



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

RESPUESTA HIDRODINÁMICA DE UN ROMPEOLAS FLOTANTE DEBIDO A LA
INTERACCIÓN CON OLEAJE DISPERSIVO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
M. EN C. JUAN CARLOS BARBOSA LÓPEZ

TUTOR
DR. BAUTISTA GODÍNEZ ERIC GUSTAVO,
SEPI-ESIME UA IPN

COMITÉ TUTOR
DR. MÉNDEZ LAVIELLE FEDERICO,
FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DR. SOLORIO ORDAZ FRANCISCO JAVIER,
FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DR. NAUDE DE LA LLAVE JORGE LUIS,
FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DR. ARCOS HERNÁNDEZ JOSÉ CARLOS,
SEPI-ESIME UA IPN

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: **Dr. Méndez Lavielle Federico**
Secretario: **Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier**
Vocal: **Dr. Bautista Godínez Eric Gustavo**
1 er. Suplente: **Dr. Naude De La Llave Jorge Luis**
2 do. Suplente: **Dr. Arcos Hernández José Carlos**

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Azcapotzalco del Instituto Politécnico Nacional y Departamento de Termofluidos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Eric Gustavo Bautista Godínez



FIRMA

Dedicada a ti mamá, por ser el laurel en mi vida.

Agradecimientos

Agradezco con todo el amor de mi corazón a Diana por apoyarme siempre, soy muy afortunado.

Debo especial gratitud a mi hermana, eres uno de mis ejemplos a seguir.

Agradezco a mi madre, por su ejemplo, sacrificios y por su inmenso amor para conmigo.

Agradezco, con gran afecto al Dr. Eric Gustavo Bautista Godínez, por su apoyo, enseñanzas, consejos y por su gran amistad. Gracias.

A los profesores: Dr. Federico Méndez, Dr. Francisco Solorio, Dr. Jorge Naude, y Dr. Jose Carlos Hernández por los valiosos comentarios y observaciones realizadas a este trabajo.

A mis compañeros de posgrado por sus comentarios y apoyo durante mis estudios de doctorado.

A mi amigo Rodrigo, por su ayuda para la realización de este trabajo.

A la UNAM por haberme permitido conocer la ciencia desde su filosofía y por ser mi hogar durante este tiempo.

Agradezco al CONACyT por haberme otorgado una beca durante mis estudios de doctorado.

Al Proyecto Apoyado por el Fondo Sectorial de Investigación para la Educación, del CONACyT, con número de registro CB-221116. Estudio de la respuesta dinámica e inestabilidad de un suelo marino poroelástico, inducidas por ondas de agua no-lineales.

Al Proyecto SIP, con número de registro 20180853. Solución analítica de la ecuación modificada de la pendiente suave para la propagación de oleaje con amplitud pequeña sobre una estructura curvilínea sumergida.

Finalmente agradezco al IPN, por las facilidades que siempre me ha otorgado durante mi formación académica.

Resumen

En este trabajo se estudia el desempeño en la oscilación vertical de un rompeolas elíptico flotante anclado al fondo del mar mediante líneas de amarre verticales. A partir de la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación adimensional no lineal que modela las principales características dinámicas entre la interacción del oleaje y la estructura. La solución de dicha ecuación se obtuvo mediante una técnica numérica estándar. Se identificaron los efectos de los parámetros adimensionales en el desplazamiento de la estructura. Con base en un parámetro pequeño se determinó una aproximación teórica de primer orden, y se obtiene una solución analítica simple para modelar el movimiento de la estructura, utilizando el método de escalas múltiples y teniendo en cuenta que la estructura se puede modelar como un oscilador débilmente no lineal. Se revisaron tres casos particulares: movimiento libre no amortiguado, movimiento libre amortiguado y movimiento lineal forzado. El análisis matemático para la hidrodinámica del oleaje se basa en la Teoría Lineal de Ondas Largas, la solución del campo de onda se obtiene al resolver la ecuación adimensional de Laplace, que se expresa en términos de coordenadas elípticas, y por lo tanto, su solución es definida por las funciones de Mathieu. Las predicciones muestran que la geometría del rompeolas y los parámetros físicos involucrados, ejercen una influencia significativa para la generación de la condición de casi resonancia o en la disminución del desplazamiento de la estructura. Desde un punto de vista ingenieril, la estructura tiene un comportamiento cuasi estático cuando su frecuencia natural es muy superior a la frecuencia del oleaje.

Abstract

In the present work, the performance of the vertical motion of an elliptical floating breakwater that is fixed to the sea bottom by vertical mooring lines is analyzed. The dimensionless non-linear governing equation that models the main dynamic characteristics of the interaction between water waves and the structure is obtained from Newton's second law, which is solved by a standard numerical technique. The effects the dimensionless parameters have on the displacement of the structure are identified. In addition to a theoretical first order approximation based on a small parameter, using the multiple-scales method and considering that the structure can be modeled as a weakly nonlinear oscillator, a simple analytical solution modelling the motion of the structure is obtained. Three cases are studied, namely: free undamped motion, free damped motion and forced linear motion. Mathematical formulation for the hydrodynamic water waves is based on the Shallow Waters Theory, where the wave field is obtained by solving the dimensionless Laplace equation, which is expressed in terms of elliptical coordinates, therefore, the solution is defined by Mathieu functions. The predictions show that the geometry and the physical parameters involved exert a significant influence on either the generation of the near-resonance condition, or the structure displacement. From an engineering point of view, the structure has a quasi-static motion when the natural frequency of the structure is significantly larger compared to water waves frequency.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Contenido	V
Lista de figuras	VII
Constantes físicas	IX
Parámetros adimensionales	X
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Rompeolas	2
1.2.1. Historia de los rompeolas	2
1.3. Clasificación de los rompeolas	3
1.3.1. Rompeolas de barrera	4
1.3.2. Rompeolas flotantes	5
1.3.3. Rompeolas como sistemas de mitigación en estructuras flotantes muy largas (VLFS)	6
2. Antecedentes	8
2.1. Estado del arte	9
2.1.1. Rompeolas sin amarres	9
2.1.2. Rompeolas con amarres	11
2.1.3. Rompeolas elípticos	12
2.1.4. Trabajos experimentales	13
3. Marco teórico	16
3.1. Planteamiento de problema	16
3.1.1. Modelo físico	16
3.1.2. Hipótesis	18

3.1.3.	Modelo matemático adimensional	19
3.1.4.	Expansión de dos escalas para el límite de $\varepsilon \ll 1$	20
3.1.5.	Movimiento libre no amortiguado	23
3.1.6.	Movimiento libre amortiguado, $f = 0$	24
3.1.7.	Movimiento lineal forzado	25
4.	Análisis de resultados de la dinámica del rompeolas	26
4.1.	Resultados	26
4.1.1.	Comparación con una solución analítica	26
4.1.2.	Influencia de la fuerza de excitación en el desplazamiento	28
4.1.3.	Influencia de la amplitud de la onda en el desplazamiento	29
4.1.4.	Efectos de la relación de frecuencias ω/ω_N	29
4.1.5.	Efectos del parámetro de radiación β	30
4.1.6.	Diagramas fase	31
5.	Hidrodinámica del oleaje	34
5.1.	Ecuaciones de gobierno	34
5.2.	Transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas elípticas	35
5.2.1.	Formulación matemática para el campo de velocidades	37
5.2.2.	Modelo adimensional del campo de velocidades	39
5.3.	Solución del campo de velocidades	41
5.3.1.	Solución del campo de velocidades para la región externa (1)	41
5.3.2.	Solución del campo de velocidades para la región interna (2)	45
5.4.	Acoplamiento de los campos de velocidades	47
6.	Análisis de resultados del campo del oleaje	50
6.1.	Resultados	50
6.1.1.	Influencia del parámetro α	50
6.1.2.	Influencia del parámetro ζ	52
7.	Conclusiones	54
7.0.1.	Trabajos futuros	55
A.	Ecuaciones de gobierno para ondas largas	56
	Bibliografía	59

Índice de figuras

1.1.	Rompeolas tipo montículo en Civitavecchia, Italia [1].	2
1.2.	[a] Rompeolas en Cherbourg, (1781, 1789, 1830). [b] Rompeolas en Plymouth, (1812). [c] Rompeolas en Dover, (1847), [1].	3
1.3.	Rompeolas Tipo Montículo.	4
1.4.	Rompeolas de Pared Vertical.	5
1.5.	Rompeolas flotante anclado al fondo mediante una configuración de amarres convencional [2].	6
1.6.	Estructuras flotantes muy largas. Ciudad de AEQUOREA, proyecto de urbanización Río de Janeiro 2015 [3].	7
2.1.	Modelo físico empleado por Söylemez y Gören [4].	10
2.2.	Modelo físico del trabajo de Elchahal <i>et al.</i> [5].	11
2.3.	Modelo físico de una estructura elíptica propuesto por Chen y Mei [6].	13
2.4.	Modelo físico propuesto por Wang y Sun [7].	14
3.1.	Modelo físico de la interacción entre el oleaje y una estructura de distribución espacial elíptica.	16
4.1.	Comparación de la solución analítica para el desplazamiento adimensional de la estructura contra la solución numérica, para valores constantes de $\beta = 0.0001$, $\varepsilon = 0.001$, $f = 1$ and $\omega/\omega_N = 0.3$	27
4.2.	Curva de respuesta de la frecuencia para valores fijos de la fuerza adimensional $f = 1$ y diferentes valores del parámetro $\beta (= 0.02, 0.025, 0.033, 0.05, 0.1)$	28
4.3.	Desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$ para diferentes valores de la fuerza adimensional $f (= 1, 2, 3, 4)$ y valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $\varepsilon = 0.3$ y $\omega/\omega_N = 0.3$	28
4.4.	Desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$ para diferentes valores del parámetro $\varepsilon (= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$ y valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $f = 1$ y $\omega/\omega_N = 0.3$	29
4.5.	Desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$ para diferentes valores de la relación de frecuencias $\omega/\omega_N (= 0.2, 0.5, 0.7, 0.9)$ y valores fijos de los parámetros $\beta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$ y $f = 3$	30
4.6.	Desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$ para diferentes valores del parámetro $\beta (= 0.0009, 0.005, 0.09, 5)$ y valores fijos de los parámetros $\varepsilon = 0.1$, $f = 2$ y $\omega/\omega_N = 0.5$	30
4.7.	Diagramas fase para valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $\varepsilon = 0.3$ y $\omega/\omega_N = 0.3$ con diferentes valores de la fuerza adimensional $f (= 1, 2, 3, 4)$. (a) diagrama fase para tiempo corto $\tau (= 0 - 500)$ y (b) diagrama fase para tiempo largo $\tau (= 13000 - 13500)$	31

4.8.	Diagramas fase para valores fijos de los parámetros $\beta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$ y $f = 3$ con diferentes valores de la relación de frecuencias ω/ω_N ($= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$). (a) Diagrama fase para tiempo corto τ ($= 0 - 500$) y (b) Diagrama fase para tiempo largo τ ($= 13000 - 13500$).	32
4.9.	Diagramas fase para valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $f = 1$ y $\omega/\omega_N = 0.3$ con diferentes valores del parámetro ε ($= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$). (a) Diagrama fase para tiempo corto τ ($= 0 - 500$) y (b) Diagrama fase para tiempo largo τ ($= 13000 - 13500$).	32
4.10.	Diagramas fase para valores fijos de los parámetros $\varepsilon = 0.1$, $f = 2$ y $\omega/\omega_N = 0.5$ con diferentes valores del parámetro de radiación β ($= 0.0009, 0.005, 0.09, 5$). (a) Diagrama fase para tiempo corto τ ($= 0 - 500$) y (b) Diagrama fase para tiempo largo τ ($= 13000 - 13500$).	33
5.1.	Esquema físico de los límites geométricos de una elipse.	36
6.1.	Potencial de velocidades para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$, $\zeta = 0.40$ con diferentes valores del parámetro α ($= 0.02, 0.15$). (a) Potencial de velocidades para $\alpha = 0.02$ y (b) Potencial de velocidades para $\alpha = 0.15$	51
6.2.	Vectores de velocidad para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$, $\zeta = 0.40$ con diferentes valores del parámetro α ($= 0.02, 0.15$). (a) Vectores de velocidad para $\alpha = 0.02$ y (b) Vectores de velocidad para $\alpha = 0.15$	51
6.3.	Potencial de velocidades para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$, $\alpha = 0.40$ con diferentes valores del parámetro ζ ($= 0.10, 0.40$). (a) Potencial de velocidades para $\zeta = 0.10$ y (b) Potencial de velocidades para $\zeta = 0.40$	52
6.4.	Vectores de velocidad para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$, $\alpha = 0.40$ con diferentes valores del parámetro ζ ($= 0.10, 0.40$). (a) Vectores de velocidad para $\zeta = 0.10$ y (b) Vectores de velocidad para $\zeta = 0.40$	53

Constantes físicas

Símbolo	Descripción	/ Unidad
A_w	Área del cuerpo en reposo.	[m ²]
A_I	Amplitud incidente.	[m]
C	Celeridad de la onda.	[m · s ⁻¹]
F	Fuerza inducida por el oleaje.	[N]
\tilde{N}	Número de líneas de amarre.	[Unidad]
R	Coefficiente de radiación.	[N · s · m ⁻¹]
S	Longitud sumergida del rompeolas.	[m]
T	Período del oleaje.	[s]
V	Velocidad vertical de la elipse.	[m · s ⁻¹]
a	Semi eje mayor de la elipse.	[m]
b	Semi eje menor de la elipse.	[m]
c	Foco de la elipse.	[m]
g	Aceleración gravitacional.	[m · s ⁻²]
h_0	Profundidad.	[m]
k_s	Constante de rigidez de amarre.	[N · m ⁻¹]
m	Masa del rompeolas.	[kg]
m_a	Masa agregada.	[kg]
t	Tiempo.	[s]
u	Velocidad en dirección del eje horizontal.	[m · s ⁻¹]
v	Velocidad en dirección del eje vertical.	[m · s ⁻¹]
w	Velocidad en dirección normal al plano.	[m · s ⁻¹]

Parámetros adimensionales

\tilde{P}	Presión adimensional.
$U_r = \tilde{\varepsilon}/\tilde{\mu}^2$	Parámetro de Ursell.
\tilde{V}	Velocidad de oscilación vertical de la elipse.
\tilde{X}	Eje horizontal adimensional.
\tilde{Y}	Eje vertical adimensional.
$f = \frac{F}{A_I^2 \omega_N^2 K}$	Fuerza adimensional.
q	Valor característico de las funciones de Mathieu.
α	Relación entre la longitud sumergida de la elipse y la profundidad.
$\beta = \frac{R/\omega_N}{KA_I}$	Coefficiente de radiación.
$\tilde{\mu}$	Relación entre la longitud de onda y la profundidad.
$\tilde{\varepsilon}$	Relación entre la amplitud incidente y la profundidad.
$\bar{\varepsilon}$	Excentricidad de la elipse.
\tilde{k}	Relación entre la longitud de onda y la geometría.
$\tilde{\Phi}$	Potencial de velocidades.
$\tilde{\phi}_i$	Potencial incidente.
$\tilde{\phi}_r$	Potencial radiado exterior.
$\tilde{\phi}_{\tilde{r}}$	Potencial radiado interior.
κ	Relación entre el número de onda y la profundidad.
Ω	Relación de frecuencias.
$\varepsilon = \frac{KA_I}{m+m_a}$	Parámetro adimensional.
ζ	Relación entre la geometría de la elipse y la profundidad.

Letras griegas

Δ	Integral vertical de funciones ortogonales.
$\tilde{\Delta}$	Integral vertical de funciones ortogonales.
η_e	Desplazamiento vertical de la elipse.
λ	Longitud de onda.
μ	Variación radial en la elipse.
μ_0	Perímetro de la elipse.
ν	Variación angular en la elipse.
Γ	Integral angular de funciones ortogonales.
$\tilde{\eta}_e$	Desplazamiento adimensional de la elipse.
$\tilde{\Gamma}_n^*$	Integral de funciones ortogonales.
Γ_n^*	Integral de funciones ortogonales.
ω	Frecuencia de oscilación del oleaje.
ω_N	Frecuencia natural de la elipse.
π	Número Pi.
Φ	Potencial de velocidades.
ϕ_i	Potencial incidente.
ϕ_r	Potencial radiado exterior.
$\phi_{\tilde{r}}$	Potencial radiado interior.
ρ	Densidad del agua.
τ	Tiempo largo.
$\tilde{\tau}$	Tiempo corto.
v	Fase de oscilación.

Coefficientes y constantes

A	Coefficiente propio de las funciones de Mathieu (par).
B	Coefficiente propio de las funciones de Mathieu (impar).
Ce	Función radial de Mathieu de primer tipo (par).
Fey	Función de Mathieu de segundo tipo (par).
Gey	Función de Mathieu de segundo tipo (impar).
K	Coefficiente de fricción.
Me	Función de Mathieu de tercer tipo (par).
Ne	Función de Mathieu de tercer tipo (impar).
Se	Función radial de Mathieu de primer tipo (impar).
\tilde{a}	Constante de separación.
\tilde{a}_m	Número característico propio de las funciones de Mathieu (par).

\tilde{b}_m	Número característico propio de las funciones de Mathieu (impar).
ce	Función angular de Mathieu de primer tipo (par).
i	Número imaginario.
se	Función angular de Mathieu de primer tipo (impar).

Subíndices

H	Referente a homogéneo.
N	Referente a natural.
P	Referente a particular.
a	Referente a agregada.
e	Referente a la estructura.
i	Referente a incidente.
m	Referente a la suma de funciones.
n	Referente a la suma de valores característicos.
r	Referente a radiado exterior.
\tilde{r}	Referente a radiado interior.
s	Referente a la suma de coeficientes de Mathieu.
w	Referente reposo.
1	Región exterior.
2	Región interior.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El interés de realizar investigaciones relacionadas a la prevención de riesgos en ingeniería marítima, se debe a que tanto las zonas costeras como las edificaciones emplazadas en los océanos son constantemente afectadas por el oleaje que incide sobre ellas; los fenómenos meteorológicos que se presentan durante el año provocan que este oleaje se intensifique poniendo riesgo la seguridad de las personas que se encuentran o que habitan en esas zonas. Una forma de minimizar los riesgos es la construcción de estructuras disipadoras de energía conocidas como rompeolas. En las zonas portuarias, las estructuras rompeolas que se construyen son de gran tamaño debido a las actividades de comercio y de transporte que se desarrollan ahí, por lo que su diseño es justificado. Sin embargo, en las zonas turísticas no es conveniente ese tipo de sistemas ya que se provocarían un daño ambiental y visual significativo, por lo que es más conveniente utilizar rompeolas flotantes.

La utilización de rompeolas flotantes ha venido en aumento sobre todo en las últimas décadas como consecuencia de la construcción de estructuras flotantes muy largas VLFS (por sus siglas en inglés), que son creadas como una alternativa a nuevas ciudades, playas, aeropuertos o cualquier tipo de construcción de grandes dimensiones emplazadas en el mar, por lo que necesitan estructuras de protección para que atenúen la energía de las olas que actúan sobre ellas.

1.2. Rompeolas

Los rompeolas son estructuras construidas cercanas a la línea de costa o a edificaciones costeras con el propósito de reducir la intensidad de la acción del oleaje que se dirige hacia ellas. Esto se hace para proporcionar refugio seguro, evitar la erosión de las playas, mejorar la calidad del agua y principalmente para asegurar una condición de oleaje en calma. Los océanos y los litorales marítimos son un área dinámica de cambios naturales y a su vez de uso humano creciente, debido a esto, la investigación de sistemas rompeolas ha sido muy atractiva para la comunidad científica e ingenieril; la necesidad de diseñar dispositivos cada vez más eficientes para la mitigación de los efectos del oleaje y para la protección de estas zonas, ha provocado que este tópico sea de gran importancia para los investigadores. Estos dispositivos se construyen en función de las condiciones naturales geográficas, las corrientes marinas, las condiciones geotécnicas del fondo del mar, la morfología de la zona, el clima y principalmente las características hidrodinámicas del oleaje.

1.2.1. Historia de los rompeolas

Los rompeolas construidos en la antigüedad eran presumiblemente simples montículos hechos de piedras. Sin embargo, aproximadamente en el año 2000 a.C. fue construido un rompeolas de mampostería en Alejandría, Egipto. El emperador romano Trajano (53-117 d.C.) ordenó construir un dique en Civitavecchia, Italia, el cual es reconocido como el más antiguo rompeolas ver Fig. (1.1).

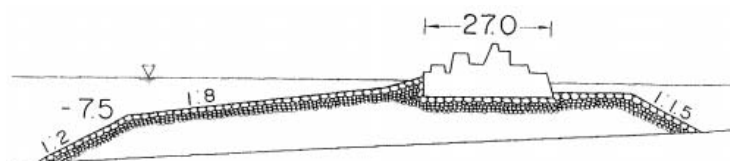


FIGURA 1.1: Rompeolas tipo montículo en Civitavecchia, Italia [1].

La era de los rompeolas modernos comenzó en la segunda mitad del siglo XVIII, correspondiente a la revolución industrial. Los rompeolas construidos en Cherbourg, Plymouth, y Dover se consideran los rompeolas pioneros de hoy en día, Takahashi [1].

La construcción del rompeolas en la bahía de Cherbourg, Francia, comenzó en 1781. El diseño inicial del rompeolas era una estructura rellena de roca con una longitud de 50 metros en forma de cono. Sin embargo, la estructura fracasó poco tiempo después de su instalación, por lo que en 1789 su diseño fue cambiado a un rompeolas de escollera. La parte superior de la estructura sufrió daños frecuentes durante los años subsecuentes

haciendo que en 1830 se construyera una pared vertical encima de la estructura. Es probable que sea el primer rompeolas compuesto (montículo-pared vertical). Los cambios de la sección transversal del rompeolas se pueden ver Fig. (1.2 a).

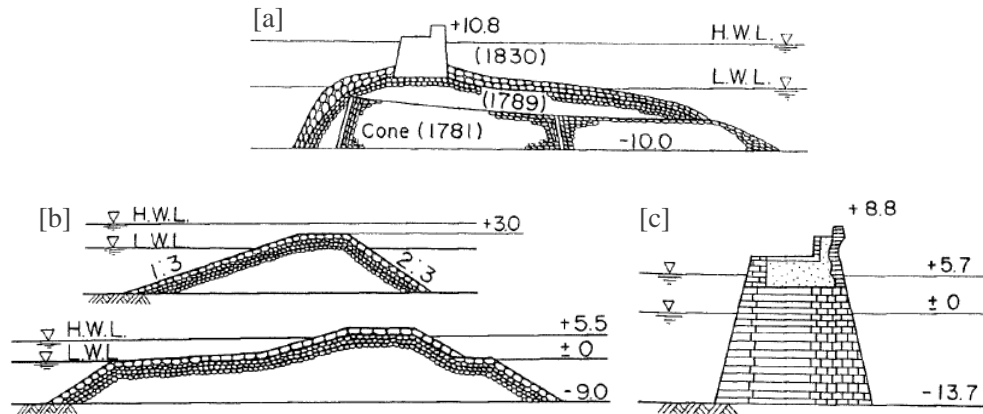


FIGURA 1.2: [a] Rompeolas en Cherbourg, (1781, 1789, 1830). [b] Rompeolas en Plymouth, (1812). [c] Rompeolas en Dover, (1847), [1].

El rompeolas en el Puerto Plymouth, Reino Unido, que se extiende a lo largo del canal inglés hacia el puerto de Cherbourg se inició en 1812. Era un rompeolas de escombros tipo montículo que pretendía copiar al que fue construido en Cherbourg. La sección transversal inicial fue de 3 metros de altura. La elevación de la estructura se cambió posteriormente a 6 metros para reducir el rebase de las ondas incidentes. Sin embargo, en 1841 la sección transversal del rompeolas se cambió después de sufrir diversos daños y reparaciones. La evolución de la estructura se muestra en la Fig. (1.2 b).

En la Fig. (1.2 c) se muestra el diseño original (1847) del rompeolas de pared vertical situado en Dover, Reino Unido. Su diseño fue tomando en cuenta lo aprendido de las estructuras construidas en Cherbourg y Plymouth. Debido a la limitada oferta de piedras de cantera disponibles cerca de Dover, se decidió construir una pared vertical, la cual fue extremadamente difícil de construir; por lo tanto, su construcción fue lenta y a un gran costo. A partir de estas estructuras se empezaron a construir rompeolas en las bahías y puertos de los países de todo el mundo.

1.3. Clasificación de los rompeolas

Existe una variedad muy grande de rompeolas, desde los que son construidos a partir de escombros, hasta los que implementan diseños estructurales complejos; además, existen los que disipan totalmente y parcialmente la energía del oleaje. La utilización de unos o de otros dependerá del propósito para el que son construidos y principalmente de las condiciones naturales en donde serán emplazados. Dentro de este contexto se puede hacer

una clasificación de rompeolas en donde se engloban todas las estructuras: rompeolas de barrera y rompeolas flotantes, los cuales son definidos brevemente a continuación.

1.3.1. Rompeolas de barrera

Rompeolas tipo montículo son estructuras compuestas regularmente de roca con revestimiento de hormigón, su sección transversal es pequeña por lo que la eficiencia depende sustancialmente de la geometría de la estructura, en donde la forma del diseño del montículo debe garantizar la máxima disipación de la energía del oleaje. Se pueden considerar como estructuras de bajo costo, pero no son eficaces para oleajes de gran intensidad, por lo tanto, sus aplicaciones se limitan a entornos de oleaje poco exigentes siendo utilizados principalmente para mejorar las condiciones estéticas de las playas, evitando la erosión y mejorando la calidad del agua. Dentro de esta clasificación se pueden encontrar los “rompeolas Berma” y los “rompeolas de Bragg”, estos últimos son una configuración de estructuras colocadas en serie, por lo que a diferencia de los rompeolas convencionales, pueden ser emplazados en zonas donde la intensidad del oleaje es mayor.



FIGURA 1.3: Rompeolas Tipo Montículo.

Rompeolas de pared vertical son estructuras que se construyen en situaciones expuestas a oleajes de mayor intensidad bajo condiciones de tiempo prolongado, están diseñados para permitir que las olas rompan en la estructura, debido a que su eficiencia es función de la masa del sistema. Son relativamente fáciles de diseñar y pueden dirigir parcialmente la dirección del oleaje reflejado, se consideran como estructuras con larga vida de duración. Por otro lado, su costo es muy elevado, el impacto visual que provoca

es significativo, puede alterar los procesos naturales del litoral y provocar alteración de los procesos de transporte de sedimentos, lo cual conduce a una mayor erosión.



FIGURA 1.4: Rompeolas de Pared Vertical.

1.3.2. Rompeolas flotantes

Rompeolas flotantes son estructuras parcialmente o totalmente sumergidas, presentan diferentes formas geométricas y son ancladas al suelo marino mediante distintas configuraciones, por lo que su eficiencia para disipar la energía del oleaje ya no solo está en función de la distribución geométrica de la estructura, sino también de las características de las líneas de amarre, lo que hace que el sistema se comporte como una estructura flotante semirígida la cual puede presentar 6 grados de libertad en su movimiento, avance-retroceso (surge), elevación-descenso (heave), desviación lateral (sway), balanceo (roll), guiñada (yaw) y cabeceo (pitch). Estas estructuras pueden enlistarse en once categorías:

1. Con pontones flotantes (rectangulares).
2. Con inclinación frontal (ángulo respecto al fondo).
3. De cadenas de llantas.
4. Con pivote vertical central (Tipo A-Frame).
5. Conformados con tubos flotantes.
6. Con paredes porosas.
7. Con mecanismos hidráulicos o neumáticos.
8. De membranas flotantes.

9. Con accesorios generadores de turbulencia.
10. Con generador de oleaje.
11. Sistemas de almacenamiento flotante.

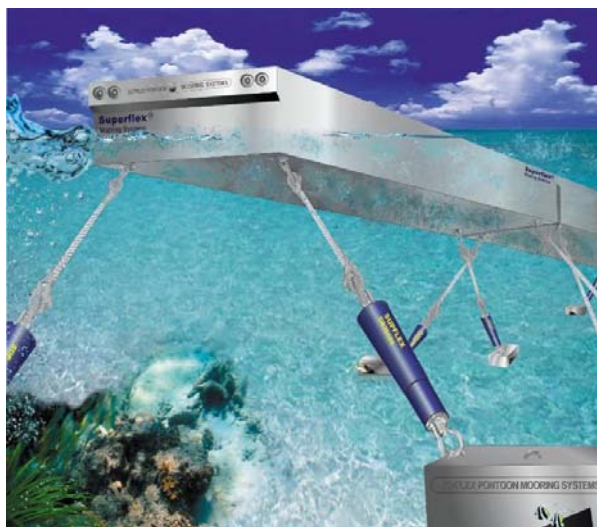


FIGURA 1.5: Rompeolas flotante anclado al fondo mediante una configuración de amarras convencional [2].

Las ventajas que tienen este tipo de rompeolas es que son consideradas estructuras de bajo costo, pueden atenuar eficazmente olas moderadas, producen mínima interferencia en la circulación de corrientes, transporte de sedimentos y migración de peces, pueden moverse con relativa facilidad y ser ubicados en distintas posiciones, además, pueden ser empleados en cualquier tipo de fondo, incluso en condiciones de suelos poco consolidados. Por otro lado, como cualquier estructura de protección costera presentan limitaciones que deben ser consideradas para determinar su rango de seguridad y eficiencia, requieren de mantenimiento constante, son susceptibles a fallas estructurales durante procesos extraordinarios, son vulnerables a los cambios de profundidad, así como a las variaciones en el ángulo de las ondas incidentes, y su eficiencia actual esta limitada a períodos de oleaje que no superen los 8 segundos [8].

1.3.3. Rompeolas como sistemas de mitigación en estructuras flotantes muy largas (VLFS)

La creación de estructuras flotantes muy largas como alternativa a nuevas zonas de esparcimiento ha venido en aumento en los últimos años, propuestas de ciudades urbanas emplazadas en los océanos, como el proyecto de urbanización AEQUOREA en Río de Janeiro, Fig. (1.6), se están convirtiendo en opciones reales en el desarrollo de tecnología

marítima. Estas obras ingenieriles necesitan protección para minimizar su respuesta hidroelástica, por lo que los ingenieros han propuesto varios métodos de mitigación considerando a los rompeolas el más viable para reducir la amplitud de onda que los afecta. Una regla general es tener un rompeolas si la altura significativa de la ola es mayor a 4 metros. Los rompeolas convencionales montados en el fondo del mar son los más eficientes para la reducción de la respuesta hidroelástica, sin embargo, poseen algunos inconvenientes como la dificultad en su construcción, sobre todo cuando la profundidad es grande, dificultad para eliminar el rompeolas si es necesario, además de que cortan el flujo de agua alrededor del VLFS, y por lo tanto, cancelan todo tipo de mérito ecológico, aspecto de fundamental importancia en las nuevas edificaciones. A fin de reducir los costos y mantener una relación respetuosa con el medio ambiente, se han propuesto rompeolas flotantes, los cuales permiten que el agua fluya a través de las aberturas en su parte inferior, causando relativamente poco daño al lecho marino y a su vez, pueden actuar como barrera anti colisión.



FIGURA 1.6: Estructuras flotantes muy largas. Ciudad de AEQUOREA, proyecto de urbanización Río de Janeiro 2015 [3].

Como se mencionó anteriormente, la eficiencia de los rompeolas flotantes depende de sus dimensiones, forma geométrica y de su sistema de amarre. El ancho debe ser comparable (en orden de magnitud) con la longitud de la onda, mientras que el calado con la relación entre la profundidad y el radio de movimientos orbitales de las olas. Por lo tanto, el diseño de cada estructura debe ser específico y corresponder a las condiciones significativas del oleaje, morfología y morfodinámica costera de cada sitio en particular, ya que su diseño debe asegurar que la estructura se mantenga en posición y evitar que se desplace en condiciones críticas, una estructura flotante muy grande a la deriva puede conducir no solo a dañar las instalaciones circundantes sino también a la pérdida de vidas humanas.

Capítulo 2

Antecedentes

El estudio de los rompeolas flotantes tiene sus comienzos durante la segunda guerra mundial, con la intención de comparar y mejorar la eficiencia de este tipo de estructuras en las actividades de desembarque de tropas militares, siendo una de sus principales motivaciones el "Día D" (6 de Junio de 1944) cuando soldados norteamericanos, británicos y canadienses desembarcaron sobre las playas de Normandía. El éxito del desembarco fue uno de los elementos clave de la derrota del III Reich. A partir de los modelos físicos empleados en la segunda guerra mundial algunos autores como Brebner [9] y Wehausen [8] desarrollaron investigaciones sobre la descripción matemática de estructuras flotantes empleando las ecuaciones de Navier Stokes. Los modelos físicos fueron la principal herramienta de simulación hasta los años 80, su metodología avanzó de las simulaciones en canales de oleaje a la validación de modelos experimentales bidimensionales. Como consecuencia de los avances computacionales de los años 90, diferentes autores realizaron modelos numéricos inicialmente en condiciones de oleaje lineal, para posteriormente realizarlos con oleaje oblicuo. Con el fortalecimiento de la comprensión de los modelos realizados en 2D, se comenzaron a desarrollar modelos en 3D permitiendo apreciar y describir el comportamiento de estructuras flotantes sujetas a los 6 grados de libertad que éstas presentan. Por otro lado, el desarrollo de trabajos analíticos tuvo sus inicios con el planteamiento de modelos matemáticos que describen el comportamiento de estructuras flotantes con geometrías regulares en condiciones de flujo somero, sometidas a pequeñas oscilaciones como consecuencia de su interacción con el oleaje, las primeras investigaciones se basaron en la formulación variacional de Schwinger con la finalidad de obtener las soluciones para los problemas de radiación. A pesar de que los trabajos numéricos y experimentales pueden describir de una manera más realista la dinámica de estructuras flotantes, los modelos y estudios teóricos siguen siendo una de las partes fundamentales para la comprensión y el entendimiento de los fenómenos físicos que se presentan en problemas de interacción oleaje-estructura.

2.1. Estado del arte

2.1.1. Rompeolas sin amarres

Adee [10] propuso un modelo matemático bidimensional que describe la interacción entre oleaje y una estructura flotante que puede adoptar varias formas geométricas, en su investigación analizó el desempeño del rompeolas en función de la onda transmitida. Los resultados que obtuvo fueron comparados con pruebas experimentales obtenidas por el mismo en un trabajo desarrollado un año antes [11]. Con las observaciones realizadas concluyó que el movimiento de roll no es significativo en los efectos de la onda transmitida. Drimer *et al.* [12] en su trabajo de investigación presentan la solución analítica del problema simplificado de un rompeolas flotante de sección transversal rectangular, en donde los resultados de masa agregada, coeficientes de amortiguamiento, fuerzas de amarre, coeficientes de transmisión y reflexión, son obtenidos en simples expresiones analíticas para hacerlas accesibles a aplicaciones de ingeniería.

Una investigación del problema de radiación de ondas fue presentado por Williams y Darwiche [13], en donde los resultados numéricos muestran la variación de la masa agregada y de los coeficientes de amortiguamiento para distintas frecuencias de oscilación de la estructura, ese trabajo es una extensión de un estudio previo realizado por Williams [14] en 1988, en donde estudió la dispersión del oleaje en estructuras elípticas flotantes, mediante la teoría lineal de ondas largas en condiciones de flujo somero, su formulación matemática conduce a soluciones en términos de las funciones de Mathieu, las cuales son utilizadas para la obtención de fuerzas y momentos inducidos por el oleaje incidente. Diversos autores como Zhang y Williams [15], Bao *et al.* [16], Chatjigeorgiou y Mavrikos [17], realizaron investigaciones de la interacción fluido-estructura, todos consideran estructuras fijas para los problemas de dispersión y difracción de las ondas usando flujo potencial y teoría de ondas largas; en los tres trabajos consideran una solución analítica en términos de series de funciones trigonométricas en donde el cálculo numérico de estas funciones requieren un costo computacional elevado, especialmente cuando los valores de los parámetros físicos son grandes. Hsu y Wu [18], desarrollaron una investigación con base en la teoría lineal de ondas largas utilizando el método del elemento frontera (BEM) para estudiar los problemas de sway y heave de una estructura flotante con fondo constante y una pared lateral, en donde presentan resultados numéricos y analíticos para los coeficientes de amortiguamiento, masa agregada y radiación. Concluyeron que los coeficientes no solo dependen de la profundidad sumergida y del ancho de la estructura, sino también de la separación que hay entre el rompeolas y la pared que se incluye en el modelo. Posteriormente, Abul-Azm y Gesraha [19] utilizando teoría de flujo potencial, examinaron teóricamente las propiedades hidrodinámicas de estructuras flotantes largas

que interactúan con ondas lineales oblicuas que se propagan sobre un fondo finito. Los potenciales de velocidad se expresan en forma de expansión de funciones características con coeficientes no conocidos. Asumiendo movimientos de un cuerpo rígido y por medio de las ecuaciones de movimiento, calculan las respuestas dinámicas de la estructura. Encontraron que el rendimiento del rompeolas respecto a la reflexión de las olas tiene una fuerte dependencia de la dimensión relativa de su sección transversal, mientras que las propiedades dinámicas dependen principalmente de las características inerciales del rompeolas; demostraron que la dirección de la onda tiene un efecto poco significativo en el coeficiente de reflexión, particularmente para las ondas que forman un gran ángulo con el rompeolas.

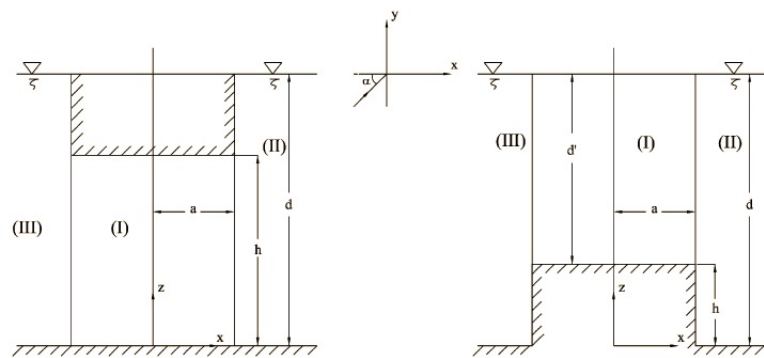


FIGURA 2.1: Modelo físico empleado por Söylemez y Gören [4].

Zheng *et al.* [20] continuaron con el problema del rompeolas rectangular de Wu. [18] pero ahora considerando tres grados de libertad (heave, sway y roll). Las expresiones analíticas para los potenciales de radiación y de difracción fueron obtenidas haciendo uso del método de separación de variables y el método de expansión de funciones características. En su trabajo obtienen los coeficientes de masa agregada y de amortiguamiento para cada uno de los modos de oscilación de la estructura y calculan las fuerzas de excitación a las que la estructura es sometida debido al oleaje que incide sobre ella. Ese mismo año, Söylemez y Gören [4] propusieron un rompeolas de sección transversal rectangular, en donde estudiaron 2 casos: uno para una estructura flotante y otro para una estructura fija en el fondo del mar, ver Fig. (2.1). Empleando la ecuación de Helmholtz como ecuación diferencial de gobierno, encontraron una solución analítica para el problema de difracción debido a la interacción de ondas oblicuas con cuerpos cilíndricos, uno fijo sobre la superficie libre del mar, y otro colocado en el fondo. El problema lo dividieron en una región interior, la cual comprende los límites dentro de la geometría de la estructura, y una región exterior que envuelve radialmente a la estructura. Hacen uso del método de separación de variables para obtener la solución en cada una de las regiones en que es dividido el problema. La región interior y exterior son acopladas en las fronteras en común para determinar los coeficientes no conocidos usando series de Fourier.

2.1.2. Rompeolas con amarres

Después de los trabajos realizados en estructuras flotantes, Adee [21] presentó el estudio de un rompeolas anclado mediante líneas de amarre a un fondo de distribución constante. Con base en las ecuaciones de equilibrio estático, y considerando los movimientos de rotación y traslación de la estructura, obtiene la fuerza de restauración de la estructura en términos de las ecuaciones de movimiento. Concluyó que la teoría sistemáticamente subestima a las fuerzas de las líneas de amarre. Carver [22] investigó los efectos combinados de la incidencia del oleaje angular, la posición de la estructura, la transmisión y la difracción en presencia de un sistema rompeolas. Él concluyó que el cruzar o no las líneas de anclaje tiene un efecto poco significativo sobre las características de atenuación del oleaje y demostró que el coeficiente de transmisión del oleaje depende en gran medida de la longitud relativa de la estructura y es débilmente dependiente del ángulo de incidencia del oleaje. Además, explicó que las variaciones en la profundidad del agua producen una ligera disminución en las alturas de las ondas transmitidas. Yamamoto *et al.* [23] resuelven numéricamente el problema bidimensional para 3 grados de libertad de objetos flotantes con distribución geométrica arbitraria y cualquier disposición de amarre. La solución analítica se obtuvo en términos de funciones de Green. Descubrieron que si el sistema de anclaje se coloca apropiadamente, la atenuación del oleaje puede ser más grande. También presentaron una comparación entre su solución analítica y resultados experimentales, obteniéndose un muy buen ajuste.

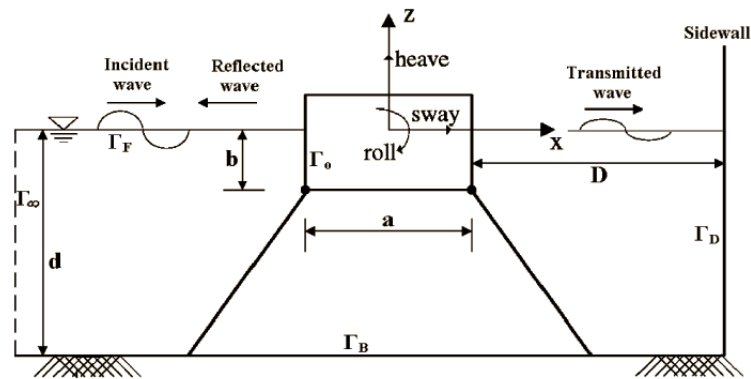


FIGURA 2.2: Modelo físico del trabajo de Elchahal *et al.* [5].

Sannasiraj *et al.* [24] presentaron una investigación teórica y experimental del comportamiento hidrodinámico de un rompeolas flotante tipo ponton. El modelo teórico se basa en la técnica del elemento finito bidimensional para evaluar los coeficientes hidrodinámicos y las fuerzas de excitación en la estructura. Los movimientos y las fuerzas de amarre se midieron para tres tipos de configuración de anclaje. Obtuvieron resultados para tres grados de libertad (sway, heave y roll), demostrando que la configuración de

anclaje cruzado es susceptible de alcanzar frecuencias de oscilación cercanas a la frecuencia natural de la estructura, específicamente en su movimiento de roll. Concluyeron que el coeficiente de transmisión no es significativamente afectado por las configuraciones de amarre, sin embargo, las pruebas mostraron un mayor coeficiente de transmisión cuando se utiliza un anclaje cruzado, además de que las fuerzas de amarre son superiores respecto a las fuerzas registradas cuando se utiliza un anclaje convencional. Con base en los trabajos realizados por [18] y [20], Elchahal *et al.* [5], analizaron la interacción oleaje-estructura de un rompeolas rectangular anclado a un fondo uniforme y una pared al final del dominio físico, ver Fig. (2.2). Su investigación se enfoca en la reflexión parcial la cual es muy importante en el diseño de puertos o rompeolas para conocer la influencia de los parámetros involucrados en los efectos de resonancia debidos a la acumulación de energía por la interacción de las ondas reflejadas y transmitidas.

2.1.3. Rompeolas elípticos

En el contexto de los rompeolas elípticos, los primeros en obtener una solución matemática exacta de la difracción de las ondas en cuerpos elípticos fueron Chen y Mei [6]. Los investigadores usaron una teoría de flujo potencial para obtener una solución analítica del potencial de velocidades del fluido, la cual obtuvieron en términos de series infinitas de funciones de Mathieu y funciones modificadas de Mathieu, ver Fig. (2.3). Posteriormente, Chen y Mei [25], consideraron la dispersión de ondas para una plataforma estacionaria con geometría elíptica, en donde con base en la teoría lineal de ondas en aguas poco profundas, calcularon las cargas hidrodinámicas sobre la estructura. Más tarde, Williams [26] usando teoría lineal de ondas, presentó dos métodos de aproximación para calcular las fuerzas de las ondas inducidas y los momentos sobre una pared vertical fija de sección transversal elíptica. El primer método involucra la expansión de expresiones exactas para valores pequeños de un parámetro de excentricidad elíptica, la solución toma la forma de series de perturbación y los coeficientes contenidos en esas expansiones involucran a las funciones de Bessel. El segundo método se basa en el teorema de Green el cual se usa para obtener una ecuación integral para el potencial de velocidades del fluido. El mismo año, Williams [27], considerando teoría lineal de ondas largas realizó una investigación acerca de rompeolas flotantes elípticos parcialmente sumergidos, su formulación matemática para el potencial de velocidades se expresa en términos de funciones de Mathieu, en donde los resultados numéricos se presentan para ciertos rangos de ondas y de parámetros estructurales. Williams y Darwiche [28] re-investigaron ese trabajo, ésta vez sin la restricción de ondas largas. Bhatta [29] realizó estudios analíticos sobre el problema de difracción de ondas lineales debido a su interacción con una

estructura circular y una elíptica colocadas en el fondo del mar. El problema de difracción para el cilindro elíptico se resuelve utilizando coordenadas elípticas y el método de separación de variables, mientras que la solución analítica se obtiene en términos de las funciones de Mathieu y funciones modificadas de Mathieu. Chatjigeorgiou [30] con base en la teoría de flujo potencial investiga el problema de dispersión hidrodinámica de estructuras elípticas sujetas a oleaje regular, la solución para el potencial de difracción se fundamenta en la formulación semi analítica y aplicación de las funciones de Mathieu, consideran orientaciones angulares arbitrarias de los ejes de las estructuras y obtienen los potenciales de velocidad; su trabajo es una extensión de la investigación realizada por [31, 32] quienes obtuvieron una solución estrictamente analítica para la difracción en cuerpos elípticos.

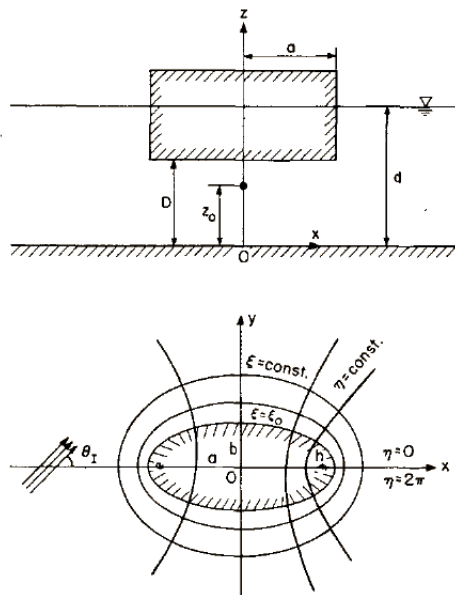


FIGURA 2.3: Modelo físico de una estructura elíptica propuesto por Chen y Mei [6].

2.1.4. Trabajos experimentales

En las últimas décadas el desarrollo de estudios experimentales en rompeolas han venido en aumento, por ejemplo, Kee [33] desarrolló un trabajo experimental y numérico de ondas de agua interactuando con un rompeolas poroso de sección transversal circular anclado al fondo, en donde se calculan los potenciales de velocidad. Wang y Sun [7] presentaron una configuración novedosa de un rompeolas flotante anclado al fondo mediante un anclaje convencional en sus líneas de amarre y una pared en el fondo, ver Fig. (2.4). Los investigadores estudiaron su desempeño hidrodinámico, en donde su principal contribución es la fabricación de una estructura con bloques en forma de diamante para reducir la altura de las ondas y mejorar el desempeño del anclaje. En las pruebas

desarrolladas consideran dos tipos de configuración de amarre. La influencia de una pared vertical impermeable es considerada en los cálculos del coeficiente de transmisión. Con base en los resultados, concluyeron que el rompeolas poroso tiene un desempeño aceptable para la atenuación del oleaje incidente y el rendimiento en las líneas de amarre, el cual está relacionado con la disipación de energía (E_{loss}), que es definida como $E_{loss} = \sqrt{1 - K_r^2 - K_t^2}$, donde K_r^2 es el coeficiente de reflexión y K_t^2 es el coeficiente de transmisión. Yun-Ta Wu [34] realizó un estudio experimental y numérico de la interacción de un rompeolas poroso y una onda solitaria, las pruebas experimentales se realizaron haciendo uso del PIV (Particle Image Velocimetry) para medir el campo de velocidad alrededor de la estructura, de acuerdo a los resultados obtenidos observaron que la profundidad de emplazamiento del rompeolas tiene efectos significativos en los coeficientes de transmisión y disipación de energía. Él concluyó que cuando la longitud de la profundidad incrementa, el coeficiente de transmisión decrece, mientras que el coeficiente de disipación de energía aumenta. Trabajos como el de Peña *et al.* [35] se enfocaron en estudiar la disipación de energía de distintos diseños de rompeolas, en donde miden la onda transmitida, los esfuerzos en las líneas de amarre y en los módulos conectores. Con base en los resultados obtenidos, demostraron que la longitud del rompeolas es un parámetro de gran importancia en la eficiencia de la estructura.

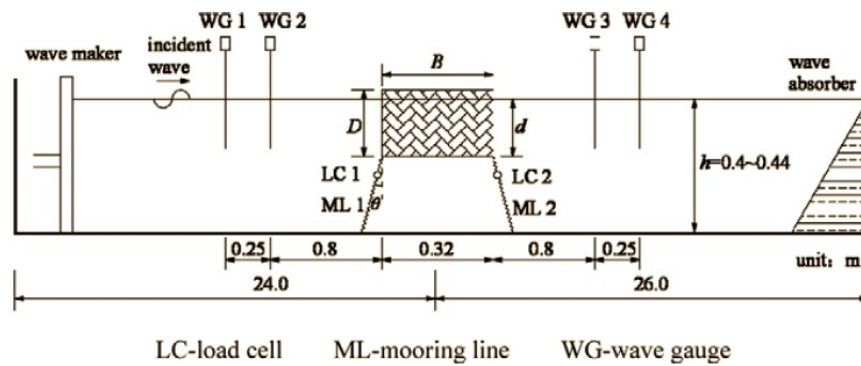


FIGURA 2.4: Modelo físico propuesto por Wang y Sun [7].

Después de revisar la literatura especializada, se identificó que los problemas fundamentales analizados teóricamente en la interacción de las ondas de agua y rompeolas flotantes son el fenómeno de radiación y difracción, en donde se obtienen los coeficientes de reflexión, transmisión y radiación del oleaje, así como las fuerzas y momentos inducidos en el estructura. Uno de los fenómenos fundamentales que deben estudiarse para la estabilidad y eficiencia de los rompeolas flotantes y que ha quedado fuera en muchos trabajos, es el estudio de la condición de cuasi-resonancia, ya que ésta puede generar la posibilidad de que las líneas de amarre o la estructura lleguen a fatigarse. La relevancia de las líneas de amarre puede variar desde mínima, en donde el amarre solo es necesario para mantener a la estructura fija, hasta ser altamente relevante cuando el amarre es

una parte integral del rompeolas flotante (Davidson y Ringwood [36]). Por otra parte, el movimiento más significativo para la atenuación de las ondas de agua es el movimiento de elevación (desplazamiento vertical), como ya se había mencionado anteriormente. Con base en este argumento, en el presente trabajo solo se analiza el movimiento vertical de la estructura.

El presente trabajo estudia el comportamiento del movimiento vertical de un rompeolas flotante que se fija al fondo del mar mediante líneas verticales de amarre. A partir de la segunda Ley de Newton, se obtiene una ecuación de gobierno adimensional no lineal que permite modelar las principales características dinámicas del fenómeno, la ecuación de gobierno se resuelve mediante una técnica numérica estándar. Se identifican los efectos de los parámetros adimensionales en el desplazamiento de la estructura. Además de una aproximación teórica de primer orden para un parámetro pequeño; y utilizando el método de escalas múltiples, se obtiene una solución analítica simple para modelar un oscilador débilmente no lineal. Usando una expansión de dos escalas, se revisan tres casos particulares: movimiento libre no amortiguado, movimiento amortiguado libre y movimiento lineal forzado. El análisis matemático para la hidrodinámica del oleaje se basa en la teoría lineal de ondas largas, en donde la solución obtenida a partir de la ecuación adimensional de Laplace, se expresa en términos de las funciones de Mathieu y funciones modificadas de Mathieu. Las predicciones muestran que la influencia de la geometría y los parámetros físicos involucrados ejercen una influencia significativa en la generación de la condición de cuasi-resonancia o en las disminuciones del desplazamiento de la estructura.

Capítulo 3

Marco teórico

3.1. Planteamiento de problema

3.1.1. Modelo físico

Se considera una estructura flotante de sección transversal elíptica con masa m , anclada al fondo del mar mediante una configuración convencional de amarres verticales.

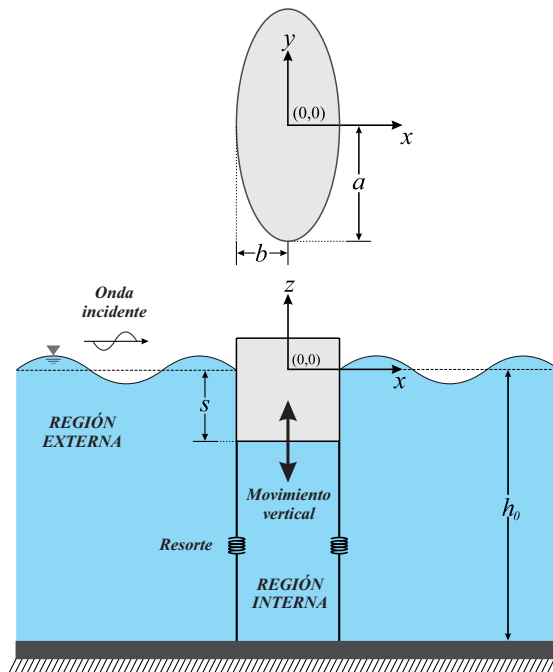


FIGURA 3.1: Modelo físico de la interacción entre el oleaje y una estructura de distribución espacial elíptica.

La distancia S representa la longitud que hay entre el nivel medio del mar y la cara inferior de la estructura. Se asume que el fondo h_0 es constante e impermeable en todo

el dominio, ver Fig. 3.1. El sistema de coordenadas se define de la siguiente manera, el plano $x - y$ coincide con el nivel medio del mar, mientras que el eje z es normal al plano horizontal y pasa por el centro de la estructura. Los ejes semi mayor y semi menor de la elipse se denotan por a y b , respectivamente, mientras que el foco de la elipse es descrito por el parámetro c . Se considera un oleaje monocromático que se propaga de izquierda a la derecha, el cual tiene una amplitud incidente A_I y una frecuencia de oscilación angular ω .

La ecuación de movimiento de la estructura se deriva de la segunda Ley de Newton y esta dada por la siguiente ecuación, McCormick [37]:

$$(m + a_m) \frac{d^2 \eta_e}{dt^2} + R \frac{d\eta_e}{dt} + \rho g A_w \eta_e + N k_s \eta_e + K \frac{d\eta_e}{dt} \left| \frac{d\eta_e}{dt} \right| = F \cos(\omega t), \quad (3.1)$$

y debe satisfacer las siguientes condiciones iniciales:

$$\eta_e(t = 0) = A_I \quad \text{y} \quad \frac{d\eta_e(t = 0)}{dt} = 0. \quad (3.2)$$

De la Ec. (3.1) solamente se analiza el movimiento vertical de la estructura como consecuencia de su interacción con el oleaje, su justificación se presenta en la sección 3.1.2. Se selecciona a la amplitud del oleaje, A_I , como la condición inicial para el desplazamiento de la estructura, porque es una longitud vertical característica del oleaje, y se espera que el desplazamiento de la estructura sea $\eta_e \sim O(A_I)$. Para la condición inicial $\eta_e(t = 0)$, algunas otras escalas características podrían elegirse. Esta condición no afecta los resultados de la solución de la Ec. (3.1) para tiempos largos. La influencia del valor específico en la condición inicial es solamente para tiempos cortos, ésta condición no se trata en este trabajo. En las Ecs. (3.1) y (3.2), t es el tiempo, ρ es la densidad del agua, g es la aceleración de la gravedad, m es la masa de la estructura y a_m es la masa agregada, que se define como el volumen de agua desplazado debido al movimiento vertical de la estructura. El área del cuerpo en reposo es definida como $A_w = \pi ab$. N es el número de líneas de amarre, k_s es la constante de rigidez de amarre efectiva de cada línea, K es un coeficiente de fricción, la fuerza inducida por el oleaje tiene una frecuencia $\omega = 2\pi/T$ y esta descrita por F . El período del oleaje está dado por T . En la Ec. (3.1), el primer término del lado izquierdo de la igualdad representa las fuerzas inerciales del cuerpo y del agua, el segundo término describe la fuerza de amortiguamiento de radiación, el tercer término es la fuerza de restauración hidrostática, el cuarto término representa la fuerza de restauración de los amarres, finalmente, que el quinto término describe la fuerza de amortiguamiento debida a la viscosidad. Del segundo al cuarto término del lado izquierdo de la igualdad, representan los efectos de oposición al movimiento de la

estructura, mientras que el término $F \cos(\omega t)$ es la fuerza de impulso inducida por el oleaje en la cara inferior de la estructura. La fuerza F que aparece en la Ec. (3.1) se calcula a partir de la teoría lineal de ondas largas, la cual se basa en el límite de $A_I/h_0 \ll 1$. Su análisis se presenta en el capítulo 5 de esta tesis.

3.1.2. Hipótesis

La teoría que sustenta este trabajo se seleccionó con base en el parámetro de Ursell [38], $U_r = \tilde{\varepsilon}/\tilde{\mu}^2$, este parámetro surge de la combinación de las relaciones $\tilde{\varepsilon} = A_I/h_0$ y $\tilde{\mu} = h_0/\lambda$, en donde λ es la longitud de la onda. Debido a que el rompeolas se encuentra emplazado en condiciones de flujo somero y con la finalidad de obtener una solución analítica de la propagación del oleaje, se usa la teoría lineal de ondas largas, definida por $U_r \ll 1$. Se usa esta teoría como preludeo para la comprensión del comportamiento hidrodinámico del sistema rompeolas.

En este trabajo se estudia la interacción entre el oleaje y una estructura parcialmente sumergida de sección transversal elíptica, la cual está fija al fondo del mar mediante líneas de amarre verticales. Debido a que los efectos más significativos en los coeficientes de transmisión y reflexión del oleaje inducidos por la estructura se originan como consecuencia del movimiento vertical, Adey y Martin [11], solamente se considera la oscilación vertical del rompeolas. Lee y Cho [39], reportaron que para ángulos incidentes de 0 a 15 grados la diferencia en el coeficiente de transmisión es mínima. Tomando en cuenta la conclusión anterior, en este estudio no se considera la oblicuidad del oleaje.

El trabajo que se desarrolla en esta tesis se basa en las hipótesis siguientes:

- Flujo potencial y bidimensional, debido a que no se consideran los efectos disipativos provocados por los esfuerzos viscosos.
- Se asume que la aceleración de la gravedad es mucho mayor que las aceleraciones verticales de las partículas del agua, en consecuencia se puede considerar que el flujo del agua en la estructura vertical, es prácticamente horizontal, Mei *et al.* [40].
- Se considera fondo constante e impermeable.
- La estructura solo presenta movimientos a lo largo del eje z , del mismo orden de magnitud que las elevaciones de la superficie libre.
- Solo se toman en cuenta los efectos de radiación vertical como resultado de la oscilación de la estructura.
- Las líneas de amarre son verticales.

3.1.3. Modelo matemático adimensional

Con la finalidad de reducir el número de combinaciones de las variables físicas, la Ec. (3.1) se expresa en términos de variables adimensionales. Para llevar a cabo lo anterior, se proponen las escalas características pertinentes. A partir de la linealización de la Ec. (3.1), en donde se desprecian los términos que involucran los efectos de la viscosidad, los no lineales y las fuerzas externas, se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{d^2\eta_e}{dt^2} + \left(\frac{\rho g A_w + N k_s}{m + a_m} \right) \eta_e = 0, \quad (3.3)$$

la cual describe el movimiento de un oscilador lineal no amortiguado, y se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{d^2\eta_e}{dt^2} + \omega_N^2 \eta_e = 0, \quad (3.4)$$

donde la frecuencia natural, ω_N , se define como

$$\omega_N = \sqrt{\frac{\rho g A_w + N k_s}{m + a_m}}. \quad (3.5)$$

Aquí, se asume que $\eta_e \sim A_I$. Considerando lo anterior, se proponen las siguientes variables adimensionales:

$$\tilde{\eta}_e = \frac{\eta_e(t)}{A_I} \quad \text{y} \quad \tau = \omega_N t. \quad (3.6)$$

Sustituyendo las variables adimensionales (3.6) en la Ec. (3.1), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2\tilde{\eta}_e}{d\tau^2} + \varepsilon\beta \frac{d\tilde{\eta}_e}{d\tau} + \tilde{\eta}_e + \varepsilon \frac{d\tilde{\eta}_e}{d\tau} \left| \frac{d\tilde{\eta}_e}{d\tau} \right| = \varepsilon f \cos \left[\left(\frac{\omega}{\omega_N} \right) \tau \right]. \quad (3.7)$$

La versión adimensional de las condiciones iniciales para la solución de la ecuación previa, se expresan como

$$\tilde{\eta}_e = 1 \quad \text{y} \quad \frac{d\tilde{\eta}_e}{d\tau} = 0. \quad (3.8)$$

En la ecuación anterior, los parámetros adimensionales se definen por

$$\varepsilon = \frac{KA_I}{m + a_w}, \quad \beta = \frac{R/\omega_N}{KA_I} \quad \text{y} \quad f = \frac{F}{A_I^2 \omega_N^2 K}. \quad (3.9)$$

Como se puede observar, el problema original es función de nueve parámetros físicos $(m, a_m, R, \rho, g, A_w, N, k_s, K)$; ahora, el análisis se reduce a solamente tres parámetros adimensionales (ε, β, f) . El significado físico y los efectos en la respuesta dinámica de la estructura de estos parámetros se presentan en la sección de resultados, de esta tesis.

3.1.4. Expansión de dos escalas para el límite de $\varepsilon \ll 1$

Dependiendo de si el flujo es laminar o turbulento, en la literatura especializada, el término viscoso, aquí representado por $K \frac{d\eta_e}{dt} \left| \frac{d\eta_e}{dt} \right|$, se comporta de forma lineal o no lineal, respectivamente, McCormick [37]; Babarit [41]. Como se mencionó anteriormente, la fuerza F que aparece en la Ec. (3.1) se calcula a partir de la teoría lineal de ondas largas, en donde se asume que el flujo es irrotacional, por lo tanto, los efectos disipativos pueden ignorarse. Sin embargo, consideramos que los efectos viscosos son importantes para una simulación correcta de las estructuras flotantes, por lo que, deben conservarse.

Para la solución analítica de la condición de casi resonancia de la estructura inducida por una fuerza de excitación débil, se considera que el término viscoso puede expresarse de la siguiente manera:

$$K \frac{d\eta_e}{dt} \left| \frac{d\eta_e}{dt} \right| \approx K \left(\frac{d\eta_e}{dt} \right)^2. \quad (3.10)$$

De la ecuación anterior, se ha eliminado el módulo de la velocidad, la justificación de esto se presenta a continuación.

A partir de la Ec. (3.1), se identifica que

$$(m + a_m) \frac{d^2 \eta_e}{dt^2} \sim (m + a_m) \omega_N^2 A_I, \quad (3.11)$$

y del término viscoso se identifica lo siguiente

$$K \frac{d\eta_e}{dt} \left| \frac{d\eta_e}{dt} \right| \sim KA_I^2 \omega_N^2. \quad (3.12)$$

CUADRO 3.1: Propiedades físicas de un rompeolas flotante.

Masa (m)	809-2430 kg
Masa agregada (a_m)	78.7-500 kg
Amplitud de la onda (A_I)	0.5 m
Coefficiente de fricción (K)	405 kg/m

Tomando en cuenta las Ecs. (3.11) y (3.12) y considerando los valores típicos de rompeolas flotantes como los presentados en el cuadro 3.1 McCormick [37], se obtiene que

$$\frac{K \frac{d\eta_e}{dt} \left| \frac{d\eta_e}{dt} \right|}{(m + a_m) \frac{d^2\eta_e}{dt^2}} \sim \frac{K A_I}{m + a_m} \ll 1. \quad (3.13)$$

De las relaciones (3.13), se considera que el módulo que aparece en los términos viscosos no tiene ningún efecto significativo en la solución de la Ec. (3.1), por lo tanto, la Ec. (3.1) puede ser expresada como

$$(m + a_m) \frac{d^2\eta_e}{dt^2} + R \frac{d\eta_e}{dt} + \rho g A_w \eta_e + N k_s \eta_e + K \left(\frac{d\eta_e}{dt} \right)^2 = F \cos(\omega t). \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) expresada en términos de las variables adimensionales (3.8), es como sigue

$$\frac{d^2\tilde{\eta}_e}{d\tau^2} + \varepsilon\beta \frac{d\tilde{\eta}_e}{d\tau} + \tilde{\eta}_e + \varepsilon \left(\frac{d\tilde{\eta}_e}{d\tau} \right)^2 = \varepsilon f \cos \left[\left(\frac{\omega}{\omega_N} \right) \tau \right]. \quad (3.15)$$

Las condiciones iniciales para la solución de la ecuación previa están dadas por

$$\tilde{\eta}_e = 1 \quad \text{y} \quad \frac{d\tilde{\eta}_e}{d\tau} = 0. \quad (3.16)$$

En este trabajo se considera que para $\omega/\omega_N \approx 1$, el estado de movimiento de la estructura es cercano a la resonancia. Se espera que para una fuerza de excitación débil provocada por el oleaje, el desplazamiento de la estructura se vuelva significativo. Para un oscilador débilmente no lineal, la relación de las frecuencias ω/ω_N se desvía un poco de la unidad, lo que nos permite establecer $\omega/\omega_N = 1 + \varepsilon\Omega$, con $\Omega \sim O(1)$, [42], donde el parámetro pequeño ε es definido más adelante. Sustituyendo las relaciones previas en la Ec. (3.15), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\eta}_e}{d\tau^2} + \varepsilon \beta \frac{d\tilde{\eta}_e}{d\tau} + \tilde{\eta}_e + \varepsilon \left(\frac{d\tilde{\eta}_e}{d\tau} \right)^2 &= \varepsilon f \cos [(1 + \varepsilon \Omega) \tau] \\ &= \varepsilon f \cos (\tau + \Omega \tilde{\tau}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

En la Ec. (3.17), las escalas de tiempo lento y rápido se denotan por $\tilde{\tau} = \varepsilon \tau$ y τ , respectivamente. La solución de la Ec (3.17) se obtiene mediante el método numérico Runge-Kutta de cuarto orden; sin embargo, con la idea de obtener una comprensión profunda del problema físico, se desarrolla un análisis de perturbación basado en el método de escalas múltiples.

Siguiendo la metodología propuesta por Kevorkian y Cole [42], para la solución de la Ec. (3.7), se propone la siguiente expansión de dos escalas de un parámetro pequeño $\varepsilon \ll 1$:

$$\tilde{\eta}_e = G_0(\tau, \tilde{\tau}) + \varepsilon G_1(\tau, \tilde{\tau}) + \dots \quad (3.18)$$

Sustituyendo la Ec. (3.18) en la Ec. (3.7) se obtienen las siguientes ecuaciones para G_0 y F_1 , para $O(1)$

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial \tau^2} + G_0 = 0 \quad (3.19)$$

$$G_0(0, 0) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G_0(0, 0)}{\partial \tau} = 0. \quad (3.20)$$

Y para $O(\varepsilon)$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial \tau^2} + G_1 = - \left(\frac{\partial G_0}{\partial \tau} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial \tau \partial \tilde{\tau}} \right) - \beta \frac{\partial G_0}{\partial \tau} + f \cos (\tau + \Omega \tilde{\tau}) \quad (3.21)$$

con

$$G_1(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G_1(0, 0)}{\partial \tau} = - \frac{\partial G_0(0, 0)}{\partial \tilde{\tau}}. \quad (3.22)$$

La solución puede ser representada en términos de pequeñas variaciones de la amplitud $\tilde{A}(\tilde{\tau})$ y de la fase $\nu(\tilde{\tau})$ relativos a la fuerza de impulso.

$$G_0(\tau, \tilde{\tau}) = \tilde{A}(\tilde{\tau}) \cos [\tau + \Omega \tilde{\tau} - \nu(\tilde{\tau})]. \quad (3.23)$$

Las ecuaciones para pequeñas variaciones de la amplitud y de la fase, habitualmente son obtenidas a partir de la condición en la cual los términos seculares no aparecen en la solución de la Ec. (3.1). Esos términos se vuelven arbitrariamente grandes a medida de que el tiempo rápido, $\tilde{\tau}$, aumenta. En consecuencia la expansión no es uniforme para escalas de τ largos. Remplazando la Ec. (3.23) en la Ec. (3.21), se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_1}{\partial \tau^2} + G_1 &= \tilde{A}^2 \sin^2 [\tau + \Omega \tilde{\tau} - v(\tilde{\tau})] \\ &+ f \cos(\tau + \Omega \tilde{\tau}) + 2 \left[\frac{d\tilde{A}}{d\tilde{\tau}} \sin[\tau + \Omega \tilde{\tau} - v(\tilde{\tau})] \right] \\ &+ 2 \left(\Omega - \frac{dv(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}} \right) \tilde{A}(\tilde{\tau}) \cos(\tau + \Omega \tilde{\tau} - v(\tilde{\tau})) \\ &+ \beta \tilde{A} \sin[\tau + \Omega \tilde{\tau} - v(\tilde{\tau})], \end{aligned} \quad (3.24)$$

la cual es función de una escala de tiempo corto $\tilde{\tau}$ y una escala de tiempo largo τ . Considerando la identidad trigonométrica $\cos(\tau + \Omega \tilde{\tau}) = \cos(\tau + \Omega \tilde{\tau} - v) \cos v - \sin(\tau + \Omega \tilde{\tau} - v) \sin v$, el sistema de ecuaciones analizado es descrito por

$$\frac{d\tilde{A}}{d\tilde{\tau}} + \frac{\beta \tilde{A}}{2} = \frac{1}{2} f \sin v \quad (3.25)$$

y

$$\tilde{A} \frac{dv}{d\tilde{\tau}} - \Omega \tilde{A} = \frac{1}{2} f \cos v. \quad (3.26)$$

En la siguiente sección se presentan tres casos particulares para mostrar como los resultados previos están contenidos en este formalismo.

3.1.5. Movimiento libre no amortiguado

Para este caso, la fuerza de excitación es $f = 0$ y el coeficiente de amortiguamiento es $\beta = 0$; por lo tanto, la ecuación diferencial (3.25) es reducida a

$$\frac{d\tilde{A}}{d\tilde{\tau}} = 0 \quad \text{con} \quad \tilde{A}(0) = 1 \quad (3.27)$$

y

$$\frac{dv}{d\tilde{\tau}} - \omega = 0 \quad \text{con} \quad v(0) = 0. \quad (3.28)$$

A partir de las Ecs. (3.27) y (3.28), se obtiene que la amplitud \tilde{A} es una constante y la fase v es dada por

$$v = \Omega \tilde{\tau}. \quad (3.29)$$

Sustituyendo los valores previos en la expresión (3.18), es obtenida la siguiente fórmula para este caso en particular

$$\tilde{\eta}_e = \cos \tau + \varepsilon (1 - \cos \tau) \sin^2 \tilde{\tau}. \quad (3.30)$$

Como se puede apreciar en la Ec. (3.30), en donde los términos disipativos no son considerados, por ejemplo $K = 0$, el parámetro pequeño $\varepsilon = 0$, para esta condición los desplazamientos de la estructura son constantes, el movimiento es armónico e igual a la amplitud de la onda incidente de mar.

3.1.6. Movimiento libre amortiguado, $f = 0$

Para este caso, las Ecs. (3.25) y (3.26) son reducidas a las siguiente ecuaciones:

$$\frac{d\tilde{A}}{d\tilde{\tau}} + \frac{\beta\tilde{A}}{2} = 0 \quad (3.31)$$

y

$$\frac{dv}{d\tilde{\tau}} - \Omega = 0. \quad (3.32)$$

La solución de la Ec. (3.31) es dada por

$$\tilde{A}(\tilde{\tau}) = e^{-(\beta/2)\tilde{\tau}} \quad (3.33)$$

y

$$v = \Omega \tau. \quad (3.34)$$

Por lo tanto, para este caso, el orden principal para $\tilde{\eta}_e$ es descrito como

$$\tilde{\eta}_e = e^{-(\beta/2)\tilde{\tau}} \cos \tau + \varepsilon \left[(1 - \cos \tau) \sin^2 \tilde{\tau} + \frac{1}{2} - \beta e^{\beta\tilde{\tau}} \sin \tau \right] e^{-\beta\tilde{\tau}}. \quad (3.35)$$

Como puede verse en la Ec. (3.35), para los valores de $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$ o $\beta = R / (KA_I \omega_N) = 0$, el caso modelado por la Ec. (3.30) es recuperado. La interpretación física de $\beta = 0$ implica que el coeficiente de radiación, R , no tiene efectos en el movimiento del rompeolas; y por lo tanto, el desplazamiento y la frecuencia de oscilación de la estructura es muy similar al movimiento del oleaje.

3.1.7. Movimiento lineal forzado

Para este caso, se considera que la fuerza de excitación es $f \sim O(1)$; por lo tanto, el sistema de ecuaciones es dado por las Ecs. (3.25) y (3.26) las cuales son simplificadas de la siguiente manera:

$$\frac{d\tilde{A}}{d\tilde{\tau}} + \frac{\beta\tilde{A}}{2} = \frac{f}{2} \sin v \quad (3.36)$$

y

$$\tilde{A} \frac{dv}{d\tilde{\tau}} - \omega\tilde{A} = \frac{f}{2} \cos v. \quad (3.37)$$

Para valores de $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$ y $\beta > 0$, el estado permanente es alcanzado; entonces, de las Ecs. (3.36) y (3.37), se obtiene que la amplitud \tilde{A} y la fase v pueden ser calculadas con las siguientes fórmulas:

$$\tilde{A}(\infty) = \frac{f/\beta}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{\Omega}{\beta}\right)^2}} \quad \text{y} \quad v(\infty) = \tan^{-1} \left(-\frac{\beta}{2\Omega} \right). \quad (3.38)$$

La Ec. (3.38) muestra que para $\Omega / \beta \ll 1$ la amplitud $\tilde{A} \sim O(f/\beta)$; lo cual físicamente implica que la amplitud de oscilación es una función de la competencia entre la fuerza de excitación, f , y el amortiguamiento representado por el parámetro β . Por otro lado, si el parámetro $\beta \rightarrow 0$ con valores de $\Omega \sim O(1)$ la amplitud $\tilde{A} \sim O(f/\Omega)$.

Capítulo 4

Análisis de resultados de la dinámica del rompeolas

4.1. Resultados

En la siguiente sección se presentan los resultados analíticos y numéricos para el desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$, identificando los efectos de los parámetros ε , β , f y la relación de frecuencias ω/ω_N en el movimiento vertical de la estructura.

4.1.1. Comparación con una solución analítica

Para validar los resultados numéricos de la Ec. (3.7), se obtiene una solución analítica para el límite $\beta \ll 1$, en este límite los términos que involucran a la viscosidad son ignorados; por lo tanto la Ec. (3.7) es reescrita de la siguiente manera:

$$\frac{d^2\tilde{\eta}_e}{d\tau^2} + \tilde{\eta}_e = \varepsilon f \cos \left[\frac{\omega}{\omega_N} \tau \right], \quad (4.1)$$

su solución es obtenida con las condiciones iniciales (3.8).

Obviamente en situaciones físicas, es imposible tener frecuencias de $\omega = \omega_N$; en la opinión de diversos autores es más realista la condición de casi resonancia dada por la expresión $\omega \approx \omega_N$. Para esta condición, la solución analítica de la Ec. (4.1) es

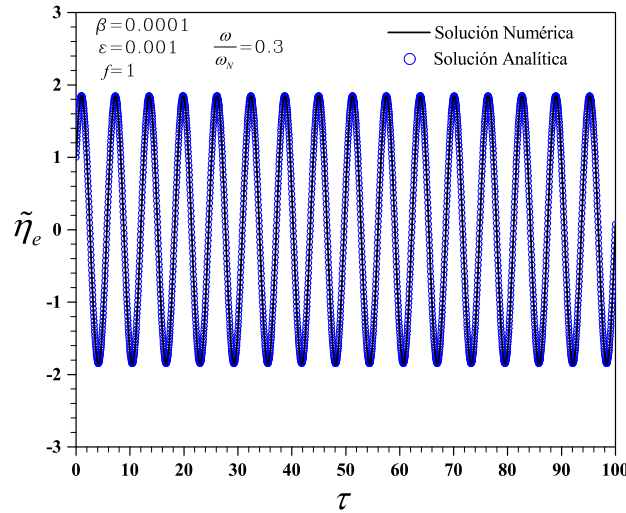


FIGURA 4.1: Comparación de la solución analítica para el desplazamiento adimensional de la estructura contra la solución numérica, para valores constantes de $\beta = 0.0001$, $\varepsilon = 0.001$, $f = 1$ and $\omega/\omega_N = 0.3$.

$$\tilde{\eta}_e = \frac{\left[\varepsilon f + \left(\frac{\omega}{\omega_N} \right)^2 - 1 \right] \cos \tau - \varepsilon f \cos \left(\frac{\omega}{\omega_N} \tau \right)}{\left(\frac{\omega}{\omega_N} \right)^2 - 1}. \quad (4.2)$$

En la ecuación previa se puede apreciar claramente que para valores de $\omega/\omega_N \rightarrow 1$ ocurre la condición de casi resonancia; y por lo tanto, el desplazamiento $\tilde{\eta}_e$ incrementa significativamente. La comparación de la solución numérica de la Ec. (3.7) con la solución analítica (4.2) es mostrada en la Fig. 4.1. Estos resultados son obtenidos considerando valores fijos de los parámetros $\beta = 0.0001$, $\varepsilon = 0.001$, $\omega/\omega_N = 0.3$ and $f = 1$. Como se puede observar, ambas soluciones se ajustan adecuadamente.

En la Fig. 4.2 se muestra la curva de la respuesta de la frecuencia, la cual se determinó a partir de la Ec. (3.38), para diferentes valores del parámetro β ($= 0.20, 0.025, 0.033, 0.05, 0.1$) y con valores fijos de $f = 1$. Se puede apreciar que para valores de $\omega/\omega_N / \beta = 0$, ocurre el máximo desplazamiento de la estructura; y por lo tanto, la relación de frecuencias es la unidad, $\omega/\omega_N = 1$, en este límite la condición de resonancia es alcanzada. En la misma figura se puede ver que hay una fuerte competencia entre la fuerza de excitación, f , y el coeficiente de radiación representado por el parámetro β , si la fuerza ejercida por el oleaje incidente es muy grande comparada con el coeficiente de amortiguamiento, el desplazamiento de la estructura incrementa de manera significativa. Por otro lado, si la fuerza de excitación es débil, dominan los efectos del coeficiente de amortiguamiento, esto implica que los desplazamientos de la estructura tiendan a decrecer.

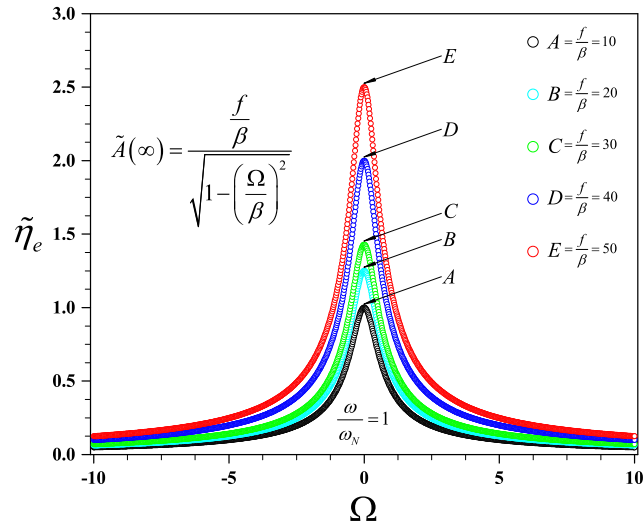


FIGURA 4.2: Curva de respuesta de la frecuencia para valores fijos de la fuerza adimensional $f = 1$ y diferentes valores del parámetro $\beta (= 0.02, 0.025, 0.033, 0.05, 0.1)$

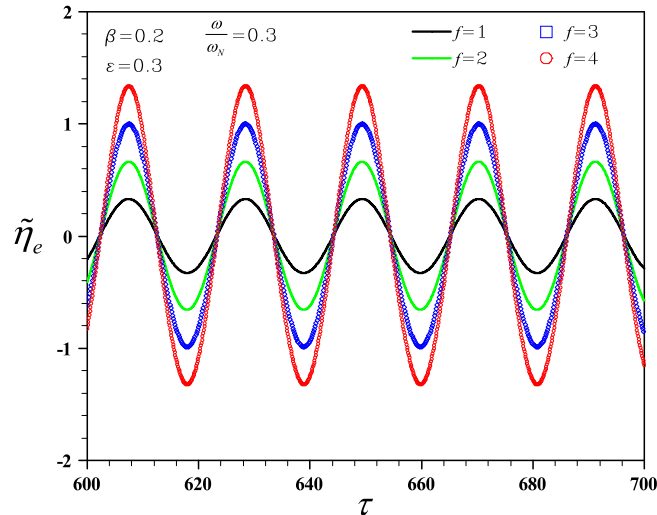


FIGURA 4.3: Desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$ para diferentes valores de la fuerza adimensional $f (= 1, 2, 3, 4)$ y valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $\varepsilon = 0.3$ y $\omega/\omega_N = 0.3$

4.1.2. Influencia de la fuerza de excitación en el desplazamiento

En la Fig. 4.3 se muestran los efectos de la fuerza de excitación en el desplazamiento de la estructura, $\tilde{\eta}_e$, para diferentes valores de $f (= 2, 3, 4, 5)$ y valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $\varepsilon = 0.3$ y $\omega/\omega_N = 0.3$. Para estos resultados se consideran valores en un intervalo de $600 \leq \tau \leq 700$, porque para este tiempo de oscilación $\tilde{\eta}_e$ es estable. De estos resultados, se puede notar que la fuerza de excitación $f = \frac{F}{A_i^2 \omega_N^2 K}$, tiene una gran influencia en el desplazamiento de $\tilde{\eta}_e$; al incrementar esta fuerza los desplazamientos también incrementan; sin embargo, la fuerza no tiene efectos significativos en la frecuencia de oscilación porque ésta permanece constante tal que $\tau \rightarrow \infty$. Desde un punto de vista físico, la fuerza adimensional define la competencia entre la fuerza ejercida por las

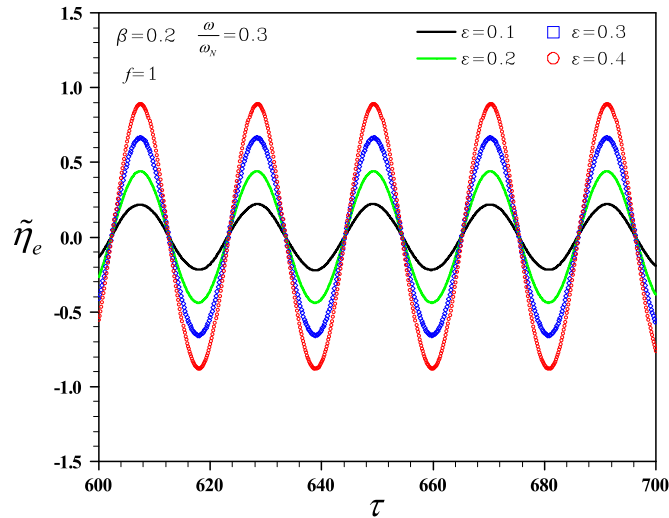


FIGURA 4.4: Desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$ para diferentes valores del parámetro ε ($= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$) y valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $f = 1$ y $\omega/\omega_N = 0.3$

olas, F , en la cara inferior del rompeolas y las características físicas de la estructura, que están incluidas en la frecuencia natural $\omega_N = \sqrt{\frac{\rho g A_w + N k_s}{(m + m_a)}}$.

4.1.3. Influencia de la amplitud de la onda en el desplazamiento

Los efectos del parámetro $\varepsilon = \frac{K A_I}{m + m_a}$, en el desplazamiento $\tilde{\eta}_e$ son mostrados en la Fig. 4.4. Estos resultados son obtenidos considerando diferentes valores del parámetro ε ($= 0.1, 0.3, 0.5, 0.6$). Observando los resultados se puede apreciar que al incrementar el parámetro ε el desplazamiento también aumenta. Estos efectos pueden ser explicados a partir de la definición del parámetro ε , es visible que, para valores fijos de los parámetros físicos K , m y m_a e incrementos de la amplitud incidente A_I , el parámetro ε incrementa en magnitud implicando que la presión ejercida en la cara inferior de la estructura vaya en aumento. De igual manera que en la influencia de la fuerza de excitación en la estructura, el parámetro ε no tiene efectos en la frecuencia de oscilación del rompeolas.

4.1.4. Efectos de la relación de frecuencias ω/ω_N

La Fig. 4.5 reporta la oscilación del desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$ como una función del tiempo adimensional τ para diferentes valores de la relación de frecuencias ω/ω_N ($= 0.2, 0.5, 0.7, 0.9$) y valores constantes de $\beta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$ y $f = 3$. Para valores de $\omega/\omega_N \approx 1$, el desplazamiento $\tilde{\eta}_e$ es cercano a la resonancia; este fenómeno se puede ver en las curvas presentadas en la Fig. 4.5. Los resultados sugieren que para parámetros físicos fijos de la estructura y una frecuencia de onda fija, $\omega_N \rightarrow \omega$, se pueden inducir

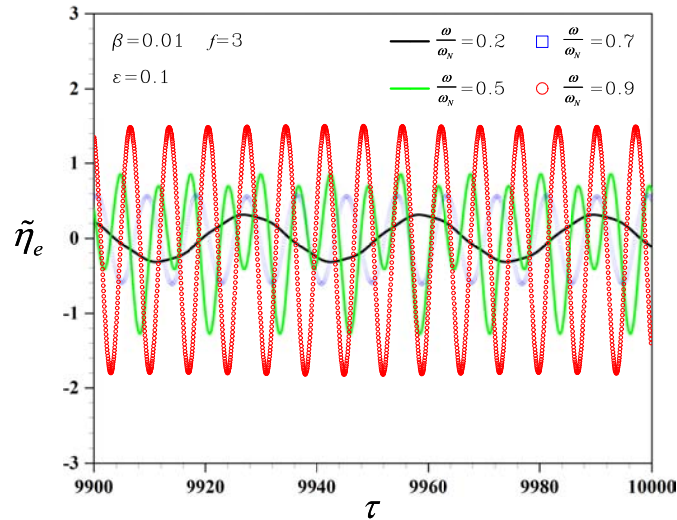


FIGURA 4.5: Desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$ para diferentes valores de la relación de frecuencias ω/ω_N ($= 0.2, 0.5, 0.7, 0.9$) y valores fijos de los parámetros $\beta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$ y $f = 3$

valores grandes de los desplazamientos de $\tilde{\eta}_e$ sin la necesidad de agregar energía para forzar el movimiento de la estructura.

4.1.5. Efectos del parámetro de radiación β

En la Fig. 4.6 se muestran los efectos del desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$ para diferentes valores del parámetro de radiación β ($= 0.0009, 0.005, 0.09, 5$) y valores fijos de los parámetros $\varepsilon = 0.1$, $f = 2$ y $\omega/\omega_N = 0.5$.

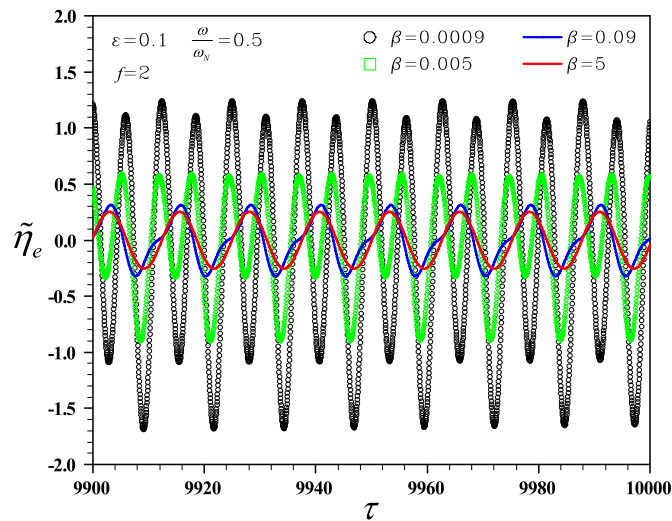


FIGURA 4.6: Desplazamiento adimensional $\tilde{\eta}_e$ para diferentes valores del parámetro β ($= 0.0009, 0.005, 0.09, 5$) y valores fijos de los parámetros $\varepsilon = 0.1$, $f = 2$ y $\omega/\omega_N = 0.5$

Desde un punto de vista físico, este parámetro representa la oposición al movimiento de la estructura ejercido por el oleaje. Cuando el parámetro β decrece, el desplazamiento $\tilde{\eta}_e$ incrementa.

De la Fig. 4.6 se observa que para $\beta \rightarrow 0$ el desplazamiento $\tilde{\eta}_e \rightarrow 1$, lo cual significa que el desplazamiento físico de la estructura es $\eta_e \sim O(A_I)$. Adicionalmente, también se puede ver que la frecuencia de oscilación decrece cuando β incrementa. Para fines ingenieriles, el parámetro β es muy importante, porque si se quiere que la estructura sea casi estática o que tienda a la condición de anti movimiento, esto se puede lograr aumentando la magnitud de la frecuencia natural, ω_N .

4.1.6. Diagramas fase

Para mostrar el comportamiento del movimiento de la estructura causado por la fuerza inducida por el oleaje, en términos de la trayectoria de un punto en el tiempo, se presentan los diagramas fase, que muestran la variación de $d\tilde{\eta}_e/d\tau$ como función de $\tilde{\eta}_e$.

Se presentan resultados para diferentes valores de la fuerza $f = 1, 2, 3, 4$ y valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $\varepsilon = 0.3$ y $\omega/\omega_N = 0.3$; ver Fig. 4.7.

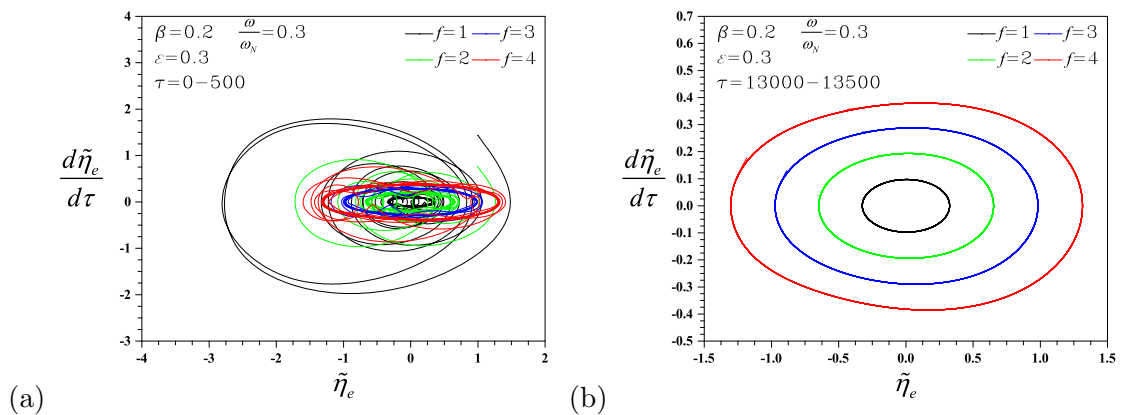


FIGURA 4.7: Diagramas fase para valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $\varepsilon = 0.3$ y $\omega/\omega_N = 0.3$ con diferentes valores de la fuerza adimensional $f (= 1, 2, 3, 4)$. (a) diagrama fase para tiempo corto $\tau (= 0 - 500)$ y (b) diagrama fase para tiempo largo $\tau (= 13000 - 13500)$.

La intersección de la trayectoria con valores de $d\tilde{\eta}_e/d\tau$ representan la máxima amplitud del desplazamiento $\tilde{\eta}_e$. Para tiempos cortos, el la Fig. 4.7, la estructura tiene desplazamientos más grandes que los obtenidos durante períodos largos; ver Fig. 4.7.

Adicionalmente, para tiempos largos, la trayectoria de un punto a través del tiempo es casi simétrica y cerrada, la cual, desde un punto de vista físico indica que el movimiento de la estructura es no amortiguado.

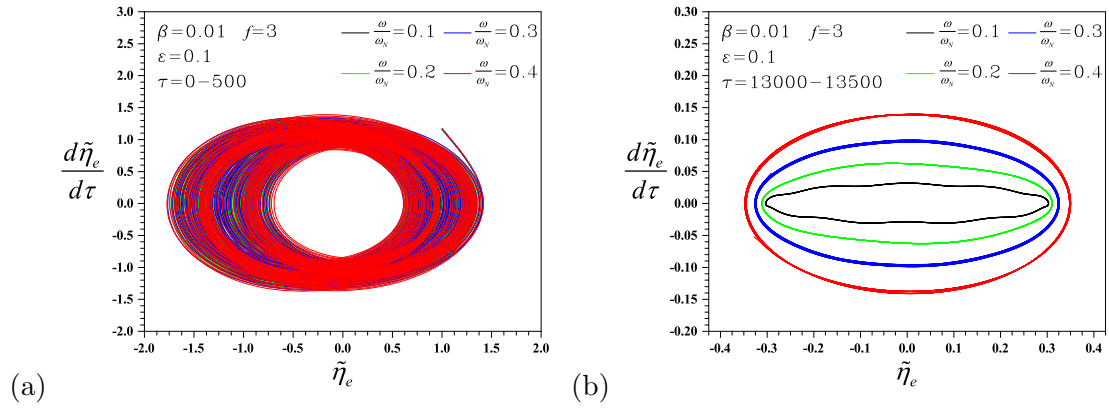


FIGURA 4.8: Diagramas fase para valores fijos de los parámetros $\beta = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$ y $f = 3$ con diferentes valores de la relación de frecuencias ω/ω_N ($= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$). (a) Diagrama fase para tiempo corto $\tau (= 0 - 500)$ y (b) Diagrama fase para tiempo largo $\tau (= 13000 - 13500)$.

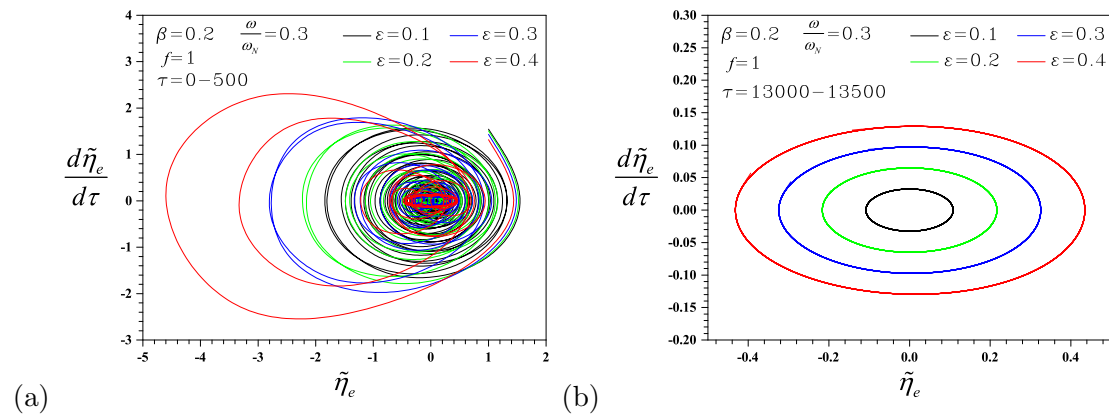


FIGURA 4.9: Diagramas fase para valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $f = 1$ y $\omega/\omega_N = 0.3$ con diferentes valores del parámetro ε ($= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$). (a) Diagrama fase para tiempo corto $\tau (= 0 - 500)$ y (b) Diagrama fase para tiempo largo $\tau (= 13000 - 13500)$.

Resultados similares a los de los casos anteriores son obtenidos al aumentar la relación de frecuencias ω/ω_N ($= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$) con valores fijos de los parámetros $\beta = 0.012$, $\varepsilon = 0.1$ y $f = 3$, ver Fig. 4.8. Por otro lado, en la Fig. 4.8 se muestra que para incrementos de la relación de frecuencias ω/ω_N las trayectorias cerradas son casi simétricas.

Se produce un comportamiento similar a los casos anteriores para los diagramas fase en términos de los parámetros ε y β , ver Figs. 4.9 y 4.10, donde se presentan resultados para valores fijos de los parámetros $\beta = 0.2$, $f = 1$ y $\omega/\omega_N = 0.3$ con diferentes valores del parámetro ε ($= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$) y para valores fijos de los parámetros $\varepsilon = 0.1$, $f = 2$ y $\omega/\omega_N = 0.5$ con diferentes valores del parámetro de radiación β ($= 0.0009, 0.005, 0.09, 5$), respectivamente.

Con base en los resultados obtenidos en los diagramas fase, se observa que para períodos largos de tiempo el movimiento de la estructura no se amortigua, pero si llega a una

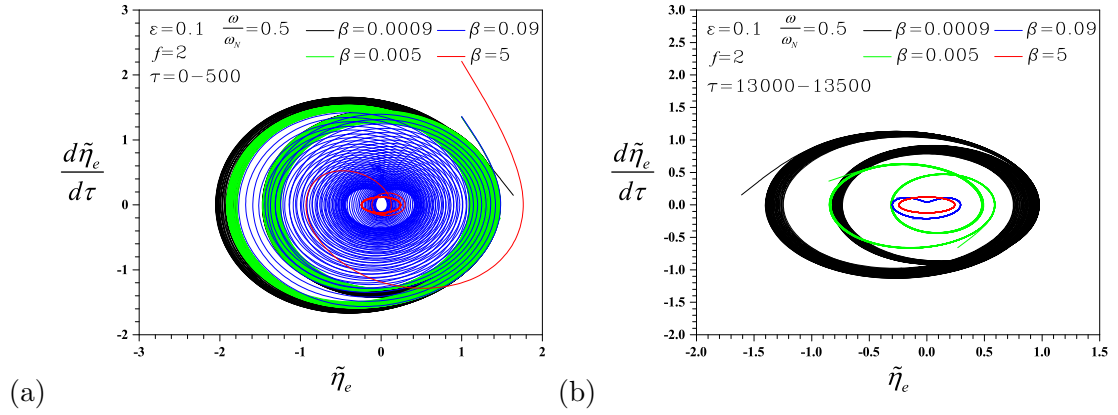


FIGURA 4.10: Diagramas fase para valores fijos de los parámetros $\varepsilon = 0.1$, $f = 2$ y $\omega/\omega_N = 0.5$ con diferentes valores del parámetro de radiación $\beta (= 0.0009, 0.005, 0.09, 5)$. (a) Diagrama fase para tiempo corto $\tau (= 0 - 500)$ y (b) Diagrama fase para tiempo largo $\tau (= 13000 - 13500)$.

amplitud máxima de oscilación.

Capítulo 5

Hidrodinámica del oleaje

5.1. Ecuaciones de gobierno

Para obtener la ecuación de gobierno que describe la hidrodinámica del oleaje en condiciones de flujo potencial e incompresible, se considera el principio de conservación de la masa, que está dado por la siguiente ecuación de continuidad, ver [A](#):

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial z} = 0, \quad (5.1)$$

donde $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ y $w(x, y, z, t)$ son las velocidades de la partícula del agua en las direcciones x , y y z , respectivamente. Al asumir un flujo potencial, el campo de velocidades se plantea en términos de una función escalar $\Phi(x, y, z, t)$, formando las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial x}, & v(x, y, z, t) &= \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial y} \quad \text{y} \\ w(x, y, z, t) &= \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sustituyendo las relaciones (5.2) en la Ec. (5.1), se obtiene la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares la cual describe la distribución espacial y temporal de un potencial de velocidades, y es expresada como

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z, t) = \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z, t)}{\partial z^2} = 0. \quad (5.3)$$

La Ec. (5.3) expresada en coordenadas rectangulares debe ser transformada a coordenadas elípticas cilíndricas debido a que el problema es planteado para una estructura que obedece a la geometría de un elipse, a manera de establecer un planteamiento matemático acorde a los parámetros geométricos de la estructura se hace la respectiva transformación, la cual es presentada en la siguiente sección.

5.2. Transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas elípticas

Tomando en cuenta las hipótesis descritas en la sección 3.1.2 y considerando que la sección transversal de la estructura obedece a una función elíptica, el sistema de coordenadas cartesiano se transforma a coordenadas elípticas (μ, ν, z) , las cuales se relacionan con el sistema original en la forma siguiente:

$$x = c \cosh \mu \cos \nu, \quad y = c \sinh \mu \sin \nu \quad \text{y} \quad z = z, \quad (5.4)$$

donde

$$0 \leq \mu < \infty \quad \text{y} \quad 0 \leq \nu < 2\pi. \quad (5.5)$$

El parámetro $c > 0$ está definido como $c = (a^2 - b^2)^{1/2} = a\bar{\epsilon}$, donde $\bar{\epsilon}$ es la excentricidad de la elipse, y esta dada por $\bar{\epsilon}^2 = 1 - (b/a)^2$. La principal característica de este sistema coordenado es que para todas las líneas constantes de μ y ν corresponde un valor arbitrario de z . En la Fig. 5.1 se puede observar que las líneas constantes de μ corresponden a elipses confocales, mientras que las líneas constantes de ν son cuartos de hipérbolas con el mismo foco. El límite de la estructura está definido por el parámetro geométrico $\mu_0 = \tanh^{-1}(b/a)$.

Las definiciones de x y y de la Ec. (5.4) se relacionan mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2(\mu)} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2(\mu)} = \cos^2(\nu) + \sin^2(\nu) = 1, \quad (5.6)$$

en la cual se observa que las curvas constantes de μ forman elipses. Reescribiendo la Ec. (5.6) en términos de funciones hiperbólicas, obtenemos la expresión siguiente:

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2(\nu)} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2(\nu)} = \cosh^2(\mu) - \sinh^2(\mu) = 1, \quad (5.7)$$

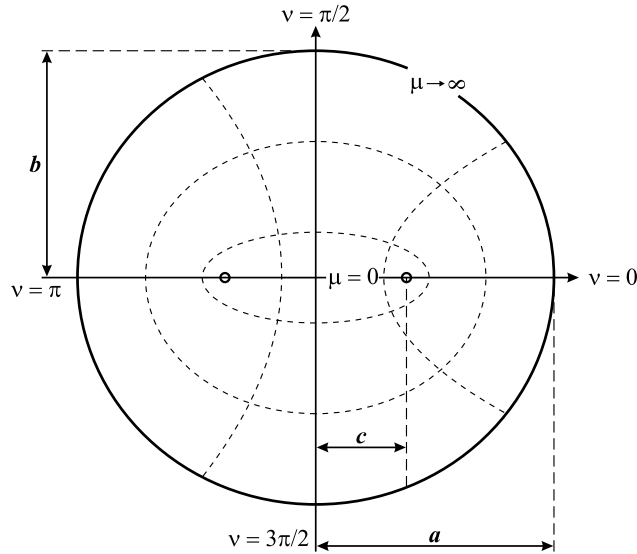


FIGURA 5.1: Esquema físico de los límites geométricos de una elipse.

donde se observa que las curvas constantes de ν forman hipérbolas. En un sistema de coordenadas ortogonales, las longitudes de los vectores de base se conocen como factores de escala. Los factores de escala para las coordenadas elípticas (μ, ν) son iguales a

$$h_\mu = h_\nu = c\sqrt{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)} = c\sqrt{\cosh^2(\mu) - \cos^2(\nu)}. \quad (5.8)$$

Utilizando las identidades de argumento doble para funciones hiperbólicas y funciones trigonométricas, los factores de escala se pueden reescribir de manera equivalente como

$$h_\mu = h_\nu = c\sqrt{\frac{1}{2}[\cosh(2\mu) - \cos(2\nu)]}, \quad (5.9)$$

en consecuencia se puede asumir que un elemento infinitesimal de área de la elipse equivale a

$$\begin{aligned} dA &= h_\mu h_\nu d\mu d\nu = c^2 [\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)] d\mu d\nu \\ &= c^2 [\cosh^2(\mu) - \cos^2(\nu)] d\mu d\nu \\ &= \frac{c^2}{2} [\cosh(2\mu) - \cos(2\nu)] d\mu d\nu, \end{aligned} \quad (5.10)$$

por lo que, el operador diferencial de Laplace se puede definir como

$$\begin{aligned}
\nabla^2\Phi &= \frac{1}{c^2 [\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)]} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2} \right) \\
&= \frac{1}{c^2 [\cosh^2(\mu) - \cos^2(\nu)]} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2} \right) \\
&= \frac{2}{c^2 [\cosh(2\mu) - \cos(2\nu)]} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2} \right). \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Haciendo uso del segundo término de la Ec. (5.11) y sustituyendo la ecuación paramétrica que define a z de la Ec. (5.4) en la Ec. (5.3), se obtiene la ecuación de Laplace en coordenadas elípticas cilíndricas, la cual gobierna el comportamiento del oleaje en todo el dominio, y se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2 [\cosh^2(\mu) - \cos^2(\nu)]} \left(\frac{\partial^2\Phi(\mu, \nu, z, t)}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\Phi(\mu, \nu, z, t)}{\partial\nu^2} \right) \\
+ \frac{\partial^2\Phi(\mu, \nu, z, t)}{\partial z^2} = 0. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

5.2.1. Formulación matemática para el campo de velocidades

Debido a que la capa límite generada por el fluido y la superficie impermeable de la estructura es muy pequeña en comparación con la profundidad característica, se considera que el flujo es no viscoso; y por lo tanto, es irrotacional. Con base en las restricciones anteriores, el movimiento del fluido puede ser descrito en términos de un potencial de velocidades $\Phi(\mu, \nu, z, t) = \Re[\phi(\mu, \nu, z) e^{-i\omega t}]$, donde el símbolo \Re representa la parte real, mientras que $i = \sqrt{-1}$.

La Ec. (5.12) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en el espacio, las condiciones de frontera necesarias para su solución están dadas por las siguientes ecuaciones:

La condición dinámica de la superficie libre

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta, \quad (5.13)$$

donde η es la oscilación vertical del oleaje. La condición de frontera cinemática del fondo del mar es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_0, \quad (5.14)$$

mientras que la condición cinemática de la superficie libre está dada por

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{en } z = \eta. \quad (5.15)$$

En la parte inferior de la estructura, la condición de frontera para la oscilación vertical es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = V(t) \quad \text{en } z = h_0 - S, \quad (5.16)$$

donde $V(t)$ es la velocidad del movimiento de la estructura y ϕ es la parte espacial que conforma al potencial de velocidades. Finalmente, el potencial de velocidades también satisface la condición de frontera cinemática en la superficie mojada de la estructura, esta condición se expresa como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0 \quad \text{en } \mu = \mu_0. \quad (5.17)$$

El volumen de control se divide en una región exterior (1), comprendida entre los límites $\mu > \mu_0$ y $-h_0 \leq z \leq 0$, y una región interior (2) delimitada por $0 \leq \mu \leq \mu_0$ y $-h_0 \leq z \leq -S$. Estas regiones se unen en la interfase $\mu = \mu_0$ mediante las siguientes condiciones de acoplamiento

$$\phi_1(\mu, \nu, z) = \phi_2(\mu, \nu, z) \quad (5.18)$$

y

$$h_0 \frac{\partial \phi_1(\mu, \nu, z)}{\partial \mu} = (h_0 - S) \frac{\partial \phi_2(\mu, \nu, z)}{\partial \mu}, \quad (5.19)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 , representan la distribución espacial externa e interna del potencial de velocidades; mientras que las Ecs. (5.18) y (5.19) representan la conservación de presión y la conservación de masa, respectivamente. Finalmente, el potencial de la región exterior debe satisfacer la siguiente condición de radiación al infinito:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} (c \cosh \mu)^{1/2} \left(\frac{1}{c \sinh(\mu)} \frac{\partial \phi_1(\mu, \nu, z)}{\partial \mu} - ik \phi_1(\mu, \nu, z) \right) = 0, \quad (5.20)$$

esta condición asegura que ϕ_1 representa una onda que viaja aguas afuera de la estructura, donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda.

5.2.2. Modelo adimensional del campo de velocidades

Es conveniente adimensionalizar la ecuación de gobierno y las condiciones de frontera para obtener una solución en términos de parámetros que permitan una mejor comprensión de los resultados y de la física del problema, a manera de identificar claramente la influencia de las particularidades geométricas e hidrodinámicas involucradas en el campo del oleaje, por lo que se proponen las siguientes longitudes características

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= \frac{z}{h_0}, & \tilde{\Phi} &= \frac{\Phi kh_0}{A_I C}, & \tilde{\eta}_e &= \frac{\eta}{A_I}, \\ \tilde{V} &= \frac{V kh_0^2}{A_I C}, & \tau &= t\omega, & y & \tilde{z}_2 &= \frac{z}{h_0 - S}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde C es la celeridad de la onda y es definida como $C = \sqrt{gh_0}$. Las variables adimensionales \tilde{z}_1 y \tilde{z}_2 , se utilizan para la región exterior y la región interior, respectivamente.

Sustituyendo las variables adimensionales previas en la Ec. (5.12), se obtiene la siguiente ecuación adimensional:

$$\frac{2\Gamma_1^2}{\cosh(2\mu) - \cos(2\nu)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial \nu^2} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}_1^2} = 0, \quad (5.22)$$

para la región (1), donde $\Gamma_1 = h_0/c$ es un parámetro de esbeltez, mientras que para la región (2), el campo de velocidades está descrito por

$$\frac{2}{\cosh(2\mu) - \cos(2\nu)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial \nu^2} \right) + \Gamma_2^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial \tilde{z}_2^2} = 0, \quad (5.23)$$

donde Γ_2 también es un parámetro de esbeltez, y está definido como $\Gamma_2 = c/(h_0 - S)$.

La versión adimensional de la superficie libre está dada por

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tau} + \tilde{\eta} = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{z}_1 = 0 \quad (5.24)$$

La condición de frontera cinemática adimensional del fondo del mar para la región (1) es

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}_1} = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{z}_1 = -1, \quad (5.25)$$

y para la región (2) es

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial \tilde{z}_2} = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{z}_2 = -\frac{1}{1-\alpha}, \quad (5.26)$$

mientras que la condición cinemática adimensional de la superficie libre se expresa como

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tau} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}_1} \quad \text{en} \quad \tilde{z}_1 = 0, \quad (5.27)$$

donde $\kappa = (kh_0)$. En la parte inferior de la estructura, la condición de frontera adimensional para la oscilación vertical es

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial \tilde{z}_2} = \tilde{V} \quad \text{en} \quad \tilde{z}_2 = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (5.28)$$

donde $\alpha = S/h_0$. Y la condición de frontera cinemática adimensional en la superficie mojada de la estructura es expresada como

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \mu} = 0 \quad \text{en} \quad \mu = \mu_0. \quad (5.29)$$

La condición de acoplamiento adimensional para la continuidad de presiones es

$$\tilde{\phi}_1(\mu, \nu, \tilde{z}) = \tilde{\phi}_2(\mu, \nu, \tilde{z}), \quad (5.30)$$

y para la conservación de masa es

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_1(\mu, \nu, \tilde{z})}{\partial \mu} = (1-\alpha) \frac{\partial \tilde{\phi}_2(\mu, \nu, \tilde{z})}{\partial \mu}. \quad (5.31)$$

Por último, la condición de radiación adimensional queda expresada de la siguiente manera

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_1(\mu, \nu, \tilde{z})}{\partial \mu} - i\tilde{k} \sinh(\mu) \tilde{\phi}_1(\mu, \nu, \tilde{z}) \right) = 0, \quad (5.32)$$

donde el parámetro $\tilde{k} = 2\pi c/\lambda$ relaciona la longitud de onda y la geometría del rompeolas.

5.3. Solución del campo de velocidades

Los potenciales de velocidad en la región exterior y en la región interior del dominio del fluido se expresan como una combinación lineal de la suma de varios modos de oscilación. La formulación teórica de éste estudio se enfoca únicamente en el problema de radiación vertical debido a la oscilación de la estructura en su eje z , donde se asume que el potencial de velocidades de la región (1) es la suma de un potencial incidente $\tilde{\phi}_i$ y un potencial radiado $\tilde{\phi}_r$; usando el principio de superposición de efectos, el potencial total se expresa en la forma siguiente:

$$\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_i + \tilde{\phi}_r, \quad (5.33)$$

mientras que en la región (2) el potencial de velocidad se define como [40],

$$\tilde{\phi}_2 = \tilde{\phi}_{\tilde{r}}. \quad (5.34)$$

La solución completa de la interacción entre el fluido y la estructura, se obtiene al calcular los potenciales de las Ecs. (5.33) y (5.34). En las secciones subsecuentes se presenta su formulación matemática.

5.3.1. Solución del campo de velocidades para la región externa (1)

Para obtener la solución completa de la ecuación que gobierna la dinámica del oleaje, que es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, se hace uso del método de separación de variables, por lo que se propone una solución de la forma

$$\tilde{\phi}_1(\mu, \nu, \tilde{z}) = \tilde{F}(\mu) \tilde{G}(\nu) \tilde{H}(\tilde{z}), \quad (5.35)$$

sustituyendo la Ec. (5.35) en la Ec. (5.22), se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\frac{d^2 \tilde{H}}{d\tilde{z}_1^2} - \kappa^2 \tilde{H} = 0, \quad (5.36)$$

$$\frac{d^2 \tilde{G}}{d\nu^2} + [\tilde{a} - 2q_1 \cos(2\nu)] \tilde{G} = 0 \quad (5.37)$$

y

$$\frac{d^2 \tilde{F}}{d\mu^2} - [\tilde{a} - 2q_1 \cosh(2\mu)] \tilde{F} = 0 \quad (5.38)$$

Las Ecs. (5.37) y (5.38) son conocidas como la ecuación de Mathieu y la ecuación modificada de Mathieu, respectivamente. Donde \tilde{a} es una constante de separación, $\kappa = kh_0$ y $q_1 = (ka\bar{\varepsilon}/2)^2$ es un parámetro pequeño, propio de las funciones de Mathieu. Las soluciones de la Ec. (5.37) son funciones periódicas de Mathieu de primer tipo, definidas como $ce_m(\nu, q)$ y $se_m(\nu, q)$, abreviación propuesta por [43] que significan $\cos(s\nu)$ y $\sin(s\nu)$, las cuales son funciones par e impar, respectivamente. Mientras que las funciones de primer tipo $Ce_m(\mu, q)$ y $Se_m(\mu, q)$, abreviaciones de $\cosh(s\mu)$ y $\sinh(s\mu)$, respectivamente, y son soluciones de la Ec. (5.38); la variable s representa cada término de la función dentro de la suma de las soluciones.

El potencial incidente $\tilde{\phi}_i$ está dado por la siguiente ecuación, [44]:

$$\tilde{\phi}_i(\mu, \nu, \tilde{z}) = -2i\tilde{H}(\tilde{z}) \left[\sum_{m=0}^{\infty} i^m Ce_m(\mu, q_1) ce_m(\nu, q_1) + \sum_{m=0}^{\infty} i^m Se_m(\mu, q_1) se_m(\nu, q_1) \right], \quad (5.39)$$

donde las funciones de Mathieu de primer tipo se definen de la siguiente forma

$$Ce_{2m}(\mu, q) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s}^{2m}(q) \cosh(2r\mu), \quad (\tilde{a}_{2m}), \quad (5.40)$$

$$Ce_{2m+1}(\mu, q) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s+1}^{2m+1}(q) \cosh[(2r+1)\mu], \quad (\tilde{a}_{2m+1}), \quad (5.41)$$

$$Se_{2m+1}(\mu, q) = \sum_{s=0}^{\infty} B_{2s+1}^{2m+1}(q) \sinh[(2r+1)\mu], \quad (\tilde{b}_{2m+1}), \quad (5.42)$$

$$Se_{2m+2}(\mu, q) = \sum_{s=0}^{\infty} B_{2s+2}^{2m+2}(q) \sinh[(2r+2)\mu], \quad (\tilde{b}_{2m+2}) \quad (5.43)$$

y

$$ce_{2m}(\nu, q) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s}^{2m}(q) \cos(2s\nu), \quad (\tilde{a}_{2m}), \quad (5.44)$$

$$ce_{2m+1}(\nu, q) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s+1}^{2m+1}(q) \cos[(2s+1)\nu], \quad (\tilde{a}_{2m+1}), \quad (5.45)$$

$$se_{2m+1}(\nu, q) = \sum_{s=0}^{\infty} B_{2s+1}^{2m+1}(q) \sin[(2s+1)\nu], \quad (\tilde{b}_{2m+1}), \quad (5.46)$$

$$se_{2m+2}(\nu, q) = \sum_{s=0}^{\infty} B_{2s+2}^{2m+2}(q) \sin[(2s+2)\nu], \quad (\tilde{b}_{2m+2}), \quad (5.47)$$

donde A y B son coeficientes variables que dependen de \tilde{a} y \tilde{b} , valores característicos propios de las funciones de Mathieu; los cuales a su vez son función del parámetro q . Los coeficientes y valores propios se calculan haciendo uso de la formulación correspondiente, para los casos particulares en donde $q < 0$, $q = 0$ o $q > 0$, ver [44]. La solución de $\tilde{H}(\tilde{z})$ se obtiene de la Ec. (5.36), con las condiciones de frontera (5.25) y (5.27), por lo que se obtiene

$$\tilde{H}(\tilde{z}) = \frac{\cosh[k(\tilde{z} + h_0)]}{\cosh(kh_0)}. \quad (5.48)$$

Con base en las hipótesis planteadas, en el límite para ondas largas $kh_0 \ll 1$, se puede asumir que $\tilde{H}(\tilde{z}) \approx 1$, así la Ec. (5.39) se simplifica a la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i(\mu, \nu, \tilde{z}) = -2i \left[\sum_{m=0}^{\infty} i^m Ce_m(\mu, q_1) ce_m(\nu, q_1) \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} i^m Se_m(\mu, q_1) se_m(\nu, q_1) \right]. \quad (5.49) \end{aligned}$$

En la región exterior, el potencial $\tilde{\phi}_r$ satisface las Ecs. (5.22), (5.25) y (5.27) y se expresa de la siguiente manera, [28],

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_r(\mu, \nu, \tilde{z}) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{Me_m(\mu, q_{1n})}{Me'_m(\mu_0, q_{1n})} ce_m(\nu, q_{1n}) \tilde{f}_n(\tilde{z}) \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{Ne_m(\mu, q_{1n})}{Ne'_m(\mu_0, q_{1n})} se_m(\nu, q_{1n}) \tilde{f}_n(\tilde{z}) \right], \quad (5.50) \end{aligned}$$

donde los coeficientes a_m y b_m son desconocidos, mientras que $q_{1_n} = (k_n a \bar{\varepsilon} / 2)^2$ con k_n como valor característico. Por otro lado, $Me_m(\mu, q_{1_n})$ y $Ne_m(\mu, q_{1_n})$ son funciones de Mathieu de tercer tipo o también conocidas como funciones Mathieu-Hankel, y están expresadas como

$$Me_m(\mu, q_{1_n}) = Ce_{2m}(\mu, q_{1_n}) + iFe_{ym}(\mu, q_{1_n}) \quad (5.51)$$

$$Ne_m(\mu, q_{1_n}) = Se_{2m}(\mu, q_{1_n}) + iGe_{ym}(\mu, q_{1_n}), \quad (5.52)$$

donde a su vez, $Fe_{ym}(\mu, q_{1_n})$ y $Ge_{ym}(\mu, q_{1_n})$ son funciones de Mathieu de segundo tipo par e impar, respectivamente. La función $\tilde{f}_n(\tilde{z})$, puede expresarse en la forma siguiente:

$$\tilde{f}_n(\tilde{z}) = \frac{\sqrt{2} \cosh[k_n h_0 (\tilde{z} + 1)]}{\sqrt{1 + \frac{\sinh(2k_n h_0)}{2k_n h_0}}}, \quad (5.53)$$

cuando $n = 0$, se puede asumir que $\sinh(2k_0 h_0) \approx 2k_0 h_0$, por lo que la Ec. (5.53), se puede reducir a

$$\tilde{f}_0(\tilde{z}) = \tilde{f}(\tilde{z}) = \cosh[k h_0 (\tilde{z} + 1)], \quad (5.54)$$

mientras que $q_{1_0} = q_1 = (ka \bar{\varepsilon} / 2)^2$, de tal manera que la Ec. (5.50) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_r(\mu, \nu, \tilde{z}) = & \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{Me_m(\mu, q_1)}{Me'_m(\mu_0, q_1)} ce_m(\nu, q_1) \tilde{f}(\tilde{z}) \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{Ne_m(\mu, q_1)}{Ne'_m(\mu_0, q_1)} se_m(\nu, q_1) \tilde{f}(\tilde{z}) \right], \quad (5.55) \end{aligned}$$

obteniendo finalmente el potencial total de la región (1)

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1(\mu, \nu, \tilde{z}) = -2i & \left[\sum_{m=0}^{\infty} i^m C e_m(\mu, q_1) c e_m(\nu, q_1) + \sum_{m=0}^{\infty} i^m S e_m(\mu, q_1) s e_m(\nu, q_1) \right] \\ & + \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{M e_m(\mu, q_1)}{M e'_m(\mu_0, q_1)} c e_m(\nu, q_1) \tilde{f}(\tilde{z}) \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{N e_m(\mu, q_1)}{N e'_m(\mu_0, q_1)} s e_m(\nu, q_1) \tilde{f}(\tilde{z}) \right], \end{aligned} \quad (5.56)$$

el cual es igualado al potencial de la región (2) utilizando las condiciones de acoplamiento previamente establecidas.

5.3.2. Solución del campo de velocidades para la región interna (2)

De la misma forma que en la sección (5.3.1), se propone una solución de la forma

$$\tilde{\phi}_2(\mu, \nu, \tilde{z}) = \tilde{F}(\mu) \tilde{G}(\nu) \tilde{H}(\tilde{z}), \quad (5.57)$$

sustituyendo la Ec. (5.57) en la Ec. (5.23), se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\frac{d^2 \tilde{H}}{d\tilde{z}_2^2} - \kappa^2 \tilde{H} = 0, \quad (5.58)$$

$$\frac{d^2 \tilde{G}}{d\nu^2} + [\tilde{a} - 2q_2 \cos(2\nu)] \tilde{G} = 0 \quad (5.59)$$

y

$$\frac{d^2 \tilde{F}}{d\mu^2} - [\tilde{a} - 2q_2 \cosh(2\mu)] \tilde{F} = 0 \quad (5.60)$$

donde $q_2 = (ka\bar{\varepsilon}/2)^2$ es un parámetro pequeño.

Para el análisis de la región interna el problema se divide en dos casos, en uno se considera a la estructura como un cuerpo estático, y en el otro como un cuerpo dinámico debido a su movimiento vertical como consecuencia de la interacción con el oleaje, las

soluciones de estos problemas son definidas como solución homogénea y solución particular, respectivamente. Por lo tanto, el potencial de la región interna se expresa de la siguiente manera

$$\tilde{\phi}_2(\mu, \nu, \tilde{z}) = \tilde{\phi}_P(\mu, \nu, \tilde{z}) + \tilde{\phi}_H(\mu, \nu, \tilde{z}). \quad (5.61)$$

donde $\tilde{\phi}_P$ representa la solución particular, mientras que $\tilde{\phi}_H$ es la parte homogénea.

En la condición de cuerpo estático, la estructura obedece a la siguiente condición de frontera

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial \tilde{z}_2} = 0 \quad \text{en} \quad \tilde{z}_2 = -\frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad (5.62)$$

y a la condición definida en la Ec. (5.26).

Aplicando las condiciones de frontera homogéneas a la Ec. (5.57), se obtiene la solución analítica para el problema estático, la cual está dada por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_H(\mu, \nu, \tilde{z}) = & \left[\sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{C e_m(\mu, q_{2n})}{C e_m(\mu_0, q_{2n})} c e_m(\nu, q_{2n}) \tilde{f}_n(\tilde{z}) \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{S e_m(\mu, q_{2n})}{S e_m(\mu_0, q_{2n})} s e_m(\nu, q_{2n}) \tilde{f}_n(\tilde{z}) \right], \quad (5.63) \end{aligned}$$

donde c_m y d_m son coeficientes no conocidos, $q_{2n} = (k_n a \bar{\varepsilon} / 2)^2$, mientras que la función $\tilde{f}_n(\tilde{z})$ es expresada como

$$\tilde{f}_n(\tilde{z}) = \cos \left[n\pi \left(\frac{1}{1-\alpha} + \tilde{z} \right) \right]. \quad (5.64)$$

Ahora, la solución particular obedece a las condiciones de frontera definidas por las Ecs. (5.26) y (5.28), por lo que después de aplicar las condiciones de frontera pertinentes a la Ec. (5.57), se obtiene que

$$\tilde{\phi}_P(\mu, \nu, \tilde{z}) = \frac{\tilde{V}}{2(1-\alpha)} \left\{ [\tilde{z}(1-\alpha) + 1]^2 - \frac{\zeta^2}{4} \cosh(2\mu) - \frac{\zeta}{4} \cos(2\nu) \right\}, \quad (5.65)$$

donde $\zeta = a \bar{\varepsilon} / h_0$ es un parámetro que relaciona la geometría y el emplazamiento de la estructura. Cuando $n = 0$, se puede asumir que el parámetro $q_{2_0} = (k a \bar{\varepsilon} / 2)^2 = q_1$,

obteniendo así el mismo parámetro en ambas regiones, ahora definido como q y que $\tilde{f}_0(\tilde{z}) = 1$. Cuando la relación de $\alpha \ll 1$, la función que involucra a la velocidad vertical del rompeolas, se reduce a

$$\tilde{\phi}_P(\mu, \nu, \tilde{z}) = \frac{\tilde{V}}{2(1-\alpha)} \left[1 - \frac{\zeta^2}{4} \cosh(2\mu) - \frac{\zeta}{4} \cos(2\nu) \right]. \quad (5.66)$$

De tal forma, el potencial para la región interna se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_2(\mu, \nu, \tilde{z}) = & \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{C e_m(\mu, q)}{C e_m(\mu_0, q)} c e_m(\nu, q) \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{S e_m(\mu, q)}{S e_m(\mu_0, q)} s e_m(\nu, q) \right\} \\ & + \frac{\tilde{V}}{2(1-\alpha)} \left[1 - \frac{\zeta^2}{4} \cosh(2\mu) - \frac{\zeta}{4} \cos(2\nu) \right], \quad (5.67) \end{aligned}$$

el cual es igualado al potencial de la región (1) utilizando las condiciones de acoplamiento previamente establecidas.

5.4. Acoplamiento de los campos de velocidades

Las ecuaciones que describen la interacción entre el fluido y la estructura, dadas por las Ecs. (5.56) y (5.67), contienen los coeficientes no conocidos a_m , b_m , c_m y d_m , los cuales se calculan mediante las condiciones de acoplamiento dadas por las Ecs. (5.30) y (5.31).

Aplicando la condición de continuidad de presión, Ec. (5.30), se tiene que

$$\begin{aligned} & -2i \left[\sum_{m=0}^{\infty} i^m C e_m(\mu_0, q) c e_m(\nu, q) + \sum_{m=0}^{\infty} i^m S e_m(\mu_0, q) s e_m(\nu, q) \right] \\ & + \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{M e_m(\mu_0, q)}{M e'_m(\mu_0, q)} c e_m(\nu, q) \tilde{f}(\tilde{z}) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{N e_m(\mu_0, q)}{N e'_m(\mu_0, q)} s e_m(\nu, q) \tilde{f}(\tilde{z}) \right] \\ & = \left[\sum_{m=0}^{\infty} c_m c e_m(\nu, q) + \sum_{m=0}^{\infty} d_m s e_m(\nu, q) \right] \\ & + \frac{\tilde{V}}{2(1-\alpha)} \left[1 - \frac{\zeta^2}{4} \cosh(2\mu_0) - \frac{\zeta}{4} \cos(2\nu) \right], \quad (5.68) \end{aligned}$$

Ahora, al aplicar la condición de conservación de masa, Ec. (5.31), se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 & -2i \left[\sum_{m=0}^{\infty} i^m C e'_m(\mu_0, q) c e_m(\nu, q) + \sum_{m=0}^{\infty} i^m S e'_m(\mu_0, q) s e_m(\nu, q) \right] \\
 & + \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m c e_m(\nu, q) \tilde{f}(\tilde{z}) + \sum_{m=0}^{\infty} b_m s e_m(\nu, q) \tilde{f}(\tilde{z}) \right] \\
 = & (1 - \alpha) \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{C e'_m(\mu_0, q)}{C e_m(\mu_0, q)} c e_m(\nu, q) + \sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{S e'_m(\mu_0, q)}{S e_m(\mu_0, q)} s e_m(\nu, q) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{\tilde{V} \zeta^2 \sinh(2\mu_0)}{4(1 - \alpha)} \right\} \quad (5.69)
 \end{aligned}$$

Aplicando el concepto de ortogonalidad de funciones, la Ec. (5.68) se multiplica por $d\tilde{z}$ e integra respecto a \tilde{z} de $[-1/(1 - \alpha), -\alpha/(1 - \alpha)]$, mientras que la Ec. (5.69) se multiplica por $\cos[kh_0(\tilde{z} + 1)]$ e integra respecto a \tilde{z} de $[-1/(1 - \alpha), 0]$. Ambos resultados se multiplican primero por $c e_n(\nu, q_1)$ y después por $s e_n(\nu, q_1)$, y se integran respecto a ν de $[0, 2\pi]$, para llegar a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{M e_m(\mu_0, q)}{M e'_m(\mu_0, q)} \Delta \Gamma_{m,n} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m \tilde{\Delta} \Gamma_{m,n} = \\
 2i \sum_{m=0}^{\infty} i^m C e_m(\mu_0, q) \tilde{\Delta} \Gamma_{m,n} + \tilde{\Gamma}_n^* \quad (5.70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{N e_m(\mu_0, q)}{N e'_m(\mu_0, q)} \Delta \Gamma_{m,n} - \sum_{m=0}^{\infty} d_m \tilde{\Delta} \Gamma_{m,n} = \\
 2i \sum_{m=0}^{\infty} i^m S e_m(\mu_0, q) \tilde{\Delta} \Gamma_{m,n}, \quad (5.71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} a_m \Delta \Gamma_{m,n} - (1 - \alpha) \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{C e'_m(\mu_0, q)}{C e_m(\mu_0, q)} \tilde{\Delta} \Gamma_{m,n} = \\
 2i \sum_{m=0}^{\infty} i^m C e'_m(\mu_0, q) \tilde{\Delta} \Gamma_{m,n} + \tilde{\Gamma}_n^* \quad (5.72)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m \Delta \Gamma_{m,n} - (1 - \alpha) \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{S e'_m(\mu_0, q)}{S e_m(\mu_0, q)} \tilde{\Delta} \Gamma_{m,n} = 2i \sum_{m=0}^{\infty} i^m S e'_m(\mu_0, q) \tilde{\Delta} \Gamma_{m,n} \quad (5.73)$$

donde las nuevas variables que aparece en el sistema de ecuaciones (5.70-5.73) son el resultado de las integrales antes mencionadas, y se expresan de la siguiente manera

$$\Delta = \frac{\sinh \left[kh_0 \left(2 + \frac{1}{\alpha-1} \right) \right] + \sinh \left(\frac{kh_0 \alpha}{1-\alpha} \right)}{kh_0}, \quad (5.74)$$

cuando $\alpha \ll 1$, se asume que $\Delta = 1$. Mientras que las variables

$$\tilde{\Delta} = 1, \quad (5.75)$$

$$\Gamma_{0,0} = 2\pi, \quad \Gamma_{m=n>0} = \pi, \quad \text{y} \quad \Gamma_{m \neq n} = 0, \quad (5.76)$$

$$\Gamma_n^* = -\frac{A_0^n \pi \tilde{V} [\zeta^2 \cosh(2\mu_0) - 4]}{4(\alpha - 1)}, \quad (5.77)$$

cuando $s > 0$ resulta que $\Gamma_n^* = 0$. Mientras que

$$\tilde{\Gamma}_n^* = -\frac{A_0^n \pi \tilde{V} \zeta^2 \sinh(2\mu_0)}{2(\alpha - 1)}, \quad (5.78)$$

cuando $s > 0$, se tiene que $\tilde{\Gamma}_n^* = 0$. Los coeficientes a_m , b_m , c_m y d_m se obtienen al resolver de forma numérica el sistema de $m \times n$ dado por las Ecs. (5.70-5.73), de esta manera, los potenciales de velocidad de las regiones interna y externa son conocidos.

La fuerza adimensional f inducida en la cara inferior de la estructura se obtiene mediante la integración de la presión dinámica en la región (2) y se calcula con la siguiente fórmula:

$$f = \frac{1}{2} \int_0^{\mu_0} \int_0^{2\pi} \tilde{P} [\cosh(2\mu) - \cos(2\nu)] d\nu d\mu. \quad (5.79)$$

La solución de la ecuación previa se utiliza como dato para modelar el movimiento vertical en la oscilación de la estructura.

Capítulo 6

Análisis de resultados del campo del oleaje

6.1. Resultados

En la siguiente sección se presentan los resultados de la distribución del potencial de velocidades debida a la interacción entre el oleaje y la estructura, y de los vectores de velocidad. Se analiza únicamente el problema de radiación vertical para la región (2). Se consideran valores de $\mu \sim O(1)$, lo que significa que la geometría de la estructura es una elipse, cuando $\mu_0 \rightarrow \infty$, la geometría de la estructura se encuentra en el límite de una distribución circular.

6.1.1. Influencia del parámetro α

En la Fig. 6.1 se muestra la influencia que tiene la longitud sumergida de la estructura con respecto a la profundidad del mar, los resultados son obtenidos para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$, $\zeta = 0.40$ y con diferentes valores del parámetro $\alpha (= 0.02, 0.15)$. Se puede apreciar que para valores de $\alpha \rightarrow 0$ el potencial de velocidades en la región (2) crece, y de forma contraria, cuando $\alpha \rightarrow 1$ el potencial disminuye, esta condición se presenta si $S \approx h_0$. A partir de la Ec. (5.67), se puede ver que el término que contiene los efectos de la velocidad vertical $\tilde{\phi}_P$ es cero cuando $\alpha = 1$, bajo esta condición, la estructura ya no es un rompeolas flotante, y lo que representa es una pared vertical fija al fondo del mar, de tal manera que, el problema de radiación debido a la oscilación de la estructura es completamente eliminado, asegurando que solo existe el fenómeno de difracción como consecuencia de la interacción entre el oleaje y la estructura.

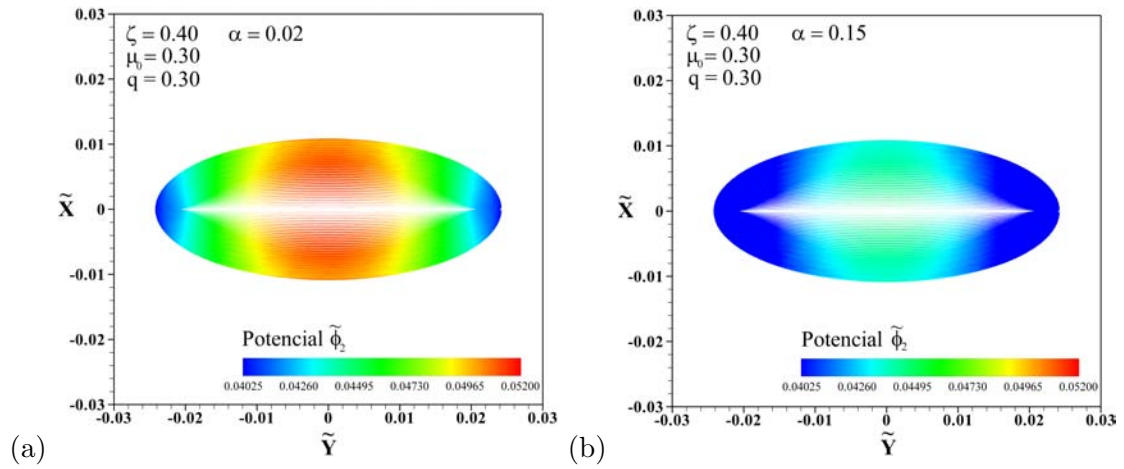


FIGURA 6.1: Potencial de velocidades para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$, $\zeta = 0.40$ con diferentes valores del parámetro $\alpha (= 0.02, 0.15)$. (a) Potencial de velocidades para $\alpha = 0.02$ y (b) Potencial de velocidades para $\alpha = 0.15$.

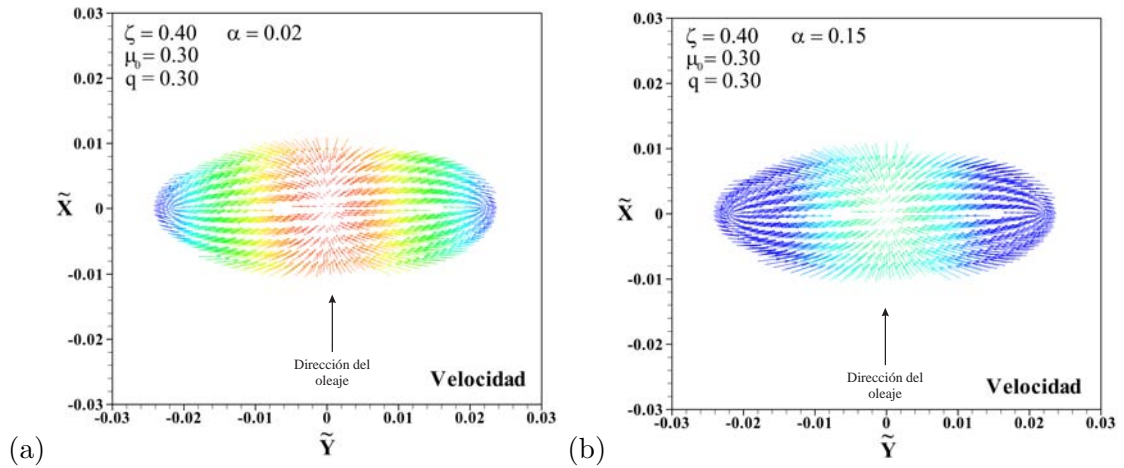


FIGURA 6.2: Vectores de velocidad para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$, $\zeta = 0.40$ con diferentes valores del parámetro $\alpha (= 0.02, 0.15)$. (a) Vectores de velocidad para $\alpha = 0.02$ y (b) Vectores de velocidad para $\alpha = 0.15$.

En la Fig. 6.2 se puede observar la dirección de los vectores de velocidad del oleaje, los resultados se presentan para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$, $\zeta = 0.40$ y con diferentes valores del parámetro $\alpha (= 0.02, 0.15)$. Se puede apreciar que el frente de onda viaja en dirección perpendicular al eje de mayor longitud del rompeolas, este oleaje se difracta alrededor de la estructura como consecuencia de su interacción. Si un observador se posiciona en un punto fijo en cualquier parte del perímetro de la estructura podría apreciar que la onda viaja casi perpendicular a su posición, este fenómeno físico y visual es debido a que el oleaje envuelve a la estructura. El cambio de dirección del oleaje por la presencia de un obstáculo se presenta cuando se tienen longitudes de onda mayores a las dimensiones de la estructura, en este caso, $\lambda > a$.

Los efectos de difracción van disminuyendo a medida que la longitud de onda es igual o menor a la longitud del eje mayor del rompeolas. La influencia de la longitud de onda sobre las dimensiones del rompeolas se encuentra implícita en los valores de $q = (ka\bar{\varepsilon}/2)^2$, cuando $\lambda < a$, se tiene una estructura muy larga comparada con la longitud de onda, y por lo tanto, $q \rightarrow \infty$, bajo esta premisa los efectos de difracción son indetectables ya que aunque el cambio de dirección de la onda sea el máximo, la longitud de onda no alcanza a cubrir la totalidad de la longitud de la estructura, sin embargo, la formulación matemática utilizada en este trabajo no es válida para tal condición.

Si se desea analizar relaciones de $q > 1$ se deben utilizar recursiones para la obtención de los coeficientes de Mathieu, los cuales involucran al parámetro q , ver [44].

6.1.2. Influencia del parámetro ζ

En la Fig. 6.3 se muestra la distribución del potencial de velocidades en la región interior de la estructura, para diferentes valores del parámetro ζ ($= 0.10, 0.40$) y valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$ y $\alpha = 0.10$.

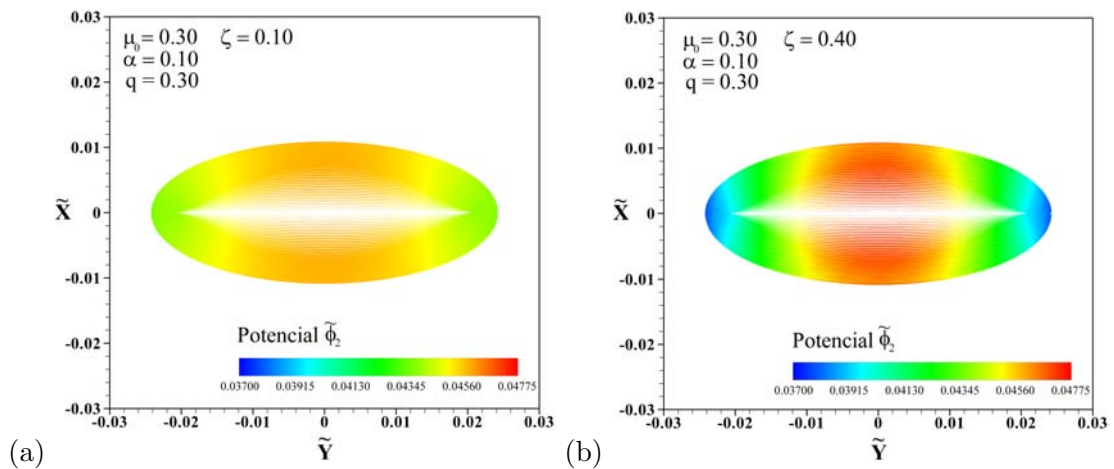


FIGURA 6.3: Potencial de velocidades para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$, $\alpha = 0.40$ con diferentes valores del parámetro ζ ($= 0.10, 0.40$). (a) Potencial de velocidades para $\zeta = 0.10$ y (b) Potencial de velocidades para $\zeta = 0.40$.

Como se mencionó en Capítulo 5 de esta tesis, el parámetro ζ representa la competencia entre la longitud horizontal de la estructura, denotada por el semi eje mayor a y la profundidad del nivel medio del mar definida por h_0 . Se puede apreciar que para valores de $\zeta \rightarrow 0$ el potencial de velocidades en la región (2) disminuye, mientras que para valores de $\zeta \rightarrow 1$ el potencial de velocidades aumenta, esta última condición se presenta cuando $a \approx h_0$, lo cual significa, que la estructura es muy larga y que la profundidad es del mismo orden que la longitud transversal de la estructura; bajo esta circunstancia se puede asumir que los efectos en la velocidad debidos al flujo radiado por el movimiento

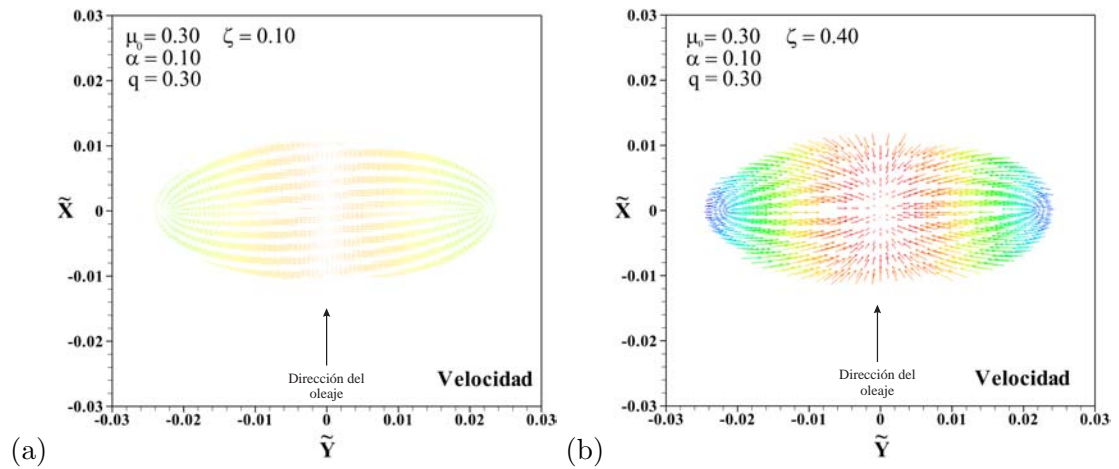


FIGURA 6.4: Vectores de velocidad para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$, $\mu_0 = 0.30$, $\alpha = 0.40$ con diferentes valores del parámetro ζ ($= 0.10, 0.40$). (a) Vectores de velocidad para $\zeta = 0.10$ y (b) Vectores de velocidad para $\zeta = 0.40$.

vertical de la estructura son significativos. Finalmente, en la Fig. 6.4 se muestran los vectores de velocidad para valores fijos de los parámetros $q = 0.30$ y $\mu_0 = 0.30$, $\alpha = 0.40$ con diferentes valores del parámetro ζ ($= 0.10, 0.40$), se observa que el oleaje incidente se difracta alrededor de la estructura como consecuencia de su interacción.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo de tesis se analizó teóricamente el problema de radiación de una estructura flotante de sección transversal elíptica debida a su interacción con ondas largas. Basado en la Teoría Lineal de Ondas Largas, el dominio del fluido se dividió en dos regiones, una región interna y una región externa, para las cuales, se propuso un potencial de velocidades, el cual se obtuvo mediante la solución semi analítica de un sistema de ecuaciones en términos de funciones de Mathieu y funciones modificadas de Mathieu. Ambas regiones fueron acopladas mediante las condiciones de frontera correspondientes. Se modeló el movimiento forzado de la estructura implementando la segunda Ley de Newton. Los movimientos forzados y libres de la estructura se analizaron teóricamente, considerando a la estructura como un oscilador débilmente no-lineal. Basados en el método de escalas múltiples, se formuló una expansión de dos escalas para la solución de la ecuación adimensional de gobierno, con la finalidad de caracterizar la condición de casi resonancia de la estructura. Se obtuvieron soluciones asintóticas para el movimiento libre no amortiguado y el movimiento libre amortiguado, mientras que para el movimiento en estado permanente de la estructura, se obtuvo una solución analítica de la amplitud y el desplazamiento. De los análisis previos se indentifica que para $\omega \approx \omega_N$ el desplazamiento de la estructura es dominado por la competencia de la fuerza adimensional, f , y el parámetro de radiación, β . Se presentan resultados numéricos, para el desplazamiento de la estructura como función de los parámetros ε , f , ω/ω_N y β . La solución numérica de la ecuación de gobierno se comparó con la solución analítica, Ec. (3.7), para el límite $\beta \ll 1$, los resultados se ajustan de manera correcta. Cuando la relación de frecuencias $\omega/\omega_N \rightarrow 1$ aparece la condición de casi resonancia de la estructura, tal condición hace que el desplazamiento vertical de la estructura incremente sin la necesidad de agregar energía al sistema para forzar a su movimiento. Por otro lado, desde un punto de vista ingenieríl, el parámetro β es de gran importancia, porque permite identificar para qué combinaciones de los valores de los parámetros físicos, la estructura tiene un estado de

movimiento cuasiestático, además, se identifica que para incrementos de la frecuencia natural ω_N , los desplazamientos de la estructura tienden a disminuir. En adición, se presenta el comportamiento del movimiento de la estructura causado por la fuerza f , relación de frecuencias ω/ω_N , el parámetro ε y el parámetro de radiación β , en términos de la trayectoria de un punto a través del tiempo, se identifica que para períodos prolongados de tiempo el movimiento de la estructura no se amortigua. Con relación a la hidrodinámica del oleaje, se obtuvieron resultados para el problema de radiación como consecuencia de la interacción entre la estructura y oleaje monocromático. De los resultados obtenidos se identificó que incrementos del parámetro α significan decrementos del potencial de velocidades en la región interna, este parámetro relaciona la longitud sumergida del rompeolas y la profundidad del mar, por otro lado, cuando los valores del parámetro ζ incrementan, el potencial de velocidades en la región interna también crece, este parámetro relaciona la competencia entre la geometría de la estructura y la profundidad del mar. Lo que significa que cuando la geometría de la estructura cubre una mayor superficie, los efectos en la velocidad debajo del rompeolas son grandes, respecto a los efectos que se presentan en geometrías de menor tamaño. Los resultados de los vectores de velocidad muestran que para estructuras con longitudes de un orden igual o menor a la longitud de onda, se presentan efectos de difracción del oleaje, mientras que para geometrías con longitudes pequeñas comparadas con la longitud de onda, los efectos de difracción de oleaje son imperceptibles.

7.0.1. Trabajos futuros

Este trabajo permitió comprender de manera particular la influencia e importancia de los parámetros físicos involucrados en la interacción oleaje-estructura. Algunos de los trabajos que pueden desarrollarse en el futuro se enlistan a continuación:

1. Estudio del movimiento del rompeolas sujeto a más grados de libertad.
2. Involucrar teoría de ondas cortas con amplitudes moderadas.
3. Considerar estructuras de menor tamaño y oblicuidad en las ondas incidentes.
4. Proponer configuraciones de amarres no convencionales.
5. Plantear un análisis con fondo irregular y permeable.
6. Considerar una estructura permeable.

Lo anterior permitirá modelar sistemas y su comportamiento en casos extraordinarios de oleaje, aspecto sumamente importante para la prevención de riesgos.

Apéndice A

Ecuaciones de gobierno para ondas largas

Para definir las ecuaciones de movimiento traslacional de una partícula, se puede comenzar a partir de la Segunda Ley de Newton, en donde se asume que $\sum F_x = ma_x$, donde a_x es la aceleración de la partícula en dirección x , por definición $a_x = du/dt$, donde u es la velocidad en dirección x . Por lo tanto, esta velocidad es función del espacio y del tiempo, con base en lo anterior su derivada total se define como

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (\text{A.1})$$

si se sabe que $dx/dt = u$, se puede obtener la aceleración total, definida como

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (\text{A.2})$$

La ecuación de movimiento en dirección x puede ser formulada por la Segunda Ley de Newton

$$\sum F_x = m \frac{Du}{Dt}, \quad (\text{A.3})$$

aplicando las series de Taylor para las direcciones x, y y z , y tomando en cuenta los esfuerzos tangenciales y normales, definidos por $\tilde{\Psi}$, se tiene lo siguiente

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_{xz}}{\partial z} \right) + X, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_{yz}}{\partial z} \right) + Y, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_{zz}}{\partial z} \right) + Z, \quad (\text{A.6})$$

las Ecs. (A.4-A.6) son las ecuaciones de movimiento traslacional en estado estacionario, en donde X , Y y Z , representan una fuerza por unidad de masa, en las direcciones x , y y z , respectivamente. Para aplicar las ecuaciones de movimiento a una partícula de un fluido, es necesario conocer alguna de las tensiones del fluido. La hipótesis más conveniente y que es razonable para validar los problemas de mecánica de ondas de agua, es que las tensiones tangenciales son igual a cero, resultando las Ecuaciones de Euler, definidas como

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (\text{A.9})$$

Las ondas de agua son consideradas como la perturbación de un fluido en condición de reposo, la rotación inicialmente es cero y permanece en cero, por lo tanto, usualmente se asume la condición de un flujo irrotacional, definido como

$$\text{curl} v = 0. \quad (\text{A.10})$$

Debido a la irrotacionalidad y a las hipótesis de un flujo ideal, se puede introducir un potencial de velocidades $\Phi(x, y, z, t)$

$$(u, v) = \nabla\Phi, \quad \text{y} \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, la ecuación de continuidad, Ec. (5.1) y la condición de irrotacionalidad, Ec. (A.10), se pueden combinar para llegar a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Bibliografía

- [1] Shigeo Takahashi. Design of vertical breakwaters. *Coastal Structures Short Course, 25th International Conference on Coastal Engineering*, 1:1–110, 1996.
- [2] URL <http://www.nauticexpo.com/prod/superflex-pontoon-mooring-systems/product-30285-362176.html>.
- [3] URL http://vincent.callebaut.org/object/151223_aequorea/aequorea/projects/user.
- [4] Muhittin Söylemez and Ömer Gören. Diffraction of oblique waves by thick rectangular barriers. *Applied Ocean Research*, 25:345–353, 2003.
- [5] Pascal Lafon. Ghassan Elchahal, Rafic Younes. The effects of reflection coefficient of the harbour sidewall on the performance of floating breakwaters. *Ocean Engineering*, 35:1102– 1112, 2008.
- [6] H. S. Chen and C. C. Mei. Tech. report no. 140. Technical report, Dept. of Civ. Engrg., M.I.T., 1971.
- [7] Z.C.Sun H.Y. Wang. Experimental study of a porous floating breakwater. *Ocean Engineering*, 37:520–527, 2010.
- [8] J. Wehausen. Motion of floating bodies. *Annual Review Of Fluid Mechanics*, 3:237, 1971.
- [9] A. Brebner, A. Ofuya. *Floating Breakwaters*, volume 2. 1968.
- [10] B. H. Adee. Analysis of floating breakwater performance. *In Proceedings of Symposium on Modeling Techniques, ASCE*, 4:1585–1602, 1975.
- [11] Martin W. Adee, B. H. Theoretical analysis of floating breakwater performance. Marine Technical Report 24, University of Rhode Island, 1974.
- [12] Y. Agnon M. Stiassnie. N. Drimer. A simplified analytical model for a floating breakwater in water of finite depth. *Applied Ocean Research*, 14:33–41, 1992.

- [13] M. K. Darwiche, Anthony N. Williams. Three-dimensional wave scattering by elliptical breakwaters. *Ocean Engineering*, pages 103–118, 1990.
- [14] Anthony N. Williams. Wave diffraction by elliptical breakwaters in shallow water. *Ocean Engineering*, 12(1):25–43, 1985.
- [15] Anthony N. Williams. S. Zhang. Three-dimensional wave scattering by elliptical breakwaters. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering.*, pages 38–45, 1996.
- [16] Takeshi Kinoshita Wei-guang Bao, Kazuki Fujihashi. Interaction of a submerged elliptic plate with waves. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 22:77–82, 2010.
- [17] Spyros A. Mavrakos. Ioannis K. Chatjigeorgiou. An analytical approach for the solution of the hydrodynamic diffraction by arrays of elliptical cylinders. *Applied Ocean Research*, 32(2):242–251, 2010.
- [18] Hsu H.-H. Wu. Y.C. The hydrodynamic coefficients for an oscillating rectangular structure on a free surface with sidewall. *Ocean Engineering*, 24(2):177–199, 1997.
- [19] M.R. Gesraha. A.G. Abul-Azm. Approximation to the hydrodynamics of floating pontoons under oblique waves. *Ocean Engineering*, 27:365–384, 2000.
- [20] Y.M. Shen Y.H. Zheng, Y.G. You. On the radiation and diffraction of water waves by a rectangular buoy. *Ocean Engineering*, 31:1063–1082, 2004.
- [21] B. H. Adee. Analysis of floating breakwater mooring forces. *Ocean Engineering Mechanics. Winter Annual Meeting, ASME.*, pages 77–92., 1977.
- [22] Carver Robert D. Floating breakwater wave-attenuation tests for east bay marina. *Technical report HL*, 1979.
- [23] Ijima T Yamamoto. T., Yoshida. A. Dynamics of elastically moored floating objects. *Applied Ocean Research*, 2:85–92, 1980.
- [24] Sundarravadivelu R Sannasiraj S.A., Sundar V. Mooring forces and motion responses of pontoon- type floating breakwaters. *Ocean Engineering*, 25(1):27–48, 1998.
- [25] H. S. Chen and C. C. Mei. Wave forces on a stationary platform of elliptical shape. *Journal of Ship Research.*, 17(2):61–71, 1973.
- [26] Anthony N. Williams. Wave diffraction by elliptical breakwaters in shallow water. *Ocean Engineering*, 12(1):25–43, 1985.
- [27] Anthony N. Williams. Wave forces on an elliptic cylinder. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering.*, 111(2):433–449, 1985.

- [28] M. K. Darwiche. Anthony N. Williams. Wave radiation by a truncated elliptical cylinder. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering.*, 116(1):101–119, 1990.
- [29] Dambaru D. Bhatta. Wave diffraction by circular and elliptical cylinders in finite depth water. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, pages 67–85, 2005.
- [30] Ioannis K. Chatjigeorgiou Spyros A. Mavrakos. The hydrodynamics of arrays of truncated elliptical cylinders. *European Journal of Mechanics B/Fluids.*, 37:153–164., 2013.
- [31] S.A. Mavrakos. I.K. Chatjigeorgiou. Hydrodynamic diffraction by multiple elliptical cylinders. *In Proc 24th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies.*, pages 38–41., 2013.
- [32] S.A. Mavrakos. I.K. Chatjigeorgiou. An analytical approach for the solution of the hydrodynamic diffraction by arrays of elliptical cylinders. *Applied Ocean Research.*, 32.:242–251., 2010.
- [33] Sung Tai Kee. Performance evaluation of submerged dual buoy/porous-membrane breakwaters. *KSCE Journal of Civil Engineering.*, 9.(4.):279–287., 2005.
- [34] Shih-Chun Hsiao Yun-Ta Wu. Propagation of solitary waves over a submerged permeable breakwater. *Coastal Engineering*, 8:1–18, 2013.
- [35] F.Sanchez-Tembleque. E. Peña, J.Ferreras. Experimental study on wave transmission coefficient, mooring lines and module connector forces with different designs of floating breakwaters. *Ocean Engineering*, 8:1150–1160, 2010.
- [36] J. Ringwood J. Davidson. Mathematical modelling of mooring systems for wave energy converters-a review. *Energies*, 10(5):1–46, 2017.
- [37] M. E. McCormick *Ocean Engineering Mechanics with Applications*. Cambridge University Press, 2010.
- [38] F Ursell. *Proceedings of the cambridge philosophical society*. 1953.
- [39] Jeongwoo Lee and Woncheol Cho. Effects of mean wave drift force on mooring tension and performance of a moored floating breakwater. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 6(2):193–201, 2002.
- [40] Dick K.-P. Yue Chiang C. Mei, Michael Stiassnie. *Theory And Applications Of Ocean Surface Waves*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005.

-
- [41] M. Muliawan A. Kurniawan T. Moan J. Krokstad A. Babarit, J. Hals. Numerical benchmarking study of a selection of wave energy converters. *Renew Energy*, 41: 44–63, 2012.
- [42] J. Cole J. Kevorkian. Multiple scale and singular perturbation techniques. *Springer-Verlag New York, Inc*, 1996.
- [43] E.T. Whittaker and G.N. Watson. A course of modern analysis. *Cambridge University Press, Westford Mass*, 1927.
- [44] N.W. McLachlan. *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford University Press, 1947.