadores anti-hermitianos del algebra

$$A_\mu = et^a A_\mu^a(\mathbf{x}) \quad \text{con} \quad t^a = -\frac{i\tau^a}{2}, \quad (2.38)$$

donde $a = 1, 2, 3$, siendo t^a la base del algebra y A_μ^a las componentes de A_μ respecto a esta base. De esta forma podemos reescribir a $F_{\mu\nu}$ en términos de sus componentes de la base del algebra

$$F_{\mu\nu} = et^a F_{\mu\nu}^a, \quad (2.39)$$

donde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\varepsilon^{abc} A_\mu^a A_\nu^b. \quad (2.40)$$

y ε^{abc} son las constantes de estructura del grupo $SU(2)$. Con estas componentes también podemos expresar al Lagrangiano de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2e^2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a \quad \text{con} \quad \text{Tr}(t^a t^b) = -\frac{\delta^{ab}}{2}. \quad (2.41)$$

Cabe mencionar que el término de la traza tendrá términos de orden 3 y 4 en el campo de norma, de modo que tendremos términos que acoplan al campo de norma consigo mismo. Por tanto en el caso no-abeliano el campo de norma interactúa consigo mismo.

Es importante hacer notar que $F_{\mu\nu}$ satisface la identidad de Bianchi. Empleando la propiedad

$$[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}. \quad (2.42)$$

Y definiendo la acción de la derivada covariante sobre un elemento del algebra $F \in \mathfrak{su}(2)$ como

$$D_\mu F = \partial_\mu F + [A_\mu, F], \quad (2.43)$$

se puede probar que

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\lambda]] = D_\mu F_{\nu\lambda}, \quad (2.44)$$

lo cual combinado con la identidad de Jacobi

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\lambda]] + [D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\nu, [D_\lambda, D_\mu]] = 0, \quad (2.45)$$

da como resultado la identidad de Bianchi

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\lambda F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (2.46)$$

2.4. Generalización a $SU(n)$

Brevemente describiremos como se generalizaría lo que hemos visto al grupo de norma $SU(n)$. El campo de norma toma valores en el álgebra $\mathfrak{su}(n)$. Si t^a son los generadores anti hermitianos de este grupo (para $SU(n)$ se tiene $a = 1, 2, \dots, n^2 - 1$), entonces podemos escribirlo como

$$A_\mu = et^a A_\mu^a. \quad (2.47)$$

El campo $F_{\mu\nu}$ toma valores en el algebra, está dado por la ec. (2.36) y junto con A_μ cambian bajo transformaciones de norma como

$$\begin{aligned} A_\mu &\longrightarrow A'_\mu = w A_\mu w^{-1} + w \partial_\mu w^{-1}, & w \in SU(n), \\ F_{\mu\nu} &\longrightarrow F'_{\mu\nu} = w F_{\mu\nu} w^{-1}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Las componentes de $F_{\mu\nu}$ en la base del álgebra son

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e C^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.49)$$

donde C^{abc} son las constantes de estructura del grupo.

Supongamos también que ϕ está en la representación adjunta del $SU(n)$, por lo tanto podemos escribirlo como

$$\phi = t^a \phi^a, \quad (2.50)$$

donde ϕ^a son campos reales. Al estar en la representación adjunta, el campo ϕ , transforma como

$$\phi \longrightarrow \phi' = w\phi w^{-1}, \quad w \in SU(n). \quad (2.51)$$

Su derivada covariante es

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ad(A_\mu)\phi = \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi], \quad (2.52)$$

que en términos de sus componentes es

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + eC^{abc} A_\mu^b \phi^c. \quad (2.53)$$

El Lagrangiano invariante de norma que acopla a los campos A_μ y ϕ es

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a - (D^\mu \phi)^a (D_\mu \phi)^a - m^2 \phi^a \phi^a - \lambda (\phi^a \phi^a)^2 \right], \quad (2.54)$$

donde hemos supuesto que el campo ϕ interactúa consigo mismo de la forma más simple. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen del Lagrangiano son

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a = e j^{\nu a}, \quad j^{\nu a} = -e C^{abc} (D^\mu \phi^b) \phi^c, \quad (2.55)$$

$$D^\mu D_\nu \phi^a - m^2 \phi^a - 2\lambda (\phi^b \phi^b) \phi^a = 0, \quad (2.56)$$

donde

$$(D_\mu F^{\lambda\rho})^a = \partial_\mu F^{\lambda\rho a} + e C^{abc} A_\mu^b F^{\lambda\rho c}. \quad (2.57)$$

Concluimos este capítulo señalando que $F_{\mu\nu}$, para este caso, también satisface la identidad de Bianchi. La demostración es totalmente análoga a la del caso en el que el grupo de norma es $SU(2)$.

Capítulo 3

Ejemplos de Solitones Topológicos

Los solitones son soluciones con energía finita a las ecuaciones clásicas no lineales de los campos. Estos son funciones localizadas de las coordenadas, y por lo tanto conforman paquetes localizados de energía, que decrecen rápidamente en el infinito espacial. La existencia y estabilidad de este tipo de soluciones se debe a la no linealidad de las ecuaciones de movimiento.

Existen varios tipos de solitones. El tipo de solitones con los que estaremos trabajando de ahora en adelante son llamados solitones topológicos estáticos. Estáticos refiriendonos a soluciones que no dependen del tiempo y el significado del término topológico será explicado a lo largo de esta sección.

3.1. Kink

El ejemplo más simple de un solitón topológico es la solución del *kink*. Esta solución nace en una teoría que consiste de un campo escalar real en un *espaciotiempo* dos-dimensional. La acción para esta teoría es

$$S = \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right], \quad (3.1)$$

donde $\pm v$ son los vacíos clásicos y $\mu = 0, 1$. La ecuación de movimiento para el campo ϕ es

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad \text{donde} \quad V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2. \quad (3.2)$$

La energía de este sistema es

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right]. \quad (3.3)$$

Como ya se mencionó anteriormente, un solitón estático es una solución $\phi_s(\mathbf{x})$ a las ecuaciones de movimiento que tiene energía finita y no depende del tiempo. Por lo tanto, la energía para nuestra solución estática $\phi_s(\mathbf{x})$ es

$$E_s = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_s}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi_s^2 - v^2)^2 \right]. \quad (3.4)$$

Notamos que, para que la energía E_s sea finita, las mínimas condiciones que debemos imponer son que ambos integrandos tiendan a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$. Estas dos condiciones se satisfacen si pedimos que nuestra solución ϕ_s cumpla que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi_s(x) = \pm v. \quad (3.5)$$

Dado que $\dot{\phi} = 0$ la ecuación de movimiento para el campo escalar es

$$\phi_s'' - \left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (3.6)$$

Podemos resolver esta ecuación de la siguiente manera. Primero fijemos las condiciones de frontera en el infinito para ϕ_s . Sabemos que las condiciones en infinito para el campo escalar están dadas por la ec. (3.5). Para tratar con un caso específico pidamos que las condiciones sean $\phi_s(\infty) = v$ y $\phi_s(-\infty) = -v$. Multiplicando la ec. (3.6) por ϕ_s' tenemos

$$\begin{aligned} &\implies \phi_s'' \phi_s' - (\partial_\phi V) \phi_s' = 0 \\ &\quad \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} \frac{d\phi_s}{dx} - \frac{\partial V}{\partial \phi} \left(\frac{d\phi_s}{dx} \right) = 0 \\ \implies &\int \left[\frac{d^2 \phi_s}{dx^2} \frac{d\phi_s}{dx} - \frac{\partial V}{\partial \phi_s} \left(\frac{d\phi_s}{dx} \right) \right] dx = \epsilon_0 \\ &\implies \frac{\phi_s'^2}{2} - V = \epsilon_0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para determinar la constante de integración ϵ_0 usaremos las condiciones de frontera. Dado que en $x = \infty$ se tiene que $\phi_s = v$, entonces $V(\phi_s(\infty)) = 0$ y $\phi_s'(\infty) = 0$, lo que implica $\epsilon_0 = 0$. De la ecuación (3.7) se sigue que

$$\phi_s' = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (v^2 - \phi_s^2), \quad (3.8)$$

donde hemos tomado la raíz positiva de tal forma que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi_s = \pm v. \quad (3.9)$$

La solución a esta ecuación es

$$\phi_s = v \tanh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} (x - x_0) \right), \quad (3.10)$$

donde x_0 es una constante de integración, y representa el centro del *kink*.

Discutamos en qué sentido la solución del *kink* es un solitón topológico. En la búsqueda de soluciones con energía finita encontramos que dichas soluciones deben cumplir las condiciones impuestas por la ec. (3.5). Esto implica que cualquier solución con energía finita mapea los dos puntos $x = \infty$ y $x = -\infty$ en el conjunto formado por los dos puntos v y $-v$. Deformaciones continuas del campo ϕ , como la evolución temporal o el efecto de fuentes externas, que no conduzcan a alterar la finitud de la energía de las soluciones, no afectarán los valores de los campos en en infinito espacial, lo que implica que los mapeos entre los conjuntos $\{x = \infty, x = -\infty\}$ y $\{\phi = v, \phi = -v\}$ definidos por estas soluciones se mantendrán también sin cambios. Es decir que si en un punto del tiempo se tiene una configuración con energía finita sus condiciones de frontera se mantendrán. En este sentido, se dice que dichos mapeos son una característica topológica de las soluciones con energía finita.

Es claro que los puntos del conjunto $\{x = \infty, x = -\infty\}$ pueden ser mapeados en puntos del conjuntos $\{\phi = v, \phi = -v\}$ de cuatro formas distintas

1. $\phi(\infty) = v, \quad \phi(-\infty) = v.$
2. $\phi(\infty) = -v, \quad \phi(-\infty) = -v.$
3. $\phi(\infty) = v, \quad \phi(-\infty) = -v.$
4. $\phi(\infty) = -v, \quad \phi(-\infty) = v.$

Esto significa que el conjunto soluciones con energía finita puede ser dividido en cuatro subconjuntos ajenos, y que la evolución temporal, en su caso, no saca a un campo de su subconjunto. Notemos que el vacío clásico $\phi = v$ está contenido en el subconjunto 1 mientras que el *kink* está contenido en el subconjunto 3.

3.2. Un Teorema Sobre la Ausencia de Solitones

En esta sección revisaremos un resultado que nos permite descartar, en algunos casos, la existencia de soluciones estáticas no-triviales a las ecuaciones de movimiento en teorías de norma con escalares.

Consideremos el modelo de una teoría de norma en un *espaciotiempo* $(d + 1)$ dimensional. Por simplicidad nos restringiremos al caso en el cual los elementos del grupo de norma G pueden ser vistos como matrices. Sea A_μ el campo de norma y ϕ un campo escalar que transforma de acuerdo con la representación unitaria T del grupo G , es decir $T(A)$, donde $A \in \mathfrak{g}$, es una matriz unitaria. La densidad lagrangiana de esta teoría es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - V(\phi), \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \\ D_\mu\phi &= [\partial_\mu + T(A_\mu)]\phi. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Consideremos el caso en el cual los campos no dependen del tiempo y en el que se fija la norma $A_0 = 0$. Por lo tanto para los campos que cumplen estas condiciones se tiene

$$F_{0i} = 0, \quad (3.13)$$

$$D_0\phi = 0. \quad (3.14)$$

Notemos que la no dependencia del tiempo de los campos no es un concepto que sea invariante de norma, sin embargo las ec. (3.13) y (3.14) si lo son, por lo tanto podríamos usar estas dos ecuaciones para redefinir, de una forma más conveniente, el tipo de campos en los que estamos interesados.

La formulación del resultado que queremos obtener requiere que hagamos una serie de suposiciones. Primero supongamos que el potencial $V(\phi)$ esta acotado por abajo, de tal forma que podemos elegir un vacío clásico ϕ_v tal que

$$V(\phi_v) = 0 \quad \text{y} \quad V(\phi) \geq 0 \quad . \quad (3.15)$$

Además de esto, debemos suponer la existencia de unos campos, $\mathbf{A}_s(\mathbf{x})$ y $\phi_s(\mathbf{x})$, que sean soluciones estáticas a las ecuaciones de movimiento con energía finita.

La energía de este modelo es

$$E = \int d^d x \left[-\frac{1}{2e^2} \text{Tr}(F_{ij}F^{ij}) + (D^i\phi)^\dagger(D_i\phi) + V(\phi) \right]. \quad (3.16)$$

Consideremos la siguiente familia de campos

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(\mathbf{x}) &= \phi_s(\lambda\mathbf{x}), \\ \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{x}) &= \lambda\mathbf{A}_s(\lambda\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{3.17}$$

donde λ es un parámetro real.

Para el caso estático, los campos que extremizan al lagrangiano también extremizan al funcional de energía, por lo tanto el funcional (3.16) es extremal cuando $\mathbf{A} = \mathbf{A}_s$ y $\phi = \phi_s$. De este modo, el funcional de energía calculado en la familia de campos (3.17),

$$E(\lambda) = E[A_\lambda(\mathbf{x}), \phi_\lambda(\mathbf{x})],\tag{3.18}$$

debe tener un extremo en $\lambda = 1$, es decir

$$\left. \frac{dE}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 0.\tag{3.19}$$

Veremos en que en algunos casos esta situación es imposible.

Calculemos $E(\lambda)$, haciendo el cambio de variable $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$. Tenemos que $d^d x = \lambda^{-d} d^d y$ y $\partial_{x^i} = \lambda \partial_{y^i}$. Usando esto obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\mathbf{x}^{(\lambda)} \phi_\lambda(\mathbf{x}) &= [\partial_\mathbf{x} + T(\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{x}))] \phi_\lambda(\mathbf{x}) \\ &= [\lambda \partial_\mathbf{y} + \lambda T(\mathbf{A}_s(\lambda\mathbf{x}))] \phi_s(\lambda\mathbf{x}) \\ &= \lambda [\partial_\mathbf{y} + T(\mathbf{A}_s(\mathbf{y}))] \phi_s(\mathbf{y}) \\ &= \lambda \mathbf{D}_\mathbf{y} \phi_c(\mathbf{y})\end{aligned}\tag{3.20}$$

y F_{ij} transforma como

$$\begin{aligned}F_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{x}) &= \partial_{x^i} A_\lambda^j(\mathbf{x}) - \partial_{x^j} A_\lambda^i(\mathbf{x}) + [A_\lambda^i(\mathbf{x}), A_\lambda^j(\mathbf{x})], \\ &= \lambda^2 (\partial_{y^i} A_s^j(\mathbf{y}) - \partial_{y^j} A_s^i(\mathbf{y}) + [A_s^i(\mathbf{y}), A_s^j(\mathbf{y})]), \\ &= \lambda^2 F_{ij}^{(c)}(\mathbf{y}).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Entonces $E(\lambda)$ es

$$\begin{aligned}E(\lambda) &= \lambda^{-d} \int d^d y \left[-\lambda^4 \frac{1}{2e^2} \text{Tr}(F_{ij}^{(s)}(\mathbf{y}) F^{(s)ij}(\mathbf{y})) \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 (D^i(\mathbf{y}) \phi_s)^\dagger (D_i \phi_s(\mathbf{y})) + V(\phi(\mathbf{y})) \right].\end{aligned}\tag{3.22}$$

Si nombramos

$$G = \int d^d y \left[-\frac{1}{2e^2} \text{Tr}(F_{ij}^{(s)}(\mathbf{y})F^{(s)ij}(\mathbf{y})) \right], \quad (3.23)$$

$$\Gamma = \int d^d y (D^i(\mathbf{y})\phi_s)^\dagger (D_i\phi_s(\mathbf{y})), \quad (3.24)$$

$$\Psi = \int d^d y V(\phi(\mathbf{y})), \quad (3.25)$$

la energía puede reescribirse como

$$E(\lambda) = \lambda^{4-d}G + \lambda^{2-d}\Gamma + \lambda^{-d}\Psi. \quad (3.26)$$

Imponiendo la condición (3.19) se obtiene que

$$(4-d)G + (2-d)\Gamma - d\Psi = 0. \quad (3.27)$$

De esta ecuación y de considerar que $G, \Gamma, \Psi \geq 0$ ($-\text{Tr}(F_{ij}^{(s)}(\mathbf{y})F^{(s)ij}(\mathbf{y})) \geq 0$ en virtud del producto interior definido en (A.9)) se derivan los siguientes posibles casos:

1. **$d > 4$** : Esta condición implica que

$$4-d \equiv -\alpha^2 < 0, \quad (3.28)$$

$$2-d \equiv -\beta^2 < 0, \quad (3.29)$$

con $\alpha^2, \beta^2 > 0$. Usando la ec. (3.27) tenemos que

$$-(\alpha^2 G + \beta^2 \Gamma + d\Psi) = 0. \quad (3.30)$$

Esta ecuación se satisface solo si $G = \Gamma = \Psi = 0$ y ésto solo ocurre si los campos $\mathbf{A}_s(\mathbf{x})$ y $\phi_s(\mathbf{x})$ son las soluciones triviales, es decir $\phi_s = \phi_v$ y $\mathbf{A}_s = \mathbf{0}$.

2. **$d = 4$** : En este caso la ec. (3.27) toma la forma

$$-2\Gamma - 4\Psi = 0 \implies -2\Gamma = 4\Psi. \quad (3.31)$$

Dado que $G, \Psi \geq 0$, esta condición solo se satisface si $\Gamma = \Psi = 0$, esto implica que

$\phi = \phi_v$. Sin embargo no se impone ninguna restricción sobre G , esto quiere decir que la posible existencia de una solución estática con energía finita requiere forzosamente que el campo escalar sea el vacío clásico.

3. $d = 3$: De esta condición se obtiene que

$$G - \Gamma - 3\Psi = 0, \quad (3.32)$$

donde no se impone ninguna restricción sobre G , Γ y Ψ . Por lo tanto, nuestro análisis no prohíbe la existencia de soluciones no triviales estáticas con energía finita.

Es importante señalar que en este caso, aunque no se prohíba la existencia de soluciones, tampoco se cuenta con la información necesaria para concluir que dichas soluciones existen.

4. $d < 3$: Para este caso se tiene

$$4 - d \equiv \alpha^2 > 0, \quad (3.33)$$

$$2 - d \equiv \beta^2 \geq 0, \quad (3.34)$$

lo que implica que

$$\alpha^2 G + \beta^2 \Gamma - d\Psi = 0. \quad (3.35)$$

Esta ecuación de nuevo no impone alguna restricción sobre G , Γ o Ψ , por lo cual nuestro análisis no es concluyente.

En conclusión, el análisis empleado aquí, que se conoce como *argumento de escala* (puesto que se emplearon transformaciones de escalamiento para su implementación (3.17)) prohíbe la existencia de soluciones clásicas no triviales con energía finita para $d > 4$, para teorías de norma acopladas con campos escalares de la forma dada por la acción (3.11). Para $d = 4$ solo se prohíbe la existencia de una solución no trivial para el campo escalar y no para el campo de norma.

3.3. El *Vortex*

El *vortex* es el ejemplo más simple de un solitón en una teoría de norma con escalares. Éste surge en un modelo con grupo de norma $U(1)$ donde ocurre el mecanismo de Higgs y

en un *espaciotiempo* de $(2 + 1)$ dimensiones. De esta forma, el campo de norma solo consistirá de las componentes $A_\mu(x)$ (los índices del algebra no aparecerán), con $\mu = 0, 1, 2$. Las transformaciones de norma para el campo de norma y para el campo escalar complejo $\phi(x)$ son

$$\phi(\mathbf{x}) \rightarrow e^{i\alpha(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x}), \quad (3.36)$$

$$A_\mu(\mathbf{x}) \rightarrow A_\mu(\mathbf{x}) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(\mathbf{x}). \quad (3.37)$$

El lagrangiano para este modelo es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - (D^\mu\phi)^*D_\mu\phi - \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi - v^2)^2, \quad (3.38)$$

con $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$ y donde el vacío clásico se ha elegido como $A_\mu = 0$ y $\phi = v$. Las ecuaciones de movimiento para los campos son

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -i[\phi^*(D^\nu\phi) - (D^\nu\phi^*)\phi], \\ D^\mu D_\mu\phi &= -\lambda(\phi^*\phi - v^2)\phi, \end{aligned} \quad (3.39)$$

y el complejo conjugado de la última ecuación es la ecuación de movimiento para ϕ^* .

Para buscar una solución de solitón, consideremos el caso en el cual los campos no son singulares, no dependen del tiempo y en el que se fija la norma $A_0 = 0$. Para este tipo de configuraciones el funcional de energía es

$$E[A_i(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})] = \int d^2x \left[\frac{1}{4}F^{ij}F_{ij} + (D^i\phi)^*D_i\phi + \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi - v^2)^2 \right]. \quad (3.40)$$

Una condición necesaria para que la energía sea finita, es que el término correspondiente a la energía potencial tienda a cero en el infinito espacial, lo que sucederá si se cumple

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\phi| = v. \quad (3.41)$$

A partir de esta condición podemos generar una serie de conclusiones importantes. Consideremos un círculo de radio R con centro en el origen. Si R es lo suficientemente grande, el módulo del campo escalar evaluado en ese círculo es igual a v . Aunque el valor del módulo del campo escalar esté fijo, la fase del campo escalar puede depender del ángulo polar θ en el espacio dos dimensional. De esta forma para $|\mathbf{x}| = R$ podemos escribir al campo escalar de la siguiente manera

$$\phi = e^{if(\theta)}v. \quad (3.42)$$

Esta función define un mapeo del círculo de radio R en el círculo de radio v en el plano complejo. Este mapeo se puede caracterizar por un número entero $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, llamado número de enrollamiento, que representa el número de vueltas que dicho mapeo da al círculo de radio v . Los números enteros positivos representan el número de vueltas que el mapeo da en sentido opuesto de las manecillas del reloj y los negativos las vueltas en sentido de las manecillas del reloj.

Los mapeos con diferentes n pueden expresarse como

$$\phi = e^{in\theta} v. \quad (3.43)$$

Es evidente que la fase de ϕ no es un invariante de norma, sin embargo, n sí es invariante bajo transformaciones de norma que sean suaves en todo el espacio dos dimensional.

Por ejemplo, uno podría tratar de cambiar a n utilizando una función de norma

$$e^{i\alpha(\mathbf{x})} = e^{i\theta}. \quad (3.44)$$

Sin embargo, notemos que esta transformación de norma es singular para el campo vectorial

$$A_i + \frac{1}{e} \partial_i \alpha(\mathbf{x}) \implies A'_\theta = A_\theta + \frac{1}{er}, \quad (3.45)$$

puesto que se comporta como $1/r$ cuando $r \rightarrow 0$. Aunque éste no es un resultado general, dado que estamos tomando una transformación de norma específica, nos da una idea de como funcionaría casos más generales.

El número n , que caracteriza el comportamiento asintótico de ϕ se define como

$$n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{d\phi}{\phi}, \quad (3.46)$$

donde γ es una curva cerrada que da una vuelta al origen del sistema coordenado. El número de enrollamiento no cambiará aún cuando la curva γ sufra deformaciones continuas, en virtud del teorema de la deformación del cálculo en variable compleja [6]¹. Por lo tanto, podemos concluir que el número de enrollamiento n es de carácter topológico y nos permite clasificar el comportamiento de las soluciones en el infinito espacial. Como en el caso del *kink* el conjunto

¹TEOREMA: Sea f analítica en un conjunto abierto A , si γ_1 y γ_2 son dos curvas cerradas homotópicas en G , entonces $\oint_{\gamma_1} f = \oint_{\gamma_2} f$.

de soluciones con energía finita se puede dividir en subconjuntos disjuntos, caracterizados por un número entero $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Al ser n es una propiedad invariante se tiene que bajo deformaciones continuas de ϕ , en especial por las dadas por la evolución temporal, si en un instante del tiempo una solución con energía finita tiene un número de enrollamiento $n \neq 0$, éste no cambiará conforme el tiempo avance, por lo tanto dicha solución no se disipará al vacío clásico, puesto que éste tiene un número de enrollamiento $n = 0$.

Dos soluciones con el mismo n se relacionan, de forma asintótica, a través de una transformación de norma. Si tomamos a $\phi = e^{if(\theta)}v$ y calculamos n tenemos

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d(v e^{if(\theta)})}{v e^{if(\theta)}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df}{d\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} [f(2\pi) - f(0)]. \quad (3.47)$$

Ahora consideremos dos soluciones con el mismo n , de tal forma que asintóticamente se comporten como

$$\phi_1 = e^{if_1(\theta)}v, \quad (3.48)$$

$$\phi_2 = e^{if_2(\theta)}v. \quad (3.49)$$

De este modo se tiene

$$\phi_2 = e^{if_{21}(\theta)}\phi_1, \quad (3.50)$$

con $f_{21}(\theta) = f_2(\theta) - f_1(\theta)$. Como ϕ_1 y ϕ_2 tienen el mismo número de enrollamiento se cumple que $f_1(2\pi) - f_1(0) = f_2(2\pi) - f_2(0)$. Notemos que esta fase tiene número de enrollamiento cero

$$f_{21}(2\pi) - f_{21}(0) = 0. \quad (3.51)$$

Hemos encontrado una transformación de norma que nos relaciona dos soluciones con el mismo n , sin embargo la transformación de norma dada por la función, $e^{if_{21}(\theta)}$ no es suave en todo el espacio, como puede verse por la ec. (3.45). No obstante, a partir de ésta podemos construir una nueva función de norma que sí lo sea. Consideremos la siguiente función de norma

$$\alpha(r, \theta) = g(r)f_{21}(\theta), \quad (3.52)$$

donde $g(r)$ es una función suave arbitraria que satisface $g(r \rightarrow 0) = 0$ y $g(r \rightarrow \infty) = 1$. Bajo

transformaciones de norma con esta nueva función α el campo ϕ_1 se transforma en

$$\phi'_1 = e^{i\alpha(r,\theta)} \phi_1, \quad (3.53)$$

que en general cumple que $\phi_2 \neq \phi'_1$. Sin embargo, ϕ'_1 tiene el mismo comportamiento asintótico que ϕ_2 . De esta forma, usando transformaciones de norma que son suaves en el espacio, podemos ver que asintóticamente todas las soluciones con el mismo n son equivalentes.

Busquemos ahora soluciones en forma de solitón con $n = 1$. Como vimos, para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, la forma de el campo escalar es

$$\phi = e^{i\theta} v. \quad (3.54)$$

Dado que, en coordenadas polares, el elemento de área esta dado por $d^2x = r dr d\theta$, el término $(D^i \phi)^* D_i \phi$, en el hamiltoniano (3.40), debe decrecer más rápido que $1/r$. Sin embargo, esto no sucede, puesto que la derivada tiene la forma

$$\partial_i \phi = (e^{i\theta} v) \left(-\frac{i}{r} \varepsilon_{ij} n^j \right) \quad \text{con} \quad n^i = \frac{x^i}{r}. \quad (3.55)$$

Podemos arreglar este problema fijando la siguiente condición al infinito para el campo vectorial

$$A_i = -\frac{1}{er} \varepsilon_{ij} n^j, \quad (3.56)$$

así

$$D_i \phi = \partial_i \phi - e A_i \phi = -(e^{i\theta} v) \left(\frac{i}{r} \varepsilon_{ij} n^j \right) + \left(\frac{1}{e} \varepsilon_{ij} n^j \right) (e^{i\theta} v) = 0. \quad (3.57)$$

Este comportamiento asintótico para A_i es pura norma, por lo tanto F_{ij} decrecerá más rápido que $1/r^2$, a pesar de que A_i decrezca como $1/r$.

Para obtener una solución de solitón, debemos encontrar una solución suave a las ecuaciones de movimiento que satisfaga las condiciones (3.54) y (3.56). Con este fin se propone el *ansatz*

$$\phi(r, \theta) = v e^{i\theta} F(r), \quad (3.58)$$

$$A_i(r, \theta) = -\frac{1}{er} \varepsilon_{ij} n^j A(r), \quad (3.59)$$

donde $F(r)$ y $A(r)$ son funciones que deben ser encontradas a partir de las ecuaciones de movimiento.

Usando el *ansatz* en las ecuaciones de movimiento (3.39), se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$-\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dA}{dr} \right) - 2e^2 v^2 \frac{F^2(1-A)}{r} = 0, \quad (3.60)$$

$$-\frac{d}{dr} \left(r \frac{dF}{dr} \right) + \lambda v^2 r F(F^2 - 1) + \frac{F(1-A^2)}{r} = 0. \quad (3.61)$$

Es importante mencionar el hecho de que las ecuaciones de movimiento generales se reduzcan a dos ecuaciones para dos funciones F y A , es una propiedad no trivial del *ansatz*.

De las condiciones (3.54) y (3.56) se sigue que las funciones A y F deben satisfacer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (F, A) = (1, 1). \quad (3.62)$$

Adicionalmente, para que los campos sean suaves en el origen debemos imponer

$$\lim_{r \rightarrow 0} (F, A) = (0, 0), \quad (3.63)$$

o de forma más precisa, cuando $r \rightarrow 0$ el comportamiento de las funciones debe ser tal que $F(r) = O(r)$ y $A(r) = O(r^2)$.

Para terminar esta sección, debemos mencionar que desafortunadamente no es posible encontrar una solución analítica a las ecuaciones para F y A con las condiciones de frontera (3.62) y (3.63). Y que dichas soluciones deben ser encontradas numéricamente. Pese a esto, hemos podido analizar el carácter topológico de las soluciones, utilizando solo las condiciones de que éstas sean estáticas y que tengan energía finita.

Capítulo 4

El Dyon de Julia-Zee

Un ejemplo importante de solitones topológicos son los dyones, que son soluciones estáticas a las ecuaciones de movimiento de los campos que poseen tanto cargas eléctricas como magnéticas. En esta sección discutiremos la solución de dyones de Julia-Zee [7], la cual surge en un modelo de teoría de Yang-Mills con grupo de norma $SU(2)$. Haremos especial énfasis en el procedimiento para obtener la solución, dado que tener muy claro ciertos detalles de éste será de vital importancia para la sección posterior.

4.1. Modelo de Georgi-Glashow

El modelo con el que trabajaremos es el llamado modelo de Georgi-Glashow, el cuál es un modelo con grupo de norma $SU(2)$ y un campo de Higgs, $\phi(\mathbf{x})$, que vive en la representación adjunta del grupo. Dado que el espacio de la representación adjunta es el álgebra del grupo, podemos escribir al campo de Higgs como

$$\phi = \phi^a(\mathbf{x})t^a, \quad \text{con} \quad t^a = -\frac{\tau^a}{2i}, \quad (4.1)$$

donde $\phi^a(\mathbf{x})$ es un triplete de campos escalares reales ($a = 1, 2, 3$), y t^a son los generadores anti-hermitianos de $SU(2)$.

De la misma forma, puesto que el campo de norma está en el algebra del grupo, podemos escribirlo en términos de sus componentes respecto a la base

$$A_\mu = eA_\mu^a t^a. \quad (4.2)$$

Estos campos tranquilasforman bajo transformaciones de norma como

$$\phi \longrightarrow \phi' = Ad(w)\phi = w\phi w^{-1}, \quad (4.3)$$

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = wA_\mu w^{-1} + w\partial w^{-1}. \quad (4.4)$$

La acción para este modelo es

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}{}^a - \frac{1}{2}D^\mu\phi^a D_\mu\phi^a - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - v^2)^2 \right], \quad (4.5)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ y

$$D_\mu\phi^a = \partial_\mu\phi^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu{}^a\phi^c, \quad (4.6)$$

$$F_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu{}^b A_\nu{}^c. \quad (4.7)$$

Detalles sobre el cómo transforman las componentes ϕ^a y la invariancia de los términos que los involucran en la acción pueden verse en el Apéndice B. Las ecuaciones de movimiento que surgen de hacer la variación en esta acción son

$$D_\mu F^{\mu\nu a} = -e\varepsilon^{abc}(D^\mu\phi^b)\phi^c, \quad (4.8)$$

$$D^\mu D_\mu\phi^a = -\lambda(\phi^b\phi^b - v)\phi^a. \quad (4.9)$$

4.2. Las Ecuaciones de Movimiento y El Ansatz

Tanto la solución del monopólo magnético como las de dyones surgen, en el modelo de Georgi-Glashow, en la búsqueda de una solución estática esféricamente simétrica. Siguiendo a Prasad y Sommerfield [8], dicho *ansatz* es

$$\begin{aligned} A_0{}^a &= \frac{n^a}{er}J(r), \\ A_i{}^a &= \varepsilon^{aik}\frac{n^k}{er}(K(r) - 1), \\ \phi^a &= \frac{n^a}{er}H(r), \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $n^a = \frac{x^a}{r}$. Usando este *ansatz* en las ecuaciones de movimiento (4.8) y (4.9) se obtiene

(Apéndice C)

$$\begin{aligned}
r^2 J'' &= 2JK^2, \\
r^2 H'' &= 2HK^2 - \lambda H \left(r^2 - \frac{1}{e^2} H^2 \right), \\
r^2 K'' &= K(K^2 - J^2 + H^2 - 1).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Además de este sistema de ecuaciones diferenciales, necesitamos especificar las condiciones de frontera que deben satisfacer las funciones J , K y H . Para que los campos (4.10) sean regulares en el origen debemos imponer

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{H}{er}, \frac{J}{er}, K \right) = (0, 0, 1). \tag{4.12}$$

La condición de frontera en el infinito para los campos la obtendremos de pedir que la energía del sistema sea finita. La energía del modelo es

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F^{ija} F_{ij}{}^a - \frac{1}{2} F^{i0a} F_{i0}{}^a + \frac{1}{2} D_i \phi^a D^i \phi^a - \frac{1}{2} D_0 \phi^a D^0 \phi^a + \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - v^2)^2 \right], \tag{4.13}$$

que en términos del *ansatz* se puede reescribir como

$$H = \int d^3x \left[\frac{(K')^2}{e^2 r^2} + \frac{(u')^2}{2} + \frac{(f')^2}{2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{2e^2 r^4} + \frac{K^2(u^2 + f^2)}{r^2} + \frac{\lambda(u^2 - v^2)^2}{4} \right], \tag{4.14}$$

con $u = \frac{H}{er}$ y $f = \frac{J}{er}$. Para que la solución tenga energía finita, debemos imponer las siguientes condiciones de frontera

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (f, u, K) = (C_0, \pm v, 0), \tag{4.15}$$

es decir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{J}{er}, \frac{H}{er}, K \right) = (C_0, \pm v, 0), \tag{4.16}$$

donde C_0 es una constante arbitraria.

4.3. Solución Explicita en el Límite de BPS

Las ecuaciones (4.11) no pueden resolverse de forma explícita para el caso en el cual $\lambda > 0$. Sin embargo, existe una familia de soluciones exactas para el caso $\lambda = 0$ (llamado límite de Bogomolny–Prasad y Sommerfield, abreviado BPS) [8], que representa físicamente la situación en la cual el campo escalar no interactúa consigo mismo.

En el límite de BPS se tiene

$$\begin{aligned} r^2 J'' &= 2JK^2, \\ r^2 H'' &= 2HK^2, \\ r^2 K'' &= K(K^2 - J^2 + H^2 - 1). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Notemos que, cuando $\lambda = 0$, el término $\frac{(u^2 - v^2)^2}{4}$ ya no aparece en el hamiltoniano, en consecuencia u puede tender una constante arbitraria cuando $r \rightarrow \infty$, y ya no forzosamente a $\pm v$. Por lo tanto, las condiciones de frontera en el infinito se pueden reformular de la siguiente manera

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{J}{er}, \frac{H}{er}, K \right) = (C_0, C_1, 0). \quad (4.18)$$

quedando las condiciones en el origen (4.12) sin cambios.

Para resolver las ecuaciones (4.17) es conveniente resolver primero el caso en que $J = 0$

$$\begin{aligned} r^2 H'' &= 2HK^2, \\ r^2 K'' &= K(K^2 + H^2 - 1), \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde la energía asociada es

$$H = \frac{4\pi}{e^2} \int_0^\infty \left[(K')^2 + \frac{1}{r^2} (rH' - H)^2 + \frac{1}{2r^2} (K^2 - 1) + \frac{K^2 H^2}{r^2} \right] dr. \quad (4.20)$$

Es claro que las ecuaciones (4.19) son las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional de energía (4.20), por consiguiente, cualquier conjunto de campos que extremize al funcional energía será solución a las ecuaciones de movimiento (4.19). Realizando una serie de integrales por partes y utilizando las condiciones de frontera, se puede llegar a que

$$H = \frac{4\pi}{e^2} \int_0^\infty \left[\left(K' + \frac{KH}{r} \right)^2 + \frac{(rH' - H + K^2 - 1)^2}{2r^2} \right] dr + \frac{4\pi C_1}{e} \geq \frac{4\pi C_1}{e}. \quad (4.21)$$

Podemos notar que la energía está acotada por abajo, y el mínimo se alcanza cuando

$$\begin{aligned} rK' &= -KH, \\ rH' &= H - K^2 + 1. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Las soluciones de (4.22) también son soluciones a (4.19) (Maison demostró que ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes [9]), dado que éstas extremizan al funcional de energía.

Ahora, siguiendo el procedimiento expuesto en [2], obtendremos una solución explícita a este nuevo par de ecuaciones. Hagamos el siguiente cambio de variable

$$H = -1 - rU, \tag{4.23}$$

$$K = rV. \tag{4.24}$$

De esta forma las ecuaciones (4.22) se transforman en

$$U' = V^2, \tag{4.25}$$

$$V' = UV. \tag{4.26}$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} U'U &= UV^2, & VV' &= UV^2 \\ \implies U'U - V'V &= 0 \\ \implies \frac{d(U^2 - V^2)}{dr} &= 0 \\ \implies U^2 - V^2 &= C_2, \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde C_2 es una constante de integración. Podríamos tratar de determinar esta constante empleando las condiciones de frontera, sin embargo esto resulta en que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U^2 - V^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} - \frac{H}{r} \right)^2 - \left(\frac{K}{r} \right)^2 = C_1^2 e^2 \implies C_2 = C_1^2 e^2, \tag{4.28}$$

lo cual no impone ninguna condición sobre C_2 .

Usando (4.27) en (4.22) obtenemos

$$U' = U^2 - C_2, \tag{4.29}$$

que tiene dos posibles soluciones

$$U = -C \coth(Cr + \beta), \quad (4.30)$$

$$U = -C \tanh(Cr + \beta), \quad (4.31)$$

donde $C = \pm\sqrt{C_2}$. No obstante, para que las condiciones de frontera en el origen (4.12) se satisfagan debe descartarse la solución de la tangente hiperbólica y además debemos pedir que $\beta = 0$. De este modo, la solución es

$$\begin{aligned} H &= Cr \coth(Cr) - 1, \\ K &= \frac{Cr}{\sinh(Cr)}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para dar una solución al caso en que $J \neq 0$, notemos que el sistema de ecuaciones (4.17) se reduce al sistema (4.19) si hacemos la transformación

$$H \rightarrow \cosh(\alpha)H, \quad J \rightarrow \sinh(\alpha)H, \quad (4.33)$$

donde α es una constante arbitraria. Luego una solución para $J \neq 0$ es

$$\begin{aligned} H &= \cosh(\alpha)Cr \coth(Cr) - 1, \\ J &= \sinh(\alpha)(Cr \coth(Cr) - 1), \\ K &= \frac{Cr}{\sinh(Cr)}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.4. Carga Eléctrica y Magnética

Para definir correctamente al campo del fotón (electromagnético) debemos ser cuidadosos. En un punto específico del *espaciotiempo* el campo $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)^T$ apuntará en una dirección específica en el espacio del álgebra de Lie. Esto provocará, debido el mecanismo de Higgs, que dos de los generadores del grupo produzcan un rompimiento de la simetría de norma. Este rompimiento de simetría dará como resultado que, en vez de tener tres campos vectoriales sin masa, se tengan dos campos vectoriales con masa y uno sin masa, que es justo la componente paralela al campo ϕ . Este campo sin masa es el campo del fotón. Aunque dicha componente del campo vectorial esta dada por $\hat{\phi} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu}$, esta definición no es

invariante de norma $U(1)$, la definición invariante de norma $U(1)$ del campo del fotón es [10]

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{|\phi|} \phi \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{e|\phi|^3} \phi \cdot (D_\mu \phi \times D_\nu \phi). \quad (4.35)$$

De esta forma podemos calcular el campo eléctrico y magnético (Apéndice C)

$$E^i = \mathcal{F}^{0i} = \frac{n^i}{e} \frac{d}{dr} \left(\frac{J}{r} \right), \quad (4.36)$$

$$B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \mathcal{F}^{jk} = \frac{n^i}{er^2}. \quad (4.37)$$

Tanto la carga magnética como eléctrica pueden calcularse respectivamente como

$$g = \frac{1}{4\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{|\mathbf{x}|=r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{e}, \quad (4.38)$$

$$q = \frac{1}{4\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{|\mathbf{x}|=r} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{e} \lim_{r \rightarrow \infty} (rJ'(r) - J(r)). \quad (4.39)$$

En el caso en que $J = 0$ no hay campo eléctrico y $q = 0$, pero la carga magnética $g = \frac{1}{e}$ se mantiene. A esta solución se le conoce como el monopolo magnético de t'Hooft–Polyakov, y tiene una masa (energía estática) de

$$M = \frac{4\pi C}{e^2} \quad (4.40)$$

Cuando $J \neq 0$ se tiene que

$$q = \frac{\sinh(\alpha)}{e}. \quad (4.41)$$

En esta solución existen tanto cargas eléctricas como magnéticas, y es conocida como el dyon de Julia–Zee.

4.5. Discusión del carácter topológico de la solución

En el caso del *vortex* analizamos el carácter topológico de la solución a través del número de enrollamiento. En el modelo de Georgi-Glashow en el caso cuando el campo ϕ es estático este es una función $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, en analogía con el caso del *vortex*, donde el campo escalar era $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Por lo tanto la generalización del número de enrollamiento, en el modelo de Georgi-Glashow, sería el número de veces el mapéo ϕ cubre a la esfera de radio v

tomando como dominio una esfera con un radio R suficientemente grande. A dicho número lo llamaremos el grado del mapeo.

Veamos algunos ejemplos. Una configuración de los campos que representa un vacío clásico es

$$\begin{aligned} A_\mu^{a(v)} &= 0, \\ \phi^{(v)} &= (0, 0, v)^T. \end{aligned} \quad (4.42)$$

En este caso $\phi^{(v)}$ mapea cualquier esfera en su dominio al punto fijo $v\hat{e}_3$ en la esfera de radio v . Por lo tanto, esta configuración tiene grado cero, puesto que el mapeo no cubre ni una vez a la esfera de radio v .

Veamos qué sucede con la solución del monopolo. En este caso, para el campo ϕ dado en el ansatz (4.10) y las condiciones de frontera (4.16), para $r \gg 0$ se tiene

$$\phi^{(m)} = \pm v\hat{r}. \quad (4.43)$$

Notemos que este mapeo cubre una vez a la esfera de radio v . Por lo tanto la solución del monopolo tiene grado uno.

Un mapeo f_n de grado n puede construirse de la siguiente manera

$$f_n = v(\sin\theta \cos n\varphi, \sin\theta \sin n\varphi, \cos\theta). \quad (4.44)$$

De la misma forma que en el caso del *kink* o del *vortex*, el grado de un mapeo es invariante bajo deformaciones continuas de los campos, en particular bajo la evolución temporal y las transformaciones de norma.

Notemos que en la solución del monopolo, la carga magnética puede calcularse usando la definición del campo del fotón (4.35) y el comportamiento asintótico del campo vectorial $\mathbf{A}_\mu = 0$ como

$$g = \frac{1}{8\pi ev^3} \oint_\Sigma \varepsilon^{ijk} \phi \cdot (\partial_j \phi \times \partial_k \phi) dS_i, \quad (4.45)$$

donde Σ es una superficie cerrada suficientemente alejada del origen. La cantidad g es invariante bajo variaciones $\delta\phi$ del campo ϕ que preserven el vacío clásico [11], *i.e.*

$$D_\mu \delta\phi = 0 \quad \text{y} \quad \phi \cdot \delta\phi = 0. \quad (4.46)$$

Variaciones en los campos que preservan el vacío son las debidas a la evolución temporal,

a las transformaciones de norma y a los cambios continuos del campo de Higgs sobre la superficie Σ . Por lo tanto, la carga magnética g también es de carácter topológico.

Capítulo 5

Solución con el Término- θ

En los últimos años se ha logrado avanzar en la investigación de la teoría efectiva conocida como electrodinámica- θ ([12, 13]). Ésta resulta de extender la electrodinámica de Maxwell agregando al lagrangiano de Maxwell el término

$$\Delta\mathcal{L}_\theta = -\frac{\theta}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \quad (5.1)$$

de Chern-Pontryagin (Apéndice D), el cual denotaremos como CH-P, con un campo escalar θ no dinámico. Dicho término es comúnmente denominado término- θ .

Este modelo ha adquirido gran relevancia dentro del campo de la física de materia condensada, puesto que describe fenómenos como los aislantes topológicos.

En este capítulo generalizaremos dicho acoplamiento a una teoría de Yang-Mills con grupo de norma $SU(2)$. Y estudiaremos los efectos que surjan de la adición del término- θ a la acción (4.1) del modelo de Georgi-Glashow. De forma más específica se busca generalizar la solución de Julia-Zee en este nuevo modelo.

5.1. Acción y Ecuaciones de Movimiento

La acción del nuevo modelo es

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}{}^a - \frac{\theta(t, \mathbf{x})}{4}\tilde{F}^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}{}^a - \frac{1}{2}D^\mu\phi^a D_\mu\phi^a - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - v)^2 \right], \quad (5.2)$$

donde $A_\mu{}^a$ y ϕ^a se definen igual que en el capítulo anterior y

$$\tilde{F}^{\mu\nu a} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}{}^a. \quad (5.3)$$

Las ecuaciones de movimiento para los campos que se obtienen de extremizar esta acción son

$$\begin{aligned} D_\mu F^{\mu\nu a} + \partial_\mu \theta(t, \mathbf{x}) \tilde{F}^{\mu\nu a} &= -e \varepsilon^{abc} (D^\mu \phi^b) \phi^c, \\ D^\mu D_\mu \phi^a &= -\lambda (\phi^b \phi^b - v) \phi^a. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Modelos similares a éste ya se han estudiado con anterioridad. En [14] se estudia el modelo que surge de agregar al lagrangiano (3.38) el término de Chern-Simons abeliano en $(2+1)$ dimensiones [15], encontrando que, en dicho modelo, existen soluciones en forma de vortices cargados tanto eléctrica como magnéticamente, además de esto, dichas cargas se encuentran cuantizadas a través del número de enrollamiento n del campo de Higgs ϕ .

5.2. Las Ecuaciones de Movimiento y El Ansatz

En general θ puede ser un campo dinámico. Sin embargo, motivados por los casos ya estudiados en electrodinámica- θ [12] y la simetría esférica de la solución de BPS (4.34), estudiaremos el caso en el cual el campo θ es esféricamente simétrico y está dado por

$$\theta(r) = \begin{cases} \theta_1 & , \quad r < a \\ \theta_2 & , \quad r > a, \end{cases} \quad (5.5)$$

con θ_1 y θ_2 constantes. A la interfaz en la cual θ cambia de valor se denomina interfaz- θ , que en este caso, es una esfera de radio r . De esta manera se tiene que

$$\partial_\mu \theta = \sigma \delta(r - a) n_\mu \quad \text{donde} \quad \sigma = \theta_1 - \theta_2, \quad (5.6)$$

siendo n_μ las componentes del vector normal a la interfaz- θ . La constante σ físicamente nos dice que tan fuerte es el acoplamiento del término de CH-P al campo θ .

En el límite de BPS y usando el ansatz (4.10) en las ecuaciones de movimiento (5.4) se obtiene (Apéndice C)

$$\begin{aligned} r^2 J'' - \sigma r (1 - K^2) \delta(r - a) &= 2JK, \\ r^2 H'' &= 2HK, \\ r^2 K'' - \sigma r JK \delta(r - a) &= K(K^2 - J^2 + H^2 - 1). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Notemos que para $r \neq a$ el sistema de ecuaciones (5.7) se reduce al sistema (4.17), cuya solución general ya conocemos. El efecto del término- θ se verá en la imposición de condiciones de

frontera en la interfaz- θ . Integrando estas ecuaciones en una vecindad de $r = a$ se obtienen las siguientes condiciones de frontera

$$\Delta J'(a) = \frac{\sigma}{a}(1 - (K(a))^2), \quad (5.8)$$

$$\Delta K'(a) = \frac{\sigma}{a}J(a)K(a), \quad (5.9)$$

$$\Delta H'(a) = 0. \quad (5.10)$$

donde, por ejemplo, $\Delta J'(a) = J'_2(a) - J'_1(a)$, los subíndices 1 y 2 denotan la función en las regiones $r < a$ (región I) y $r > a$ (región II), respectivamente. Para que las expresiones $K(a)$ y $J(a)$ tengan sentido en la condiciones de frontera debemos agregar las condiciones de que K y J sean continuas en $r = a$

$$\Delta J(a) = 0, \quad (5.11)$$

$$\Delta K(a) = 0. \quad (5.12)$$

En contraste con estas ecuaciones, notemos que las condiciones de frontera en $r = a$ no imponen restricciones sobre el comportamiento de H en la interfaz- θ , pero sí en el de su derivada H' . Podríamos, de forma inocente, imponer la continuidad de H en la interfaz- θ , sin embargo, esto provocaría que nuestro problema estuviera *sobredeterminado* y, por lo tanto, que no tuviera solución. Por el contrario, tomaremos ventaja de esta arbitrariedad en la continuidad de H para poder dar solución a nuestro problema. El carácter de la función H en la interfaz- θ surgirá de forma natural en la solución.

Para obtener nuestra solución impondremos las mismas condiciones de frontera en el origen y en el infinito que en el capítulo anterior

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{H}{er}, \frac{J}{er}, K \right) = (0, 0, 1), \quad (5.13)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{J}{er}, \frac{H}{er}, K \right) = (C_0, C_1, 0). \quad (5.14)$$

5.3. Solución Explícita

Para obtener nuestra solución consideremos las regiones I y II definidas anteriormente. Para encontrar una familia de soluciones en cada región partiremos, como en el capítulo anterior, del caso en que $J = 0$, para después resolver el caso en que $J \neq 0$.

■ Región I: $r < a$.

En esta región buscamos soluciones al sistema de ecuaciones (4.19) (*i.e.* $J \neq 0$) que solo satisfagan las condiciones de frontera en el origen (5.13). Estas soluciones son

$$\begin{aligned} H_1 &= gr \coth(gr) - 1, \\ K_1 &= \frac{gr}{\sinh(gr)}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

donde g es una constante arbitraria.

Para tener una solución para el caso $J \neq 0$, de forma análoga al capítulo anterior, hacemos

$$H_1 \rightarrow \sqrt{1 + q^2} H_1, \quad J_1 \rightarrow q H_1, \tag{5.16}$$

donde q es una constante. De tal forma que las soluciones para la región I, son

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{1 + q^2} (gr \coth(gr) - 1), \\ J_1 &= q (gr \coth(gr) - 1), \\ K_1 &= \frac{gr}{\sinh(gr)}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

■ Región II: $r > a$.

Aquí buscamos soluciones a las ecuaciones (4.19) que solo cumplan con las condiciones de frontera en el infinito (5.14). Dichas soluciones son

$$\begin{aligned} H_2 &= Gr \coth(Gr + \beta) - 1, \\ K_2 &= \frac{Gr}{\sinh(Gr + \beta)}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

donde G y β son constantes. Al eliminar las condiciones de frontera en el origen la solución con tangente hiperbólica (4.31) también es admisible, sin embargo, omitiremos el estudio de ese caso en este trabajo. Para tener una solución para el caso $J \neq 0$, de forma análoga al capítulo anterior, hacemos

$$H_1 \rightarrow \sqrt{1 + Q^2} H_1, \quad J_1 \rightarrow Q H_1, \tag{5.19}$$

donde Q es una constante. De tal forma que las soluciones para la región II son

$$\begin{aligned}
H_2 &= \sqrt{1 + Q^2}(Gr \coth(Gr + \beta) - 1), \\
J_2 &= Q(Gr \coth(Gr + \beta) - 1), \\
K_{12} &= \frac{Gr}{\sinh(Gr + \beta)}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Los números q , Q , g , G y β hasta el momento son constantes arbitrarias. Tomaremos ventaja de esta arbitrariedad para que nuestra solución satisfaga las condiciones de frontera en $r = a$.

De las condiciones de frontera para K' y J' , las constantes q y Q se pueden determinar fácilmente en términos de la constante σ (ver Apéndice E)

$$q = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4}}{2}, \quad Q = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4}}{2}. \tag{5.21}$$

Usando el ansatz en las condiciones de continuidad para K , J y H' en $r = a$ se obtiene respectivamente

$$g \operatorname{csch}(ga) = G \operatorname{csch}(Ga + \beta), \tag{5.22}$$

$$q(ga \coth(ga) - 1) = Q(Ga \coth(Ga + \beta) - 1), \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1 + q^2}(g \coth(ga) - g^2 a \operatorname{csch}^2(ga)) = \\
&\sqrt{1 + Q^2}(G \coth(Ga + \beta) - G^2 a \operatorname{csch}^2(Ga + \beta)).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Empleando las ecs. (5.22) y (5.23) podemos reescribir a la ec. (5.24) como

$$q \cosh(x) \left(\frac{\sinh(x)}{x} \right) - (1 + q) \left(\frac{\sinh(x)}{x} \right)^2 + 1 = 0, \tag{5.25}$$

con $x = ga$. Dado que q carga la dependencia del parámetro σ , esta última ecuación nos permitirá determinar para qué valores de σ es posible encontrar una solución al sistema de ecuaciones. En la fig. 5.1 podemos observar la gráfica de la función $f(x) = q \cosh(x) \left(\frac{\sinh(x)}{x} \right) - (1 + q) \left(\frac{\sinh(x)}{x} \right)^2 + 1$ para varios valores de q , siendo el valor de x en el cual la curva intersecta el eje de las abscisas la solución de la ecuación (5.25).

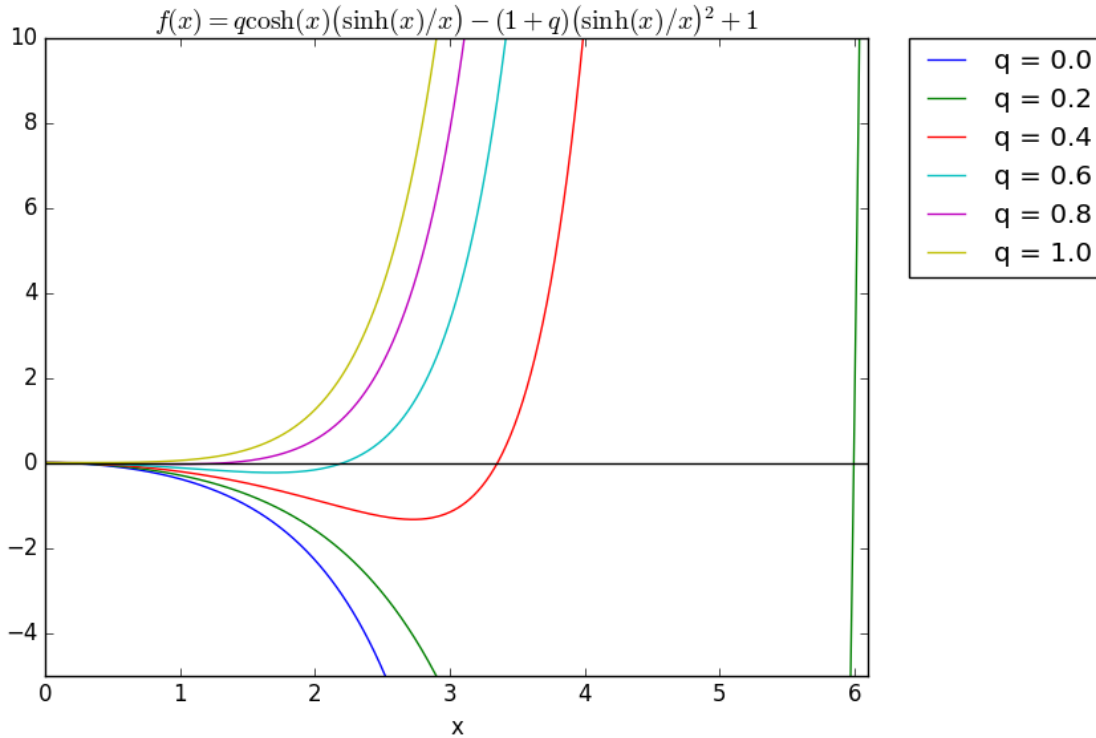


Figura 5.1

Fijando, por simplicidad, $a = 1$, encontramos que existe solución a la ecuación (5.25) para valores de q en el intervalo abierto $(0, 1)$, y puesto que σ se resuelve en términos de q como

$$\sigma = \frac{1}{q} + q, \quad (5.26)$$

tenemos que es posible encontrar una solución a la ecuación (5.25) para los valores de σ en el intervalo abierto $(0, \infty)$.

Con estos valores es posible resolver numéricamente para g , G y β el sistema de ecuaciones dado por las ec. (5.22), (5.23) y (5.24). En la tabla 5.1 observamos algunas soluciones de las constantes g , G y β dado un valor fijo de σ , que al mismo tiempo determina q y Q .

Con estas constantes estamos en posibilidad de dar una solución explícita a las ecuaciones de movimiento (5.7). A continuación presentamos las gráficas de las funciones H , J y K en función del radio r para distintos valores de σ . Hacemos énfasis en que en el punto $r = a = 1$ se encuentra la interfaz- θ , por lo tanto las condiciones de frontera para las funciones deberían hacerse evidentes en este punto.

σ	Q	q	g	G	β
9.900	10	0.1	10.999	1.099	7.597
4.800	5	0.2	5.995	1.199	3.187
3.033	3.333	0.3	4.285	1.290	1.796
2.100	2.5	0.4	3.354	1.357	1.098
1.500	2	0.5	2.715	1.388	6.683×10^{-1}
1.066	1.666	0.6	2.213	1.371	3.816×10^{-1}
0.728	1.428	0.7	1.776	1.290	1.902×10^{-1}
0.449	1.25	0.8	1.360	1.128	7.193×10^{-2}
0.211	1.111	0.9	9.096×10^{-1}	8.393×10^{-1}	1.345×10^{-2}

Tabla 5.1: Soluciones a las constantes de integración.

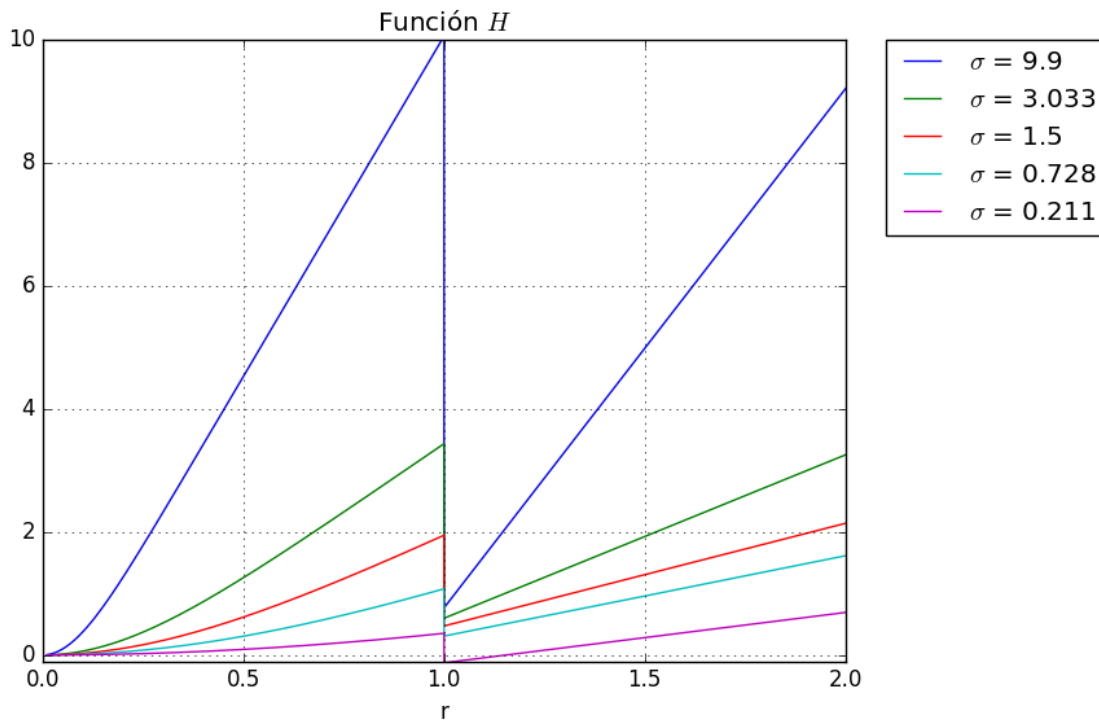


Figura 5.2: Gráfica de H en función de r .

En la fig. 5.2 observamos que el efecto del término- θ sobre la función H es que la hace discontinua. Además podemos notar, aunque sea cualitativamente, que su derivada en $r = 1$ es continua, lo cual es consistente con la condición (5.10).

En la fig. 5.3 observamos que la función J es continua, siendo esto consistente con la condición (5.11). También podemos ver como la discontinuidad de J' disminuye conforme σ

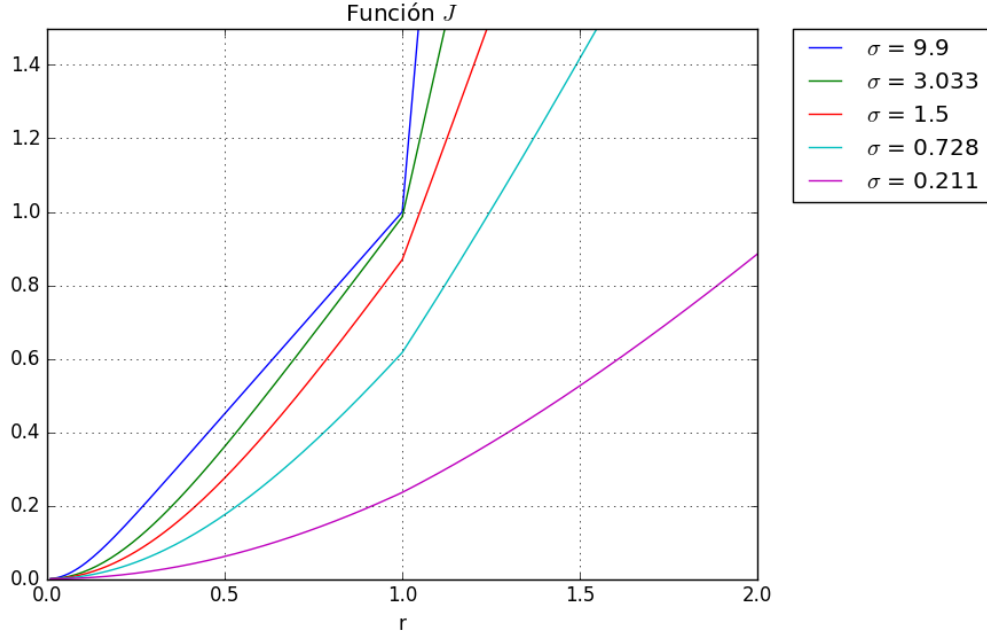


Figura 5.3: Gráfica de J en función de r .

se hace más pequeña, lo cual va de acuerdo con la ec.(5.8).

Finalmente, en la fig. 5.4 observamos que el comportamiento tanto de K como de su derivada satisfacen sus condiciones de frontera, siendo K continua y la discontinuidad de su derivada disminuyendo conforme σ se hace más pequeña.

Es importante señalar que las soluciones para q y Q mostradas en la tabla 5.1 corresponden a las soluciones con el signo $+$ en las ecs. (5.21). Para encontrar las soluciones correspondientes a las ecs. (5.21) con signo $-$, deberíamos buscar soluciones con $q < 0$, puesto que $\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4} < 0$ para toda σ . Sin embargo, los métodos numéricos, empleados para encontrar las soluciones a las constantes de integración, no arrojaron resultados concluyentes al intentar resolver el sistema de ecuaciones conformado por las ecs. (5.22), (5.23) y (5.24) para valores negativos de q . Por lo tanto, en base a los métodos aquí empleados, no podemos afirmar o negar la existencia de una familia de soluciones que satisfaga las ecs. (5.21) con el signo $-$.

5.4. Cantidades Físicas de la Solución

Teniendo soluciones explícitas a nuestro problema, podemos ver cómo cambian las cantidades físicas en términos de la constante de acoplamiento σ . Notemos de la ec. (4.37) que el campo magnético no depende de las funciones del ansatz, por lo tanto para nuestra nueva

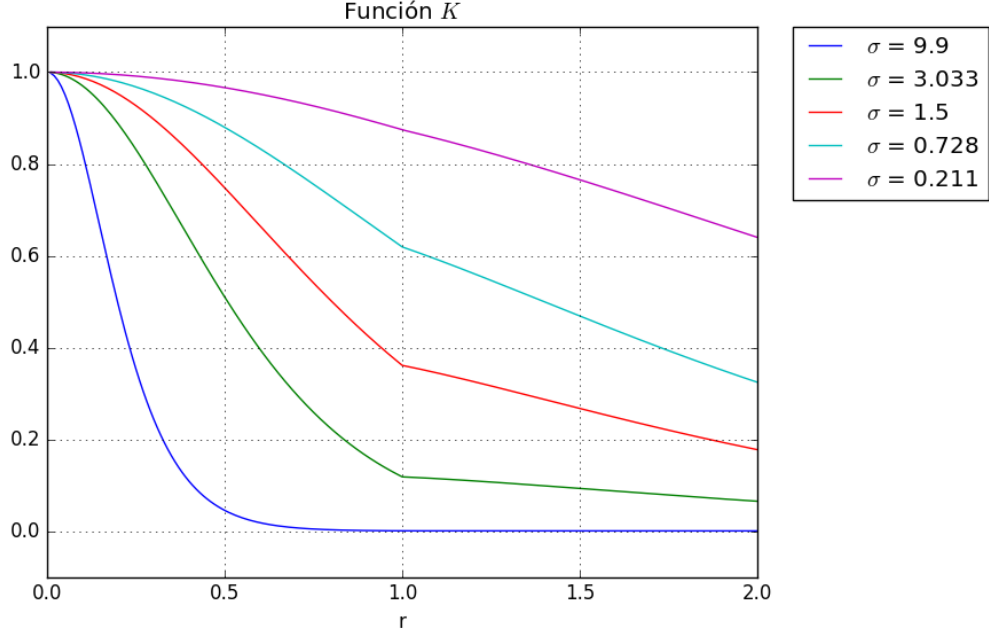


Figura 5.4: Gráfica de K en función de r .

solución éste seguirá siendo, al igual que en la solución de Julia-Zee, el campo magnético producido por una carga magnética puntual.

Por el contrario, dada la ec. (4.36), el campo eléctrico sí depende explícitamente de las funciones J y J' , por lo tanto la adición del término de acoplamiento CH-P afectará al campo eléctrico y a la carga eléctrica. Usando la ley de Gauss podemos obtener la densidad de carga eléctrica de la configuración

$$\rho \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = \left[\frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{J}{r} \right) + \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{J}{r} \right) \right]. \quad (5.27)$$

Obteniendo la carga eléctrica q_e de la solución, calculando numéricamente el valor de la integral

$$\tilde{q}_e = \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = \frac{4\pi}{e} \left[\int_0^a \rho(r) r^2 dr + \int_a^\infty \rho(r) r^2 dr \right], \quad (5.28)$$

en función de σ obtenemos la fig. 5.5.

Debemos mencionar que q_e no representa la carga total de la solución, puesto que ésta no considera la carga que se induce sobre la interfaz- θ

$$q_\theta = \int_{|\mathbf{x}|=a} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} - \int_{|\mathbf{x}|=a} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.29)$$

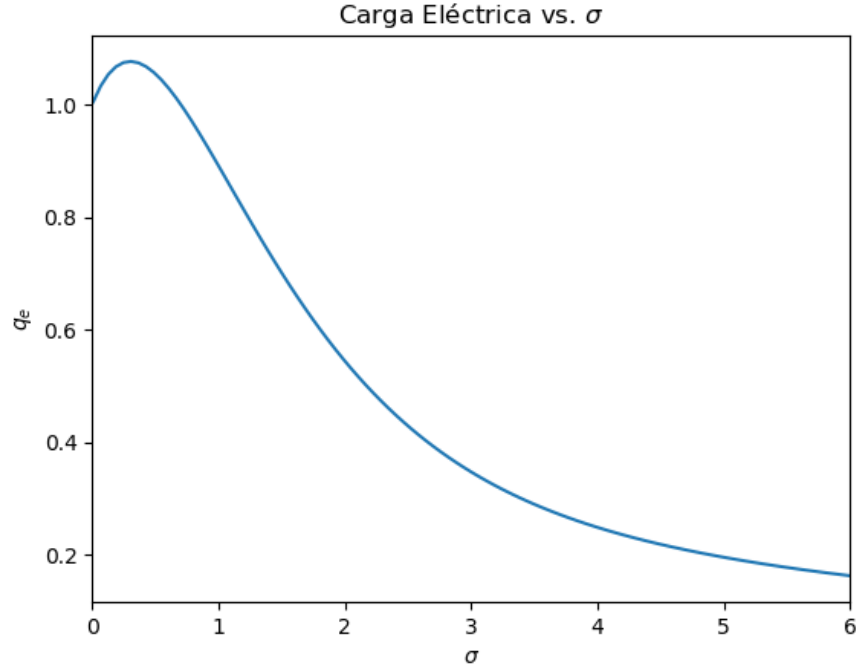


Figura 5.5: Gráfica de la carga eléctrica de la solución en función de σ .

de tal forma que la carga total de la configuración es

$$q_T = \tilde{q}_e + q_\theta. \quad (5.30)$$

Como podemos notar en la fig 5.5, la carga eléctrica *del bulto* reescalada, $q_e = \tilde{q}_e/4\pi$, alcanza un máximo global para valores de σ entre cero y uno. Dicho máximo se encuentra aproximadamente en $\sigma_0 = 0.3792$. Por razones ilustrativas es conveniente observar el cambio del integrando de la ec.(5.29) $\tilde{\rho} = \frac{4\pi\rho r^2}{e}$, el cuál puede ser visto como una densidad de carga reescalada, respecto a σ . La fig. 5.6 es la gráfica de $\tilde{\rho}$ en función de r para varios valores de σ .

De forma cualitativa, podemos ver que conforme σ aumenta, no solo carga disminuye, sino que ésta va localizándose cada vez más cerca del origen. Si nos fijamos ahora en el comportamiento de $\tilde{\rho}$ cuando σ disminuye, podemos ver que la carga *del bulto* parece ir saliendo de la esfera de radio uno donde se localiza la interfaz- θ .

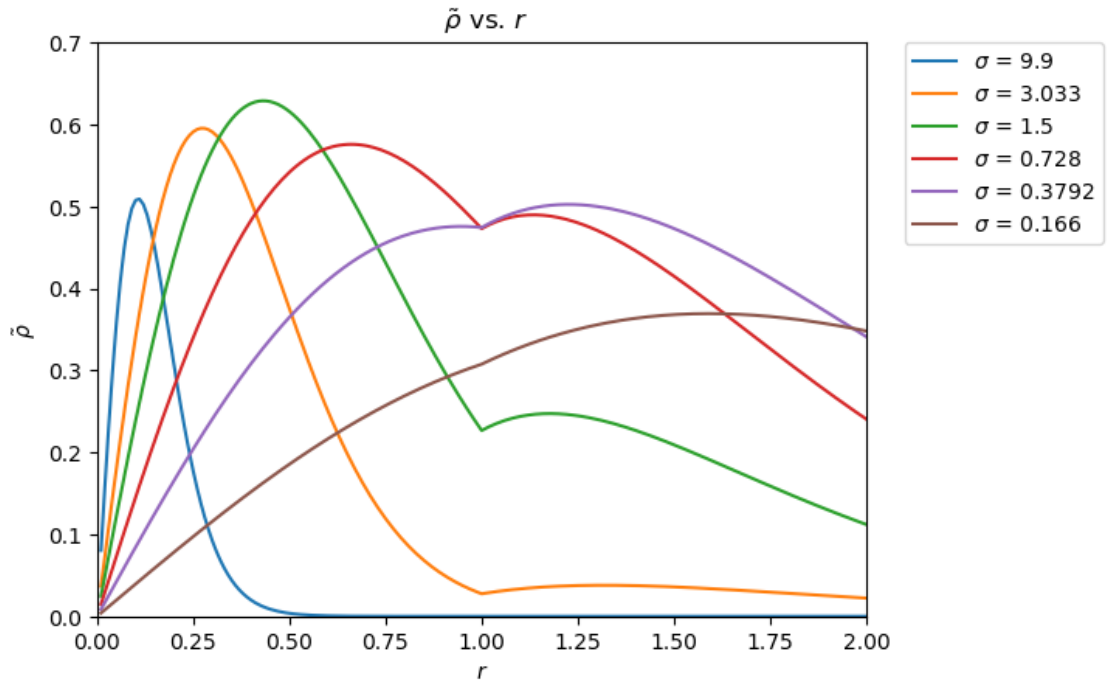


Figura 5.6: Gráfica de la densidad de carga efectiva en función de r para varios valores de σ .

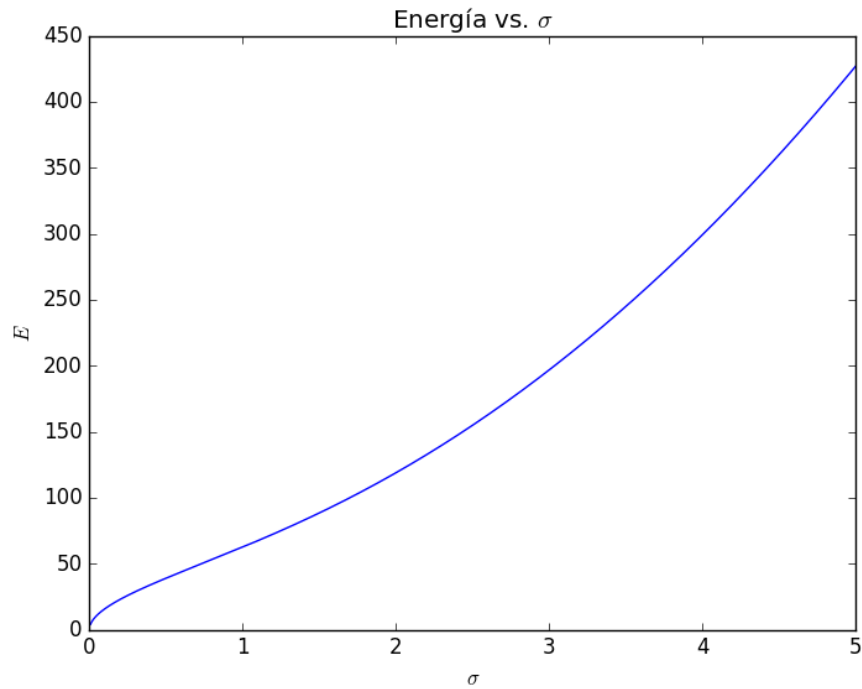


Figura 5.7: Gráfica de la energía de la solución en función de σ .

Como mencionamos, en estudios sobre la electrodinámica- θ [3] se ha encontrado que el poner una carga eléctrica cerca de la interfaz- θ modifica no solo al campo eléctrico sino también al campo magnético también. Esto contrasta con los resultados aquí expuestos, dado que en nuestra solución para una teoría de Yang-Mills con grupo de norma $SU(2)$ con el término- θ , hemos encontrado que el valor de la constante de acoplamiento σ afecta al campo eléctrico, sin embargo el campo magnético se mantiene invariante ante esta modificación. Una alteración en el campo eléctrico no provoca cambios en el campo magnético, es decir, no observamos el efecto magnetoelectrónico.

Veamos ahora qué sucede con la energía. Retomando la ec. (4.14) en el límite de BPS se tiene que

$$H = 4\pi \int_0^\infty \left[\frac{(K')^2}{e^2 r^2} + \frac{(u')^2}{2} + \frac{(f')^2}{2} + \frac{(K^2 - 1)^2}{2e^2 r^4} + \frac{K^2(u^2 + f^2)}{r^2} \right] r^2 dr. \quad (5.31)$$

Esta integral se puede calcular numéricamente en función de σ separándola de la siguiente manera

$$H = 4\pi \left[\int_0^a \mathcal{H}_1 r^2 dr + \int_a^\infty \mathcal{H}_2 r^2 dr \right]. \quad (5.32)$$

En la fig.5.7 presentamos a la energía total de la configuración, podemos ver que la energía es una función creciente de σ .

Capítulo 6

Resumen y Conclusiones

En el capítulo 2 se hizo una breve revisión a las teorías de Yang-Mills, para reexaminar, en el capítulo 3, la existencia de solitones topológicos (soluciones estáticas con energía finita) en algunas teorías de norma, tales como la solución del *kink* y el *vortex*. También se revisó la demostración de un teorema que, usando el *argumento de escala*, prohíbe la existencia de solitones si la dimensión d del espacio satisface que $d > 4$, en una teoría que acople a un campo de norma A_μ con el un campo de de Higgs ϕ y donde dichos campos transformen bajo la representación unitaria del grupo de norma.

En el capítulo 4 se estudió de forma detallada la solución del dyon de Julia-Zee en el modelo de Georgi-Glashow con grupo de norma $SU(2)$, obteniendo de forma explícita la solución en términos del ansatz (4.10) en el límite BPS y calculando los campos eléctrico y magnético, la carga eléctrica, la carga magnética y la energía de la solución.

Finalmente, en el Capítulo 5, se logró extender la solución de Julia-Zee para modelo de Georgi-Glashow con acoplamiento al término de Chern-Pontryagin, en el caso en que el campo θ está definido como en la ec. (5.5). La solución se obtuvo a partir de encontrar una familia de soluciones para las regiones definidas por $r < a$ y $r > a$ y determinando las constantes de integración, de tal forma que las condiciones de frontera en la interfaz- θ , dadas por las ecs. (5.8)-(5.12), se satisficieran. Posteriormente se calculó numéricamente la carga y la energía de la solución. De esta solución se puede puntualizar lo siguiente:

- La solución que se encontró es esféricamente simétrica y puede determinarse para los valores de la constante de acoplamiento $\sigma \in (0, \infty)$.
- El campo magnético de esta solución es el mismo que en el caso de la solución del dyon de Julia-Zee. Y no manifiesta dependencia alguna en la constante de acoplamiento σ .
- Tanto el campo eléctrico como la carga eléctrica de la solución varían en función de

σ , teniendo la carga eléctrica *del bulto* un máximo global en el valor aproximado de $\sigma_0 = 0.3792$.

- Existe una carga eléctrica inducida en la interfaz- θ , la cual esta dada por la ec. (5.29).
- La energía es una función creciente de σ .
- Estos resultados contrastan con los estudios previos del acoplamiento al término de Chern-Pontryagin en el caso de la electrodinámica- θ , donde se manifiesta el efecto magnetoeléctrico [3]. En efecto, la solución aquí encontrada, resultante del término de acoplamiento CH-P no sugiere una correlación entre la carga eléctrica de la configuración y el campo magnético.

Concluimos mencionando que existen un par de escenarios en los cuales es posible dar continuidad a la investigación aquí expuesta. Podría emplearse la solución con la tangente hiperbólica (4.31), en la región $r > a$. Como se mencionó en el Capítulo 5, esta solución también es admisible, sin embargo, no fue omitida en este trabajo de tesis. Una segunda opción sería el tratar de extender soluciones estáticas en el modelo de Georgi-Glashow, pero con energía infinita, al caso en el que se considera el acoplamiento al término de CH-P. La existencia de dichas soluciones ya se han reportado anteriormente, en [16] se exponen varias soluciones de este tipo.

Apéndice A

Elementos de Teoría de Grupos y Álgebras de Lie

Un grupo es un conjunto G que está dotado con una operación, que llamamos multiplicación, y satisface las siguientes propiedades:

- Asociatividad: si $a, b, c \in G$ entonces $(ab)c = a(bc)$.
- Existe un elemento $e \in G$, tal que para todo $a \in G$ entonces $ae = ea = a$.
- Para todo $a \in G$ existe su inverso $a^{-1} \in G$, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Si la multiplicación es conmutativa, i.e. $ab = ba$ para todo $a, b \in G$, se dice que el grupo es abeliano, en otro caso es no-abeliano.

Algunos grupos importantes son:

1. El grupo $U(1)$ que es el conjunto de números complejos con norma uno ($|z| = 1$).
2. El grupo $GL(n, \mathbb{C})$ que es el conjunto de matrices complejas de $n \times n$ con determinante distinto de cero (invertibles).
3. El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ que es el grupo de las matrices reales de $n \times n$ con determinante distinto de cero.
4. El grupo $U(n)$ que es el conjunto de las matrices unitarias de $n \times n$, i.e. las que satisfacen

$$U^\dagger U = 1.$$

5. El grupo $SU(n)$ que es el conjunto de las matrices unitarias con determinante igual a uno.
6. El grupo $O(n)$ que es el conjunto de matrices $n \times n$ que son ortogonales, i.e.

$$O^T O = 1.$$

7. El grupo $SO(n)$ que es el conjunto de matrices ortogonales que tienen determinante 1.

Un grupo de Lie es un grupo que al mismo tiempo es un variedad diferenciable. Por ejemplo, consideremos una familia de matrices $M(t)$, que tiene $n \times n$ entradas complejas e identifiquemos cada elemento de esta familia con un valor de t . A este conjunto le podemos asociar una curva en un espacio euclidiano real de dimensión $2n^2$. Si esta curva es suave podemos tomar la derivada $\frac{dM}{dt}$ y su derivada sería un vector tangente a la variedad que parametriza $M(t)$.

Algunas veces podemos identificar algunos grupos con variedades conocidas, por ejemplo $U(1)$ puede ser visto como al círculo de radio 1 en el plano complejo y $SU(2)$ puede verse como la 3-esfera \mathbb{S}^3 .

En un grupo de Lie a cada punto de la variedad se le puede asociar un plano tangente, esto en virtud de su diferenciabilidad. Al plano tangente del elemento unidad del grupo (si tratamos los elementos del grupo como matrices, éste elemento sería la matriz identidad) se le llama el Álgebra de Lie del grupo de Lie. Si G es el grupo a su algebra la denotaremos como \mathfrak{g} .

Cualquier curva en un grupo G , cerca de la unidad podemos aproximarla como

$$g(t) = 1 + At + O(t^2), \tag{A.1}$$

donde $A \in \mathfrak{g}$. Debemos hacer notar que al ser el álgebra de Lie un plano tangente, es también un espacio vectorial real de la dimensión de la variedad. Además de las operaciones definidas en un espacio vectorial, el álgebra de Lie esta dotada con la operación de conmutación. El conmutador de $A, B \in \mathfrak{g}$ se define como $[A, B] = AB - BA$ y este nuevo elemento vive también en el álgebra.

El álgebra de Lie de algunos grupos es:

- $\mathfrak{u}(n)$, el álgebra de $U(n)$, es el conjunto de todas las matrices anti-Hermitianas, i.e. $A^\dagger = -A$.

- $\mathfrak{su}(n)$, el álgebra de $SU(n)$, es el conjunto de todas las matrices anti-Hermitianas con traza igual a cero. $\text{Tr}(A) = 0$.

Al ser un álgebra de Lie un espacio vectorial, ésta puede ser dotada de una base. Si el álgebra es de dimensión k ésta tiene una base formada por k matrices T_i ($i = 1, \dots, k$). Dado que $[T_i, T_j] \in \mathfrak{g}$ ponemos expresarlo en términos de la base

$$[T_i, T_j] = C_{ijk} T_k. \quad (\text{A.2})$$

A los coeficientes C_{ijk} se les llama las constantes de estructura del grupo y C_{ijk} es anti-simétrica en los dos primeros índices. Por ejemplo, una base para $\mathfrak{u}(2)$ podría tomarse como $T_i = -\frac{i}{2}\tau_i$, donde τ_i son las matrices de Pauli. Con esta base en particular las constantes de estructura son

$$[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk} T_k. \quad (\text{A.3})$$

Para concluir con esta sección sobre álgebras y grupos de Lie hablaremos de representaciones. Una representación T de un grupo G en un espacio vectorial V , toma un elemento del grupo y nos da una transformación invertible que actúa sobre los elementos de V . Además le pedimos a una representación que cumpla las siguientes propiedades:

- $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$.
- $T(e) = 1$.
- $T(g^{-1}) = (T(g))^{-1}$.

Así mismo, T puede ser vista como una función que actúa sobre los elementos de \mathfrak{g} , tomando un elemento $A \in \mathfrak{g}$ y mapeándolo en un operador lineal $T(A)$, donde este mapeo debe ser consistente con las operaciones definidas en el álgebra

- $T(A + B) = T(A) + T(B)$.
- $T(\alpha A) = \alpha T(A)$.
- $T([A, B]) = [T(A), T(B)]$.

Algunas representaciones que se utilizarán a lo largo del texto son:

1. *La Representación Fundamental*: Si G es un grupo que consiste de matrices $[g_{ij}]$ de $n \times n$ y V es un espacio de dimensión n , donde sus elementos pueden expresarse como:

$$v = (v_1, \dots, v_n)^T, \quad (\text{A.4})$$

la representación fundamental de G actúa sobre V como:

$$(T(g)v)_j = g_{ij}v_i. \quad (\text{A.5})$$

2. *La Representación Adjunta $Ad(G)$ del grupo G* : Esta representación actúa sobre el espacio vectorial del álgebra de Lie \mathfrak{g} , dado $A \in \mathfrak{g}$, la representación de $g \in G$ actúa sobre A como

$$Ad(g)A = gAg^{-1}. \quad (\text{A.6})$$

Y la representación adjunta del álgebra de Lie, actúa como

$$ad(A)B = [A, B] \quad A, B \in \mathfrak{g}. \quad (\text{A.7})$$

Una característica importante de esta representación es que la representación adjunta de la base del algebra satisface

$$ad(t_i)t_j = C_{ijk}t_k, \quad (\text{A.8})$$

donde los t_i son una base para \mathfrak{g} y C_{ijk} las constantes de estructura del algebra.

A lo largo de este trabajo solo se trabajará con grupos compactos. Existe un resultado que dice que un álgebra de Lie es compacta si y solo si tiene un producto escalar definido positivo que sea invariante bajo la representación adjunta. Para grupos de matrices una forma de construir este producto escalar es empleando la traza de la siguiente manera

$$(A, B) = -\text{Tr}(A, B). \quad (\text{A.9})$$

De ahora en adelante supondremos que los grupos que se utilizarán están dotados el producto interior definido según ec. (A.9).

Apéndice B

Invariancia de los Términos que Contienen a las Componentes ϕ^a del Campo Escalar en la Acción (4.1)

Recordemos que el campo escalar ϕ transforma, bajo transformaciones de norma, como

$$\phi \rightarrow \phi' = w\phi w^{-1},$$

donde $w \in SU(2)$. A continuación, nos daremos a la tarea de encontrar el cómo transforman las componentes ϕ^a . Empleando la expansión de w alrededor del elemento identidad del grupo

$$w = 1 + c^i t^i + \dots \quad (\text{B.1})$$

y haciendo uso del lema de Baker-Hausdorff se tiene que

$$\begin{aligned} \phi' &= w\phi w^{-1} \\ &= \phi + [c^{i_1} t^{i_1}, \phi] + \frac{1}{2!} [c^{i_2} t^{i_2}, [c^{i_1} t^{i_1}, \phi]] + \dots + \frac{1}{n!} [c^{i_n} t^{i_n}, [c^{i_{n-1}} t^{i_{n-1}}, \dots [c^{i_1} t^{i_1}, \phi] + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Si consideramos una transformación infinitesimal (i.e. considerando solo los términos a primer orden en c^i) se tiene

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi + [c^i t^i, \phi] \\ \implies \phi'^a t^a &= (\phi^a + \varepsilon^{abc} c^b \phi^c) t^a \\ \implies \phi'^a &= \phi^a + \varepsilon^{abc} c^b \phi^c. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

De esta forma podemos probar que los sumandos, en el lagrangiano de la acción (4.1), que contienen al término $\phi^a \phi^a$ son invariantes bajo las transformaciones (B.3)

$$\begin{aligned}
\phi'^a \phi'^a &= (\phi^a + c^i \phi^j \varepsilon^{ija})(\phi^a + c^k \phi^l \varepsilon^{kla}) \\
&= \phi^a \phi^a + \phi^a c^k \phi^l \varepsilon^{kla} + \phi^a c^i \phi^j \varepsilon^{ija} + c^i c^k \phi^j \phi^l \varepsilon^{ija} \varepsilon^{kla} \\
&= \phi^a \phi^a,
\end{aligned} \tag{B.4}$$

donde en la ultima linea hemos empleado que la transformación es infinitesimal, quedándonos solo con los términos a primer orden en c^i , y que $\phi^a c^k \phi^l \varepsilon^{kla} = \phi^a c^i \phi^j \varepsilon^{ija} = 0$.

Puesto que $D_\mu \phi$ transforma como

$$(D_\mu \phi)' = w(D_\mu \phi)w^{-1}, \tag{B.5}$$

sus componentes transformarán de la misma forma que las de ϕ . Considerando, de nuevo, una transformación infinitesimal se tiene que

$$(D_\mu \phi)'^a = D_\mu \phi^a + \varepsilon^{abc} c^b D_\mu \phi^c. \tag{B.6}$$

La prueba de que el término, en el lagrangiano de la acción (4.1), proporcional a $D^\mu \phi^a D_\mu \phi^a$ es invariante bajo transformaciones de norma de las componentes, es idéntica al procedimiento mostrado en (B.4).

Apéndice C

Obtención de las Ecuaciones de Movimiento y del Campo Eléctrico y Magnético en Términos del Ansatz.

En este apéndice revisaremos algunas expresiones útiles en el cálculo de ecs. (4.8), (4.9), (4.36), (4.37) y (5.4) en términos del ansatz (4.10). Para escribir la ec.(4.8) en términos del ansatz hagamos la sustitución

$$R = \frac{1 - K}{r}, \quad (\text{C.1})$$

$$Q = \frac{J}{r}, \quad (\text{C.2})$$

$$\alpha = \frac{H'}{r} + \frac{H(1 - K)}{r^2} - \frac{2H}{r^2}, \quad (\text{C.3})$$

$$\beta = \frac{H}{r^2} - \frac{H(1 - K)}{r^2}. \quad (\text{C.4})$$

Con estas definiciones se obtienen las siguientes identidades

$$F^{ija} = \frac{1}{e} \left[3\varepsilon^{aji} \frac{R}{r} + \varepsilon^{ajk} n_k n_i \left(R' - \frac{R}{r} \right) - \varepsilon^{aik} n_k n_j \left(R' - \frac{R}{r} \right) + \varepsilon^{kij} n_k n_a R^2 \right], \quad (\text{C.5})$$

$$F^{i0a} = \frac{1}{e} \left[\delta_{ai} \left(QR - \frac{Q}{r} \right) + n_a n_i \left(\frac{Q}{r} - QR - Q' \right) \right], \quad (\text{C.6})$$

$$D^i \phi^a = \frac{1}{e} [\alpha n_a n_i + \beta \delta_{ai}], \quad (\text{C.7})$$

$$D^0 \phi^a = 0. \quad (\text{C.8})$$

Con estas expresiones calculamos los sumandos de $D_\mu F^{\mu ja} = -e\varepsilon^{abc}(D^j\phi^b)\phi^c$, que es la ec. (4.8) con $\nu = j$, en términos del ansatz

$$\partial_i F^{ij a} = \frac{\varepsilon^{ajk}}{e} \left[R'' + \frac{2R'}{r} - \frac{2R}{r^2} + \frac{R^2}{r} \right], \quad (\text{C.9})$$

$$e\varepsilon^{abc} A_i^a F^{ij a} = \frac{\varepsilon^{ajk} n_k}{e} \left[\frac{2R^2}{r} - R^3 \right], \quad (\text{C.10})$$

$$e\varepsilon^{abc} A_0^a F^{0j a} = -\frac{\varepsilon^{ajk} n_k}{e} \left[\frac{J^2 K}{r^3} \right], \quad (\text{C.11})$$

$$e\varepsilon^{abc} (D^j \phi^b) \phi^c = \frac{\varepsilon^{ajk} n_k}{e} \left[\frac{KH^2}{r^3} \right], \quad (\text{C.12})$$

de donde se obtiene

$$r^2 K'' = K(K^2 - J^2 + H^2 - 1). \quad (\text{C.13})$$

Para calcular $D_\mu F^{\mu 0a} = -e\varepsilon^{abc}(D^0\phi^b)\phi^c$, que es la ec. (4.8) con $\nu = 0$, tenemos los sumandos

$$\partial_i F^{i0a} = \frac{n_a}{e} \left[-Q'' + \frac{2Q}{r^2} - \frac{2QR}{r} - \frac{2Q'}{r} \right], \quad (\text{C.14})$$

$$e\varepsilon^{abc} A_i^a F^{i0a} = \frac{n_a}{e} \left(2QR - \frac{2Q}{r} \right) R, \quad (\text{C.15})$$

$$e\varepsilon^{abc} (D^0 \phi^b) \phi^c = 0. \quad (\text{C.16})$$

Sustituyendo en (4.8) se obtiene

$$r^2 J'' = 2JK^2. \quad (\text{C.17})$$

Para la ecuación de movimiento de ϕ^a

$$D^\mu D_\mu \phi^a = -\lambda(\phi^b \phi^b - v)\phi^a \quad (\text{C.18})$$

tenemos que

$$D_i D^i \phi^a = \frac{n_a}{e} \left[\alpha' + \beta' + \frac{2}{r}(\alpha + \beta) - \frac{2\beta K}{r} \right], \quad (\text{C.19})$$

$$(\text{C.20})$$

de donde se obtiene

$$r^2 H'' = 2HK^2 - \lambda H \left(r^2 - \frac{1}{e^2} H^2 \right) \quad (\text{C.21})$$

Calculemos ahora la contribución del término- θ a las ecuaciones de movimiento. Primero tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \theta(\mathbf{x}) \tilde{F}^{\mu 0a} &= \partial_i \theta(\mathbf{x}) \tilde{F}^{i0a} \\ &= \theta' n_i \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{i0kl} F_{kl}{}^a \right) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Usando (C.5) resulta

$$\partial_\mu \theta(r) \tilde{F}^{\mu 0a} = \frac{1 - K^2}{r^2} \quad (\text{C.23})$$

de forma análoga se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \theta(r) \tilde{F}^{\mu ia} &= \theta' n_k \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{ki\alpha\beta} F_{\alpha\beta}{}^a \right) \\ &= \theta' n_l (\varepsilon^{lij} F_{0j}{}^a) \\ &= \frac{\varepsilon^{aik} n_k}{er^2} \theta' JK. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Al agregar estas expresiones a las ecuaciones de movimiento y usando la definición (5.5) para la función $\theta(r)$, se obtiene las ecuaciones (5.7).

Para obtener las expresiones de los campos, en términos del ansatz, debemos calcular las componentes de la ec. (4.35). Dado que $D^0 \phi^a = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{0i} &= - \frac{1}{|\phi|} \phi^a F^{i0a} \\ &= \frac{n_a}{e} F^{i0a}. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Usando la ec. (C.6) se tiene

$$\mathcal{F}^{0i} = - \frac{n_i}{e} Q', \quad (\text{C.26})$$

de donde se sigue que

$$E^i = \frac{n_i}{e} \frac{d}{dr} \left(\frac{J}{r} \right). \quad (\text{C.27})$$

Para \mathcal{F}^{jk} tenemos sus sumandos

$$\frac{1}{|\phi|} \phi^a F^{jka} = \frac{\varepsilon^{ajk} n_a}{e} \left[R^2 - \frac{2R}{r} \right], \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{1}{e|\phi|^3} \varepsilon^{abc} \phi^a (D^j \phi^b) (D^k \phi^c) = \frac{\varepsilon^{ajk} n_a}{e} \left[\frac{1}{r} - R \right]^2. \quad (\text{C.29})$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}^{jk} = \varepsilon^{ajk} n_a \left(\frac{1}{er^2} \right) \quad (\text{C.30})$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ajk} n_a \left(\frac{1}{er^2} \right) \quad (\text{C.31})$$

$$= \frac{n_i}{er^2}, \quad (\text{C.32})$$

que produce

$$B^i = \frac{n_i}{er^2}. \quad (\text{C.33})$$

Apéndice D

El Término Chern-Pontryagin

En este apéndice revisaremos algunas propiedades del término de Chern-Pontryagin (CH-P). Dicho término CH-P en espacio 4-dimensional para una teoría de norma con grupo de norma no-abeliano es [15]

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2e^2} \text{Tr}(\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (\text{D.1})$$

o en términos de sus componentes en el algebra

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}{}^a. \quad (\text{D.2})$$

La primera propiedad que veremos es que el término de Chern-Pontryagin es un invariante de norma. Dado que $F_{\mu\nu}$ transforma según

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = w F_{\mu\nu} w^{-1}, \quad (\text{D.3})$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \frac{1}{2e^2} \text{Tr}(\tilde{F}'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu}) \\ &= \frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{4e^2} \text{Tr}(F'_{\alpha\beta} F'_{\mu\nu}) \\ &= \frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{4e^2} \text{Tr}(w F_{\alpha\beta} w^{-1} w F_{\mu\nu} w^{-1}) \\ &= \frac{1}{2e^2} \text{Tr}(\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \\ &= \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

En la tercera linea hemos empleado el hecho de que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Consideremos la integral del término CH-P sobre todo el espacio

$$Q = -\frac{1}{2e^2} \int d^4x \left[\text{Tr}(\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \right] = \frac{1}{4} \int d^4x \left[\tilde{F}^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}{}^a \right]. \quad (\text{D.5})$$

Esta cantidad es de carácter topológico. Para demostrar que Q es un invariante topológico debemos probar que es invariante bajo variaciones $\delta A_\mu{}^a$ continuas del campo vectorial $A_\mu{}^a$ [17]

$$\begin{aligned} \delta Q &= \frac{1}{4} \int d^4x \left[\delta(\tilde{F}^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}{}^a) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\tilde{F}^{\mu\nu a} \delta F_{\mu\nu}{}^a \right] \\ &= \int d^4x \left[\tilde{F}^{\mu\nu a} D_\mu(\delta A_\nu{}^a) \right] \\ &= \int d^4x \left[\partial_\mu(\tilde{F}^{\mu\nu a} \delta A_\nu{}^a) \right] - \int d^4x \left[(D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu a}) \delta A_\nu{}^a \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

donde hemos hecho uso de que $\delta A_\nu = 0$ en el infinito y de la identidad de Bianchi $D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu a} = 0$.

En física normalmente se trabaja con espacios no acotados, y las integrales se evalúan sobre todo este espacio. Podríamos imaginar que dicha integración se realiza en una esfera cuyo radio R tiende a infinito. Dado que la cantidad representada por Q es de carácter topológico podríamos esperar que ésta está determinada por el comportamiento de \mathcal{A} en distancias muy alejadas del origen. Es decir, deberíamos esperar que existiera una cantidad K^μ tal que

$$\mathcal{A} = \partial_\mu K^\mu, \quad (\text{D.7})$$

de tal forma que

$$Q = \int K^\mu dS_\mu. \quad (\text{D.8})$$

Probemos que, efectivamente, existe dicho K^μ . Consideremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tilde{F}^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}{}^a &= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}{}^aF_{\alpha\beta}{}^a \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu{}^aA_\nu{}^a)(\partial_\alpha A_\beta{}^a - \partial_\beta A_\alpha{}^a + e\varepsilon^{abc}A_\alpha{}^aA_\beta{}^a) \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu A_\nu{}^a\partial_\alpha A_\beta{}^a - \partial_\mu A_\nu{}^a\partial_\beta A_\alpha{}^a + \partial_\nu A_\mu{}^a\partial_\beta A_\alpha{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a\partial_\alpha A_\beta{}^a \\
&\quad e\varepsilon^{abc}A_{\nu,\mu}{}^aA_\alpha{}^bA_\beta{}^c - e\varepsilon^{abc}A_{\mu,\nu}{}^aA_\alpha{}^bA_\beta{}^c + e\varepsilon^{abc}A_\mu{}^bA_\nu{}^cA_{\beta,\alpha}{}^a - e\varepsilon^{abc}A_\mu{}^bA_\nu{}^cA_{\alpha,\beta}{}^a \\
&\quad + e^2\varepsilon^{abc}\varepsilon^{acd}A_\mu{}^bA_\nu{}^cA_\alpha{}^dA_\beta{}^e].
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ y ε^{abc} la expresión anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tilde{F}^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}{}^a &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu A_\nu{}^a\partial_\alpha A_\beta{}^a + e\varepsilon^{abc}A_{\nu,\mu}{}^aA_\alpha{}^bA_\beta{}^c] \\
&= \partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[A_\nu{}^a\partial_\alpha A_\beta{}^a + \frac{e}{3}\varepsilon^{abc}A_\nu{}^aA_\alpha{}^bA_\beta{}^c]).
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Por lo tanto

$$K^\mu = \frac{1}{2}(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[A_\nu{}^a\partial_\alpha A_\beta{}^a + \frac{e}{3}\varepsilon^{abc}A_\nu{}^aA_\alpha{}^bA_\beta{}^c]). \tag{D.10}$$

El término K^μ es conocido como el término de Chern Simons no-abeliano para un espacio 4-dimensional.

Apéndice E

Cálculo de las Ecuaciones (5.21), (5.25) y (5.25)

En este apartado deduciremos las ecuaciones (5.21) y (5.25). Retomemos las soluciones para para $r < a$

$$\begin{aligned}H_1 &= \sqrt{1 + q^2}(gr \coth(gr) - 1), \\K_1 &= gr \operatorname{csch}(gr), \\J_1 &= q(gr \coth(gr) - 1),\end{aligned}\tag{E.1}$$

y para $a < r$

$$\begin{aligned}H_2 &= \sqrt{1 + Q^2}(Gr \coth(Gr + \beta) - 1), \\K_2 &= Gr \operatorname{csch}(Gr + \beta), \\J_2 &= Q(Gr \coth(Gr + \beta) - 1).\end{aligned}\tag{E.2}$$

Las condiciones de frontera que deben satisfacer son

$$\begin{aligned}J_1(a) &= J_2(a), \\K_1(a) &= K_2(a),\end{aligned}\tag{E.3}$$

y

$$\begin{aligned}\Delta J'(a) &= \frac{\sigma}{a}(1 - K^2(a)), \\ \Delta K'(a) &= \frac{\sigma}{a}J(a)K(a) \\ \Delta H'(a) &= 0.\end{aligned}\tag{E.4}$$

Tenemos las derivadas

$$\begin{aligned} K'_1 &= g \operatorname{csch}(gr)[1 - gr \operatorname{coth}(gr)], \\ J'_1 &= q[g \operatorname{coth}(gr) - g^2 r \operatorname{csch}^2(gr)], \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{aligned} K'_2 &= G \operatorname{csch}(Gr + \beta)[1 - Gr \operatorname{coth}(Gr + \beta)], \\ J'_2 &= Q[G \operatorname{coth}(Gr + \beta) - G^2 r \operatorname{csch}^2(Gr + \beta)]. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Empleando la condición de frontera para K' tenemos

$$\begin{aligned} \Delta K'(a) &= \frac{\sigma}{a} J(a) K(a), \\ \Rightarrow G \operatorname{csch}(Ga + \beta)[1 - Ga \operatorname{coth}(Ga + \beta)] - g \operatorname{csch}(ga)[1 - ga \operatorname{coth}(ga)] \\ &= \frac{\sigma}{a} [Q(ga \operatorname{coth}(Ga + \beta) - 1)] [Ga \operatorname{csch}(Ga + \beta)]. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Usando que $K_1(a) = K_2(a)$ y $J_1(a) = J_2(a)$ se tiene respectivamente que

$$\begin{aligned} g \operatorname{csch}(ga) &= G \operatorname{csch}(Ga + \beta), \\ ga \operatorname{coth}(ga) &= \frac{Q}{q} [Ga \operatorname{coth}(Ga + \beta) - 1] + 1. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Empleando estas relaciones la ec. (E.7) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \Rightarrow G \operatorname{csch}(Ga + \beta)[1 - Ga \operatorname{coth}(Ga + \beta)] - G \operatorname{csch}(Ga + \beta)[1 - (Ga \operatorname{coth}(Ga + \beta) - 1) - 1] \\ = \sigma [Q(Ga \operatorname{coth}(Ga + \beta) - 1)] [G \operatorname{csch}(Ga + \beta)] \\ \Rightarrow G \operatorname{csch}(Ga + \beta)[1 - Ga \operatorname{coth}(Ga + \beta)] - G \operatorname{csch}(Ga + \beta)[1 - Ga \operatorname{coth}(Ga + \beta)] \\ = \sigma Q [(Ga \operatorname{coth}(Ga + \beta) - 1)] [G \operatorname{csch}(Ga + \beta)] \\ \Rightarrow -1 + \frac{Q}{q} = Q\sigma \\ \Rightarrow \frac{1}{q} - \frac{1}{Q} = \sigma. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Notemos que usando las ecuaciones (E.3) $J'_1(a)$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned} J'_1(a) &= q \left[\frac{Q}{aq} (Ga \operatorname{coth}(Ga + \beta) - 1) + \frac{1}{a} - aG^2 \operatorname{csch}^2(Ga + \beta) \right] \\ &= QGe \operatorname{coth}(Ga + \beta) - qaG^2 \operatorname{csch}^2(Ga + \beta) - \frac{Q}{a} + \frac{q}{a}. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Sustituyendo la ec. (E.10) en la condición de frontera para J' tenemos

$$\begin{aligned}\Delta J' &= \frac{\sigma}{a}(1-K^2(a)), \\ \Rightarrow qG^2a \operatorname{csch}^2(Ga + \beta) - QG^2a \operatorname{csch}^2(Ga + \beta) + \frac{Q}{a} - \frac{q}{a} &= \frac{\sigma}{a}[1 - G^2a^2 \operatorname{csch}^2(Ga + \beta)] \\ \Rightarrow (q - Q)[G^2a \operatorname{csch}^2(Ga + \beta) - \frac{1}{a}] &= -\sigma[G^2a \operatorname{csch}^2(Ga + \beta) - \frac{1}{a}] \\ \Rightarrow Q - q &= \sigma.\end{aligned}\tag{E.11}$$

Por lo tanto tenemos las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{1}{q} - \frac{1}{Q} &= \sigma \\ Q - q &= \sigma.\end{aligned}\tag{E.12}$$

Donde las soluciones para Q y q son

$$q = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4}}{2}, \quad Q = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4}}{2}.\tag{E.13}$$

Haciendo el cociente de las ecuaciones (E.12) se obtiene que

$$Q = \frac{1}{q}\tag{E.14}$$

y por lo tanto σ se resuelve en términos de q como

$$\sigma = \frac{1}{q} - q.\tag{E.15}$$

Ahora deduciremos la ec. (5.25). Usaremos las ecuaciones

$$g \operatorname{csch}(ga) = G \operatorname{csch}(Ga + \beta),\tag{E.16}$$

$$q(ga \operatorname{coth}(ga) - 1) = Q(Ga \operatorname{coth}(Ga + \beta) - 1),\tag{E.17}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + q^2}(g \operatorname{coth}(ga) - g^2a \operatorname{csch}^2(ga)) &= \\ \sqrt{1 + Q^2}(G \operatorname{coth}(Ga + \beta) - G^2a \operatorname{csch}^2(Ga + \beta)).\end{aligned}\tag{E.18}$$

De la ecuación (E.17) se tiene

$$Ga \coth(Ga + \beta) = \frac{q}{Q}(ga \coth(ga) - 1) + 1. \quad (\text{E.19})$$

Sustituyendo (E.16) en (E.18) resulta

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + q^2}(g \coth(ga) - g^2 a \operatorname{csch}^2(ga)) = \\ & \sqrt{1 + Q^2}(G \coth(Ga + \beta) - g^2 a \operatorname{csch}^2(ga)) \\ \Rightarrow & \sqrt{1 + q^2}(ga \coth(ga) - g^2 a^2 \operatorname{csch}^2(ga)) = \\ & \sqrt{1 + Q^2}(G \coth(Ga + \beta) - g^2 a \operatorname{csch}^2(ga)). \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Empleando la ec. (E.19)

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \sqrt{1 + q^2}(ga \coth(ga) - g^2 a^2 \operatorname{csch}^2(ga)) = \\ & \sqrt{1 + Q^2}\left(\frac{q}{Q}(ga \coth(ga) - 1) + 1 - g^2 a^2 \operatorname{csch}^2(ga)\right). \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Dividiendo las ecuaciones (E.12) se puede obtener

$$Q = \frac{1}{q} \implies 1 + Q^2 = \frac{q^2 + 1}{q^2}, \quad (\text{E.22})$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + q^2}(ga \coth(ga) - g^2 a^2 \operatorname{csch}^2(ga)) = \\ & \frac{\sqrt{1 + q^2}}{q}(q^2(ga \coth(ga) - 1) + 1 - g^2 a^2 \operatorname{csch}^2(ga)). \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

Reorganizando los términos de esta ecuación y haciendo la sustitución $x = ga$ se tiene

$$\begin{aligned} & (1 - q)x \coth(x) + \left(\frac{1 - q}{q}\right)x^2 \operatorname{csch}^2(x) = \frac{1 - q^2}{q} \\ \Rightarrow & x \coth(x) + \frac{x^2 \operatorname{csch}^2(x)}{q} = \frac{1 + q}{q} \\ \Rightarrow & q \cosh(x) \left(\frac{\sinh(x)}{x}\right) - (1 + q) \left(\frac{\sinh(x)}{x}\right)^2 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Bibliografía

- [1] RICHARD HEALEY, *Gauging What's Real: The Conceptual Foundations of Contemporary Gauge Theories*, 1a Edición, Oxford University Press Inc., New York 2007.
- [2] YANG YISONG, *Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis*, 1a Edición, Springer, New York (2001).
- [3] X.L. QI, R. LI, J. ZANG Y S.C. ZHANG, *Science*, **323** (2009) 1184.
- [4] A. M. RUIZ, M. CAMBIASO Y L. F. URRUTIA, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 125015.
- [5] RUBAKOV VALERY, *Classical Theory of Gauge Fields*, 1a Edición, Princeton University Press, New Jersey (2002).
- [6] J. E. MARSDEN Y M. J. HOFFMAN, *Análisis Básico de Variable Compleja*, , Editorial Trillas, México (1996).
- [7] B. JULIA AND A. ZEE, *Phys. Rev. D* **11** (1975).
- [8] M.K. PRASAD Y C.M. SOMMERFIELD, *Phys. Rev. Lett.*, **35**, p. 760 (1975).
- [9] D. MAISON, *Nucl. Phys. B* **182**, p.144 (1981).
- [10] G. 'THOOFT, *Nucl. Phys.*, **B79**, 276 (197a).
- [11] JM FIGUEROA O'FARRILL, *Electromagnetic Duality for Children*, U.K. (1998).
- [12] A. M. RUIZ, M. CAMBIASO Y L. F. URRUTIA, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 045022.
- [13] A. M. RUIZ, M. CAMBIASO Y L. F. URRUTIA, *Phys. Rev. D* **94** (2016) 085019.
- [14] R. M. CHEN, Y. GUO, D. SPIRN Y Y. YANG, *Proc. R. Soc. A* **465** (2009) 3489-3516.
- [15] MO-LIN GE AND WEIPING ZHANG, *Differential Geometry and Physics*, World Scientific. China 2005.

- [16] D. SINGLETON, *Int. J. Theor. Phys.* **36** (1997) 1857.
- [17] STEFAN POKORSKI, *Gauge Field Theories*, 2a Edición, Cambridge University Press, Cambridge 2000.