



Facultad de Estudios Superiores

Acatlán

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

Percolación de último pasajero y modelos relacionados

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN ACTUARÍA

P R E S E N T A :
Apátiga Sánchez Jorge Luis

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Sergio Iván López Ortega

Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México, Edo. Mx., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Percolación de último pasajero	3
1.1. Definición del modelo.	3
1.2. Principales resultados	7
2. Modelos de Crecimiento.	15
2.1. Definición del modelo	15
2.2. Simulación de modelos de crecimiento.	21
3. Modelo de Filas.	25
3.1. Definición del modelo de filas.	25
3.2. Modelo de Almacén.	28
3.2.1. Definición del modelo de almacén.	29
3.2.2. Generalización del teorema de Burke	32
4. La representación Robinson-Schensted-Knuth (RSK)	35
5. Relación entre modelos	39
5.1. Relación entre percolación de último pasajero y el modelo de crecimiento.	39
5.2. Relación entre Percolación de último pasajero y el modelo de filas	40
5.3. Relación entre modelo de filas y almacenes, último pasajero y el modelo RSK	41
6. Conclusiones	47
A. Teoría complementaria.	49
B. Código de simulación	51

Introducción

En esta tesis estudiaremos el modelo de Percolación de último pasajero, el modelo de crecimiento, el modelo de filas y almacenes y por último la representación Robinson-Schensted-Knuth (RSK). Y las relaciones que existen entre ellos.

La percolación de último pasajero es un modelo sobre una malla con pesos aleatorios; es análogo al modelo de primer pasajero analizado en Kesten[5] y Durrett[2]. En el caso de último pasajero lo que se busca es maximizar el peso de la trayectoria entre dos puntos de la malla cuyo movimiento esta restringido en moverse a la derecha o hacia arriba. La interpretación física de este modelo es de una partícula que se quiere mover en un medio aleatorio de un punto inicial a uno final pero toma los caminos con más peso. En nuestro caso estudiaremos una malla de dimensión dos cuyos pesos son v.a.i.i.d. con pesos exponenciales o geométricos. Esto se debe a que son los únicos caso no triviales en donde se conoce explícitamente la función de forma g^1 ; para el caso en que los pesos son exponenciales el resultado fue demostrado por Rost [13].

En el capítulo 2 estudiaremos el modelo de crecimiento asociado al tiempo de pasaje T^2 . Analizando el conjunto de puntos sobre la malla tales que la suma de los pesos del origen a dicho punto es menor a un cierto tiempo t ; básicamente se trata de describir la forma de crecimiento, digamos, de un cristal que esta limitado a crecer sólo a la derecha y hacia arriba.

En el tercer capítulo abordaremos el modelo de filas y almacenaje. Éste modelo parte de suponer que tenemos una cantidad infinita de clientes y una cantidad infinita de cajas, las cajas y los clientes están etiquetados con naturales $1, 2, \dots$ etc.. Para que el cliente 1 pase a formarse a la caja 2 primero debió de haber acabado su tramite en la caja 1 y así sucesivamente: para cualquier caja k primero debió acabado su tramite en las $k-1$ cajas anteriores. Naturalmente para que el cliente 2 sea atendido en la caja 1 primero el cliente uno debió haber acabado su tramite en la caja 1; este tipo de modelos se llama FIFO³ i.e. el primero que entra es el primero que sale (por sus siglas en ingles). Por lo que para que el cliente n sea atendido en la caja k deben suceder las siguientes dos cosas: 1) el cliente $n-1$ debió haber acabado su tramite en la caja k y 2) el cliente n debió haber concluido su tramite en la caja $k-1$.

¹La función de forma g se introducirá formalmente en el capítulo 1 de este trabajo.

²El tiempo de pasaje T será introducido en el capítulo 1.

³First in First out

Éste modelo se estudia suponiendo proceso Poisson, así que las llegadas son v.a.i.i.d. exponenciales. De aquí se sigue que es un proceso de Markoviano. Si los tiempo de servicio también forman un proceso Markoviano estamos ante una fila M/M/1, que quiere decir que el proceso de llegada es Markoviano, el proceso de servicio es Markoviano y el número de cajas que atienden a cada paso es una. Aquí demostraremos el teorema de Burke, que dice que en el equilibrio el proceso de salida efectiva de una fila M/M/1 estacionaria tiene la misma tasa que el proceso de llegada. Más adelante en esa misma sección se generalizara el teorema de Burke para el proceso puntual marcado formado por el proceso de llegada y los tiempos de servicio. Finalmente se introducirá el modelo de almacenes y veremos algunas igualdades que son naturales en la interpretación del modelo.

En el capítulo 4 estudiaremos la representación Robinson-Schensted-Knuth (RSK) que nos da un algoritmo para crear un tablero de Young de una palabra sobre un alfabeto K con N letras. Lo relevante es que la palabra puede ser formada por una serie de variables aleatorias determinadas por dos parámetros; esto nos recuerda los pesos sobre la malla de la percolación de último pasajero, en la cuál (para dimensión dos) los pesos sobre cada punto están determinados por variables aleatorias de dos parámetros que representan las coordenadas de cada punto. Por lo que mostramos la relación entre percolación de último pasajero y el modelo RSK, pues resulta ser que la percolación de último pasajero coincide con el primer renglón de la tabla de Young formada por el algoritmo RSK. Por último en el quinto capítulo estudiaremos la relación entre los modelos introducidos en los capítulos anteriores.

Capítulo 1

Percolación de último pasajero

1.1. Definición del modelo.

En el desarrollo de esta tesis se trabajó con mallas d -dimensionales no-negativas en \mathbb{Z}_+^d . Ahora introduciremos notación y algunas definiciones básicas. Para $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^d$ (y similarmente para \mathbb{Z}^d , \mathbb{R}_+^d y \mathbb{R}^d) denotaremos a x_i como la i -ésima coordenada de \mathbf{x} ; usaremos la norma $\|\mathbf{x}\| = \sum |x_i|$. Denotaremos por $\mathbf{0}$ a el origen y a e_i al punto que tiene todas sus coordenadas iguales a 0 excepto la i -ésima coordenada que es 1.

Notación. Escribiremos $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'$ si $x_i \leq x'_i \quad \forall i = 1, \dots, d$.

Ahora, para cada $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_d\}$ en \mathbb{Z}^d , asociamos el peso $X(\mathbf{z})$. donde asumimos que los pesos $\{X(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d\}$ son variables aleatorias i.i.d. no-negativas, con función de distribución F . A veces escribiremos simplemente X para denotar una v.a. con distribución F .

Definición 1.1.1. *Camino dirigido.* Para \mathbf{z} en \mathbb{Z}_+^d un camino dirigido es un conjunto de puntos en el cuál cada paso consiste en incrementar una única coordenada por 1 ($z(j+1) = z(j) + e_i$, para algún $i \in \{1, \dots, d\}$).

Definición 1.1.2. Sean $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ en \mathbb{Z}_+^d , con $\mathbf{z}_1 \leq \mathbf{z}_2$, Definimos a $\Pi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ como el conjunto de caminos dirigidos con punto inicial \mathbf{z}_1 y punto final \mathbf{z}_2 . Por convención se excluye el punto inicial \mathbf{z}_1 .

Identificaremos a un camino por los puntos que éste contiene, además todos los caminos $\pi \in \Pi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ tienen un peso o Longitud $\|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1\|$ donde $\|\cdot\|$ denota la norma del taxi en \mathbb{Z}^d .

Definición 1.1.3. *Tiempo de ultimo pasajero.* Para cada par de puntos $\mathbf{z}_1 \leq \mathbf{z}_2$ definimos $T(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ (el tiempo de ultimo pasajero de \mathbf{z}_1 a \mathbf{z}_2) como

el máximo peso de todos los caminos dirigidos de \mathbf{z}_1 a \mathbf{z}_2 . Esto es:

$$T(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \max_{\pi \in \Pi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)} \sum_{v \in \pi} X(v).$$

En el caso en que $\mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$, escribiremos simplemente $\Pi(\mathbf{z}) = \Pi(\mathbf{0}, \mathbf{z})$ y

$$T(\mathbf{z}) = T(\mathbf{z}, \mathbf{0}) = \max_{\pi \in \Pi(\mathbf{z})} \sum_{v \in \pi} X(v).$$

Como $T(\mathbf{z})$ es el peso máximo de todos los caminos directos del origen a el punto \mathbf{z} obtenemos de manera inmediata la siguiente propiedad.

Proposición 1.1.4. Propiedad de superaditividad Sean $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in \mathbb{Z}^d$ Si $\mathbf{z}_1 \leq \mathbf{z}_2 \leq \mathbf{z}_3$ entonces

$$T(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) + T(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \leq T(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3) \quad (1.1)$$

Ahora supongamos que $\mathbb{E}(T(\mathbf{z})) < \infty$ para todo $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ y para cada \mathbf{x} en \mathbb{R}_+^d definimos

$$g(\mathbf{x}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(T([nx]) \right),^1 \quad (1.2)$$

(que puede ser infinito). A veces escribiremos $g_F(\mathbf{x})$ para enfatizar la dependencia de g en F .

A continuación enunciaremos el Teorema ergódico de Kingman en su versión subaditiva; la demostración del teorema se puede consultar en [6].

Teorema 1.1.5. Teorema ergódico de subaditividad de Kingman. Suponga $(X_{m,n})$ es una colección de v.a. indexadas por números enteros tales que $0 \leq m \leq n$ y satisfacen:

- 1) $X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$,
- 2) La distribución conjunta de $\{X_{m+1, m+k+1}, k \geq 1\}$ es la misma que la de $\{X_{m, m+k}, k \geq 1\}$ para cada m positivo,
- 3) Para cada $k \geq 1$, $\{X_{nk, (n+1)k}, n \geq 1\}$ es un proceso ergódico.

Entonces:

$$X := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}X_{0,n}}{n} = \inf_n \frac{\mathbb{E}X_{0,n}}{n} \quad (1.3)$$

y el límite X es un variable aleatoria que es constante casi seguramente.

Las siguientes propiedades de la función g son inmediatas de la definición de g (1.2) y de la propiedad de superaditividad (1.1), usando una versión (superaditiva) del Teorema ergódico de subaditividad de Kingman 1.1.5.

¹ $[nx]$ denota a el máximo entero de nx .

Proposición 1.1.6. *Suponga que $\mathbb{E} | X | \leq \infty$ entonces:*

i) Para cada \mathbf{x} en \mathbb{R}_+^d

$$\frac{1}{n}T([n\mathbf{x}]) \rightarrow g(\mathbf{x}) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \text{ c.s. y si } |g(\mathbf{x})| \leq \infty \text{ también en } \mathcal{L}_1.$$

ii) $g(\alpha\mathbf{x}) = \alpha g(\mathbf{x})$ para toda $\alpha \leq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$.

iii) g es invariante bajo permutaciones de coordenadas.

iv) $g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}) \leq g(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d$.

Demostración. i). En [6] tenemos (como ya se mencionó) una versión subaditiva para variables aleatorias de dos parámetros; en nuestro caso como las $T(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ son v.a. positivas podemos multiplicar por un menos uno ($-T(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$) y obtener v.a. negativas. Ahora demostremos que cumple las hipótesis (1.7)(1.8)(1.9) de [6]. Notemos que (1.7) se cumple, pues al multiplicar por un menos a las variables se invierte la desigualdad en (1.1). También ocurre que (1.8) y (1.9) se cumple trivialmente pues pedimos las $(X_i)_i$ i.i.d. por lo que cumple las condiciones del **Resultado 1** de [6] y al combinar (1.4) y (1.5) obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(-T([n\mathbf{x}]) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(-T([n\mathbf{x}]) \right) = \inf_n \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(-T([n\mathbf{x}]) \right).$$

Al multiplicar por un menos obtenemos el resultado que queríamos.

ii). Es inmediato del Teorema de super aditividad de Kingman; esto es:

$$\begin{aligned} g(\alpha x, \alpha y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} (T([n\alpha x], [n\alpha y])) \\ &= \lim_{\dot{n} \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\dot{n}} \mathbb{E} (T([\dot{n}x], [\dot{n}y])) \\ &= \alpha \lim_{\dot{n} \rightarrow \infty} \frac{1}{\dot{n}} \mathbb{E} (T([\dot{n}x], [\dot{n}y])) \\ &= \alpha g(x, y) \end{aligned}$$

donde $\dot{n} = n\alpha$.

iii). Primero las v.a. $T([nx], [ny])$ y $T([ny], [nx])$ son iguales en distribución, i.e,

$$T([nx], [ny]) \stackrel{D}{=} T([ny], [nx])$$

pues son máximos de sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, además tienen la misma cantidad de sumandos pues $(\|(x, y)\| = \|(y, x)\|)$. Entonces

$$\mathbb{E}(T([nx], [ny])) = \mathbb{E}(T([ny], [nx])),$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(T([nx], [ny])) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(T([ny], [nx])).$$

Finalmente del teorema (1.1.5) sabemos que el límite del lado derecho (o del lado izquierdo) existe y es único. Por lo tanto

$$g(x, y) = g(y, x).$$

iv). Por 1.1 tenemos:

$$\begin{aligned} & T([n\mathbf{x}]) + T([n\mathbf{y}]) \leq T([n(\mathbf{x}+\mathbf{y})]) \\ \Rightarrow & \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(T([n\mathbf{x}])\right) + \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(T([n\mathbf{y}])\right) \leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(T([n(\mathbf{x}+\mathbf{y})])\right) \\ \Rightarrow & \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(T([n\mathbf{x}])\right) + \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(T([n\mathbf{y}])\right) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(T([n(\mathbf{x}+\mathbf{y})])\right) \\ \Rightarrow & g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}) \leq g(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \end{aligned}$$

□

1.2. Principales resultados

La Proposición 2.2 y el Teorema 2.3 de [8] J.B. Martin demuestra que la función de forma g está acotada y es continua. A continuación citaremos dichos resultados.

Teorema 1.2.1. *Si*

$$\mathbb{E} |X| < \infty \quad (1.4)$$

y

$$\int_0^\infty (1 - F(s))^{\frac{1}{d}} ds < \infty \quad (1.5)$$

entonces $|g(\mathbf{x})| < \infty$ para todo \mathbf{x} en \mathbb{R}_+^d . Más aún g es continua en todo \mathbb{R}_+^d incluyendo los límites.

Ahora pasemos a uno de los resultados más importantes en el modelo de Percolación de último pasajero. En adelante la dimensión del espacio será $d = 2$ a menos que se indique lo contrario.

Teorema 1.2.2. *Si la distribución F tiene media μ , varianza σ^2 y además satisface:*

$$\int_0^\infty (1 - F(s))^{1/2} ds \leq \infty, \quad (1.6)$$

$$\int_{-\infty}^0 (1 - F(s))^{1/2} ds \leq \infty. \quad (1.7)$$

Entonces, cuando α decrece a cero,

$$g(1, \alpha) = \mu + 2\sigma\sqrt{\alpha} + o(\sqrt{\alpha}).$$

La demostración de este teorema se hace al final de esta sección, debido a que primero mostraremos algunos resultados que harán más sencilla dicha tarea. Los siguientes resultados son un poco más detallados que los presentados en [8].

Para este primer lema obtendremos una tasa de crecimiento cuando la función de distribución F es Bernoulli. Esto lo haremos a través de una comparación con otro modelo de percolación en donde la distribución Bernoulli tiene solución exacta.

Lema 1.2.3. *Para toda $\alpha > 0$, $p \in [0, 1]$,*

$$g_{Ber(p)}(1, \alpha) \leq (1 + \alpha) + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{1 + \alpha}\sqrt{p(1 - p)} \quad .$$

Demostración: Recordemos que

$$T(\mathbf{k}) = \max_{\pi \in \Pi(\mathbf{k})} \sum_{\mathbf{v} \in \pi} X(\mathbf{v})$$

con $k = (m, n) \in \mathbb{Z}_+^2$. donde $\Pi(k) = \Pi((0, 0), (m, n)) = \Pi(m, n)$ es el conjunto de caminos directos de $\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{m+n-1}$ donde $\mathbf{Z}_0 = 0$.

Además ocurre que $1 \leq i \leq m+n-1$, $\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{e}_j$ para $j \in \{1, 2\}$. Definiremos un conjunto alternativo de caminos directos $\tilde{\Pi}(k)$ donde los caminos de este conjunto son de la forma:

$$(0, y_0), (1, y_1), \dots, (m-1, y_{m-1}),$$

donde $0 \leq y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_{m-1} \leq n$. Definimos:

$$\tilde{T}(m, n) = \max_{\tilde{\pi} \in (k)} \sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\pi}} X(\mathbf{z}).$$

Definamos la función $\Psi : \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{Z}_+^2$ por $\Psi(x, y) = (x + y, y)$. Es claro que la función Ψ es inyectiva y como $\{X(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^2\}$ son i.i.d., tenemos:

$$\mathbb{E}(T(k)) = \mathbb{E} \max_{\pi \in \Pi(k)} \sum_{\mathbf{z} \in \pi} X(\mathbf{z}) = \mathbb{E} \max_{\pi \in \Pi(k)} \sum_{\mathbf{z} \in \pi} X(\Psi(\mathbf{z})). \quad (1.8)$$

Para un camino $\pi = \mathbf{Z}_0, \dots, \mathbf{Z}_{r-1}$, denotamos por $\Psi(\pi)$ al camino $\Psi(\mathbf{z}_0, \dots, \Psi(\mathbf{z}_{r-1}))$. Sea $\Psi(\Pi(m, n)) := \{\tilde{\pi} : \tilde{\pi} = \Psi(\pi) \text{ para alguna } \pi \in \Pi(m, n)\}$, entonces $\Psi(\Pi(m, n)) \subseteq (m+n, n)$ de donde se sigue que si $\pi \in \Pi(m, n)$ entonces $\Psi(\pi) \in (m+n, n)$.

Así, a partir de (1.8) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T(m, n) &= \mathbb{E} \max_{\pi \in \Pi(m, n)} \sum_{\mathbf{v} \in \Psi(\pi)} X(\mathbf{v}) \\ &= \mathbb{E} \max_{\tilde{\pi} \in \Psi(\Pi(m, n))} \sum_{\mathbf{v} \in \tilde{\pi}} X(\mathbf{v}) \\ &\leq \mathbb{E} \max_{\tilde{\pi} \in \tilde{\Pi}(m, n)} \sum_{\mathbf{v} \in \tilde{\pi}} X(\mathbf{v}) \\ &= \mathbb{E}(m+n, n). \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$g(1, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}T(n, [\alpha n]) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{n} \mathbb{E}([1+\alpha]n, [\alpha n]). \quad (1.9)$$

En [14] Seppäläinen analizó la función de percolación directamente basada en el conjunto $\tilde{\Pi}$ antes definido, y en particular para pesos Bernoulli obtuvo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}_{Ber(p)}([\alpha_1 n], [\alpha_2 n]) \leq \alpha_1 p + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \sqrt{p(1-p)}.$$

Sustituyendo esta última desigualdad en (1.9) con $\alpha_1 = 1 + \alpha$ y $\alpha_2 = \alpha$ obtenemos:

$$g(1, \alpha) \leq (1 + \alpha)p + 2\sqrt{\alpha(1 + \alpha)}\sqrt{p(1-p)} \quad \square$$

Lema 1.2.4. Sea F_1 y F_2 funciones de distribución con medias μ_1 y μ_2 y satisfacen (1.6) y (1.7). Entonces para toda $\alpha > 0$ ocurre que

$$|g_{F_1}(1, \alpha) - g_{F_2}(1, \alpha) - (1 + \alpha)(\mu_1 - \mu_2)| \leq 2\sqrt{\alpha(1 + \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(s) - F_2(s)|^{1/2} ds.$$

Demostración. Sea $\{U(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^2\}$ v.a. uniformes $[0, 1]$ i.i.d., y para $i = 1, 2$, sea $X_i(\mathbf{z}) = F_i(U(\mathbf{z}))$, donde $F^{-1}(u) = \sup\{x : F(x) \leq u\}$. Entonces para $i = 1, 2$, $\{X_i(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^2\}$ son i.i.d. con función de distribución F_i , y para cualquier x ,

$$\mathbb{P}(X_1(\mathbf{z}) \geq x, X_2(\mathbf{z}) < x) = [F_2(x) - F_1(x)]^+$$

y

$$\mathbb{P}(X_2(\mathbf{z}) \geq x, X_1(\mathbf{z}) < x) = [F_1(x) - F_2(x)]^+.$$

Ahora:

$$\begin{aligned} & g_{F_1}(1, \alpha) - g_{F_2}(1, \alpha) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \max_{\pi \in \Pi(n, [n\alpha])} \sum_{\mathbf{z} \in \pi} X_1(\mathbf{z}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \max_{\pi \in \Pi(n, [n\alpha])} \sum_{\mathbf{z} \in \pi} X_2(\mathbf{z}) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \max_{\pi \in \Pi(n, [n\alpha])} \sum_{\mathbf{z} \in \pi} (X_1(\mathbf{z}) - X_2(\mathbf{z})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \max_{\pi \in \Pi(n, [n\alpha])} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mathbf{z} \in \pi} [\mathbb{I}(X_1(\mathbf{z}) \geq x, X_2(\mathbf{z}) < x) - \mathbb{I}(X_1(\mathbf{z}) < x, X_2(\mathbf{z}) \geq x)] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} \max_{\pi \in \Pi(n, [n\alpha])} \sum_{\mathbf{z} \in \pi} [\mathbb{I}(X_1(\mathbf{z}) \geq x, X_2(\mathbf{z}) < x) - \mathbb{I}(X_1(\mathbf{z}) < x, X_2(\mathbf{z}) \geq x)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \max_{\pi \in \Pi(n, [n\alpha])} \sum_{\mathbf{z} \in \pi} [\mathbb{I}(X_1(\mathbf{z}) \geq x, X_2(\mathbf{z}) < x) - \mathbb{I}(X_1(\mathbf{z}) < x, X_2(\mathbf{z}) \geq x)]. \end{aligned}$$

En este último paso utilizamos primero el Teorema de Fubini y después el Teorema de convergencia monótona.

Entonces:

$$\begin{aligned} g_{F_1}(1, \alpha) - g_{F_2}(1, \alpha) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \mathbb{E} \max_{\pi \in \Pi(n, [n\alpha])} \sum_{\mathbf{z} \in \pi} [\mathbb{I}(X_1(\mathbf{z}) \geq x, X_2(\mathbf{z}) < x)] \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \max_{\pi \in \Pi(n, [n\alpha])} \left(\sum_{\mathbf{z} \in \pi} [1 - \mathbb{I}(X_1(\mathbf{z}) < x, X_2(\mathbf{z}) \geq x)] - \sum_{\mathbf{z} \in \pi} 1 \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{Ber([F_2(x) - F_1(x)])}(1, \alpha) + g_{Ber(1 - [F_1(x) - F_2(x)])}(1, \alpha) - (1 + \alpha) dx. \end{aligned}$$

Por el Lema 1.2.3

$$\begin{aligned}
g_{F_1}(1, \alpha) - g_{F_2}(1, \alpha) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \{(1 + \alpha)([F_2(x) - F_1(x)] + 1 - [F_1(x) - F_2(x)]) \\
&\quad + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{1 + \alpha}([F_2(x) - F_1(x)]^{1/2} + [F_1(x) - F_2(x)]^{1/2}) - (1 + \alpha)\} dx \\
&= (1 + \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} (F_2(x) - F_1(x)) dx + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{1 + \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(x) - F_2(x)]^{1/2} dx \\
&= (1 + \alpha)(\mu_1 - \mu_2) + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{1 + \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(x) - F_2(x)]^{1/2} dx
\end{aligned}$$

Al proceder de la misma manera pero ahora sobre $g_{F_2}(1, \alpha) - g_{F_1}(1, \alpha)$ obtenemos:

$$g_{F_2}(1, \alpha) - g_{F_1}(1, \alpha) \leq (1 + \alpha)(\mu_2 - \mu_1) + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{1 + \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(x) - F_2(x)]^{1/2} dx,$$

de donde concluimos

$$|g_{F_1}(1, \alpha) - g_{F_2}(1, \alpha) - (1 + \alpha)(\mu_1 - \mu_2)| \leq 2\sqrt{\alpha}\sqrt{1 + \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(s) - F_2(s)|^{1/2} ds.$$

□

Lema 1.2.5. *Sea F que satisface (1.6) y (1.7), y sea $\varepsilon > 0$. Entonces hay una función \tilde{F} con soporte acotado que tiene la misma media y varianza que F y satisface:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(s) - (s)|^{1/2} ds < \varepsilon.$$

Demostración: Sea X una v.a. con distribución F . Consideremos primero el caso en que X es una v.a. positiva c.s., es decir $\mathbb{P}(X > 0) = 1$. Sea $t > 0$. Si $\mathbb{P}(X > t) = 0$, entonces F misma tiene soporte compacto y tomamos $\tilde{F} = F$. De otra manera, definimos $m = \mathbb{E}(X|X > t)$ y $\omega = \mathbb{E}(X^2|X > t)$, y sean p, u tales que:

$$(1 - p)t + pu = m, \tag{1.10}$$

$$(1 - p)t^2 + pu^2 = \omega. \tag{1.11}$$

La soluciones son:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{(m - t)^2}{(m - t)^2 + \omega - m^2}, \\
u &= t + \frac{m - t}{p};
\end{aligned}$$

notemos que $0 < p \leq 1$ y $u > t$, dado que $m > t$ y $w \geq m^2$. Así, definimos \tilde{F} por:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } 0 \leq x < t \\ 1 - p[1 - F(t)] & \text{si } t \leq x < u \\ 1 & \text{si } x \geq u. \end{cases} \quad (1.12)$$

Tenemos que \tilde{F} tiene soporte compacto dado que $\tilde{F}(u) = 1$. Notemos que si tiene distribución \tilde{F} , debido a (1.10) y (1.12), ocurre que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\tilde{X} &= \mathbb{E}(\mathbf{X} : \mathbf{X} \leq t) + (1 - p)[1 - F(t)]t + p[1 - F(t)]u \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{X}; \mathbf{X} \leq t) + \mathbb{P}(\mathbf{X} > t)[(1 - p)t + pu] \\ &= \mathbb{E}\mathbf{X}. \end{aligned}$$

De manera similar, podemos usar (1.11) para obtener $\mathbb{E}(\tilde{X}^2) = \mathbb{E}(\mathbf{X}^2)$. Para finalizar la prueba notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |F(s) - \tilde{F}(s)|^{1/2} ds &\leq \int_t^\infty [1 - F(s)]^{1/2} ds + \int_t^\infty [1 - \tilde{F}(s)]^{1/2} ds \\ &= \int_t^\infty [1 - F(s)]^{1/2} ds + \int_t^u [p(1 - F(t))]^{1/2} ds \\ &\leq \int_t^\infty [1 - F(s)]^{1/2} ds + [pu^2 \mathbb{P}(\mathbf{X} > t)]^{1/2} \\ &\leq \int_t^\infty [1 - F(s)]^{1/2} ds + \mathbb{E}(\mathbf{X}^2; \mathbf{X} > t)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como supusimos que $\int_t^\infty [1 - F(s)]^{1/2} ds < \infty$, lo anterior implica que $\mathbb{E}\mathbf{X}^2 < \infty$. Escogiendo a t suficientemente grande podemos hacer el segundo sumando de la expresión anterior tan pequeño como queramos, esto es:

$$\int_t^\infty [1 - F(s)]^{1/2} ds + \mathbb{E}(\mathbf{X}^2; \mathbf{X} > t)^{1/2} < \varepsilon$$

de donde se sigue el resultado deseado. \square

Lema 1.2.6. *Sea F una distribución con soporte acotado, y para $k \in \mathbb{N}$, sea $F^{(k)}$ la distribución de $X_1 + X_2 + \dots + X_k$, donde $\{X_i\}$ son variables i.i.d. con distribución F . Sea $r : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{N}$ una función que satisface $r(\alpha) \rightarrow \infty$ y $r(\alpha)\sqrt{\alpha} \rightarrow 0$ cuando $\alpha \downarrow 0$. Entonces:*

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| g_F(1, \alpha) - \frac{1}{r(\alpha)} g_{F^{(r)}}(1, \alpha r(\alpha)) \right| = 0.$$

Demostración. Para $(x, y) \in \mathbb{Z}_+^2$ y $r \in \mathbb{N}$, sea $\mathbf{B}^{(r)}(x, y)$ el conjunto $\{(rx + i, y), i = 0, 1, \dots, r - 1\}$.

Estos conjuntos $\mathbf{B}^{(r)}(\mathbf{z})$ forman una partición en \mathbb{Z}_+^2 ; básicamente hemos agrupado los sitios de \mathbb{Z}_+^2 en bloques de longitud r y altura 1. Vamos a comparar nuestro modelo original con uno donde cada uno de estos bloques funciona como un único sitio, cuyos pesos son la suma de los sitios originales que contienen los bloques.

Dado $\pi \in \Pi(nr, m)$, podemos encontrar $\tilde{\pi} \in \Pi(n, m)$ tal que

$$\left| \bigcup_{\mathbf{z} \in \pi} \mathbf{B}^{(r)}(\mathbf{z}) \Delta \tilde{\pi} \right| \leq mr, \quad (1.13)$$

²donde Δ denota la diferencia simétrica. (Por ejemplo, se puede elegir $\tilde{\pi} = \{\mathbf{z} : \pi \cap \mathbf{B}^{(r)}(\mathbf{z}) \neq \emptyset\}$). Similarmente, dado $\tilde{\pi} \in \Pi(n, m)$, podemos encontrar $\pi \in \Pi(nr, m)$ que satisfaga (1.13).

Suponga que $\{X(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^2\}$ son variables i.i.d. con distribución $F^{(r)}$. Sea K tal que $\mathbb{P}(|X| > K) = 0$. Entonces

$$\left| \max_{\pi \in \Pi(nr, m)} \sum_{\mathbf{z} \in \pi} X(\mathbf{z}) - \max_{\tilde{\pi} \in \Pi(n, m)} \sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\pi}} \tilde{X}(\mathbf{z}) \right| \leq mrK,$$

de lo que se sigue que:

$$\left| \frac{1}{nr} \mathbb{E}_F T(nr, m) - \frac{1}{r} \frac{1}{n} \mathbb{E}_{F^{(r)}} T(n, m) \right| \leq \frac{1}{nr} mrK.$$

Si hacemos $m = \lceil \alpha nr \rceil$ y al hacer n tender hacia infinito obtenemos

$$\left| g_F(1, \alpha) - \frac{1}{r} g_{F^{(r)}}(1, \alpha r) \right| \leq \alpha r K.$$

Si r es una función de α que cumple $r\sqrt{\alpha} \rightarrow 0$ cuando $\alpha \downarrow 0$, entonces el lado derecho de la última ecuación es del orden de $o(\sqrt{\alpha})$ cuando $\alpha \downarrow 0$, como se quería. \square

Lema 1.2.7. *Sea F una distribución con soporte acotado, con media μ_F y varianza σ_F^2 . Sea $F^{(k)}$ la distribución de $X_1 + X_2 + \dots + X_k$, donde $\{X_i\}$ son i.i.d. con distribución F . Sea $r : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{N}$ una función que satisface $r(\alpha) \rightarrow \infty$ y $r(\alpha)\sqrt{\alpha} \rightarrow 0$ cuando $\alpha \downarrow 0$. Entonces:*

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| \frac{1}{r(\alpha)} g_{F^{(r)}}(1, \alpha r(\alpha)) - \mu_F - \sigma_F \frac{g_\Phi(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} \right| = 0,$$

donde Φ es la distribución normal estándar.

Demostración. El Teorema (5.16) de [12] da un tasa de convergencia en el Teorema de límite central, para las distribuciones F que tienen tercer momento finito. En nuestro caso F tiene soporte acotado y por eso tiene tercer momento finito; de ahí tenemos que existe $C = C(F)$ tal que:

$$\left| \tilde{F}^{(r)}(x) - \Phi(x) \right| \leq Cr^{1/2}(1 + |x|)^{-3}$$

²Donde $|\cdot|$ denota cardinal de un conjunto.

para toda $r \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, donde $\tilde{F}^{(r)}$ es la distribución de $(X_1 + \dots + X_r - r\mu_F)/(\sigma_F\sqrt{r})$. La distribución \tilde{F}^r es la distribución $F^{(r)}$ normalizada, con media 0 y varianza 1.

Ahora combinamos esta cota con el Lema 1.2.4; para cualquier $r \in \mathbb{N}$, ocurre

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| \frac{1}{\alpha} g_{\tilde{F}^{(r)}}(1, \alpha r) - \mu_F - \sigma_F \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r)}{\sqrt{r}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| \frac{\sigma_F}{\sqrt{r}} g_{\tilde{F}^{(r)}}(1, \alpha r) - \sigma_F \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r)}{\sqrt{r}} \right| \\ &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{\alpha r}} |g_{\tilde{F}^{(r)}}(1, \alpha r) - g_{\Phi}(1, \alpha r)| \\ &\leq \frac{\sigma_F}{\sqrt{\alpha r}} 2\sqrt{\alpha r} \sqrt{1 + \alpha r} \int_{-\infty}^{\infty} |Cr^{1/2}(1 + |x|)^{-3}|^{1/2} dx \\ &= C' \sigma_F \frac{\sqrt{1 + \alpha r}}{r^{1/4}}, \end{aligned}$$

donde C' es alguna constante de r y α . Si r es una función de α tal que $r\sqrt{\alpha} \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$ cuando $\alpha \downarrow 0$, entonces el lado derecho de la ecuación anterior tiende a 0 cuando $\alpha \downarrow 0$, como se quería. \square

Lema 1.2.8. *Sea F una distribución con media μ_F y varianza σ_F^2 , que satisface (1.6) y (1.7) y una función $r : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{N}$ que satisface $r(\alpha) \rightarrow \infty$ y $r(\alpha)\sqrt{\alpha} \rightarrow 0$ cuando $\alpha \downarrow 0$. Entonces:*

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| g_F(1, \alpha) - \mu_F - \sigma_F \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} \right| = 0. \quad (1.14)$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Usando el Lema 1.2.5, escogemos una distribución \tilde{F} con soporte compacto, con la misma media y varianza que F ; y que cumpla

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - \tilde{F}(x)|^{1/2} dx < \varepsilon/2. \quad (1.15)$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \limsup_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| g_F(1, \alpha) - \mu_F - \sigma_F \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} \right| \\ &\leq \limsup_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| g(1, \alpha) - \mu_F - \sigma_F \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} \right| \\ &\quad + \limsup_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| g_F(1, \alpha) - g_{\tilde{F}}(1, \alpha) \right|. \end{aligned}$$

El primer término es 0 debido a los lemas 1.2.7 y 1.2.8 y usando el hecho de que \tilde{F} tiene la misma distribución, media y varianza que F ; el segundo término está acotado superiormente debido al lema 1.2.4 y (1.15). Como esta cota funciona para toda $\varepsilon > 0$, obtenemos el resultado deseado. \square

Ahora demostraremos el teorema 1.2.2

Demostración. Tomamos cualquier r que satisfaga las condiciones del Lema 1.2.6, por ejemplo $r(\alpha) = \lfloor \alpha^{1/4} \rfloor$. Cuando F es una distribución exponencial de parámetro 1, en [13] se da una fórmula exacta $g_F(1, \alpha) = 1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha$. Sustituyendo en (1.14) obtenemos:

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| 2\sqrt{\alpha} + \alpha - \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} \right| = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| 2\sqrt{\alpha} - \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} \right| + \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \alpha.$$

Por hipótesis el último término se va a cero y obtenemos

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| 2\sqrt{\alpha} - \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} \right| = 0. \quad (1.16)$$

Finalmente tomamos una F que satisfaga (1.6) y (1.7), y al combinarlo con (1.14) y multiplicando a (1.16) por σ_F a ambos lados llegamos a que

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| g_F(1, \alpha) - \mu_F - \sigma_F \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} \right| = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| 2\sigma_F \sqrt{\alpha} - \sigma_F \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} \right|.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| g_F(1, \alpha) - \mu_F - \sigma_F \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} - 2\sigma_F \sqrt{\alpha} + \sigma_F \frac{g_{\Phi}(1, \alpha r(\alpha))}{\sqrt{r(\alpha)}} \right| &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| g_F(1, \alpha) - \mu_F - \sigma_F - 2\sigma_F \sqrt{\alpha} \right| &= 0 \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Modelos de Crecimiento.

2.1. Definición del modelo

Para obtener el modelo de crecimiento asociado a la percolación de último pasajero definimos el conjunto relacionado a la función de último pasaje al tiempo t por:

$$B(t) = \{x \in \mathbb{R}_+^d : T([\mathbf{x}]) \leq t\},$$

para toda $t \geq 0$. $B(t)$ es creciente en t ; en el sentido de que para $0 \leq t_1 \leq t_2$, $B(t_1) \subseteq B(t_2)$, además si $\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_2 \in B(t)$, entonces $\mathbf{x}_1 \in B(t)$, con $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}_+^d$. Al conjunto $B(t)$ a veces se le llama “conjunto cubierto al tiempo t ”.

El modelo de crecimiento también puede ser descrito en términos del crecimiento local gobernado por los pesos de $X(\mathbf{z})$. El cuadrado $\mathbf{z} + [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}_+^2$ es “añadido” al conjunto cubierto al tiempo $T(\mathbf{z})$. Para que esto pase, el cuadrado de la izquierda y el cuadrado inferior respecto a \mathbf{z} deben ya pertenecer al conjunto cubierto. Una vez que las condiciones se cumplen, tenemos que a partir del tiempo $\max\{T(\mathbf{z} - (0, 1)), T(\mathbf{z} - (1, 0))\}$ el cuadrado $\mathbf{z} + [0, 1]^2$ espera un tiempo aleatorio $X(\mathbf{z})$ hasta que entra al conjunto.

Definimos al subconjunto B de \mathbb{R}_+^d por:

$$B = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 1\}.$$

Debido a la superaditividad de la función de percolación tenemos que B es cóncavo.

Teorema 2.1.1. *Suponga que F satisface (1.5). Entonces para toda $\varepsilon > 0$,*

$$(1 - \varepsilon)B \subseteq \frac{B(t)}{t} \subseteq (1 + \varepsilon)B,$$

con probabilidad 1 a partir de cierto valor suficientemente grande de t .

Básicamente el Teorema (2.1.1) da la convergencia de la ley débil de los grandes números cuando uno esta variando sobre todas las direcciones posibles \mathbf{x} .

Demostración. Teorema 2.1.1 El Teorema se sigue de que $|g(\mathbf{z})| < \infty$ y que para toda $\varepsilon > 0$, hay casi seguramente una cantidad finita de \mathbf{z} en \mathbb{Z}_+^d tales que $|T(\mathbf{Z}) - g(\mathbf{z})| \geq \varepsilon |g(\mathbf{z})|$.

Como supusimos que $|g(\mathbf{z})|/\|\mathbf{z}\|$ es acotada lejos del origen, tenemos que $|g(\mathbf{z})| \geq \|\mathbf{z}\| \inf_{\mathbf{z}'} |g(\mathbf{z}')|/\|\mathbf{z}'\|$, así que de hecho basta con mostrar que para toda $\varepsilon > 0$, hay casi seguramente una cantidad finita de \mathbf{z} tales que $|T(\mathbf{Z}) - g(\mathbf{z})| \geq \varepsilon \|\mathbf{z}\|$.

Para demostrar esto último usaremos los siguientes lemas.

Lema 2.1.2. *Suponga que F satisface $\int_{-\infty}^0 F^{1/d}(s)ds < \infty$ y $\int_0^\infty (1-F(s))^{1/d}ds < \infty$. Sea ε positiva, Si L es suficientemente grande, entonces con probabilidad 1,*

$$|T(\mathbf{z} - T^{(L)}(\mathbf{z}))| < \varepsilon \|\mathbf{z}\|$$

para todos excepto un numero finito de \mathbf{z} en \mathbb{Z}_+^d .¹

Demostración. Sea L suficientemente grande tal que $c \int_L^\infty (1-F(s))^{1/d}ds < \varepsilon/2$ y $c \int_{-\infty}^{-L} F(s)^{1/d}ds < \varepsilon/2$, donde c es la constante del Lema (A.0.2)².

Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^d$; para alguna $\pi^* \in \Pi(\mathbf{z})$, entonces asociando términos con mismas coordenadas obtenemos:

$$T(\mathbf{z}) - T^{(L)}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{v} \in \pi^*} [X(\mathbf{v}) - X^{(L)}(\mathbf{v})].$$

Así que:

$$|T(\mathbf{z} - T^{(L)}(\mathbf{z}))| \leq \sum_{\mathbf{v} \in \pi^*} |X(\mathbf{v}) - X^{(L)}(\mathbf{v})| \quad (2.1)$$

$$= \sum_{\mathbf{v} \in \pi^*} [X(\mathbf{v}) - L]_+ + \sum_{\mathbf{v} \in \pi^*} [-L - X(\mathbf{v})]_+ \quad (2.2)$$

$$\leq \max_{\mathbf{v} \in \pi} V^{(L)}(\mathbf{v}) + \max_{\mathbf{v} \in \pi} W^{(L)}(\mathbf{v}), \quad (2.3)$$

donde definimos a $V^{(L)} = [X(\mathbf{v}) - L]_+$ y a $W^{(L)} = [-L - X(\mathbf{v})]_+$.

¹Recordemos que $X^{(L)}(\mathbf{v}) = \max\{\min\{X(\mathbf{v}), L\}, -L\}$ por lo que $|X^{(L)}(\mathbf{v})| = \min(|X(\mathbf{v}), L|)$.

²El Lema (A.0.2) se encuentra en el Apéndice.

Además la igualdad se da debido a que si $X(\mathbf{v}) \in [-L, L]$ entonces $X(\mathbf{v}) - X^{(L)}(\mathbf{v}) = X(\mathbf{v}) - X(\mathbf{v}) = 0$, en caso de que $X(\mathbf{v}) > L$ tenemos $X(\mathbf{v}) - X^{(L)}(\mathbf{v}) = X(\mathbf{v}) - L$; finalmente si $X(\mathbf{v}) < -L$ entonces $|X(\mathbf{v}) - X^{(L)}(\mathbf{v})| = |X(\mathbf{v}) - (-L)| = |X(\mathbf{v}) + L| = |-L - X(\mathbf{v})| = [-L - X(\mathbf{v})]_+$ pues $(-L - X(\mathbf{v}))$ es positivo.

Ahora notemos que $\{V^{(L)}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_+^d\}$ son variables i.i.d. con distribución $F_V^{(L)}$, donde $F_V^{(L)}(x) = 0$ para $x < 0$ y $F_V^{(L)}(x) = F(L+x)$ para $x \geq 0$. Similarmente $\{W^{(L)}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathbb{Z}_+^d\}$ son i.i.d. con distribución $F_W^{(L)}$, donde $F_W^{(L)}(x) = 0$ para $x < 0$ y $F_W^{(L)}(x) = 1 - F(-L-x)$ para $x \geq 0$. Del lema (A.0.2) (aplicado a $\{V^{(L)}(\mathbf{v})\}$ y a $F_V^{(L)}$ en vez de $\{X(\mathbf{v})\}$ y a F), obtenemos que con probabilidad 1 ocurre:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max_{\mathbf{z}: \|\mathbf{z}\| \leq n} \max_{\pi \in \Pi(\mathbf{z})} \sum_{\mathbf{v} \in \pi} V^{(L)}(\mathbf{v}) \leq c \int_0^\infty (1 - F_V^{(L)})^{1/d} ds \quad (2.4)$$

$$= c \int_L^\infty (1 - F(s))^{1/d} ds \quad (2.5)$$

$$< \varepsilon/2. \quad (2.6)$$

En particular, hay casi seguramente una cantidad finita de $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^d$ tales que

$$\max_{\pi \in \Pi(\mathbf{z})} \sum_{\mathbf{v} \in \pi} V^{(L)}(\mathbf{v}) \geq \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{z}\|.$$

Aplicando el Lema (A.0.2) a $\{W^{(L)}(\mathbf{v})\}$ y $F_W^{(L)}$ de la misma manera, obtenemos nuevamente que hay casi seguramente una cantidad finita de $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^d$ tal que

$$\max_{\pi \in \Pi(\mathbf{z})} \sum_{\mathbf{v} \in \pi} W^{(L)}(\mathbf{v}) \geq \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{z}\|.$$

A partir de (2.1), (2.2) y (2.3), concluimos que hay casi seguramente una cantidad finita de $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^d$ tales que

$$|T(\mathbf{z}) - T^L(\mathbf{z})| \geq \max_{\mathbf{v} \in \pi} V^{(L)}(\mathbf{v}) + \max_{\mathbf{v} \in \pi} W^{(L)}(\mathbf{v}) \geq \varepsilon \|\mathbf{z}\|.$$

□

Lema 2.1.3. *Sea $\varepsilon > 0$ y $L > 0$. Con probabilidad 1,*

$$|T^{(L)}(\mathbf{z}) - \mathbb{E}[T^{(L)}(\mathbf{z})]| < \varepsilon \|\mathbf{z}\|,$$

para toda, excepto un número finito de \mathbf{z} en \mathbb{Z}_+^d .

Demostración. Recordemos que todos los caminos en $\Pi(\mathbf{z})$ tienen longitud $\|\mathbf{z}\|$, y que los pesos de $X^{(L)}(\mathbf{v})$ tienen valor absoluto no mayor a L . Entonces podemos

aplicar el Lema (A.0.1) para obtener:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|T^{(L)}(\mathbf{z}) - \mathbb{E}[T^{(L)}(\mathbf{z})]| \geq \varepsilon\|\mathbf{z}\|\right) &\leq \exp\left(-\frac{(\varepsilon\|\mathbf{z}\|)^2}{64\|\mathbf{z}\|L^2} + 64\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\varepsilon^2\|\mathbf{z}\|}{64L^2} + 64\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ahora para toda $n \in \mathbb{Z}_+$, hay a lo más $(n+1)^d$ puntos \mathbf{z} tales que $\|\mathbf{z}\| = n$; de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^d} \mathbb{P}(|T^{(L)}(\mathbf{z}) - \mathbb{E}[T^{(L)}(\mathbf{z})]| \geq \varepsilon\|\mathbf{z}\|) &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (n+1)^d \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{64L^2} + 64\right) \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La primera desigualdad se debe a que para cada n en \mathbb{Z}_+ hay a lo más $(n+1)^d$ puntos \mathbf{z} con norma igual a n por lo que tenemos que considerar los $(n+1)^d$ puntos. Además $\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{64L^2} + 64\right)$ es no negativo por lo que siempre aporta a la suma es acotada pues para n suficientemente grande la parte exponencial tiende a cero más rápido que el crecimiento del factor $(n+1)^d$, por lo que la serie es finita.

Finalmente por Borel-Cantelli obtenemos:

$$\mathbb{P}(|T^{(L)}(\mathbf{z}) - \mathbb{E}[T^{(L)}(\mathbf{z})]| \geq \varepsilon\|\mathbf{z}\|, i.o.^3) = 0,$$

de donde se sigue que el complemento de dicho evento sucede con probabilidad 1, esto es que para toda excepto para una cantidad finita de \mathbf{z} en \mathbb{Z}_+^d tenemos:

$$|T^{(L)}(\mathbf{z}) - \mathbb{E}[T^{(L)}(\mathbf{z})]| < \varepsilon\|\mathbf{z}\|$$

sucede con probabilidad 1. Con esto concluye la demostración de (2.1.3). \square

³infinitely often, esto es una cantidad infinita de veces.

Lema 2.1.4. *Sea $\varepsilon > 0$ y $L > 0$, entonces para toda, excepto para una cantidad finita de \mathbf{z} en \mathbb{Z}_+^d*

$$|\mathbb{E}[T^{(L)}(\mathbf{z})] - g^{(L)}(\mathbf{z})| < \varepsilon \|\mathbf{z}\|.$$

Demostración. Empecemos recordando que por definición de g y $g^{(L)}$, tenemos que $\mathbb{E}[T^{(L)}(\mathbf{z})] \leq g^{(L)}(\mathbf{z})$ para toda \mathbf{z} . Así que sólo tenemos que demostrar

$$\mathbb{E}[T^{(L)}(\mathbf{z})] > g^{(L)}(\mathbf{z}) - \varepsilon \|\mathbf{z}\|, \text{ excepto para una cantidad finita de } \mathbf{z}.$$

Fijemos $a > 0$. La distribución $F^{(L)}$ con soporte acotado⁴, por lo que satisface (1.4) y (1.5); entonces por el Teorema (1.2.1), $g^{(L)}$ es continua en \mathbb{R}_+^d , y de aquí que es uniformemente continua en el subconjunto compacto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d : \|\mathbf{x}\| \leq 2d\}$.

Así que escogemos una $u < \min(1, a)$ tal que siempre que $\|\mathbf{x}\| \leq d$ y $\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq ud$, entonces $|g^{(L)}(\mathbf{x}) - g^{(L)}(\bar{\mathbf{x}})| \leq a$.

Ahora definimos el conjunto

$$C = \left\{ u\mathbf{r}, \mathbf{r}_i \in \left\{ 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor \right\} \right\},$$

con $0 \leq i \leq d$. C es un subconjunto finito de \mathbb{R}_+^d , y para cada y en C , tenemos, por la proposición (1.1.6.(i)):

$$\frac{\mathbb{E}[T^{(L)}([ny])] }{n} \rightarrow g^{(L)}(\mathbf{y}) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

De la ecuación anterior existe $N = N(a)$ tal que, para toda $n \geq N$ y para toda $y \in C$,

$$\mathbb{E}\left(T^{(L)}([ny])\right) \geq n(g^{(L)}(\mathbf{y}) - a).$$

Sea \mathbf{z} tal que satisface (máx $z_i \geq N$). Definimos

$$\mathbf{y} = u \left[\frac{1}{u \max(z_i)} \mathbf{z} \right].$$

Entonces $\mathbf{y} \in C$, pues es de la forma $u\mathbf{r}$ con $\mathbf{r} = \left[\frac{1}{u \max(z_i)} \mathbf{z} \right]$ donde $r_j = \left[\frac{1}{u \max(z_i)} z_j \right]$ con $\frac{z_j}{\max z_i} \leq 1$ por lo que $r_j \leq \frac{1}{u}$. Además (máx z_i) $\mathbf{y} \leq \mathbf{z}$, con $\|\mathbf{y}\| \leq d$ y con

$$\left\| \frac{\mathbf{z}}{\max z_i} - \mathbf{y} \right\| \leq ud \leq ad.$$

⁴Una función de distribución tiene soporte acotado si existen $t_1 < t_2$ finitos tal que $F(t_1) = 0$ y $F(t_2) = 1$.

Usando primero superaditividad, después el hecho de que los pesos de $\{X^{(L)}(\mathbf{z})\}$ no son menores que $-L$, usando continuidad en los límites obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T^{(L)}(\mathbf{z})) &\geq \mathbb{E}(T^{(L)}([\text{máx } z_i]\mathbf{y}) + \mathbf{z} - [\text{máx } z_i]\mathbf{y}) \\
&\geq \mathbb{E}(T^{(L)}([\text{máx } z_i]\mathbf{y})) + \mathbb{E}(T^{(L)}(\mathbf{z} - [\text{máx } z_i]\mathbf{y})) \\
&\geq \mathbb{E}(T^{(L)}([\text{máx } z_i]\mathbf{y})) - L\|\mathbf{z} - [\text{máx } z_i]\mathbf{y}\| \\
&\geq (\text{máx } z_i)(g^{(L)}(\mathbf{y}) - a) - L(\|\mathbf{z} - [\text{máx } z_i]\mathbf{y}\| + d) \\
&= g^{(L)}(\mathbf{z}) - (\text{máx } z_i) \left\{ \left[g^{(L)}\left(\frac{\mathbf{z}}{\text{máx } z_i}\right) - g^{(L)}(\mathbf{y}) \right] \right. \\
&\quad \left. + a + L\left\| \frac{\mathbf{z}}{\text{máx } z_i} - \mathbf{y} \right\| + \frac{Ld}{\text{máx } z_i} \right\} \\
&\geq g^{(L)}(\mathbf{z}) - (\text{máx } z_i) \left\{ a + a + Lad + \frac{Ld}{\text{máx } z_i} \right\}.
\end{aligned}$$

Ahora, si $a < \varepsilon(2(1+Ld))^{-1}$, entonces para toda \mathbf{z} con $\text{máx } z_i \geq \text{máx}(N(a), Ld/\varepsilon)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T^{(L)}(\mathbf{z})) &> g^{(L)}(\mathbf{z}) - (\text{máx } z_i)\varepsilon \\
&\geq g^{(L)}(\mathbf{z}) - \varepsilon\|\mathbf{z}\|.
\end{aligned}$$

como se quería. □

Por último demostraremos el siguiente Lema:

Lema 2.1.5. *Suponga que F satisface $\int_{-\infty}^0 F(\mathbf{s})^{1/d} ds < \infty$ y $\int_0^\infty (1-F(\mathbf{s}))^{1/d} ds < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Si L es suficientemente grande, entonces para toda $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^d$,*

$$|g^{(L)}(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})| < \varepsilon\|\mathbf{z}\|.$$

Demostración. Bajo estas condiciones de F , el resultado se sigue del lema (A.0.3) tomando a $\varepsilon > \text{máx}(\int_{-\infty}^{-L} F(\mathbf{s}) ds, c \int_L^\infty (1-F(\mathbf{s}))^{1/d} ds)$

$$\begin{aligned}
g^{(L)}(\mathbf{z}) - \|\mathbf{z}\| \int_{-\infty}^{-L} F(\mathbf{s}) ds &\leq g(\mathbf{z}) \leq g^{(L)}(\mathbf{z}) + c\|\mathbf{z}\| \int_L^\infty (1-F(\mathbf{s}))^{1/d} ds \\
\Rightarrow g^{(L)}(\mathbf{z}) - \varepsilon\|\mathbf{z}\| &\leq g(\mathbf{z}) \leq g^{(L)}(\mathbf{z}) + \varepsilon\|\mathbf{z}\| \\
\Rightarrow |g^{(L)}(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})| &< \varepsilon\|\mathbf{z}\|
\end{aligned}$$

□

Finalmente tomamos a ε como $\text{máx}(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ donde cada ε_i es la épsilon del Lema 2.0.i. con $i=2,3,4,5$. Por lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}
|T(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})| &= |T(\mathbf{z}) - T^{(L)}(\mathbf{z}) + T^{(L)}(\mathbf{z}) - \mathbb{E}T^{(L)}(\mathbf{z}) + \mathbb{E}T^{(L)}(\mathbf{z}) - g^{(L)}(\mathbf{z}) + g^{(L)}(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})| \\
&\leq |T(\mathbf{z}) - T^{(L)}(\mathbf{z})| + |T^{(L)}(\mathbf{z}) - \mathbb{E}T^{(L)}(\mathbf{z})| + |\mathbb{E}T^{(L)}(\mathbf{z}) - g^{(L)}(\mathbf{z})| + |g^{(L)}(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})| \\
&\leq (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)\|\mathbf{z}\| \\
&\leq 4\|\mathbf{z}\| < \varepsilon\|\mathbf{z}\|
\end{aligned}$$

y queda demostrado el Teorema (2.1.1). \square

Para concluir quereamos mencionar que en J.B.Martin [8] se hace la siguiente observación. Si $B(t)$ tiene pesos exponenciales o geométricos entonces $B(t)$ es una cadena de Markov (a tiempo continuo o discreto respectivamente). Como ya se dijo antes en el caso en que $d = 2$ la función g se conoce y por ende B también se conoce.

Por ejemplo, para el caso de pesos exponenciales con parámetro 1, tenemos $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \leq 1\}$. Para el caso en que los pesos son Bernoulli tenemos que $B(t)$ es también un proceso de Markov, pero en este caso no se tiene una forma explícita de la función g por lo que tampoco se tiene para B .

2.2. Simulación de modelos de crecimiento.

En ésta sección ilustraremos al conjunto $B(t)$ generado por el proceso de crecimiento de último pasajero.

Nos concentraremos en el caso en que los pesos $\{X(\mathbf{z})\}$ son no negativos. Si los pesos se distribuyen de manera exponencial (res. geométrica) F , el proceso $\{B(t), t \geq 0\}$ es Markoviano a tiempo continuo (res. discreto). Hicimos simulaciones de $B(t)$ en dos dimensiones cuyos pesos se distribuyen exponencialmente figura (2.2).

Estudios sobre el modelo de crecimiento con distribución exponencial se pueden encontrar en Rost[13], Johansson [4] y Martin [8]. Éste último considera, de igual manera, el caso tridimensional que se aprecia en figura (2.2).

Por último veremos varias formas en las cuales, sin las hipótesis del teorema (2.1.1), dicho teorema falla. Primero si $g(\mathbf{x}) = \infty$ para alguna \mathbf{x} es el interior de \mathbb{R}_+^d , entonces (por un argumento de superaditividad) $g = \infty$. Una condición suficiente para que esto ocurra es que $\mathbb{E}(X^d) = \infty$. Entonces el límite asintótico de $B(t)$ colapsa a los ejes (o incluso sólo al origen si $\mathbb{E}(X) = \infty$). Un ejemplo de esto es la Figura (2.2) obtenida de Martin [8] para una distribución Pareto de media finita pero varianza infinita, en dimensión $d = 2$.

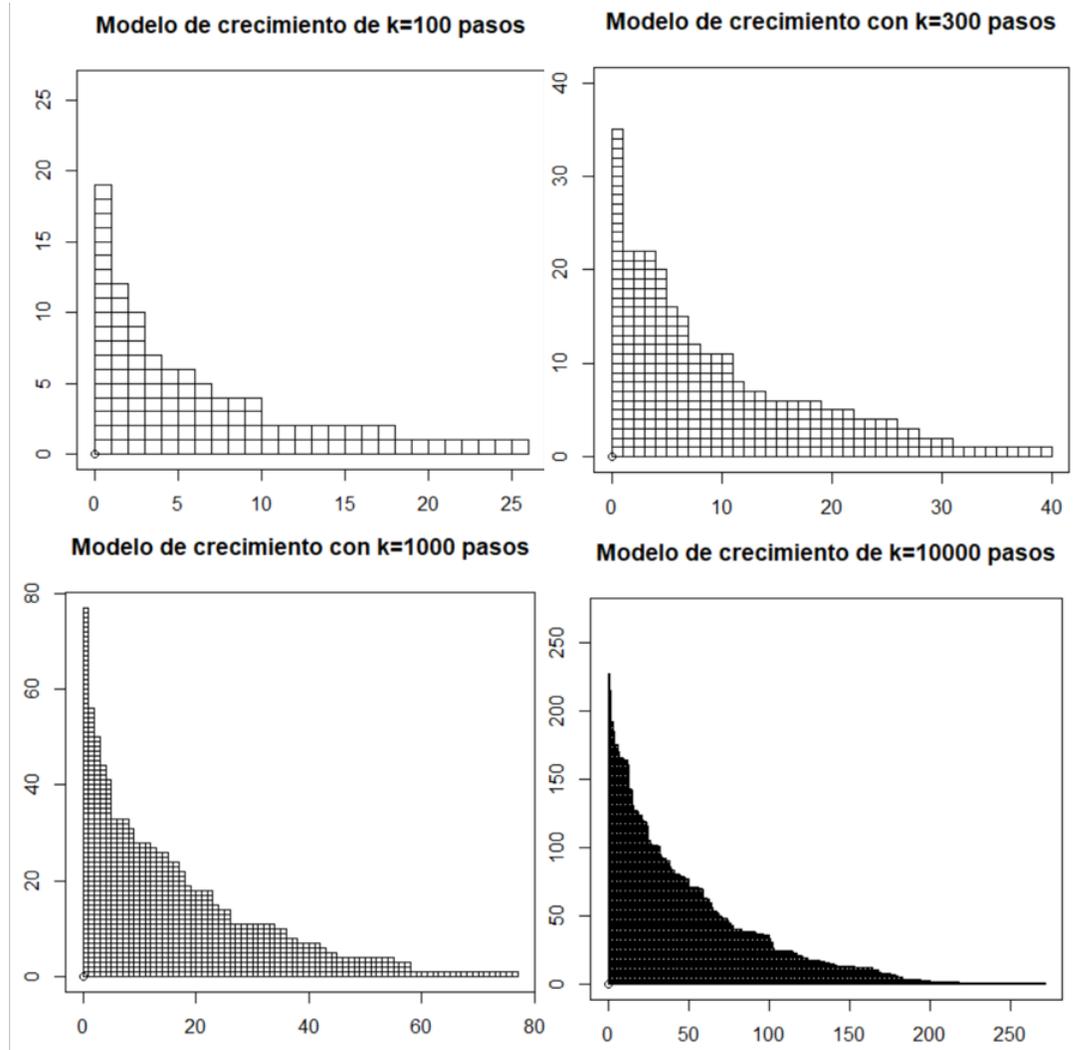


Figura 2.1: Simulación de Proceso de último pasaje para $d = 2$ y F exponencial de parámetro 1. Los conjuntos $B(t)$ se muestran para tiempos $k = 100, 300, 1000, 10000$. de Rost [13] sabemos que el limite asintótico de B es $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$.

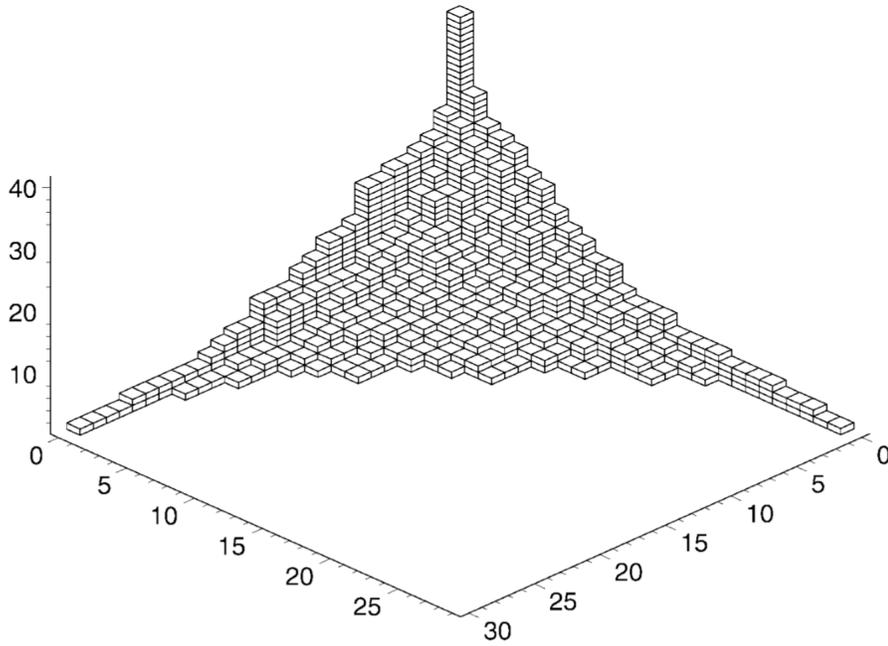


Figura 2.2: $B(30)$ para $d = 3$ y F exponencial de parámetro 1. Imagen obtenida de Martin [8].

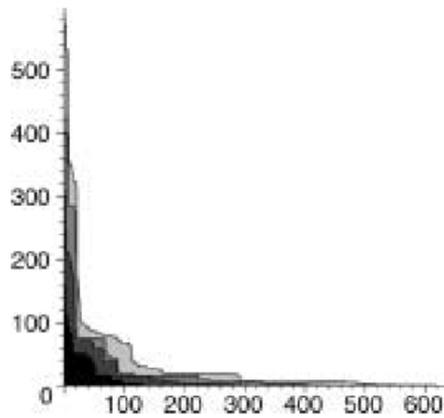


Figura 2.3: $B(t)$, $t=150,300,450,600$ para $d = 2$ y $F(x)=\min(0,1 - (3x)^{-3/2})$ que tiene media 1 pero varianza infinita. El limite asintótico de \mathbf{B} consiste en solo de dos lineas, entre el origen y el eje y y entre el origen y el eje x . Imagen obtenida de Martin [8].

Capítulo 3

Modelo de Filas.

3.1. Definición del modelo de filas.

Para introducir este modelo imaginemos que estamos por realizar un trámite burocráticos en nuestra dependencia de gobierno favorita. Dicha dependencia tiene, para dicho trámite, un *modus operandi* en el cual las personas se tienen que formar en una primera fila para ser atendidos individualmente por el burócrata en turno, después de que este finaliza su parte del tramite le pide a la persona que pase a formarse a una segunda fila donde otro burócrata los atenderá uno a uno y al finalizar su parte del tramite les pedirá que se forme en una tercera fila y así sucesivamente hasta que dicho tramite concluya (tanto en el ejemplo como en la vida real dicha sucesión de filas puede no acabar). Además, contrario a la intuición, en dicha dependencia de gobierno respetan el orden de llegada, esto es, al primero que llega se le atiende primero.

Es claro que podemos numerar (con enteros positivos) a los burócratas por los cuales tenemos que pasar para realizar dicho tramite, al igual que podemos numerar a las personas que quieren realizar dicho tramite. Como se respeta el orden de llegada se dirá que dicha fila es “FIFO” *First-in-First-out*.

Sea $X(n, k)$ el tiempo que le toma al burócrata k realizar el tramite para la persona n . Sea $D(n, k)$ el tiempo al cual el cliente n finaliza el tramite k .

El tiempo en el cual la persona n puede empezar el tramite k es entonces:

$$\text{máx}(D(n, k - 1), D(n - 1, k)).$$

Esto porque ambos eventos deben ocurrir antes de que la persona n empiece el tramite k : la persona n debe terminar el tramite $n - 1$ y la persona $n - 1$ debe terminar el tramite k para que la siguiente persona sea atendida. Finalmente tenemos la siguiente expresión recurrente de D en términos de las variables aleatorias:

$$D(n, k) = X(n, k) + \text{máx}(D(n, k - 1), D(n - 1, k)). \quad (3.1)$$

y consideramos las siguientes condiciones de frontera:

$$D(0, 0) = 0 \quad y \quad D(n, k) = 0 \quad \text{siempre que } n < 0 \text{ o } k < 0. \quad (3.2)$$

La interpretación de la ecuación anterior es la siguiente: las personas y los trámites son ambos identificados por números enteros empezando en 0. Al principio todas las filas de los tramites están vacías excepto por la fila del tramite 0 (esta podría ser la entrada a la dependencia del gobierno en el momento en que abre). Entonces la persona 0 (la primera persona) pasa a formarse a la primera fila del primer trámite.

Es fácil ver que (3.1) y (3.2) determinan unívocamente a la colección $\{D(n, k), (n, k) \in \mathbb{Z}_+^2\}$ en términos de la colección $\{X(n, k), (n, k) \in \mathbb{Z}_+^2\}$.

De hecho, tenemos que $D(n, k) = T(n, k)^1$ (el peso máximo de los caminos de $(0, 0)$ a (n, k) , como lo definimos en (1.1.3)).

Ahora analizaremos una fila con su servidor, y consideramos las llegadas como v.a.i.i.d. exponenciales de parámetro λ y el tiempo de servicio exponencial de parámetro μ . Tenemos el modelo “M/M/1” que es la abreviatura de “*memoryless inter-arrival/memoryless service time/one server*”. Como las llegadas son independientes de parámetro λ tenemos que las llegadas son un proceso Poisson de parámetro λ .

Sea $X(t) = j$ el numero de clientes en la fila (incluyendo a aquel que está siendo atendido). Entonces, por la descripción de la fila, se sigue que X es como una caminata aleatoria, sólo que no puede tomar valores menores a 0. Además, se sigue que es un proceso de Markov con tasas de transición:

$$\begin{aligned} q(j, j+1) &= \lambda, & j &= 0, 1, \dots \\ q(j, j-1) &= \mu, & j &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Es claro que si $\lambda > \mu$ entonces $(X_t)_{t \geq 0}$ es transitorio; esto es que $X_t \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. En otras palabras, si $\lambda > \mu$ la fila crece ilimitadamente mientras el tiempo avanza.

Cuando $\lambda < \mu$, $(X_t)_{t \geq 0}$ es recurrente positiva con distribución invariante:

$$\pi_i = (1 - \rho)\rho^i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

Esta ecuación satisface las ecuaciones de balance, esto es:

$$\begin{aligned} \pi(j)q(j, j+1) &= (1 - \rho)\rho^j \lambda \\ &= (1 - \rho) \frac{\lambda^{j+1}}{\mu^j} \\ &= (1 - \rho)\rho^{j+1} \mu \\ &= \pi(j+1)q(j+1, j). \end{aligned}$$

¹La demostración de esta igualdad la encontraremos en la Sección 5.2

Por lo que es una distribución en equilibrio, donde $\rho = \lambda/\mu$.
Para $\lambda < \mu$ el numero promedio de clientes es:

$$\mathbb{E}_\pi(X_t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \frac{(1-\rho)\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$

Consideremos ahora $(X(t), t \in \mathbb{R})$ una fila estacionaria M/M/1. Como es un proceso estacionario en equilibrio, es reversible², de donde es indistinguible de su proceso con el tiempo en retroceso:

$$(X(t), t \in \mathbb{R}) \stackrel{D}{=} (X(-t), t \in \mathbb{R}), \quad (3.4)$$

donde $\stackrel{D}{=}$ denota igualdad en distribución. Ahora la evolución de la fila se puede ver como un proceso puntual de llegada "A" y un proceso de salida "B"; Sabemos que el proceso de llegada A es un proceso Poisson de tasa λ que esta definido como $(X(t), t \in \mathbb{R})$ justo como B está definido en $(X(-t), t \in \mathbb{R})$. En otras palabras, el proceso de salida a tiempo normal es el proceso de llegada a tiempo reversible. Como $(X(t), t \in \mathbb{R})$ y $(X(-t), t \in \mathbb{R})$ son iguales en distribución se concluye que B es un proceso Poisson de tasa λ . Esto concluye la demostración del siguiente teorema:

Teorema 3.1.1. Teorema de Burke. *En el equilibrio, los procesos de salida de una fila M/M/1 estacionario, es un proceso Poisson con la misma tasa que el proceso de llegada.*

Notemos algo más: para un tiempo fijo $t_0 \in \mathbb{R}$, el tamaño de la fila al tiempo t_0 es independiente de las llegadas futuras:

$$(X(t), t \leq t_0) \perp\!\!\!\perp (A \cap (t_0, \infty)). \quad (3.5)$$

Aplicando esto último al proceso con el tiempo corriendo hacia atrás, obtenemos para cada $t_1 \in \mathbb{R}$ fija:

$$(X(t), t \leq t_1) \perp\!\!\!\perp (B \cap (-\infty, t_1)). \quad (3.6)$$

En particular, cuando la fila esta en equilibrio, el numero de gente que está formada al tiempo t_1 es independiente del proceso de salida hasta el tiempo t_1 ; Pero claramente no es independiente del proceso de salida a partir del tiempo t_1 .

Regresemos a nuestro primer ejemplo donde teníamos no solo una fila con su servidor sino una serie de filas con sus respectivos servidores, (Aquí veremos una gran aplicación del Teorema de Burke 3.1.1). Supongamos que el trámite termina después de pasar J servidores. Supongamos que las llegadas son un proceso Poisson de parámetro λ , y que los tiempos de servicio para el servidor j se distribuyen exponencialmente con parámetro μ_j , donde $\lambda < \mu_j$ para $j = 1, 2, \dots, J$. Supongamos además que los tiempos de servicio para cada fila

²Teorema (A.0.7) se encuentra en el Apéndice.

son independiente entre ellos, y de procesos de llegada en la fila 1. Si vemos al sistema en equilibrio entonces, por el Teorema de Burke 3.1.1, y por inducción sabemos que cada fila tiene un proceso de llegada Poisson de parámetro λ . Es claro, pues las salidas de la fila j son las llegadas de la fila $j+1$ y por el Teorema de Burke sabemos que las salidas son un proceso Poisson con el mismo parámetro que el proceso de llegadas. Por recursión sabemos que éstos tendrán el parámetro del proceso de llegada de la fila 1 que es λ .

Sea $n(t) = (n_1(t), \dots, n_J(t))$ el proceso de Markov dado por el número de personas en cada fila al tiempo t . En el equilibrio sabemos que la distribución marginal de las componentes es:

$$\pi_j(n_j) = (1 - \rho_j)\rho_j^{n_j}, \quad n_j = 0, 1, \dots$$

donde $\rho_j = \lambda/\mu_j$.

Como el tamaño de la fila 2 al tiempo t es independiente del proceso de llegadas futuras ($t_0 > t$), ecuación (3.5), y como las llegadas de la fila 2 son las salidas de la fila 1, ecuación (3.4), además que número de personas en la fila 1 al tiempo t es independiente del número de personas que ya salieron hasta antes del tiempo t , ecuación (3.6), tenemos que $(n_1(t) \perp\!\!\!\perp n_2(t))$. Más aún: es independiente del número de personas de las filas siguientes $(n_1(t) \perp\!\!\!\perp n_2(t), \dots, n_J(t))$. En general tenemos:

$$n_j(t) \perp\!\!\!\perp n_{j+1}(t), \dots, n_J(t),$$

por lo que la función de distribución conjunta es:

$$\pi(n_1, \dots, n_J) = \prod_{j=1}^J \pi_j(n_j).$$

3.2. Modelo de Almacén.

Ahora que ya introducimos el modelo de filas de manera sencilla, daremos otra interpretación a dicho modelo, conocido como modelo de Almacenes, si bien vamos a reutilizar los procesos de entrada $A = (A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ y la secuencia de variables aleatorias de servicios (B) , así como el proceso de salida $D = (D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ también definiremos nuevos procesos y variables aleatorias para la cantidad de producto en exhibición (w_n) y para la demanda en un periodo de tiempo (r_n) . El fin de esta sección es dar una generalización al teorema de Burke como en [1] donde se prueba que $(A, B) \stackrel{D}{=} (D, r)$. La necesidad de introducir el modelo de almacenes es para dar una interpretación más sencilla a ésta última igualdad en distribución.

Definición 3.2.1. Proceso puntual marcado Es una pareja $(A, B) = (A_n, B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ donde $A = (A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es un proceso puntual³ y $B = (B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es una secuencia de variables aleatorias evaluadas en algún espacio de estados.

³Definición (A.0.4), se encuentra en el Apéndice.

Ahora formalizaremos un poco más lo que hicimos en (3.4) ya que utilizamos la reversibilidad de un proceso en equilibrio, esto es, si $A = (A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es un proceso puntual, entonces el proceso puntual reversible está dado por $(R(A) = (-A_{-n})_{n \in \mathbb{Z}})$. Por lo que es natural definir el proceso puntual marcado reversible como:

Definición 3.2.2. Proceso puntual marcado reversible. Dado un proceso puntual marcado $(A, B) = (A_n, B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ el proceso puntual marcado reversible es $R(A, B) = (-A_{-n}, -B_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$.

En este momento es conveniente recordar los procesos denominados “*càdlàg*”, i.e. procesos aleatorios $Y = (Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$ con valores reales que son continuos por la derecha y tienen límite por la izquierda. Además definimos el proceso reversible $R \circ Y = (R \circ Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$ como la modificación *càdlàg* del proceso $(Y(-t))_{t \in \mathbb{R}}$. Finalmente denotamos como $N_+(Y)$ y $N_-(Y)$ como procesos puntuales que cuentan, respectivamente, los saltos positivos y negativos del proceso Y (alguno de ellos podría ser infinito); esto es, para un intervalo $I \in \mathbb{R}$,

$$N_+(Y)(I) = \int_I \mathbb{I}_{\{Y(u) > Y(u-)\}} du, \quad N_-(Y)(I) = \int_I \mathbb{I}_{\{Y(u) < Y(u-)\}} du.$$

3.2.1. Definición del modelo de almacén.

Sea $A = (A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un proceso puntual y asumimos que $A_0 \leq 0 \leq A_1$, y definimos la secuencia de variables aleatorias $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ como $a_n = A_{n+1} - A_n$. Sea $B = (B_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ otra serie de variables aleatorias. El proceso puntual marcado (A, B) es la entrada del modelo y definimos el proceso de salidas $D = (D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ como:

$$D_{n+a} = \max(D_n, A_{n+1}) + B_{n+1},$$

que es idéntico al definido en (3.1). A partir de este proceso podemos definir su proceso similar a_n . Sea $d_n = D_{n+1} - D_n$ y definimos la sucesión de v.a. $r = (r_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ por

$$r_n = \min(D_n, A_{n+1}) - A_n. \quad (3.7)$$

El proceso puntual marcado (D, r) es la salida de éste modelo. Por las suposiciones en (3.1) y (3.7) obtenemos la siguiente relación entre las entradas y salidas:

$$r_n + d_n = a_n + B_{n+1}.$$

Demostración. Caso I. $D_n < A_{n+1}$. Sustituyendo directamente tenemos:

$$\begin{aligned} D_n - A_n + D_{n+1} - D_n &= A_{n+1} - A_n + B_{n+1} \\ D_{n+1} &= A_{n+1} + B_{n+1}. \end{aligned}$$

Caso II. $D_n \geq A_{n+1}$.

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n + D_{n+1} - D_n &= A_{n+1} - A_n + B_{n+1} \\ a_n + D_n + S_{n+1} - D_n &= a_n + B_{n+1} \\ a_n + S_{n+1} &= a_n + B_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Ahora definiremos una variable aleatoria (w_n) cuya interpretación se dará más adelante. Sea $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión de v.a. definidas como:

$$w_n = D_n - B_n - A_n. \quad (3.8)$$

Ésta v.a. satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$w_{n+1} = |w_n + B_n - a_n|. \quad (3.9)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |w_n + B_n - a_n| &= |D_n - B_n - A_n + B_n - a_n| \\ &= |D_n - A_{n+1}| \\ &= 2 \max(D_n, A_{n+1}) - D_n - A_{n+1} \\ &= 2 \max(D_n, A_{n+1}) + 2B_{n+1} - 2B_{n+1} - D_n - A_{n+1} \\ &= 2D_{n+1} - D_{n+1} - B_{n+1} - \min(D_n, A_{n+1}) \\ &= D_{n+1} - B_{n+1} - \min(D_n, A_{n+1}) \\ &= D_{n+1} - B_{n+1} - A_{n+1} \\ &= w_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Usando las variables w_n , podemos dar una definición alternativa de r_n :

$$r_n = \min(w_n + s_n, a_n) = b_n + w_n - w_{n+1}. \quad (3.10)$$

Finalmente definimos el proceso aleatorio de càdlàg con valores en \mathbb{N} como $Q = (Q(t))_{t \in \mathbb{R}}$ con

$$Q(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_{A_n \leq t < D_n}. \quad (3.11)$$

Lema 3.2.3. *Tenemos que $N_+(Q) = A$ y que $N_-(Q) = D$.*

Esto último es fácil de ver, puesto que como es una integral sobre el tiempo $Q(t) > Q(t-)$ cuando t toma el valor de A_n para alguna $n \in \mathbb{Z}$. Además, en éste

modelo $A_n < A_{n+1}$ podemos modificar la indicadora sobre $\{Q(t) > Q(t-)\}$ por $\{t = A_n : n \in \mathbb{Z}\}$, y nos queda:

$$\begin{aligned} N_+(Q) &= \int_{\mathbb{R}} I_{\{Q(t) > Q(t-)\}} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} I_{\{t = A_n : n \in \mathbb{Z}\}} dt \\ &= (A_n)_{n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre para $N_-(Q) = D$, sólo que ahora $Q(t) < Q(t-)$ cuando t toma el valor D_n .

Ahora recordaremos algunas definiciones del modelo de filas y lo contrastaremos con los conceptos en el modelo de almacén.

- D_n es el instante de salida del cliente n de la fila, después de completar su servicio.
- w_n es el tiempo de espera del cliente n entre su llegada y el comienzo de su servicio.
- $Q(t)$ es el número de clientes en la fila al instante t (tomando en cuenta a aquel que está siendo atendido.) y $Q = (Q(t))_t$ es llamado el proceso de longitud de fila.
- r_n es el tiempo que dura el cliente n como el último en la fila.

Cuando hablamos del modelo de filas no se introdujo el proceso r_n por que no es muy estudiado en ese modelo, pero cobra especial relevancia en el modelo de almacenes pues resulta ser igual en distribución que el proceso b_n .

En el modelo de almacén un producto P es suministrado, vendido y surtido en otra tienda de la siguiente manera. Cada evento ocurre en un intervalo tiempo determinado, caracterizado por un número entero. En cada intervalo un monto de P es suministrado y un monto de P es demandado por compradores. La regla que seguiremos es cubrir toda la demanda, de ser posible. Además la demanda que no se pueda satisfacer en un intervalo se toma como pérdida y el producto que no se venda en un intervalo no se pierde sino que se guarda para intervalos posteriores. Sea b_n el monto de P suministrado en el intervalo $n + 1$, y sea a_n el monto de P demandado en el mismo periodo. En este sentido las variables (3.7) y (3.8) se pueden interpretar como:

- w_n es la cantidad de producto almacenado en el intervalo n y evoluciona de acuerdo con (3.9).
- r_n es la demanda en el intervalo $n + 1$, esto es la cantidad de producto P que sale del almacén en el intervalo $n + 1$.

Por otro lado las variables $(D_n)_n$ y el proceso Q no tienen una interpretación natural en éste modelo. El uso de la notación $(s_n, a_n, r_n$ etc.) para el intervalo $n + 1$ se aclarará en la sección (5.3).

Es importante señalar que, si bien las ecuaciones que describen el modelo de filas y el de almacén son las mismas, no necesariamente tienen sentido en cada modelo. Las variables que nos importan son las correspondientes a las salidas del sistema. En el modelo de filas dicha información se encuentra en las variables $(D_n)_n$ mientras que en el modelo de almacenes se encuentra en las variables $(r_n)_n$. Por otro lado, la interpretación de las variables $(r_n)_n$ en el modelo de filas y de las variables $(D_n)_n$ en el modelo de almacenes no es intuitiva; en resumen las variables de salida $(D_n)_n$ y $(r_n)_n$ son igualmente relevantes, sólo que depende del modelo que se esté usando.

3.2.2. Generalización del teorema de Burke

Sea \mathcal{A} un proceso Poisson homogéneo de intensidad $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Definimos $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ con $A_0 = 0 < A_1$. Recordamos que $a_n = A_{n+1} - A_n$, de donde $(a_n)_{n \geq 1}$ es una serie de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) con distribución exponencial de parámetro λ . Sea $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una secuencia de variables aleatorias i.i.d., independientes de \mathcal{A} , con una distribución exponencial de parámetro μ . Asumiendo que $\lambda < \mu$. Ahora consideremos el proceso puntual marcado (\mathcal{A}, b) como el proceso de entrada del modelo. La secuencia de $(w_n)_n$ es una caminata aleatoria valuada en \mathbb{R}_+ con una barrera en el 0. Como vimos cuando introdujimos el modelo de filas, bajo la condición de estabilidad ($\lambda < \mu$) sabemos que las variables aleatorias (D_n) son casi seguramente finitas.

Teorema 3.2.4. *En el caso exponencial, el proceso puntual marcado (\mathcal{D}, r) tiene la misma ley que el proceso puntual marcado (\mathcal{A}, b) .*

Demostración. Conociendo Q podemos reescribir la entrada del modelo como $(\mathcal{A}_n, b_n)_n = \varphi(Q)$, por lo que basta probar que:

$$\varphi \circ \mathcal{R}(Q) = (-D_{-n+Q(0)+1}, r_{-n+Q(0)+1})_n = \mathcal{R}(\mathcal{D}, r).$$

Sea τ_n un operador que mapea a un proceso puntual a su n -ésimo punto, con la convención de que $\tau_0(\cdot) = 0 < \tau_1(\cdot)$, de donde, $A_n = \tau_n(\mathcal{A}) = \tau_n \circ \mathcal{N}_+(Q)$. tomando en cuenta el factor $Q(0)$ para el proceso reversible y el Lema 3.2.3, vemos que $\tau_n(\mathcal{D}) = \tau_n \circ \mathcal{N}_-(Q) = D_{n-Q(0)}$. Por lo que tenemos

$$\begin{aligned} s_n &= D_n - \max(A_n, D_{n-1}) \\ &= \tau_{n+Q(0)} \circ \mathcal{N}_-(Q) - \max(\tau_n \circ \mathcal{N}_+(Q), \tau_{n+Q(0)-1} \circ \mathcal{N}_-(Q)). \end{aligned}$$

Ahora definamos un operador \mathcal{B}_n tal que $b_n = \mathcal{B}_n(Q)$, y apliquemos los operadores $\tau_n \circ \mathcal{N}_+$ y \mathcal{B}_n a el proceso reversible $\mathcal{R}(Q)$. Primero veamos que

$$\begin{aligned} \tau_n \circ \mathcal{N}_+ \circ \mathcal{R}(Q) &= -D_{-(n+Q(0))+1} \\ &= -D_{-n-Q(0)+1}. \end{aligned}$$

Más aún, $\tau_{n+\mathcal{R}(Q)(0)-1} \circ \mathcal{N}_- \circ \mathcal{R}(Q) = -A_{-(n+Q(0)-1)+1} = -A_{-n-Q(0)+2}$.
 Por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n \circ \mathcal{R}(Q) &= \tau_{n+\mathcal{R}(Q)(0)} \circ \mathcal{N}_- \circ \mathcal{R}(Q) - \max(\tau_n \circ \mathcal{N}_+ \circ \mathcal{R}(Q), \tau_{n+\mathcal{R}(Q)(0)-1} \circ \mathcal{N}_- \circ \mathcal{R}(Q)) \\ &= -A_{-n-Q(0)+1} - \max(-D_{-(n+Q(0))+1}, -A_{-n-Q(0)+2}) \\ &= -A_{-n-Q(0)+1} + \min(D_{-(n+Q(0))+1}, A_{-n-Q(0)+2}) \\ &= r_{-n+Q(0)+1}. \end{aligned}$$

De aquí vemos que $\varphi \circ \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(\mathcal{D}, r)$.

El proceso Q es un proceso estacionario de nacimiento y muerte, por lo cual es reversible: $\mathcal{R}(Q) \stackrel{D}{=} Q$. Esto implica que $(\mathcal{A}, b) = \varphi(Q) \stackrel{D}{=} \varphi \circ \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(\mathcal{D}, r)$. Por lo que $\mathcal{R}(\mathcal{D}, r)$ es un proceso Poisson marcado homogéneo con una secuencia de v.a.i.i.d.. Esto implica que $(\mathcal{R}(D), r) \stackrel{D}{=} (D, r)$, que completa la prueba. \square

Corolario 3.2.5. *En el modelo de filas, el proceso de salida \mathcal{D} es un proceso Poisson de intensidad λ . Mientras que en el modelo de almacén, la secuencia $(r_n)_n$ son v.a.i.i.d. exponenciales de parámetro μ .*

Capítulo 4

La representación Robinson-Schensted-Knuth (RSK)

Definimos una partición de n elementos como una secuencia de números naturales $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tales que $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ y $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$, denotado por convención como $\lambda \vdash n$. Además diremos que dos particiones son equivalentes si tienen las mismas componentes distintas de cero. Un diagrama de Ferrers de $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ es una colección de n cajas arregladas con renglones justificados a la izquierda, donde el i -ésimo renglón (contando desde arriba) consiste de λ_i cajas.

Definición 4.0.1. *Tabla de Young semiestándar.* Una tabla de Young semiestándar sobre un el alfabeto $\{1, \dots, l\}$ es un diagrama de Ferrers en el que cada caja es etiquetada del $\{1, \dots, l\}$ de tal manera que las entradas crecen débilmente de izquierda a derecha a lo largo de los renglones y crece de manera estricta bajando por las columnas.

La “forma” de un diagrama o tabla se refiere a que la información de la tabla (cantidad y longitud de los renglones) construye una partición.

Definición 4.0.2. *Tabla de Young estándar de tamaño n .* Es una tabla de Young semiestándar de forma $\lambda \vdash n$

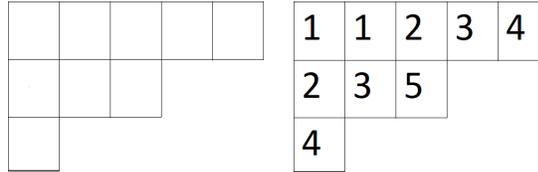


Figura 4.1: Diagrama de Ferrers (izquierda), Tabla de Young semiestándar(derecha).

El algoritmo de inserción de renglones de Robinson-Schensted-Knuth (algoritmo RSK) toma una tabla T y un $m \in \mathbb{N}$ y construye una nueva tabla denotada por $T \leftarrow m$. La tabla $T \leftarrow m$ tiene una caja mas que T y se construye de la siguiente manera:

Primero nombramos L_i al número en la última caja del renglón i . Se fija $i=1$ y se comienza con el siguiente ciclo:

- Si $m \geq L_i$ entonces se agrega al final del renglón una caja con el numero m en ella y se termina el procedimiento.
- Si $m \leq L_i$ entonces se identifica la primera caja cuyo valor sea más grande que m , se reemplaza dicho número por m y actualizamos el índice $i = i+1$.

Éste ciclo continua hasta que i sea igual a la cantidad de renglones de la tabla.

Ahora consideremos una palabra $v = v_1, \dots, v_n$ sobre el alfabeto $\{1, \dots, k\}$. La tabla asociada con v es por definición:

$$P = (\dots((T_0 \leftarrow v_1) \leftarrow v_2)\dots) \leftarrow v_n),$$

donde T_0 es la Tabla vacía. Observemos que P tiene a lo más k renglones no vacíos. Además la longitud del primer renglón de P (que es el más largo) es igual a la subsecuencia más larga de v que es creciente débilmente.

Considere la familia

$$U = (u(i, j) | (i, j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, K\})$$

de variables aleatorias en \mathbb{N} . Asociamos a U la palabra $w(U)$ sobre el alfabeto $\{1, \dots, K\}$, definida por

$$w(U) = w_1 \dots w_N \quad \text{con} \quad w_i = 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, k, \dots, k \quad (4.1)$$

donde para cada w_i se tiene una secuencia de $u(i, 1)$ de unos, $u(i, 2)$ de dos, ..., $u(i, K)$ de K . Sea

$$M = |w(U)| = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K u(i, j). \tag{4.2}$$

Para $i = 1, \dots, K$, definimos

$$x_i(n) = |\{j \leq n : w(U)_j = i\}| \quad \text{para todo } n \leq M.$$

Lo que hace este mapa $x_i(n)$ es contar hasta la entrada n -ésima el número de veces que salió el número i .

Ejemplo. Tomemos a U con $(i, j) \in \{1, 2, \dots, 9\} \times \{1, 2, 3\}$ y distribución uniforme discreta $[1, 5]$. Al simular los valores de U la palabra $w(U)$ quedó de la siguiente manera.

$$w(U) = \overbrace{1111}^{w_1} \overbrace{22}^{w_2} \overbrace{333}^{w_3} \overbrace{1111}^{w_2} \overbrace{22}^{w_2} \overbrace{3}^{w_3} \overbrace{11}^{w_3} \overbrace{2222}^{w_2} \overbrace{3}^{w_3}$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u(1,1)} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u(1,2)} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u(1,3)} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u(2,1)} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u(2,2)} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u(2,3)} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u(3,1)} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u(3,2)} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u(3,3)}$$

El tablero de Young de la palabra $w(U)$ construido por el algoritmo RSK es:

1	1 1	1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1 2	1 1 1 1 2 2
1 1 1 1 2 2 3	1 1 1 1 2 2 3 3	1 1 1 1 2 2 3 3 3	1 1 1 1 1 1 3 3 3	1 1	1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 3	1 1 1 1 1 1 1 1 2	1 1 1 1 1 1 1 1 2 2	1 1 1 1	1 1 1	1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3	1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3	1 1 1 1 1	1	1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2	1 1 1 1 1 1 2	1	1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3	1 1 1 1 1 1 2	1	1
1	1	1	1	1	1

para terminar el ejemplo, la cantidad de veces que aparece 2 antes de las posiciones 4, 8, 14, 15 son:

$$x_2(4) = 0 \quad x_2(8) = 2 \quad x_2(14) = 3 \quad x_2(15) = 4.$$

38CAPÍTULO 4. LA REPRESENTACIÓN ROBINSON-SCHENSTED-KNUTH (RSK)

Dados dos mapas $x, y: \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{N}$, definimos los mapas $x \triangle y: \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \nabla y: \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{N}$ como sigue:
Para toda $n \leq N$,

$$x \nabla y(n) = \max_{0 \leq m \leq n} [x(m) + y(n) - y(m)], \quad (4.3)$$

$$x \triangle y(n) = \min_{0 \leq m \leq n} [x(m) + y(n) - y(m)]. \quad (4.4)$$

Denotamos a $P(U)$ como la tabla obtenida de $w(U)$ al aplicar el algoritmo RSK y poniendo a $(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ su forma. Entonces

$$\lambda_1 = x_1 \nabla x_2 \nabla \dots \nabla x_k(M), \quad (4.5)$$

$$\lambda_k = x_k \triangle \dots \triangle x_2 \triangle x_1(M). \quad (4.6)$$

Donde los operadores no asociativos “ ∇ ” y “ \triangle ” se operan de izquierda a derecha. La expresión para λ_1 se sigue de que λ_1 es la secuencia más larga que crece débilmente en $w(U)$.

Capítulo 5

Relación entre modelos

El objetivo principal de esta tesis es mostrar de manera clara la relación que hay entre los modelos desarrollados a lo largo de este trabajo.

5.1. Relación entre percolación de último pasajero y el modelo de crecimiento.

La primera relación que daremos es aquella que relaciona el Capítulo 1 con el Capítulo 2, esto es, la relación que existe entre el tiempo de último pasaje y el modelo de crecimiento. En este caso la relación es muy evidente, pues para el modelo de crecimiento su los principales objetos de estudio son $B(t)$ y B los cuales están definidos en términos de T y g , esto es:

$$B(t) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d \mid T([x]) \leq t\},$$

$$B := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d \mid g(\mathbf{x}) \leq 1\}.$$

Así el conjunto $B(t)$ consta de todos aquellos valores en \mathbb{R}_+^d tales que su tiempo de último pasajero sea menor al tiempo t . Ahora, como el tiempo de último pasajero (T) es superaditiva, implica que si $\mathbf{z} \in B(t)$ con alguna $z_i \neq 0$ entonces para toda \mathbf{x} tal que $\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$ implica que $\mathbf{x} \in B(t)$; esto último se ejemplifica mejor en la simulación realizada en el capítulo de modelo de crecimiento.

5.2. Relación entre Percolación de último pasajero y el modelo de filas

La relación entre estos dos modelos ya la habíamos mencionado en el Capítulo 3; dicha relación es que el tiempo de último pasajero con coordenadas (n, k) y el tiempo para que el cliente n salga de la fila k $D(n, k)$ son iguales, la demostración la daremos en esta sección.

Empecemos recordando que $D(n, k)$ que es el tiempo para que el cliente n salga de la fila k se puede escribir en términos de las variables aleatorias $X(n, k)$ de la siguiente manera:

$$D(n, k) = X(n, k) + \max(D(n, k-1), D(n-1, k))$$

y recordemos que $D(0, 0) = 0$.

Demostración. La demostración es por inducción, por (3.1) y (3.2) tenemos:

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= 0 = X(0, 0) = T(0, 0) \\ D(1, 0) &= X(1, 0) + D(0, 0) = X(1, 0) = T(1, 0) \\ D(0, 1) &= X(0, 1) + D(0, 0) = X(0, 1) = T(0, 1) \\ D(1, 1) &= X(1, 1) + \max(D(0, 1), D(1, 0)) = X(1, 1) + \max(X(0, 1), X(1, 0)) \\ &= T(1, 1). \end{aligned}$$

Ahora suponemos $D(n-1, k-1) = T(n-1, k-1)$.

$$D(n, k) = X(n, k) + \max(D(n-1, k), D(n, k-1))$$

desarrollando a $D(n-1, k)$ tenemos:

$$\begin{aligned} D(n-1, k) &= X(n-1, k) + \max\{D(n-1, k-1), D(n-2, k)\} \\ &= X(n-1, k) + \max\{T(n-1, k-1), D(n-2, k)\}. \end{aligned}$$

ahora desarrollamos $D(n-2, k)$ y así sucesivamente hasta llegar al término $D(0, k)$ donde

$$D(0, k) = X(0, k) + \max\{D(0, k-1), 0\} = X(0, k) + D(0, k-1) = T(0, k).$$

Entonces sustituyendo recursivamente obtenemos:

$$D(n-1, k) = X(n-1, k) + \max\{T(n-1, k-1), T(n-2, k)\} = T(n-1, k).$$

haciendo el mismo desarrollo para los $D(n, k-i)$ con $i \geq 0$ llegamos a:

$$\begin{aligned} D(n, k) &= X(n, k) + \max\{D(n-1, k), D(n, k-1)\} \\ &= X(n, k) + \max\{T(n-1, k), T(n, k-1)\} \\ &= T(n, k). \end{aligned}$$

□

Esta correspondencia entre el modelo de percolación de último pasajero con $d = 2$ y el modelo de filas fue observada por primera vez por Muth [10].

5.3. Relación entre modelo de filas y almacenes, último pasajero y el modelo RSK

La relación entre los modelos de filas y almacenes y el modelo RSK es muy interesante, pues es una conexión directa entre los modelos de filas y almacenes. Lo que queremos demostrar en esta sección es que el primer y último término de la partición generada por el algoritmo RSK coinciden con el tiempo de salida del cliente N de la fila K ($D(n, k)$) y las salidas acumuladas del almacén K en el periodo de tiempo de 1 a N $\sum_n(r_n)$. Más formalmente:

Teorema 5.3.1. *Considere K filas o almacenes con variables $u(i, j)$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, K\}$, como definimos en el Capítulo 3. Fijemos una $N \in \mathbb{N}$. Sea D el instante de salida del cliente N de la fila K y sea R el acumulado de las salidas entre los periodos de tiempo i a N en el almacén K . Sea*

$$U = (u(i, j), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq K)$$

y definimos a $w(U)$ como en (4.1). Sea $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ la forma de la tabla de Young asociada con $w(U)$. Entonces:

$$\lambda_1 = \max_{\pi \in \Pi} \left[\sum_{(i,j) \in \pi} u(i, j) \right] = D, \quad (5.1)$$

$$\lambda_k = \min_{\pi \in \Pi} \left[\sum_{(i,j) \in \pi} u(i, j) \right] = R. \quad (5.2)$$

Antes de probar el teorema anterior demostraremos un lema para hacer más sencilla la tarea.

Lema 5.3.2. *Se tiene:*

$$x_k \Delta \cdots \Delta x_2 \Delta x_1(M) = \min_{\pi \in \Pi} \left[\sum_{(i,j) \in \pi} u(i, j) \right]$$

donde la operación Δ está dada por (4.4) y M por (4.2).

Demostración. Por definición tenemos:

$$\begin{aligned} & x_k \Delta \cdots \Delta x_1(M) \\ &= \min_{1 \leq m_k \leq \cdots < m_1 = M} [x_k(m_k) + x_{k-1}(m_{k-1}) - x_{k-1}(m_k) + \cdots + x_1(m_1) - x_1(m_2)]. \end{aligned}$$

Sea (m_k^*, \dots, m_2^*) una secuencia de enteros tales que minimizan la ecuación anterior.

Considere el conjunto de enteros

$$I = \left[\sum_{i=1}^k |w_i| + \sum_{j=1}^{K-1} u(k+1, j), k \in \{0, \dots, K-1\} \right].$$

El conjunto de enteros I cuenta cuantos números que hay antes de que la serie de k aparezca por $k + 1$ -ésima vez.

Supongamos que $m_K^* \in I$. De no ser así asumimos que $m_K^* \notin I$ y sea n_K el entero más pequeño que está en I y $n_K < m_K^*$. De manera ilustrativa tenemos:

$$w(U) : |1 \cdots 12 \cdots 2 \cdots \cdots \overbrace{1 \cdots 122 \cdots \cdots (K-1)(K-1)KK \cdots K}^{w_{k+1}}| 1 \cdots 1 \cdots KK|$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m_K^*} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{n_K}$

Ejemplificación para la prueba del Lema 5.3.2.

Podemos observar que la cantidad de veces que aparece K en $x_K(m_K^*)$ y en $x_K(n_K)$ son las mismas, i.e. $x_K(m_K^*) = x_K(n_K)$ y

$$\begin{aligned} & x_k \Delta \dots \Delta x_1(M) - x_k(n_K) \\ & \leq \min_{n_K < m_{K-1} < \dots < m_2} [x_{K-1}(m_{K-1}) - x_{K-1}(n_K) + \dots + x_1(M) - x_1(m_2)] \\ & \leq \min_{m_K^* < m_{K-1} < \dots < m_2} [x_{K-1}(m_{K-1}) - x_{K-1}(m_K^*) + \dots + x_1(M) - x_1(m_2)] \\ & = x_k \Delta \dots \Delta x_1(M) - x_k(m_K^*), \end{aligned}$$

por lo que podemos asumir que $m_K^* \in I$. Sea i_k tal que

$$m_K^* = \sum_{i=1}^{i_K-1} |w_i| + \sum_{j=1}^{K-1} u(i_K, j).$$

Entonces $x_K(m_K^*) = \sum_{j=1}^{i_K-1} u(j, K)$. Y por un argumento similar podemos probar, sin pérdida de generalidad, que

$$m_{K-1}^* \in \left[\sum_{i=1}^k |w_i| + \sum_{j=1}^{K-2} u(k+1, j), k \in \{i_K, \dots, K-1\} \right].$$

Dado que $m_K^* \in I$, tenemos $x_K(m_K^*) = \sum_{j=1}^{i_K} u(K, j)$ para alguna i_K . Entonces, nuevamente por el mismo argumento, podemos probar sin pérdida de generalidad que

$$m_{K-1}^* \in \left[\sum_{i=1}^k |w_i| + \sum_{j=1}^{K-2} u(k, j), k \in \{i_K + 1, \dots, K-1\} \right].$$

Esto implica que

$$x_{K-1}(m_{K-1}) - x_{K-1}(m_K) = \sum_{j=i_k+1}^{i_{k-1}} u(K-1, j) \quad \text{para alguna } i_{k-1}.$$

Repitiendo éste argumento obtenemos el resultado deseado. \square

5.3. RELACIÓN ENTRE MODELO DE FILAS Y ALMACENES, ÚLTIMO PASAJERO Y EL MODELO RSK43

Demostración. Teorema 5.3.1. Empecemos con la primera igualdad de (5.1). Observemos que

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= x_1 \nabla x_2 \nabla \dots \nabla x_k(M) \\ &= \max_{m_K < m_{K-1} < \dots < m_1} [x_K(m_K) + x_{K-1}(m_{K-1}) - x_{K-1}(m_k) + \dots + x_1(m_1) - x_1(m_2)].\end{aligned}$$

Lo primero que se aprecia es que para cada k en $\{1, \dots, K\}$ tenemos la diferencia $x_{k-1}(m_{k_i-1}) - x_{k-1}(m_{k_i})$. Lo que genera esta diferencia, es simplemente quitar la cantidad de veces que aparece la letra $k-1$ antes de la posición m_{k_i} , o lo que es lo mismo, deja la cantidad de veces que aparece la letra $k-1$ entre las posiciones m_{k_i} y m_{k_i-1} . Para dejar más claro esto último recordemos el ejemplo del Capítulo 4. Tenemos:

$$w(U) = \underbrace{\overbrace{111122333111122311}^{m_3}}_{m_2} 22223,$$

por lo que

$$x_2(m_2) = 8 \quad y \quad x_2(m_3) = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2(m_2) - x_2(m_3) = 4,$$

como podemos observar en el ejemplo nos queda claro que $x_K(m_K)$ es la cantidad de veces que aparece un punto con segunda coordenada en K , mientras que $x_{k-1}(m_{k_i-1}) - x_{k-1}(m_{k_i})$ es la cantidad de puntos con segunda coordenada $K-1$ quitando la cantidad de veces que aparece el punto $K-1$ mientras hay puntos en K . Habiendo hecho esta identificación y recordando la proposición (1.1.6.iii) concluimos que

$$\lambda_1 = \max_{\pi \in \Pi} \left[\sum_{(i,j) \in \pi} u(i,j) \right].$$

Finalmente el lado derecho de (5.1) ya se demostró en la Sección 5.2.

Ahora para probar (5.2) tenemos que el lado derecho de la igualdad se demostró en el Lema (5.3.2). Por lo que sólo falta demostrar el lado izquierdo de la igualdad.

Denotemos por $r(i-1, j)$ la cantidad de salidas al tiempo i del almacén j y por $w(i, j)$ la cantidad de productos que se quedaron en el almacén j al final del tiempo i . De acuerdo con (3.10), tenemos:

$$r(n, k) = r(n-1, k-1) + w(n, k) - w(n+1, k). \quad (5.3)$$

Aplicando (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned}w(n+1, k) &= [w(n, k) + r(n, k) - u(n, K+1-k)] \\ &= \max_{1 \leq m \leq n} \left[\sum_{i=m}^{n-1} r(i, k-1) - \sum_{i=m+1}^n u(i, k+1-k) \right].\end{aligned}$$

Usando (5.3), para $n \geq K$ tenemos

$$\begin{aligned}
r(n, K) &= r(n-1, K-1) + w(n, K) - w(n+1, K) \\
&= r(n-2, K-2) + w(n-1, K-1) - w(n, K-1) + w(n, K) - w(n+1, K) \\
&= r(n-K+1, 1) + \sum_{i=0}^{K-2} [w(n-i, K-i) - w(n-i+1, K-i)] \\
&= u(n-K+1, K) + \sum_{i=0}^{K-1} [w(n-i, K-i) - w(n-i+1, K-i)].
\end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{n=K}^N r(n, k) \\
&= \sum_{n=K}^N u(n-K+1, K) + \sum_{n=K}^N \sum_{i=0}^{K-1} [w(n-i, K-i) - w(n-i+1, K-i)] \\
&= \sum_{n=1}^{N-K+1} u(n, K) + \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{n=K}^N [w(n-i, K-i) - w(n-i+1, K-i)] \\
&= \sum_{n=1}^{N-K+1} u(n, K) + \sum_{i=0}^{K-1} [w(K-i, K-i) - w(N-i+1, K-i)].
\end{aligned}$$

Ahora recordamos que $w(k, k) = 0$ para toda $k \geq 1$. Esto nos da

$$R = \sum_{n=1}^{N-K+1} u(n, K) + \sum_{i=1}^K [w(i, i) - w(N-K+i+1, i)] \quad (5.4)$$

$$= \sum_{n=1}^{N-K+1} u(n, K) - \sum_{i=1}^K w(N-K+i+1, i). \quad (5.5)$$

5.3. RELACIÓN ENTRE MODELO DE FILAS Y ALMACENES, ÚLTIMO PASAJERO Y EL MODELO RSK45

Más aún, Sea $A = w(N + 1, K) + w(N, K - 1)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 A &= \max_{1 \leq i_1 \leq N} \left[\sum_{n=i_1}^{N-1} r(n, K-1) - \sum_{n=i_1+1}^N u(n, 1) \right] + w(N, K-1) \\
 &= \max_{1 \leq i_1 \leq N} \left[\sum_{n=i_1}^{N-1} r(n-1, K-2) + w(n, K-1) - w(n+1, K-1) - \sum_{n=i_1+1}^N u(n, 1) \right] + w(N, K-1) \\
 &= \max_{1 \leq i_1 \leq N} \left[\sum_{n=i_1}^{N-2} r(n, K-2) + w(i_1, K-1) - w(N, K-1) - \sum_{n=i_1+1}^N u(n, 1) \right] + w(N, K-1) \\
 &= \max_{1 \leq i_1 \leq N} \left[\sum_{n=i_1}^{N-2} r(n, K-2) + w(i_1, K-1) - \sum_{n=i_1+1}^N u(n, 1) \right] \\
 &= \max_{1 \leq i_1 \leq N} \left[\sum_{n=i_1}^{N-2} r(n, K-2) + \max_{1 \leq i_2 \leq i_1-1} \left[\sum_{n=i_2}^{i_1-2} r(n, K-2) - \sum_{n=i_2+1}^{i_1-1} u(n, 2) \right] - \sum_{n=i_1+1}^N u(n, 1) \right] \\
 &= \max_{1 \leq i_2 < i_1 \leq N} \left[\sum_{n=i_2}^{N-2} r(n, K-2) - \sum_{n=i_2+1}^{i_1-1} u(n, 2) - \sum_{n=i_1+1}^N u(n, 1) \right].
 \end{aligned}$$

Repetiendo éste procedimiento obtenemos:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^K w(N - K + i + 1, i) \\
 &= \max_{1 \leq i_{K-1} < \dots < i_1 \leq N} \left[\sum_{n=i_{K-1}}^{N-K+1} u(n, K) - \sum_{n=i_{K-1}+1}^{i_{K-2}-1} u(n, K-1) - \dots - \sum_{n=i_1+1}^N u(n, 1) \right].
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Al combinar (5.5) y(5.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
 R &= \min_{1 \leq i_{K-1} < \dots < i_1 \leq N} \left[\sum_{n=1}^{i_{K-1}} u(n, K) + \sum_{n=i_{K-1}+1}^{i_{K-2}-1} u(n, K-1) + \dots + \sum_{n=i_1+1}^N u(n, 1) \right] \\
 &= \min_{\pi \in \Pi} \left[\sum_{(i,j) \in \pi} u(i, j) \right].
 \end{aligned}$$

Con esto termina la demostración del Teorema (5.3.1). \square

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se abordaron los temas de Percolación de último pasajero, modelos de crecimiento, modelo de filas y almacenes y la representación Robinson-Schensted-Knuth, y se mostraron las relaciones entre ellos. La importancia de mostrar estas relaciones entre los modelos es que encontramos comportamientos “básicos” en los modelos de avance aleatorio. Por ejemplo la mayoría de estos modelos usan alguna transformación sencilla de sus funciones principales y las mandan a un límite (por lo general límite hidrodinámico). Se hace de tal manera que está transformación converge a la distribución Tracy-Widom (para Percolación de primer pasajero es $n^{-1/3}(T(n, [an]) - ng(1, \alpha))$) cuando $n \rightarrow \infty$. Esta es la distribución límite para el tamaño del eigenvalor más grande de una matriz aleatoria de un ensamble Gaussiano unitario. Por lo que hay relación con las matrices aleatorias, dicha relación entre estos modelos se puede consultar en Zeng Xingyuan en [17].

Cabe resaltar que estos no son los únicos modelos relacionados. Por ejemplo la representación RSK está relacionada con la percolación de primer pasajero (de hecho esta relación se demostró en el Capítulo 5.3, aunque no se hizo mucho énfasis debido a que no se introdujo el modelo de percolación de primer pasajero.). Otro modelo que está relacionado es el de representación de partículas en interacción, este modelo también es conocido como modelo de autobuses los cuales pueden llevar a una cantidad de usuarios de una parada a otra en un tiempo t . Se diferencia del modelo de filas ya que cada autobús puede llevar cantidades diferentes de usuarios y al llegar a una parada pueden subir o bajar usuarios; todo esto ocurre en el mismo lapso tiempo t . Este modelo se puede consultar en la sección (5.2) de [1] y en [7]. Este modelo está relacionado directamente con el modelo de almacenes.

Además de los modelos ya mencionados los siguientes modelos son de gran importancia en la física de materiales. Dichos modelos son el “Total Antisymmetric Simple Exclusion Process”, o por sus siglas (TASEP), y los polímeros aleatorios. En Liggett [7] y en Seppäläinen [15] se estudia el primero de los modelos mencionados y en Hollander [3] se estudia el segundo de ellos. La utilidad de estos dos modelos es el describir fenómenos de transporte de partículas con condicio-

nes de movimiento. Sorprendentemente estos se relacionan con la Percolación de último pasajero.

Habiendo dicho esto algunas de las aplicaciones de la percolación de último pasajero o de sus modelos relacionados son por ejemplo: El proceso de conducción de electrones sobre un polímero semiconductor, la forma de crecimiento de cristales regulares, crecimiento de poblaciones de bacterias, incluso el comportamiento de filas en supermercados.

Esto nos muestra la relevancia de este tipo de modelos en diferentes áreas como en los negocios, en la biología y principalmente en física de materiales.

Apéndice A

Teoría complementaria.

Empezaremos enunciando un Lema que se utilizó en la demostración del Lema (2.1.3) y cuya demostración se puede consultar en El Teorema 8.1.1 de [16]; para la demostración, vea por ejemplo, Lema 5.1 de [9].

Lema A.0.1. *Sea $Y_i, i \in I$, una colección finita de variables aleatorias independientes, tales que*

$$\mathbb{P}(|Y_i| \leq L) = 1$$

para toda $i \in I$. Sea \mathcal{C} un conjunto de subconjuntos de I tales que

$$\max_{C \in \mathcal{C}} |C| \leq R,$$

y sea

$$Z = \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{i \in C} Y_i.$$

Entonces para toda $u > 0$,

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq u) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{64RL^2} + 64\right).$$

Ahora enunciamos un par de resultados cuya demostración se puede consultar en [8]. Estos Lemas son importantes pues los utilizamos múltiples veces en el Capítulo 2.

En los siguientes dos lemas $\{X(v) : v \in \mathbb{Z}_+^d\}$ son v.a.i.i.d. con función de distribución F .

Lema A.0.2. *Existe una constante $c = c(d) < \infty$ tal que, para toda F que satisface*

$$\int_0^\infty (1 - F(s))^{1/d} ds < \infty,$$

con probabilidad 1, tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max_{z: \|z\| \leq n} T(z) \leq c \int_0^\infty (1 - F(s))^{1/d} ds.$$

Lema A.0.3. *Suponga que*

$$\mathbb{E}|X| < \infty,$$

y

$$\int_0^\infty (1 - F(s))^{1/d} ds < \infty.$$

Entonces para toda \mathbf{x} en \mathbb{R}_+^d ,

$$\begin{aligned} g^{(L)}(\mathbf{x}) - \|\mathbf{x}\| \int_\infty^{-L} F(s) ds \\ \leq g(\mathbf{x}) \leq g^{(L)}(\mathbf{x}) + c\|\mathbf{x}\| \int_L^\infty (1 - F(s))^{1/d} ds, \end{aligned}$$

donde c es como en el Lema (A.0.2). Por lo que para toda $R > 0$,

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d : \|\mathbf{x}\| \leq R} |g(\mathbf{x}) - g^{(L)}(\mathbf{x})| \rightarrow 0 \quad L \rightarrow \infty.$$

Ahora daremos algunas definiciones y enunciaremos la llamada ecuación de balance, que relaciona a los procesos estacionarios en equilibrio con la reversibilidad del proceso.

En las siguientes definiciones asumiremos que E es un espacio de estados y X_n , con n en \mathbb{N} , es un proceso estocástico con espacio de estados en E .

Definición A.0.4. *Un proceso puntual (E, ε) es una función $N : (\omega, \mathcal{F}) \rightarrow (M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$ medible, si \mathbb{P} es una probabilidad en (ω, \mathcal{F}) , la ley de N es la medida en $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$ determinada por la imagen de N*

$$\mathbb{P}_N(A) = \mathbb{P} \circ N^{-1}(A) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega, N(\omega) \in A) \quad \forall A \in \mathcal{M}_p(E) = \mathbb{P}(N \in A)$$

Definición A.0.5. *Un proceso $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, es estacionario si para toda $m, n \geq 0$ la ley del vector $(X_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+n})$ es la misma que la del vector (X_0, X_1, \dots, X_n) .*

Definición A.0.6. *Un probabilidad π en E se dice que es reversible si para todo $i, j \in E$, ocurre*

$$\pi(i)P(i, j) = \pi(j)P(j, i).$$

Teorema A.0.7. *Un proceso estacionario es reversible si y solo si existe una colección de números positivos $\pi(j)$, que suman a la unidad, tal que*

$$\pi(j)P(j, k) = \pi(k)P(k, j) \quad \text{para toda } k, j \in E.$$

Cuando tal colección existe, ésta es la distribución en equilibrio.

La demostración de éste teorema se puede ver en el libro de J.R.Norris[11] Teorema 3.7.3 en la pagina 125.

Apéndice B

Código de simulación

A continuación mostraremos el código¹ utilizado para simular el modelo de crecimiento del Capítulo 3.²

```
#Aqui tenemos una funcion que nos dara las coordenadas de los vecinos,
#recibe un punto en Z^2 y nos devuelve los vecinos de arriba y dercha.
vec<-function(u){
  r1<-c(u[1]+1,u[2])
  r2<-c(u[1],u[2]+1)
  vecinos<-rbind(r1,r2)
  return(vecinos)
}

#Esta funcion da un vector cuyo primer parametro es aquel de la dist.
#exponencial y tambien nos da el numero de vecinos.
proba<-function(x){
  n_vecinos<-length(x[,1])
  n_vecinos
  return(c(1,n_vecinos))
}

#La siguiente funcion elegira al vecino que salio en el menor tiempo.
#Recibe como parametro la matriz que tiene en sus renglones a los vecinos
#a los que podemos ir.
sig_punto<-function(x){
  prob<-proba(x)
  pi<-rexp(prob[2],prob[1])
  y<-c(1:prob[2])
  m <- matrix(data=cbind(y, pi), ncol=2)
  j <- min(m[,2])
  for(n in 1:prob[2]){
```

¹El lenguaje de programación es R.

²Los comentarios del código no tienen acentos

```

    if(m[n,2]==j){
      i<-n
      break # rompo cuando encuentro el renglon del valor mas chico
    }
  }
  return(c(i,x[i,]))
}

#Esta funcion nos permite eliminar el punto que salio de la
#matriz de vecinos. Ya que no queremos que vuelva a ser elegido.
#Recibe como parametro a x que es la matriz de vecinos e i
#que es el renglon de la matriz que va a salir.
vec_disp<-function(x,i){
  x=x[-c(i),]
  return(x)
}

#Crearemos una funcion que recibe al nuevo punto y verifica que
#los vecinos de este punto no se encuentren en la matriz de vecinos
#y que sean elegibles.
act_vecinos<-function(nuevo_punto,vecinos,puntos){
  nuevos_vecinos<-vec(nuevo_punto)
  indices<-numeric()
  #Aqui guardaremos los indices de la matriz vecinos que
  #realmente no son nuevos vecinos o bien estan en la matriz puntos
  #o bien no son elegibles.
  for(i in 1:2){#Para recorrer los 2 nuevos vecinos
    if(nuevos_vecinos[i,1]!=0 && nuevos_vecinos[i,2]!=0){
      a<-0
      for(j in 1:nrow(puntos)){#Para recorrer la matriz puntos
        if(((nuevos_vecinos[i,1]-1)==puntos[j,1])
          && (nuevos_vecinos[i,2]==puntos[j,2])){
          a<-a+1
          break #Rompo para que no siga comparando
        }
      }
      for(j in 1:nrow(puntos)){#Para recorrer la matriz puntos
        if((nuevos_vecinos[i,1]==puntos[j,1])
          && ((nuevos_vecinos[i,2]-1)==puntos[j,2])){
          a<-a+1
          break #Rompo para que no siga comparando
        }
      }
    }
    if(a<2){
      indices=c(indices,i)
      #Actualizamos indices guardando el numero de renglon donde pasa.
    }
  }
}
if(length(indices)!=0){

```

```

    nuevos_vecinos<-nuevos_vecinos[-c(indices),]
    #Aqui quitamos los renglones que no son nuevos vecinos.
  }
  vecinos<-rbind(vecinos,nuevos_vecinos)
  #Agregamos los verdaderos nuevos vecinos a la matriz vecinos.
  return(vecinos)
}

#Ahora haremos una funcion que recibe como parametro a
# k que es el numero de pasos que queremos.
fpp<-function(k){
  puntos<-c(0,0)
  #Tendremos una matriz que guardara en sus renglones los puntos que
  #fueron elegidos, el primer punto es el origen.
  vecinos<-vec(puntos)
  #Una matriz que guarda en sus renglones a los posibles vecinos,
  #La iniciaremos con los vecinos del origen.
  tiempo<-1
  while(tiempo<=k){
    aux<-sig_punto(vecinos)
    #Aqui tenemos a que punto de los posibles vecinos salta.
    nuevo_punto<-c(aux[2],aux[3])
    #coordenadas del nuevo punto.
    puntos<-rbind(puntos,nuevo_punto)
    #Actualizamos la matriz de puntos agregando el nuevo punto.
    vecinos<-act_vecinos(nuevo_punto,vecinos,puntos)
    #Actualizamos la matriz de vecinos agregando los vecinos del nuevo punto.
    vecinos<-vec_disp(vecinos,aux[1])
    #Actualizamos la matriz de vecinos eliminando el punto que salio.
    tiempo<-tiempo+1
    #Actualizamos el tiempo.
  }

  #Extraemos las coordenadas de los puntos para graficarlos.
  X<-puntos[,1]
  Y<-puntos[,2]
  all<-c(X,Y)
  range=c(min(all),max(all)+1)
  fig<-plot(0,0,main = "Modelo de crecimiento de k=100 pasos",
            xlim=range,ylim = range)
  for(i in 1:length(puntos[,1])){#Graficamos los cuadros.
    rect(puntos[i,1],puntos[i,2],puntos[i,1]+1,puntos[i,2]+1 )
  }
  return(fig)
}

```


Bibliografía

- [1] N. O’Connell Draief Moez J. Mairesse. «Queues, Stores, and Tableaux». En: *J. Appl. Prob* 42 (2005), págs. 1145-1167.
- [2] R. Durrett. *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*. Wadsworth, Belmont, CA., 1988.
- [3] Frank den Hollander. *Random Polymers*. Springer, 2007.
- [4] K. Johansson. «Shape fluctuations and random matrices». En: *Comm. Math. Phys* 209 (2000), págs. 437-476.
- [5] H. Kesten. «Percolation theory and first-passage percolation». En: *The Annals of Probability* 15.1 (1987), págs. 1231-1271.
- [6] Thomas M. Liggett. «An Improved Subadditive Ergodic Theorem». En: *The Annals of Probability* 13.4 (1985), págs. 1279-1285. DOI: http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.aop/1176992811.
- [7] Thomas M. Liggett. *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes*. Springer, 1999.
- [8] James B. Martin. «Limiting Shape For Directed Percolation Models». En: *The Annals of Probability* 32.4 (2004), págs. 2908-2937. DOI: <http://projecteuclid.org/euclid.aop/1107883342>.
- [9] James B. Martin. «Linear growth for greedy lattice animals». En: *Stochastic Process. Appl* 98 (2002), págs. 43-66.
- [10] Eginhard J. Muth. «The Reversibility Property of Production Lines». En: *Management Sci.* 25 (1979), págs. 152-182.
- [11] J. R. Norris. *Markov Chains*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2009. ISBN: 0-521-48181-3.
- [12] Valentin V. Petrov. *Limit Theorems of Probability Theory*. Oxford Univ. Press, 1995.
- [13] H. Rost. «Non-equilibrium behaviour of a many particle process: Density profile and local equilibria». En: *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 58 (1981), págs. 41-53. DOI: [10.1007/BF00536194](https://doi.org/10.1007/BF00536194).

- [14] Timo Seppäläinen. «Exact limiting shape for a simplified model of first-passage percolation on the plane». En: *The Annals of Probability* 26.3 (1998), págs. 1232-1250. DOI: <http://projecteuclid.org/euclid.aop/1022855751>.
- [15] Timo Seppäläinen y Hao Lin. «Properties of the limit shape for some last-passage growth models in random environments». En: *Stochastic Processes and their Applications* 122.2 (2011), págs. 498-521. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2011.08.015>.
- [16] Michel Talagrand. «Concentration of Measure and Isoperimetric Inequalities in Product Spaces». En: *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math* 81 (1995), págs. 73-205.
- [17] ZENG Xingyuan y HOU Zhenting. «Directed Last-passage Percolation and Random Matrices». En: *Advances in Mathematics(China)* 42 (2013), págs. 257-278.