Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Teorema espectral para un número finito de operadores normales que conmutan

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

ÁNGEL CUAUHTÉMOC FUERTE PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MIGUEL ARTURO BALLESTEROS MONTERO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Dedicado a
mi familia

II

Agradecimientos

Debo consignar que en la realización de esta tesis conté con el apoyo de una beca que me fue concebida al amparo del proyecto PAPIIT IN102215, DGAPA-UNAM.
Agradezco a mi asesor y director de tesis, Miguel Arturo Ballesteros Montero por todo el apoyo incondicional que me brindó a lo largo de este trabajo así como su tiempo y dedicación para hacer de mí un mejor alumno y una mejor persona.
Agradezco también a mis sinodales: Luis Silva, Rafael del Río, Ángeles Sandoval y Francisco Torres.
Agradezco a todos mis maestros, especialmente a Juan José Alba, Darío Rojas, Micho Durdevich y César Hernández Cruz.
Agradezco a mi madre por siempre creer en mí y apoyar mis desiciones, a mi hermano quien es un ejemplo para mí, a mi hermana por todo el cariño que me brinda cada día y a mi padre por todas sus enseñanzas. Agradezco a todos mis amigos de la preparatoria, de los cursos de inglés, de la olimpiada de matemáticas y de la carrera; a mi mejor amigo Iván, a mi mejor amiga Alejandra, a mi banda por la paciencia que han tenido para continuar con todos mis proyectos, a mi primer maestro de matemáticas Juan José Parres quién sentó las bases en mí para estudiar esta licenciatura, a Mario, Didier, Ángel, Joshua, Alonso, Carlos, Mariano y a Stephanie Alexandra Silva Santos con quien he compartido los momentos más felices de mi vida.

Índice general

Introducción

El objetivo principal de este trabajo consiste en demostrar el Teorema espectral para un número finito de operadores normales no acotados que conmutan entre sí. Además, otro objetivo relevante es presentar una demostración del Teorema espectral para operadores normales acotados que incorpora elementos diferentes a los que se presentan en libros clásicos como "Functional Analysis" de Rudin Walter o "Methods of modern mathematical physics" de Michael Reed y Barry Simon, con la idea de facilitar la comprensión de la demostración del teorema; para ello es necesario conocer los temas básicos de Análisis así como de Teoría de la medida.
El primer libro sobre teoría de operadores, *Théorie des Operations Linéarres* publicado en Varsovia, Polonia en 1932 por Stefan Banach tiene como propósito el estudio de funciones sobre espacios de dimensión finita, especialmente sobre los espacios de Banach.
El modelo original para la teoría de operadores es el estudio de las matrices. La palabra "matriz" fue acuñada por James Sylvester en 1850; sin embargo los métodos matriciales tuvieron su origen 2000 años antes, tales como los métodos de eliminación gaussiana usados en una obra china, *Nine Chapters of the Mathematical Art*, de la dinastía Han. Aunque Carl Friedrich Gauss usó la palabra "determinante" en el siglo XIX, los determinantes ya tenían precursores y fueron usados de forma explícita en descubrimientos simultáneos en 1683 por Takakazu Seki Kowa en Japón y Gottfried Leibniz en Europa.
Los eigenvalores y diagonalización fueron descubiertos en 1826 por Augustin Louis Cauchy en el proceso de encontrar formas normales para funciones cuadráticas. Una aproximación al cálculo equivalente a la diagonalización se le atribuye a Johan de Witt en 1660 (Cajori [3], "A History of Mathematical Notations").
Cauchy demostró el teorema espectral para matrices autoadjuntas; es decir, que cada matriz simétrica real es diagonalizable. El teorema espectral fue

generalizado por John von Neumann y es actualmente el resultado más importante de la teoría de operadores. En adición, Cauchy fue el primero en sistematizar los determinantes.
Podemos decir que el álgebra abstracta nació con los descubrimientos de William Rowan Hamilton en 1843 acerca de los cuaterniones, y la introducción de álgebra exterior de Hermann Grassmann el año siguiente. Grassmann también fue el responsable de introducir el producto escalar. Cauchy y Jean Claude de Saint-Venant también crearon estructuras algebraicas abstractas alrededor de ese tiempo.
En 1857 Arthur Cayley introduce la idea de un álgebra de matrices y en 1858 muestra que los cuaterniones pueden ser representados por matrices.
En 1870, Camille Jordan publica la forma canónica completa del análisis de matrices. Este es un prototipo para la descomposición de operadores compactos en el caso de dimensión infinita.
El tratado axiomático completo de espacios lineales se debe a Giusseppe Peano en su libro *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslebre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* en 1888. Es aquí donde se encontrará el teorema de que cada operador lineal definido en un espacio vectorial de dimensión finita le corresponde una matriz. Peano definió la suma y el producto de operadores lineales de forma abstracta; es en este punto en que la teoría de operadores comienza a tomar forma como progreso en el álgebra fusionada con elementos del análisis.
Actualmente, muchas ramas del análisis son inseparables de la teoría de operadores, notablemente el cálculo variacional y las ecuaciones diferenciales.
El primer acercamiento significativo entre eigenvalores y ecuaciones diferenciales fue en la teoría desarrollada por Charles François Sturm en 1836 y Joseph Liouville en 1838. El teorema de Sturm-Liouville fue el inicio de lo que ahora nos referimos como teoría espectral de operadores diferenciales ordinarios.
Oliver Heaviside hizo contribuciones sustanciales a la teoría de electricidad y magnetismo y entre 1880 y 1887 creó un cálculo funcional sistemático.
La teoría espectral empezó a ser el foco de atención. Un evento mayor fue la aparición de la teoría de ecuaciones integrales en 1990, donde surgió un nuevo acercamiento al problema de Dirichlet (reside en encontrar una solución de la ecuación de Laplace con condiciones específicas de frontera). En un reporte preliminar basado en su trabajo publicado en 1990 y un artículo en *Acta Mathematica* en 1903, Fredholm da un análisis completo de una importante clase de ecuaciones integrales conocidas ahora como ecuaciones de Fredholm.

Los puntos notables en este trabajo fueron:

- El teorema de Fredholm, donde extiende un resultado no trivial de álgebra lineal a una amplia clase de operadores.
- Un análisis cuidadoso de la convergencia de una sucesión de operadores.
- La definición de determinante para una clase de operadores.
- El primer uso del *resolvente* de un operador.

En 1902, en sus trabajos, Lebesgue define la forma moderna de la integral e introduce los espacios de funciones más importantes, denotados en su honor como los espacios L^p. Aproximadamente en ese mismo año, David Hilbert encuentra la teoría espectral moderna en una serie de artículos inspirados en los trabajos de Fredholm. Hilbert comienza como Fredholm, con la idea específica de ecuaciones integrales, y nota que puede obtener resultados más precisos cuando considera el espacio de funciones L^2, es decir, las funciones cuadrado integrables, y cuando el operador integral es simétrico.
Éste fue el origen del descubrimiento de los espacios de Hilbert y el establecimiento del estudio general de operadores autoadjuntos. En 1906, Hilbert libera su análisis de la conexión con ecuaciones integrales y descubre el espectro continuo, que fue presentado pero no reconocido en el trabajo de George Hill.
La denominación teoría espectral fue introducida por Hilbert en su formulación original de la teoría del espacio de Hilbert, que fue lanzada en términos de formas cuadráticas en infinitas variables. Tras la formulación inicial de Hilbert, el desarrollo posterior de espacios de Hilbert abstractos y la teoría espectral de un único operador normal sobre ellos fueron muy en paralelo con los requerimientos de la física.
E. H. Moore y Hilbert dieron las bases para establecer la unificación de la teoría de espacios lineales y la teoría de ecuaciones integrales. Sin embargo, fué Frigyes Riesz quien realizó completamente dicha unión.
El concepto de un álgebra de operadores hizo su aparición en series de artículos, culminando en 1913 en un libro escrito por Riesz, en donde estudia el álgebra de operadores acotados sobre el espacio de Hilbert L^2. La representación de Riesz y las proyecciones ortogonales aparecen en este trabajo. En 1916 Riesz crea la teoría que llama "completely continuous operators", ahora conocida por operadores compactos. El teorema espectral de Riesz para operadores compactos reemplazó el trabajo de Fredholm.

En 1923, Wiener observó que el teorema integral de Cauchy y el teorema de Taylor se mantienen válidos para funciones analíticas con valores en un espacio de Banach complejo. Por doce años pocas aplicaciones fueron hechas por un número reducido de investigadores independientes que encontraron su uso. El teorema espectral definitivo de operadores autoadjuntos, y más aún, de operadores normales fue el descubrimiento simultáneo de Marshall Stone y John von Neumann en 1929-1932, sin embargo, Stone es más leído hoy en día. Una de las motivaciones de von Neumann fue la mecánica cuántica, que fue descubierta en 1926 en dos formas distintas, una por Erwin Schrödinger y otra por Werner Heisenberg. Fue la percepción de von Neumann la que permitió la noción de la física moderna. Neumann también introdujo y transformó muchos conceptos que ahora son el núcleo de la teoría de operadores, tales como:

- la definición de dominios.
- extensión de operadores.
- clausura de un operador.
- operadores adjuntos.
- operadores no acotados.

En el año 1932 se publicó el primer texto sobre teoría de operadores por Stefan Banach. Banach fue el responsable entre otras cosas de:

- El teorema del punto fijo.
- El teorema de la gráfica cerrada.
- la convergencia débil.

En series de artículos desde 1935, en participación con F. J. Murray, von Neumann elaboró la teoría de álgebra de operadores introducida por Riesz.
El hecho de que un operador lineal cerrado en un espacio de Banach complejo y arbitrario tenga espectro no vacío fue probado por Taylor. Un caso especial de la fórmula para el radio espectral fue probado por Beurling, mientras que el caso general fue probado por Gelfand.
En 1936, Nagumo estudió las álgebras de Banach y demostró, entre otras cosas, algunos teoremas estudiados por Riesz para operadores compactos. Más

tarde, Taylor estudió funciones analíticas abstractas y Hille aplicó métodos similares en el estudio de semigrupos. El trabajo final que podemos mencionar es el de Israil Gelfand, quien en 1941 en un artículo en *Mathematicheskii Sbornik* extiende el teorema espectral a elementos de álgebras normadas y en el proceso introduce:

- la fórmula del radio espectral.
- álgebras C^* (aún no conocidas con ese nombre).
- la característica de un álgebra.

En adición, Gelfand usó la integral de línea para obtener idempotentes en álgebras de Banach. Independientemente, Lorch emplea la misma técnica e inicia un estudio de "conjuntos espectrales".
El teorema del mapeo espectral se le atribuye a Dunford.
Desde los tiempos de Gelfand la teoría de operadores ha tenido muchas ramas de matemáticas puras y aplicadas, y ha promovido resultados que van más allá de una breve introducción histórica.
La afirmación principal del teorema espectral presentada en el capítulo 1 es ver que cada operador normal acotado T en un espacio de Hilbert H induce una resolución de la identidad E sobre los subconjuntos de Borel de su espectro $\sigma(T)$, y a su vez, ver que cada operador T puede ser reconstruido mediante una integral cuyas propiedades se dan a conocer en dicho capítulo.
En el capítulo 2 se generaliza este teorema para un número finito de operadores normales no acotados que conmutan actuando en los complejos.

Capítulo 1

Teorema espectral para operadores normales acotados

En este capítulo daremos una prueba del teorema espectral para operadores normales acotados. Las ideas clave son primero, a través de un cálculo funcional, a cada función compleja continua con dominio el espectro de un operador normal se le asocia dicho operador normal mediante un homomorfismo; esto se logra gracias al Teorema 1.47, aproximando cada función continua por polinomios y después aplicando el Teorema de Stone-Weierstrass. Luego, por el Teorema de Representación de Riesz (Teorema 1.90) a cada función continua se le asocia una única medida de Borel (resolución de la identidad) de tal forma que cada operador normal podrá ser reconstruído mediante una integral cuyas propiedades son analizadas en la sección "Integración con respecto a una resolución de la identidad".

1.1. Preliminares

Observación 1.1. *En las secciones 1.1 y 1.2,* $\mathbb{F}$ *denotará al campo de los números reales o de los números complejos. Las definiciones y resultados que usen esta notación son válidos para ambos campos.*

Definición 1.2. *Sea* E *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{F}$*. Un producto interior en* E *es una función* $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{F}$ *tal que* $\forall x, y, z \in E$ *y* $\forall \lambda \in \mathbb{F}$

i) $\langle x, x\rangle > 0$ *si* $x \neq 0$.

ii) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ *donde la barra denota la conjugación compleja.*

iv) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Dado un espacio V con producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$, la norma inducida por el producto interior es $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

Proposición 1.3. *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con producto interior y $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Entonces:*

(1) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*

(2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Desigualdad del triángulo).*

(3) Si $\|y\| \leq \|\lambda x + y\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$.

Demostración. (1) Si $x = 0$, entonces $0 = |\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$. Si $x \neq 0$, entonces $\|x\| > 0$. Sea $\alpha = \langle x, y\rangle$. Calculamos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\lambda x + y\|^2 &= |\lambda|^2\|x\|^2 + \langle \lambda x, y\rangle + \langle y, \lambda x\rangle + \|y\|^2 \\ &= |\lambda|^2\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\alpha\lambda) + \|y\|^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sea $\lambda = -\dfrac{\overline{\alpha}}{\|x\|^2}$. Sustituyendo λ en (1.1) tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|\alpha|^2}{\|x\|^4}\|x\|^2 - 2\frac{|\alpha|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 \\ &= -\frac{|\alpha|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 \\ &\Longrightarrow \frac{|\alpha|^2}{\|x\|^2} \leq \|y\|^2 \\ &\Longrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Para demostrar (2) calculamos:

$$\begin{aligned} \langle x+y, x+y\rangle &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\big|\mathrm{Re}\langle x, y\rangle\big| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \text{ (por el inciso (1))} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

por lo tanto $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
(3) De (1.1) tenemos que $\|\lambda x+y\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2+2\mathrm{Re}(\alpha\lambda)+\|y\|^2$, en particular si $\lambda = -\dfrac{\bar{\alpha}}{\|x\|^2}$, obtenemos $\|\lambda x + y\|^2 = \|y\|^2 - \dfrac{|\alpha|^2}{\|x\|^2}$, mientras que por hipótesis $\|y\| \leq \|\lambda x+y\|$, por lo que se sigue fácilmente que $|\alpha| = \langle x, y\rangle = 0$. □

1.2. El adjunto de un operador

Definición 1.4. *(Espacio de Hilbert). Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{F}$ *con producto interior* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *tal que* $(H, \|\cdot\|)$ *con* $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ *es espacio de Banach.*
Si además existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ *tal que* $\overline{\{x_n\}}_{n\in\mathbb{N}} = H$*, entonces* H *es un espacio de Hilbert separable.*

Teorema 1.5. *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $E \subseteq H$ *convexo y cerrado. Entonces existe* $x_0 \in E$ *tal que* $\|x_0\| = \text{mín}\left\{\|y\| \,\middle|\, y \in E\right\}$.

Demostración. Sea $d = \text{ínf}\left\{\|y\| \,\middle|\, y \in E\right\}$. Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $d = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Notemos también que dados $m, n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in E$ (por convexidad). Entonces $\left\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\right\| \geq d \Longrightarrow \|x_n + x_m\|^2 \geq 4d^2$. Aplicando la igualdad del paralelogramo ($\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$) obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - \|x_n + x_m\|^2 \\ &\leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{m,n\to\infty}(2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2) = 4d^2$, entonces $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$. Tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como H es completo, existe $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in H$. Además, $x \in \overline{E}$ y E es cerrado, por lo tanto $x \in E$ y $\|x\| = d$ porque la norma es una función continua. □

Definición 1.6. *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $M \leq H$ *un subespacio. Definimos* $M^\perp = \{x \in H | \langle x, m\rangle = 0 \;\forall m \in M\}$.
Denotamos por $x \perp y$ *si* $\langle x, y\rangle = 0$ *con* $x, y \in H$.

Teorema 1.7. *Sea* H *espacio de Hilbert,* $M \leq H$ *subespacio cerrado. Entonces* $M^\perp$ *es un subespacio cerrado de* H *y* $H = M \oplus M^\perp$.

Demostración. Veamos que $M^\perp$ es un subespacio cerrado. Si $x, y \in M^\perp$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces $\langle x + \lambda y, m\rangle = \langle x, m\rangle + \lambda\langle y, m\rangle = 0\ \forall m \in M$ por lo que se sigue $x + \lambda y \in M^\perp$. Entonces $M^\perp$ es un subespacio. Para ver que es cerrado; si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ con $x_n \in M^\perp\ \forall n$, veamos que $x \in M^\perp$. Dada $m \in M$ se sigue $|\langle x - x_n, m\rangle| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\langle x, m\rangle|$, además por la Proposición 1.3 tenemos $|\langle x - x_n, m\rangle| \leq \|x - x_n\|\|m\|$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} |\langle x - x_n, m\rangle| = 0$. Entonces $|\langle x, m\rangle| = 0\ \forall m \in M$, así $x \in M^\perp$; por lo tanto $M^\perp$ es cerrado.
Ahora, si $y \in M^\perp \cap M$ se sigue $\langle y, y\rangle = 0$, por lo que $\|y\|^2 = 0$; es decir, $y = 0$, con lo cual $M^\perp \cap M = \{0\}$. Por último vamos a demostrar que $H = M \oplus M^\perp$; para ello basta ver que $H = M + M^\perp$, pues $M \cap M^\perp = \{0\}$. Sea $x \in H$ fija, y sea $E = x - M$. E es convexo y cerrado, entonces por el Teorema 1.5 existe $y \in E$ tal que $\|y\| = \text{mín}\left\{\|x - m\| \,\middle|\, m \in M\right\}$. Como $y \in E$, existe $\mu \in M$ tal que $y = x - \mu$. Por lo que $\|y\| \leq \|y + \underbrace{\mu - m}_{z}\| = \|y + z\|\ \forall z \in M$.
Dada $z \in M$ la ecuación anterior implica que $\|y\| \leq \|y + \lambda z\|\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$. Por la Proposición 1.3, tenemos que $\langle y, z\rangle = 0\ \forall z \in M$, por lo que $y \in M^\perp$. Como $y = x - \mu$, $x = y + \mu \in M^\perp + M$; por lo tanto $H = M^\perp \oplus M$. □

Teorema 1.8. ***(Representación de Riesz).*** *Existe una isometría entre H un espacio de Hilbert y H^* su espacio dual definida de la siguiente forma: Dada $y \in H$, definimos $\Lambda_y(x) = \langle x, y\rangle$. Entonces $\Lambda_y \in H^*$, $\|\Lambda_y\| = \|y\|$ y además la función $y \in H \longrightarrow \Lambda_y \in H^*$ es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $y \in H$, como el producto interior en H es lineal en la primer entrada, se sigue que Λ_y es lineal. Sea $x \in H$, por la Proposición 1.3 $|\Lambda_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, entonces $\Lambda_y \in H^*$ y $\|\Lambda_y\| \leq \|y\|$. Calculamos $\|\Lambda_y\| \geq \left\|\Lambda_y\left(\dfrac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \left|\left\langle \dfrac{y}{\|y\|}, y\right\rangle\right| = \|y\|$, por lo tanto $\|\Lambda_y\| = \|y\|$. Obteniendo así que Λ_y es una isometría. Falta ver que la función $y \longmapsto \Lambda_y$ es sobreyectiva. Sea $\Lambda \in H^*$. Veamos que existe $y \in H$ tal que $\Lambda = \Lambda_y$.
Es claro que $\text{Ker}\Lambda$ es un subespacio cerrado de H. Si $\Lambda = 0$ (la transformación lineal cero) es fácil ver $\text{Ker}\Lambda = H$ y hacemos $y = 0$ con lo cual $\Lambda = \Lambda_0$. Supongamos ahora que $\Lambda \neq 0$, entonces $(\text{Ker}\Lambda)^\perp \neq \{0\}$. Por el Teorema 1.7, $H = \text{Ker}\Lambda \oplus (\text{Ker}\Lambda)^\perp$. Existe $z \in (\text{Ker}\Lambda)^\perp$ con $z \neq 0$. Notemos que $\omega = \Lambda(x)z - \Lambda(z)x \in \text{Ker}\Lambda\ \forall x \in H$.
Entonces $0 = \langle \omega, z\rangle = \Lambda(x)\langle z, z\rangle - \Lambda(z)\langle x, z\rangle\ \forall x \in H$, de lo cual se sigue $\Lambda(x) = \langle x, \frac{\overline{\Lambda(z)}}{\|z\|^2} z\rangle\ \forall x \in H$. Haciendo $y = \frac{\overline{\Lambda(z)}}{\|z\|^2} z$ obtenemos que $\Lambda = \Lambda_y$. □

Definición 1.9. *Para todo espacio de Hilbert H, denotamos por*

$\mathcal{B}(H) := \mathcal{B}(H,H)$ al conjunto de operadores lineales acotados que van de H en H.

Lema 1.10. *Sea $A : H \to H$, con A lineal y definimos:*

$$M := \sup\{|\langle x, Ay\rangle| \big| \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Si $M < +\infty$ entonces $A \in \mathcal{B}(H)$ y $\|A\| = M$.

Demostración. Sea y con $\|y\| = 1$. Supongamos que $Ay \neq 0$, $\|Ay\|^2 = \langle Ay, Ay\rangle = \|Ay\|\langle \frac{1}{\|Ay\|}Ay, Ay\rangle \leq \|Ay\|M$, por lo que $\|Ay\| \leq M$ para toda $y \in H$ con $\|y\| = 1$. Entonces $\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \leq M$, por lo tanto $A \in \mathcal{B}(H)$ y $\|A\| \leq M$. Además, si $\|x\| = \|y\| = 1$ se sigue de la Proposición 1.3 que $|\langle x, Ay\rangle| \leq \|x\|\|Ay\| = \|Ay\|$. Además $\|Ay\| \leq \|A\|\|y\| = \|A\|$; por lo tanto $|\langle x, Ay\rangle| \leq \|A\|$, al tomar el supremo sobre y y x obtenemos $M \leq \|A\|$, así $M = \|A\|$. □

Definición 1.11. *Sea H un espacio de Hilbert. Una función $f : H \times H \to \mathbb{F}$ es sesquilineal si $\forall\, x, y, z \in H$ y $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ se tiene que:*

i) $f(x + \lambda y, z) = f(x, z) + \lambda f(y, z)$.

ii) $f(x, y + \lambda z) = f(x, y) + \overline{\lambda} f(x, z)$.

Decimos que f es acotada si $\sup\{|f(x, y)| \big| \|x\| = \|y\| = 1\} < \infty$.

Teorema 1.12. *Sean H un espacio de Hilbert y $f : H \times H \to \mathbb{F}$ una función sesquilineal acotada, entonces existe $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que $f(x, y) = \langle x, Ay\rangle\ \forall\, x, y \in H$ y $\|A\| = \sup\{|f(x, y)| \big| \|x\| = \|y\| = 1\}$.*

Demostración. Consideramos $\Lambda_{f,y}$ definida de la siguiente forma:

$$\Lambda_{f,y}(x) = f(x, y)$$

Por la Definición 1.11 $f(x, y)$ es lineal en la primer entrada, es decir, la función $\Lambda_{f,y} : H \to \mathbb{F}$ es lineal. A su vez definimos $M = \sup\{|f(x, y)| \big| \|x\| = \|y\| = 1\}$. Dada $x \in H$, calculamos:

$$\|\Lambda_{f,y}(x)\| = \big|f(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|})\big|\|x\|\|y\| \leq M\|x\|\|y\| = (M\|y\|)\|x\|,$$

se sigue entonces $\Lambda_{f,y} \in \mathcal{B}(H)$ y $\|\Lambda_{f,y}\| \leq M\|y\|$ por lo que $\Lambda_{f,y} \in H^*$. Por el teorema de representación de Riesz (Teorema 1.8) existe una única $Ay \in H$

tal que $\Lambda_{f,y}(x) = f(x,y) = \langle x, Ay\rangle\,\forall x, y \in H$. Para ver que A es lineal, notemos que:

$$\begin{aligned}\langle x, Ay + \lambda Az\rangle &= \langle x, Ay\rangle + \overline{\lambda}\langle x, Az\rangle \\ &= f(x,y) + \overline{\lambda} f(x,z) = f(x, y+\lambda z)\,\forall\, x \in H,\end{aligned}$$

por unicidad en el teorema de Riesz concluimos que $Ay + \lambda Az = A(y+\lambda z)$ (pues $A(y+\lambda z)$ es el único elemento de H tal que $\Lambda_{f,y+\lambda z}(x) = f(x, y+\lambda z) = \langle x, A(y+\lambda z)\rangle\,\forall x \in H$). Por definición tenemos que $\sup\{\langle x, Ay\rangle \mid \|x\| = \|y\| = 1\} = \sup\{|f(x,y)| \bigm| \|x\| = \|y\| = 1\} = M$; con lo cual, por el Lema 1.10 concluimos que $A \in \mathcal{B}(H)$ y $\|A\| = M$. □

Teorema 1.13. *(El adjunto de un operador). Dado $T \in \mathcal{B}(H)$, existe un único $T^* \in \mathcal{B}(H)$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle\,\forall\, x, y \in H$. Además $\|T\| = \|T^*\|$; a T^* se le llama el operador adjunto de T.*

Demostración. Sea $f(x,y) = \langle Tx, y\rangle$. Claramente f es sesquilineal y además, si $\|x\| = \|y\| = 1$ entonces por la Proposición 1.3 $|f(x,y)| \le \|Tx\|\|y\| = \|Tx\|$. Como $\|x\| = 1$ se tiene también que $\|Tx\| \le \|T\|$, por lo tanto f está acotada. Por el Teorema 1.12 existe una única $T^* \in \mathcal{B}(H)$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$. Por el Lema 1.10 concluimos:

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle| \bigm| \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, T^*y\rangle| \bigm| \|x\| = \|y\| = 1\} = \|T^*\|.\end{aligned}$$

□

Proposición 1.14. *Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ y $\alpha \in \mathbb{F}$. Entonces se cumple lo siguiente:*

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*, (ST)^* = T^*S^*, (T^*)^* = T, \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Demostración. $\langle STx, y\rangle = \langle x, (ST)^*y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle$ por lo que debido a la unicidad $(ST)^* = T^*S^*$.
Sea y con $\|y\| = 1$, calculamos:

$$\begin{aligned}\|Ty\|^2 = |\langle Ty, Ty\rangle| &= |\langle y, T^*Ty\rangle| \\ &\le \|y\|\|T^*Ty\| \quad \text{(por Proposición 1.3)} \\ &= \|T^*Ty\| \\ &\le \|T^*T\|.\end{aligned}$$

Entonces $\|Ty\| \leq \sqrt{\|T^*T\|}\,\forall y \in H$ con $\|y\| = 1$. Tomando el supremo sobre y obtenemos:

$$\|T\| \leq \sqrt{\|T^*T\|} \text{ o bien } \|T\|^2 \leq \|T^*T\|. \tag{1.2}$$

Por otro lado, para toda y con $\|y\| = 1$, $\|T^*Ty\| \leq \|T^*\|\|Ty\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$, tomando nuevamente el supremo sobre y tenemos que:

$$\|T^*T\| \leq \|T\|^2. \tag{1.3}$$

De (1.2) y (1.3) obtenemos $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
Las propiedades restantes son fáciles de comprobar. □

Proposición 1.15. *Para todo $A, B \in \mathcal{B}(H), \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.*

Demostración. $\|AB(x)\| \leq \|A\|\|B(x)\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|\,\forall x \in H$, por lo tanto $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. □

1.3. Álgebras de Banach

Definición 1.16. *(Álgebra de Banach) Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach que cuenta con una operación de multiplicación $\mathcal{A} \ni x, y \longrightarrow xy \in \mathcal{A}$ tal que $\forall x, y, z \in \mathcal{A}, \forall \alpha \in \mathbb{F}$ (con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{F} = \mathbb{C}$):*

1. $x(yz) = (xy)z$
2. $(x + y)z = xz + yz$
   $z(x + y) = zx + zy$
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$
4. $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$

$\mathcal{A}$ tiene unidad si existe $1 \in \mathcal{A}$ tal que $x1 = 1x = x\,\forall x \in \mathcal{A}$.
Si además existe $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $x \longmapsto x^*$, que cumple con las propiedades:

i) $(x^*)^* = x$

ii) $(x + \alpha y)^* = x^* + \overline{\alpha} y^*$

iii) $(xy)^* = y^* x^*$

iv) $\|x^*x\| = \|x\|^2$

decimos entonces que $\mathcal{A}$ *es un álgebra* C^**.*

Observación 1.17. *En lo que resta de este capítulo consideraremos* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ *y a menos que se diga lo contrario, supondremos que* $\mathcal{A}$ *tiene unidad.*

Ejemplo 1.18. *Para todo espacio de Hilbert* $H, \mathcal{B}(H)$ *es un álgebra* C^* *(*$*$ *es el adjunto).*

Definición 1.19. *Dada* $\mathcal{A}$ *un álgebra de Banach,* $x \in \mathcal{A}$ *es invertible si existe* $x^{-1} \in \mathcal{A}$ *tal que* $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$*.*

1.3.1. Fórmula del radio espectral

Teorema 1.20. *(Serie de Neumann) Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra de Banach. Supongamos que* $x \in \mathcal{A}$ *es invertible y que* $y \in \mathcal{A}$ *es tal que* $\|yx^{-1}\| < 1$*. Entonces* $x+y$ *es invertible y* $(x+y)^{-1} = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-yx^{-1})^n$*.*
Nota: Si $\|x^{-1}y\| < 1$ *entonces* $x+y$ *es invertible y además*
$(x+y)^{-1} = \big[\sum_{n=0}^{\infty}(-x^{-1}y)^n\big]x^{-1}$*.*

Demostración. Notemos que $x + y = (1 + yx^{-1})x$. Sea $c = yx^{-1}$, veamos que $1 + c$ es invertible. Proponemos $z = \sum_{n=0}^{\infty}(-c)^n$, que converge porque $\|c\| < 1$. Tenemos lo siguiente:

$$(1+c)z = (1+c)\sum_{n=0}^{\infty}(-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1-(-c))(-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-c)^n - \sum_{n=1}^{\infty}(-c)^n = 1,$$

entonces $(1 + c)^{-1} = z$; como $x + y = (1 + c)x$, se sigue que el inverso es de la forma $(x + y)^{-1} = x^{-1}(1 + c)^{-1} = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-yx^{-1})^n$. □

Corolario 1.21. *Sea* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $x \in \mathcal{A}$*. Supongamos que* $|\lambda| > \|x\|$*. Entonces* $x - \lambda 1$ *es invertible* $(\lambda 1 = \lambda)$ *y* $(x-\lambda)^{-1} = (-\lambda)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{\lambda})^n$*.*

Demostración. Como $|\lambda| > \|x\|$ entonces:

$$\|x(-\lambda 1)^{-1}\| = \left\|\frac{x}{\lambda}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\|x\| < 1,$$

además, $-\lambda 1$ es invertible. Usamos el Teorema 1.20 con $-\lambda 1$ en lugar de x y x en lugar de y para obtener finalmente que $(x-\lambda)^{-1} = (-\lambda)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{\lambda})^n$. □

Nota: Es claro que $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}(x-\lambda)^{-1}=0$.

Definición 1.22. *Dado $x\in\mathcal{A}$ definimos $\rho(x)=\{\lambda\in\mathbb{C}|x-\lambda$ es invertible$\}$ el conjunto resolvente de x.*

Definición 1.23. *Sean $\lambda\in\mathbb{C}$ y $r\in\mathbb{R}$. Definimos:*

$$B^{\mathbb{C}}(\lambda,r):=\{z\in\mathbb{C}\big||\lambda-z|<r\}.$$

Teorema 1.24. *Dado $x\in\mathcal{A},\rho(x)$ es un conjunto abierto y además la función $\rho(x)\ni\lambda\longrightarrow\dfrac{1}{x-\lambda}$ es continua.*

Demostración. Sea $\lambda\in\rho(x)$. Vamos a ver que $B^{\mathbb{C}}(\lambda,\|(x-\lambda)^{-1}\|^{-1})\subseteq\rho(x)$. Sea $\alpha\in B^{\mathbb{C}}(\lambda,\|(x-\lambda)^{-1}\|^{-1})$; entonces $x-\alpha=(x-\lambda)[1-(\alpha-\lambda)(x-\lambda)^{-1}]$. Como $\|(\alpha-\lambda)(x-\lambda)^{-1}\|<\|(x-\lambda)^{-1}\|^{-1}\|(x-\lambda)^{-1}\|=1$, por el Corolario 1.21 y un cambio de signo, se sigue que $1-(\alpha-\lambda)(x-\lambda)^{-1}$ es invertbile. Por lo tanto $x-\alpha$ es invertible, así $\rho(x)$ es un conjunto abierto.
Además, si $\beta\in B^{\mathbb{C}}(0,\frac{1}{2}\|(x-\lambda)^{-1}\|^{-1})$ tenemos $\left\|\beta\dfrac{1}{x-\lambda}\right\|<\frac{1}{2}$; por el Teorema 1.20 $x-\lambda+\beta$ es invertible. Calculamos:

$$(x-\lambda+\beta)^{-1}=(x-\lambda)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{-\beta}{x-\lambda}\big)^n$$

$$\Longrightarrow\|(x-\lambda+\beta)^{-1}-(x-\lambda)^{-1}\|\leq\|(x-\lambda)^{-1}\|\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{\beta}{x-\lambda}\right\|^n$$

$$\Big(\|\sum_{n=1}^{\infty}\omega^n\|=\|\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\omega^n\|\leq\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\|\omega^n\|\leq\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\|\omega\|^n=\sum_{n=1}^{\infty}\|\omega\|^n\Big)$$

$$\Longrightarrow\|(x-\lambda+\beta)^{-1}-(x-\lambda)^{-1}\|\leq\|(x-\lambda)^{-1}\|\|\frac{\beta}{x-\lambda}\|\sum_{n=0}^{\infty}\|\frac{\beta}{x-\lambda}\|^n$$

$$\leq|\beta|\|(x-\lambda)^{-1}\|^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq 2|\beta|\|(x-\lambda)^{-1}\|^2$$

$$\Longrightarrow\lim_{\beta\to0}\|(x-\lambda+\beta)^{-1}-(x-\lambda)^{-1}\|=0$$

por lo que la función $\rho(x)\ni z\longrightarrow(x-z)^{-1}$ es continua (localmente Lipschitz, es decir, para cada $z\in\rho(x)$ existe una vecindad donde la función satisface la condición de Lipschitz[1]). $\square$

[1] Libro [15], Definición 5.4.4, Página 163.

Definición 1.25. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Dado $x \in \mathcal{A}$, denotamos por $\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} | x - \lambda$ no es invertible$\} = \rho(x)^c$ al espectro de x.*

Teorema 1.26. *Para todo $x \in \mathcal{A}, \sigma(x)$ es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{A}$. Como $\rho(x) = \sigma(x)^c$ es un conjunto abierto, tenemos que $\sigma(x)$ es cerrado. Si elegimos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|x\|$, por el Corolario 1.21 se sigue que $\lambda \in \rho(x)$; teniendo así que $\sigma(x) \subseteq \overline{B^{\mathbb{C}}(0, \|x\|)}$. Por lo tanto $\sigma(x)$ es cerrado y acotado. Por el Teorema de Heine-Borel[2] $\sigma(x)$ es compacto. □

Lema 1.27. *Dado $x \in \mathcal{A}$ definimos $R_x(z) = R(z) := \dfrac{1}{x-z}, \forall z \in \rho(x)$ la resolvente de x. Entonces $R : \rho(x) \longrightarrow \mathcal{A}$ es analítica; es decir, derivable en todo $\rho(x)$ ($\lim\limits_{\omega \to z} \dfrac{R(\omega) - R(z)}{\omega - z} := R'(z)$ existe para toda $z \in \rho(x)$).*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $z \in \rho(x)$ tales que $B^{\mathbb{C}}(z, \varepsilon) \subseteq \rho(x)$ y $\omega \in \mathbb{C}$ con $|z - \omega| < \varepsilon$. Calculamos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega - z}\big(R(\omega) - R(z)\big) = \frac{1}{\omega - z}\Big(\frac{1}{x-\omega} - \frac{1}{x-z}\Big) \\
&= (\omega - z)^{-1}(x-\omega)^{-1}((x-z) - (x-\omega))(x-z)^{-1} \text{ (Identidad resolvente)} \\
&= (\omega - z)^{-1}(x-\omega)^{-1}(\omega - z)(x-z)^{-1} \\
&= (x-\omega)^{-1}(x-z)^{-1} = R(\omega)R(z) \underset{\omega \to z}{\longrightarrow} R(z)^2 \quad \text{(la resolvente es continua)}
\end{aligned}
$$

por lo tanto $R'(z)$ existe para toda $z \in \rho(x)$ y $R'(z) = R(z)^2$. □

Teorema 1.28. *Para todo $x \in \mathcal{A}, \sigma(x) \neq \emptyset$.*

Demostración. Por el Lema 1.27 $R(z)$ es analítica en $\rho(x)$. Además, por el Corolario 1.21, si $|\lambda| > \|x\|$ entonces $\lambda \in \rho(x)$; es decir $(\overline{B^{\mathbb{C}}(0, \|x\|)})^c \subseteq \rho(x)$. Es fácil ver que $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} R(\lambda) = 0$ (con series de Neumann). Dado $h \in \mathcal{A}^*$ (el dual de $\mathcal{A}$ como espacio de Banach; $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}(\mathcal{A}; \mathbb{C})$), entonces $h \circ R : \rho(x) \to \mathbb{C}$ y también

$$
\begin{aligned}
\lim_{\omega \to z} \frac{h\big(R(\omega)\big) - h\big(R(z)\big)}{\omega - z} &= \lim_{\omega \to z} h\Big(\frac{R(\omega) - R(z)}{\omega - z}\Big) = h\Big(\lim_{\omega \to z} \frac{R(\omega) - R(z)}{\omega - z}\Big) \\
&= h\big(R'(z)\big) \text{ (pues } h \text{ es continua).}
\end{aligned}
$$

[2]Libro [17], Teorema 2.41, Página 40.

Supongamos que $\sigma(x) = \emptyset$, entonces $\rho(x) = \mathbb{C}$, de lo cual se sigue $h \circ R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y como $\lim_{|\lambda| \to \infty} \|h(R(\lambda))\| \leq \lim_{|\lambda| \to \infty} \|h\| \|R(\lambda)\| = 0$, $h \circ R$ es acotada, por lo que es constante; más aún, como $(h \circ R)(\lambda) \longrightarrow 0$ cuando $|\lambda| \longrightarrow \infty$, entonces $h \circ R = 0$. Así $h(R(z)) = 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$, por el Teorema de Hahn-Banach[3], si $R(z) \neq 0$ existe $f \in \mathcal{A}^*$ tal que $f(R(z)) \neq 0$. Entonces $R(z) = 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$, lo que contradice el hecho de que $R(z)$ es invertible para toda z. Por lo tanto $\sigma(x) \neq \emptyset$. $\square$

Definición 1.29. *Dado $x \in \mathcal{A}$, definimos $r(x) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$ (el máximo se alcanza por la compacidad de $\sigma(x)$).*

Teorema 1.30. ***(Gelfand)**. Para todo $x \in \mathcal{A}, r(x) = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n}$.*

Demostración. Sean $x \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \sigma(x)$. A su vez, sea

$$A = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}.$$

Es fácil ver que

$$\lambda^n - x^n = (\lambda - x)A = A(\lambda - x),$$

como $\lambda - x$ no es invertible, $\lambda^n - x^n$ no es invertible, ya que si $\lambda^n - x^n = (\lambda - x)A$ es invertible, entonces existe B tal que $(\lambda - x)AB = 1$. Como $(\lambda - x)AB = B(\lambda - x)A = BA(\lambda - x) = 1$, entonces

$$BA(\lambda - x)AB = BA = AB$$

es decir, $AB = BA$ es el inverso de $\lambda - x$. Entonces $\lambda \notin \sigma(x)$ lo cual es una contradicción. Concluimos que

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(x) &\Longrightarrow \lambda^n \in \sigma(x^n) \\ &\Longrightarrow |\lambda^n| \leq \|x^n\| \quad (\text{pues } \sigma(x^n) \subseteq \overline{B^{\mathbb{C}}(0, \|x^n\|)}) \end{aligned}$$

por lo que $|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n} \quad \forall \lambda \in \sigma(x)$, teniendo así

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} \{|\lambda|\} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}.$$

Veamos ahora que $\limsup_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} \leq r(x)$. Sea $|\lambda| > \|x\|$; por el Corolario 1.21 tenemos que $\lambda - x$ es invertible, además

$$(\lambda - x)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n.$$

[3] Libro [11], Teorema III.6, Página 76.

Sean $h \in \mathcal{B}(\mathcal{A};\mathbb{C})$ y $f(\lambda) = (\lambda - x)^{-1}$, por lo tanto $h \circ f : \rho(x) \to \mathbb{C}$ es analítica. Por la linealidad y continuidad de h tenemos

$$h(f(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1}\lambda^{-n-1} \quad \text{donde } h(x^n) = a_{-n-1}.$$

Por unicidad, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1}\lambda^{-n-1}$ es la serie de Laurent[4] de $h(f(\lambda))$.
La serie es convergente en $D = \{z \in \mathbb{C} \big| \ \gamma < |z| < \Gamma\}$, donde

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n} \quad \text{y} \quad \Gamma = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},$$

además, existe al menos un punto en la frontera interior de D para el cual $h \circ f$ no es analítica. Como f es analítica en $\rho(x)$ y $r(x) = \sup_{\lambda\in\sigma(x)} \{|\lambda|\}$, se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n} \leq r(x).$$

Tenemos que existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (a_{-n}|\lambda|^{-n-1}) \leq M_1 \text{ para toda } \lambda \text{ tal que } |\lambda| > r(x),$$

luego $\dfrac{1}{|\lambda|} \sup \left| h\Big(\dfrac{x^n}{|\lambda|^n}\Big) \right| < +\infty \ \forall h \in \mathcal{B}(\mathcal{A};\mathbb{C})$. Por el Teorema de Banach-Steinhaus[5], $\left\{\dfrac{x^n}{|\lambda|^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathcal{A}$ por lo que existe $M > 0$ tal que $\dfrac{1}{|\lambda|^n}\|x^n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$, es decir

$$\begin{aligned}
&\|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda| M^{1/n} \ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda| \lim_{n\to\infty} M^{1/n} = |\lambda| \\
&\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda| \ \forall \lambda \text{ con } |\lambda| > r(x) \\
&\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq r(x).
\end{aligned}$$

[4]Libro [10], Páginas 182-184.
[5]Libro [11], Teorema III.9, Página 81.

Ya demostramos que $r(x) \leq \text{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n} \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$ $\leq \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq r(x)$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = r(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}$.
□

Definición 1.31. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Entonces:*

1. *x es autoadjunto si $x = x^*$.*
2. *x es normal si $x^*x = xx^*$.*
3. *x es unitario si $x^*x = 1 = xx^*$.*

Teorema 1.32. ***(Fórmula del radio espectral)*** *Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* y $x \in \mathcal{A}$ es normal. Entonces $\|x\| = r(x)$.*

Demostración. Si $y = y^*$ entonces $\|y^*y\| = \|y^2\| = \|y\|^2$, con lo cual $\|y^{2^n}\| = \|y\|^{2^n}$. Consideramos $y = x^*x$. Notemos que $y^* = x^*x = y$, entonces $\|y^{2^n}\| = \|x^*x\|^{2^n}$, además

$$\|(x^*x)^{2^n}\| = \|x^*x\|^{2^n} = \|x\|^{2^{n+1}} \tag{1.4}$$

$$\text{y } \|(x^*x)^{2^n}\| = \|(x^*)^{2^n} x^{2^n}\| = \|(x^{2^n})^* x^{2^n}\| = \|x^{2^n}\|^2 \tag{1.5}$$

De (1.4) y (1.5) obtenemos $\|x\|^{2^n} = \|x^{2^n}\|$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} (\|x\|^{2^n})^{1/2^n} = \|x\| = \lim_{m\to\infty} \|x^m\|^{1/m} = r(x),$$

concluyendo así que $r(x) = \|x\|$. □

Definición 1.33. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach. $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo si f es lineal y $f(xy) = f(x)f(y)\ \forall x, y \in \mathcal{A}$.*
f es isomorfismo si es biyectiva.
f es isometría si $\|f(x)\| = \|x\|\ \forall x \in \mathcal{A}$.

Teorema 1.34. *(Gelfand-Mazur). Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad $1_{\mathcal{A}}$ tal que todo elemento no cero de $\mathcal{A}$ es invertible, entonces $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{A}$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. A lo más uno de los siguientes es cero: $\lambda_1 - x, \lambda_2 - x$.
Como $\sigma(x) \neq \emptyset$, existe $\lambda(x) \in \sigma(x)$, es decir, $\lambda(x) - x = 0$ (de lo contrario $\lambda(x) - x$ es invertible). Por lo anterior tenemos que $\lambda(x)$ es único; $\sigma(x) =$

$\{\lambda(x)\}$. Definimos $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, por $x \longmapsto \lambda(x)$. Escribimos $\varphi(x) = \lambda(x)$. Veamos que φ es isomorfismo isométrico:
$\varphi(x) \in \mathbb{C}$ es el único número tal que $x = \varphi(x)1_{\mathcal{A}} \equiv \varphi(x)$, entonces

$$\varphi(x)\varphi(y)1_{\mathcal{A}} = \varphi(x)y = \varphi(x)y1_{\mathcal{A}} = \varphi(x)1_{\mathcal{A}}y = x1_{\mathcal{A}}y = xy$$
$$\Longrightarrow \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) \text{ por unicidad.}$$

De la misma forma vemos que φ es lineal. Entonces φ es un homomorfismo de álgebras, además $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ y $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$. También $\|x\| = \|\varphi(x)1_{\mathcal{A}}\| = |\varphi(x)|\|1_{\mathcal{A}}\| = |\varphi(x)|$ por lo tanto φ es una isometría y es inyectiva. Para ver que φ es sobreyectiva, $\varphi(\mathcal{A})$ es un subespacio de $\mathbb{C}$ que no es $\{0\}$, entonces $\varphi(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \Longrightarrow \varphi$ es sobreyectiva. □

1.3.2. Teorema del mapeo espectral

Definición 1.35. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y sea $J \subseteq \mathcal{A}$ un subespacio vectorial de $\mathcal{A}$. Decimos que J es un ideal si $\mathcal{A}J \subseteq J$ y $J\mathcal{A} \subseteq J$. J es un ideal propio si $J \neq \mathcal{A}$.*
J es maximal si J es propio y no existe otro ideal propio $\tilde{J}$ tal que $J \subsetneqq \tilde{J}$.

Proposición 1.36. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Entonces:*

a) Los ideales propios no contienen elementos invertibles.

b) Si J es un ideal propio, entonces $\bar{J}$ es un ideal propio.

Demostración. a) Sea J un ideal propio de $\mathcal{A}$. Si $a \in J$ es invertible, entonces $aa^{-1} = 1 \in J$, con lo cual $\mathcal{A} = J$, que es una contradicción.
b) Sea J un ideal propio, $x \in \bar{J}, a \in \mathcal{A}$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq J$ tal que $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow ax = \lim\limits_{n\to\infty} ax_n$ y $xa = \lim\limits_{n\to\infty} x_n a$, donde $ax_n, x_n a \in J$ para toda $n \in \mathbb{N}$ por lo que $\mathcal{A}\bar{J} \subseteq \bar{J}, \bar{J}\mathcal{A} \subseteq \bar{J}$.
Si $1 \in \bar{J}$, entonces existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq J$ que converge a 1. Por el Teorema 1.24 el conjunto de elementos invertibles es abierto y dado que 1 es invertible, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces a_n es invertible, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\bar{J}$ es un ideal propio. □

Teorema 1.37. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $J \subseteq \mathcal{A}$ un ideal propio. Entonces*

a) Existe un ideal propio maximal $\tilde{J}$ que contiene a J.

b) Si J es maximal entonces J es cerrado.

c) Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ es una subálgebra conmutativa de $\mathcal{A}$ entonces existe una subálgebra conmutativa $\tilde{\mathcal{C}}$ maximal entre las subálgebras conmutativas que contiene a $\mathcal{C}$; es decir, no existe un álgebra conmutativa $\mathcal{C}'$ tal que $\tilde{\mathcal{C}} \subsetneqq \mathcal{C}' \subsetneqq \mathcal{A}$.

Demostración. a) Sea $P = \{K | K$ es ideal propio y $J \subseteq K\}$; ordenamos a P con la inclusión: $K \leq K' \iff K \subseteq K'$. $J \in P$, por lo que P no es vacío. Sea $\{K_i | \, i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ una cadena en P; veamos que está acotada superiormente. Sea $I = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$, es fácil ver que $J \subseteq I$. Sean $a, b \in I$, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $a \in K_m$ y $b \in K_n$. Como $\{K_i | i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces $K_m \leq K_n$ ó $K_n \leq K_m$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $K_m \leq K_n$; como $a \in K_m$ entonces $a \in K_n$, así $a + b \in K_n$ y $ra, ar \in K_n$ para toda $r \in \mathcal{A}$ (a su vez $rb, br \in K_n$), por lo tanto I es un ideal de $\mathcal{A}$ que contiene a J. Para demostrar que I es distinto de $\mathcal{A}$ basta con observar que si $1 \in I$, entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $1 \in J_l$, es decir, J_l no sería ideal propio, lo cual es una contradicción. Tenemos entonces que toda cadena de P tiene una cota superior. Aplicando el Lema de Zorn, existe un ideal propio maximal $\tilde{J} \in P$; es decir, $J \subseteq \tilde{J}$ con $\tilde{J}$ un ideal propio maximal.
b) Es claro porque J es ideal propio maximal, como $\bar{J}$ es ideal propio y $J \subseteq \bar{J}$ entonces $J = \bar{J}$.
c) Análogo a la demostración de a). □

Definición 1.38. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $J \subseteq \mathcal{A}$ un ideal cerrado. Definimos una clase de equivalencia en $\mathcal{A}$ de la siguiente forma:*
$x \sim y$ si y sólo si $x - y \in J$.
Denotamos por $\mathcal{A}/J := \{[x] | x \in \mathcal{A}\}$.

Dotamos a $\mathcal{A}/J$ de una suma, un producto escalar y un producto como sigue:

$$[x] + [y] := [x + y]$$
$$\lambda[x] := [\lambda x]$$
$$[x][y] := [xy].$$

Dichas operaciones están bien definidas. Notemos además que $[0] = J, [1_{\mathcal{A}}] = 1_{\mathcal{A}/J}$ y si x es invertible entonces $[x^{-1}] = [x]^{-1}$.
Definimos $\left\|[x]\right\|_{\mathcal{A}/J} = \inf_{y\in J} \|x + y\|$.

Proposición 1.39. *$(\mathcal{A}/J, \|\cdot\|_{\mathcal{A}/J})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Es fácil ver que $\|[x]\| \geq 0$ y $\|\lambda[x]\| = |\lambda|\|[x]\|$.
Si $\|[x]\| = 0 = \inf_{y\in J}\|x+y\|$ entonces existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en J tal que $\lim_{n\to\infty}\|x+y_n\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = -x$. Como $-x \in \bar{J}$ y J es cerrado, se sigue que $[x] = [0]$. Para verificar la desigualdad del triángulo vemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|[x+y]\| &= \inf_{z\in J}\|x+y+z\| \\
&= \inf_{z_1,z_2\in J}\|x+y+z_1+z_2\| \\
&\leq \inf_{z_1,z_2\in J}(\|x+z_1\| + \|y+z_2\|) \\
&= \|[x]\| + \|[y]\|.
\end{aligned}$$

Para ver que es completo, tomemos una serie absolutamente sumable y demostraremos que es sumable. Sea $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\|[x_n]\| = M$ con M finito. Como $\|[x_n]\| = \inf_{y\in J}\|x_n+y\|$ se tiene que para toda $n\in\mathbb{N}$ existe $y_n \in J$ tal que $\big|\|[x_n]\| - \|x_n+y_n\|\big| < \frac{1}{2^n}$, de aquí:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\|x_n+y_n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\big|\|x_n+y_n\| - \|[x_n]\|\big| + \sum_{n\in\mathbb{N}}\|[x_n]\| < \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n} + M < \infty.$$

Como $\mathcal{A}$ es completo, entonces $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} x_n + y_n$ existe, al cual lo denotaremos por x. Se sigue que:

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m}[x_n] - [x]\Big\| = \Big\|\Big[\sum_{n=1}^{m} x_n + y_n - x\Big]\Big\| \leq \Big\|\sum_{n=1}^{m} x_n + y_n - x\Big\|,$$

al tomar el límite cuando m tiende a infinito esto último converge a cero. Por lo tanto $[x] = \sum_{n=1}^{\infty}[x_n]$. □

Proposición 1.40. *$\mathcal{A}/J$ es un álgebra de Banach.*

Demostración. Sean $[x], [z] \in \mathcal{A}/J$ y sean $y_x, y_z \in J$ tales que

$\big|\|[x]\| - \|x + y_x\|\big| < \varepsilon, \big|\|[z]\| - \|z + y_z\|\big| < \varepsilon$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\|[x][z]\| &= \|[x + y_x][z + y_z]\|_{\mathcal{A}/J} \\
&\leq \|(x + y_x)(z + y_z)\|_{\mathcal{A}} \\
&\leq \|x + y_x\|_{\mathcal{A}} \|z + y_z\|_{\mathcal{A}} \\
&= (\|x + y_x\| - \|[x]\| + \|[x]\|)(\|z + y_z\| - \|[z]\| + \|[z]\|) \\
&\leq (\varepsilon + \|[x]\|)(\varepsilon + \|[z]\|) \quad \forall \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

por lo tanto $\|[x][z]\| \leq \|[x]\|\|[z]\|$.
Para ver que $\|[1]\| = 1$ basta demostrar $1 \leq \|[1]\|$, calculamos:

$$\|[1][1]\| \leq \|[1]\|\|[1]\| \Longrightarrow \frac{\|[1]\|}{\|[1]\|} \leq \|[1]\| \Longrightarrow 1 \leq \|[1]\|.$$

□

Teorema 1.41. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa y sea Δ el conjunto de homomorfismos complejos. Entonces:*

(a) Todo ideal maximal en $\mathcal{A}$ es el núcleo de un elemento en Δ.

(b) Dado $h \in \Delta, h^{-1}(0)$ es un ideal maximal.

(c) $x \in \mathcal{A}$ es invertible si y sólo si no existe un ideal maximal J con $x \in J$.

(d) Dado $x \in \mathcal{A}$, $\sigma(x) = \{h(x) | h \in \Delta\}$.

Demostración. (a) Sea J un ideal maximal de $\mathcal{A}$. Consideremos la función: $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/J$ como $\pi(x) = [x]$.
Sea $[x] \in \mathcal{A}/J$ tal que $[x] \neq [0]$. Veamos $[x]$ es invertible. Consideremos el siguiente conjunto $\tilde{J} := \{ax + y \,|\, a \in \mathcal{A}, y \in J\} \Rightarrow \tilde{J}$ es un ideal y $J \subsetneq \tilde{J}$; como J es maximal, $\tilde{J} = \mathcal{A}$ por lo que existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $1 = ax + y$, se sigue $[1] = [ax] = [a][x] \Longrightarrow [a] = [x]^{-1}$. Entonces, x es invertible si $x \notin J$, es decir, todos los elementos no cero de $\mathcal{A}/J$ son invertibles. Por el teorema de Gelfand-Mazur existe un isomorfismo $\Phi : \mathcal{A}/J \to \mathbb{C}$. Tomamos $h = \Phi \circ \pi$; entonces $h \in \Delta$ y $h^{-1}(0) = \pi^{-1}(0)$.
(b) Sea $h \in \Delta$. Si $y \in h^{-1}(0)$ entonces, $\forall x \in \mathcal{A} \quad h(xy) = h(x)h(y) = 0$, por lo tanto $h^{-1}(0)$ es ideal.
Supongamos ahora que $u \in \mathcal{A}$ y $v \notin h^{-1}(0)$. Tomamos $w = u - \frac{h(u)}{h(v)}v$, entonces $h(w) = 0 \Rightarrow w \in h^{-1}(0)$ y $u = \frac{h(u)}{h(v)}v + w$; por lo que cualquier ideal

que contenga a un elemento $v \notin h^{-1}(0)$ y a $h^{-1}(0)$ tiene que contener a todo $\mathcal{A}$.
(c)Por la Proposición 1.36, si x es invertible entonces x no está en ningún maximal. Supongamos que x no es invertible. Sea $\tilde{J} = \{ax \,|\, a \in \mathcal{A}\}$, entonces $1 \notin \tilde{J}$, es decir, $\tilde{J}$ es un ideal propio. Por el Teorema 1.37 existe un ideal maximal J tal que $\tilde{J} \subseteq J$ con $x \in J$.
(d)

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(x) &\Leftrightarrow x - \lambda \text{ no es invertible} \\
&\Leftrightarrow \text{existe } J \text{ ideal maximal tal que } x - \lambda \in J \quad \text{(por (c))} \\
&\Leftrightarrow \exists h \in \Delta \text{ tal que } x - \lambda \in h^{-1}(0) \qquad \text{(por (a))} \\
&\Leftrightarrow \exists h \in \Delta \text{ tal que } h(x) = \lambda h(1) = \lambda \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \{h(x) | h \in \Delta\}.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.42. *Sea C un álgebra conmutativa C^*, entonces*

(a) $1^* = 1$.

(b) $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}, \sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)}$ *(donde la barra denota la conjugación compleja).*

(c) Si x es unitario, entonces $\sigma(x) \subseteq \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \big| \, |z| = 1\}$.

(d) Si x es autoadjunto, entonces $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.

(e) Si h es un homomorfismo de álgebras C^* a valores en $\mathbb{C}$, entonces $h(x^*) = \overline{h(x)}$.

Demostración. (a)

$$\begin{aligned}
&1x = x1 = x \\
&\Rightarrow x^*1^* = 1^*x^* = x^* \quad \forall x^* \in C \\
&\Rightarrow y1^* = 1^*y = y \quad \forall y \in C \\
&\Rightarrow 1^* = 1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(xx^{-1})^* &= (x^{-1}x)^* = 1^* = 1 \\
&\Longrightarrow (x^{-1})^*x^* = x^*(x^{-1})^* = 1 \\
&\Longrightarrow (x^{-1})^* = (x^*)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(x^*) &\Leftrightarrow x^* - \lambda \text{ no es invertible}\\ &\Leftrightarrow x - \bar{\lambda} \text{ no es invertible}\\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(x)\\ &\Leftrightarrow \lambda \in \overline{\sigma(x)}\end{aligned}$$

(c) Sea $x \in C$ unitario. Para todo $\lambda \neq 0$ es fácil ver que se cumple $x^{-1} - \lambda^{-1} = x^{-1}(\lambda - x)\lambda^{-1}$, entonces $\lambda \in \rho(x) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \rho(x^{-1})$ por lo que se sigue inmediatamente que $\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(x^{-1})$; concluimos que $\sigma(x^{-1}) = [\sigma(x)]^{-1}$. Como x es unitario, $xx^* = x^*x = 1$, así $1 = \|xx^*\| = \|x\|^2$, por lo que $\|x\| = 1$; también:

$$\begin{aligned}1 &= \|x^{-1}xx^*(x^*)^{-1}\|\\ &= \|x^{-1}(x^*)^{-1}\| &&\text{(porque } x \text{ es unitario)}\\ &= \|x^{-1}(x^{-1})^*\| &&\text{(por (b))}\\ &= \|x^{-1}\|^2\end{aligned}$$

es decir, $\|x^{-1}\| = 1$. Sea $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(x^{-1})$, además, $|\lambda| \leq \|x\| = 1$ y $|\lambda^{-1}| \leq \|x^{-1}\| = 1$. Si $|\lambda| < 1$ se sigue que $|\lambda^{-1}| > 1$ lo que es una contradicción (ocurre lo mismo si $|\lambda^{-1}| < 1$); por lo tanto $|\lambda| = |\lambda^{-1}| = 1$.
(d) Sea $x \in C$ autoadjunto. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es tal que $|\alpha| > \|x\|$ entonces, por el Corolario 1.21 $\alpha \in \rho(x)$. Sea $\alpha \in \sigma(x)$, tenemos que $|\alpha| \leq \|x\|$. Vamos a ver que $\mathrm{Im}\alpha = 0$. Supongamos que $\mathrm{Im}\alpha \neq 0$.
Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \neq 0$ y $|\lambda|\|x\| < 1$. Definimos $U = (1+i|\lambda|x)^{-1}(1-i|\lambda|x)$, así $U^* = (1 - i|\lambda|x)^{-1}(1 + i|\lambda|x)$; como $UU^* = U^*U = 1$ se sigue que $\sigma(U) \subseteq \mathbb{S}^1$ (por (c)). Calculamos:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1-i|\lambda|\alpha}{1+i|\lambda|\alpha}\Big|^2 &= \Big(\frac{1-i|\lambda|\alpha}{1+i|\lambda|\alpha}\Big)\overline{\Big(\frac{1-i|\lambda|\alpha}{1+i|\lambda|\alpha}\Big)}\\ &= \frac{(1+|\lambda|\mathrm{Im}\alpha)^2 + (\mathrm{Re}\alpha|\lambda|)^2}{(1-|\lambda|\mathrm{Im}\alpha)^2 + (\mathrm{Re}\alpha|\lambda|)^2} \neq 1.\end{aligned}$$

Por (c), $\sigma(U) \subseteq \mathbb{S}^1$, entonces $\dfrac{1-i|\lambda|\alpha}{1+i|\lambda|\alpha} \in \rho(U)$. Además:

$$\frac{1-i|\lambda|\alpha}{1+i|\lambda|\alpha} - U = \frac{1-i|\lambda|\alpha}{1+i|\lambda|\alpha} - \frac{1-i|\lambda|x}{1+i|\lambda|x} = (1+i|\lambda|\alpha)^{-1}2i|\lambda|(x-\alpha)(1+i|\lambda|x)^{-1},$$

lo que implica que $(x - \alpha)$ es invertible (es decir, $\alpha \in \rho(x)$), lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathrm{Im}\alpha = 0$; es decir, $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.

(e) Sean $x \in C$ y $h : C \to \mathbb{C}$ un homomorfismo. Escribimos $x = \frac{x+x^*}{2} + i(\frac{1}{2i}(x - x^*))$. Dado que h es un homomorfismo tenemos que:

$$h(x) = h\Big(\frac{x + x^*}{2}\Big) + ih\Big(\frac{1}{2i}(x - x^*)\Big)$$

Como $\frac{x+x^*}{2}$ es autoadjunto, por (d) tenemos que $\sigma(\frac{x+x^*}{2}) \subseteq \mathbb{R}$. Por el Teorema 1.41 $h(\frac{x+x^*}{2}) \in \sigma(\frac{x+x^*}{2})$, es decir, $h(\frac{x+x^*}{2}) \in \mathbb{R}$. De manera similar se demuestra $h(\frac{1}{2i}(x - x^*)) \in \mathbb{R}$. Calculamos:

$$\begin{aligned} h(x^*) &= h\Big(\Big[\frac{x + x^*}{2} + i(\frac{1}{2i}(x - x^*))\Big]^*\Big) \\ &= h\Big(\frac{x + x^*}{2}\Big) - ih\Big(\frac{1}{2i}(x - x^*)\Big) \end{aligned}$$

Dado que $h(\frac{x+x^*}{2}), h(\frac{1}{2i}(x - x^*)) \in \mathbb{R}$, entonces:

$$h(x^*) = h\Big(\frac{x + x^*}{2}\Big) - ih\Big(\frac{1}{2i}(x - x^*)\Big) = \overline{h(x)}.$$

□

Lema 1.43. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $D \subseteq \mathcal{A}$ un conjunto cerrado bajo $*$ (es decir, si $x \in D$, entonces $x^* \in D$) tal que todos los elementos de D conmutan. Entonces existe un álgebra C^* conmutativa maximal $CM(D)$ contenida en $\mathcal{A}$ tal que $D \subseteq CM(D)$.*

Demostración. Dado un polinomio en n variables $P(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum C_{i_1,i_2,\dots,i_n} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \dots z_n^{l_n}$, definimos

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) := \sum C_{i_1,i_2,\dots,i_n} a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_n^{l_n} \quad \forall a_j \in \mathcal{A},$$

a su vez, definimos

$$C(D) := \overline{\{P(a_1, \dots, a_n) | a_1, \dots, a_n \in D \text{ y } P \text{ es polinomio complejo}\}}.$$

Es fácil ver que $C(D)$ es una subálgebra conmutativa de $\mathcal{A}$; por el Teorema 1.37 existe una subálgebra conmutativa $CM(D)$ maximal que contiene a $C(D)$. Como $D \subseteq C(D)$ se sigue $D \subseteq CM(D)$. □

Definición 1.44. *Sea C un álgebra C^* y $\mathcal{A} \subseteq C$ una subálgebra C^* conmutativa maximal. Dado $x \in \mathcal{A}$ definimos:*

$$\rho_{\mathcal{A}}(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} | x - \lambda \text{ es invertible en } \mathcal{A}\}.$$

Así, $\rho_{\mathcal{A}}(x)^c = \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} | x - \lambda \text{ no es invertible en } \mathcal{A}\}$.

Lema 1.45. *Supongamos que C es un álgebra C^* y $\mathcal{A} \subset C$ un álgebra C^* conmutativa maximal con $1 \in \mathcal{A}$. Entonces, $\forall\, x \in \mathcal{A} \quad \sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_C(x)$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{A}$, claramente $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \supseteq \sigma_C(x)$. Para demostrar la otra contención basta probar que $\rho_C(x) \subseteq \rho_{\mathcal{A}}(x)$. Sea $\lambda \in \rho_C(x)$; entonces $x-\lambda$ es invertible en C, por lo que existe $y \in C$ tal que $(x-\lambda)y = y(x-\lambda) = 1$. Dado $z \in \mathcal{A}$, $(x-\lambda)z \in \mathcal{A}$; es decir, $y^{-1}z \in \mathcal{A}$ (pues $y^{-1} = (x-\lambda)$) . Vamos a demostrar que $yz = zy$ y $y^*z = zy^*$. Calculamos:

$$zy - yz = y[y^{-1}z - zy^{-1}]y$$

y como $\mathcal{A}$ es conmutativa, se tiene que $y^{-1}z - zy^{-1} = 0$, por lo tanto $yz = zy$. Por otro lado, como $z \in \mathcal{A}$, entonces $z^* \in \mathcal{A}$; a su vez $y^{-1}z^* \in \mathcal{A}$, por el Lema 1.42 $(y^{-1}z^*)^* = z(y^*)^{-1} \in \mathcal{A}$. Tenemos:

$$y^*z - zy^* = y^*[z(y^*)^{-1} - (y^*)^{-1}z]y^*$$

concluyendo así que $y^*z - zy^* = 0$. Sea $D = A \cup \{y, y^*\}$, el cual tiene la propiedad de que $D = D^*$ y todos sus elementos conmutan; entonces, por el Lema 1.43 existe $\mathcal{A}'$ álgebra C^* conmutativa maximal tal que $D \subseteq \mathcal{A}' \subsetneq C$ lo que implica $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \subsetneq C$, como $\mathcal{A}$ es maximal, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, por lo tanto $y \in \mathcal{A}$, es decir, $(x-\lambda)$ es invertible en $\mathcal{A}$, así $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_C(x)$. □

Teorema 1.46. Mapeo Espectral
Sean C un álgebra C^* y $x \in C$ un elemento normal. Sea P un polinomio en dos variables $P(z_1, z_2) = \sum C_{ij} z_1^i z_2^j$. Entonces $P(x, x^*) \in \mathbb{C}$ es normal y $\sigma\big(P(x, x^*)\big) = \{P(\lambda, \overline{\lambda}) | \lambda \in \sigma(x)\}$.

Demostración. Es fácil ver que $P(x, x^*)$ es normal. Sea $\mathscr{D} = \{1, x, x^*\}$, el cual es conmutativo y cumple que $\mathscr{D} = \mathscr{D}^*$; entonces por el Lema 1.43 existe un álgebra conmutativa maximal $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathscr{D})$ que contiene a $\mathscr{D}$. Como $1 \in D$ entonces $1 \in \mathcal{A}$; además por el Lema 1.45, $\sigma_{\mathcal{A}}\big(P(x, x^*)\big) = \sigma_C\big(P(x, x^*)\big)$.

Calculamos:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{A}}\big(P(x,x^*)\big) &= \big\{h\big(P(x,x^*)\big)|h\in\Delta\big\} && \text{(por el Teorema 1.41)}\\
&= \big\{P\big(h(x),h(x^*)\big)|h\in\Delta\big\}\\
&= \big\{P\big(h(x),\overline{h(x)}\big)|h\in\Delta\big\} && \text{(por el Lema 1.42)}\\
&= \big\{P(\lambda,\overline{\lambda})|\lambda\in\sigma_C(x)\big\} && \text{(por Lema 1.45 y Teorema 1.41).}
\end{aligned}$$

□

1.4. Cálculo funcional para funciones continuas y elementos normales en un álgebra C^*

Teorema 1.47. (Cálculo funcional) *Sean C un álgebra C^* y $x\in C$ un elemento normal. Sea $C(\sigma(x);\mathbb{C})$ el conjunto de funciones continuas de $\sigma(x)$ en $\mathbb{C}$. Entonces existe un homomorfismo isométrico*

$$\Phi : C(\sigma(x);\mathbb{C})\to C$$

$$f\longmapsto f(x)$$

tal que para todo polinomio de dos variables $P(z_1,z_2)=\sum C_{ij}z_1^iz_2^j$ y f de la forma $f(z)=P(z,\bar z)$, tenemos que $f(x)=P(x,x^*)$.

Demostración. Por el Teorema 1.32, para todo elemento normal $y\in C$ se tiene $\|y\|=\sup\{|\lambda|\big|\lambda\in\sigma(y)\}$. Entonces, dado un polinomio en dos variables $P(z_1,z_2)=\sum C_{ij}z_1^iz_2^j$ tal que $f(z)=P(z,\bar z)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|f(x)\| = \|P(x,x^*)\| &= \sup\big\{|\alpha|\,\big|\alpha\in\sigma\big(P(x,x^*)\big)\big\} && \text{(por Teorema 1.32)}\\
&= \sup\big\{|P(\lambda,\overline{\lambda})|\big|\lambda\in\sigma(x)\big\} && \text{(por Teorema 1.46)}\\
&= \sup\big\{|f(\lambda)|\,\big|\lambda\in\sigma(x)\big\}\\
&= \|f\|_{C(\sigma(x);\mathbb{C})}. && (1.6)
\end{aligned}$$

Sean $\mathcal{P}=\{f|\,f(z)=P(z,\overline{z})$ con P un polinomio complejo en 2 variables$\}$ y $\Phi':\mathcal{P}\to C$ tal que $\Phi'(f)=\sum C_{ij}x^i(x^*)^j=P(x,x^*)$.
Entonces $\mathcal{P}$ es un álgebra de funciones que satisface (1.6), contiene a 1 y separa puntos, por el teorema de Stone-Weierstrass[6] $\mathcal{P}$ es denso en $C(\sigma(x);\mathbb{C})$.

[6] Libro [11], Teorema IV.10, Página 102.

Dada una función continua $g \in C(\sigma(x);\mathbb{C})$, existe una sucesión en $\mathcal{P}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $g = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Por (1.6) tenemos que:

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\|_{C(\sigma(x);\mathbb{C})} = 0 = \lim_{m,n\to\infty} \|\Phi'(f_m) - \Phi'(f_n)\|$$

con lo cual $(\Phi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en C. Definimos $\Phi(g) := \lim\limits_{n\to\infty} \Phi'(f_n)$.

- Φ es isometría:
  $\|\Phi(f)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi(f_n)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{C(\sigma(x);\mathbb{C})} = \|f\|_{C(\sigma(x);\mathbb{C})}$.
- Φ es homomorfismo: Si $f, g \in C(\sigma(x);\mathbb{C})$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $\mathcal{P}$ tales que $f_n \to f, g_n \to g$ en $C(\sigma(x);\mathbb{C})$ entonces

  $$f_n g_n \to fg, \qquad \alpha f_n + g_n \to \alpha f + g, \qquad \Phi'(f_n g_n) \to \Phi(fg).$$

  Además $\Phi'(f_n g_n) = \Phi'(f_n)\Phi'(g_n) \to \Phi(f)\Phi(g)$. De la misma forma vemos que $\Phi(\alpha f + g) = \alpha\Phi(f) + \Phi(g)$, $\Phi(\overline{f}) = (\Phi(f))^*$ y $\Phi(1) = 1$.

□

1.5. Resoluciones de la identidad

1.5.1. Teoría de la medida

Definición 1.48. *Sea Ω un conjunto. Definimos el conjunto potencia de Ω como el conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ formado por todos los subconjuntos de Ω; es decir, $\omega \in \mathcal{P}(\Omega)$ si $\omega \subseteq \Omega$.*

Definición 1.49. *Dado un conjunto Ω, una σ-álgebra S de conjuntos de Ω es un subconjunto de $\mathcal{P}(\Omega)$ tal que:*

i) $\Omega \in S$

ii) *Si* $E, F \in S$ *entonces* $E \setminus F \in S$

iii) *Si* $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S$, *entonces* $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i \in S$

Definición 1.50. *Sea Ω un conjunto y S una σ-álgebra. Una medida positiva es una función $\mu : S \longrightarrow [0,\infty]$ tal que:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S$ *con* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$*, entonces* $\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$

(si $\mu : S \longrightarrow [0,\infty)$ *entonces ii)⇒i))*

Si $\mu : S \to [0,\infty)$*, decimos que* μ *es una medida finita.*

Definición 1.51. *Una pareja* (Ω, S) *en donde* Ω *es un conjunto y* S *una* σ*-álgebra en* $\mathcal{P}(\Omega)$ *se denomina espacio medible.*

Definición 1.52. *Si* Ω *es un espacio topológico con topología* τ*, definimos la* σ*-álgebra de Borel generada por la topología de* Ω *(denotada por* $S(\tau)$*) como la* σ*-álgebra más chica que contiene a* τ*.*

Definición 1.53. *Sean* $\Omega = \mathbb{C}$ *y* $\tau \subset \mathcal{P}(\mathbb{C})$ *la topología usual de* $\mathbb{C}$*, definimos* $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ *como la* σ*-álgebra de Borel generada por* τ*.*

Definición 1.54. *El arreglo* (Ω, S, μ) *en donde* Ω *es un conjunto,* S *una* σ*-álgebra en* $\mathcal{P}(\Omega)$ *y* μ *es una medida, se denomina espacio de medida y a los elementos de* S *se les llama conjuntos medibles.*

Definición 1.55. *Sean* (Ω, S) *y* (Ω', S') *espacios medibles. Una función* $f : (\Omega, S) \to (\Omega', S')$ *es medible si* $f^{-1}(u) \in S \quad \forall u \in S'$*.*

Definición 1.56. *Sea* (Ω, S) *un espacio medible. Una función* $s : \Omega \to \mathbb{C}$ *es simple si es medible y toma un número finito de valores.*
Su representación canónica se define como sigue: $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\omega_i}$*, en donde* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = s(\Omega)$ *y* $\omega_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$*, por lo que se sigue fácilmente que* $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$ *y* $\bigcup_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega$.

Definición 1.57. *Sea* (Ω, S, μ) *un espacio de medida en donde* Ω *tiene una topología* τ *y* $S = S(\tau)$*. Suponemos que* μ *es positiva. Decimos que* μ *es regular si:*

1) $\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) | E \subseteq U, U \in \tau\}$.

2) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) | K \subseteq E, K \text{ compacto}\}$.

Definición 1.58. *Sea (Ω, S) un espacio medible. Una medida compleja $\mu : S \to \mathbb{C}$ es una función que cumple:*

i) Converge absolutamente; es decir, $\big(\sum_i |\mu(\omega_i)| < +\infty\big)$.

ii) $\mu\big(\bigcup_i \omega_i\big) = \sum_i \mu(\omega_i), \omega_i \in S, \omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$.

Definición 1.59. Resolución de la Identidad
Sea (Ω, S) un espacio medible y H un espacio de Hilbert. Una resolución de la identidad es una función

$$E : S \to \mathcal{B}(H)$$

que cumple con las siguientes propiedades:

1) $E(\emptyset) = 0,\ E(\Omega) = Id_H$ *(la identidad en H)*

2) $E(\omega)$ *es autoadjunto* $\forall \omega \in S$

3) $E(\omega \cap \tilde{\omega}) = E(\omega)E(\tilde{\omega})\ \forall \omega, \tilde{\omega} \in S$

4) Dada una sucesión disjunta $(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset S$ y $x \in H$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \|E(\omega_i)x\|^2 < +\infty \quad y \quad \sum_i E(\omega_i)x = E\big(\bigcup_i \omega_i\big)x$$

Notemos que (3) y (4) implican que $\mu_{x,y}(\omega) := \langle x, E(\omega)y\rangle$ es una medida compleja $\forall x \forall y \in H$. Más aún, como $\langle x, E(\omega)x\rangle = \|E(\omega)x\|^2$ entonces $\mu_{x,x}$ es una medida positiva.

Observación 1.60. *En el caso que Ω es un espacio topológico con topología τ, supondremos que $S = S(\tau)$ y que $\mu_{x,x}$ de la Definición 1.59 es regular para todo $x \in H$.*

Definición 1.61. *Sea (Ω, S, μ) un espacio de medida. Definimos la* ***variación*** *de μ como*

$$|\mu|(E) := \sup\big\{\sum_{i \in \mathbb{N}} |\mu(E_i)| \,\big|\, E = \cup_i E_i \text{ con } E_i \text{ medible } \forall i, E_i \cap E_j = \emptyset\big\}.$$

Teorema 1.62. *Sea (Ω, S, μ) un espacio de medida, en donde μ es una medida compleja, entonces $|\mu|$ es una medida positiva y $|\mu|(\omega) \geq |\mu(\omega)| \quad \forall \omega \in S$.*

Demostración. Como $\mu : S \to \mathbb{C}$, por la descomposición de Jordan[7] aplicada a la parte real y la parte imaginaria de μ respectivamente, existen medidas positivas finitas $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ tales que $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$. Entonces

$$|\mu|(\omega) = \sup_{\substack{\omega = \bigcup \omega_i \\ \omega_i \cap \omega_j = \emptyset}} \sum |\mu(\omega_i)| \leq \sup_{\substack{\omega = \bigcup \omega_i \\ \omega_i \cap \omega_j = \emptyset}} \sum_{j=1}^{4} \sum_i \mu_j(\omega_i) = \sum_{j=1}^{4} \mu_j(\omega) < +\infty,$$

por lo tanto, $|\mu|$ es finita. Para ver que es σ-aditiva, sea $\omega \in S$ y $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que $\omega = \bigcup_i A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Sea también $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una partición de ω con $\omega_j \in S\ \forall j$. Calculamos:

$$\sum_j |\mu(\omega_j)| = \sum_j \Big| \sum_i \mu(\omega_j \cap A_i) \Big| \leq \sum_i \sum_j |\mu(\omega_j \cap A_i)| \leq \sum_i |\mu|(A_i)$$

tomando el supremo sobre las particiones (ω_j) vemos que $|\mu|(\omega) \leq \sum_i |\mu|(A_i)$. Probaremos ahora $\displaystyle\sum_i |\mu|(A_i) \leq |\mu|(\omega)$. Sea $N \in \mathbb{N}$, para cada $i \leq N$ sea $(\omega_j^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ una partición de A_i.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in \mathbb{N}} |\mu(\omega_j^{(i)})| \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in \mathbb{N}} |\mu(\omega_j^{(i)})| + \Big| \mu\Big(\bigcup_{i > N} A_i \Big) \Big| \leq |\mu|(\omega)$$

pues $\{\omega_j^{(i)}\} \cup \Big\{ \displaystyle\bigcup_{i>N} A_i \Big\}$ es partición de ω. Tomando el supremo sobre las particiones $(\omega_j^{(i)})$ obtenemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |\mu|(A_i) \leq |\mu|(\omega)$; de manera que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i) \leq |\mu|(\omega)$, concluyendo $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i) = |\mu|(\omega)$. □

Definición 1.63. *Una medida compleja μ es regular si $|\mu|$ es regular.*

Definición 1.64. [Rango esencial]
Sean (Ω, S) un espacio medible, $E : S \to \mathcal{B}(H)$ una resolución de la identidad y $f : (\Omega, S) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ una función medible, donde $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ es la σ-álgebra de Borel

[7] Libro [4] Teorema 10.9, Página 127.

en los números complejos $\mathbb{C}$. Sea $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base para la topología de $\mathbb{C}$. Definimos

$$V_f := \bigcup\{D_i | E\big(f^{-1}(D_i)\big) = 0\}.$$

V_f^c es el ***rango esencial*** *de f (es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a $f(p)$ para casi todo p).*

Nota 1.65. *Si $U_f = \bigcup\{U|\ U$ es abierto, $0 \notin U, E(f^{-1}(U)) = 0\}$, entonces $V_f \cup \{0\} = U_f \cup \{0\}$.*

Demostración. Primero veamos que $U_f \subseteq V_f \cup \{0\}$. Si U es un conjunto abierto y $E(f^{-1}(U)) = 0$, entonces existe $J \subset \mathbb{N}$ tal que $U = \bigcup_{j\in J} D_j$.

$$\begin{aligned}\|E(f^{-1}(D_j))x\|^2 &= \langle E(f^{-1}(D_j))x, E(f^{-1}(D_j))x\rangle \\ &= \langle E(f^{-1}(D_j))x, x\rangle \\ &= \mu_{x,x}(f^{-1}(D_j)) \\ &\leq \mu_{x,x}(f^{-1}(U)) = \|E(f^{-1}(U))x\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Se sigue que $U \subseteq \bigcup\{D_j|E(f^{-1}(D_j)) = 0\}\,\forall U$ con $E(f^{-1}(U)) = 0$, por lo tanto $U_f \subseteq V_f$.
Para ver que $V_f \subseteq U_f \cup \{0\}$, usamos el siguiente argumento:

$$\begin{aligned}V_f &\subseteq \bigcup\{D_i \setminus \{0\} \,|\, E(f^{-1}(D_j)) = 0\} \cup \{0\} \\ &\subseteq \bigcup\{D_i \setminus \{0\} \,|\, E(f^{-1}(D_j \setminus \{0\})) = 0\} \cup \{0\} \\ &\subseteq U_f \cup \{0\}.\end{aligned}$$

□

Lema 1.66. *Sea (Ω, S) espacio medible y E una resolución de la identidad. Si $f : (\Omega, S) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ es medible, entonces $V_f^c = \overline{f\big(f^{-1}(V_f^c)\big)}$.*

Demostración. Claramente $\overline{f(f^{-1}(V_f^c))} \subseteq V_f^c$. Veamos que $\overline{f(f^{-1}(V_f))}^c \subseteq V_f$. Sea $x \in \overline{f(f^{-1}(V_f^c))}^c$. Existe $r > 0$ tal que

$$B^{\mathbb{C}}(x, r) \cap f(f^{-1}(V_f^c)) = \emptyset,$$

entonces $f^{-1}(B^{\mathbb{C}}(x, r)) \cap f^{-1}(V_f^c) = \emptyset$. Como $f^{-1}(V_f^c) = f^{-1}(V_f)^c$, tenemos que

$$f^{-1}(B^{\mathbb{C}}(x, r)) \subseteq f^{-1}(V_f).$$

Además $E(f^{-1}(V_f)) = 0$, por lo tanto $E(f^{-1}(B^{\mathbb{C}}(x,r))) = 0$, así

$$B^{\mathbb{C}}(x,r) \subseteq V_f$$

de modo que $x \in V_f$. Entonces $\overline{f(f^{-1}(V_f^c))}^c \subseteq V_f$. Concluimos que

$$\overline{f(f^{-1}(V_f^c))} = V_f^c.$$

□

Definición 1.67. *Dada $f : (\Omega, S) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ medible, decimos que f es esencialmente acotada si V_f^c es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$.*

Definición 1.68. *Sea $f : (\Omega, S) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ medible y esencialmente acotada, definimos*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in V_f^c\}.$$

Definición 1.69. *Denotamos por B al conjunto de funciones esencialmente acotadas acotadas y medibles $f : (\Omega, S) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ con la norma $\|f\|_B = \sup\{|f(x)| \,\big|\, x \in \Omega\}$. Es fácil ver que B es un espacio de Banach.*

Definición 1.70. *Definimos $N := \{f \in B \big| \|f\|_\infty = 0\}$.*

Nota 1.71.

$$N = \{f \in B \,\big|\, \exists \omega \in S \text{ con } E(\omega) = 0 \text{ y } f\chi_{\omega^c} = 0\}.$$

Demostración. Veamos primero que

$$\{f \in B \,\big|\, \exists \omega \in S \text{ con } E(\omega) = 0 \text{ y } f\chi_{\omega^c} = 0\} \subseteq N.$$

Sea $f \in B$ que cumple $f\chi_{\omega^c} = 0$ y $E(\omega) = 0$ para algún $\omega \in S$. Para ver que $f \in N$ es suficiente demostrar que $E(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = 0$.
Como E es una resolución de la identidad:

$$E(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = E(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cap \omega) + E(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cap \omega^c).$$

Dado que $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cap \omega \subseteq \omega$, se sigue que

$$E(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cap \omega) = 0.$$

Por otro lado $f\chi_{\omega^c}(x) = 0 \, \forall x \in \omega^c$, por lo que $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cap \omega^c = \emptyset$. Así

$$E(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cap \omega^c) = 0.$$

Entonces $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq U_f$, por lo tanto $\|f\|_\infty = 0$; es decir, $f \in N$.
Para ver la otra contención, Supongamos que $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base para la topología de $\mathbb{C}$, y supongamos también que $f \in N$. Entonces $\|f\|_\infty = 0$ y $V_f^c = \{0\}$. Como $V_f = \cup D_i \setminus \{0\} = U_f$, se tiene que $f^{-1}(V_f) = \cup f^{-1}(D_i \setminus \{0\})$. Sea $x \in H$, calculamos:

$$\begin{aligned} \|E(f^{-1}(U_f))x\|^2 = \mu_{x,x}(f^{-1}(U_f)) &\leq \sum \mu_{x,x}(f^{-1}(D_i \setminus \{0\})) \\ &= \sum \|E(f^{-1}(D_i \setminus \{0\}))x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $E(f^{-1}(U_f)) = 0$. Proponemos $\omega = f^{-1}(U_f)$. Tenemos que:

$$f|_{f^{-1}(V_f^c)} = f|_{f^{-1}(V_f)^c} = f|_{f^{-1}(U_f)^c} = f|_{\omega^c} = 0$$

por lo que $f\chi_{\omega^c} = 0$ y ω cumple $E(\omega) = 0$. □

De lo anterior concluimos que dada $f : (\Omega, S) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_\mathbb{C})$ medible y esencialmente acotada, $\|f\|_\infty = 0 \iff f$ es cero casi donde quiera ($f\chi_\omega = 0$ para algún ω con $E(\omega^c) = 0$).

Nota 1.72. *N es un ideal cerrado de B.*

Demostración. Si $f \in N$ y $g \in B$, existe $\omega \in S$ tal que $E(\omega) = 0$ y $f\chi_{\omega^c} = 0$, entonces $fg\chi_{\omega^c} = 0$ y $E(\omega) = 0$, así $fg \in N$.
Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$ una sucesión que converge a $f \in B$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\omega_n \in S$ con $E(\omega_n) = 0$ y $f_n\chi_{\omega_n{}^c} = 0$. Sea $\omega = \Big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \omega_n\Big)^c$, tenemos que $f_n\chi_{\omega^c} = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $f\chi_{\omega^c} = 0$ y cumple:

$$\|E(\omega)x\|^2 = \langle E(\omega)x, E(\omega)x\rangle = \big\langle x, E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n{}^c)x\big\rangle \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, E(\omega_n{}^c)x\rangle = 0.$$

Por lo tanto $E(\omega) = 0$. Dado que $\omega = \Big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \omega_n\Big)^c$ cumple que $E(\omega) = 0$ y $f\chi_{\omega^c} = 0$, por la Nota 1.71, $f \in N$. □

Proposición 1.73. *Si* $f : (\Omega, S) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ *es medible con* $\|f\|_\infty < +\infty$*, es decir,* f *es esencialmente acotada, y existe* $\omega \in S$ *tal que* $E(\omega) = 0$*, entonces* $\|f\chi_{\omega^c}\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Demostración.

$$\begin{aligned} U_f &= \cup\{u|0 \notin u, u \text{ es abierto } E(f^{-1}(u)) = 0\} \\ &= \cup\{u|0 \notin u, u \text{ es abierto } E(f^{-1}(u) \cap \omega^c) = 0\} \\ &= \cup\{u|0 \notin u, u \text{ es abierto } E((f\chi_{\omega^c})^{-1}(u)) = 0\} \\ &= U_{f\chi_{\omega^c}} \Longrightarrow \|f\|_\infty = \|f\chi_{\omega^c}\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.74. *Para toda* $f \in B$, $\|f\|_\infty = \|[f]\|_{B/N}$*. Si identificamos* $f \equiv [f]$*, entonces* $\|\cdot\|_\infty$ *define un espacio de Banach.*

Demostración. $\|[f]\|_{B/N} = \text{ínf}\{\|f+g\|_B \,\big|\, g \in N\}$. Si $g \in N$ entonces existe $\omega \in S$ con $E(\omega) = 0$ y $g\chi_{\omega^c} = 0$. Calculamos:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_\infty &= \|(f+g)\chi_{\omega^c}\|_\infty \text{ (por Proposición 1.73)} \\ &= \|f\chi_{\omega^c}\|_\infty \\ &= \|f\|_\infty \end{aligned} \tag{1.7}$$

además, por el Lema 1.66 tenemos que $V_{f+g}^c = \overline{(f+g)((f+g)^{-1}(V_{f+g}^c))}$, por lo que $V_{f+g}^c \subseteq \overline{(f+g)(\Omega)}$; entonces:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_\infty = \sup\{|\lambda|\big|\lambda \in V_{f+g}^c\} &\leq \sup\{|\lambda|\big|\lambda \in (f+g)(\Omega)\} \\ &= \sup\{|(f+g)(x)|\big|x \in \Omega\} = \|f+g\|_B \end{aligned} \tag{1.8}$$

por lo tanto, de (1.7) y (1.8) se sigue $\|f\|_\infty \leq \|f+g\|_B$, concluyendo $\|f\|_\infty \leq \text{ínf}_{g\in N} \|f+g\|_B = \|[f]\|_{B/N}$.
Para ver que $\|[f]\|_{B/N} \leq \|f\|_\infty$ recordemos que si $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es base de la topología de $\mathbb{C}$, entonces $V_f = \cup\{D_i|E(f^{-1}(D_i)) = 0\}$, por lo que $E(f^{-1}(V_f)) = 0$. Por la Proposición 1.73, $\|f\|_\infty = \|f\chi_{f^{-1}(V_f)^c}\|_\infty$. Además:

$$\begin{aligned} \|f\chi_{f^{-1}(V_f)^c}\|_B &= \sup\{|f\chi_{f^{-1}(V_f)^c}(x)|\big|x \in \Omega\} \\ &= \sup\{|f(x)|\big|x \in f^{-1}(V_f)^c\} \\ &= \sup\{|\lambda|\big|\lambda \in \overline{f(f^{-1}(V_f^c))}\} \\ &= \sup\{|\lambda|\big|\lambda \in V_f^c\} \quad \text{(por Lema 1.66)} \\ &= \|f\|_\infty \end{aligned}$$

es decir, $\|f\|_\infty = \|f\chi_{f^{-1}(V_f)^c}\|_B$. Proponemos $g = -f\chi_{f^{-1}(V_f)}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|[f]\|_{B/N} \leq \|f+g\|_B &= \|f - f\chi_{f^{-1}(V_f)}\|_B \\ &= \|f\chi_{f^{-1}(V_f)^c}\|_B \\ &= \|f\|_\infty \quad \text{(por Proposición 1.73)}\end{aligned}$$

Conluyendo así que $\|[f]\|_{B/N} = \|f\|_\infty$. □

Corolario 1.75. $\|f\|_\infty \leq \|f\|_B$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty = \|f\|_{B/N} &= \text{ínf}\, \|f+g\|_B \\ &\leq \|f+0\|_B = \|f\|_B.\end{aligned}$$

□

Definición 1.76. *Sea (Ω, S) espacio medible y $E : S \to \mathcal{B}(H)$ una resolución de la identidad. Definimos $L^\infty(E) \equiv (B/N, \|\cdot\|_{B/N}) \equiv (B, \|\cdot\|_\infty)$.*

1.6. Integración con respecto a una resolución de la identidad

Lema 1.77. *Sea $f : (\Omega, S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ una función medible, entonces existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tal que:*

1. *$|s_n| \leq |f|$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ para toda $x \in \Omega$.*
3. *Si f es acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n\|_B = 0$.*

Demostración. Ver [4], Lema 2.7, página 20. □

Corolario 1.78. *Sea $f : (\Omega, S) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_\mathbb{C})$ medible y acotada. Entonces existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complejas tal que:*

1. *$|s_n| \leq |f|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *$\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n\|_B = 0$.*

Demostración. Sea $f(x) = \text{Re}f + i\text{Im}f$. Por el Lema 1.77 existen (r_n) y (t_n) sucesiones simples tales que:

- $|r_n| \leq |\text{Re}f|$, $|t_n| \leq |\text{Im}f|$
- $\lim_{n\to\infty} \|\text{Re}f - r_n\|_B = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|\text{Im}f - t_n\|_B = 0$.

Sea $s_n = r_n + it_n$. Entonces $|s_n| = |r_n + it_n| \leq |f|$. Además:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_B &= \lim_{n\to\infty} \|\text{Re}f + i\text{Im}f - r_n - it_n\|_B \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(\text{Re}f - r_n) + i(\text{Im}f - t_n)\|_B \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\|\text{Re}f - r_n\|_B + \|\text{Im}f - t_n\|_B) = 0.\end{aligned}$$

□

Definición 1.79. *Sea (Ω, S) un espacio medible y $E : S \to \mathcal{B}(H)$ una resolución de la identidad. Sea s una función simple, con $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\omega_i}$, en donde $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = s(\Omega)$ y $\omega_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$ (su forma canónica).*
Dada $x \in H$, definimos

$$\int sdEx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(\omega_i)x, \text{ o bien}$$

$$\int sdE = \sum \alpha_i E(\omega_i).$$

Lema 1.80. *Para toda función s simple se cumple que $\left\| \int sdE \right\| = \|s\|_\infty$.*

Demostración. Primeramente notemos que $\|s\|_\infty = \max\{|\alpha_i| \mid E(\omega_i) \neq 0\}$ y

$\omega_i = s^{-1}(\{\alpha_i\})$. Sea $x \in H$ con $\|x\| \leq 1$.

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\int sdE\Big)x\Big\|^2 = \|\sum \alpha_i E(\omega_i)x\|^2 &= \sum_{i,j} \alpha_i\overline{\alpha}_j\langle E(\omega_i)x, E(\omega_j)x\rangle \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i\overline{\alpha}_j\langle E(\omega_i\cap\omega_j)x, x\rangle \\ &= \sum_i |\alpha_i|^2\langle E(\omega_i)x, x\rangle \\ &\leq \|s\|_\infty^2\Big\langle \sum_i E(\omega_i)x, x\Big\rangle \\ &= \|s\|_\infty^2\Big\langle E\big(\bigcup_i \omega_i\big)x, x\Big\rangle = \|s\|_\infty^2\|x\|^2\end{aligned}$$

como $\|x\| \leq 1$ se sigue que $\|s\|_\infty^2\|x\|^2 \leq \|s\|_\infty^2$. Tomando el supremo sobre $\|x\| \leq 1$, obtenemos

$$\Big\|\int sdE\Big\| \leq \|s\|_\infty. \tag{1.9}$$

Para ver que $\|s\|_\infty \leq \Big\|\int sdE\Big\|$, sea $|\alpha_{i_0}| = \|s\|_\infty$. Entonces $\alpha_{i_0} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ con $E(\omega_{i_0}) \neq 0$; por lo que existe x tal que $E(\omega_{i_0})x \neq 0$.
Sea $y = \dfrac{1}{\|E(\omega_{i_0})x\|}E(\omega_{i_0})x$. Tenemos que $\|y\| = 1$ y

$$\begin{aligned}\Big(\int sdE\Big)y &= \frac{1}{\|E(\omega_{i_0})x\|}\sum \alpha_i E(\omega_i\cap\omega_{i_0})x \\ &= \frac{1}{\|E(\omega_{i_0})x\|}\alpha_{i_0}E(\omega_{i_0})x = \alpha_{i_0}y\end{aligned}$$

entonces

$$\Big\|\int sdE\Big\| = \sup_{\|x\|=1}\Big\|\Big(\int sdE\Big)x\Big\| \geq \Big\|\Big(\int sdE\Big)y\Big\| = |\alpha_{i_0}| = \|s\|_\infty. \tag{1.10}$$

De (1.9) y (1.10) tenemos finalmente que $\|s\|_\infty = \Big\|\int sdE\Big\|$. $\square$

Lema 1.81. *La integral* $\int sdE$ *definida en el espacio vectorial (álgebra) de funciones simples es lineal.*

Demostración. Sean S y T funciones simples con descomposiciones canónicas $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\omega_i}, T = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{\tau_j}$.
Sea $\mathcal{C} = \big\{\alpha_i + \beta_j | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\big\} = \{c_r\}_{r=1}^{k}$. Sean también $m_r = \{(i,j) | \alpha_i + \beta_j = c_r\}$ y $A_r = \displaystyle\bigcup_{(i,j)\in m_r} \omega_i \cap \tau_j$. Entonces $S + T = \displaystyle\sum_r c_r \chi_{A_r}$.
Por lo que tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int (S+T)dE &= \sum_r c_r E(A_r) = \sum_r c_r \sum_{(i,j)\in m_r} E(\omega_i \cap \tau_j) \\
&= \sum_r \sum_{(i,j)\in m_r} (\alpha_i + \beta_j) E(\omega_i \cap \tau_j) \\
&= \sum_r \sum_{(i,j)\in m_r} (\alpha_i + \beta_j) E(\omega_i) E(\tau_j) = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) E(\omega_i) E(\tau_j) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i E(\omega_i) E(\tau_j) + \sum_{i,j} \beta_j E(\omega_i) E(\tau_j) \\
&= \sum_i \alpha_i \sum_j E(\omega_i) E(\tau_j) + \sum_j \beta_j \sum_i E(\omega_i) E(\tau_j) \\
&= \big(\sum_i \alpha_i E(\omega_i)\big) E(\Omega) + \big(\sum_j \beta_j E(\tau_j)\big) E(\Omega) \\
&= \sum_i \alpha_i E(\omega_i) + \sum_j \beta_j E(\tau_j) = \int SdE + \int TdE.
\end{aligned}$$

Entonces $\displaystyle\int (S+T)dE = \int SdE + \int TdE$. De la misma forma vemos que $\displaystyle\int (\alpha S)dE = \alpha \int SdE, \forall \alpha \in \mathbb{C}$. Por lo tanto la función $S \longmapsto \displaystyle\int SdE$ es lineal en el álgebra de funciones simples. □

Corolario 1.82. *Si* $S = \sum \alpha_i \chi_{\omega_i}$ *(no canónica), entonces*

$$\int SdE = \sum \alpha_i E(\omega_i).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\int SdE &= \sum_i \alpha_i \int (\chi_{\omega_i} + 0\chi_{\omega_i^c}) dE \\
&= \sum_i \alpha_i \big(E(\omega_i) + 0E(\omega_i^c)\big) = \sum_i \alpha_i E(\omega_i).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.83. *Para todas las funciones simples S, T se cumple:*

1. $\displaystyle\int STdE = \Big(\int SdE\Big)\Big(\int TdE\Big).$

2. $\displaystyle\int \bar{S}dE = \Big(\int SdE\Big)^*.$

3. $\displaystyle\int 1dE = 1_{\mathcal{B}(H)}.$

Es decir, la función $S \longmapsto \displaystyle\int SdE$ es un $*$-morfismo del álgebra de funciones simples en una subálgebra de $\mathcal{B}(H)$. Además es isométrica.

Demostración. Supongamos $S = \sum \alpha_i \chi_{\omega_i}, T = \sum \beta_j \chi_{\tau_j}$.
Entonces $ST = \sum \alpha_i \beta_j \chi_{\omega_i \cap \tau_j}$. Calculando la integral tenemos

$$\begin{aligned}
\int STdE &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(\omega_i \cap \tau_j) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(\omega_i) E(\tau_j) \\
&= \big(\sum_i \alpha_i E(\omega_i)\big)\big(\sum_j \beta_j E(\tau_j)\big) = \Big(\int SdE\Big)\Big(\int TdE\Big).
\end{aligned}$$

De manera análoga se demuestran las otras propiedades. □

Lema 1.84. *Para todas $x, y \in H$ y para toda función simple S*

$$\Big\langle \int SdEx, y \Big\rangle = \int SdE_{x,y}$$

donde $E_{x,y}(\omega) = \langle E(\omega)x, y\rangle$. Además $\Big\|\Big(\displaystyle\int SdE\Big)x\Big\|^2 = \displaystyle\int |S|^2 dE_{x,x}$.

Demostración. Sea $S = \sum \alpha_i \chi_{\omega_i}$ su representación canónica. Tenemos

$$\begin{aligned}\Big\langle \int SdEx, y\Big\rangle = \big\langle\big(\sum \alpha_i E(\omega_i)\big)x, y\big\rangle &= \sum \alpha_i \langle E(\omega_i)x, y\rangle \\ &= \sum \alpha_i E_{x,y}(\omega_i) \\ &= \int SdE_{x,y}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\int SdE\Big)x\Big\|^2 = \Big\langle \int SdEx, \int SdEx\Big\rangle &= \Big\langle \int \bar{S}dE \int SdEx, x\Big\rangle \\ &= \Big\langle \int |S|^2 dEx, x\Big\rangle = \int |S|^2 dE_{x,x}.\end{aligned}$$

□

Definición 1.85. *Sea $f : (\Omega, S) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ medible y acotada. Entonces, por el Corolario 1.78 existe una sucesión de funciones simples $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|S_n| \leq |f|\ \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|f(x) - S_n(x)\|_B = 0$. Con lo cual $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_\infty$. Por el Lema 1.80 obtenemos también que $\|S_n - S_m\|_\infty = \Big\|\int S_n dE - \int S_m dE\Big\|$. Entonces $\Big(\int S_n dE\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Definimos*

$$\int fdE := \lim_{n\to\infty} \int S_n dE.$$

Observación 1.86. *Si además existe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - f\|_\infty = 0$, tomamos $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $r_{2n} = S_n, r_{2n+1} = T_n$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \|r_n - f\|_\infty = 0$, con lo cual vemos que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int T_n dE = \lim_{n\to\infty} \int S_n dE.$$

Por lo tanto $\int fdE$ no depende de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 1.87. *La función definida por $f \ni L^\infty(E) \longrightarrow \int fdE$ es un morfismo isométrico de álgebras C^*. Además*

$$\Big\|\int fdEx\Big\|^2 = \int |f|^2 dE_{x,x}.$$

$$\Big\langle \int fdEx, y\Big\rangle = \int fdE_{x,y}.$$

Demostración. Veamos que $f, g \in L^\infty(E) \Rightarrow \Big(\int f dE\Big)\Big(\int g dE\Big) = \int fg dE$.
Existen sucesiones de funciones simples $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \|S_n - f\| = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|T_n - g\| = 0$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \|T_n S_n - fg\|_\infty = 0$. Por definición:

$$\begin{aligned}
\int fg dE &= \lim_{n\to\infty} \int S_n T_n dE \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\int S_n dE\Big)\Big(\int T_n dE\Big) \quad \text{(por Lema 1.83)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\int S_n dE\Big) \lim_{n\to\infty} \Big(\int T_n dE\Big) \\
&= \Big(\int f dE\Big)\Big(\int g dE\Big).
\end{aligned}$$

De la misma forma vemos que la integral es lineal, $\Big(\int f dE\Big)^* = \int \bar{f} dE$ y también $\Big\|\int f dE\Big\| = \|f\|_\infty$.
Para verificar la primera igualdad vemos

$$\begin{aligned}
\Big\|\int f dE x\Big\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \Big\|\int S_n dE x\Big\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int |S_n|^2 dE_{x,x} \quad \text{(por Lema 1.84)} \\
&= \int |f|^2 dE_{x,x}.
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se verifica de la misma forma. □

Lema 1.88. *Sea (Ω, S) un espacio medible. Sea $E : (\Omega, S) \to \mathcal{B}(H)$ tal que:*

i) $E(\Omega) = Id_H, E(\emptyset) = 0$

ii) $E(\omega) = E^*(\omega)\ \forall\omega$

iii) $E(\omega \cap \omega') = E(\omega)E(\omega')\ \forall\omega, \omega' \in S$

iv) $E_{x,y}(\omega) := \langle E(\omega)x, y\rangle$, $\omega \in S$

define una medida compleja $\forall x, y \in H$. Entonces E es una resolución de la identidad.

Demostración. Lo único que hay que demostrar es $E\big(\bigcup_i \omega_i\big)x = \sum_i E(\omega_i)x$ (convergencia en H). $\forall x \in E, \forall (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S$ con $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ si $i \neq j$, sean $y = E\big(\bigcup_i \omega_i\big)x, x_i = E(\omega_i)x, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.
Primero demostremos que iv) implica que $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$, para todo A, B con $A \cap B = \emptyset$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\langle E(A\cup B)x, y\rangle &= E_{x,y}(A \cup B)\\
&= E_{x,y}(A) + E_{x,y}(B)\\
&= \langle (E(A)+E(B))x, y\rangle \ \forall x \forall y \in H\\
&\Longrightarrow E(A\cup B) = E(A) + E(B).
\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 = \|y - y_n + y_n\|^2 &= \|y - E\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\omega_i\Big)x + E\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\omega_i\Big)x\|^2\\
&= \|E\Big(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}\omega_i\Big)x + E\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\omega_i\Big)x\|^2\\
&= \Big\langle E\Big(\bigcup_{i>n}^{\infty}\omega_i\Big)x + E\Big(\bigcup_{i\le n}\omega_i\Big)x, E\Big(\bigcup_{i\le n}\omega_i\Big)x + E\Big(\bigcup_{i>n}^{\infty}\omega_i\Big)x\Big\rangle\\
&= \Big\|E\Big(\bigcup_{i>n}^{\infty}\omega_i\Big)x\Big\|^2 + \Big\|E\Big(\bigcup_{i\le n}\omega_i\Big)x\Big\|^2 = \Big\|E\Big(\bigcup_{i>n}^{\infty}\omega_i\Big)x\Big\|^2 + \|y_n\|^2.
\end{aligned}$$

Entonces $\|y\|^2 = \Big\|E\Big(\bigcup_{i>n}^{\infty}\omega_i\Big)x\Big\|^2 + \|y_n\|^2$. De la misma forma vemos que $\|y_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$. De modo que $\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \le \|y\|^2 \ \forall n$, es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ existe; en consecuencia

$$\begin{aligned}
\Big\langle \sum_{i=1}^{\infty} x_i, y\Big\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle x_i, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle E(\omega_i)x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} E_{x,y}(\omega_i) = E_{x,y}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\omega_i\Big)\\
= \Big\langle E\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\omega_i\Big)x, y\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{\infty} E(\omega_i)x = E\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\omega_i\Big)x.$ □

1.7. El Teorema Espectral

Definición 1.89. *Sea Ω un espacio localmente compacto Hausdorff. Definimos $C_0(\Omega)$ como el espacio de todas las funciones continuas sobre Ω que satisfacen lo siguiente:*
Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$, entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para toda $x \notin K$.

Teorema 1.90. *(Riesz). Sea Ω espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Dado un funcional lineal $h \in C_0(\Omega)$, existe una única medida de Borel compleja regular μ_h tal que*

$$h(f) = \int_\Omega f d\mu_h \quad \forall f \in C_0(\Omega).$$

Además $\|h\| = |\mu_h|(\Omega)$.

Demostración. Ver [18], Teorema 6.19, página 139. □

Nota 1.91. *Para toda medida compleja μ y para toda función f con $\int |f|d|\mu| < +\infty$ se tiene que $\Big|\int f d\mu\Big| \leq \int |f|d|\mu|$.*

Demostración. Si $f = \sum \alpha_i \chi_{\omega_i}$ con $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces:

$$\Big|\int f d\mu\Big| = \Big|\sum \alpha_i \mu(\omega_i)\Big| \leq \sum |\alpha_i||\mu(\omega_i)| \leq \sum |\alpha_i||\mu|(\omega_i) = \int |f|d|\mu|.$$

Para funciones integrables f, existe una sucesión de funciones simples $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = f$ c.d rel. $|\mu|$ y $|S_n| \leq |f|$ para toda n. Así:

$$\Big|\int f d\mu\Big| = \Big|\lim_{n\to\infty}\int S_n d\mu\Big| \leq \lim_{n\to\infty}\int |S_n|d|\mu| \leq \int |f|d|\mu|.$$

□

Nota 1.92. *Toda medida de Borel en un espacio compacto es regular.*

Demostración. Ver [18], Teorema 2.17, página 49. □

Proposición 1.93. *Sea Ω un espacio métrico compacto con topología τ. Supongamos que μ, ν son medidas de Borel regulares en $(\Omega, S(\tau))$ (donde $S(\tau)$ es la σ-álgebra de Borel). Sea $A \in S(\tau)$. Entonces existe una sucesión de funciones $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continuas tales que:*

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int |g_n - \chi_A| d|\mu| = 0$

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int |g_n - \chi_A| d|\nu| = 0$

Además, podemos elegir $0 \le g_n(x) \le 1 \ \forall x \in \Omega$.
En consecuencia se cumple:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int \chi_A d\mu$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int g_n d\nu = \int \chi_A d\nu$

pues $\displaystyle\left| \int g_n d\mu - \int \chi_A d\mu \right| \le \int |g_n - \chi_A| d|\mu| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Demostración. Como $|\mu|$ y $|\nu|$ son regulares, dada $\varepsilon > 0$, existen abiertos U_μ, U_ν y compactos K_μ, K_ν tales que $|\mu|(U_\mu \setminus K_\mu) < \varepsilon$ y $|\nu|(U_\nu \setminus K_\nu) < \varepsilon$ con $K_\nu \subseteq A \subseteq U_\nu, K_\mu \subseteq A \subseteq U_\mu$. Sean $K(\varepsilon) = K_\mu \cup K_\nu$ compacto y $U(\varepsilon) = U_\mu \cap U_\nu$ abierto. Entonces

$$K(\varepsilon) \subseteq A \subseteq U(\varepsilon), \quad |\mu|(U(\varepsilon) \setminus K(\varepsilon)) < \varepsilon, \quad |\nu|(U(\varepsilon) \setminus K(\varepsilon)) < \varepsilon.$$

Sea $h : [0, \infty) \longrightarrow [0,1]$, tal que $h|_{[0,1/2]} = 1$ y $h|_{[1,\infty)} = 0$, continua y monótona. Sea $d_\varepsilon = d(K(\varepsilon), U(\varepsilon)^c)$. Sea $h_\varepsilon(r) = h\Big(\dfrac{r}{d_\varepsilon}\Big)$; a su vez, sea $f_\varepsilon : \Omega \longrightarrow [0,1]$ dada por $f_\varepsilon(x) = h_\varepsilon\big(d(x, K(\varepsilon))\big)$. Entonces $f_\varepsilon|_{K(\varepsilon)} = 1, f_\varepsilon|_{U(\varepsilon)^c} = 0$. Además, notemos que

$$\begin{aligned} \int |f_\varepsilon - \chi_A| d|\mu| = \int_{U(\varepsilon)\setminus K(\varepsilon)} |f_\varepsilon - \chi_A| d|\mu| &\le \int_{U(\varepsilon)\setminus K(\varepsilon)} (1+1) d|\mu| \\ &= 2|\mu|\big(U(\varepsilon) \setminus K(\varepsilon)\big) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

De la misma forma, $\int |f_\varepsilon - \chi_A| d|\nu| < 2\varepsilon$. Sea $g_n = f_{1/n}$, obtenemos

$$\int |g_n - \chi_A| d|\mu| < \frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{y} \quad \int |g_n - \chi_A| d|\nu| < \frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Lema 1.94. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador normal. Sea $\Phi : C(\sigma(T); \mathbb{C}) \to \mathcal{B}(H)$ el homomorfismo isométrico del Teorema 1.47 tal que si $P(z) = \sum C_{ij} z^i (\bar{z})^j$ con $z \in \mathbb{C}$ se tiene $\Phi(P) = \sum C_{ij} T^i (T^*)^j$. Entonces para todo $x, y \in H$, existe una medida de Borel regular (compleja) en $\sigma(T)$ tal que:*

i) $\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int f dE_{x,y} \; \forall f \in C(\sigma(T); \mathbb{C})$.

ii) $E_{x+\lambda y,z} = E_{x,z} + \lambda E_{y,z}$, $\overline{E_{x,y}} = E_{y,x}$, $|E_{x,y}|(\sigma(T)) \leq \|x\|\|y\|$.
Esto último implica que $|E_{x,y}(\omega)| \leq |E_{x,y}|(\omega) \leq |E_{x,y}|(\sigma(T)) \leq \|x\|\|y\|$ $\forall \omega \in \mathcal{B}(\sigma(T))$.

iii) Existe un operador autoadjunto E tal que $\forall \omega \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ y $\forall x, y \in H$ $\langle E(\omega)x, y\rangle = E_{x,y}(\omega) \; \forall x, y \in H$. *Además* $\|E(\omega)\| \leq 1$.

Demostración. i)Sean $x, y \in H$. Definimos la función

$$\Phi_{x,y} : C(\sigma(T); \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

por $\Phi_{x,y}(f) = \langle \Phi(f)x, y\rangle$. Como Φ es homomorfismo isométrico, tenemos que $\Phi_{x,y}$ es lineal. Dado que $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty = \sup\{|f(\lambda)| \big| \lambda \in \sigma(T)\}$, tenemos que $\Phi_{x,y}$ cumple:

$$|\langle \Phi(f)x, y\rangle| \leq \|\Phi(f)x\|\|y\| \leq \|\Phi(f)\|\|x\|\|y\| = \|f\|_\infty \|x\|\|y\|$$

por lo que es continua. Por el Teorema 1.90 (Riesz), existe una única medida de Borel compleja (regular) $E_{x,y}$ tal que $\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int f dE_{x,y} \; \forall f \in C(\sigma(T); \mathbb{C})$.
ii) Como

$$\langle \Phi(f)(x + \lambda y), z\rangle = \int f dE_{x+\lambda y,z} \tag{1.11}$$

$$\langle \Phi(f)(x + \lambda y), z\rangle = \langle \Phi(f)x, z\rangle + \lambda \langle \Phi(f)y, z\rangle = \int f d(E_{x,z} + \lambda E_{y,z}), \tag{1.12}$$

por la unicidad del Teorema 1.90 (Riesz), obtenemos de (1.11) y (1.12) que $E_{x+\lambda y,z} = E_{x,z} + \lambda E_{y,z}$. También

$$\begin{aligned}\langle \Phi(f)y, x\rangle &= \overline{\langle x, \Phi(f)y\rangle} \\ &= \overline{\langle \Phi(\overline{f})x, y\rangle} \quad \text{(por Teorema 1.47)} \\ &= \overline{\int \overline{f} dE_{x,y}} \quad \text{(por Teorema 1.90)} \\ &= \int \overline{\overline{f} dE_{x,y}} = \int f d\overline{E_{x,y}}.\end{aligned}$$

Por unicidad $E_{y,x} = \overline{E_{x,y}}$. Finalmente, veremos $|E_{x,y}|(\sigma(T)) \leq \|x\|\|y\|$. Como $|\Phi_{x,y}(f)| \leq \|f\|_\infty \|x\|\|y\|$, entonces $\|\Phi_{x,y}\| \leq \|x\|\|y\|$. Nuevamente, por el Teorema 1.90 (Riesz), $\|\Phi_{x,y}\| = |E_{x,y}|(\sigma(T)) \leq \|x\|\|y\|$.
iii) Dado $\omega \in \mathcal{B}(\sigma(T))$, la función $x, y \to E_{x,y}(\omega)$ satisface

$$\begin{aligned}&E_{x+\lambda y,z}(\omega) = E_{x,z}(\omega) + \lambda E_{y,z}(\omega) \\ &E_{x,y}(\omega) = \overline{E_{y,x}}(\omega) \\ &|E_{x,y}(\omega)| \leq \|x\|\|y\|.\end{aligned}$$

Es decir, es una forma sesquilineal acotada, por el Teorema 1.12 existe un operador acotado $E(\omega) \in \mathcal{B}(H)$ tal que $E_{x,y}(\omega) = \langle x, E(\omega)y\rangle \ \forall x, y \in H$. Además:

$$\begin{aligned}\langle x, E(\omega)y\rangle = E_{x,y}(\omega) = \overline{E_{y,x}}(\omega) = \overline{\langle y, E(\omega)x\rangle} &= \langle E(\omega)x, y\rangle \\ &= \langle x, E^*(\omega)y\rangle \forall x, y \in H \Longrightarrow E(\omega) = E^*(\omega).\end{aligned}$$

Por último, calculamos:

$$\|E(\omega)\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} |\langle E(\omega)x, y\rangle| \leq \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} \|x\|\|y\| = 1,$$

por lo tanto $\|E(\omega)\| \leq 1 \, \forall \omega \in \mathcal{B}(\sigma(T))$. □

Lema 1.95. *La medida E del Lema 1.94 es una resolución de la identidad.*

Demostración. $E_{x,y}$ es una medida de Borel compleja tal que para todo $x, y \in H$, $E(\omega) = E^*(\omega)$. Además $\chi_\emptyset \in C(\sigma(T); \mathbb{C})$ y cumple $\chi_\emptyset(\lambda) = 0 \, \forall \lambda \in \sigma(T)$, por lo que $\Phi(\chi_\emptyset)x = 0\,\forall x \in H$. Calculamos:

$$0 = \langle \Phi(\chi_\emptyset)x, y\rangle = \int \chi_\emptyset dE_{x,y} = E_{x,y}(\emptyset) \quad \forall x, y \in H$$
$$\Longrightarrow E_{x,y}(\emptyset) = \langle E(\emptyset)x, y\rangle = 0 \quad \forall x, y \in H$$

por lo tanto, $E(\emptyset) = 0$. Análogamente, tomamos $\chi_{\sigma(T)} \in C(\sigma(T); \mathbb{C})$ y concluimos $E(\sigma(T)) = Id_H$ (la función identidad en H).
Por el Lema 1.88 basta ver que $E(\omega \cap \omega') = E(\omega)E(\omega') \quad \forall \omega, \omega' \in \mathcal{B}(\sigma(T))$.
Sean $g \in C(\sigma(T); \mathbb{C})$ una función continua y $\omega, \omega' \in \mathcal{B}(\sigma(T))$. Por la Proposición 1.93 existe una sucesión de funciones continuas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leq f_n \leq 1 \quad \forall n$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - \chi_\omega| d|E_{x,y}| = 0. \tag{1.13}$$
$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - \chi_\omega| d|E_{x,\Phi(\bar{g})y}| = 0.$$

Entonces, se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} \int |gf_n - g\chi_\omega| d|E_{x,y}| = \lim_{n\to\infty} \int |g||f_n - \chi_\omega| d|E_{x,y}|$$
$$\leq \|g\|_\infty \lim_{n\to\infty} \int |f_n - \chi_\omega| d|E_{x,y}| = 0 \text{ (Por (1.13))}$$

Por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \int |gf_n - g\chi_\omega| d|E_{x,y}| = 0 \tag{1.14}$$

Calculamos:

$$\langle \Phi(gf_n)x, y\rangle = \int gf_n dE_{x,y}.$$
$$\langle \Phi(g)\Phi(f_n)x, y\rangle = \langle \Phi(f_n)x, \Phi(\bar{g})y\rangle = \int f_n dE_{x,\Phi(\bar{g})y}.$$

Como Φ es homomorfismo isométrico, $\langle \Phi(gf_n)x, y\rangle = \langle \Phi(g)\Phi(f_n)x, y\rangle$; podemos garantizar que

$$\int gf_n dE_{x,y} = \int f_n dE_{x,\Phi(\bar{g})y}. \tag{1.15}$$

Al tomar el límite cuando n tiende a infinito concluimos

$$\begin{aligned}\int g\chi_\omega dE_{x,y} &= \lim_{n\to\infty}\int gf_n dE_{x,y} \quad (\text{por } (1.14))\\ &= \lim_{n\to\infty}\int f_n dE_{x,\Phi(\bar{g})y} \quad (\text{por } (1.15))\\ &= \int \chi_\omega dE_{x,\Phi(\bar{g})y} = \langle E(\omega)x, \Phi(\bar{g})y\rangle\\ &= \langle \Phi(g)E(\omega)x, y\rangle = \int g dE_{E(\omega)x,y}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Nuevamente, por la Proposición 1.93. existe una sucesión de funciones continuas $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 \leq g_n \leq 1\ \forall n$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty}\int |g_n - \chi_{\omega'}| d|E_{x,y}| = 0 \tag{1.17}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int |g_n - \chi_{\omega'}| d|E_{E(\omega)x,y}| = 0 \tag{1.18}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\int \chi_{\omega'}\chi_\omega dE_{x,y} &= \lim_{n\to\infty}\int g_n\chi_\omega dE_{x,y} \quad (\text{por } (1.17))\\ &= \lim_{n\to\infty}\int g_n dE_{E(\omega)x,y} \quad (\text{por } (1.16))\\ &= \int \chi_{\omega'} dE_{E(\omega)x,y} \quad (\text{ por } (1.18))\end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\langle E(\omega'\cap\omega)x, y\rangle = \int \chi_{\omega\cap\omega'} dE_{x,y} = \int \chi_{\omega'} dE_{E(\omega)x,y} = \langle E(\omega')E(\omega)x, y\rangle.$$

Entonces $\langle E(\omega'\cap\omega)x, y\rangle = \langle E(\omega')E(\omega)x, y\rangle\ \forall x, y \in H$, se sigue que $E(\omega\cap\omega') = E(\omega)E(\omega')$. Por lo tanto E es una resolución de la identidad. $\square$

Teorema 1.96. ***[Teorema Espectral]***. *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ normal. Existe una única resolución de la identidad $E : \mathcal{B}(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ tal que*

$$T = \int \lambda dE(\lambda).$$

Demostración. Sea E la resolución de la identidad del Lema 1.95. Veamos que $T = \int \lambda dE(\lambda)$. Sea $\lambda : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ dada por $\lambda(z) = z$. Por el homomorfismo isométrico del Teorema 1.47 se sigue $\Phi(\lambda) = T$. Luego, por el Lema 1.94 tenemos:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle \Phi(\lambda)x, y \rangle = \int \lambda E_{x,y}. \tag{1.19}$$

Además, por el Teorema 1.87 se cumple:

$$\int \lambda dE_{x,y} = \Big\langle \int \lambda dEx, y \Big\rangle. \tag{1.20}$$

De (1.19) y (1.20) concluimos $\langle Tx, y \rangle = \Big\langle \int \lambda dEx, y \Big\rangle \, \forall x, y \in H$; por lo tanto:

$$T = \int \lambda dE.$$

Para ver la unicidad, supongamos que E, E' son resoluciones de la identidad tales que

$$\int \lambda dE = T = \int \lambda dE'.$$

Definimos $\psi(f) = \int f dE$ y $\psi'(f) = \int f dE'$ con $f \in L^\infty(E)$. ψ y ψ' son homomorfismos isométricos de álgebras; como $\psi(\lambda) = \psi'(\lambda)$ entonces $\psi(\lambda)\psi(\lambda) = \psi(\lambda^2) = \psi'(\lambda)\psi'(\lambda) = \psi'(\lambda^2)$, en general, si $p(z) = \sum \lambda_{ij} z^i (\bar{z})^j$ entonces $\sum \lambda_{ij} T^i (T^*)^j = \psi(p) = \psi'(p) = \Phi(p)$. Por el Teorema de Stone-Weierstrass $\psi(f) = \psi'(f) = \Phi(f), \forall f \in C(\sigma(x); \mathbb{C})$. Por lo cual

$$\langle \psi(f)x, y \rangle = \langle \psi'(f)x, y \rangle = \langle \Phi(f)x, y \rangle = \int f dE_{x,y}.$$

Sea $\psi'_{x,y}(f) = \langle \psi'(f)x, y \rangle$. Por el Lema 1.94 $\psi'_{x,y}(f) = \int f dE'_{x,y}$ en consecuencia

$$\int f dE'_{x,y} = \int f dE_{x,y} \quad \forall f \in C(\sigma(T); \mathbb{C}). \tag{1.21}$$

Por lo tanto $E'_{x,y}$ es la medida que representa a $\psi'_{x,y} \in C(\sigma(T); \mathbb{C})^*$. Por (1.21), $E_{x,y}$ también es una medida que representa a $\psi'_{x,y}$; por la unicidad en el Teorema 1.90 (Riesz) $E_{x,y} = E'_{x,y}$. Finalmente:

$$\langle E(\omega)x, y \rangle = \langle E'(\omega)x, y \rangle.$$

Por lo que $E(\omega) = E'(\omega) \, \forall \omega$. Por lo tanto $E = E'$. $\square$

Capítulo 2

Teorema espectral para n operadores normales que conmutan

En el Capítulo 1 trabajamos con operadores normales acotados. El objetivo de este capítulo es generalizar el teorema espectral a n operadores normales no acotados que conmutan. Primero definiremos a los operadores normales no acotados y analizaremos sus propiedades básicas; a su vez, mencionaremos el teorema espectral para el caso de operadores normales no acotados, y finalmente demostraremos el caso para n operadores normales no acotados que conmutan. Para ello construiremos una medida y una σ-álgebra que preserve las propiedades de los resultados anteriores.

2.1. Operadores no acotados

Definición 2.1. *Sea H un espacio de Hilbert y T un operador lineal definido en su dominio $\mathcal{D}(T)$, que es un subespacio de H. Un operador T en H se dice no acotado si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ y un escalar $M > 0$ tales que $\|x_n\| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$, pero $\|Tx_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.*

Definición 2.2. *La gráfica $\mathcal{G}(T)$ de un operador T en H es el subespacio de $H \times H$ que consiste de todas las parejas ordenadas $\{x, Tx\}$, donde $x \in \mathcal{D}(T)$.*

Definición 2.3. *S es una extensión de T (esto es $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ y $Sx =$*

$Tx\ \forall x \in \mathcal{D}(T)$) si y sólo si $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$. Lo denotamos por

$$T \subset S.$$

Definición 2.4. *Un operador cerrado en H es un operador cuya gráfica es un subespacio cerrado de $H \times H$.*

Definición 2.5. *Sea $T : \mathcal{D}(T) \to H$ un operador lineal definido densamente en H un espacio de Hilbert (esto es, $\mathcal{D}(T)$ es denso en H). Denotamos por $\mathcal{D}(T^*)$ al conjunto de todos los $y \in H$ tales que $\langle Tx, y\rangle$ es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{D}(T)$. El adjunto T^* de T es el operador dado por*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad (x \in \mathcal{D}(T), y \in \mathcal{D}(T^*)).$$

Definición 2.6. *Un operador T en H es simétrico si*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \text{con } x \in \mathcal{D}(T), y \in \mathcal{D}(T).$$

Si $T = T^*$, entonces a T se le llama autoadjunto.

Nota 2.7. *Al igual que en el Capítulo 1, (Ω, S) denota un espacio medible y $E : S \to \mathcal{B}(H)$ una resolución de la identidad. El Lema 1.94 describe un cálculo simbólico que asocia a cada $f \in C(\sigma(T); \mathbb{C})$ un operador $\Phi(f) \in \mathcal{B}(H)$ por la fórmula*

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f dE_{x,y}\ \forall x \in H, y \in H.$$

Ahora deseamos extenderlo a funciones medibles no acotadas.

Lema 2.8. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ medible. Sea $\mathcal{D}_f := \Big\{x \in H \Big| \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} < \infty\Big\}$, entonces $\mathcal{D}_f$ es un subespacio denso de H. Si $x, y \in H$ se sigue:*

$$\int_\Omega |f| d|E_{x,y}| \leq \|y\| \Big(\int_\Omega |f|^2 dE_{x,x}\Big)^{1/2}.$$

Demostración. Ver [16] Lema 13.23, Página 342. □

Teorema 2.9. *Sea E una resolución de la identidad sobre Ω.*

(a) *Para cada función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$ le corresponde un operador denso $\Phi(f)$ definido en H, con dominio $\mathcal{D}(\Phi(f)) = \mathcal{D}_f$, tal que*

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f dE_{x,y} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \forall y \in H \tag{2.1}$$

y además satisface

$$\|\Phi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f. \tag{2.2}$$

(b) *Si f y g son funciones medibles, entonces*

$$\Phi(f)\Phi(g) \subset \Phi(fg) \ y\ \mathcal{D}(\Phi(f)\Phi(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}. \tag{2.3}$$

Además, $\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(fg)$ si y sólo si $\mathcal{D}_{fg} \subset \mathcal{D}_g$.

(c) *Para cada función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$*

$$\Phi(f)^* = \Phi(\bar{f}) \tag{2.4}$$

$$\Phi(f)\Phi(f)^* = \Phi(|f|^2) = \Phi(f)^*\Phi(f) \tag{2.5}$$

Demostración. Ver [16] Teorema 13.24, página 343. □

Definición 2.10. *El conjunto resolvente de un operador T en H es el conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T - \lambda I$ es un mapeo inyectivo de $\mathcal{D}(T)$ hacia H cuya función inversa pertenece a $\mathcal{B}(H)$.*

Definición 2.11. *El espectro de T es el complemento del conjunto resolvente de T, el cual lo denotaremos por $\sigma(T)$.*

Teorema 2.12. *Supongamos que E es una resolución de la identidad sobre Ω, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ medible y $\omega_\alpha = \{p \in \Omega | f(p) = \alpha\}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$, entonces:*

(a) *Si α está en el rango esencial de f y $E(\omega_\alpha) \neq 0$, entonces $\Phi(f) - \alpha I$ no es inyectiva.*

(b) *Si α está en el rango esencial de f pero $E(\omega_\alpha) = 0$, entonces $\Phi(f) - \alpha I$ es un mapeo inyectivo de $\mathcal{D}_f$ sobre un subespacio propio de H que a su vez es denso; y existen vectores $x_n \in H$ con $\|x_n\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} [\Phi(f)x_n - \alpha x_n] = 0.$$

(c) $\sigma(\Phi(f))$ *es el rango esencial de* f*.*

Demostración. Ver [16] Teorema 13.27, página 346. □

Definición 2.13. *Sea* H *un espacio de Hilbert. Un operador lineal* T *en* H *(no necesariamente acotado) se dice normal si* T *es cerrado, está densamente definido en* H *y cumple*

$$T^*T = TT^*.$$

Definición 2.14. *Sea* N *un operador normal en* H*. Decimos que* N *es maximal normal si dada* M *una extensión de* N *(*$N \subset M$*) con* M *normal, entonces* $M = N$*.*

Teorema 2.15. *Si* N *es un operador normal en* H*, entonces:*

(a) $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(N^*)$

(b) $\|Nx\| = \|N^*x\|$ *para cada* $x \in \mathcal{D}(N)$ *y*

(c) N *es maximal normal.*

Demostración. Ver [16] Teorema 13.32, página 350. □

Teorema 2.16. [Teorema espectral]
A cada operador normal N *en* H *le corresponde una única resolución de la identidad* E *que satisface:*

$$\langle Nx, y\rangle = \int_{\sigma(N)} \lambda dE_{x,y}(\lambda) \quad (x \in \mathcal{D}(N), y \in H).$$

Más aún, $E(\omega)S = SE(\omega)$ *para todo conjunto de Borel* $\omega \subset \sigma(N)$ *y para cada* $S \in \mathcal{B}(H)$ *que conmuta con* N*, en el sentido* $SN \subset NS$*. También se sigue que* $E(\omega)N = NE(\omega)$*.*

Demostración. Ver [16] Teorema 13.33, página 351. □

2.2. Construcción de una medida y una σ-álgebra para $\mathbb{C}^n$

Observación 2.17. *En esta sección identificaremos a los números complejos con* $\mathbb{R}^2$*, es decir,* $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$*.*

Definición 2.18. *Sean A un álgebra de conjuntos en X y $\mu : A \to [0, \infty)$. μ es finito aditiva si dados $E_1, E_2 \in A$ tales que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ entonces $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.*

Definición 2.19. *Sean A un álgebra de conjuntos en X y $\mu : A \to [0, \infty)$. μ es continua en el vacío si dada una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo n, y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.*

Definición 2.20. *Sean A un álgebra de conjuntos en X y $\mu : A \to [0, \infty)$. μ es σ-aditiva en A si dada una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ con $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in A$ y que además cumple que $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \neq m$, entonces $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n)$.*

Lema 2.21. *Sean A un álgebra de conjuntos en X y $\mu : A \to [0, \infty)$. Si:*

1) μ es finito aditiva y

2) μ es continua en el vacío

Entonces μ es σ-aditiva en A.

Demostración. Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ una sucesión que cumple $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in A$ y tal que $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Vamos a verificar que $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n)$.
Llamamos $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, necesitamos una sucesión anidada y decreciente; para ello tomamos $A_k = C \setminus \bigcup_{i\leq k} C_i = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} C_i$.
También, como $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ y $C \in A$, se sigue que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$.
Tomemos ahora $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$; demostraremos que dicha intersección es vacía. Cal-

culamos:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big(C \setminus \bigcup_{i\leq k} C_i\Big) \\
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big(C \cap (\bigcup_{i\leq k} C_i)^c\Big) \\
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big(C \cap (\bigcap_{i\leq k} (C_i)^c)\Big) \\
&= C \cap \Big[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big((C_n)^c\big)\Big] \\
&= C \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n)^c = C \cap \big(C\big)^c = \emptyset
\end{aligned}$$

es decir, $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$.

Como μ es continua en el vacío se sigue que $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) &= \lim_{k\to\infty} \mu\Big(C \setminus \bigcup_{i\leq k} C_i\Big) \\
&= \mu\big(C\big) - \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i\leq k} C_i\Big) = \mu\big(C\big) - \sum_{k=1}^{\infty} \mu\big(C_i\big),
\end{aligned}$$

por lo tanto $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu\big(C_i\big)$. □

Definición 2.22. *Definimos los siguientes conjuntos:*

$I_1 := \{(a, b] |\ a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}\}$.
$I_2 := \{(c, \infty) |\ c \in \mathbb{R}\}$.
$I := I_1 \cup I_2$.
$I^{(n)} := \underbrace{(I \times I) \times (I \times I) \times \ldots \times (I \times I)}_{n \text{ veces}}$.
$\mathcal{A} := \{$*uniones finitas disjuntas de elementos de* $I^{(n)}\}$.

Lema 2.23. *El conjunto* $\mathcal{A}_1 := \{$*uniones finitas disjuntas de elementos de* $I\}$ *es un álgebra.*

Demostración. Hay que demostrar:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}_1$ y $\mathbb{R} \in \mathcal{A}_1$

(2) $\mathcal{A}_1$ es cerrada bajo intersecciones finitas

(3) si $C \in I$ entonces $\mathbb{R} \setminus C \in \mathcal{A}_1$

(4) si $D \in \mathcal{A}_1$ entonces $\mathbb{R} \setminus D \in \mathcal{A}_1$

La prueba de (1) es trivial. Veamos la prueba de (2). Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; basta con analizar los siguientes casos (en cada uno suponemos sin pérdida de generalidad que la intersección es no vacía):

- $(-\infty, c] \cap (a, b] = (a, \min\{b, c\}]$.
- $(-\infty, b] \cap (-\infty, d] = (-\infty, \min\{b, d\}]$.
- $(-\infty, b] \cap (a, \infty) = (a, b]$.
- $(a, \infty) \cap (c, \infty) = (\max\{a, c\}, \infty)$.
- $(c, \infty) \cap (a, b] = (\max\{a, c\}, b]$.
- $(a, b] \cap (c, d] = (\max\{a, c\}, \min\{b, d\}]$.

En cada caso la intersección vuelve a ser un elemento de $\mathcal{A}_1$; por lo tanto se cumple (2).
Para ver (3), sea $C \in I$. C puede tener una de las siguientes formas:

- $C = (a, b] \Longrightarrow \mathbb{R} \setminus (a, b] = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$ y como $a < b$ la intersección es vacía, por lo tanto $\mathbb{R} \setminus C \in \mathcal{A}_1$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- $C = (-\infty, b] \Longrightarrow \mathbb{R} \setminus (-\infty, b] = (b, \infty) \in \mathcal{A}_1$ $\forall b \in \mathbb{R}$.
- $C = (c, \infty) \Longrightarrow \mathbb{R} \setminus (c, \infty) = (-\infty, c] \in \mathcal{A}_1$ $\forall c \in \mathbb{R}$.

Así queda demostrado (3).
Finalmente, para demostrar (4), sea $D \in \mathcal{A}_1$, entonces $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ con $D_i \in I$ para toda i y $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Calculamos

$$\mathbb{R} \setminus D = \mathbb{R} \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n} D_i \Big) = \bigcap_{i=1}^{n} \big(\mathbb{R} \setminus D_i \big).$$

De (3) se sigue que $\mathbb{R} \setminus D_i \in \mathcal{A}_1$ para toda i. Luego, por (2) tenemos que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \setminus D_i) \in \mathcal{A}_1$.

□

Definición 2.24. *Sea H un espacio de Hilbert, $f \in H$ y $E_i : \mathcal{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \to \mathcal{B}(H)$ resoluciones de la identidad que conmutan entre sí, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ (donde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra generada por la topología usual de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Definimos $\mu_f : I^{(n)} \to \mathbb{C}$ por:*

$$\mu_f\big(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{2n}\big) = \Big\langle E_1(A_1 \times A_2) E_2(A_3 \times A_4) \ldots E_n(A_{2n-1} \times A_{2n}) f, f \Big\rangle.$$

donde $A_i \in I$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$.

Lema 2.25. *Sea $R = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ para toda i. Si $(a_1, b_1] = \bigcup_{i=1}^{r} (c_i, d_i]$ disjunta y $(a_2, b_2] = \bigcup_{j=1}^{s} (e_j, f_j]$ disjunta, entonces:*

$$\mu_f\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \mu_f\big((c_i, d_i] \times (e_j, f_j] \times (a_3, b_3] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]\big).$$

Demostración. Sea $g = E_2\big((a_3, b_3] \times (a_4, b_4]\big) \ldots E_n\big((a_{2n-1}, b_{2n-1}] \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) f$, como las resoluciones de la identidad conmutan entre sí, tenemos que:

$$\mu_f\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) = \langle E_1\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\big) g, g \rangle.$$

Dado que E_1 es una resolución de la identidad, calculamos:

$$\begin{aligned}\langle E_1\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\big) g, g \rangle &= \langle E_1\Big(\bigcup_{i=1}^{r} (c_i, d_i] \times \bigcup_{j=1}^{s} (e_j, f_j] \Big) g, g \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \langle E_1\big((c_i, d_i] \times (e_j, f_j]\big) g, g \rangle.\end{aligned}$$

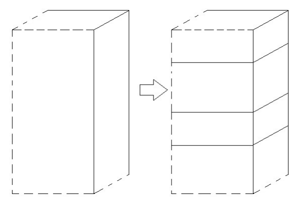

Figura 2.1: La partición de una entrada de R

Concluimos que:

$$\mu_f\big((a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\ldots\times(a_{2n},b_{2n}]\big)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\langle E_1\big((c_i,d_i]\times(e_j,f_j]\big)g,g\rangle$$
$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\mu_f\big((c_i,d_i]\times(e_j,f_j]\times(a_3,b_3]\times\ldots\times(a_{2n},b_{2n}]\big).$$

□

Notemos que en general, el lema se cumple para cualquier entrada que se elija.

Definición 2.26. *Sea* $R=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\ldots\times(a_{2n},b_{2n}]$ *con* $a_i,b_i\in\mathbb{R}$ *para toda* $i\in\{1,\ldots,2n\}$ *tal que* $(a_j,b_j]=\bigcup_{i=1}^{s_j}(a_{j,i},b_{j,i}]$ *disjunta, con* $1\le j\le 2n$. *Definimos:*

$$\theta:=\Big\{(a_{1,i_1},b_{1,i_1}]\times\ldots\times(a_{2n,i_{2n}},b_{2n,i_{2n}}]\Big|i_j\in\{1,\ldots,s_j\}\Big\}.$$

Entonces $R=\bigcup_{\alpha\in\theta}\alpha$.

Lema 2.27. *Si* $R=(a_1,b_1]\times\ldots\times(a_{2n},b_{2n}]$, *con* $R=\bigcup_{\alpha\in\theta}\alpha$, *entonces:*

$$\mu_f\big((a_1,b_1]\times\ldots\times(a_{2n},b_{2n}]\big)=\sum_{\alpha\in\theta}\mu_f(\alpha).$$

Demostración. Para $1\le m\le n$ definimos:

$$\theta_m:=\Big\{(a_{1,i_1},b_{1,i_1}]\times\ldots\times(a_{2m,i_{2m}},b_{2m,i_{2m}}]\times(a_{2m+1},b_{2m+1}]\times\ldots\times(a_{2n},b_{2n}]$$
$$\Big|i_l\in\{1,\ldots,s_l\},1\le l\le 2m\Big\}.$$

Observemos que $\theta_n = \theta$. Demostraremos que $\mu_f(R) = \sum_{\alpha\in\theta_k} \mu_f(\alpha)$ para toda k; para ello procederemos por inducción sobre k. Por el Lema 2.25 se cumple para $k = 1$. Supongamos que el teorema es cierto para alguna k tal que $k < n$. Consideremos ahora al conjunto θ_{k+1}. Por hipótesis de inducción:

$$\mu_f(R) = \sum_{\alpha\in\theta_k} \mu_f(\alpha)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{s_1} \dots \sum_{i_{2k}=1}^{s_{2k}} \mu_f\big((a_{1,i_1}, b_{1,i_1}] \times \dots \times (a_{2k,i_{2k}}, b_{2k,i_{2k}}] \times (a_{2k+1}, b_{2k+1}] \times \dots \\ \times (a_{2n}, b_{2n}]\big). \quad (2.6)$$

Además $\mu_f\big((a_{1,i_1}, b_{1,i_1}]\times\dots\times(a_{2k,i_{2k}}, b_{2k,i_{2k}}]\times(a_{2k+1}, b_{2k+1}]\times\dots\times(a_{2n}, b_{2n}]\big)$

$$= \mu_f\Bigg((a_{1,i_1}, b_{1,i_1}] \times \dots \times (a_{2k,i_{2k}}, b_{2k,i_{2k}}] \times \Big(\bigcup_{i_{2k+1}=1}^{s_{2k+1}} (a_{2k+1,i_{2k+1}}, b_{2k+1,i_{2k+1}}]\Big)\times \\ \times \Big(\bigcup_{i_{2k+2=1}}^{s_{2k+2}} (a_{2k+2,i_{2k+2}}, b_{2k+2,i_{2k+2}}]\Big) \times (a_{2k+3}, b_{2k+3}] \times \dots \times (a_{2n}, b_{2n}]\Bigg)$$

$$= \sum_{i_{2k+1}=1}^{s_{2k+1}} \sum_{i_{2k+2}=1}^{s_{2k+2}} \mu_f\big((a_{1,i_1}, b_{1,i_1}] \times \dots \times (a_{2k+2,i_{2k+2}}, b_{2k+2,i_{2k+2}}] \times (a_{2k+3}, b_{2k+3}]\times \\ \dots \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) \quad (2.7)$$

para toda $\alpha \in \theta_k$. Por lo tanto, de (2.6) y (2.7) tenemos:

$$\mu_f(R) = \sum_{\alpha\in\theta_k} \mu_f(\alpha) = \sum_{i_1=1}^{s_1} \dots \sum_{i_{2k+2}}^{s_{2k+2}} \mu_f\big((a_{1,i_1}, b_{1,i_1}] \times \dots \\ \times (a_{2k+2,i_{2k+2}}, b_{2k+2,i_{2k+2}}] \times (a_{2k+3}, b_{2k+3}] \times \dots \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) = \sum_{\beta\in\theta_{k+1}} \mu_f(\beta).$$

□

Definición 2.28. *Sean* $\{R_i\}_{i=1}^{r}$ *y* $\{\tilde{R}_j\}_{j=1}^{s}$ *conjuntos disjuntos respectivamente de rectángulos de la forma:*

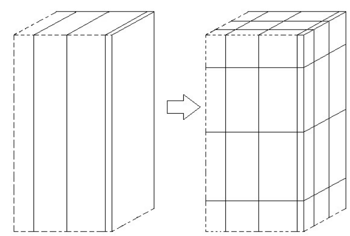

Figura 2.2: De θ_k a θ_{k+1}

$R_i = (a_1^i, b_1^i] \times \ldots \times (a_{2n}^i, b_{2n}^i]$ *y* $\tilde{R}_j = (\tilde{a}_1^j, \tilde{b}_1^j] \times \ldots \times (\tilde{a}_{2n}^j, \tilde{b}_{2n}^j]$ *tales que* $\bigcup_{i=1}^{r} R_i = \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{R}_j = C$. *Definimos los siguientes conjuntos:*

1. *Para* $m \in \{1, \ldots, 2n\}$ *sea*

$$\mathscr{C}_m := \bigcup_{i,j} \{a_m^i, b_m^i, \tilde{a}_m^i, \tilde{b}_m^i\},$$

ordenamos sus elementos de forma que $\mathscr{C}_m := \{\alpha_m^{k_m}\}$ *con* $\alpha_m^{k_m} < \alpha_m^{k_m+1}$ *para toda* $k_m \in \{1, \ldots, card(\mathscr{C}_m)-1\}$ *donde* $card(\mathscr{C}_m)$ *es la cardinalidad de* $\mathscr{C}_m$.

2. *Sea*

$$K_{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{2n}} := (\alpha_1^{\omega_1}, \alpha_1^{\omega_1+1}] \times \ldots \times (\alpha_{2n}^{\omega_{2n}}, \alpha_{2n}^{\omega_{2n}+1}]$$

con $\alpha_m^{\omega_m} \in \mathscr{C}_m$ *para toda* $m \in \{1, \ldots, 2n\}$ *y* $\omega_m \in \{1, \ldots, card(\mathscr{C}_m)-1\}$.

3. *Sea*

$$\Lambda := \{(\omega_1, \ldots, \omega_{2n}) | K_{\omega_1,\ldots,\omega_{2n}} \cap C \neq \emptyset\}.$$

Entonces $\forall (\omega_1, \ldots, \omega_{2n}) \in \Lambda$ *se tiene* $K_{\omega_1,\ldots,\omega_{2n}} \subseteq R_i$ *para una única* i *(a su vez* $K_{\omega_1,\ldots,\omega_{2n}} \subseteq \tilde{R}_j$ *para una única* j*).*

4. *Sean*

$$\Lambda^i := \{(\omega_1, \ldots, \omega_{2n}) | R_i \cap K_{\omega_1,\ldots,\omega_{2n}} \neq \emptyset\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\}$$
$$y\ \tilde{\Lambda}^j := \{(\omega_1, \ldots, \omega_{2n}) | \tilde{R}_j \cap K_{\omega_1,\ldots,\omega_{2n}} \neq \emptyset\} \quad \forall j \in \{1, \ldots, s\}$$

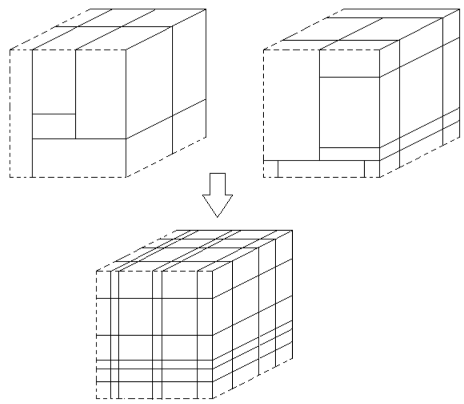

Figura 2.3: Un ejemplo de Λ^l

Proposición 2.29. *Sean* $\{R_i\}_{i=1}^r$ *y* $\{\tilde{R}_j\}_{j=1}^s$ *conjuntos disjuntos respectivamente de rectángulos de la forma:*
$R_i = (a_1^i, b_1^i] \times \ldots \times (a_{2n}^i, b_{2n}^i]$ *y* $\tilde{R}_j = (\tilde{a}_1^j, \tilde{b}_1^j] \times \ldots \times (\tilde{a}_{2n}^j, \tilde{b}_{2n}^j]$ *tales que* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^r R_i = \bigcup_{j=1}^s \tilde{R}_j = C$. *Entonces* $\displaystyle\sum_{i=1}^r \mu_f(R_i) = \sum_{j=1}^s \mu_f(\tilde{R}_j)$.

Demostración. Escribimos $C = \displaystyle\bigcup_{(\omega_1,\ldots,\omega_{2n})\in\Lambda} K_{\omega_1,\ldots,\omega_{2n}}$. Por el Lema 2.27

$$\mu_f(R_i) = \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_{2n})\in\Lambda^i} \mu_f(K_{\omega_1,\ldots,\omega_{2n}}) \text{ para } 1 \leq i \leq r.$$

Como $\Lambda = \bigcup_{i=1}^r \Lambda^i$ y $\Lambda^i \cap \Lambda^j = \emptyset$ si $i \neq j$ entonces

$$\sum_{i=1}^r \mu_f(R_i) = \sum_{i=1}^r \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_{2n})\in\Lambda^i} \mu_f(K_{\omega_1,\ldots,\omega_{2n}}) = \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_{2n})\in\Lambda} \mu_f(K_{\omega_1,\ldots,\omega_{2n}}).$$

De la misma forma vemos que $\displaystyle\sum_{j=1}^s \mu_f(\tilde{R}_j) = \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_{2n})\in\Lambda} \mu_f(K_{\omega_1,\ldots,\omega_{2n}})$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^r \mu_f(R_i) = \sum_{j=1}^s \mu_f(\tilde{R}_j).$$

□

Definición 2.30. *Sea*

$$\mathcal{R} = \{\textit{Uniones disjuntas finitas de rectángulos de la forma } (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]\}$$

Si $C \in \mathcal{R}$ *es tal que* $C = \bigcup_{i=1}^{r} R_i$ *disjunta, definimos:*

$$\mu_f(C) = \sum_{i=1}^{r} \mu_f(R_i).$$

Observación 2.31. *Por la Proposición 2.29,* $\mu_f : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ *está bien definida.*

Definición 2.32. *Sea* $D \in \mathcal{A}$ *tal que* $D = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ *disjunta con* $C_i \in I^{(n)}$ *y* $C_r \cap C_s = \emptyset$ *si* $r \neq s$*; definimos la función*

$$\mu_f : \mathcal{A} \to [0, \infty)$$
$$\mu_f(D) = \sum_{i=1}^{m} \mu_f(C)$$

Observación 2.33. *Procediendo de manera análoga a los Lemas 2.25, 2.27 y a la Proposición 2.29, tenemos que* μ_f *está bien definida en* $\mathcal{A}$*.*

Definición 2.34. *Para conjuntos compactos de la forma* $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{2n}, b_{2n}]$*, definimos:*

$$\mu_f\big([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_{2n}, b_{2n}]\big)$$
$$= \big\langle E_1\big([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]\big) \ldots E_n\big([a_{2n-1}, b_{2n-1}] \times [a_{2n}, b_{2n}]\big) f, f\big\rangle.$$

Sea

$$\mathcal{K} := \{\textit{Uniones disjuntas finitas de rectángulos compactos de } \mathbb{R}^{2n}\}.$$

Si $K \in \mathcal{K}$*, con* $K = \bigcup_{i=1}^{r} K_i$ *disjunta, con* K_i *compacto y* $K_r \cap K_s = \emptyset$ *si* $r \neq s$*, definimos:*

$$\mu_f(K) = \sum_{i=1}^{r} \mu_f(K_i)$$

.

Lema 2.35. *$\mathcal{A}$ es un álgebra.*

Demostración. Vamos a verificar

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ y $\mathbb{R}^{2n} \in \mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones finitas.

(3) Si $C \in I^{(n)}$ entonces $\mathbb{R}^{2n} \setminus C \in \mathcal{A}$.

(4) Si $D \in \mathcal{A}$ entonces $\mathbb{R}^{2n} \setminus D \in \mathcal{A}$.

La prueba de que $\emptyset \in \mathcal{A}$ es trivial. Para ver que $\mathbb{R}^{2n} \in \mathcal{A}$ basta ver que $\mathbb{R} = (-\infty, a] \cup (a, \infty)$. Por lo tanto

$$\mathbb{R}^{2n} = \big(\underbrace{(-\infty,a] \cup (a,\infty) \times (-\infty,a] \cup (a,\infty) \times \ldots \times (-\infty,a] \cup (a,\infty)}_{2n \text{ veces}}\big) \in \mathcal{A}$$

esto prueba (1). Para la prueba de (2), sean $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $C_1 = \prod_{i=1}^{2n} \omega_i$ y $C_2 = \prod_{j=1}^{2n} \omega'_j$ con $\omega_i, \omega'_j \in I$ $\forall i \forall j$ (en caso de tener $C_1 = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$ disjunta y $C_2 = \bigcup_{j=1}^{s} B_j$ disjunta, con $A_i, B_j \in I^{(n)}$ $\forall i \forall j$, se sigue $C_1 \cap C_2 = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$).

Calculamos $C_1 \cap C_2 = (\omega_1 \cap \omega'_1) \times \ldots \times (\omega_{2n} \cap \omega'_{2n})$. Como $I \subset \mathcal{A}_1$, por el Lema 2.23 $\omega_k \cap \omega'_k \in I$ para toda $k \in \{1, \ldots, 2n\}$, por lo tanto $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{A}$. Para probar (3), sea $C = B_1 \times \ldots \times B_{2n}$ con $B_i \in I$ para toda i. Entonces

$$\mathbb{R}^{2n} \setminus C = \bigcup_{J \subseteq \{1,\ldots,2n\}} B_1 \times \ldots \times B_{j_1}^c \times \ldots \times B_{j_2}^c \times \ldots \times B_{j_k}^c \times \ldots \times B_{2n}$$

donde $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ con $k \in \{1, \ldots, 2n\}$; es decir, son todos los subconjuntos no vacíos de $\{1, \ldots, 2n\}$. Además, como $I \subset \mathcal{A}_1$ y $B_{j_k} \in I$ para $1 \leq j_k \leq 2n$, por el Lema 2.23 $B_{j_k}^c = \bigcup_{m_k=1}^{r_k} B_{j_k}^{m_k}$ disjunta, donde $B_{j_s}^{m_s} \in I$ para toda $m_s \in \{1, \ldots, r_k\}$. Por lo tanto:

$$\mathbb{R}^{2n} \setminus C = \bigcup_{J \subseteq \{1,\ldots,2n\}} \bigcup_{m_1=1}^{r_1} \ldots \bigcup_{m_k=1}^{r_k} (B_1 \times \ldots \times B_{j_1}^{m_1} \times \ldots \times B_{j_2}^{m_2} \times \ldots \times B_{j_k}^{m_k} \times \ldots \times B_{2n})$$

una unión finita ajena de elementos de $I^{(n)}$, con lo que queda demostrado (3). Finalmente, para demostrar (4), sea $D \in \mathcal{A}$, entonces D se puede escribir como $D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ con $D_i \in I^{(n)}$ para toda i y $D_r \cap D_s = \emptyset$ si $r \neq s$. Notemos lo siguiente:

$$\mathbb{R}^{2n} \setminus D = \mathbb{R}^{2n} \setminus \big(\bigcup_{i=1}^{m} D_i\big) = \bigcap_{i=1}^{m} \big(\mathbb{R}^{2n} \setminus D_i\big).$$

De (2) se sigue que $\mathbb{R}^{2n} \setminus D_i \in \mathcal{A}$ $\forall i$. Entonces de (3) obtenemos finalmente que $\bigcap_{i=1}^{m} \big(\mathbb{R}^{2n} \setminus D_i\big) \in \mathcal{A}$. □

En seguida demostramos que μ_f es una casi medida; para ello necesitamos corroborar:

1. μ_f es finito aditiva.
2. μ_f es continua en el vacío.

Por la Definición 2.32, μ_f es finito aditiva.

Observación 2.36. *Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\begin{aligned}
\mu_f(A \cup B) &= \mu_f((A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)) \\
&= \mu_f(A \setminus B) + \mu_f(B \setminus A) + \mu_f(A \cap B) \\
&\leq \mu_f(A \setminus B) + \mu_f(A \cap B) + \mu_f(B \setminus A) + \mu_f(A \cap B) \\
&= \mu_f(A) + \mu_f(B),
\end{aligned}$$

así $\mu_f(A \cup B) \leq \mu_f(A) + \mu_f(B)$. En general, $\mu_f\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu_f(A_i)$.

Lema 2.37. *Sea $C = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, entonces existe un rectángulo compacto $K \subseteq C$ que se aproxima en medida a C; es decir, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K$ compacto tal que $\mu_f(C) - \mu_f(K) < \varepsilon$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $C = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, se sigue que:

$$\mu_f(C) = \mu_f\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) =$$
$$\langle E_1\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\big) E_2\big((a_3, b_3] \times (a_4, b_4]\big) \ldots E_n\big((a_{2n-1}, b_{2n-1}] \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) f, f \rangle.$$

Como E_i es una resolución de la identidad tenemos que:
$E_i\big((a_{2i-1}, b_{2i-1}] \times (a_{2i}, b_{2i}]\big) = E_i^2\big((a_{2i-1}, b_{2i-1}] \times (a_{2i}, b_{2i}]\big)$, para toda i. Tomando $g_1 = E_2\big((a_3, b_3] \times (a_4, b_4]\big) \dots E_n\big((a_{2n-1}, b_{2n-1}] \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) f$, se puede ver fácilmente que:

$$\mu_f(C) = \langle E_1\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\big) g_1, g_1\rangle.$$

Sea $\nu_{g_1}^1\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\big) := \langle E_1\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\big) g_1, g_1\rangle$. $\nu_{g_1}^1$ es una medida porque E_1 es una resolución de la identidad. También se tiene que:

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [a_1 + \frac{1}{m}, b_1] \times [a_2 + \frac{1}{m}, b_2],$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\nu_{g_1}^1\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\big) &= \nu_{g_1}^1\big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} [a_1 + \frac{1}{m}, b_1] \times [a_2 + \frac{1}{m}, b_2]\big) \\
&= \lim_{m \to \infty} \nu_{g_1}^1\big([a_1 + \frac{1}{m}, b_1] \times [a_2 + \frac{1}{m}, b_2]\big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos elegir $m_1 \in \mathbb{N}$ de tal modo que:

$$\nu_{g_1}^1\big((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\big) - \nu_{g_1}^1\big([a_1 + \frac{1}{m}, b_1] \times [a_2 + \frac{1}{m}, b_2]\big) < \frac{\varepsilon}{n},\ \forall m \geq m_1,$$

además:

$$\begin{aligned}
\nu_{g_1}^1\big([a_1 + \frac{1}{m_1}, b_1] \times [a_2 + \frac{1}{m_1}, b_2]\big) &= \langle E_1\big([a_1 + \frac{1}{m_1}, b_1] \times [a_2 + \frac{1}{m_1}, b_2]\big) g_1, g_1\rangle \\
&= \langle E_1\big([a_1 + \frac{1}{m_1}, b_1] \times [a_2 + \frac{1}{m_1}, b_2]\big) E_2\big((a_3, b_3] \times (a_4, b_4]\big) \dots \\
&\qquad E_n\big((a_{2n-1}, b_{2n-1}] \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) f, f\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sea } g_2 = E_1\big([a_1 + \frac{1}{m_1}, b_1] \times [a_2 + \frac{1}{m_1}, b_2]\big) E_3\big((a_5, b_5] \times (a_6, b_6]\big) \dots \\
E_n\big((a_{2n-1}, b_{2n-1}] \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) f,
\end{aligned}$$

hacemos $\nu_{g_2}^2\big((a_3, b_3] \times (a_4, b_4]\big) := \langle E_2\big((a_3, b_3] \times (a_4, b_4]\big) g_2, g_2\rangle$. Viendo a $\nu_{g_2}^2$ como una medida y aplicando el razonamiento previo, tenemos que existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\nu_{g_2}^2\big((a_3, b_3] \times (a_4, b_4]\big) - \nu_{g_2}^2\big([a_3 + \frac{1}{m}, b_3] \times [a_4 + \frac{1}{m}, b_4]\big) < \frac{\varepsilon}{n},\ \forall m \geq m_2.$$

De manera análoga podemos aproximar los demás intervalos por conjuntos compactos. Sea $M = \text{máx}\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, entonces:

$$\mu_f\big((a_1, b_1] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]\big) - \mu_f\big([a_1 + \frac{1}{M}, b_1] \times \ldots \times [a_{2n} + \frac{1}{M}, b_{2n}]\big) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, tenemos que existe K un rectángulo compacto que aproxima a C desde su interior de tal forma que $\mu_f(C) - \mu_f(K) < \varepsilon$. □

Lema 2.38. *Sea* $C = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]$ *con* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, *entonces para todo* $\varepsilon > 0$ *existen* $\tilde{C} \in I^{(n)}$ *y* K *un rectángulo compacto tales que* $\tilde{C} \subset K \subset C$ *y*

i) $\mu_f(C) - \mu_f(K) < \varepsilon$

ii) $\mu_f(K) - \mu_f(\tilde{C}) < \varepsilon$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Siguiendo la construcción del Lema 2.37, existe

$$K' = [a_1 + \frac{1}{M}, b_1] \times \ldots \times [a_{2n} + \frac{1}{M}, b_{2n}]$$

tal que $\mu_f(C) - \mu_f(K') < \frac{\varepsilon}{2}$ (donde $M \in \mathbb{N}$).

Notemos que $(a_i, b_i] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_i + \frac{1}{m}, b_i]$ para toda i. Procediendo de manera análoga al Lema 2.37, existe

$$\tilde{C}' = (a_1 + \frac{1}{M'}, b_1] \times \ldots \times (a_{2n} + \frac{1}{M'}, b_{2n}]$$

tal que $\mu_f(C) - \mu_f(\tilde{C}') < \varepsilon$ (donde $M' \in \mathbb{N}$).

Sea $N = \text{máx}\{M, M'\}$, entonces se cumple $(a_i + \frac{1}{N}, b_i] \subset [a_i + \frac{1}{N}, b_i]$ para toda i. Sean

$$K = [a_1 + \frac{1}{N}, b_1] \times \ldots \times [a_{2n} + \frac{1}{N}, b_{2n}]$$
$$\text{y} \quad \tilde{C} = (a_1 + \frac{1}{N}, b_1] \times \ldots \times (a_{2n} + \frac{1}{N}, b_{2n}];$$

se sigue que $\mu_f(C) - \mu_f(\tilde{C}) < \varepsilon$ y $\mu_f(C) - \mu_f(K) < \frac{\varepsilon}{2}$, así $\tilde{C} \subset K \subset C$ y

$$\mu_f(K) - \mu_f(\tilde{C}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Proposición 2.39. *Sea* $C \in I^{(n)}$ *, entonces para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* K *un rectángulo compacto tal que* $\mu_f(C) - \mu_f(K) < \varepsilon$*.*

Demostración. En el Lema 2.37 demostramos el resultado para rectángulos de la forma $C = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad basta considerar los siguientes dos casos:

(1) Si $C = (a_1, \infty) \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]$, podemos ver fácilmente que $(a_1, \infty) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} [a_1 + \frac{1}{m}, m]$. Definimos g_1 como en el Lema 2.37. Como E_1 es una resolución de la identidad, tenemos que la función $\nu^1_{g_1}\big((a_1, \infty) \times (a_2, b_2]\big) := \langle E_1\big((a_1, \infty) \times (a_2, b_2]\big)g_1, g_1\rangle$ es una medida. Calculamos:

$$\begin{aligned} \nu^1_{g_1}\big((a_1, \infty) \times (a_2, b_2]\big) &= \nu^1_{g_1}\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} [a_1 + \frac{1}{m}, m] \times [a_2 + \frac{1}{m}, b_2]\Big) \\ &= \lim_{m\to\infty} \nu^1_{g_1}\big([a_1 + \frac{1}{m}, m] \times [a_2 + \frac{1}{m}, b_2]\big) \end{aligned}$$

por lo que podemos elegir $m_1 \in \mathbb{N}$ de tal modo que

$$\nu^1_{g_1}\big((a_1, \infty) \times (a_2, b_2]\big) - \nu^1_{g_1}\big([a_1 + \frac{1}{m}, m] \times [a_2 + \frac{1}{m}, b_2]\big) < \frac{\varepsilon}{n}\, \forall m \geq m_1.$$

El resto de la prueba es análoga al Lema 2.37.

(2) Si $C = (-\infty, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_{2n}, b_{2n}]$, podemos ver fácilmente que $(-\infty, b_1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-m, b_1]$, y procedemos de manera análoga a (1).

$\square$

Observación 2.40. *Sea* $C \in I^{(n)}$*. De manera análoga al Lema 2.38, existen* $\tilde{C} \in I^{(n)}$ *y* K *un rectángulo compacto tales que* $\tilde{C} \subset K \subset C$ *y*

$$\begin{aligned} \mu_f(C) - \mu_f(K) < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0) \\ \mu_f(K) - \mu_f(\tilde{C}) < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0). \end{aligned}$$

Proposición 2.41. *Para toda* $A \in \mathcal{A}$ *y para toda* $\varepsilon > 0$*, existen* $K \in \mathcal{K}$ *y* $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ *tales que* $\mu_f(A \setminus \tilde{A}) < \varepsilon$ *y* $\tilde{A} \subset K \subset A$*.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $A = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$, con $C_i \in I^{(n)}$ y $C_r \cap C_s = \emptyset$ si $r \neq s$.
Por la Observación 2.40, existen $\tilde{C}_1' \in I^{(n)}$ y K_1 un rectángulo compacto tales que $\tilde{C}_1 \subset K_1 \subset C_1$ y que además cumplen:

$$\mu_f(C_1) - \mu_f(K_1) < \varepsilon/2m \tag{2.8}$$

$$\text{y} \quad \mu_f(K_1) - \mu_f(\tilde{C}_1) < \varepsilon/2m. \tag{2.9}$$

De (2.8) y (2.9) tenemos que

$$\mu_f(C_1) - \mu_f(\tilde{C}_1) < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Procediendo de manera análoga, para cada C_i se tiene $\mu_f(C_i) - \mu_f(\tilde{C}_i) < \frac{\varepsilon}{m}$.
Llamamos $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{C}_i$ y $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$. Entonces $\tilde{A} \subseteq K \subseteq A$ y además:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mu_f(C_i) - \sum_{i=1}^{m} \mu_f(\tilde{C}_i) &= \mu_f\Big(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\Big) - \mu_f\Big(\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{C}_i\Big) \\
&= \mu_f(A) - \mu_f(\tilde{A}) \\
&= \mu_f(A \setminus \tilde{A}) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.42. *μ_f es continua en el vacío.*

Demostración. Supongamos que $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ es una sucesión contenida en nuestra álgebra y es tal que $A_{m+1} \subseteq A_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$, y también $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = \emptyset$. Hay que demostrar entonces $\lim_{m\to\infty} \mu_f(A_m) = 0$. Supongamos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\lim_{m\to\infty} \mu_f(A_m) = \varepsilon$, por lo tanto $\mu_f(A_m) \geq \varepsilon$ para toda $m \in \mathbb{N}$.
Por la Proposición 2.41, para cada A_m existen K_m compacto y $\tilde{A}_m \in \mathcal{A}$ tales que

$$\mu_f(A_m) - \mu_f(\tilde{A}_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \text{ con } \tilde{A}_m \subseteq K_m \subseteq A_m.$$

Tomando $B_m = \bigcap_{j \leq m} K_j$ es claro que B_m es compacto para cada $m \in \mathbb{N}$. Además, calculamos

$$\begin{aligned}
\mu_f(A_m) - \mu_f(B_m) &< \mu_f(A_m) - \mu_f(\bigcap_{j \leq m} \tilde{A}_j) \\
&= \mu_f\big(A_m \setminus \bigcap_{j \leq m} \tilde{A}_j\big) \\
&= \mu_f\big(\bigcup_{j \leq m} (A_m \setminus \tilde{A}_j)\big) \\
&\leq \sum_{j \leq m} \mu_f(A_m \setminus \tilde{A}_j) \qquad \text{(por la Observación 2.36)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_f(A_j \setminus \tilde{A}_j) \\
&< \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

así, $\mu_f(A_m) - \mu_f(B_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que $\mu_f(B_m) > \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Entonces $B_m \neq \emptyset$ para toda m. Como $B_{m+1} \subseteq B_m$ son compactos no vacíos anidados, se tiene que $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción pues $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m \subseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$. Por lo tanto $\lim_{m \to \infty} \mu_f(A_m) = 0$. $\square$

Definición 2.43. *Como μ_f es una casi medida, esta genera una medida exterior*[1] *μ_f^*, que además, por el teorema de Carathéodory*[2]*, genera una medida $\bar{\mu}_f$ tal que $\bar{\mu}_f|_{\mathcal{A}^*} = \mu_f$ donde $\mathcal{A}^*$ son los conjuntos μ_f^*- medibles*[3] *y $S(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*$ (donde $S(\mathcal{A})$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$). Más aún, como μ_f es σ-finita, entonces $\bar{\mu}_f$ es única en $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ y con la propiedad de que dados $C_i \in I$ con $1 \leq i \leq 2n$:*

$$\bar{\mu}_f(C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_{2n}) = \langle E_1(C_1 \times C_2) E_2(C_3 \times C_4) \ldots E_n(C_{2n-1} \times C_{2n}) f, f \rangle.$$

Para facilitar la notación, identificamos $\bar{\mu}_f \equiv \mu_f$.

[1] Libro [4], Página 85.
[2] Libro [4], Teorema 7.11, Página 87.
[3] Libro [4], Página 87, Definición 7.8.

Lema 2.44. $\mu_f(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = \langle E_1(a_1)E_2(a_2)\ldots E_n(a_n)f, f\rangle \forall a_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{F}_1 := \Big\{b_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) |\ \mu_f(b_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = \langle E_1(b_1)E_2(a_2)\ldots E_n(a_n)f, f\rangle \\ \forall a_i \in I^2 \text{ con } i \in \{2, 3, \ldots, n\}\Big\}.$$

Es claro que si $A \in I^2$ entonces $A \in \mathcal{F}_1$ (en particular $\mathbb{R}^2 \in \mathcal{F}_1$). Veremos que $\mathcal{F}_1$ es un λ-sistema. Sea $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{F}_1$, calculamos:

$$\begin{aligned}\mu_f\Big(\big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m\big) \times a_2 \times \ldots \times a_n\Big) &= \mu_f\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} (C_m \times a_2 \times \ldots \times a_n)\Big) \\ &= \lim_{m\to\infty} \mu_f(C_m \times a_2 \times \ldots \times a_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \langle E_1(C_m)E_2(a_2)\ldots E_n(a_n)f, f\rangle \\ &= \Big\langle E_1\big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m\big)E_2(a_2)\ldots E_n(a_n)f, f\Big\rangle \quad \forall a_i \in I^2, 2 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

Ahora, sean $A, B \in \mathcal{F}_1$ tales que $B \subseteq A$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\mu_f\big((A - B) \times a_2 \times \ldots \times a_n\big) &= \mu_f\big((A \times \ldots \times a_n) - (B \times \ldots \times a_n)\big) \\ &= \mu_f(A \times \ldots \times a_n) - \mu_f(B \times \ldots \times a_n) \\ &= \langle E_1(A)E_2(a_2)\ldots E_n(a_n)f, f\rangle - \langle E_1(B)E_2(a_2)\ldots E_n(a_n)f, f\rangle \\ &= \langle E_1(A - B)E_2(a_2)\ldots E_n(a_n)f, f\rangle \quad \forall a_i \in I^2, 2 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que $\mathcal{F}_1$ es un λ-sistema. Como $\mathcal{F}_1$ contiene al π-sistema {Uniones ajenas finitas de elementos de I^2}, entonces, por el Lema de las clases monótonas[4] $S\big(\{\text{Uniones ajenas finitas de elementos de } I^2\}\big) \subseteq \mathcal{F}_1$, es decir:

$$\mu_f(a_1 \times \ldots \times a_n) = \langle E_1(a_1)\ldots E_n(a_n)f, f\rangle \forall a_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \forall a_j \in I^2 \text{ con } j > 1.$$

A partir de $\mathcal{F}_1$ podemos definir al siguiente conjunto:

$$\mathcal{F}_2 := \{b_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) |\ \mu_f(a_1 \times b_2 \times \ldots \times a_n) = \big\langle E_1(a_1)E_2(b_2)\ldots E_n(a_n)f, f\big\rangle \\ \forall a_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\ \forall a_j \in I^2 \text{ con } j \in \{3, 4, \ldots 2n\}\big\}.$$

[4] Libro [4], Teorema 1.12, página 13.

De manera análoga se ve que la σ-álgebra generada por las uniones finitas y disjuntas de elementos de I^2 se quedan contenidas en $\mathcal{F}_2$, por lo que

$$\mu_f(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = \langle E_1(a_1)E_2(a_2)\ldots E_n(a_n)f, f\rangle$$

$\forall a_1, a_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ $\forall a_j \in I^2$ con $j > 2$. Siguiendo este tipo de construcción podemos ir generando los conjuntos $\mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \ldots, \mathcal{F}_n$. Tenemos que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{F}_i$ para toda i con lo cual queda demostrado el lema. $\square$

2.3. Teorema Espectral

Teorema 2.45. *Sea $\mu_f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una medida tal que $\mu_f(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \langle E_1(A_1)E_2(A_2)\ldots E_n(A_n)f, f\rangle$ para toda $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ (con $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ la σ-álgebra de borel en los números complejos) y sea $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ medible, tal que sólo depende de la primer coordenada, entonces g es μ_f-integrable si y sólo si $g(z_1, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ es $\langle E_1(\cdot)f, f\rangle$-integrable, además se cumple:*

$$\int_{\mathbb{C}^n} g(z_1, z_2, \ldots, z_n) d\mu_f = \int_{\mathbb{C}} g(z_1, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) d\langle E_1(\cdot)f, f\rangle$$

donde c_i es una constante para toda i.

Demostración. Primero supongamos que g es de la forma $g = \chi_{A\times\mathbb{C}^{n-1}}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n} g d\mu_f &= \mu_f(A \times \mathbb{C}^{n-1}) \\
&= \langle E_1(A)E_2(\mathbb{C})\ldots E_n(\mathbb{C})f, f\rangle \\
&= \langle E_1(A)f, f\rangle \quad (\text{pues } E_i(\mathbb{C}) = Id_H\ \forall i) \\
&= \int_{\mathbb{C}} g(z_1, c_1, \ldots, c_n) d\langle E_1(\cdot)f, f\rangle.
\end{aligned}$$

Si g es una función simple $g = \sum_{i=1}^{m} a_m \chi_{A_m \times \mathbb{C}^{n-1}}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^n} g d\mu_f &= \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{i=1}^{m} a_m \chi_{A_m \times \mathbb{C}^{n-1}} d\mu_f \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mu_f(A_m \times \mathbb{C}^{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle E_1(A_m) f, f\rangle \\
&= \int_{\mathbb{C}} (z_1, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) d\langle E_1(\cdot) f, f\rangle.
\end{aligned}$$

Sea ahora g una función integrable con respecto a cualquiera de las medidas. Por el Corolario 1.78 existe una sucesión de funciones simples $s_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que convergen puntualmente a $g(z_1, c_1, \ldots, c_n)$ tales que $|s_m(z_1)| \leq |g(z_1, c_1, \ldots, c_{n-1})|\ \forall m \in \mathbb{N}$.
Si $s_m = \sum_{i=1}^{k_m} a_{i_m} \chi_{A_{i_m}}$, sea $t_m = \sum_{i=1}^{k_m} a_{i_m} \chi_{A_{i_m} \times \mathbb{C}^{n-1}}$, entonces

$$g(z_1, z_2, \ldots z_n) = \lim_{m\to\infty} t_m(z_1, \ldots, z_n),$$

donde la sucesión también cumple $|t_m(z_1, \ldots, z_n)| \leq |g(z_1, \ldots, z_n)|\ \forall m \in \mathbb{N}$. Por el Lema de Fatou[5] y el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue[6] se sigue que g es μ_f-integrable si y sólo si $g(z_1, c_1, \ldots, c_{n-1})$ es $\langle E_1(\cdot) f, f\rangle$-integrable; además:

$$\int_{\mathbb{C}^n} g d\mu_f = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}^n} t_m d\mu_f = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}} s_m d\langle E_1(\cdot) f, f\rangle.$$

Finalmente concluimos que:

$$\int_{\mathbb{C}^n} g d\mu_f = \int_{\mathbb{C}} g(z_1, c_1, \ldots, c_{n-1}) d\langle E_1(\cdot) f, f\rangle.$$

□

Observación 2.46. *El resultado del teorema anterior se aplica también a la j-ésima coordenada con $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. La prueba es análoga.*

[5] Libro [4], Corolario 4.17, página 51.
[6] Libro [4], Teorema 5.6, Página 62.

Definición 2.47. [Identidad de polarización] *Para cada conjunto de Borel $M \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ escribimos $\mu_f(M) = \mu_M(f)$; además, definimos:*

$$\mu_M(x, y) = \frac{1}{4}\big[\mu_M(x + y) - \mu_M(x - y) + i(\mu_M(x + iy) - \mu_M(x - iy))\big].$$

Teorema 2.48. *La función μ_M es antisimétrica y bilineal.*

Demostración. En principio, para el caso de rectángulos medibles, dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\mu_{a_1\times\ldots\times a_n}(x, y) = \frac{1}{4}[&\langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)(x + y), x + y\rangle - \\
&\langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)(x - y), x - y\rangle + \\
&i(\langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)(x + iy), x + iy\rangle - \\
&\langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)(x - iy), x - iy\rangle)] \\
= \frac{1}{4}[&2\langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)x, y\rangle + 2\langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)y, x\rangle \\
&+ 2i(\langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)x, iy\rangle + \langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)iy, x\rangle)] \\
= \frac{1}{4}[&4\mathrm{Re}\langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)x, y\rangle + 4i\mathrm{Im}\langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)x, y\rangle] \\
&\text{(porque las resoluciones conmutan)} \\
= \langle &E_1(a_1)\dots E_n(a_n)x, y\rangle. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

De (2.10) tenemos que $\mu_{a_1\times\ldots\times a_n}(x, y) = \langle E_1(a_1)\dots E_n(a_n)x, y\rangle$ para rectángulos medibles. Sea $\mathcal{F}$ la clase de conjuntos M para los cuáles μ_M es antisimétrica y bilineal, veamos que es cerrada bajo complementos.

$$\begin{aligned}
\mu_{M^c}(x, y) &= \frac{1}{4}\big[\mu_{M^c}(x + y) - \mu_{M^c}(x - y) + i\big(\mu_{M^c}(x + iy) - \mu_{M^c}(x - iy)\big)\big] \\
&= \frac{1}{4}\big[\langle x + y, x + y\rangle - \mu_M(x + y) - \big(\langle x - y, x - y\rangle - \mu_M(x - y)\big) + \\
&\quad i\big(\langle x + iy, x + iy\rangle - \mu_M(x + iy) - \big(\langle x - iy, x - iy\rangle - \mu_M(x - iy)\big)\big)\big] \\
&= \langle x, y\rangle - \mu_M(x, y)
\end{aligned}$$

de lo cual se sigue que μ_{M^c} también es antisimétrica y bilineal. De manera análoga se concluye que si $B \subset A$ entonces

$$\mu_{A-B}(x, y) = \mu_A(x, y) - \mu_B(x, y)$$

por lo tanto $\mathcal{F}$ es cerrada bajo diferencias.
Sea $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$, con $M_k \subset M_{k+1}, M_k \in \mathcal{F}$ para toda k, entonces:

$$\mu_M(x,y) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4}[\mu_{M_k}(x+y) - \mu_{M_k}(x-y) + i(\mu_{M_k}(x+iy) - \mu_{M_k}(x-iy))].$$

Con lo cual μ_M es bilineal y antisimétrica por ser el límite de funciones bilineales y antisimétricas. Por lo tanto $M \in \mathcal{F}$.
Se concluye que $\mathcal{F}$ es un λ-sistema que contiene al π-sistema de los rectángulos medibles, por lo tanto la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles está contenida en $\mathcal{F}$, así $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \subset \mathcal{F}$. Entonces $\mu_M(x,y)$ es bilineal y antisimétrica para todo conjunto de Borel M. $\square$

Teorema 2.49. $|\mu_M(x,x)| = \mu_M(x) \leq \|x\|^2 \; \forall M \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$.

Demostración. Sean $x \in H$ y $M \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, tenemos lo siguiente:

$$\mu_x(M) \leq \mu_x(\mathbb{C}^n) = \|x\|^2.$$

$\square$

Dada $M \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, la función μ_M es bilineal, antisimétrica y acotada, entonces cumple la desigualdad de Schwarz:

$$|\mu_M(x,y)| \leq \mu_M(x,x)^{1/2}\mu_M(y,y)^{1/2} \leq \|x\|\|y\|.$$

Por el Teorema 1.8 se puede concluir que dada $y \in H$, existe una única y' tal que $\mu_M(x,y) = \langle x, y'\rangle \forall x \in H$.
Definimos el operador $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \equiv E$ tal que $E(M)y = y' \; \forall y \in H$; como y' es único, E es lineal, además $|\langle y', y'\rangle| = |\mu_M(y', y)| \leq \|y\|\|y'\|$ por lo que $E(M)$ es un operador acotado de norma menor o igual a 1.
Como $\langle x, E(M)y\rangle = \mu_M(x,y) = \overline{\mu_M(y,x)} = \overline{\langle y, E(M)x\rangle} = \langle E(M)x, y\rangle \; \forall x \in H, \forall y \in H$, entonces $E(M)$ es autoadjunto para toda $M \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$. Es claro que $E(\emptyset) = 0$ y $E(\mathbb{C}^n) = Id_H$. Si $\omega \cap \omega' = \emptyset$, entonces $\mu_{\omega\cup\omega'}(x,y) = \mu_\omega(x,y) + \mu_{\omega'}(x,y) = \langle x, E(\omega)y\rangle + \langle x, E(\omega')y\rangle = \langle x, \big(E(\omega) + E(\omega')\big)y\rangle$. Por la unicidad de $E(\omega \cup \omega')$ tenemos que $E(\omega \cup \omega') = E(\omega) + E(\omega')$.
Para x, y fijos, la función $\langle E(\cdot)x, y\rangle = \mu_\omega(x,y)$ es una medida compleja, pues es combinación lineal de medidas positivas finitas.

Teorema 2.50. $E(\omega \cap \omega') = E(\omega)E(\omega') \; \forall \omega, \omega' \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$.

Demostración. Supongamos primero que $\omega = a_1 \times \ldots \times a_n, \omega' = b_1 \times \ldots \times b_n$ con $a_i, b_j \in \mathcal{B}(\mathbb{C})\ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$; tenemos:

$$\begin{aligned}\langle E(\omega)z, z_1\rangle &= \mu_{a_1\times\ldots\times a_n}(z, z_1)\\ &= \langle E_1(a_1)E_2(a_2)\ldots E_n(a_n)z, z_1\rangle \quad \forall z, z_1 \in H\end{aligned}$$

Entonces $E(\omega) = E_1(a_1)E_2(a_2)\ldots E_n(a_n)$ y de manera análoga $E(\omega') = E_1(b_1)E_2(b_2)\ldots E_n(b_n)$; calculamos:

$$\begin{aligned}\langle E(\omega\cap\omega')x, y\rangle &= \langle E\big((a_1\cap b_1)\times(a_2\cap b_2)\times\ldots\times(a_n\cap b_n)\big)x, y\rangle\\ &= \langle E_1(a_1)E_1(b_1)E_2(a_2)E_2(b_2)\ldots E_n(a_n)E_n(b_n)x, y\rangle\\ &= \langle E(\omega)E(\omega')x, y\rangle \quad \text{(porque las resoluciones conmutan)}\end{aligned}$$

demostrando así que $E(\omega\cap\omega') = E(\omega)E(\omega')$.
Ahora, sea $N = b_1 \times \ldots \times b_n$ con $b_i \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ fija, definimos:

$$\mathcal{F} = \{\omega \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)\big|E(\omega\cap N) = E(\omega)E(N)\}.$$

Los rectángulos medibles están contenidos en $\mathcal{F}$; veamos ahora que $\mathcal{F}$ es un λ-sistema. Sean $A, B \in \mathcal{F}, B \subset A$; se sigue:

$$\begin{aligned}\langle E\big((A-B)\cap N\big)x, y\rangle &= \mu_{(A-B)\cap N}(x, y)\\ &= \mu_{(A\cap N)-(B\cap N)}(x, y)\\ &= \langle E(A\cap N)x, y\rangle - \langle E(B\cap N)x, y\rangle\\ &= \langle E(A)E(N)x, y\rangle - \langle E(B)E(N)x, y\rangle\\ &= \Big\langle\big(E(A) - E(B)\big)E(N)x, y\Big\rangle\\ &= \langle E(A-B)E(N)x, y\rangle \quad \forall x, y \in H\end{aligned}$$

por lo tanto $A - B \in \mathcal{F}$.
Supongamos que $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, B_i \subset B_{i+1}$ para toda i, y sea $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$; vamos a demostrar que $B \in \mathcal{F}$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\langle E(B\cap N)x, y\rangle = \Big\langle E\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \cap N\Big)x, y\Big\rangle &= \mu_{(\cup_{k\in\mathbb{N}}B_k\cap N)}(x, y)\\ &= \lim_{k\to\infty} \mu_{B_k\cap N}(x, y)\\ &= \lim_{k\to\infty} \langle E(B_k\cap N)x, y\rangle\\ &= \Big\langle E\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\Big)E(N)x, y\Big\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto $B \in \mathcal{F}$, concluyendo así que $\mathcal{F}$ es un λ-sistema que contiene al π-sistema de los rectángulos medibles, entonces por el lema de clases monótonas[7] concluimos que $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \subset \mathcal{F}$. Si por último definimos

$$\mathcal{G} = \{\omega \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \big| \langle E(N \cap \omega)x, y\rangle = \langle E(N)E(\omega)x, y\rangle \forall x, y \in H\}$$

se procede de manera análoga, teniendo así que $\mathcal{G}$ es un λ-sistema que contiene al π sistema de los rectángulos medibles con $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \subset \mathcal{G}$. Quedando demostrado $E(\omega \cap \omega') = E(\omega)E(\omega')\ \forall \omega, \omega' \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$. □

De este teorema se concluye que la función $E : \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{B}(H)$ es una resolución de la identidad.
De lo anterior obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.51. *Sean $E_i : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(H)$ resoluciones de la identidad que conmutan entre sí para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$; entonces existe una resolución de la identidad $E_1 \times \ldots \times E_n : \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{B}(H)$ tal que $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n(z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_n) = E_1(z_1)E_2(z_2)\ldots E_n(z_n)$ para toda $z_j \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ con $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Teorema 2.52. *La resolución de la identidad del Teorema 2.51 es única.*

Demostración. Definimos $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Sea F una resolución de la identidad distinta de E que satisface las propiedades del Teorema 2.51; entonces, para los rectángulos medibles tenemos que $F(z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_n) = E(z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_n) \forall z_j \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. La medida $\langle F(\cdot)x, x\rangle$ es una extensión sobre $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ de la medida μ_x definida en el álgebra $\mathcal{A}$. Por la unicidad en el teorema de Carathéodory[8] se concluye que $\mu_x(\omega) = \langle F(\omega)x, x\rangle \forall \omega \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$. Por lo tanto $\langle E(\omega)x, x\rangle = \langle F(\omega)x, x\rangle \forall \omega \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$.
Calculando:

$$\begin{aligned}
\langle E(\omega)x, y\rangle &= \frac{1}{4}\big[\langle E(\omega)(x+y), x+y\rangle - \langle E(\omega)(x-y), x-y\rangle \\
&= \quad +i\big(\langle E(\omega)(x+iy), x+iy\rangle - \langle E(\omega)(x-iy), x-iy\rangle\big)\big] \\
&= \frac{1}{4}\big[\langle F(\omega)(x+y), x+y\rangle - \langle F(\omega)(x-y), x-y\rangle \\
&= \quad +i\big(\langle F(\omega)(x+iy), x+iy\rangle - \langle F(\omega)(x-iy), x-iy\rangle\big)\big] \\
&= \langle F(\omega)x, y\rangle
\end{aligned}$$

se sigue que $F = E$. □

[7] Libro [4], Teorema 1.12, Página 13
[8] Libro [4], Teorema 7.11, página 87.

Teorema 2.53. ***[Teorema espectral]*** *Sean* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *n operadores normales no acotados que conmutan entre sí (es decir,* $B_iB_j \subset B_jB_i \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$ *con* $i \neq j$*) definidos en un espacio de Hilbert* H*. Supongamos que sus resoluciones de la identidad son* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *respectivamente. Entonces, existe una resolución de la identidad* $E \equiv E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n : \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{B}(H)$ *tal que:*

$$\langle B_i x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y\rangle$$

para toda $i \in \{1,\ldots,n\}, \forall y \in H, \forall x \in Dom(B_i)$*; en donde estamos considerando* $\mathbb{C}^n = \big\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\big|\lambda_j \in \mathbb{C}, j \in \{1,2,\ldots,n\}\big\}$ *y* $\langle E(\cdot)x,y\rangle : \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ *tal que* $\omega \longmapsto \langle E(\omega)x, y\rangle$*.*

Demostración. Como $Dom(B_iB_j) \subset Dom(B_jB_i)$ y $B_iB_jx = B_jB_ix \; \forall x \in Dom(B_iB_j)$, $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$ con $i \neq j$ se sigue que sus resoluciones de la identidad conmutan entre sí. Proponemos la resolución de la identidad del Teorema 2.51, hay que demostrar que esta cumple con las condiciones mencionadas previamente. Para todo $x,y \in Dom(B_i)$; por la identidad de polarización tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big[&\int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)(x+y), x+y\rangle \\ &- \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)(x-y), x-y\rangle + i\Big(\int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)(x+iy), x+iy\rangle \\ &- \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)(x-iy), x-iy\rangle\Big)\Big]\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.45 la ecuación anterior es igual a

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4}\Big[\int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle E_i(\cdot)(x+y), x+y\rangle - \int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle E_i(\cdot)(x-y), x-y\rangle \\ &\quad + i\Big(\int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle E_i(\cdot)(x+iy), x+iy\rangle - \int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle E_i(\cdot)(x-iy), x-iy\rangle\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{4}\big[\langle B_i(x+y), x+y\rangle - \langle B_i(x-y), x-y\rangle \\ &\quad + i(\langle B_i(x+iy), x+iy\rangle - \langle B_i(x-iy), x-iy\rangle)\big] \\ &= \langle B_i x, y\rangle\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $x \in Dom(B_i), y \in H$. Como $Dom(B_i)$ es denso en

H, existe una sucesión $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset Dom(B_i)$ que converge a y. Entonces

$$\begin{aligned}\langle B_i x, y\rangle &= \lim_{m\to\infty} \langle B_i x, y_m\rangle \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y_m\rangle.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Supongamos también que g es medible y acotada con dominio $\mathbb{C}^n$ y rango los complejos. Definimos un operador como en la Definición 1.85 tal que $\left\langle \int_{\mathbb{C}^n} gdEx, y \right\rangle = \int_{\mathbb{C}^n} gd\langle E(\cdot)x, y\rangle$. Entonces se cumple:

$$\left|\left\langle \int_{\mathbb{C}^n} gdEx, y \right\rangle\right| = \left| \int_{\mathbb{C}^n} gd\langle E(\cdot)x, y\rangle \right| \leq \left\| \int_{\mathbb{C}^n} gdEx \right\| \|y\|$$

$$\text{y también } \left\| \int_{\mathbb{C}^n} gdEx \right\|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |g|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle \text{ (por el Teorema 1.87).}$$

Por lo tanto $\left| \int_{\mathbb{C}^n} gd\langle E(\cdot)x, y\rangle \right| \leq \|y\| \Big(\int_{\mathbb{C}^n} |g|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle \Big)^{1/2}$.

Sea $\nu_R = \mathrm{Re}(\langle E(\cdot)x, y\rangle)$ y sea $\nu_I = \mathrm{Im}(\langle E(\cdot)x, y\rangle)$. Sean C_R y D_R los conjuntos ν_R-positivo y ν_R-negativo de la descomposición de Hahn[9] de la medida con signo ν_R y sean C_I y D_I los equivalentes para la medida ν_I.

Sea f una función medible con dominio $\mathbb{C}^n$ y rango los complejos y cuadrado integrable con respecto a la medida $\langle E(\cdot)x, x\rangle$, sea $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones acotadas y medibles que converge a f y tal que $|f_m| \leq f$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Calculamos

$$\begin{aligned}\Big| \int \chi_{C_R} |f_m| d\nu_R \Big| &= \Big| Re\Big(\int \chi_{C_R} |f_m| d\langle E(\cdot)x, y\rangle \Big)\Big| \leq \Big| \int \chi_{C_R} |f_m| d\langle E(\cdot)x, y\rangle \Big| \\ &= \Big| \Big\langle \int \chi_{C_R} |f_m| dEx, y \Big\rangle \Big| \leq \Big\| \int \chi_{C_R} |f_m| dEx \Big\| \|y\| \\ &= \|y\| \Big(\int |f_m|^2 \chi_{C_R} d\langle E(\cdot)x, x\rangle \Big)^{1/2} \leq \|y\| \Big(\int |f_m|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle \Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

De manera análoga se tiene

- $\Big| \int \chi_{D_R} |f_m| d\nu_R \Big| \leq \|y\| \Big(\int |f_m|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle \Big)^{1/2}$

[9] Libro [13], Teorema A, Página 121.

- $\Big|\displaystyle\int \chi_{C_I}|f_m|d\nu_I\Big| \leq \|y\|\Big(\int |f_m|^2 d\langle E(\cdot)x,x\rangle\Big)^{1/2}$
- $\Big|\displaystyle\int \chi_{D_I}|f_m|d\nu_I\Big| \leq \|y\|\Big(\int |f_m|^2 d\langle E(\cdot)x,x\rangle\Big)^{1/2}$

De forma que

$$\begin{aligned}\int |f_m|d\|\langle E(\cdot)x,y\rangle\| \leq 4\|y\|\Big(\int |f_m|^2 d\langle E(\cdot)x,x\rangle\Big)^{1/2}\\ \leq 4\|y\|\Big(\int |f|^2 d\langle E(\cdot)x,x\rangle\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

donde $\|\langle E(\cdot)x,y\rangle\|$ es la variación de la medida compleja $\langle E(\cdot)x,y\rangle$. Por el Lema de Fatou[10] y el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue[11] se sigue que:

$$\lim_{m\to\infty}\int |f_m|d\|\langle E(\cdot)x,y\rangle\| = \int |f|d\|\langle E(\cdot)x,y\rangle\| \leq 4\|y\|\Big(\int |f|^2 d\langle E(\cdot)x,x\rangle\Big)^{1/2}$$

así, $f \in L_1(\|\langle E(\cdot)x,y\rangle\|)$ y $\Big|\displaystyle\int f d\langle E(\cdot)x,y\rangle\Big| \leq 4\|y\|\Big(\int |f|^2 d\langle E(\cdot)x,x\rangle\Big)^{1/2}$. Ahora, si $x \in Dom(B_i)$ entonces λ_i es el cuadrado integrable con la medida $\langle E(\cdot)x,x\rangle$, de manera que por el Teorema 2.45, λ es el cuadrado integrable con respecto a la medida $\langle E(\cdot)x,x\rangle$. Si $\{y_m\}$ es como en (2.11), tenemos

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{C}^n}\lambda_i d\langle E(\cdot)x,y\rangle - \int_{\mathbb{C}^n}\lambda_i d\langle E(\cdot)x,y_m\rangle\Big|\\ &= \Big|\int_{\mathbb{C}^n}\lambda_i d\langle E(\cdot)x,y-y_m\rangle\Big| \leq 4\|y-y_m\|\Big(\int_{\mathbb{C}^n}|\lambda_i|^2 d\langle E(\cdot)x,x\rangle\Big)^{1/2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

De esto último y de (2.11) concluimos

$$\langle B_i x,y\rangle = \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{C}^n}\lambda_i d\langle E(\cdot)x,y_m\rangle = \int_{\mathbb{C}^n}\lambda_i d\langle E(\cdot)x,y\rangle \forall y\in H \forall x\in Dom(B_i)$$

quedando demostrada la existencia de la resolución de la identidad. □

Teorema 2.54. *La resolución de la identidad del Teorema 2.53 es única.*

[10] Libro [4], Corolario 4.17, página 51
[11] Libro [4] Teorema 5.6, página 62

Demostración. Sea F otra resolución de la identidad que cumple con las premisas del Teorema 2.53, vamos a ver que $F = E$.
Definimos las funciones $F_1, F_2, \dots, F_n : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(H)$ como sigue:

$$\begin{aligned} F_1(A) &= F(A \times \mathbb{C}^{n-1}) \\ F_2(A) &= F(\mathbb{C} \times A \times \ldots \times \mathbb{C}^{n-2}) \\ &\vdots \\ F_n(A) &= F(\mathbb{C}^{n-1} \times A). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} \chi_{A\times\mathbb{C}^{n-1}} d\langle F(\cdot)x, y\rangle &= \langle F(A \times \mathbb{C}^{n-1})x, y\rangle \\ &= \langle F_1(A)x, y\rangle \\ &= \int_{\mathbb{C}} \chi_A d\langle F_1(\cdot)x, y\rangle, \end{aligned}$$

entonces, para cualquier función s simple que sólo depende de la primera coordenada y para constantes $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{C}^n} s d\langle F(\cdot)x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} s(\lambda_1, c_1, \dots, c_{n-1}) d\langle F_1(\cdot)x, y\rangle. \tag{2.12}$$

Sea $x \in Dom(B_1)$, entonces por hipótesis se sigue que λ_1 es cuadrado integrable con respecto a la medida $\langle F(\cdot)x, x\rangle$, además, como la medida es finita, también es absolutamente integrable. Sea $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}, s_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones simples que convergen de manera monótona a λ (es decir, $|s_m| \leq |s_{m+1}| \forall m \in \mathbb{N}$), entonces si $s_m = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_m} a_{i,m}\chi_{A_{i,m}}$, sea $t_m = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_m} a_{i,m}\chi_{A_{i,m}\times\mathbb{C}^{n-1}}$, se obtiene que la sucesión $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge de manera monótona a λ_1, entonces, por el Teorema de convergencia monótona[12] $\displaystyle\int_{\mathbb{C}^n} |\lambda_1| d\langle F(\cdot)x, x\rangle = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}^n} |t_m| d\langle F(\cdot)x, x\rangle$, y por (2.12) esto último es igual a $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}} |s_m| d\langle F_1(\cdot)x, x\rangle$; donde una vez más por el teorema de convergencia

[12] Libro [4], Teorema 4.13, página 48.

monótona esto es igual a $\int_{\mathbb{C}} |\lambda| d\langle F_1(\cdot)x, x\rangle$. Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{C}^n} \lambda_1 d\langle F(\cdot)x, x\rangle = \int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle F_1(\cdot)x, x\rangle \forall x \in Dom(B_1)$$

y de manera análoga

$$\int_{\mathbb{C}^n} |\lambda_1|^2 d\langle F(\cdot)x, x\rangle = \int_{\mathbb{C}} |\lambda|^2 d\langle F_1(\cdot)x, x\rangle \forall x \in Dom(B_1).$$

Si $x, y \in Dom(B_1)$; como

$$\begin{aligned}\langle F(\omega)x, y\rangle = \frac{1}{4}\big[&\langle F(\omega)(x+y), x+y\rangle - \langle F(\omega)(x-y), x-y\rangle \\ &+ i\big(\langle F(\omega)(x+iy), x+iy\rangle - \langle F(\omega)(x-iy), x-iy\rangle\big)\big] \text{ y} \\ \langle F_1(\omega)x, y\rangle = \frac{1}{4}\big[&\langle F_1(\omega)(x+y), x+y\rangle - \langle F_1(\omega)(x-y), x-y\rangle \\ &+ i\big(\langle F_1(\omega)(x+iy), x+iy\rangle - \langle F_1(\omega)(x-iy), x-iy\rangle\big)\big]\end{aligned}$$

se obtiene que:

$$\langle B_1 x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_1 d\langle F(\cdot)x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle F_1(\cdot)x, y\rangle \forall x, y \in Dom(B_1).$$

Como $Dom(B_1)$ es denso en H, existe una sucesión $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset Dom(B_1)$ que converge a y. Entonces:

$$\begin{aligned}\langle B_1 x, y\rangle &= \lim_{m\to\infty} \{B_1 x, y_m\rangle \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_1 d\langle F(\cdot)x, y_m\rangle \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle F_1(\cdot)x, y_m\rangle\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\langle B_1 x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}^n} \lambda_1 d\langle F(\cdot)x, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} \lambda d\langle F_1(\cdot)x, y\rangle \quad \forall x \in Dom(B_1)\, \forall y \in H.$$

De la unicidad del Teorema 2.16, se concluye que $F_1 = E_1$. A su vez, de manera análoga, $F_i = E_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se sigue $F(A \times \mathbb{C}^{n-1}) =$

$E_1(A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), F(\mathbb{C} \times A \times \mathbb{C}^{n-2}) = E_2(A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), \ldots, F(\mathbb{C}^{n-1} \times A) = E_n(A) \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.
Finalmente $F(A_1 \times \mathbb{C}^{n-1})F(\mathbb{C} \times A_2 \times \mathbb{C}^{n-2}) \ldots F(\mathbb{C}^{n-1} \times A_n) = F\big((A_1 \times \mathbb{C}^{n-1}) \cap (\mathbb{C} \times A_2 \times \mathbb{C}^{n-2}) \cap \ldots \cap (\mathbb{C}^{n-1} \times A_n)\big) = F(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = E_1(A_1)E_2(A_2) \ldots E_n(A_n) \forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Por el Teorema 2.52 se concluye que $F = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. $\square$

Bibliografía

[1] A. D. Alekandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev: "Mathematics. It's Content, Methods, and Meaning", in three volumes, MIT Press, Cambridge Mass, 1963.

[2] Felix Klein: "Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19, Jahrhundert", Chelsea, New York, 1967.

[3] Florian Cajori: "A History of Mathematical Notations", Dover, New York, 1993.

[4] Guillermo Grabinsky: "Teoría de la medida", segunda reimpresión, UNAM, Facultad de Ciencias, México, 2013.

[5] H. L. Royden: "Real Analysis", third edition, Mcmillan Publishing Company, New York, 1988.

[6] H.R. Dowson: "Spectral theory of linear operators", Academic Press Inc, London, 1978.

[7] Jean Dieudonné: "History of Functional Analysis", North-Holland, Amsterdam, New York, and Oxford, 1981.

[8] John B. Conway: "A Course in Functional Analysis", Springer, New York, 1985.

[9] K.O. Friedrichs: "Spectral theory of operators in Hilbert space", Springer-Verlag, New York, 1973.

[10] Lars V. Ahlfors: "Complex Analysis an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable", second edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[11] Michael Reed, Barry Simon: "Methods of modern mathematical physics", second printing, Academic Press Inc, New York and London, 1973.

[12] Ola Bratteli, Derek William Robinson: "Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1", Springer, New York, 1987.

[13] Paul R. Halmos: "Measure Theory", Springer, New York, 1974.

[14] Rafael del Río, Asaf Franco, José Lara: "A short proof of F. Riesz representation Theorem", arXiv:1606.05026 [math.FA], 2017.

[15] Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert: "Introduction to real analysis", second edition, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1982.

[16] Rudin Walter: "Functional Analysis", McGraw-Hill Book Company, New York,1921.

[17] Rudin Walter: "Principles of Mathematical Analysis", third edition, McGraw-Hill, Inc, New York, 1976.

[18] Rudin Walter: "Real and complex analysis", second edition, McGraw-Hill, Inc, New York, 1974.