



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"TRATAMIENTO NUMÉRICO DE ECUACIONES
HIPERBÓLICAS USANDO FORMULACIONES
IMPLÍCITAS EN EL TIEMPO: LA ECUACIÓN DE
ONDA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

DELGADO VILLANUEVA IMRE ALBERTO



DIRECTOR DE TESIS:

DOCTOR INVESTIGADOR EMÉRITO
ISMAEL HERRERA REVILLA

16 de abril de 2018

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Delgado
Apellido materno	Villanueva
Nombre(s)	Imre Alberto
Teléfono	55.23.59.57
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	306555899
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Doctor Investigador Emérito
Nombre(s)	Ismael
Apellido paterno	Herrera
Apellido materno	Revilla
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Doctor
Nombre(s)	Jesús
Apellido paterno	López
Apellido materno	Estrada
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Doctor
Nombre(s)	Guillermo de Jesús
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	García
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Doctora
Nombre(s)	Clara Eugenia
Apellido paterno	Garza
Apellido materno	Hume
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Doctor
Nombre(s)	Javier de Jesús
Apellido paterno	Cortés
Apellido materno	Aguirre
7. Datos del trabajo escrito.	7. Datos del trabajo escrito.
Título	Tratamiento numérico de ecuaciones hiperbólicas usando formulaciones implícitas en el tiempo: La ecuación de onda
Subtítulo	La ecuación de onda
Número de páginas	95
Año	2018

Índice general

1. Introducción	5
2. Formulación axiomática de los modelos básicos	8
2.1. Modelación	8
2.2. Física microscópica y macroscópica	8
2.3. Cinemática de sistemas continuos	8
2.3.1. Propiedades intensivas	9
2.3.2. Propiedades extensivas	10
2.4. Ecuaciones de balance de propiedades intensivas y extensivas	11
2.4.1. Ecuación de balance global	11
2.4.2. Ecuación de balance local	11
2.5. Sistemas de una fase y sistemas de muchas fases	12
2.5.1. Modelo matemático básico para sistemas de una fase	12
2.5.2. Modelo matemático básico para sistemas de muchas fases	13
3. Ecuaciones diferenciales parciales	15
3.1. Clasificación	16
3.2. Formas canónicas	16
3.3. Problemas bien planteados	17
3.3.1. Problema de valor a la frontera	17
3.3.2. Problema de condición inicial y valor a la frontera	17
3.4. Ecuación de onda	18
3.4.1. Solución general	18
3.4.2. Ecuación de onda homogénea en la recta real	19
3.4.3. Triángulo característico y dominio de propagación	20
3.4.4. Ecuación de onda no homogénea en la recta real	23
3.4.5. Ecuación de onda en un intervalo cerrado	25
4. Tratamiento numérico (con diferencias finitas) de ecuación de onda	35
4.1. Introducción	35
4.2. CTCS (<i>Central Time Central Space</i>)	37
4.2.1. Esquema numérico CTCS	37
4.2.2. Discretización problema ecuación de onda	37
4.2.3. Error de truncamiento y consistencia CTCS	38
4.2.4. Estabilidad CTCS	39
4.2.5. Convergencia CTCS	42
4.3. Crank Nicolson	42
4.3.1. Esquema numérico Crank Nicolson	42
4.3.2. Discretización problema ecuación de onda	42
4.3.3. Error de truncamiento y consistencia Crank Nicolson	44
4.3.4. Estabilidad Crank Nicolson	45
4.3.5. Convergencia Crank Nicolson	48
4.4. Cuestiones teóricas	48

5. Método de integración implícito en el tiempo propuesto por Herrera	50
5.1. Discusión	50
5.2. Algoritmo propuesto por Herrera	52
5.2.1. Discretización problema ecuación de onda	52
5.2.2. Error de truncamiento y consistencia algoritmo propuesto por Herrera	55
5.2.3. Estabilidad algoritmo propuesto Herrera	56
5.2.4. Convergencia algoritmo propuesto por Herrera	60
6. Implementación	62
6.1. Problemas a resolver	63
6.2. Procedimiento	64
6.3. Solución exacta	64
6.4. Algoritmo	71
6.5. Visualización de resultados: problema 1	75
6.5.1. Tomas de animación	75
6.5.2. Error	76
6.6. Visualización de resultados: problema 2	77
6.6.1. Tomas de animación	77
6.6.2. Error	78
6.7. Visualización de resultados: problema 3	79
6.7.1. Tomas de animación	79
6.7.2. Error	80
6.8. Visualización de resultados: problema 4	81
6.8.1. Tomas de animación	81
6.8.2. Error	82
6.9. Visualización de resultados: problema 5	83
6.9.1. Tomas de animación	83
6.9.2. Error	84
6.10. Visualización de resultados: problema 6	85
6.10.1. Tomas de animación	85
6.10.2. Error	86
6.11. Sobre el error y tiempo calculado	87
6.11.1. Error	87
6.11.2. Tiempo calculado	87
6.12. Código visualizaciones, animaciones y error	87
6.12.1. Visualización	87
6.12.2. Animaciones	89
6.12.3. Error	92
7. Conclusiones y perspectivas	94
7.1. Conclusiones	94
7.2. Perspectivas	95

Великому и уважаемому
Владимиру Владимировичу Путину

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones hiperbólicas de la forma general

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathcal{L}_x u$$

donde \mathcal{L}_x es un operador diferencial elíptico en las coordenadas del espacio físico son muy importantes porque son los modelos básicos de sistemas continuos newtonianos que ocurren en muchos problemas de ciencia e ingeniería; en sismología e ingeniería sísmica, por ejemplo. Los métodos de integración del tiempo directos son ampliamente utilizados para tales sistemas, principalmente debido a su sencillez. Sin embargo, con esos métodos es muy difícil obtener soluciones de alta precisión. Una discusión bastante detallada de este tema se encuentra en [1].

Por otra parte, los beneficios de la utilización de los recursos computacionales de alto rendimiento son más amplios cuando los sistemas involucrados contienen números elevados de grados de libertad, condición que no se cumple cuando la integración en el tiempo es directa. En esta tesis, Imre Alberto Delgado Villanueva analiza un esquema numérico propuesto por Dr. Ismael Herrera Revilla, director de la tesis, para sistemas hiperbólicos; en particular, el caso tratado aquí es el de la ecuación de onda. Dicho algoritmo está formado por dos recursiones, mismas que involucran respectivamente posición y velocidad. La primera recursión es un procedimiento implícito, mientras que la segunda es explícita. Dicho algoritmo puede ser empleado para resolver la ecuación de onda en varias dimensiones e incluso no lineal; no obstante, aquí sólo se presenta el caso lineal en una dimensión.

Tratándose de una tesis de licenciatura en matemáticas, el problema se sitúa en un marco más amplio y didáctico. Así, los temas tratados corresponden a la siguiente lista:

- **Formulación axiomática de modelos básicos**

Esta sección está basada en la formulación axiomática de la física macroscópica del libro:

"Mathematical Modelling in Science and Engineering: An axiomatic approach", Ismael Herrera and George F. Pinder, John Wiley, 243p., 2012.

En la presentación aquí contenida se comienza con la cinemática de sistemas continuos así como con definiciones de propiedades intensivas y propiedades extensivas. Con base en ellas se introducen ecuaciones de balance local y ecuaciones de balance global para sistemas de una fase y sistemas de muchas fases. De esta manera se llega a un modelo matemático básico, constituido por un sistema de ecuaciones de gran generalidad aplicable a los procesos físicos más importantes que ocurren en ciencias (en particular, ciencias de la tierra) e ingeniería.

- **Ecuaciones diferenciales parciales**

En esta sección introduce ecuaciones diferenciales parciales, su clasificación y formas canónicas, incluyendo desde luego ejemplos de ecuaciones típicas. Posteriormente explica condiciones bajo las cuales un problema es considerado bien planteado, enunciándolo para los tres tipos de ecuaciones diferenciales parciales ya mencionados. Terminado esto comienza uno con la ecuación de onda, obtención de la solución general, el problema de Cauchy en la recta real, el dominio de influencia, seguido de un ejemplo. A continuación agrega uno las condiciones de frontera, donde considera uno los casos intervalo simétrico y no simétrico junto con la obtención de la solución para las condiciones de frontera no homogéneas así como las condiciones de compatibilidad para cada caso.

- **Tratamiento numérico (con diferencias finitas) de la ecuación de onda**

En esta sección comienza uno con una breve introducción al método de diferencias finitas, donde la nomenclatura

es introducida así como la obtención de fórmulas indispensables para trabajar con la ecuación de onda. En seguida tiene uno las cuestiones teóricas, los criterios que determinan la fiabilidad de algoritmo que uno considere. Posteriormente introduce uno el esquema de diferencias centrales en el espacio y en el tiempo (CTCS) y el esquema Crank Nicolson, esquema respectivamente explícito e implícito, para cada uno obtiene uno el error local de truncamiento, determina uno también la consistencia del esquema con la ecuación de onda, la estabilidad o bien la restricción para que sea estable (en caso de que aplique) usando el criterio de estabilidad de Von Neumann y emplea uno el lema Lax-Richtmyer para la convergencia del método numérico a la solución. Por último discretiza uno el problema de la ecuación de onda mediante cada esquema, obteniendo así los coeficientes de las matrices y el sistema a resolver en cada paso (si aplica) así como el papel de las condiciones iniciales dentro de la implementación.

■ **Método de integración implícito en el tiempo**

En esta sección discute uno todo en cuanto refiere al esquema numérico propuesto por Herrera. Uno comienza con la idea detrás del algoritmo, la cual desarrolla uno para su obtención, uno llega a una forma general que actúa como prototipo para la ecuación de onda no lineal y de más dimensiones, sin embargo, uno trata aquí el problema lineal en una dimensión. Posteriormente, de manera análoga al esquema CTCS y Crank Nicolson, define uno para este esquema el error local de truncamiento y determina uno la consistencia con la ecuación de onda. A continuación tiene uno la estabilidad, donde el método de Von Neumann es empleado nuevamente para determinar la estabilidad de método numérico donde paralelamente las regiones de estabilidad son bosquejadas. Posteriormente viene una breve sección donde usa uno el lema Lax-Richtmyer para concluir el tipo de estabilidad del algoritmo propuesto por el Dr. Herrera y finalmente discretiza uno el problema de la ecuación de onda.

■ **Implementación**

En esta sección explica uno de manera breve el lenguaje con el cual se escribió el programa, sus características y paquetería empleada. A continuación se enuncian seis problemas bien planteados, los cuales son resueltos con el programa implementado. Primero, se comprueban condiciones de compatibilidad para cada uno de ellos y después se introduce el algoritmo implementado, el cual es dividido en partes y se explica qué operación realiza cada una de ellas.

El primer problema se toma como motivación para desarrollar el algoritmo que se va a implementar, pero el algoritmo así obtenido es aplicable a los cinco problemas restantes por simples cambios de los datos de entrada; es decir, dominio, velocidad, condiciones iniciales y de frontera.

Concluido el algoritmo y la explicación, tiene uno la visualización de resultados para cada problema, donde los datos de salida son mostrados así como las tomas de animación para tiempos distintos. Por último tiene uno una gráfica de error donde puede uno apreciar qué tanto propaga cada algoritmo (CTCS, Crank Nicolson y Herrera) en cada paso de tiempo.

■ **Conclusiones**

Como su nombre lo indica, en esta sección se comenta y se hace una breve evaluación del contenido de la tesis.

Bibliografía

- [1] Gunwoo Noh, Seounghyun Ham, Klaus-Joergen Bathe, Performance of an implicit time integration scheme in the analysis of wave propagations. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, United States.

Capítulo 2

Formulación axiomática de los modelos básicos

2.1. Modelación

Un modelo de un sistema es un sustituto de cuyo comportamiento puede uno derivar el correspondiente a dicho sistema. Modelación es la acción de construir y aplicar modelos. Por lo mismo en esta tesis utilizará uno este término para referir al estudio de métodos para construir y aplicar modelos con el fin de predecir el comportamiento de sistemas que en ella uno estudiará. En lo que sigue uno se refiere en particular a modelación matemática que es ampliamente utilizada en ciencias e ingenierías. Debido a que en la vida real los fenómenos naturales son sistemas complejos la modelación matemática busca encontrar un sustituto del sistema que represente de mejor manera al sistema físico original. Consecuentemente será importante distinguir entre el modelo y el sistema físico real, pues eso ayuda a alcanzar mayor claridad en lo que sigue. Por otro lado el desarrollar modelos matemáticos apropiadamente permite alcanzar una gran precisión.

2.2. Física microscópica y macroscópica

La modelación consta de escalas y como el nombre mismo sugiere, uno formulará la representación del fenómeno a tratar dependiendo del tamaño de la misma. Éstas están divididas en: **escala microscópica** y **escala macroscópica**.

La escala microscópica trata con niveles extremadamente pequeños, como átomos, moléculas y/o partículas elementales. Mientras que la escala macroscópica tiene un enfoque para sistemas de mayor tamaño.

En general en el área de modelación es empleado un enfoque macroscópico, debido a que tratar sistemas complejos de gran tamaño, conformados por un número enorme de partículas, resultaría completamente inaccesible bajo el punto de vista microscópico. Para estudiar dichos fenómenos es necesario un enfoque axiomático que diferencie las propiedades que conforman la materia, así como el enfoque de escalas abordadas y de cómo hacerlo. Esta teoría recibe el nombre de **mecánica del medio continuo**.

2.3. Cinemática de sistemas continuos

A menos que uno especifique lo contrario trabajará uno en \mathbb{R}^3 y trabajará con sistemas de una fase, cuya definición será enunciada más adelante. Esta teoría considera un cuerpo \mathcal{B} como un conjunto de partículas que en todo momento ocupa un dominio del espacio, más aún, un cuerpo material llena completamente el espacio físico que ocupa. Uno denota el cuerpo como \mathcal{B} y el dominio que éste ocupa en el tiempo t como $B(t)$, donde $-\infty < t < \infty$, sin embargo para propósitos prácticos el tiempo toma generalmente un intervalo finito debido al límite de precisión en los cálculos numéricos. En caso de que haya otros cuerpos que cumplan $B \subset \mathcal{B}$ serán llamados subcuerpos de \mathcal{B} .

Toda partícula \underline{X} tiene asignada una función de posición $\underline{p}(\underline{X}, t)$ para cualquier tiempo t y ocupa una posición $\underline{x} = \underline{p}(\underline{X}, t)$ en el espacio físico como puede uno ver en Figura 2.1. Análogamente uno puede saber qué partícula \underline{X} está ubicada en el espacio \underline{x} al tiempo t mediante $\underline{X} = \underline{p}^{-1}(\underline{x}, t)$.

En los sistemas de una fase, dos partículas diferentes no pueden ocupar la misma posición \underline{x} para ningún tiempo t , consecuentemente no puede haber intersecciones de trayectorias dos partículas. Esto último es llamado axioma de impenetrabilidad de los cuerpos y es la razón de la existencia de la función inversa \underline{p}^{-1} .

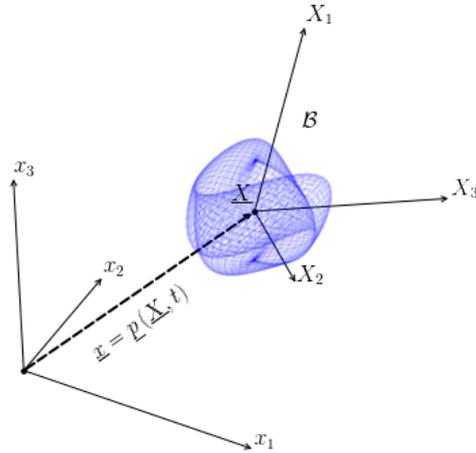


Figura 2.1: Toda partícula \underline{X} en el cuerpo \mathcal{B} ocupa una posición en él en el sistema $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$, y a su vez ocupa una posición en el espacio físico $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, la relación entre el sistema de coordenadas \underline{X} y las coordenadas de posición de la partícula \underline{X} en el espacio físico \underline{x} está dada por la función $\underline{x} = \underline{p}(\underline{X}, t)$ y viceversa por la función inversa $\underline{X} = \underline{p}^{-1}(\underline{x}, t)$.

La función \underline{p} denota una función de un espacio en sí misma junto con la función inversa \underline{p}^{-1} . Es importante notar, que en el caso de $t = 0$ obtiene uno $\underline{p}(\underline{X}, 0) \equiv \underline{X}$ pues la partícula ha sido identificada de acuerdo a su posición \underline{X} a un tiempo inicial, lo cual conduce a $\underline{x} = \underline{p}(\underline{X}, 0) \equiv \underline{X}$. Basado en esta idea el conjunto \mathcal{B} es el dominio que el cuerpo ocupa al tiempo inicial y la partícula está en el cuerpo si y sólo si $\underline{X} \in \mathcal{B}(0)$. Lo anterior deja sentadas las bases para la definición matemática de $\mathcal{B}(t)$ a saber $\mathcal{B}(t) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 | \exists \underline{p}(\underline{X}, t) = \underline{x}, \underline{X} \in \mathcal{B}\}$. Uno debe observar, que para el caso particular $t = 0$ esta definición conduce a $\mathcal{B}(0) = \{\underline{X} \in \mathbb{R}^3 | \exists \underline{X} \in \mathcal{B}\}$ pues $\underline{x} = \underline{X}$ es decir $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}$. Por último recuerda uno que cuando uno habla de la función de posición es consecuencia tratar el concepto de velocidad. Si uno toma la derivada de la función posición dejando a \underline{X} fija obtiene uno la velocidad de la partícula

$$\frac{\partial \underline{p}}{\partial t}(\underline{X}, t) \equiv \underline{V}(\underline{X}, t)$$

Por otro lado usando la función inversa \underline{p}^{-1} , la cual determina a la partícula \underline{X} que está estacionada en ese momento en la posición \underline{x} en el tiempo t , obtiene uno

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \underline{V}(\underline{p}^{-1}(\underline{x}, t), t) \equiv \underline{v}(\underline{x}, t)$$

esto significa que la velocidad \underline{v} en un punto \underline{x} del espacio físico está dada por la velocidad de la partícula \underline{X} que pase en ese tiempo t .

2.3.1. Propiedades intensivas

Dado que un cuerpo posee un número infinito de partículas, uno tiene dos opciones para obtener características internas del mismo, uno puede fijar la posición \underline{p} de una partícula \underline{X} a un tiempo t determinado y conforme al trayecto que la partícula realice obtiene uno las propiedades que conlleva. Por otro lado uno puede fijar la posición en un punto fijo del espacio \underline{x} al tiempo t y obtener información de las partículas que crucen en ese punto durante un tiempo determinado.

Las propiedades intensivas son funciones que están definidas para cada partícula. Temperatura y densidad son ejemplos comunes en física de esta clase de funciones. En otras palabras, la función $\varphi(\underline{X}, t)$ representa el valor de propiedad intensiva de la partícula \underline{X} en cuestión para un tiempo t . Por otro lado puede uno considerar esa misma propiedad intensiva desde un punto de vista distinto y asignarle no respecto a la partícula \underline{X} sino a la posición \underline{x} que ocupe al tiempo t determinado. La función $\psi(\underline{x}, t)$ representa el valor de la propiedad intensiva en el punto \underline{x} al tiempo t . El enfoque de seguir una partícula en una infinidad de puntos (trayectoria) fue abordado por el matemático italiano nacionalizado francés *Joseph Louis Lagrange*, mientras que el de una infinidad de partículas en un punto por el matemático suizo *Leonhard Euler*. Consecuentemente funciones $\varphi(\underline{X}, t)$ y $\psi(\underline{x}, t)$ son llamadas **representación Lagrangeana** y **representación Eulereana** respectivamente.

Puesto que las representaciones Lagrangeana y Eulereana trabajan con respecto a una misma propiedad intensiva desde distintos puntos de vista, ambas satisfacen la condición

$$\varphi(\underline{X}, t) \equiv \psi(\underline{x}, t)$$

que es equivalente a $\varphi(\underline{X}, t) \equiv \psi(\underline{p}(\underline{X}, t), t)$ y a $\varphi(\underline{p}^{-1}(\underline{x}, t), t) \equiv \psi(\underline{x}, t)$ debido a que uno puede determinar posición de una partícula y la partícula que está en determinada posición respectivamente. El concepto que sucede a la noción de posición es, como ya fue mencionado, velocidad. Por tanto al tomar la derivada con respecto del tiempo de la relación entre representaciones euleriana y lagrangeana obtiene uno

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{X}, t) &= \frac{\partial \psi}{\partial t}(\underline{x}, t) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \nabla \psi(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

para denotar la derivada de la representación lagrangeana define uno

$$\frac{D\psi}{Dt}(\underline{x}, t) = \nabla \psi(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(\underline{x}, t)$$

llamada **derivada material** y es comúnmente expresada a manera de operador como

$$\boxed{\frac{D}{Dt}(\cdot) = (\nabla \psi \cdot \underline{v} + \frac{\partial}{\partial t})(\cdot)}$$

Para concluir recuerda uno que la derivada de la velocidad es la aceleración o bien segunda derivada de la posición. Esto conduce a

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2}(\underline{X}, t)$$

2.3.2. Propiedades extensivas

Las propiedades extensivas, como el nombre indica, son propiedades que están extendidas por todo el cuerpo \mathcal{B} (dominio), es decir, uno trata con características que son globales en el espacio donde uno está trabajando. Es por ello que para describir tales propiedades trabaja uno con el cuerpo para un tiempo t de interés. Siguiendo esta idea es natural definir una función que englobe todas las partículas que estén en los puntos \underline{x} que tengan determinada propiedad:

$$E(\mathcal{B}, t) \equiv \int_{\mathcal{B}(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x}.$$

En otras palabras, cualquier función que pueda ser expresada como una integral de una propiedad intensiva (la cual es integrable en sentido de Lebesgue) sobre todo el dominio para determinado t es llamada propiedad extensiva. Matemáticamente integra uno todo el espacio de \mathbb{R}^3 donde las propiedades intensivas de interés están presentes, es decir, uno trabaja con el volumen.

Es importante notar, que la ecuación $E(\mathcal{B}, t)$ establece una correspondencia biunívoca entre las propiedades intensivas y extensivas. En efecto, si uno posee una propiedad intensiva basta integrarla en el dominio para obtener una propiedad extensiva asociada y análogamente si uno posee una propiedad extensiva basta tomar el integrando para obtener la propiedad intensiva asociada. Más aun, este enfoque conduce a un resultado muy importante. Si tiene uno el cociente de una propiedad extensiva con el volumen que ocupa y uno comienza a reducir ese volumen, resulta lógico intuir que entre más chico sea éste obtendrá uno la propiedad intensiva asociada. Consecuentemente define uno

$$\psi(\underline{x}, t) \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{B}(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x}}{V}.$$

No obstante, es común leer textos que introduzcan tal concepto de propiedades intensivas en unidades de masa, lo cual no representa bajo ninguna circunstancia un impedimento para la teoría desarrollada ya que ambos conceptos son equivalentes mediante la definición de densidad. Ésta, por definición, es la razón entre la cantidad de masa y volumen por tanto para lograr equivalencia con unidades de volumen, basta multiplicar la propiedad intensiva por el cociente de la densidad y la masa.

En efecto, por definición de densidad

$$\rho = \frac{m}{V}$$

por lo que uno obtiene

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x}}{m} \rho = \frac{\int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x}}{m} \rho$$

en otras palabras, la propiedad intensiva por unidad de volumen es equivalente a la propiedad intensiva por unidad de masa multiplicada por la densidad. Así, la ecuación $\psi(\underline{x}, t)$ representa no sólo un concepto teórico sino un medio experimental para la estimación de propiedades intensivas y extensivas.

En cuanto a notación usará uno $E(\mathcal{B}, t)$ y $E(t)$ indistintamente, no olvidando que la propiedad extensiva considerada es una función del cuerpo \mathcal{B} .

2.4. Ecuaciones de balance de propiedades intensivas y extensivas

Dentro de la modelación trabaja uno con sistemas que constantemente están cambiando y para trabajar con ellos es indispensable tener una forma de contabilizar los procesos involucrados. El medio para contabilizar cambios son las ecuaciones de balance, a saber, la ecuación de balance global y local.

2.4.1. Ecuación de balance global

En un cuerpo \mathcal{B} ocurren básicamente dos tipos de fenómenos. Aquellos que cruzan frontera y aquellos que no. Cualquier procedimiento en el que haya intervención en la frontera (ya sea cruzar del interior al exterior o viceversa) y cualquier procedimiento que ocurra en el interior del cuerpo \mathcal{B} en el que la frontera no sea cruzada producirán cambios en el cuerpo y por ende alterarán la constitución del mismo. Esto puede uno resumirlo en la expresión

$$\Delta E = P + I$$

donde P e I representan producción e importación respectivamente. Ésta última puede hacer referencia a términos negativos y positivos. Esta expresión establece la base para la ecuación de balance global

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} q(\underline{x}, t) d\underline{x}.$$

El integrando $g(\underline{x}, t)$ es llamado suministro externo de la propiedad extensiva por volumen por unidad de tiempo y representa la cantidad de propiedad extensiva que entra al cuerpo en el punto \underline{x} al tiempo t . Por otro lado $q(\underline{x}, t)$ representa la cantidad de propiedad extensiva que entra al cuerpo a través de la frontera en el punto \underline{x} al tiempo t por unidad de área. Más aún, el hecho de poder representar a $q(\underline{x}, t)$ por $\underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t)$ donde \underline{n} es vector normal a la frontera $\partial B(t)$ apuntando hacia el exterior del cuerpo y $\underline{\tau}$ es el flujo de propiedad extensiva conduce a

$$\boxed{\frac{dE}{dt}(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x}.}$$

Esta ecuación es llamada **ecuación general de balance global** y establece que el suministro de propiedad E introducido en el cuerpo junto con el flujo entrante de manera perpendicular a la superficie, contribuyen a la tasa de cambio de propiedad extensiva E en $B(t)$.

2.4.2. Ecuación de balance local

Las ecuaciones de balance local están basadas en propiedades intensivas, a diferencia de su contraparte las ecuaciones de balance global. A continuación define uno el concepto de choque, denotado por $\Sigma(t)$, como la *superficie a través de la cual las propiedades intensivas son discontinuas*, particularmente éstas son discontinuidades de salto. t indica la posición dependiente del tiempo en el espacio físico del choque en notación $\Sigma(t)$, es decir, el choque generalmente está

en movimiento; por supuesto choques independientes del tiempo pueden suceder, si ése es el caso la notación empleada $f(\underline{x})$ indicará explícitamente la posición \underline{x} donde ocurra. Es importante recordar que una discontinuidad de salto de una función f es la región donde los límites por la derecha f_+ e izquierda f_- existen pero no son iguales $f_+ \neq f_-$. Consecuentemente define uno

$$[[f]] \equiv f_+ - f_- \quad \text{y} \quad \langle\langle f \rangle\rangle \equiv \frac{1}{2}(f_+ + f_-)$$

como **salto de una función** y su **promedio** respectivamente. Puesto que en la práctica ocurren frecuentemente producciones concentradas en la superficie $\Sigma(t)$ uno puede reescribir la ecuación general de balance global como

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

donde $g_{\Sigma}(\underline{x}, t)$ representa la fuente externa concentrada en Σ . Más aun, si uno considera al flujo $\underline{\tau}$ como una función regular a trozos con discontinuidades tipo salto en $\Sigma(t)$ el *teorema de la divergencia de Gauss* permite a uno escribirla como

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{B(t)} \{g + \nabla \cdot \underline{\tau}\} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \{[[\underline{\tau}]] \cdot \underline{n} + g_{\Sigma}\} d\underline{x}.$$

Por otro lado, considerar a la propiedad intensiva $\psi(\underline{x}, t)$ como una función con primera derivada continua, es decir $\psi \in C^1$, y denotar a \underline{v} y a \underline{v}_{Σ} como la velocidad de la partícula y la velocidad de la superficie de $\Sigma(t)$ respectivamente junto con la ecuación $E(\mathcal{B}, t)$ conducen a

$$\frac{dE}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi d\underline{x} = \int_{B(t)} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}\psi) \right\} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \{[(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma})\psi] \cdot \underline{n}\} d\underline{x}.$$

Al restar estas dos últimas ecuaciones obtiene uno

$$\int_{B(t)} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}\psi) - g - \nabla \cdot \underline{\tau} \right\} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \{[(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma})\psi - \underline{\tau}] \cdot \underline{n} - g_{\Sigma}\} d\underline{x} = 0$$

de donde llega uno a

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}\psi) = g + \nabla \cdot \underline{\tau}}$$

válido para todo $\underline{x} \in B(t)$ y

$$\boxed{[(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma})\psi - \underline{\tau}] \cdot \underline{n} = g_{\Sigma}}$$

para $\underline{x} \in \Sigma(t)$. Estas ecuaciones son conocidas como **ecuación diferencial de balance local** y **condición de salto** respectivamente. Particularmente la primera ecuación es la columna vertebral de muchos sistemas del medio continuo.

2.5. Sistemas de una fase y sistemas de muchas fases

2.5.1. Modelo matemático básico para sistemas de una fase

Es característico de este tipo de sistemas que para cualquier tiempo t cada punto \underline{x} del espacio físico está ocupado por una y sólo una partícula \underline{X} . Es por ello que la velocidad de la partícula está determinada para cada espacio y tiempo. En otras palabras, para sistemas de una fase la velocidad \underline{v} es la misma.

Para generar el modelo de dichos sistemas requiere uno identificar una **familia de propiedades extensivas** $\alpha = 1, \dots, N$ y aplicar las condiciones de balance a cada una de esas propiedades extensivas

$$E^{\alpha}(t) = \int_{B(t)} \psi^{\alpha}(\underline{x}, t) d\underline{x}.$$

Es decir, uno procede de manera análoga para el número α de propiedades extensivas que haya, la ecuación de balance global

$$\frac{dE^{\alpha}}{dt}(t) = \int_{B(t)} g^{\alpha}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}^{\alpha}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}^{\alpha}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

y la ecuación de balance local

$$\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v} \psi^\alpha) = g^\alpha + \nabla \cdot \underline{\tau}^\alpha$$

así como las condiciones de salto

$$[[(\underline{v}^\alpha - \underline{v}_\Sigma) \psi^\alpha - \underline{\tau}^\alpha]] \cdot \underline{n} = g_\Sigma^\alpha$$

de nuevo para $\alpha = 1, \dots, N$, esto conduce por supuesto a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

2.5.2. Modelo matemático básico para sistemas de muchas fases

En estos sistemas la velocidad corresponde a cada fase con la cual los procesos estén asociados. El procedimiento para construir estos modelos es, identificar una familia de propiedades extensivas, a cada una de estas propiedades le asocia uno una fase del sistema y finalmente aplica uno las ecuaciones de balance a cada una de estas propiedades usando la velocidad que le corresponde a cada fase.

El modelo es análogo al modelo de una fase salvo que hay múltiples velocidades,

$$\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}^\alpha \psi^\alpha) = \nabla \cdot \underline{\tau}^\alpha + g^\alpha$$

y desde luego las condiciones de salto

$$[[(\underline{v}^\alpha - \underline{v}_\Sigma) \psi^\alpha - \underline{\tau}^\alpha]] \cdot \underline{n} = g_\Sigma^\alpha$$

para $\alpha = 1, \dots, N$, con a α el número de propiedades extensivas considerados.

Bibliografía

- [1] Herrera Ismael & Pinder George, *Mathematical Modeling in Science and Engineering: an axiomatic approach*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2012, 1-20, 23-24, 45-46.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales parciales

Considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ donde n es el número de variables independientes de u , una función con segundas derivadas continuas. Uno puede escribir una ecuación diferencial parcial de segundo orden como

$$\mathcal{L}_x u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f_\Omega$$

donde \mathcal{L}_x representa el operador diferencial parcial de segundo orden, $\underline{x} \in \Omega$, \underline{a} es una matriz simétrica, \underline{b} un vector y $c(\underline{x})$ un escalar. Considerando la notación indicial puede uno reescribir el operador \mathcal{L}_x como

$$\mathcal{L}_x u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (b_j u) + cu = f_\Omega.$$

Ejemplos típicos de ecuaciones diferenciales parciales son

- *Ecuación de Poisson* en \mathbb{R}^3 , donde $\underline{x} = (x, y, z)$, $\text{diag}(\underline{a}) = (1, 1, 1)$, $\underline{b} = (0, 0, 0)$ y $c = 0$ en el operador $\mathcal{L}_x u(\underline{x})$ es

$$\mathcal{L}_x u(\underline{x}) = f_\Omega(\underline{x}) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

con el particular $f(\underline{x}) = 0$ es llamada *ecuación de Laplace*.

- *Ecuación de difusión* o *ecuación de calor* en \mathbb{R}^2 , donde $\underline{x} = (x, y)$, $\text{diag}(\underline{a}) = (D, D, 0)$, $\underline{b} = (0, 0, -1)$ y $c = 0$ en el operador $\mathcal{L}_x u(\underline{x}, t)$ es

$$\mathcal{L}_x u(\underline{x}, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

con $D > 0$, constante de difusión.

- *Ecuación de onda* en \mathbb{R} , con $\underline{x} = x$, $\text{diag}(\underline{a}) = (c^2, -1)$, $\underline{b} = (0, 0)$ y $c = 0$ en el operador $\mathcal{L}_x u(x, t)$ es

$$\mathcal{L}_x u(x, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con $c > 0$ llamada velocidad de propagación.

- *Ecuación de Burger* en \mathbb{R} , con $\underline{x} = x$, $\text{diag}(\underline{a}) = (D, 0)$, $\underline{b} = (-\frac{1}{2}u, -1)$, $c = 0$, en el operador \mathcal{L}_x es

$$\mathcal{L}_x u(\underline{x}, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x}$$

donde u es a su vez la velocidad con la que un líquido es transportado en un medio y función de la ecuación y $D > 0$ es la constante de difusión.

Aspectos importantes al lidiar con ecuaciones parciales son el orden y la linealidad. El orden de una ecuación diferencial parcial está definido por el orden de derivación más alto involucrado en ella, a saber, la ecuación de Poisson, de difusión, de onda, y de Burger son ecuaciones de segundo orden. Por otro lado si una ecuación consta de combinaciones lineales de u y/o alguna de sus derivadas parciales es considerada como una ecuación diferencial parcial lineal y no lineal en otro caso. La ecuación de Poisson, de difusión y de onda son lineales, pues sus coeficientes de las derivadas parciales no involucran de nuevo a la función u o alguna de sus derivadas, sin embargo la ecuación de Burger es no lineal pues involucra un producto de la función u con su propia derivada parcial lo cual es no lineal.

3.1. Clasificación

El operador diferencial parcial de segundo orden \mathcal{L}_x es

1. **elíptico** si todos los valores propios de \underline{a} son distintos de cero y del mismo signo
2. **parabólico** si hay un valor propio cero y el resto distinto de cero con el mismo signo
3. **hiperbólico** si todos los valores propios son distintos de cero y hay un valor propio con signo opuesto al resto

De esta forma,

- para la *ecuación de Poisson* en \mathbb{R}^3

$$\underline{a} - \lambda \underline{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow p(\lambda) = (1 - \lambda)^3$$

es decir, todos los valores propios son distintos de cero y del mismo signo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ por lo que es elíptica;

- para la *ecuación de difusión* o *ecuación de calor* en \mathbb{R}^2

$$\underline{a} - \lambda \underline{I} = \begin{pmatrix} D - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & D - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \rightarrow p(\lambda) = (D - \lambda)^2(-\lambda)$$

como $D > 0$, hay un valor propio cero $\lambda_1 = 0$ y el resto es distinto de cero con el mismo signo $\lambda_2 = \lambda_3 = D > 0$ es parabólica;

- para la *ecuación de onda* en \mathbb{R}^2 con $\underline{x} = (x, t)$

$$\underline{a} - \lambda \underline{I} = \begin{pmatrix} c^2 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow p(\lambda) = (c^2 - \lambda)(-1 - \lambda)$$

como todos valores propios son distintos de cero y uno de ellos $\lambda_1 = c^2 > 0$ tiene signo contrario al resto $\lambda_2 = -1 < 0$, es hiperbólica;

- para *ecuación de Burger* en \mathbb{R}^2

$$\underline{a} - \lambda \underline{I} = \begin{pmatrix} D - \lambda & 0 \\ 0 & 0 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow p(\lambda) = (D - \lambda)(-\lambda)$$

como un valor propio $\lambda_1 = D > 0$ es positivo, $\lambda_2 = 0$, es parabólica;

Si tiene uno el caso $n = 2$, existe una clasificación particular de la ecuación diferencial parcial

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f = 0$$

a saber, la ecuación es

1. **elíptica** si $b^2 - ac < 0$,
2. **parabólica** si $b^2 - ac = 0$,
3. **hiperbólica** si $b^2 - ac > 0$.

3.2. Formas canónicas

Dentro de las ecuaciones diferenciales parciales hay prototipos de los tres tipos de ecuaciones clasificadas. Restringiendo a coeficientes constantes dichas expresiones ilustran las propiedades hasta ahora mencionadas. Para las ecuaciones de tipo parabólico recordando que $u = u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ tiene uno

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0;$$

análogamente para las ecuaciones de tipo elíptico con $u = u(x_1, \dots, x_n)$ el prototipo es

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

y por último de tipo hiperbólico de nuevo con $u = u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

3.3. Problemas bien planteados

Uno dice que un problema es bien planteado si **depende continuamente de las condiciones iniciales así como de frontera** y naturalmente si tiene **una única solución**.

3.3.1. Problema de valor a la frontera

Caso elíptico

Para problemas de esta categoría, considera uno $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$. El asunto aquí requiere encontrar una función u tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= f_\Omega \quad \text{en } \Omega \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u &= g_\partial \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

donde f_Ω está definido en Ω , g_∂ en $\partial\Omega$ y los coeficientes cumplen $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Este tipo de condición es llamada **condición tipo Robin**, de donde es desprendida la **condición tipo Dirichlet** para $\alpha = 0$ donde el problema es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= f_\Omega \quad \text{en } \Omega \\ u &= g_\partial \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

y la **condición de tipo Neumann** para $\beta = 0$ con el problema

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= f_\Omega \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_\partial \quad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

3.3.2. Problema de condición inicial y valor a la frontera

Para este tipo de problemas, i.e. donde el tiempo interviene, considera uno dominio $\Omega \times [0, T]$ para $T > 0$ donde $[0, T] \subset \mathbb{R}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Caso parabólico

En este caso, son necesarias tanto condiciones de frontera habituales como una condición inicial

$$u(\underline{x}, 0) = u_0(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= f_\Omega \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u &= g_\partial \quad \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\underline{x}, 0) &= u_0(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

con f_Ω definida en $\Omega \times [0, T]$, g_∂ en $\partial\Omega \times [0, T]$ y $u_0(x)$ en Ω . Desde luego los casos correspondientes a **Dirichlet** ($\alpha \neq 0$), **Neumann** ($\beta \neq 0$) y **Robin** ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$) también ocurren.

Caso hiperbólico

Debido a la naturaleza de la doble derivada en el tiempo, son necesarias dos condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(\underline{x}, 0) &= u_0(\underline{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, 0) &= u'_0(\underline{x}) \end{aligned}$$

las cuales indican posición y velocidad inicial definidas para todo \underline{x} en $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Consecuentemente el problema para la ecuación de onda es

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= f_\Omega \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u &= g_\partial \quad \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\underline{x}, 0) &= u_0(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, 0) &= u'_0(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

con f_Ω definida en $\Omega \times [0, T]$, g_∂ en $\partial\Omega \times [0, T]$, $u_0(\underline{x})$ y $u'_0(\underline{x})$ definidas en Ω . Y desde luego condiciones **Dirichlet**, **Neumann** y **Robin** ocurren para los casos respectivos $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\alpha \neq 0 \neq \beta$.

A partir de ahora, a menos que uno especifique lo contrario, empleará una notación subindicial para referir a las derivadas parciales, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv u_t, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv u_{yy}$$

para referir a las derivadas participantes en la ecuación diferencial parcial y/o en las condiciones a frontera e iniciales involucradas.

3.4. Ecuación de onda

En esta sección introduce una la ecuación de onda unidimensional lineal con la cual trabaja uno en el resto de la tesis así como la solución analítica y por supuesto el problema definido en un intervalo cerrado. El propósito aquí buscado es justificar la obtención de la solución exacta que es usada en la sección de diferencias finitas al momento de comparar con resultados numéricos. El material aquí presentado es autocontenido y puede uno abordarlo de manera directa.

3.4.1. Solución general

La ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

donde $c > 0$ representa la velocidad de propagación de onda puede ser obtenida mediante el cambio de coordenadas

$$\xi(x, t) = x - ct \quad \text{y} \quad \eta(x, t) = x + ct$$

donde tiene uno la intención de llevar a u a otra función w que dependa de las nuevas variables definidas, es decir

$$u(x, t) \leftrightarrow w(\xi, \eta)$$

al emplear regla de la cadena siguiendo la relación $u \leftrightarrow w$ tiene uno

$$\begin{aligned} u_x &= w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x \\ u_t &= w_\xi \xi_t + w_\eta \eta_t \\ u_{xx} &= (w_{\xi\xi} \xi_x + w_{\xi\eta} \eta_x) \xi_x + w_\xi \xi_{xx} + (w_{\eta\xi} \xi_x + w_{\eta\eta} \eta_x) \eta_x \\ u_{tt} &= (w_{\xi\xi} \xi_t + w_{\xi\eta} \eta_t) \xi_t + w_\xi \xi_{tt} + (w_{\eta\xi} \xi_t + w_{\eta\eta} \eta_t) \eta_t \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} u_{xx} &= w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta} \\ u_{tt} &= w_{\xi\xi} c^2 - 2w_{\xi\eta} c^2 + w_{\eta\eta} c^2 \end{aligned}$$

y al substituir

$$w_{\xi\xi} c^2 - 2w_{\xi\eta} c^2 + w_{\eta\eta} c^2 = w_{\xi\xi} c^2 + 2w_{\xi\eta} c^2 + w_{\eta\eta} c^2$$

que al simplificar es

$$w_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Tras resolver la ecuación diferencial parcial obtiene uno

$$w(\xi, \eta) = F(\xi) + B(\eta)$$

donde F junto con B son funciones arbitrarias, y regresando a las variables originales tiene uno

$$\boxed{u(x, t) = F(x - ct) + B(x + ct)}$$

3.4.2. Ecuación de onda homogénea en la recta real

El problema sujeto a condiciones iniciales de la ecuación de onda es

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

considerando la solución general

$$u(x, t) = F(x - ct) + B(x + ct)$$

tiene uno

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= F(x) + B(x) &= \varphi(x) \\ u_t(x, 0) &= -cF'(x) + cB'(x) &= \psi(x) \end{aligned}$$

al integrar la segunda ecuación

$$\frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds = [-F(x) + B(x)] - [-F(0) + B(0)]$$

obtiene uno el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ B(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds - F(0) + B(0) \end{pmatrix}$$

al resolver

$$\begin{pmatrix} F(x) \\ B(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds - F(0) + B(0) \end{pmatrix}$$

donde

$$F(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{1}{2} [-F(0) + B(0)]$$

$$B(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{1}{2} [-F(0) + B(0)]$$

recordar que $u(x, t) = F(x - ct) + B(x + ct)$ conduce a

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \varphi(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} \psi(s) ds - \frac{1}{2} [-F(0) + B(0)] + \frac{1}{2} \varphi(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2} [-F(0) + B(0)]$$

y al simplificar llega uno a

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

la cual soluciona el problema de Cauchy para la ecuación de onda en la recta real, conocida también como **fórmula de d'Alembert**.

3.4.3. Triángulo característico y dominio de propagación

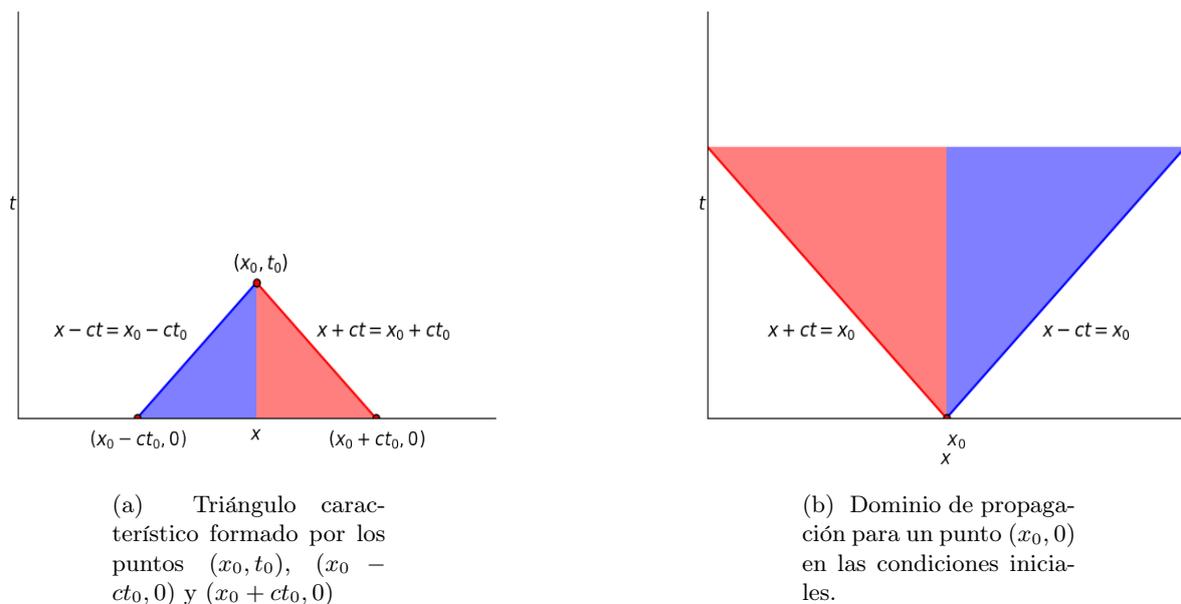


Figura 3.1: Triángulo característico y propagación de condiciones iniciales.

Para entender la manera en la que la ecuación de onda propaga información se basa uno en el papel que juegan las rectas características. Así, uno puede interpretar el significado de la ecuación *d'Alembert* notando que, la posición inicial φ es desplazada hacia adelante (*forward*) y hacia atrás (*backward*) con la mitad de tamaño inicial respectivamente,

mientras que la velocidad inicial ψ es integrada obteniendo así la posición que contribuye a desplazar la posición inicial φ en ambas direcciones con la mitad del tamaño del valor de la derivada de la recta característica respectivamente. Ejemplificando esto reescribe uno las rectas características para ambos casos (*forward* y *backward*) para un punto (x_0, t_0) arbitrario de forma estándar

$$t = \frac{1}{c}x + \left(\frac{1}{c}x_0 - t_0\right) \quad \text{y} \quad t = -\frac{1}{c}x + \left(\frac{1}{c}x_0 + t_0\right)$$

de donde obtiene uno

$$\boxed{\frac{dt_F}{dx} = \frac{1}{c}} \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{dt_B}{dx} = -\frac{1}{c}}$$

así puede uno interpretar la solución de *d'Alembert* como

$$u(x, t) = \underbrace{\frac{1}{2}\varphi(x - ct) - \frac{1}{2}\frac{dt_F}{dx}\Psi(x - ct)}_{\text{Forward}} + \underbrace{\frac{1}{2}\varphi(x + ct) - \frac{1}{2}\frac{dt_B}{dx}\Psi(x + ct)}_{\text{Backward}} \quad \text{con} \quad \Psi = \int \psi(s)ds$$

de esta forma observa uno que la información es propagada esencialmente en las dos direcciones determinadas por las rectas, más aún, uno puede concluir que por cada punto (x_0, t_0) pasan siempre dos rectas características. Partiendo de esta idea considerando de nuevo el punto arbitrario (x_0, t_0) tiene uno

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}[\varphi(x_0 - ct_0) + \varphi(x_0 + ct_0)] + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(s)ds$$

donde la posición inicial φ depende sólo del valor de las ordenadas al origen de dichas rectas características $x - ct = x_0 - ct_0$ y $x + ct = x_0 + ct_0$, por otro lado el resultado de integrar la velocidad inicial ψ sólo depende del intervalo formado por esas ordenadas al origen $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. El dominio generado por el punto arbitrario (x_0, t_0) y las ordenadas al origen $(x_0 - ct_0, 0)$ y $(x_0 + ct_0, 0)$ es llamado **triángulo característico**, ver Figura 3.1a, mientras que el dominio $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ es llamado **dominio de influencia** del punto (x_0, t_0) . Esto quiere decir que los datos iniciales, posición y velocidad, ambos naturalmente inicializados en $(x_0, 0)$, viajan a través de las rectas características como puede ver uno en Figura 3.1b.

Más aún, como siempre pasan dos rectas características $x - ct = x_0 - ct_0$ y $x + ct = x_0 + ct_0$ para cada punto en el plano x, t con pendientes $\frac{1}{c}$ y $-\frac{1}{c}$ respectivamente, esto implica la propagación en esa región delimitada por ellas para cualquier valor inicial que comience en el punto $(x_0, 0)$ a esa velocidad, ver Figura 3.2. Consecuentemente cualquier punto inicial afecta los valores de la solución u contenidos en el dominio de influencia. Así para un intervalo formado por esos puntos, denotados por $(k_1, 0)$ y $(k_2, 0)$, tendrá uno seis regiones limitadas por dos rectas características que crucen por cada uno de los dos puntos del intervalo, a saber, los extremos de él.

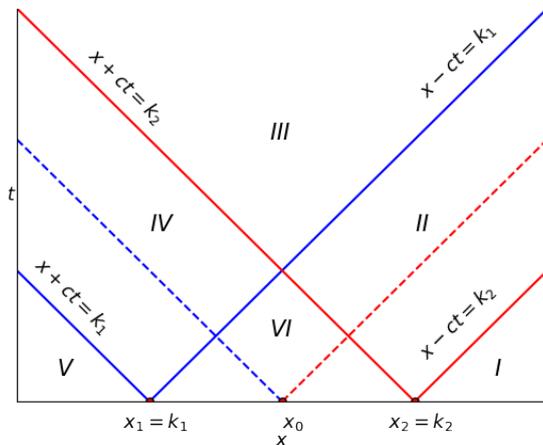


Figura 3.2: Cualquier punto (x_0, t_0) en la región I y V no es propagado y así esas regiones no son afectadas, en cambio cualquier punto en la región VI será propagado en direcciones como muestra Figura 3.1b, aquí bosquejado en líneas punteadas, y por ello es afectada esa región, cualquier punto en la región II, IV y III es propagado en alguna de esas direcciones, afectando esas regiones.

Ejemplo: función caja

Por supuesto, la forma de propagación de las condiciones iniciales en la práctica puede ser distinta para cada caso y contrario a la intuición propia, por ello para concretizar ideas y *visualizar resultados* discute uno un ejemplo ilustrativo. Éste consta de

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= \text{box}(x) \equiv \begin{cases} 4 & -4 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} & -\infty < x < \infty \\
 u_t(x, 0) &= 0 & -\infty < x < \infty
 \end{aligned}$$

Donde la posición inicial $\varphi(x)$ es llamada *función caja* (*box function*), velocidad inicial $\psi(x)$ y velocidad de propagación $c > 0$ han sido consideradas como 0 y $\frac{1}{2}$ respectivamente por simplicidad. Por ecuación *d'Alembert* tiene uno

$$u(x, t) = \underbrace{\frac{1}{2} \text{box}\left(x - \frac{1}{2}t\right)}_{\text{Forward}} + \underbrace{\frac{1}{2} \text{box}\left(x + \frac{1}{2}t\right)}_{\text{Backward}}$$

es decir, dos funciones caja desplazándose a la derecha (*forward*) e izquierda (*backward*) con la mitad del tamaño original. Dado que la función caja asume el valor cuatro cuando el valor absoluto del argumento es menor o igual a cuatro o cero en otro caso y tomando en cuenta que el argumento son rectas características tiene uno

$$\text{box}\left(x - \frac{1}{2}t\right) = \begin{cases} 4 & -4 \leq x - \frac{1}{2}t \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad \text{box}\left(x + \frac{1}{2}t\right) = \begin{cases} 4 & -4 \leq x + \frac{1}{2}t \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

de esta forma tiene uno el siguiente comportamiento en las regiones de plano x, t



(a) Propagación de la posición inicial φ en las regiones *VI*, *II* y *IV* delimitadas por las rectas $x \pm \frac{1}{2}t = \pm 4$ cortando una con otra en $(8, 0)$.

(b) Propagación de φ con la mitad del tamaño original en las regiones *II* y *IV* después de abandonar la región *VI* para repetir mismo desnivel de regiones *I* y *V* en la región *III*.

Figura 3.3: Vista de pájaro y vista de perfil de la función caja.

- la región *I* y la región *V*, delimitadas por

$$\left\{x - \frac{1}{2}t = 4, x \geq 4\right\} \quad \text{y} \quad \left\{x + \frac{1}{2}t = -4, x \leq -4\right\}$$

respectivamente, corresponden a *otro caso* en la función caja, pues $x \geq 4$ y $x \leq -4$ por lo que

$$u(x, t) = 0 \quad \text{en} \quad I, V$$

- la región *VI*, delimitada por las rectas

$$x - \frac{1}{2}t = -4 \quad \text{y} \quad x + \frac{1}{2}t = 4$$

cortando en el punto $(0, 8)$, yace completamente en el intervalo $(-4, 4)$ pues

$$u\left(x - \frac{1}{2}t_0\right)\Big|_{t_0 \leq 8} = \frac{1}{2} \begin{cases} 4 & -4 \leq x - \frac{1}{2}t_0 \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} 4 & -4 \leq x + \frac{1}{2}t_0 \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} = \frac{1}{2}(4) + \frac{1}{2}(4) = 4 \quad \text{en } VI$$

- la región *III*, delimitada por las rectas

$$x - \frac{1}{2}t = -4 \quad \text{y} \quad x + \frac{1}{2}t = 4$$

para $t \geq 8$ (intersección), no resulta afectada por la propagación pues por la fórmula *d'Alembert* tiene uno

$$u\left(x - \frac{1}{2}t_0\right)\Big|_{t_0 \geq 8} = \frac{1}{2} \begin{cases} 4 & -4 \leq x - \frac{1}{2}t_0 \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} 4 & -4 \leq x + \frac{1}{2}t_0 \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} = 0 \quad \text{en } III$$

ya que cualquier valor $t \geq t_0$ superará límites del intervalo, observar en Figura 3.3b el desnivel después de la intersección

- las regiones *II* y *IV*, delimitadas por

$$\left\{x - \frac{1}{2}t = -4 \quad \text{con} \quad x - \frac{1}{2}t = 4\right\} \quad \text{y} \quad \left\{x + \frac{1}{2}t = -4 \quad \text{con} \quad x + \frac{1}{2}t = 4\right\}$$

respectivamente, son regiones de interés pues es donde los datos iniciales son canalizados, más aún, por la fórmula *d'Alembert* para cada caso (*Forward* y *Backward*) tiene uno

$$\begin{aligned} \text{box}\left(x - \frac{1}{2}t\right) &= \frac{1}{2} \begin{cases} 4 & -4 \leq x - \frac{1}{2}t \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} = \frac{1}{2}(4) = 2 \\ \text{box}\left(x + \frac{1}{2}t\right) &= \frac{1}{2} \begin{cases} 4 & -4 \leq x + \frac{1}{2}t \leq 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} = \frac{1}{2}(4) = 2 \end{aligned}$$

de esta forma la posición inicial es desplazada con la mitad del tamaño original, a saber con valor dos, como puede ver uno en el perfil en Figura 3.3b, en otras palabras

$$u(x, t) = 2 \quad \text{en } II, IV$$

■

3.4.4. Ecuación de onda no homogénea en la recta real

Este problema considera una fuerza externa $F(x, t)$ involucrada en el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + F(x, t) \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

Para la solución considera uno el triángulo característico Δ en Figura 3.1a con la integración en esa región de la ecuación de onda

$$-\int \int_{\Delta} F(x, t) dx dt = \int \int_{\Delta} \left(c^2 u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx dt$$

esto lo puede uno reescribir como

$$-\int \int_{\Delta} F(x, t) dx dt = \int \int_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) dx dt$$

y por el *teorema de Green* para el lado derecho tiene uno

$$-\int \int_{\Delta} F(x,t) dx dt = \int \int_{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) dx dt = \oint_{\Delta} \frac{\partial u}{\partial t} dx + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

donde el triángulo característico está formado por la sección B

$$\begin{aligned} B &= \{x_0 - ct_0 \leq x \leq x_0 + ct_0, \quad 0 \leq t \leq 0\} \\ t &= 0, \end{aligned}$$

sección R

$$\begin{aligned} R &= \{x_0 \leq x \leq x_0 + ct_0, \quad 0 \leq t \leq t_0\} \\ t &= -\frac{1}{c}x + \left(\frac{x_0}{c} + t_0\right) \\ x &= -ct + (x_0 + ct_0) \end{aligned}$$

y L

$$\begin{aligned} L &= \{x_0 - ct_0 \leq x \leq x_0, \quad 0 \leq t \leq t_0\} \\ t &= \frac{1}{c}x - \left(\frac{x_0}{c} - t_0\right) \\ x &= ct + (x_0 - ct_0) \end{aligned}$$

para cada región del triángulo $\Delta = B + R + L$. De esta manera tiene uno tres integrales

$$\begin{aligned} \int_B \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) &= \int_B \left[\frac{\partial u}{\partial t} (dx) + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} (0) \right] \\ \int_R \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) &= \int_R \left[\frac{\partial u}{\partial t} (-cdt) + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(-\frac{1}{c} dx \right) \right] \\ \int_L \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) &= \int_L \left[\frac{\partial u}{\partial t} (cdt) + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{1}{c} dx \right) \right] \end{aligned}$$

lo cual es

$$\begin{aligned} \int_B \left[\frac{\partial u}{\partial t} (dx) + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} (0) \right] &= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \frac{\partial u}{\partial t} (x, 0) dx \\ \int_R \left[\frac{\partial u}{\partial t} (-cdt) + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(-\frac{1}{c} dx \right) \right] &= -c \int_R \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \\ \int_L \left[\frac{\partial u}{\partial t} (cdt) + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{1}{c} dx \right) \right] &= c \int_L \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \end{aligned}$$

y al simplificar uno reduce a

$$\begin{aligned} \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \frac{\partial u}{\partial t} (x, 0) dx &= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(s) ds \\ -c \int_R \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) &= -c \int_R du = -c[u(x_0, t_0) - u(x_0 + ct_0, 0)] \\ c \int_L \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) &= c \int_L du = c[u(x_0 - ct_0, 0) - u(x_0, t_0)] \end{aligned}$$

de donde

$$-\int \int_{\Delta} F(x,t) dx = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(s) ds - c[u(x_0, t_0) - u(x_0 + ct_0, 0)] + c[u(x_0 - ct_0, 0) - u(x_0, t_0)]$$

finalmente, considerando las condiciones iniciales y tras simplificar tiene uno

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} [\varphi(x_0 + ct_0) + \varphi(x_0 - ct_0)] + \frac{1}{2c} \int \int_{\Delta} F(x, t) dx dt + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(s) ds.$$

Reescribiendo para cualquier punto (x, t) tiene uno

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int \int_{\Delta} F(x, t) dx dt$$

3.4.5. Ecuación de onda en un intervalo cerrado

Intervalo no simétrico

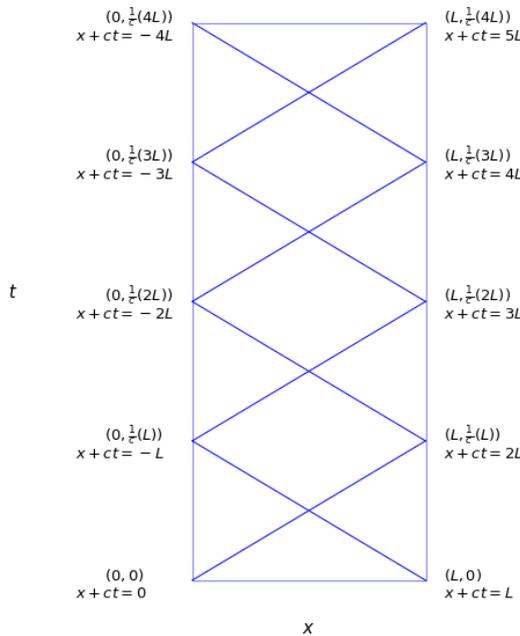


Figura 3.4: Franja $0 \leq x \leq L, t \geq 0$. Uno puede observar que $x = 0$ y $x = L$ actúan como paredes reflectoras. En efecto, si uno comienza con el punto $(0, 0)$, éste es reflejado en dirección $x - ct = 0$ chocando en punto $(L, \frac{L}{c})$ que a su vez es reflejado en dirección $x + ct = 2L$ chocando en $(0, 2\frac{L}{c})$, reflejado en dirección $x - ct = -2L$, chocando en $(L, 3\frac{L}{c})$ y así sucesivamente. Por otro lado, pero de manera análoga, el punto $(0, L)$ es reflejado en dirección $x + ct = L$ chocando en $(0, \frac{L}{c})$, que a su vez es reflejado en dirección $x - ct = -L$ chocando en $(L, 2\frac{L}{c})$ para ser reflejado en dirección $x + ct = 3L$, donde choca en $(0, 3\frac{L}{c})$ y continúa el curso infinitamente.

Por último considera uno problema donde la propagación ocurre en un intervalo de longitud finita L (como realmente ocurriría en un problema físico). En este caso las condiciones de frontera son agregadas a los extremos del intervalo $0 \leq x \leq L$, donde dos funciones control $a(t)$ y $b(t)$ dictan el movimiento para $t > 0$ en los puntos extremos $x = 0$ y $x = L$ respectivamente. El problema a resolver es

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) & 0 < x < L \\ u(0, t) &= a(t) & t > 0 \\ u(L, t) &= b(t) & t > 0 \end{aligned}$$

Para entender la naturaleza del enunciado se basa uno nuevamente en el **dominio de propagación** de cada punto (x_0, t_0) que está en la franja determinada por $0 \leq x \leq L$ y $t \geq 0$. Como uno ya sabe cruzan por el punto $(0, 0)$ dos características, sin embargo sólo la recta $x - ct = 0$ yace completamente en la franja, misma que corta con el extremo opuesto en el punto $(L, \frac{L}{c})$. De nuevo por este punto dos características cruzan una con otra donde $x + ct = -2L$ yace en la franja y corta con el extremo opuesto en $(0, 2\frac{L}{c})$, de donde dos características de nuevo cruzan y sólo $x - ct = -2L$

está en la franja. De manera análoga para el punto $(L, 0)$ tiene uno la recta característica $x + ct = L$ en la franja, que corta en el otro extremo en $(0, \frac{L}{c})$, de donde sólo la recta característica $x - ct = -L$ está en la franja de nuevo, y corta en $(L, 2\frac{L}{c})$. De aquí de nuevo la recta característica $x + ct = 3L$ está en la franja y corta en $(0, 3\frac{L}{c})$ y repite el curso de propagación. Este comportamiento permite dividir la franja en regiones triangulares, las cuales tienen alguno de sus lados en los extremos de la franja, y en cuadriláteros, los cuales tienen sus lados limitados por las rectas características exclusivamente, ver Figura 3.4.

Debido al seccionamiento de la franja por las rectas características debe uno considerar tres zonas posibles si uno está interesado en obtener el valor u en un punto $A(x_0, t_0)$ en la franja, a saber

- región superior
- región izquierda
- región derecha

donde la región inferior es la zona donde es conocida la solución por la fórmula *d'Alembert*.

Región superior en intervalo no simétrico

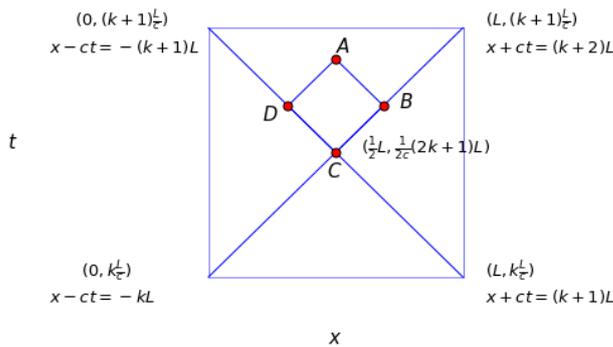


Figura 3.5: Cuadrilátero $ABCD$ ubicado en la región superior del intervalo $(0, L)$ para $k\frac{L}{c} \leq t \leq (k + 1)\frac{L}{c}$ con $k = 0, 1, \dots$

Para este caso considera uno un punto $A(x_0, t_0)$ en la región superior, cuyo triángulo característico es formado por las rectas DA y AB que emanan de él, ver Figura 3.5, cortando en las rectas $x - ct = (k + 1)L$ y $x + ct = -kL$ en D y B respectivamente formando el **cuadrilátero** $ABCD$. Escrito de otra forma tiene uno

$$\begin{aligned}
 AB : & \quad x + ct = x_0 + ct_0 \\
 BC : & \quad x - ct = -kL \\
 CD : & \quad x + ct = (k + 1)L \\
 DA : & \quad x - ct = x_0 - ct_0
 \end{aligned}$$

tras calcular las intersecciones llega uno a

$$\begin{aligned}
 & A(x_0, t_0) \\
 & B(\frac{1}{2}[x_0 + ct_0 - kL], \frac{1}{2c}[x_0 + ct_0 + kL]) \\
 & C(\frac{1}{2}L, \frac{1}{2c}[(2k + 1)L]) \\
 & D(\frac{1}{2}[(k + 1)L + (x_0 - ct_0)], \frac{1}{2c}[(k + 1)L - (x_0 - ct_0)])
 \end{aligned}$$

de esta manera, si uno está interesado en obtener el valor de u en el punto A observa uno que, del resultado de la solución general de la ecuación de onda, para cada extremo del cuadrilátero $ABCD$ tiene uno

$$\begin{aligned}
 u(A) &= F(x_0 - ct_0) + B(x_0 + ct_0) \\
 u(B) &= F(-kL) + B(x_0 + ct_0) \\
 u(C) &= F(-kL) + B((k + 1)L) \\
 u(D) &= F(x_0 - ct_0) + B((k + 1)L)
 \end{aligned}$$

restando las dos primeras expresiones, restando las dos últimas y sumar el primer con el último cálculo conduce a

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D) \rightarrow \boxed{u(A) = u(B) + u(D) - u(C)}$$

Este resultado indica la posibilidad de obtener la solución de un cuarto punto en cualquier región siempre que uno pueda trazar las rectas características a partir de él que corten a las rectas ya trazadas por los segmentos inicial ($x = 0$) y final ($x = L$), y como de cualquier punto **siempre** hay dos rectas características puede uno conocer la solución en cualquier parte del plano x, t para la función u .

Región izquierda en intervalo no simétrico

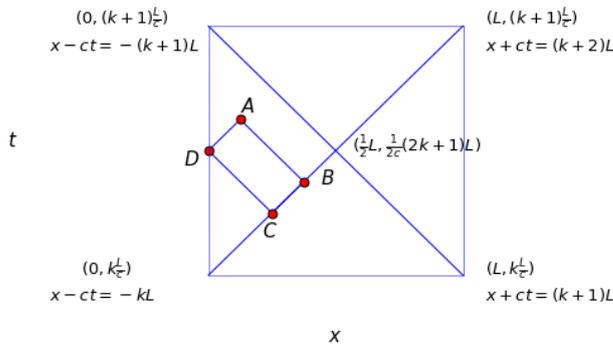


Figura 3.6: Cuadrilátero $ABCD$ ubicado en la región izquierda del intervalo $(0, L)$ para $k\frac{L}{c} \leq t \leq (k + 1)\frac{L}{c}$ con $k = 0, 1, \dots$

En caso de considerar un punto $A(x_0, t_0)$ en la región donde uno de sus lados es la condición de frontera izquierda $a(t)$, ver Figura 3.6, procede uno de forma análoga, del punto A emanan dos rectas características, AD y AB , la primera, al reflejar de la frontera (recta DC), lo hace en recta paralela al segmento AB , es decir en recta característica y de nuevo formando un cuadrilátero $ABCD$ con segmentos determinados por

$$\begin{aligned}
 AB : & \quad x + ct = x_0 + ct_0 \\
 BC : & \quad x - ct = -kL \\
 CD : & \quad x + ct = -(x_0 - ct_0) \\
 DA : & \quad x - ct = x_0 - ct_0
 \end{aligned}$$

el cálculo de intersecciones conduce a

$$\begin{aligned}
 &A(x_0, t_0) \\
 &B\left(\frac{1}{2}[(x_0 + ct_0) - kL], \frac{1}{2c}[(x_0 + ct_0) + kL]\right) \\
 &C\left(\frac{1}{2}[-kL - (x_0 - ct_0)], \frac{1}{2c}[kL - (x_0 - ct_0)]\right) \\
 &D\left(0, \frac{1}{c}[-(x_0 - ct_0)]\right)
 \end{aligned}$$

de nuevo por la solución general de la ecuación de onda tiene uno para cada extremo del cuadrilátero $ABCD$

$$\begin{aligned}
 u(A) &= F(x_0 - ct_0) + B(x_0 + ct_0) \\
 u(B) &= F(-kL) + B(x_0 - ct_0) \\
 u(C) &= F(-kL) + B(-(x_0 - ct_0)) \\
 u(D) &= F(x_0 - ct_0) + B(-(x_0 - ct_0))
 \end{aligned}$$

Condiciones de compatibilidad en frontera (caso no simétrico)

Para poder emplear el método descrito son necesarias condiciones iniciales y de frontera que satisfagan la ecuación de onda en las regiones donde la reflexión ocurre, es decir, en las fronteras $x = 0$ y $x = L$. A saber res condiciones de compatibilidad deben ser satisfechas prescritas por el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) & 0 < x < L \\ u(0, t) &= a(t) & t > 0 \\ u(L, t) &= b(t) & t > 0 \end{aligned}$$

1. Primera condición de compatibilidad (Posición)

Por un lado tiene uno por condición inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ que en $x = L$ es $u(L, 0) = \varphi(L)$ sin embargo $u(L, 0) = b(0)$ por lo que tiene uno $\varphi(L) = b(0)$. Para el otro extremo $x = 0$ tiene uno $u(0, 0) = \varphi(0)$ no obstante tiene uno $u(0, 0) = a(0)$, por tanto de ambos lados llega uno a

$$\boxed{\varphi(0) = a(0)} \quad \text{y} \quad \boxed{\varphi(L) = b(0)}$$

2. Segunda condición de compatibilidad (Velocidad)

Por un lado tiene uno por velocidad inicial $u_t(x, 0) = \psi(x)$ que en $x = 0$ es $u_t(0, 0) = \psi(0)$ mientras que $\frac{\partial}{\partial t} u(0, 0) = a'(0)$ por ello $\psi(0) = a'(0)$. De manera similar tiene uno para el otro extremo $x = L$ en condición inicial $u_t(L, 0) = \psi(L)$ y de manera análoga $\frac{\partial}{\partial t} u(L, 0) = b'(0)$ por lo que $\psi(L) = b'(0)$. Así tiene uno

$$\boxed{\psi(0) = a'(0)} \quad \text{y} \quad \boxed{\psi(L) = b'(0)}$$

3. Tercera condición de compatibilidad (Aceleración)

Por la ecuación de onda tiene uno $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$, para el extremo izquierdo $x = 0$ esto es $u_{tt}(0, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(0, t)$ por lo que $u_{tt}(0, t) = a''(t)$ de donde $u_{tt}(0, 0) = a''(0)$, para $x = L$ tiene uno $u_{tt}(L, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(L, t)$ lo cual es $u_{tt}(L, t) = b''(t)$ y por tanto $u_{tt}(L, 0) = b''(0)$. Por otro lado $u_{tt}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$ en $t = 0$ es $u_{tt}(x, 0) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, 0)$ lo cual es $u_{tt}(x, 0) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)$ y así en $x = 0$ es $u_{tt}(0, 0) = c^2 \varphi''(0)$ y en $x = L$ es $u_{tt}(L, 0) = c^2 \varphi''(L)$. Consecuentemente tiene uno

$$\boxed{c^2 \varphi''(0) = a''(0)} \quad \text{y} \quad \boxed{c^2 \varphi''(L) = b''(0)}$$

Intervalo simétrico

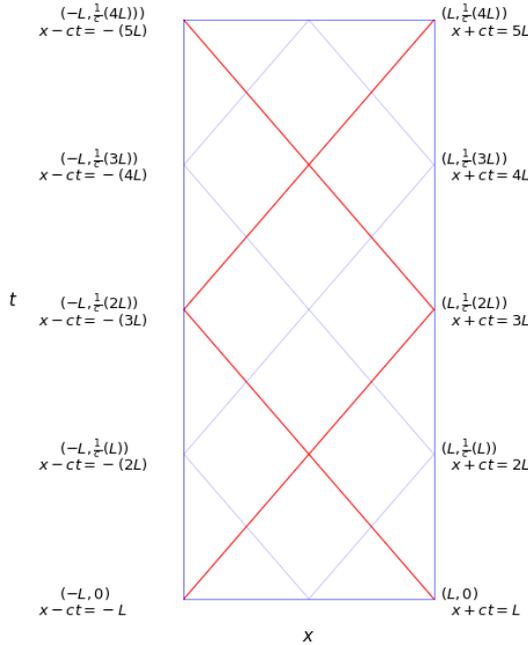


Figura 3.8: Franja de dominio $-L \leq x \leq L, t \geq 0$. Uno puede observar que los extremos $x = -L$, y $x = L$ actúan de nuevo como paredes reflectoras, si uno comienza con el punto $(-L, 0)$, éste es reflejado en dirección $x - ct = -L$ chocando en el punto $(L, \frac{1}{c}L)$ que a su vez es reflejado en dirección $x + ct = 3L$ chocando en $(-L, \frac{3}{c}L)$ y así sucesivamente. Por otro lado, pero de manera análoga, el punto $(0, L)$ es reflejado en dirección $x + ct = L$ chocando en $(-L, \frac{2}{c}L)$, que a su vez es reflejado en dirección $x - ct = -3L$ chocando en $(L, \frac{4}{c}L)$ y continúa el curso infinitamente. La **diferencia** está en el intervalo de reflexión, pues debido a la longitud doble de la franja las reflexiones son propagadas en tiempos pares $(L, (2k)\frac{L}{c})$ y $(-L, (2k))$ para $x = L$ y $x = -L$ respectivamente.

Para este caso tiene uno el problema definido en el intervalo $(-L, L)$

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= c^2 u_{xx} & -L < x < L, & \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= \varphi(x) & -L < x < L \\
 u_t(x, 0) &= \psi(x) & -L < x < L \\
 u(-L, t) &= a(t) & t > 0 \\
 u(L, t) &= b(t) & t > 0
 \end{aligned}$$

cuyas rectas características de nuevo dividen la franja $-L \leq x \leq L, t \geq 0$ de tal forma que la dirección de propagación es recorrida una unidad temporal a comparación con el caso $(0, L)$, ver Figura 3.8. Esto es debido a la prolongación del intervalo por lo que la propagación debe abarcar más distancia.

Para construir la solución en cualquier región del intervalo simétrico procede uno de manera análoga a caso $(0, L)$, es decir, uno analiza tres casos:

- región superior
- región izquierda
- región derecha

Región superior en intervalo simétrico

Uno considera un punto $A(x_0, t_0)$ en la región superior, como puede uno ver en la Figura 3.9, de donde dos características emanan (triángulo característico) y cortan con la propagación de rectas características originadas en los extremos de la franja, a saber $x - ct = -L$ y $x + ct = L$, en puntos D y B , que yacen en las rectas características de forma $x + ct = (2k + 1)L$ y $x - ct = -(2k + 1)L$ para $k = 0, 1, \dots$ respectivamente, que a su vez cortan una con otra en el punto C , esto es definido por

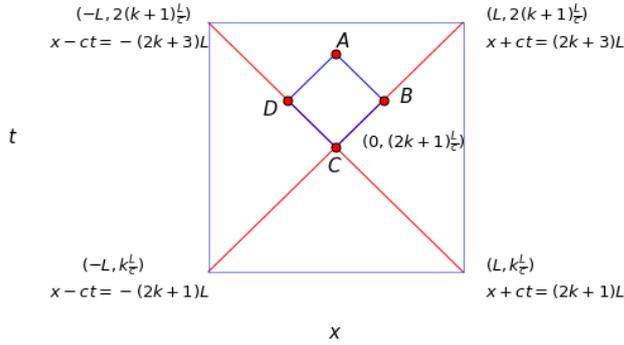


Figura 3.9: Cuadrilátero $ABCD$ ubicado en la región superior del intervalo $(-L, L)$ para $k\frac{L}{c} \leq t \leq 2(k+1)\frac{L}{c}$ con $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned}
 AB : & \quad x + ct = x_0 + ct_0 \\
 BC : & \quad x - ct = -(2k + 1)L \\
 CD : & \quad x + ct = (2k + 1)L \\
 DA : & \quad x - ct = x_0 - ct_0
 \end{aligned}$$

tras calcular las intersecciones llega uno a

$$\begin{aligned}
 & A(x_0, t_0) \\
 B & \left(\frac{1}{2}[x_0 + ct_0 - (2k + 1)L], \frac{1}{2c}[x_0 + ct_0 + (2k + 1)L] \right) \\
 C & \left(0, (2k + 1)\frac{L}{c} \right) \\
 D & \left(\frac{1}{2}[(2k + 1)L + (x_0 - ct_0)], \frac{1}{2c}[(2k + 1)L - (x_0 - ct_0)] \right)
 \end{aligned}$$

para $k = 0, 1, \dots$. Por último para hallar la solución en alguna de las regiones superiores emplea uno la regla de cuadrilátero para el punto A :

$$u(A) + u(C) = u(D) + u(B) \quad \rightarrow \quad \boxed{u(A) = u(D) + u(B) - u(C)}$$

Región izquierda en intervalo simétrico

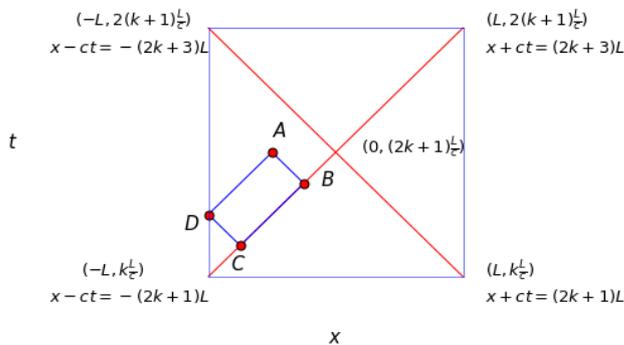


Figura 3.10: Cuadrilátero $ABCD$ ubicado en región izquierda de intervalo $(-L, L)$ para $k\frac{L}{c} \leq t \leq 2(k+1)\frac{L}{c}$ con $k = 0, 1, \dots$

De manera semejante considera uno de nuevo un punto $A(x_0, t_0)$ ubicado en la región izquierda dentro de algún intervalo positivo de t , como puede uno ver en la Figura 3.10. Uno tiene el triángulo característico emanando del punto A cortando a $x = -L$ en el punto D y a la recta característica $x - ct = -(2k + 1)L$ en B . Como el punto D está definido por la función en el lado izquierdo $a(t)$ la propagación a partir de D cortará con la recta en C , es decir

$$\begin{aligned}
 AB : & \quad x + ct = x_0 + ct_0 \\
 BC : & \quad x - ct = -(2k + 1)L \\
 CD : & \quad x + ct = -2L - (x_0 - ct_0) \\
 DA : & \quad x - ct = x_0 - ct_0
 \end{aligned}$$

Tras calcular de nuevo las intersecciones entre los segmentos llega uno a

$$\begin{aligned}
 & A(x_0, t_0) \\
 & B\left(\frac{1}{2}[x_0 + ct_0 - (2k + 1)L], \frac{1}{2c}[(2k + 1)L + x_0 + ct_0]\right) \\
 & C\left(\frac{1}{2}[-L(2k + 3) - (x_0 - ct_0)], \frac{1}{2c}[L(2k - 1) - (x_0 - ct_0)]\right) \\
 & D\left(-L, -\frac{1}{c}[L + (x_0 - ct_0)]\right)
 \end{aligned}$$

y para obtener el valor de la función u en el punto A tiene uno por el cuadrilátero formado

$$u(A) + u(C) = u(D) + u(B) \quad \rightarrow \quad \boxed{u(A) = a\left(-\frac{1}{c}[L + (x_0 - ct_0)]\right) + u(B) - u(C)}$$

Región derecha en intervalo simétrico

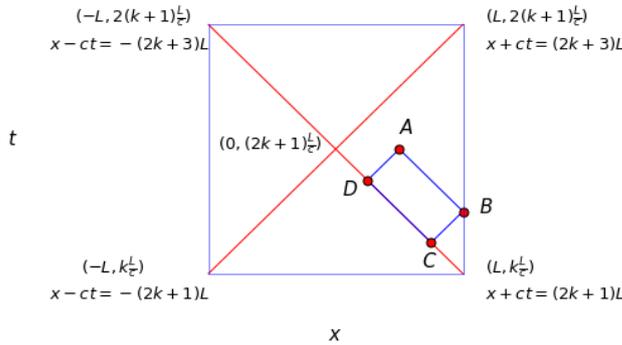


Figura 3.11: Cuadrilátero $ABCD$ ubicado en la región derecha del intervalo $(-L, L)$ para $k\frac{L}{c} \leq t \leq 2(k + 1)\frac{L}{c}$ con $k = 0, 1, \dots$

Para este último caso procede uno de manera análoga, es decir, uno considera un punto $A(x_0, t_0)$ ubicado en la región derecha dentro de algún intervalo positivo de t , como puede uno ver en la Figura 3.11. De nuevo tiene uno el triángulo característico emanando del punto A cortando a $x = L$ en el punto B donde está definida la función $b(t)$ y a $x + ct = (2k + 1)L$ en D . La propagación en B es dirigida en recta paralela a $x - ct = -(2k + 1)L$ cortando en C a la recta $x + ct = (2k + 1)L$, o en otros términos

$$\begin{aligned}
 AB : & \quad x + ct = x_0 + ct_0 \\
 BC : & \quad x - ct = 2L - (x_0 + ct_0) \\
 CD : & \quad x + ct = (2k + 1)L \\
 DA : & \quad x - ct = x_0 - ct_0
 \end{aligned}$$

Tras calcular de nuevo las intersecciones obtiene uno

$$\begin{aligned}
 & A(x_0, t_0) \\
 & B\left(L, \frac{1}{c}[x_0 + ct_0 - L]\right) \\
 & C\left(\frac{1}{2}[L(2k + 3) - (x_0 + ct_0)], \frac{1}{2c}[L(2k - 1) + (x_0 + ct_0)]\right) \\
 & D\left(\frac{1}{2}[(2k + 1)L + (x_0 - ct_0)], \frac{1}{2c}[L(2k + 1) - (x_0 - ct_0)]\right)
 \end{aligned}$$

y para obtener el valor de la función u en el punto A tiene uno por el cuadrilátero formado

$$u(A) + u(C) = u(D) + u(B) \quad \rightarrow \quad \boxed{u(A) = u(D) + b\left(\frac{1}{c}[x_0 + ct_0 - L]\right) - u(C)}$$

Condiciones de compatibilidad en frontera (caso simétrico)

De manera análoga con el intervalo no simétrico son necesarias condiciones iniciales y de frontera que satisfagan la ecuación de onda en regiones donde la reflexión ocurre, es decir, en las fronteras $x = -L$ y $x = L$, llamadas **condiciones de compatibilidad**. En este marco deben ser satisfechas tres condiciones, mismas que están impuestas dentro del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & -L < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & -L < x < L \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) & -L < x < L \\ u(-L, t) &= a(t) & t > 0 \\ u(L, t) &= b(t) & t > 0 \end{aligned}$$

1. Primera condición de compatibilidad (Posición)

Por un lado tiene uno por condición inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ que en $x = L$ es $u(L, 0) = \varphi(L)$ sin embargo $u(L, 0) = b(0)$ por lo que tiene uno $\varphi(L) = b(0)$. Para el otro extremo $x = -L$ tiene uno $u(-L, 0) = \varphi(-L)$ no obstante tiene uno $u(-L, 0) = a(0)$, por tanto llega uno a

$$\boxed{\varphi(-L) = a(0)} \quad \text{y} \quad \boxed{\varphi(L) = b(0)}$$

2. Segunda condición de compatibilidad (Velocidad)

Por un lado tiene uno por velocidad inicial $u_t(x, 0) = \psi(x)$ que en $x = -L$ es $u_t(-L, 0) = \psi(-L)$ mientras que $\frac{\partial}{\partial t} u(-L, 0) = a'(0)$ por ello $\psi(-L) = a'(0)$. De manera similar tiene uno para $x = L$ en condición inicial $u_t(L, 0) = \psi(L)$ y de manera análoga $\frac{\partial}{\partial t} u(L, 0) = b'(0)$ por lo que $\psi(L) = b'(0)$. Así tiene uno

$$\boxed{\psi(-L) = a'(0)} \quad \text{y} \quad \boxed{\psi(L) = b'(0)}$$

3. Tercera condición de compatibilidad (Aceleración)

Por la ecuación de onda tiene uno $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$, para $x = -L$ esto es $u_{tt}(-L, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(-L, t)$ por lo que $u_{tt}(-L, t) = a''(t)$ de donde $u_{tt}(-L, 0) = a''(0)$, para $x = L$ tiene uno $u_{tt}(L, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(L, t)$ lo cual es $u_{tt}(L, t) = b''(t)$ y por tanto $u_{tt}(L, 0) = b''(0)$. Por otro lado $u_{tt}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$ en $t = 0$ es $u_{tt}(x, 0) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, 0)$ lo cual es $u_{tt}(x, 0) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)$ y así en $x = \pm L$ es $u_{tt}(\pm L, 0) = c^2 \varphi''(\pm L)$. Consecuentemente tiene uno

$$\boxed{c^2 \varphi''(-L) = a''(0)} \quad \text{y} \quad \boxed{c^2 \varphi''(L) = b''(0)}$$

Bibliografía

- [1] Herrera Ismael & Pinder George, *Mathematical Modeling in Science and Engineering: an axiomatic approach*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2012, 211-215.
- [2] Allen B. Myron, Herrera Ismael, Pinder George F., *Numerical Modeling in Science and Engineering*, 1988, 52-54.
- [3] O'Neil, Peter V., *Beginning Partial Differential Equations*, 2008, 141-149.

Capítulo 4

Tratamiento numérico (con diferencias finitas) de ecuación de onda

4.1. Introducción

Entre los métodos comunes para resolver ecuaciones diferenciales parciales existe uno llamado método de diferencias finitas. La idea general detrás de este método es substituir las derivadas parciales de la función $u(x, t)$ en la ecuación diferencial parcial por aproximaciones obtenidas a partir de la serie de Taylor de la función considerada tras haber discretizado el dominio donde uno trabaja.

El proceso **discretización** consiste en dividir el dominio en $n - 1$ segmentos empleando n nodos a distancia Δx entre ellos, ver Figura 4.1. Para la discretización espacial tiene uno,

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} \quad \text{tal que} \quad x_i = x_0 + i\Delta x \quad \text{para} \quad i = 0, 1, \dots, n - 1$$

de la misma forma para la discretización temporal

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{m-2} < t_{m-1} \quad \text{tal que} \quad t_k = t_0 + k\Delta t \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \dots, m - 1$$

donde uno ha escogido el tamaño de paso Δx y Δt uniformes, es decir del mismo tamaño. También es posible considerar segmentos no uniformes al discretizar, sin embargo uno emplea en este trabajo exclusivamente discretizaciones uniformes a menos que lo contrario esté especificado.

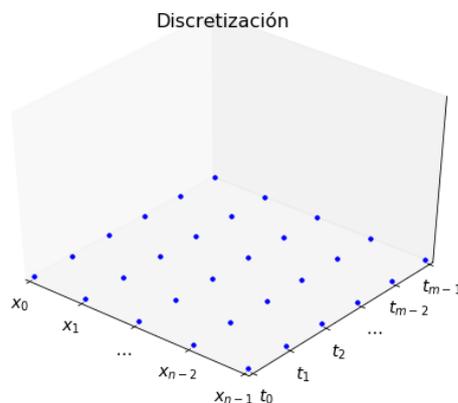


Figura 4.1: Discretización de dominios $X = [0, 1]$ y $T = [0, 1]$ unitarios, en $n - 1$ y $m - 1$ segmentos de longitud Δx y Δt cada uno empleando n y m nodos respectivamente. Este procedimiento es también llamado generación/creación de **mall**.

Posterior a la división del dominio en subintervalos requiere uno discretizar también los operadores derivadas involucrados en la ecuación diferencial parcial. Para ello parte uno de las aproximaciones en serie *Taylor* de la función $u(x, t)$ para Δx , $-\Delta x$ y Δt

$$\begin{aligned}
 u(x + \Delta x, t) &= u + (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \\
 u(x - \Delta x, t) &= u - (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \\
 u(x, t + \Delta t) &= u + (\Delta t) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2!} (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{3!} (\Delta t)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + (\Delta t)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \dots
 \end{aligned}$$

de donde considera uno los términos a aproximar dentro de la serie y trunca hasta donde uno requiera para obtener la aproximación de derivadas de orden deseado. Para el caso de la aproximación a derivada de primer orden tiene uno

$$u(x + \Delta x, t) = u + (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{O}([\Delta x]^2) \quad \rightarrow \quad \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}([\Delta x])$$

donde término \mathcal{O} es llamado en este ámbito **orden de aproximación**, mismo que indica el próximo término con coeficiente Δx . La expresión anterior es conocida como diferencias finitas hacia adelante. De la misma forma puede obtener uno la aproximación de primer orden con $-\Delta x$ a saber,

$$u(x - \Delta x, t) = u - (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{O}([\Delta x]^2) \quad \rightarrow \quad \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}([\Delta x])$$

conocida como diferencias finitas hacia atrás. Y efectuando la resta de diferencias finitas hacia enfrente y hacia atrás obtiene uno

$$u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) = 2(\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{O}([\Delta x]^2) \quad \rightarrow \quad \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}([\Delta x]^2)$$

fórmula conocida como diferencias centrales primer orden. Análogamente puede uno obtener la expresión para las derivadas de segundo orden tras sumar la serie de Taylor para Δx con $-\Delta x$ y truncar hasta el término mencionado

$$u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u - (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) \quad \rightarrow \quad \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \mathcal{O}([\Delta x]^2)$$

llamada diferencias centrales para derivada de segundo orden. Abreviando la notación tiene uno de los resultados anteriores

- Diferencias finitas primer orden hacia adelante (**Forward**)

$$u_x = \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{\Delta x} + \mathcal{O}([\Delta x])$$

- Diferencias finitas primer orden hacia atrás (**Backward**)

$$u_x = \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x} + \mathcal{O}([\Delta x])$$

- Diferencias finitas primer orden central (**Central First Order**)

$$u_x = \frac{u_{i+i}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} + \mathcal{O}([\Delta x]^2)$$

- Diferencias finitas segundo orden central (**Central Second Order**)

$$u_{xx} = \frac{u_{i+i}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{2\Delta x} + \mathcal{O}([\Delta x]^2)$$

Con estas aproximaciones en diferencias finitas de primer y/o segundo orden, reemplaza uno las derivadas parciales en la ecuación parcial a resolver, obteniendo así un esquema numérico. Desde luego es distinto cada esquema y está sujeto a condiciones particulares como uno ve más adelante. Uno trabaja con el esquema *CTCS* (*Central Time Central Space*) y el esquema *Crank Nicolson* para la ecuación de onda.

4.2. CTCS (*Central Time Central Space*)

4.2.1. Esquema numérico CTCS

El esquema CTCS consiste en emplear aproximaciones de diferencias finitas centrales de segundo orden para el espacio y para el tiempo respectivamente, es decir,

$$u_{tt} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} [u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}] \quad \text{y} \quad u_{xx} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k]$$

tras substituir en la ecuación de onda obtiene uno

$$u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1} = \underbrace{\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2}_{r^2} [u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k]$$

donde el número

$$r \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

es llamado **número Courant-Friedrichs-Lewy**, mismo que marca la condición de convergencia del método numérico empleado al resolver una ecuación diferencial parcial. Al simplificar y resolver para términos del nivel $k + 1$, es decir, u_i^{k+1} obtiene uno

$$u_i^{k+1} = r^2 u_{i-1}^k + 2(1 - r^2) u_i^k + r^2 u_{i+1}^k - u_i^{k-1}$$

para $i = 1, \dots, n - 2$ y $k = 0, 1, \dots, m - 1$ como ve uno más adelante.

4.2.2. Discretización problema ecuación de onda

Desarrollando el esquema CTSC para $i = 0, 1, \dots, n - 1$ obtiene uno un sistema de n ecuaciones (de 0 a $n - 1$)

$$\begin{aligned} u_0^{k+1} &= r^2 u_{-1}^k + 2(1 - r^2) u_0^k + r^2 u_1^k - u_0^{k-1} \\ u_1^{k+1} &= r^2 u_0^k + 2(1 - r^2) u_1^k + r^2 u_2^k - u_1^{k-1} \\ &\vdots \\ u_i^{k+1} &= r^2 u_{i-1}^k + 2(1 - r^2) u_i^k + r^2 u_{i+1}^k - u_i^{k-1} \\ &\vdots \\ u_{n-2}^{k+1} &= r^2 u_{n-3}^k + 2(1 - r^2) u_{n-2}^k + r^2 u_{n-1}^k - u_{n-2}^{k-1} \\ u_{n-1}^{k+1} &= r^2 u_{n-2}^k + 2(1 - r^2) u_{n-1}^k + r^2 u_n^k - u_{n-1}^{k-1} \end{aligned}$$

mismo que puede ser reescrito de manera matricial como

$$\begin{pmatrix} u_0^{k+1} \\ u_1^{k+1} \\ \vdots \\ u_i^{k+1} \\ \vdots \\ u_{n-2}^{k+1} \\ u_{n-1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_c & a_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_\ell & a_c & a_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_\ell & a_c & a_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_\ell & a_c & a_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_\ell & a_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^k \\ u_1^k \\ \vdots \\ u_i^k \\ \vdots \\ u_{n-2}^k \\ u_{n-1}^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0^{k-1} \\ u_1^{k-1} \\ \vdots \\ u_i^{k-1} \\ \vdots \\ u_{n-2}^{k-1} \\ u_{n-1}^{k-1} \end{pmatrix} + r^2 \begin{pmatrix} u_{-1}^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_n^k \end{pmatrix}$$

con

$$a_\ell = r^2 \quad a_c = 2(1 - r^2) \quad \text{y} \quad a_r = r^2$$

es decir

$$\underline{u}^{k+1} = \underline{A}\underline{u}^k - \underline{u}^{k-1}$$

donde el último sumando en la expresión matricial es simplificado a cero pues los únicos dos elementos suyos no están dentro de la discretización espacial. Este esquema proporciona una recursión directa, es decir, el término siguiente es obtenido a partir de(1) paso(s) anterior(es). Uno llama a este tipo de esquemas **métodos explícitos**. Notar que el método CTCS tiene problema cuando $k = 0$ pues uno obtiene

$$\underline{u}^1 = \underline{A}\underline{u}^0 - \underline{u}^{-1}$$

sin embargo uno puede emplear condiciones iniciales para ajustar los índices temporales que no estén en la malla.

Condiciones iniciales

Uno requiere discretizar las condiciones iniciales pues son parte del problema. Para la **posición inicial** tiene uno

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \rightarrow \quad u_i^0 = \varphi_i \quad \rightarrow \quad \underline{u}^0 = \underline{\varphi}$$

mientras que la **velocidad inicial** es

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \rightarrow \quad \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} = \psi_i \quad \rightarrow \quad \underline{u}^k = \Delta t \underline{\psi} + \underline{u}^{k-1}$$

para $k = 0$ tiene uno

$$\underline{u}^0 = \Delta t \underline{\psi} + \underline{u}^{-1} \quad \rightarrow \quad \underline{u}^{-1} = \underline{u}^0 - \Delta t \underline{\psi}$$

substituyendo en el esquema CTCS para paso $k = 0$ junto con la velocidad inicial conduce a

$$\underline{u}^1 = \underline{A}\underline{u}^0 - \underline{u}^{-1} \quad \rightarrow \quad \underline{u}^1 = \underline{A}\underline{\varphi} - \underline{u}^0 + \Delta t \underline{\psi} \quad \rightarrow \quad \underline{u}^1 = (\underline{A} - \underline{I})\underline{\varphi} + \Delta t \underline{\psi}$$

así, por lo anterior el esquema CTCS es, para $k = 0$

$$\underline{u}^1 = (\underline{A} - \underline{I})\underline{\varphi} + \Delta t \underline{\psi}$$

y

$$\underline{u}^{k+1} = \underline{A}\underline{u}^k - \underline{u}^{k-1}$$

para $k = 1, \dots, m - 2$.

Condiciones de frontera

En las condiciones de frontera tiene uno

- para extremo izquierdo

$$u(0, t) = a(t) \quad \rightarrow \quad u_0^k = a^k$$

- para extremo derecho

$$u(L, t) = b(t) \quad \rightarrow \quad u_{n-1}^k = b^k$$

ambas para $k = 0, 1, \dots, m - 1$. En esta ocasión incluye uno el ultimo nodo $m - 1$ pues no hay recursión en este caso.

4.2.3. Error de truncamiento y consistencia CTCS

Debido a que uno aproxima derivadas parciales debe uno recortar o truncar términos en la serie de Taylor, hacer esto genera un error de precisión por dichos términos truncados, por ello uno define el **error local de truncamiento**, para este caso del esquema CTCS, como

$$TE \equiv L^{\Delta t} - R_{\Delta x}$$

con

$$L^{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta t)^2} [u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}] \quad y \quad R_{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k]$$

donde $L^{\Delta t}$ y $R_{\Delta x}$ hacen referencia al lado izquierdo y derecho respectivamente, donde las derivadas parciales temporal y espacial están ubicadas en la ecuación de onda. Al substituir las aproximaciones correspondientes, recortando la notación y desarrollando tiene uno

$$L^{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[(\Delta t)^2 u_{tt} + \frac{(\Delta t)^4}{12} u_{tttt} + \mathcal{O}([\Delta t]^6) \right] \quad \text{y} \quad R_{\Delta x} = c^2 \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[(\Delta x)^2 u_{xx} + \frac{(\Delta x)^4}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^6) \right]$$

respectivamente. Simplificando tiene uno

$$L^{\Delta t} = \left[u_{tt} + \frac{(\Delta t)^2}{12} u_{tttt} + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \right] \quad \text{y} \quad R_{\Delta x} = c^2 \left[u_{xx} + \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) \right]$$

Tras efectuar

$$\text{TE} = L^{\Delta t} - R_{\Delta x}$$

y recordando que $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ llega uno a

$$\text{TE}(x, t) = \left[\frac{(\Delta t)^2}{12} u_{tttt} + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \right] - c^2 \left[\frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) \right]$$

tras reordenar términos

$$\text{TE}(x, t) = \frac{(\Delta t)^2}{12} u_{tttt} - c^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta t]^4) + \mathcal{O}([\Delta x]^4)$$

como uno trabaja con funciones suaves tiene uno

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \rightarrow \quad u_{tttt} = c^2 u_{xxtt} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{tt} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} c^2 u_{xx} = c^4 u_{xxxx}$$

por lo que

$$\text{TE}(x, t) = \frac{(\Delta t)^2}{12} c^4 u_{xxxx} - c^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta t]^4) + \mathcal{O}([\Delta x]^4)$$

y de esta forma

$$\boxed{\text{TE}(x, t) = c^2 \frac{1}{12} u_{xxxx} [c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2] + \mathcal{O}([\Delta t]^4) + \mathcal{O}([\Delta x]^4)}$$

aquí tiene uno lo siguiente

- si $c^2 (\Delta t)^2 = (\Delta x)^2$ el esquema CTCS es de orden $\mathcal{O}([\Delta t]^4) + \mathcal{O}([\Delta x]^4)$ y uno dice que es de **orden de precisión** cuatro en el espacio y cuatro en el tiempo
- si $c^2 (\Delta t)^2 \neq (\Delta x)^2$ el esquema CTCS es de orden $\mathcal{O}([\Delta t]^2) + \mathcal{O}([\Delta x]^2)$ y uno dice que es de **orden de precisión** dos en el espacio y dos en el tiempo

por tanto si $\Delta x \rightarrow 0$ junto con $\Delta t \rightarrow 0$ tiene uno $\text{TE} \rightarrow 0$ y el esquema **CTCS es consistente** con la ecuación de onda.

4.2.4. Estabilidad CTCS

Usando el método de Von Neumann,

$$u(x, t) = A(t) e^{Iwx}$$

donde $I = \sqrt{-1}$, w es el número de onda y $A(t)$ es la amplitud de onda dependiente del tiempo. Discretizar conduce a

$$u_i^k = A^k e^{Iwi\Delta x}$$

substituir en el esquema CTCS

$$u_i^{k+1} = r^2 u_{i-1}^k + 2(1 - r^2) u_i^k + r^2 u_{i+1}^k - u_i^{k-1}$$

conduce a

$$\begin{aligned}
 A^{k+1}e^{Iwi\Delta x} &= r^2 A^k e^{Iw(i-1)\Delta x} + 2(1-r^2)A^k e^{Iwi\Delta x} + r^2 A^k e^{Iw(i+1)\Delta x} - A^{k-1}e^{Iwi\Delta x} \\
 A^{k+1} &= r^2 A^k e^{-Iw\Delta x} + 2(1-r^2)A^k + r^2 A^k e^{Iw\Delta x} - A^{k-1} \\
 &= r^2 A^k (e^{-Iw\Delta x} + e^{Iw\Delta x}) + 2(1-r^2)A^k - A^{k-1} \\
 &= 2r^2 A^k \cos w\Delta x + 2(1-r^2)A^k - A^{k-1} \\
 &= 2r^2 A^k (\cos w\Delta x - 1) + 2A^k - A^{k-1} \\
 &= -4r^2 A^k \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x + 2A^k - A^{k-1}
 \end{aligned}$$

de donde obtiene uno

$$\boxed{A^{k+1} = A^k \left[2 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \right] - A^{k-1}}$$

uno puede reescribir la expresión como

$$\begin{pmatrix} A^{k+1} \\ A^k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_R \begin{pmatrix} A^k \\ A^{k-1} \end{pmatrix}$$

con

$$\boxed{\text{tr}(R) = 2 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x} \quad \text{y} \quad \boxed{\det(R) = 1}$$

de donde obtiene uno

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(R)\lambda + \det(R) \quad \rightarrow \quad \boxed{p(\lambda) = \lambda^2 + \left[4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x - 2 \right] \lambda + 1}$$

resolviendo para $\lambda_{1,2}$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} &= \frac{2 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \pm \sqrt{[4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x - 2]^2 - 4}}{2} \\
 &= \frac{2(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) \pm \sqrt{2^2 [2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x - 1]^2 - 2^2}}{2} \\
 &= 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \pm \sqrt{\left[2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x - 1 \right]^2 - 1} \\
 &= 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \pm \sqrt{\left[1 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \right]^2 - 1}
 \end{aligned}$$

donde llega uno a

$$\boxed{\lambda_{1,2} = 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \pm \sqrt{\left[1 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \right]^2 - 1}}$$

Uno observa que la función radicando

$$f(r) = \left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \right)^2 - 1$$

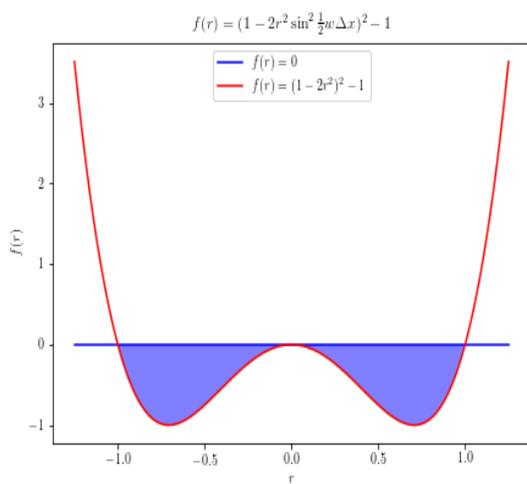
debido a restricción de la función seno

$$0 < \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x < 1$$

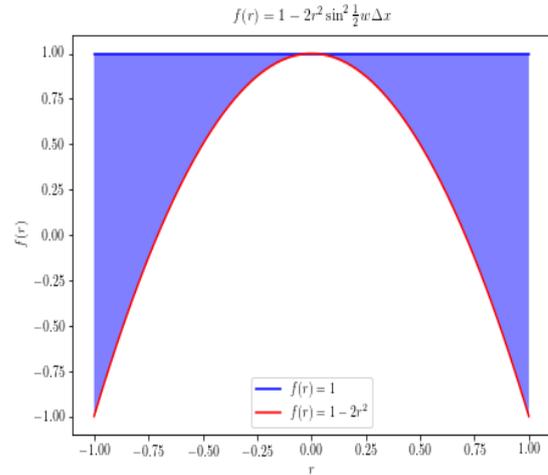
yace entre las funciones

$$f(r) = 0 \quad \text{y} \quad f(r) = (1 - 2r^2)^2 - 1$$

pues ocurre cuando la función seno es respectivamente cero (azul) y uno (rojo), como puede uno ver en la Figura 4.2a,



(a) Función radicando del esquema CTCS yace en la zona azul acotada por las funciones donde el seno asume cero y uno.



(b) Función fuera del radicando del esquema CTCS yace en la zona azul acotada por funciones donde el seno asume cero y uno.

Figura 4.2: Regiones donde el esquema CTCS es estable.

asumiendo de esta forma valores negativos (zona azul) siempre que

$$-1 < r < 1$$

conduciendo así a valores propios complejos conjugados. Con esta restricción sobre r la función restante

$$f(r) = 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x$$

yace entre las funciones

$$f(r) = 1 \quad \text{y} \quad f(r) = 1 - 2r^2$$

mismas que ocurren cuando la función seno asume respectivamente el valor cero (azul) y uno (rojo), consecuentemente la parte real de ambos valores propios está entre menos uno y uno, como puede uno ver en la Figura 4.2b. En otras palabras, si ocurre

$$\left| 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x < 1$$

entonces

$$|\lambda_1| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\lambda_2| \leq 1$$

así, matriz R es diagonalizable y tiene uno

$$\begin{aligned} R &= P \Lambda P^{-1} \\ R^k &= \underbrace{(P \Lambda P^{-1})(P \Lambda P^{-1}) \dots (P \Lambda P^{-1}) \dots (P \Lambda P^{-1})(P \Lambda P^{-1})}_{k \text{ veces}} \\ R^k &= P \Lambda^k P^{-1} \\ \|R^k\| &\leq \|P\| \|\Lambda\|^k \|P^{-1}\| \end{aligned}$$

donde Λ es la matriz con valores propios λ_1 y λ_2 en las entradas de la diagonal principal junto con P la matriz cuyas columnas son los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente. De esta forma

$$\|R^k\| \leq C$$

por tanto para cualquier k existe cota y el esquema CTCS es estable con $-1 < r < 1$, sin embargo, tomando en cuenta que $r > 0$, tiene uno

$$\boxed{c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1}$$

Debido a esta condición, clasifica uno esquema CTCS como **condicionalmente estable**.

4.2.5. Convergencia CTCS

El esquema CTCS cumple

- **consistencia** con la ecuación de onda lineal
- **estabilidad** siempre que

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

así, por el *teorema de Lax-Richtmyer* es convergente a la solución de la ecuación de onda.

4.3. Crank Nicolson

4.3.1. Esquema numérico Crank Nicolson

Para este esquema numérico las aproximaciones dictan un promedio entre pasos consecutivos para el dominio de tiempo en la aproximación espacial, mientras que la parte temporal es preservada como en el esquema CTCS, es decir,

$$u_{tt} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} [u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}] \quad y \quad u_{xx} \approx \frac{1}{2(\Delta x)^2} [u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1} + u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}]$$

Tras la sustitución en la ecuación de onda tiene uno

$$u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2}_{r^2} [u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1} + u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}]$$

y separando del lado derecho e izquierdo los términos asociados a u^{k+1} y u^k con u^{k-1} respectivamente

$$u_i^{k+1} - \frac{1}{2}r^2[u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}] = \frac{1}{2}r^2[u_{i-1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i+1}^{k-1}] + 2u_i^k - u_i^{k-1}$$

en otras palabras

$$\boxed{-\frac{1}{2}r^2u_{i-1}^{k+1} + (1+r^2)u_i^{k+1} - \frac{1}{2}r^2u_{i+1}^{k+1} = 2u_i^k + \frac{1}{2}r^2u_{i-1}^{k-1} - (1+r^2)u_i^{k-1} + \frac{1}{2}r^2u_{i+1}^{k-1}}$$

4.3.2. Discretización problema ecuación de onda

Desarrollando esquema Crank Nicolson para $i = 0, 1, \dots, n - 1$ obtiene uno un sistema de n ecuaciones (de nuevo de 0 a $n - 1$)

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}r^2u_{-1}^{k+1} + (1+r^2)u_0^{k+1} - \frac{1}{2}r^2u_1^{k+1} &= 2u_0^k + \frac{1}{2}r^2u_{-1}^{k-1} - (1+r^2)u_0^{k-1} + \frac{1}{2}r^2u_1^{k-1} \\
 -\frac{1}{2}r^2u_0^{k+1} + (1+r^2)u_1^{k+1} - \frac{1}{2}r^2u_2^{k+1} &= 2u_1^k + \frac{1}{2}r^2u_0^{k-1} - (1+r^2)u_1^{k-1} + \frac{1}{2}r^2u_2^{k-1} \\
 &\vdots \\
 -\frac{1}{2}r^2u_{i-1}^{k+1} + (1+r^2)u_i^{k+1} - \frac{1}{2}r^2u_{i+1}^{k+1} &= 2u_i^k + \frac{1}{2}r^2u_{i-1}^{k-1} - (1+r^2)u_i^{k-1} + \frac{1}{2}r^2u_{i+1}^{k-1} \\
 &\vdots \\
 -\frac{1}{2}r^2u_{n-3}^{k+1} + (1+r^2)u_{n-2}^{k+1} - \frac{1}{2}r^2u_{n-1}^{k+1} &= 2u_{n-2}^k + \frac{1}{2}r^2u_{n-3}^{k-1} - (1+r^2)u_{n-2}^{k-1} + \frac{1}{2}r^2u_{n-1}^{k-1} \\
 -\frac{1}{2}r^2u_{n-2}^{k+1} + (1+r^2)u_{n-1}^{k+1} - \frac{1}{2}r^2u_n^{k+1} &= 2u_{n-1}^k + \frac{1}{2}r^2u_{n-2}^{k-1} - (1+r^2)u_{n-1}^{k-1} + \frac{1}{2}r^2u_n^{k-1}
 \end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{pmatrix} a_c & a_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_\ell & a_c & a_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_\ell & a_c & a_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_\ell & a_c & a_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_\ell & a_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{k+1} \\ u_1^{k+1} \\ \vdots \\ u_i^{k+1} \\ \vdots \\ u_{n-2}^{k+1} \\ u_{n-1}^{k+1} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_0^k \\ u_1^k \\ \vdots \\ u_i^k \\ \vdots \\ u_{n-2}^k \\ u_{n-1}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_c & b_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_\ell & b_c & b_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_\ell & b_c & b_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_\ell & b_c & b_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_\ell & b_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{k-1} \\ u_1^{k-1} \\ \vdots \\ u_i^{k-1} \\ \vdots \\ u_{n-2}^{k-1} \\ u_{n-1}^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}r^2 \begin{pmatrix} u_{-1}^{k-1} + u_{-1}^{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_n^{k-1} + u_n^{k+1} \end{pmatrix}$$

con

$$\boxed{a_\ell = -\frac{1}{2}r^2} \quad \boxed{a_c = 1+r^2} \quad \boxed{a_r = -\frac{1}{2}r^2} \quad \text{y} \quad \boxed{b_\ell = \frac{1}{2}r^2} \quad \boxed{b_c = -(1+r^2)} \quad \boxed{b_r = \frac{1}{2}r^2}$$

Simplificando el último sumando a cero por no pertenecer a la malla y reescribiendo en forma matricial tiene uno

$$\boxed{\underline{A}u^{k+1} = 2\underline{u}^k + \underline{B}u^{k-1}}$$

El esquema Crank Nicolson a diferencia del esquema CTCS proporciona una recursión indirecta, pues en cada paso k es necesario resolver sistema de forma $Ax = b$ para obtener paso siguiente $k + 1$. Uno llama este tipo de esquemas **esquemas implícitos**.

Condiciones de frontera

En las condiciones de frontera tiene uno

- para el extremo izquierdo

$$u(0, t) = a(t) \quad \rightarrow \quad u_0^k = a^k$$

- para el extremo derecho

$$u(L, t) = b(t) \quad \rightarrow \quad u_{n-1}^k = b^k$$

ambas para $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

Condiciones iniciales

Para la **posición inicial** tiene uno

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \rightarrow \quad u_i^0 = \varphi_i \quad \rightarrow \quad \underline{u}^0 = \underline{\varphi}$$

mientras que la **velocidad inicial** es

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \rightarrow \quad \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} = \psi_i \quad \rightarrow \quad \underline{u}^k = \Delta t \underline{\psi} + \underline{u}^{k-1}$$

para $k = 0$ tiene uno

$$\underline{u}^0 = \Delta t \underline{\psi} + \underline{u}^{-1} \quad \rightarrow \quad \underline{u}^{-1} = \underline{u}^0 - \Delta t \underline{\psi}$$

Substituir en el esquema Crank Nicolson para paso $k = 0$ junto con la velocidad inicial conduce a

$$\underline{\underline{A}}\underline{u}^1 = 2\underline{u}^0 + \underline{\underline{B}}\underline{u}^{-1} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A}}\underline{u}^1 = 2\underline{u}^0 + \underline{\underline{B}}(\underline{u}^0 - \Delta t \underline{\psi}) \quad \rightarrow \quad \underline{u}^1 = \underline{\underline{A}}^{-1} ((\underline{\underline{B}} + 2\underline{\underline{I}})\underline{\varphi} - \Delta t \underline{\underline{B}}\underline{\psi})$$

Por el cálculo anterior el esquema Crank Nicolson es, para $k = 0$

$$\underline{u}^1 = \underline{\underline{A}}^{-1} ((\underline{\underline{B}} + 2\underline{\underline{I}})\underline{\varphi} - \Delta t \underline{\underline{B}}\underline{\psi})$$

y

$$\underline{\underline{A}}\underline{u}^{k+1} = 2\underline{u}^k + \underline{\underline{B}}\underline{u}^{k-1}$$

para $k = 1, \dots, m - 2$.

4.3.3. Error de truncamiento y consistencia Crank Nicolson

Uno define el error de truncamiento para el esquema Crank Nicolson análogamente al caso CTCS

$$\text{TE} \equiv L^{\Delta t} - R_{\Delta x}$$

donde

$$L^{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta t)^2} [u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}] \quad \text{y} \quad R_{\Delta x} = \frac{1}{2} c^2 \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{i-1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i+1}^{k-1} + u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}]$$

de nuevo está uno interesado en que $\text{TE} \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ junto con $\Delta t \rightarrow 0$ para poder clasificar el esquema Crank Nicolson de consistente. Por tal motivo tiene uno tras substituir aproximaciones respectivas

$$L^{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[(\Delta t)^2 u_{tt} + \frac{(\Delta t)^4}{12} u_{tttt} + \mathcal{O}([\Delta t]^6) \right]$$

y para el lado derecho

$$R_{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(c \frac{1}{\Delta x} \right)^2 \left[2(\Delta x)^2 u_{xx} + (\Delta x)^2 (\Delta t)^2 u_{xxtt} + \frac{(\Delta x)^4}{6} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^6) + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \right]$$

reducir términos conduce a

$$L^{\Delta t} = \left[u_{tt} + \frac{(\Delta t)^2}{12} u_{tttt} + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \right]$$

junto con

$$R_{\Delta t} = \frac{1}{2} c^2 \left[2u_{xx} + (\Delta t)^2 u_{xxtt} + \frac{(\Delta x)^2}{6} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \right]$$

efectuar

$$\text{TE} \equiv L^{\Delta t} - R_{\Delta x}$$

conduce a

$$\begin{aligned}
 \text{TE} &= u_{tt} + \frac{(\Delta t)^2}{12} u_{tttt} - c^2 u_{xx} - c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{xxtt} - c^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \\
 &= \frac{(\Delta t)^2}{12} u_{tttt} - c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{xxtt} - c^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \\
 &= c^4 \frac{(\Delta t)^2}{12} u_{xxxx} - c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{xxtt} - c^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \\
 &= c^2 \frac{1}{12} u_{xxxx} [(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2] - c^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{xxtt} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \\
 &= -c^2 \frac{1}{12} u_{xxxx} [5(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2] + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4)
 \end{aligned}$$

donde uno usó de nuevo la suavidad de la función u

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \rightarrow \quad u_{tttt} = c^2 u_{xxtt} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{tt} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} c^2 u_{xx} = c^4 u_{xxxx}$$

así llega uno a

$$\boxed{\text{TE}(x, t) = -c^2 \frac{1}{12} u_{xxxx} [5(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2] + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4)}$$

Es decir, el esquema Crank Nicolson es de orden $\mathcal{O}([\Delta x]^2) + \mathcal{O}([\Delta t]^2)$. Por tanto si $\Delta x \rightarrow 0$ junto con $\Delta t \rightarrow 0$ tiene uno $\text{TE} \rightarrow 0$ y el esquema **Crank Nicolson es consistente** con la ecuación de onda.

4.3.4. Estabilidad Crank Nicolson

Considerar de nuevo

$$u(x, t) = A(t)e^{Iwx}$$

cuya discretización es

$$u_i^k = A^k e^{Iwi\Delta x}$$

Al substituir en el esquema Crank Nicolson

$$-\frac{1}{2}r^2 u_{i-1}^{k+1} + (1+r^2)u_i^{k+1} - \frac{1}{2}r^2 u_{i+1}^{k+1} = 2u_i^k + \frac{1}{2}r^2 u_{i-1}^{k-1} - (1+r^2)u_i^{k-1} + \frac{1}{2}r^2 u_{i+1}^{k-1}$$

tiene uno

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{2}r^2 A^{k+1} e^{Iw(i-1)\Delta x} + (1+r^2)A^{k+1} e^{Iwi\Delta x} - \frac{1}{2}r^2 A^{k+1} e^{Iw(i+1)\Delta x} \\
 &= 2A^k e^{Iwi\Delta x} + \frac{1}{2}r^2 A^{k-1} e^{Iw(i-1)\Delta x} - (1+r^2)A^{k-1} e^{Iwi\Delta x} + \frac{1}{2}r^2 A^{k-1} e^{Iw(i+1)\Delta x}
 \end{aligned}$$

desarrollando la expresión

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}r^2 A^{k+1} e^{-Iw\Delta x} + (1+r^2)A^{k+1} - \frac{1}{2}r^2 A^{k+1} e^{Iw\Delta x} &= 2A^k + \frac{1}{2}r^2 A^{k-1} e^{-Iw\Delta x} - (1+r^2)A^{k-1} + \frac{1}{2}r^2 A^{k-1} e^{Iw\Delta x} \\
 -r^2 A^{k+1} (e^{-Iw\Delta x} + e^{Iw\Delta x}) + (1+r^2)A^{k+1} &= 2A^k + \frac{1}{2}r^2 A^{k-1} (e^{-Iw\Delta x} + e^{Iw\Delta x}) - (1+r^2)A^{k-1} \\
 -r^2 A^{k+1} \cos w\Delta x + (1+r^2)A^{k+1} &= 2A^k + r^2 A^{k-1} \cos w\Delta x - (1+r^2)A^{k-1} \\
 A^{k+1} [-r^2 \cos w\Delta x + (1+r^2)] &= 2A^k + A^{k-1} [r^2 \cos w\Delta x - (1+r^2)] \\
 A^{k+1} [-r^2 (\cos w\Delta x - 1) + 1] &= 2A^k + A^{k-1} [r^2 (\cos w\Delta x - 1) - 1] \\
 A^{k+1} \left[2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w\Delta x + 1 \right] &= 2A^k + A^{k-1} \left[-2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w\Delta x - 1 \right]
 \end{aligned}$$

entonces

$$A^{k+1} \left[2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1 \right] = 2A^k + A^{k-1} \left[-2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x - 1 \right]$$

reescribiendo la expresión anterior como un sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{k+1} \\ A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k \\ A^{k-1} \end{pmatrix}$$

de donde uno obtiene

$$\begin{pmatrix} A^{k+1} \\ A^k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1} & -2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_R \begin{pmatrix} A^k \\ A^{k-1} \end{pmatrix}$$

con

$$\text{tr}(R) = \frac{2}{2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1} \quad \text{y} \quad \det(R) = 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1$$

y el polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(R)\lambda + \det(R) \quad \rightarrow \quad \boxed{p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2}{2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1} \lambda + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1}$$

Para determinar λ tiene uno :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\frac{2}{2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1} \pm \sqrt{\left[\frac{2}{2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1} \right]^2 - 4 \left[2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1 \right]}}{2} \\ &= \frac{1}{2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1} \right]^2 - \left[2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1 \right]} \end{aligned}$$

llegando a

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1} \right]^2 - \left[2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x + 1 \right]}}$$

donde el radicando es negativo, pues

$$\begin{aligned} 0 &< \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x < 1 \\ 0 &< r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x < r^2 \\ 0 &< 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x < 2r^2 \\ 1 &< 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x < 1 + 2r^2 \\ 1 &> \frac{1}{1 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x} > \frac{1}{1 + 2r^2} \\ \frac{1}{1 + 2r^2} &< \frac{1}{1 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x} < 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\left[\frac{1}{1 + 2r^2} \right]^2 < \left[\frac{1}{1 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2} w \Delta x} \right]^2 < 1}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
 1 &< 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x < 1 + 2r^2 \\
 -1 &> -(1 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) > -(1 + 2r^2) \\
 \boxed{- (1 + 2r^2) < - (1 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) < -1}
 \end{aligned}$$

de ambas expresiones encerradas tiene uno

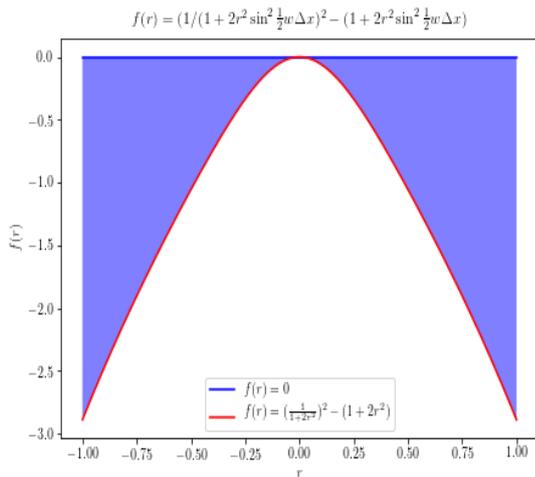
$$\left[\frac{1}{1 + 2r^2} \right]^2 - (1 + 2r^2) < \left[\frac{1}{1 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x} \right]^2 - (1 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) < 0$$

así el radicando asume un valor menor o igual a cero, ver Figura 4.3a, conduciendo a valores propios complejos conjugados. Para la parte real observa uno del primer cálculo que la función

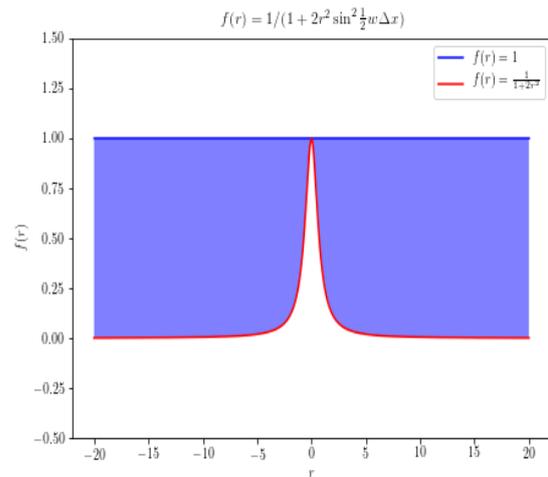
$$f(r) = \frac{1}{1 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x} < 1$$

para cualquier valor asumido por r , como puede uno ver en la Figura 4.3b, de esta forma

$$|\lambda_1| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\lambda_2| \leq 1$$



(a) Función radicando del esquema Crank Nicolson yace en la zona acotada por las funciones donde seno asume cero y uno.



(b) Función fuera del radicando del esquema Crank Nicolson yace en la zona azul acotada por las funciones donde seno asume cero y uno.

Figura 4.3: Regiones donde el esquema Crank Nicolson es estable.

por tanto para la matriz R tiene uno

$$\begin{aligned}
 R &= P\Lambda P^{-1} \\
 R^k &= \underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \dots P\Lambda P^{-1} \dots (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})}_{k \text{ veces}} \\
 R^k &= P\Lambda^k P^{-1} \\
 \|R^k\| &\leq \|P\| \|\Lambda^k\| \|P^{-1}\|
 \end{aligned}$$

donde P es matriz no singular cuyas columnas son los vectores propios asociados a los valores propios respectivamente λ_1 y λ_2 así como Λ es la matriz cuyas entradas en la diagonal principal son los valores propios y cero en resto de las entradas. De esta manera tiene uno

$$\|R^k\| \leq C$$

lo cual siempre ocurre para cualquier r y w , es decir, esquema Crank Nicolson no está restringido a condición alguna, luego es **incondicionalmente estable**.

4.3.5. Convergencia Crank Nicolson

El esquema Crank Nicolson cumple

- **consistencia** con la ecuación de onda lineal
- **estabilidad** para cualquier

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

así, por el *teorema de Lax-Richtmyer* es convergente a la solución de la ecuación de onda.

4.4. Cuestiones teóricas

Definición 4.4.1 (Error de truncamiento). Uno denota el error local de truncamiento $TE(x, t)$ de un esquema numérico de una ecuación diferencial parcial como el lado derecho de dicho esquema numérico igualado a cero

$$TE(x, t) \equiv L^{\Delta t} - R_{\Delta x}$$

Definición 4.4.2 (Consistencia). Uno dice que un esquema numérico es **consistente con la ecuación diferencial parcial** si es cumplido que

$$TE(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{a medida que} \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

Definición 4.4.3 (Estabilidad). Un esquema de diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial es clasificado como **estable** en una norma $\|\cdot\|$ si existe una constante C independiente de Δt tal que $\|A^k \underline{u}\| \leq C \|\underline{u}\|$ o equivalentemente

$$\|A^k\| \leq C$$

para todo paso $k = \frac{T}{\Delta t}$.

Definición 4.4.4 (Orden de precisión). Uno define el **orden de precisión** de un esquema numérico de orden p -ésimo de precisión en Δx y q -ésimo de precisión en Δt si ocurre que

$$TE(x, t) \leq C[\mathcal{O}[(\Delta x)^p] + \mathcal{O}[(\Delta t)^q]]$$

y a medida que $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ con p y q los enteros más grandes.

Teorema 4.4.1 (Teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer). *Aunque sólo es aplicable a métodos numéricos lineales para ecuaciones diferenciales parciales bien planteadas, el teorema establece que la relación*

$$\text{consistencia} + \text{estabilidad} \leftrightarrow \text{convergencia}$$

es válida. Este teorema es en algunos ámbitos llamado Teorema fundamental del análisis numérico, equivalente al Teorema de equivalencia de Dahlquist para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Bibliografía

- [1] Jichun Li / Yi Tung Chen Computational Partial Differential Equations using MATLAB, Taylor & Francis Group, 2008, 45 - 47.
- [2] Abassi, Nasser M., Solving the advection PDE in explicit FTCS, Lax, Implicit FTCS and Crank-Nicolson methods for constant and varying speed, 3 - 12

Capítulo 5

Método de integración implícito en el tiempo propuesto por Herrera

5.1. Discusión

El esquema presentado en este capítulo fue propuesto por el Doctor Ismael Herrera Revilla y está dedicado aquí explícitamente a la ecuación de onda. No obstante puede uno emplearlo para resolver problemas más sofisticados de tipo hiperbólico siguiendo la derivación descrita para los mismos. Actualmente la publicación original del esquema está en proceso de desarrollo, por lo que en este trabajo presenta uno un primer enfoque derivado del mismo para un problema particular.

Para generar este algoritmo parte uno de

$$a(t) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \mathcal{L}_x u(x, t)$$

con \mathcal{L}_x representando *operador de Laplace*, la aceleración $a(t)$ representa una función lineal en t : $a(t) = mt + b$ (m pendiente y b ordenada al origen) conduciendo a que la posición $u(t)$ sea una función cúbica en t tras integración. En otras palabras busca uno una función posición $u(t)$ cúbica para obtener de ella una función aceleración $a(t)$ lineal. Considerando esto, comienza uno por obtener la ordenada al origen b

$$a(t) = mt + b \quad \rightarrow \quad b = a(0)$$

y la pendiente m mediante

$$a(t) = mt + a(0) \quad \rightarrow \quad a\left(\frac{1}{2}T\right) = m\frac{1}{2}T + a(0) \quad \rightarrow \quad m = \frac{2}{T}[a\left(\frac{1}{2}T\right) - a(0)]$$

respectivamente. Así, la aceleración es

$$a(t) = \frac{2}{T}[a\left(\frac{1}{2}T\right) - a(0)]t + a(0)$$

de cuya integración obtiene uno la velocidad

$$v(t) - v(0) = \frac{1}{T}[a\left(\frac{1}{2}T\right) - a(0)]t^2 + a(0)t$$

conduciendo a

$$v(t) = \frac{1}{T}[a\left(\frac{1}{2}T\right) - a(0)]t^2 + a(0)t + v(0)$$

de nuevo, integrando la velocidad llega uno a la posición

$$u(t) - u(0) = \frac{1}{3T}[a\left(\frac{1}{2}T\right) - a(0)]t^3 + \frac{1}{2}a(0)t^2 + v(0)t$$

es decir

$$u(t) = \frac{1}{3T} [a(\frac{1}{2}T) - a(0)]t^3 + \frac{1}{2}a(0)t^2 + v(0)t + u(0)$$

Por tanto tiene uno tres ecuaciones

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{2}{T} [a(\frac{1}{2}T) - a(0)]t + a(0) \\ v(t) &= \frac{1}{T} [a(\frac{1}{2}T) - a(0)]t^2 + a(0)t + v(0) \\ u(t) &= \frac{1}{3T} [a(\frac{1}{2}T) - a(0)]t^3 + \frac{1}{2}a(0)t^2 + v(0)t + u(0) \end{aligned}$$

Al substituir $t = T$ obtiene uno

$$\begin{aligned} a(T) &= 2a(\frac{1}{2}T) - a(0) \\ v(T) &= Ta(\frac{1}{2}T) + v(0) \\ u(T) &= \frac{1}{3}T^2a(\frac{1}{2}T) + \frac{1}{6}T^2a(0) + Tv(0) + u(0) \end{aligned}$$

dejando $a(\frac{1}{2}T)$ en términos de $a(0)$ y $a(T)$, puede uno reescribir $v(T)$ y $u(T)$ respectivamente como

$$\begin{aligned} v(T) &= \frac{1}{2}Ta(T) + \frac{1}{2}Ta(0) + v(0) \\ u(T) &= \frac{1}{6}T^2a(T) + \frac{1}{3}T^2a(0) + Tv(0) + u(0) \end{aligned}$$

recordando que

$$a(t) \equiv \mathcal{L}_x u(t)$$

tiene uno

$$\begin{aligned} v(T) &= \frac{1}{2}T\mathcal{L}_x u(T) + \frac{1}{2}T\mathcal{L}_x u(0) + v(0) \\ u(T) &= \frac{1}{6}T^2\mathcal{L}_x u(T) + \frac{1}{3}T^2\mathcal{L}_x u(0) + v(0)T + u(0) \end{aligned}$$

al realizar la operación

$$u(T) - \frac{1}{3}Tv(T) = \frac{1}{6}T^2\mathcal{L}_x u(0) + \frac{2}{3}Tv(0) + u(0)$$

y despejar $v(T)$ llega uno a

$$v(T) = \frac{3}{T} [u(T) - u(0)] - \frac{1}{2}T^2 \frac{1}{T} \mathcal{L}_x u(0) - 2v(0)$$

por lo que las ecuaciones ahora son

$$\begin{aligned} v(T) &= \frac{3}{T} [u(T) - u(0)] - \frac{1}{2}T^2 \frac{1}{T} \mathcal{L}_x u(0) - 2v(0) \\ u(T) &= \frac{1}{6}T^2\mathcal{L}_x u(T) + \frac{1}{3}T^2\mathcal{L}_x u(0) + v(0)T + u(0) \end{aligned}$$

definiendo de forma recursiva, obtiene uno el esquema

$$\begin{aligned} v_i^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t} [u_i^{k+1} - u_i^k] - \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{1}{\Delta t} \mathcal{L}_x u_i^k - 2v_i^k \\ u_i^{k+1} &= \frac{1}{6}(\Delta t)^2 \mathcal{L}_x u_i^{k+1} + \frac{1}{3}(\Delta t)^2 \mathcal{L}_x u_i^k + \Delta t v_i^k + u_i^k \end{aligned}$$

considerando el operador como

$$\mathcal{L}_x \equiv c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

y usando diferencias centrales de segundo orden para su aproximación obtiene uno

$$\begin{aligned} v_i^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t} [u_i^{k+1} - u_i^k] - \frac{1}{2} \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{1}{\Delta t} [u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k] - 2v_i^k \\ u_i^{k+1} &= \frac{1}{6} \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 [u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}] + \frac{1}{3} \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 [u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k] + \Delta t v_i^k + u_i^k \end{aligned}$$

reordenando términos es

$$\begin{aligned} u_i^{k+1} - \frac{1}{6} r^2 [u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}] &= \frac{1}{3} r^2 [u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k] + \Delta t v_i^k + u_i^k \\ v_i^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t} [u_i^{k+1} - u_i^k] - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 [u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k] - 2v_i^k \end{aligned}$$

y tras simplificar llega uno a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} r^2 u_{i-1}^{k+1} + \left(1 + \frac{1}{3} r^2\right) u_i^{k+1} - \frac{1}{6} r^2 u_{i+1}^{k+1} &= \frac{1}{3} r^2 u_{i-1}^k + \left(1 - \frac{2}{3} r^2\right) u_i^k + \frac{1}{3} r^2 u_{i+1}^k + \Delta t v_i^k \\ v_i^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t} u_i^{k+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 u_{i-1}^k + \frac{1}{\Delta t} (r^2 - 3) u_i^k - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 u_{i+1}^k - 2v_i^k \end{aligned}$$

por supuesto con

$$r \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

5.2. Algoritmo propuesto por Herrera

5.2.1. Discretización problema ecuación de onda

Recordando la forma de proceder, uno divide el dominio espacial y temporal en $n - 1$ y $m - 1$ segmentos de longitud Δx y Δt cada uno empleando n y m nodos respectivamente, es decir

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n - 1} \quad \text{y} \quad \Delta t = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{m - 1}$$

produce

$$\begin{aligned} X = [x_{\min}, x_{\max}] &\rightarrow x_0 \equiv x_{\min} < x_1 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} \equiv x_{\max}, \\ T = [t_{\min}, t_{\max}] &\rightarrow t_0 \equiv t_{\min} < t_1 < \dots < t_{m-2} < t_{m-1} \equiv t_{\max}. \end{aligned}$$

Por otro lado de la discusión tiene uno

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} r^2 u_{i-1}^{k+1} + \left(1 + \frac{1}{3} r^2\right) u_i^{k+1} - \frac{1}{6} r^2 u_{i+1}^{k+1} &= \frac{1}{3} r^2 u_{i-1}^k + \left(1 - \frac{2}{3} r^2\right) u_i^k + \frac{1}{3} r^2 u_{i+1}^k + \Delta t v_i^k \\ v_i^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t} u_i^{k+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 u_{i-1}^k + \frac{1}{\Delta t} (r^2 - 3) u_i^k - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 u_{i+1}^k - 2v_i^k \end{aligned}$$

para $i = 0, 1, \dots, n - 1$ y $k = 0, 1, \dots, m - 1$. Como uno ve más adelante, requiere uno hacer ajustes en subíndices. Desarrollando para el dominio espacial el esquema asociado a u conduce a n ecuaciones con n incógnitas (de 0 a $n - 1$)

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{6}r^2u_{-1}^{k+1} + (1 + \frac{1}{3}r^2)u_0^{k+1} - \frac{1}{6}r^2u_1^{k+1} &= \frac{1}{3}r^2u_{-1}^k + (1 - \frac{2}{3}r^2)u_0^k + \frac{1}{3}r^2u_1^k + \Delta tv_0^k \\
 -\frac{1}{6}r^2u_0^{k+1} + (1 + \frac{1}{3}r^2)u_1^{k+1} - \frac{1}{6}r^2u_2^{k+1} &= \frac{1}{3}r^2u_0^k + (1 - \frac{2}{3}r^2)u_1^k + \frac{1}{3}r^2u_2^k + \Delta tv_1^k \\
 &\vdots \\
 -\frac{1}{6}r^2u_{i-1}^{k+1} + (1 + \frac{1}{3}r^2)u_i^{k+1} - \frac{1}{6}r^2u_{i+1}^{k+1} &= \frac{1}{3}r^2u_{i-1}^k + (1 - \frac{2}{3}r^2)u_i^k + \frac{1}{3}r^2u_{i+1}^k + \Delta tv_i^k \\
 &\vdots \\
 -\frac{1}{6}r^2u_{n-3}^{k+1} + (1 + \frac{1}{3}r^2)u_{n-2}^{k+1} - \frac{1}{6}r^2u_{n-1}^{k+1} &= \frac{1}{3}r^2u_{n-3}^k + (1 - \frac{2}{3}r^2)u_{n-2}^k + \frac{1}{3}r^2u_{n-1}^k + \Delta tv_{n-2}^k \\
 -\frac{1}{6}r^2u_{n-2}^{k+1} + (1 + \frac{1}{3}r^2)u_{n-1}^{k+1} - \frac{1}{6}r^2u_n^{k+1} &= \frac{1}{3}r^2u_{n-2}^k + (1 - \frac{2}{3}r^2)u_{n-1}^k + \frac{1}{3}r^2u_n^k + \Delta tv_{n-1}^k
 \end{aligned}$$

lo cual puede uno reescribir de manera matricial como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_c & a_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_\ell & a_c & a_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_\ell & a_c & a_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_\ell & a_c & a_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_\ell & a_c \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u_0^{k+1} \\ u_1^{k+1} \\ \vdots \\ u_i^{k+1} \\ \vdots \\ u_{n-2}^{k+1} \\ u_{n-1}^{k+1} \end{pmatrix}}_{u^{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_c & b_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_\ell & b_c & b_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_\ell & b_c & b_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_\ell & b_c & b_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_\ell & b_c \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} u_0^k \\ u_1^k \\ \vdots \\ u_i^k \\ \vdots \\ u_{n-2}^k \\ u_{n-1}^k \end{pmatrix}}_{u^k} + \Delta t \underbrace{\begin{pmatrix} v_0^k \\ v_1^k \\ \vdots \\ v_i^k \\ \vdots \\ v_{n-2}^k \\ v_{n-1}^k \end{pmatrix}}_{v^k} + r^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6}u_{-1}^{k+1} + \frac{1}{3}u_{-1}^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{6}u_n^{k+1} + \frac{1}{3}u_n^k \end{pmatrix}$$

donde

$$\boxed{a_\ell = -\frac{1}{6}r^2} \quad \boxed{a_c = 1 + \frac{1}{3}r^2} \quad \boxed{a_r = -\frac{1}{6}r^2} \quad \text{y} \quad \boxed{b_\ell = \frac{1}{3}r^2} \quad \boxed{b_c = 1 - \frac{2}{3}r^2} \quad \boxed{b_r = \frac{1}{3}r^2}$$

El tercer sumando es simplificado a cero pues son los elementos no definidos en la malla espacial. Empleando notación matricial tiene uno

$$\boxed{\underline{A}u^{k+1} = \underline{B}u^k + \Delta t\underline{v}^k}$$

para $k = 0, 1, \dots, m - 2$. Pues con $k = m - 1$ obtiene uno Au^m del lado izquierdo de la expresión, el cual no está en la malla temporal. Análogamente desarrollando el esquema para v tiene uno un sistema de n ecuaciones con n incógnitas (de 0 a $n - 1$) en términos de elementos calculables por el esquema anterior

Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales un juegan papel importante en el primer paso del esquema numérico, pues es punto de partida para posteriores cálculos. Por ello tiene uno

- para **posición** inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x) \rightarrow u_i^0 = \varphi_i \rightarrow \underline{u}^0 = \underline{\varphi}$$

- para **velocidad** inicial

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \rightarrow v_i^0 = \psi_i \rightarrow \underline{v}^0 = \underline{\psi}$$

para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Para el primer paso temporal, es decir $k = 0$ tiene uno

$$\begin{aligned} \underline{A}u^1 &= \underline{B}u^0 + \Delta t \underline{v}^0 & \rightarrow & \underline{u}^1 = \underline{A}^{-1} (\underline{B}\underline{\varphi} + \Delta t \underline{\psi}) \\ \underline{v}^1 &= \frac{3}{\Delta t} \underline{u}^1 + \underline{C}u^0 - 2\underline{v}^0 & \rightarrow & \underline{v}^1 = \frac{3}{\Delta t} \underline{A}^{-1} (\underline{B}\underline{\varphi} + \Delta t \underline{\psi}) + \underline{C}\underline{\varphi} - 2\underline{\psi} \end{aligned}$$

y para $k = 1, 2, \dots, n - 2$ emplea uno el mismo algoritmo.

5.2.2. Error de truncamiento y consistencia algoritmo propuesto por Herrera

Uno define el error de truncamiento para el esquema propuesto por Herrera como

$$TE \equiv L^{\Delta t} - R_{\Delta x}$$

con

$$L^{\Delta t}u = 6 \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 (u_i^{k+1} - u_i^k) - \frac{6}{\Delta t} v_i^k$$

y

$$R_{\Delta x}u = \left(c \frac{1}{\Delta x} \right)^2 (u_{i-1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i+1}^{k+1}) + 2 \left(c \frac{1}{\Delta x} \right)^2 (u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k)$$

para u , mientras que

$$L^{\Delta t}v = \frac{1}{\Delta t} (2v_i^{k+1} + 4v_i^k) - \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 6(u_i^{k+1} - u_i^k)$$

y

$$R_{\Delta x}v = - \left(c \frac{1}{\Delta x} \right)^2 (u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k)$$

para v . Tras substituir las aproximaciones respectivas en el lado izquierdo y derecho asociados a u obtiene uno

$$L^{\Delta t}u = \frac{6}{\Delta t} u_t - \frac{6}{\Delta t} v + 3u_{tt} + (\Delta t)u_{ttt} + \frac{(\Delta t)^2}{4} u_{tttt} + \frac{(\Delta t)^3}{20} u_{ttttt} + \mathcal{O}([\Delta t]^4)$$

y

$$\begin{aligned} R_{\Delta x}u &= c^2 [3u_{xx} + \frac{(\Delta x)^2}{4} u_{xxx} + (\Delta t)u_{txx} + \frac{(\Delta t)(\Delta x)^2}{12} u_{txxx} + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{ttxx} \\ &+ \frac{(\Delta t)^2(\Delta x)^2}{24} u_{ttxxx} + \frac{(\Delta t)^3}{6} u_{tttxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4)] \end{aligned}$$

respectivamente. Efectuar $L^{\Delta t} - R_{\Delta x}$, considerando $u_t = v$, $u_{ttt} = c^4 u_{xxx}$ y simplificando términos obtiene uno

$$\begin{aligned}
 TE(u) &= \frac{(\Delta t)^2}{4} u_{tttt} + \frac{(\Delta t)^3}{20} u_{ttttt} - c^2 \left[\frac{(\Delta x)^2}{4} u_{xxxx} + \frac{(\Delta t)(\Delta x)^2}{12} u_{txxxx} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tttx} + \frac{(\Delta t)^2(\Delta x)^2}{24} u_{ttxxx} + \frac{(\Delta t)^3}{6} u_{tttxx} \right] + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \\
 &= \frac{1}{4} c^2 u_{xxxx} [(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2] + \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial}{\partial t} (c^2 u_{xxxx}) \left[\frac{(c\Delta t)^2}{5} - \frac{(\Delta x)^2}{3} \right] \\
 &\quad - c^4 \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{xxxx} - c^2 \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{\partial}{\partial t} (c^2 u_{xxxx}) + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \\
 &= -\frac{1}{4} c^2 u_{xxxx} [(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2] - \frac{\Delta t}{20} \frac{\partial}{\partial t} (c^2 u_{xxxx}) \left[\frac{7}{3} (c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \right] + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4)
 \end{aligned}$$

por lo que recortando términos obtiene uno

$$\boxed{TE(u) = -\frac{1}{4} c^2 u_{xxxx} [(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2] - \frac{\Delta t}{20} \frac{\partial}{\partial t} (c^2 u_{xxxx}) \left[\frac{7}{3} (c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \right] + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4)}$$

así tiene uno orden de truncamiento para u de $\mathcal{O}([\Delta x]^2) + \mathcal{O}([\Delta t]^2)$. Por otro lado obtiene uno tras substituir aproximaciones respectivas para v en lado izquierdo

$$\begin{aligned}
 L^{\Delta t} v &= -\frac{6}{\Delta t} u_t + \frac{6}{\Delta t} v - 3u_{tt} + 2v_t \\
 &\quad - (\Delta t) u_{ttt} + (\Delta t) v_{tt} - \frac{(\Delta t)^2}{4} u_{tttt} + \frac{(\Delta t)^2}{3} v_{ttt} \\
 &\quad - \frac{(\Delta t)^3}{20} u_{ttttt} + \frac{(\Delta t)^3}{12} v_{tttt} + \mathcal{O}([\Delta t]^4)
 \end{aligned}$$

y

$$R_{\Delta x} v = -c^2 u_{xx} - c^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^4)$$

Efectuar $L^{\Delta t} - R_{\Delta x}$ y considerar $u_t = v$ reduce expresión a

$$\begin{aligned}
 TE(v) &= -\frac{6}{\Delta t} u_t + \frac{6}{\Delta t} v - 3u_{tt} + 2v_t - (\Delta t) u_{ttt} + (\Delta t) v_{tt} - \frac{(\Delta t)^2}{4} u_{tttt} + \frac{(\Delta t)^2}{3} v_{ttt} \\
 &\quad - \frac{(\Delta t)^3}{20} u_{ttttt} + \frac{(\Delta t)^3}{12} v_{tttt} + c^2 u_{xx} + c^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \\
 &= -\frac{(\Delta t)^2}{4} u_{tttt} + \frac{(\Delta t)^2}{3} v_{ttt} - \frac{(\Delta t)^3}{20} u_{ttttt} + \frac{(\Delta t)^3}{12} v_{tttt} + c^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4) \\
 &= \frac{1}{12} c^2 u_{xxxx} [(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2] + \frac{1}{30} (\Delta t)^3 u_{ttttt} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4)
 \end{aligned}$$

y por ello

$$\boxed{TE(v) = \frac{1}{12} c^2 u_{xxxx} [(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2] + \frac{1}{30} (\Delta t)^3 u_{ttttt} + \mathcal{O}([\Delta x]^4) + \mathcal{O}([\Delta t]^4)}$$

así tiene uno orden de truncamiento para v de $\mathcal{O}([\Delta x]^2) + \mathcal{O}([\Delta t]^2)$.

5.2.3. Estabilidad algoritmo propuesto Herrera

Considerar

$$u(x, t) = A(t)e^{Iwx} \quad \text{y} \quad v(x, t) = B(t)e^{Iwx}$$

cuya discretización es

$$u_i^k = A^k e^{Iwi\Delta x} \quad y \quad v_i^k = B^k e^{Iwi\Delta x}$$

substituir en algoritmo propuesto por Herrera

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}r^2 u_{i-1}^{k+1} + (1 + \frac{1}{3}r^2)u_i^{k+1} - \frac{1}{6}r^2 u_{i+1}^{k+1} &= \frac{1}{3}r^2 u_{i-1}^k + (1 - \frac{2}{3}r^2)u_i^k + \frac{1}{3}r^2 u_{i+1}^k + \Delta t v_i^k \\ v_i^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t} u_i^{k+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 u_{i-1}^k + \frac{1}{\Delta t} (r^2 - 3)u_i^k - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 u_{i+1}^k - 2v_i^k \end{aligned}$$

para u obtiene uno

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{6}r^2 A^{k+1} e^{Iw(i-1)\Delta x} + (1 + \frac{1}{3}r^2)A^{k+1} e^{Iwi\Delta x} - \frac{1}{6}r^2 A^{k+1} e^{Iw(i+1)\Delta x} \\ &= \frac{1}{3}r^2 A^k e^{Iw(i-1)\Delta x} + (1 - \frac{2}{3}r^2)A^k e^{Iwi\Delta x} + \frac{1}{3}r^2 A^k e^{Iw(i+1)\Delta x} + \Delta t B^k e^{Iwi\Delta x} \end{aligned}$$

y para v

$$\begin{aligned} B^{k+1} e^{Iwi\Delta x} &= \frac{3}{\Delta t} A^{k+1} e^{Iwi\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 A^k e^{Iw(i-1)\Delta x} \\ &+ \frac{1}{\Delta t} (r^2 - 3)A^k e^{Iwi\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 A^k e^{Iw(i+1)\Delta x} - 2B^k e^{Iwi\Delta x} \end{aligned}$$

reducir términos en la ecuación para u conduce a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}r^2 A^{k+1} e^{-Iw\Delta x} + (1 + \frac{1}{3}r^2)A^{k+1} - \frac{1}{6}r^2 A^{k+1} e^{Iw\Delta x} &= \frac{1}{3}r^2 A^k e^{-Iw\Delta x} + (1 - \frac{2}{3}r^2)A^k + \frac{1}{3}r^2 A^k e^{Iw\Delta x} + \Delta t B^k \\ (1 + \frac{1}{3}r^2)A^{k+1} - \frac{1}{3}r^2 A^{k+1} \cos w\Delta x &= \frac{2}{3}r^k A^k \cos w\Delta x + (1 - \frac{2}{3}r^2)A^k + \Delta t B^k \\ A^{k+1}(1 + \frac{1}{3}r^2(1 - \cos w\Delta x)) &= A^k(1 - \frac{2}{3}r^2(1 - \cos w\Delta x)) + \Delta t B^k \\ A^{k+1}(1 + \frac{2}{3}r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) &= A^k(1 - \frac{4}{3}r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) + \Delta t B^k \end{aligned}$$

de donde uno obtiene

$$\boxed{A^{k+1}(3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) = A^k(3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) + B^k(3\Delta t)}$$

por otro lado reducir términos en v conduce a

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t} A^{k+1} + \frac{1}{\Delta t} (r^2 - 3)A^k - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 A^k (e^{-Iw\Delta x} + e^{Iw\Delta x}) - 2B^k \\ B^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t} A^{k+1} + \frac{1}{\Delta t} (r^2 - 3)A^k - \frac{1}{\Delta t} r^2 A^k \cos w\Delta x - 2B^k \\ B^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t} A^{k+1} + \frac{1}{\Delta t} r^2 A^k (1 - \cos w\Delta x) - \frac{3}{\Delta t} A^k - 2B^k \\ B^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t} A^{k+1} + \frac{2}{\Delta t} r^2 A^k \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x - \frac{3}{\Delta t} A^k - 2B^k \end{aligned}$$

de donde obtiene uno

$$\boxed{3A^{k+1} - \Delta t B^{k+1} = A^k(3 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) + 2\Delta t B^k}$$

reordenar ambas expresiones lleva a

$$\begin{pmatrix} 3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x & 0 \\ 3 & -\Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{k+1} \\ B^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x & 3\Delta t \\ 3 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x & 2\Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k \\ B^k \end{pmatrix}$$

resolviendo para nivel $k + 1$

$$\begin{pmatrix} A^{k+1} \\ B^{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{-\Delta t(3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x)} \begin{pmatrix} -\Delta t & 0 \\ -3 & 3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x & 3\Delta t \\ 3 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x & 2\Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k \\ B^k \end{pmatrix}$$

simplificado esto es

$$\begin{pmatrix} A^{k+1} \\ B^{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{-\Delta t(3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x)} \begin{pmatrix} -(\Delta t)(3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) & -3(\Delta t)^2 \\ 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x(3 - r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) & -(\Delta t)(3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k \\ B^k \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} A^{k+1} \\ B^{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3-4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3+2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x} & \frac{3\Delta t}{3+2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x} \\ -\frac{4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x(3-r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x)}{\Delta t(3+2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x)} & \frac{3-4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3+2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x} \end{pmatrix}}_R \begin{pmatrix} A^k \\ B^k \end{pmatrix}$$

con traza y determinante

$$\text{tr}(R) = 2\left(\frac{3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}\right) \quad \text{y} \quad \det(R) = 1$$

por lo que el polinomio característico asociado es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(R)\lambda + \det(R) \quad \rightarrow \quad \boxed{p(\lambda) = \lambda^2 - 2\left(\frac{3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}\right)\lambda + 1}$$

resolviendo para λ

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\text{tr}(R) \pm \sqrt{\text{tr}(R)^2 - 4 \det(R)}}{2} \\ &= \frac{2\left(\frac{3-4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3+2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}\right) \pm \sqrt{\left(-2\left(\frac{3-4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3+2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}\right)\right)^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x} \pm \sqrt{\left(\frac{3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}\right)^2 - 1} \end{aligned}$$

llega uno a

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x} \pm \sqrt{\left(\frac{3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}\right)^2 - 1}}$$

Si con el radicando ocurre

$$-1 < \frac{3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x}{3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x} < 1$$

obtiene uno dos valores propios complejos conjugados con parte real acotada entre menos uno y uno, y por tanto la matriz R es diagonalizable y acotada. Para determinar las condiciones parte uno de

$$-(3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) < 3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x < (3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x)$$

Para el lado izquierdo de la desigualdad

$$\begin{aligned}
 -3 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x &< 3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \\
 -2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x &< 6 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \\
 0 &< 6 - 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \\
 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x &< 6 \\
 r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x &< 3
 \end{aligned}$$

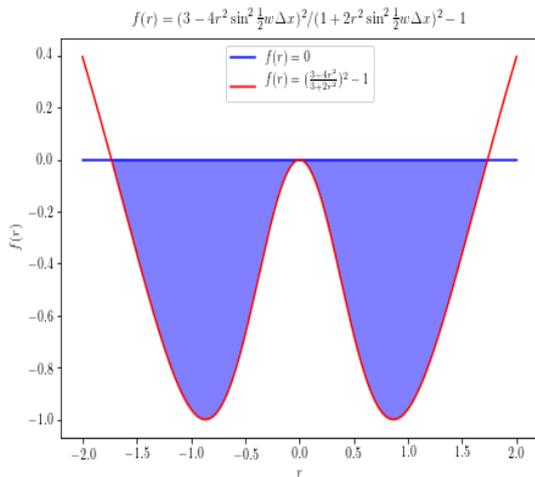
debido a la restricción de la función seno, la desigualdad anterior sólo es cumplida si

$$r^2 < 3$$

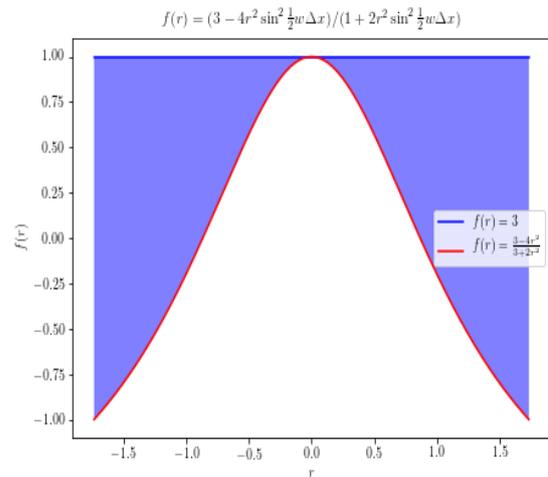
mientras que el lado derecho es ya cumplido

$$\begin{aligned}
 3 - 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x &< (3 + 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x) \\
 -4r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x &< 2r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x \\
 -6r^2 \sin^2 \frac{1}{2}w\Delta x &< 0
 \end{aligned}$$

lo cual ocurre para cualquier r .



(a) Función radicando del esquema propuesto por Herrera yace en la zona azul acotada por las funciones donde el seno asume cero y uno.



(b) Función fuera del radicando del esquema propuesto Herrera yace en la zona azul acotada por las funciones donde el seno asume cero y uno.

Figura 5.1: Regiones donde esquema Herrera es estable.

Uno puede corroborar este hecho con Figura 5.1a, la cual muestra la función radicando asumiendo valores cero (azul) y uno (rojo) para la función seno. Por ello si esta función asume valores negativos debe cumplir

$$-\sqrt{3} < r < \sqrt{3}$$

necesariamente. Y con esta restricción para r obtiene uno valores complejos con parte real acotada entre menos uno y uno, ver Figura 5.1b. De esta manera obtiene uno dos valores propios complejos con parte real menor a uno y por ello

$$|\lambda_1| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\lambda_2| \leq 1$$

Por tanto

$$\begin{aligned} R &= P\Lambda P^{-1} \\ R^k &= \underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \dots (P\Lambda P^{-1}) \dots (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})}_{k \text{ veces}} \\ R^k &= P\Lambda^k P^{-1} \\ \|R^k\| &\leq \|P\| \|\Lambda^k\| \|P^{-1}\| \end{aligned}$$

con R matriz cuyas entradas en la diagonal principal son los valores propios respectivamente λ_1 y λ_2 . P es una matriz no singular cuyas columnas son los vectores propios asociados respectivamente a los valores propios λ_1 y λ_2 . De esta forma

$$\|R^k\| \leq C$$

y por los cálculos anteriores, tiene uno

$$\boxed{c \frac{\Delta t}{\Delta x} < \sqrt{3}}$$

así el esquema propuesto por Herrera es **condicionalmente estable**.

5.2.4. Convergencia algoritmo propuesto por Herrera

Esquema propuesto por Herrera cumple

- **consistencia** con ecuación de onda lineal
- **estabilidad** siempre que

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} < \sqrt{3}$$

así, por el *teorema de Lax-Richtmyer* es convergente a la solución de la ecuación de onda.

Bibliografía

- [1] Herrera Ismael, Algorithm implicit in time for the solution of hyperbolic systems of equations, *To be submitted*.
- [2] Wen Yih Sun, Instability in Leapfrog and Forward-Backward Schemes [<http://docs.lib.purdue.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1157&context=easpubs>], Department of Earth, Atmospheric and Planetary Sciences, Faculty Publications, Purdue University, 2009, 1497 - 1500.
- [3] Stability and Leapfrog Scheme [https://math.mit.edu/classes/18.086/2014/files/Stability_Leapfrog.pdf], Massachusetts Institute of Technology, 2014, 1-2.
- [4] Convergence, Consistency and Stability [<http://web.stanford.edu/class/cme306/Discussion/Discussion1.pdf>], Stanford University, 1-4

Capítulo 6

Implementación

Los lenguajes de programación orientados a objetos son herramientas muy poderosas y generosas que permiten realizar múltiple numero de tareas de manera más eficiente y dinámica a comparación de los lenguajes clásicos de cómputo. `python` es un lenguaje de programación orientado a objetos que ha crecido rápidamente y ha ganado el respeto y aprecio en muchas áreas, tales como ciencia de datos (**data science**), aprendizaje automático (**machine learning**) e investigación académica así como en sectores donde es empleado y desarrollado, como en la industria eléctrica, de manufactura, desarrollo de *software*, desarrollo de páginas web, sectores gubernamentales y universidades. No sorprende que cada día `python` sea complementado y desarrollado con nuevas funciones, plataformas y librerías debido a la demanda del poderoso lenguaje y a su eficiencia al resolver problemas. De las plataformas que emplean `python`, `jupyter notebook` es la opción más empleada a nivel académico debido a (entre muchas otras propiedades) la facilidad de integrar **en un solo documento**, texto (e.g. HTML, markdown, \LaTeX) con código de programación, permitiendo obtener un documento rico en contenido y de calidad muy superior.

Consecuentemente las implementaciones en este trabajo son realizadas con `python` en `jupyter notebook`. Por ello cualquier programa aquí presentado tiene las siguientes librerías importadas con los respectivos módulos en ella ya predeterminados

- `numpy`
- `matplotlib`
 - `pyplot`
 - `animation`
- `mpl_toolkits`
 - `mplot3d`
- `scipy`
 - `linalg`
- `sympy`

`numpy` es un paquete predeterminado para cómputo científico de `python`, `matplotlib` es una librería de `python` para gráficos 2D, la cual produce figuras de alta calidad en distintos tipos de formatos así como ambientes interactivos a través de plataformas predeterminadas, dispone también de una cantidad generosa de módulos integrados muy poderosos, no obstante para los propósitos aquí buscados emplea uno sólo dos de ellos, a saber, `pyplot` y `animation`, módulo con funciones específicas que permiten generar una gran cantidad de distintas gráficas rápidamente y módulo que permite generar animaciones en tiempo real, respectivamente. `mpl_toolkits` es una colección de funciones con aplicaciones específicas con el fin de extender aquellas en `matplotlib`. El módulo `mplot3d` permite trabajar en tres dimensiones en el ambiente de `matplotlib`, en particular mediante `Axes3D`. Por otro lado `scipy` es un ecosistema en sí mismo basado en `python` destinado a uso matemático, científico e ingenieril, razón por la cual el módulo `linalg` es empleado. Finalmente, librería `sympy` permite trabajar con lenguaje simbólico y a su vez combinar dichos cálculos con los cálculos numéricos.

6.1. Problemas a resolver

Uno considera los siguientes problemas para resolver con el esquema CTCS, Crank Nicolson y el propuesto por Herrera:

1.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= x(2 - x) & 0 < x < 2 \\ u_t(x, 0) &= 0 & 0 < x < 2 \\ u(0, t) &= -t^2 & t > 0 \\ u(2, t) &= -t^2 & t > 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} & 0 < x < 3, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x) & 0 < x < 3 \\ u_t(x, 0) &= 0 & 0 < x < 3 \\ u(0, t) &= t^3 & t > 0 \\ u(3, t) &= t^3 & t > 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx} & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= x^2(2 - x) & 0 < x < 2 \\ u_t(x, 0) &= 0 & 0 < x < 2 \\ u(0, t) &= 18t^2 & t > 0 \\ u(2, t) &= -36t^2 & t > 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 16u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= x \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) &= 4x & 0 < x < 1 \\ u(0, t) &= 16\pi t^2 & t > 0 \\ u(1, t) &= -16\pi t^2 + 4t & t > 0 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= x(2 - x)^2 & 0 < x < 2 \\ u_t(x, 0) &= x^2 & 0 < x < 2 \\ u(0, t) &= -4t^2 & t > 0 \\ u(2, t) &= 2t^2 + 4t & t > 0 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx} & 0 < x < 4, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= x \sin(\pi x) & 0 < x < 4 \\ u_t(x, 0) &= x(x - 4) & 0 < x < 4 \\ u(0, t) &= 9\pi t^2 & t > 0 \\ u(2, t) &= 9\pi t^2 & t > 0 \end{aligned}$$

notar que cada dominio yace en un intervalo no simétrico y las condiciones de compatibilidad deben ser satisfechas por cada problema. El programa siguiente calcula la solución analítica después de comprobar si en cada problema las condiciones de compatibilidad son satisfechas empleando la librería `sympy`.

6.2. Procedimiento

A continuación resuelve uno de manera siguiente

1. Solución exacta (*d'Alembert*) en la región inferior para los seis problemas
2. Comprobación de condiciones de compatibilidad para los seis problemas
3. Solución exacta por regiones
 - Región izquierda
 - Región derecha
 - Región superior

para el primer problema

4. Algoritmos CTCS, Crank Nicolson y Herrera para el primer problema

En los pasos 3 y 4 es resuelto, desplegado y documentado el primer problema. El resto puede uno resolverlos de la misma forma cambiando los datos de entrada.

6.3. Solución exacta

Uno importa la librería completa, declara las variables y funciones a utilizar en el programa.

```
from sympy import *
x, t, s = symbols('x t s')
c = Symbol('c', positive = True)
phi, psi = symbols('phi psi', cls=Function)
a, b = symbols('a b', cls=Function)
```

Posteriormente carga uno los datos del problema, es decir, la posición inicial φ , la velocidad inicial ψ , las condiciones de frontera izquierda $u(0,t)$ y derecha $u(L,0)$, el extremo izquierdo x_{\min} y el extremo derecho x_{\max} del intervalo así como la velocidad de propagación c . Siguiendo ese orden tiene uno

```
# problem data
phis = [s*(2-s), sin(pi*s), (2-s)*s**2, s*sin(pi*s), s*(2-s)**2, s*sin(pi*s)]
psis = [0, 0, 0, 4*s, s**2, s*(s-4)]
lefts = [-t**2, t**3, 18*t**2, 16*pi*t**2, -4*t**2, 9*pi*t**2]
rights = [-t**2, t**3, -36*t**2, -16*pi*t**2 + 4*t, 2*t**2 + 4*t, 9*pi*t**2]
xmins = [0,0,0,0,0,0]
xmaxs = [2,3,2,1,2,4]
cs = [1,2,3,4,1,3]
```

Puesto que tiene uno siete variables usa uno en el programa las variables $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ para referir a cada uno de los datos enlistados y reserva k_7 para la numeración de los seis problemas en las impresiones. Así crea uno un ciclo `for` junto con un arreglo (`dalemberts`) vacío para guardar la solución **d'Alembert** de cada problema en la región S (sur), misma que es utilizada para calcular la solución en las regiones O (este), W (oeste) y N (norte). Uno define las rectas características, la posición y velocidad iniciales, así como la fórmula *d'Alembert*.

```

dalemberts = []
for k0,k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7 in zip(phis,psis,lefts,rights,xmins,xmaxs,cs,range(6)):
    # characteristics
    forward = x - c*t
    backward = x + c*t
    # u(x,0) = phi(x)
    ph = k0
    # u_t(x,0) = psi(x)
    ps = k1

    # (1/2)( phi(x-ct) + phi(x+ct) )
    eins = Rational(1,2)*( ph.replace(s,forward) + ph.replace(s,backward) )
    # (1/(2c))( integrate(psi,(s,x-ct,x+ct)) )
    zwei = Rational(1,2)*(1/c)*integrate(ps,(s,forward,backward))
    # + (1/(2c))( integrate(psi,(s,x-ct,x+ct)) )
    solution = simplify((eins) + expand(zwei))
    
```

Ahora define uno las condiciones de frontera izquierda y derecha así como sus derivadas prescritas por las condiciones de compatibilidad.

```

# u(-L,t) = a(t) and u(L,t) = b(t)
left, right = k2, k3
# u'(-L,t) = a'(t) and u(L,t) = b'(t)
left1, right1 = left.diff(t), right.diff(t)
# u''(-L,t) = a''(t) and u(L,t) = b''(t)
left2, right2 = left1.diff(t), right1.diff(t)

# phi'(x)
ph1 = ph.diff(s)
# phi''(x)
ph2 = ph1.diff(s)
    
```

Determinadas una vez las derivadas respectivas, requiere uno evaluar esas derivadas en los extremos del intervalo L como determinan las condiciones de compatibilidad uno, dos y tres reescritas en el programa como:

1. Primera condición de compatibilidad

$$\boxed{\varphi(0) - a(0) = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{\varphi(L) - b(0) = 0}$$

2. Segunda condición de compatibilidad

$$\boxed{\psi(0) - a'(0) = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{\psi(L) - b'(0) = 0}$$

3. Tercera condición de compatibilidad

$$\boxed{c^2\varphi''(0) - a''(0) = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{c^2\varphi''(L) - b''(0) = 0}$$

lo cual es realizado para cada problema dentro del ciclo `for` definiendo las derivadas ya calculadas como funciones para evaluar en. La función `Lambda` hace posible esto, por ello que define uno para cada derivada calculada una función y por supuesto si las condiciones de compatibilidad son satisfechas debe obtener uno cero.

```

# functions
phi, phi1, phi2 = Lambda(s,ph), Lambda(s,ph1), Lambda(s,ph2)
psi = Lambda(s,ps)
dalembert = Lambda((x,t,c),solution)
dalemberts.append((solution).replace(c,k6))
a, a1, a2 = Lambda(t,left), Lambda(t,left1), Lambda(t,left2)
b, b1, b2 = Lambda(t,right), Lambda(t,right1), Lambda(t,right2)

print('\n Problem %s \n'%(k7+1))
# phi(0) = a(0) and phi(L) = b(0)
print(phi(k4) - a(0))
print(phi(k5) - b(0))
# psi(0) = a'(0) and psi(L) = b'(0)
print(psi(k4) - a1(0))
print(psi(k5) - b1(0))
# c^2 phi''(0) = a''(0) and c^2 phi''(L) = b''(0)
print(((k6)**2)*phi2(k4) - a2(0))
print(((k6)**2)*phi2(k5) - b2(0))

```

Tras correr este programa obtiene uno dos datos de salida, uno de ellos es el arreglo `dalemberts`, el cual guarda la solución exacta de cada problema calculada con los datos iniciales asignados,

```

[-t**2 - x**2 + 2*x,
 sin(pi*x)*cos(2*pi*t),
 -27*t**2*x + 18*t**2 - x**3 + 2*x**2,
 4*t*x + (4*t - x)*sin(pi*(4*t - x))/2 + (4*t + x)*sin(pi*(4*t + x))/2,
 t**3/3 + 3*t**2*x - 4*t**2 + t*x**2 + x**3 - 4*x**2 + 4*x,
 3*t**3 + t*x**2 - 4*t*x + (3*t - x)*sin(pi*(3*t - x))/2 + (3*t + x)*sin(pi*(3*t + x))/2]

```

el segundo es la comprobación de compatibilidad de las condiciones iniciales para cada problema enlistado, los datos de salida al respecto son

Problem 1
0
0
0
0
0
0
0
Problem 2
0
0
0
0
0
0
0
Problem 3
0
0
0
0
0
0
0
Problem 4
0
0
0
0
0
0
0
Problem 5
0
0
0
0
0
0
0
Problem 6
0
0
0
0
0
0
0

de esta forma las condiciones de compatibilidad son cumplidas para cada problema en la lista.

Regiones

Uno calcula ahora la solución exacta para cada región dentro del intervalo no simétrico. Para ello define uno C y L como la velocidad de propagación junto con la longitud del intervalo respectivamente e indicando $i=0$ (en este caso el primer problema) la solución del problema considerada

```
# first problem's solution
i = 0
# first problem's interval and speed
L, C = xmaxs[i], cs[i]
# display
L, C, simplify(dalemberts[i])
```

esto produce (para el primer problema)

$$(2, 1, -t^{**2} - x^{**2} + 2*x)$$

ahora calcula uno la solución exacta para la región izquierda, derecha y superior.

Región izquierda

Procediendo de forma análoga,

```
from sympy import *
x0, t0 = symbols('x_{0} t_{0}')
```

retomando puntos formantes del cuadrilátero característico en esta región

$$\begin{aligned} & A(x_0, t_0) \\ & B\left(\frac{1}{2}[(x_0 + ct_0) - kL], \frac{1}{2c}[(x_0 + ct_0) + kL]\right) \\ & C\left(\frac{1}{2}[-kL - (x_0 - ct_0)], \frac{1}{2c}[kL - (x_0 - ct_0)]\right) \\ & D\left(0, \frac{1}{c}[-(x_0 - ct_0)]\right) \end{aligned}$$

definiendo para $k = 0$

```
Ax1, Atl = x0, t0
Bx1, Btl = Rational(1,2)*(x0+C*t0), Rational(1,2*C)*(x0+C*t0)
Cx1, Ctl = Rational(1,2)*(-(x0-C*t0)), Rational(1,2*C)*(-(x0-C*t0))
Dx1, Dtl = 0, -Rational(1,C)*(x0-C*t0)
```

con salidas

```
(x_{0}, t_{0})
(t_{0}/2 + x_{0}/2, t_{0}/2 + x_{0}/
(t_{0}/2 - x_{0}/2, t_{0}/2 - x_{0}/2)
(0, t_{0} - x_{0})
```

donde la longitud del intervalo L y velocidad c fueron substituidas. Ahora, de

$$u(A) = u(B) + a(D) - u(C)$$

donde a es la condición de frontera izquierda

```
# u(A) + u(C) = u(B) + u(D)
# u(A) = u(B) + a(D) - u(C)
uB = (dalemberts[i].replace(x,Bx1)).replace(t,Btl)
aD = lefts[i].replace(t,Dtl)
uC = (dalemberts[i].replace(x,Cx1)).replace(t,Ctl)
uAleft = uB + aD - uC
leftuse = (simplify(uAleft).replace(x0,x)).replace(t0,t)
leftuse
```

llega uno a

$$-t^{**2} - x^{**2} + 2*x$$

Región derecha

Para este caso tiene uno

$$\begin{aligned}
 & A(x_0, t_0) \\
 & B(L, \frac{1}{c}[(x_0 + ct_0) - L]) \\
 & C(\frac{1}{2}[(k + 3)L - (x_0 + ct_0)], \frac{1}{2c}[(x_0 + ct_0) + L(k - 1)]) \\
 & D(\frac{1}{2}[(x_0 - ct_0) + (k + 1)L], \frac{1}{2c}[(k + 1)L - (x_0 - ct_0)])
 \end{aligned}$$

para $k = 0$ esto es

```

Axr, Atr = x0, t0
Bxr, Btr = L, Rational(1,C)*(x0 + C*t0-L)
Cxr, Ctr = Rational(1,2)*(3*L - (x0+C*t0)), Rational(1,2*C)*(x0+C*t0-L)
Dxr, Dtr = Rational(1,2)*(x0-C*t0+L), Rational(1,2*C)*(L - (x0 - C*t0))
    
```

con salida

```

(x_{0}, t_{0})
(2, t_{0} + x_{0} - 2)
(-t_{0}/2 - x_{0}/2 + 3, t_{0}/2 + x_{0}/2 - 1)
(-t_{0}/2 + x_{0}/2 + 1, t_{0}/2 - x_{0}/2 + 1)
    
```

de nuevo por

$$u(A) = b(B) + u(D) - u(C)$$

con b la condición de frontera derecha

```

# u(A) + u(C) = u(D) + u(B)
# u(A) = u(D) + b(B) - u(C)
uD = (dalemberts[i].replace(x,Dxr)).replace(t,Dtr)
bB = rights[i].replace(t,Btr)
uC = (dalemberts[i].replace(x,Cxr)).replace(t,Ctr)
uArigh = uD + bB - uC
rightuse = (simplify(uArigh).replace(x0,x)).replace(t0,t)
rightuse
    
```

llega uno a

$$-t^2 - x^2 + 2x$$

Región superior

Finalmente

$$\begin{aligned}
 & A(x_0, t_0) \\
 & B(\frac{1}{2}[x_0 + ct_0 - kL], \frac{1}{2c}[x_0 + ct_0 + kL]) \\
 & C(\frac{1}{2}L, \frac{1}{2c}[(2k + 1)L]) \\
 & D(\frac{1}{2}[(k + 1)L + (x_0 - ct_0)], \frac{1}{2c}[(k + 1)L - (x_0 - ct_0)])
 \end{aligned}$$

para $k = 0$ obtiene uno

```

Axu, Atu = x0, t0
Bxu, Btu = Rational(1,2)*(x0 + C*t0), (x0+C*t0)*Rational(1,2*C)
Cxu, Ctu = Rational(1,2)*L, Rational(1,2*C)*L
Dxu, Dtu = Rational(1,2)*(L + x0 - C*t0), Rational(1,2*C)*(L-(x0-C*t0))
    
```

con salidas

```
(x_{0}, t_{0})
(t_{0}/2 + x_{0}/2, t_{0}/2 + x_{0}/2)
(1, 1)
(-t_{0}/2 + x_{0}/2 + 1, t_{0}/2 - x_{0}/2 + 1)
```

retomando

$$u(A) = u(D) + u(B) - u(C)$$

tiene uno

```
# u(A) + u(C) = u(B) + u(D)
# u(A) = u(B) + u(D) - u(C)
uBup = (rightuse.replace(x,Bxu)).replace(t,Btu)
uDup = (leftuse.replace(x,Dxu)).replace(t,Dtu)
uCup = (dalemberts[i].replace(x,Cxu)).replace(t,Ctu)
uAup = expand(uBup) + expand(uDup) - expand(uCup)
(simplify(uAup).replace(x0,x)).replace(t0,t)
```

obteniendo

```
-t**2 - x**2 + 2*x
```

Solución exacta

Por último crea uno la función solución en la franja $0 < x < 2$ y $0 < t < 2$ divida por las rectas características $x - t = 0$ y $x + t = 2$ en cuatro regiones y definiendo para cada región los cálculos anteriores. Uno delimita la franja conforme a las rectas características en el plano definidas dentro de la función `fun` como las condiciones

```
# exact solution
def fun(x,t,k,c,L):
    u = np.zeros(len(x))
    # -----
    # oben links: x-c*t[k] <= 0
    # unten links: x-c*t[k] >= 0
    # oben rechts: x+c*t[k] >= L
    # unten rechts: x+c*t[k] <= L
    # -----
    # N: ol & or
    # S: ul & ur
    # O: or & ul
    # W: ol & ur
    # -----
```

posteriormente implementa uno las condiciones y secciona la franja

```
# N
con1 = (x-c*t[k] <= 0) & (x+c*t[k] >= L)
u[con1] = -1.0*t[k]**2 - 1.0*x[con1]**2 + 2.0*x[con1]
# S
con2 = (x-c*t[k] >= 0) & (x+c*t[k] <= L)
u[con2] = -1.0*t[k]**2 - 1.0*x[con2]**2 + 2.0*x[con2]
# O
con3 = (x+c*t[k] > L) & (x-c*t[k] > 0)
u[con3] = -1.0*t[k]**2 - 1.0*x[con3]**2 + 2.0*x[con3]
# W
con4 = (x-c*t[k] < 0) & (x+c*t[k] < L)
u[con4] = -1.0*t[k]**2 - 1.0*x[con4]**2 + 2.0*x[con4]
return u

# exact solution
UU = [fun(np.asarray(x),np.asarray(t),k,c0,L) for k in range(m)]
```

Esta función es incluida en las animaciones y en el cálculo del error.

6.4. Algoritmo

Uno comienza con la importación de las librerías y en el transcurso de la implementación indica uno la utilidad y el propósito de dichas paqueterías.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as ani
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from scipy import linalg
```

Primero trata uno la discretización de los dominios x y t . Debido a que uno no puede considerar simplemente $t > 0$ trabaja uno con $0 \leq t \leq \frac{L}{c}$. Uno emplea n nodos para dividir el dominio espacial en $n - 1$ segmentos de longitud Δx y m para dividir el espacio temporal en $m - 1$ segmentos de longitud Δt y pide uno imprimir tras concluir dicha discretización

```
# space
L = 2
xmin, xmax = 0, L
X = xmax - xmin
n = 501
dx = X/(n-1)
x = [k*dx for k in range(n)]
print('\n X = [%s,%s], n = %s, dx = %s \n'%(xmin,xmax,n,dx))

c0 = 1

# time
tmin, tmax = 0, L/c0
T = tmax - tmin
m = 5001
dt = T/(m-1)
t = [k*dt for k in range(m)]
print('\n T = [%s,%s], m = %s, dt = %s \n'%(tmin,tmax,m,dt))
```

En este paso define uno el número CFL como r y r^2 como R pues esto facilita los cálculos a la computadora, también crea uno las matrices `uctcs`, `ucn`, `uha`, las cuales almacenan los cálculos respecto a u para el algoritmo CTCS, Crank Nicolson y el propuesto por Herrera así como `vha` para el mismo con respecto a v y por su puesto pide uno imprimir al final el tamaño de las matrices.

```
# data
r = c0*(dt/dx)
R = r**2
print('\n R = %s, L/c = %s \n'%(R,xmax/c0))

# u matrix
uctcs = np.zeros([len(t),len(x)])
ucn = np.zeros([len(t),len(x)])
uha = np.zeros([len(t),len(x)])
print('\n Shape of uctcs: %s, ucn: %s, uha: %s \n\'
      %(np.shape(uctcs),np.shape(ucn),np.shape(uha)))

# v matrix
vha = np.zeros([len(t),len(x)])
print('\n Shape of vha: (%s,%s) \n'%(np.shape(vha)))
```

Define uno posteriormente las condiciones iniciales, posición y velocidad inicial para el tiempo $t = 0$ en cada una de las matrices definidas anteriormente `uctct[0, :]`, `ucn[0, :]`, `uha[0, :]` y `vha[0, :]` en cada punto de la discretización para la posición inicial $\varphi(x) = x(2 - x)$ y la velocidad inicial $\psi(x) = 0$:

```
# initial position
ip = [(2-x[i])*(x[i]) for i in range(n)]
uctcs[0,:] = ip
ucn[0,:] = ip
uha[0,:] = ip

# initial velocity
iv = [0 for k in range(n)]
vha[0,:] = iv
```

Uno implementa el esquema CTCS

$$\underline{u}^{k+1} = \underline{A}u^k - \underline{u}^{k-1}$$

donde

$$a_\ell = r^2 \quad a_c = 2(1 - r^2) \quad \text{y} \quad a_r = r^2$$

primero resuelve uno para $k = 0$ donde emplea uno la matriz vha como ψ junto con la condición en la frontera izquierda y derecha.

```
# central time central space
# k = 0
uctcs[1,1:-1] = R*uctcs[0,0:-2] + 2*(1-R)*uctcs[0,1:-1] + R*uctcs[0,2:] \
- (uctcs[0,1:-1] - dt*vha[0,1:-1])
uctcs[1,0] = -(t[1])**2
uctcs[1,-1] = -(t[1])**2
```

Para $k = 1, \dots, m - 2$ repite uno el procedimiento hasta el penúltimo elemento $k = m - 2$ pues es cuando $k + 1 = m - 2 + 1 = m - 1$, es decir, el último elemento. Notar que el lado derecho del esquema en ambos casos contiene los elementos a_ℓ , a_c y a_r ya premultiplicados.

```
# k = 1, ..., m-2
for k in range(1, len(t)-1):
    uctcs[k+1,1:-1] = R*uctcs[k,0:-2] + 2*(1-R)*uctcs[k,1:-1] + R*uctcs[k,2:] - uctcs[k-1,1:-1]
    uctcs[k+1,0] = -(t[k+1])**2
    uctcs[k+1,-1] = -(t[k+1])**2
```

Para el algoritmo Crank Nicolson tiene uno

$$\underline{A}u^{k+1} = 2u^k + \underline{B}u^{k-1}$$

con

$$a_\ell = -\frac{1}{2}r^2 \quad a_c = 1 + r^2 \quad a_r = -\frac{1}{2}r^2 \quad \text{y} \quad b_\ell = \frac{1}{2}r^2 \quad b_c = -(1 + r^2) \quad b_r = \frac{1}{2}r^2$$

Por ser un método implícito la implementación del algoritmo es ligeramente distinta a la del CTCS. Por tanto comienza uno creando las matrices A y B con la función definida para ello `matrixmaker`,

```
# matrix maker
def makematrix(a, iz, ce, de):
    newmatrix = np.zeros([a,a])
    for i in range(1,a):
        newmatrix[i,i-1] = iz
        newmatrix[i-1,i] = de
    for i in range(a):
        newmatrix[i,i] = ce
    return newmatrix
```

con las respectivas entradas tridiagonales definidas y la matriz identidad

```
# crank nicolson
# matrix A
acni, acnc, acnd = -0.5*R, 1 + R, -0.5*R
Acn = makematrix(n,acni,acnc,acnd)
# matrix B
bcni, bcnc, bcnd = 0.5*R, -(1+R), 0.5*R
Bcn = makematrix(n,bcni,bcnc,bcnd)
# matrix I (identity)
Icn = makematrix(n,0,1,0)
```

para el paso $k = 0$ tiene uno

$$\underline{u}^1 = \underline{A}^{-1} ((\underline{B} + 2\underline{I})\varphi - \Delta t \underline{B}\psi)$$

lo cual está ya especificado en la implementación junto con las condiciones de frontera.

```
# k = 0
ucn[1,:] = np.linalg.solve(Acn, (Bcn+2*Icn).dot(ucn[0,:]) - dt*(Bcn.dot(vha[0,:])))
ucn[1,0] = -(t[1])**2
ucn[1,-1] = -(t[1])**2
```

Como uno tiene que solucionar un sistema de la forma $Ax = b$ en cada paso importa uno de `linalg` el resolvidor `solve` predeterminado por `python`, uno puede especificar qué tipo de algoritmo usar para resolver/descomponer A , sin embargo aquí emplea uno el algoritmo predeterminado. Para $k = 1, \dots, m - 2$ retoma uno el algoritmo inicial.

```
# k = 1, ..., m-2
for k in range(1, len(t)-1):
    rhsucn = np.zeros(len(x))
    rhsucn[0] = -(t[k])**2
    rhsucn[-1] = -(t[k])**2
    rhsucn[1:-1] = bcni*ucn[k-1,0:-2] + bcnc*ucn[k-1,1:-1] + bcnd*ucn[k-1,2:] + 2*ucn[k,1:-1]
    ucn[k+1,:] = np.linalg.solve(Acn, rhsucn)
    ucn[k+1,0] = -(t[k+1])**2
    ucn[k+1,-1] = -(t[k+1])**2
```

Finalmente implementa uno el esquema propuesto por Herrera

$$\underline{A}\underline{u}^{k+1} = \underline{B}\underline{u}^k + \Delta t \underline{v}^k$$

con

$$a_\ell = -\frac{1}{6}r^2 \quad a_c = 1 + \frac{1}{3}r^2 \quad a_r = -\frac{1}{6}r^2 \quad \text{y} \quad b_\ell = \frac{1}{3}r^2 \quad b_c = 1 - \frac{2}{3}r^2 \quad b_r = \frac{1}{3}r^2$$

definiendo las matrices A y B como Aha y Bha respectivamente

```
# herrera's algorithm

# matrix A
ahai, ahac, ahad = -(1/6)*R, 1 + (1/3)*R, -(1/6)*R
Aha = makematrix(n,ahai,ahac,ahad)
# matrix B
bhai, bhac, bhad = (1/3)*R, 1 - (2/3)*R, (1/3)*R
Bha = makematrix(n,bhai,bhac,bhad)
```

así como

$$\underline{v}^{k+1} = \frac{3}{\Delta t} \underline{u}^{k+1} + \underline{C}\underline{u}^k - 2\underline{v}^k$$

con

$$c_\ell = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2 \quad c_c = \frac{1}{\Delta t} (r^2 - 3) \quad c_r = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t} r^2$$

definiendo C como Cha

```
# matrix C
chai, chac, chad = -0.5*(1/dt)*R, (1/dt)*(R-3), -0.5*(1/dt)*R
Cha = makematrix(n,chai,chac,chad)
```

de cálculos anteriores tiene uno

$$\underline{u}^1 = \underline{A}^{-1} (\underline{B}\varphi + \Delta t \underline{\psi})$$

$$\underline{v}^1 = \frac{3}{\Delta t} \underline{A}^{-1} (\underline{B}\varphi + \Delta t \underline{\psi}) + \underline{C}\varphi - 2\underline{\psi}$$

para $k = 0$, por tanto

```
# k = 0
uha[1,:] = np.linalg.solve(Aha,Bha.dot(uha[0,:])+dt*vha[0,:])
uha[1,0] = -(t[1])**2
uha[1,-1] = -(t[1])**2

vha[1,:] = (3/dt)*uha[1,:] + Cha.dot(uha[0,:]) - 2*vha[0,:]
```

mientras que para $k = 1, \dots, m - 2$ tiene uno

```
# k = 1, ..., m-2
for k in range(1,len(t)-1):
    rhsuha = np.zeros([len(x)])
    rhsuha[0] = -(t[k])**2
    rhsuha[-1] = -(t[k])**2
    rhsuha[1:-1] = bhai*uha[k,0:-2] + bhac*uha[k,1:-1] + bhad*uha[k,2:] + dt*vha[k,1:-1]
    uha[k+1,:] = np.linalg.solve(Aha,rhsuha)
    uha[k+1,0] = -(t[k+1])**2
    uha[k+1,-1] = -(t[k+1])**2

    rhsvha = np.zeros([len(x)])
    rhsvha[1:-1] = (3/dt)*uha[k+1,1:-1] - 2*vha[k,1:-1] + chai*uha[k,0:-2] \
    + chac*uha[k,1:-1] + chad*uha[k,2:]
    vha[k+1,:] = rhsvha
```

Para este caso obtiene uno como output:

```
X = [0,2], n = 501, dx = 0.004

T = [0,2.0], m = 5001, dt = 0.0004

R = 0.010000000000000002, L/c = 2.0

Shape of uctcs: (5001, 501), ucn: (5001, 501), uha: (5001, 501)

Shape of vha: (5001,501)
```

donde puede uno observar que $r^2 < 1$.

6.5. Visualización de resultados: problema 1

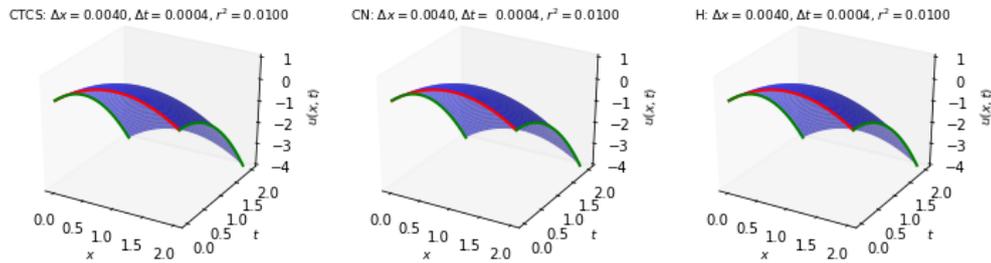


Figura 6.1: Condición inicial $\varphi(x) = x(2 - x)$ color rojo, y condición de frontera izquierda $u(0, t) = -t^2$ y derecha $u(2, t) = -t^2$ color verde.

En estas subsecciones siguientes presenta uno resultados visualizables relacionados a cada problema planteado, en particular visualiza uno las superficies y las tomas de animaciones de solución para distintos t 's. Así, recordando el problema

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= u_{xx} & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= x(2 - x) & 0 < x < 2 \\
 u_t(x, 0) &= 0 & 0 < x < 2 \\
 u(0, t) &= -t^2 & t > 0 \\
 u(2, t) &= -t^2 & t > 0
 \end{aligned}$$

tiene uno los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera respectivamente en Figura 6.1 cuyos datos en los encabezados corresponden a los datos de salida del programa

```

X = [0,2], n = 501, dx = 0.004

T = [0,2.0], m = 5001, dt = 0.0004

R = 0.010000000000000002, L/c = 2.0

Shape of uctcs: (5001, 501), ucn: (5001, 501), uha: (5001, 501)

Shape of vha: (5001,501)
    
```

6.5.1. Tomas de animación

Uno puede observar la animación para tiempos t_k distintos en las gráficas siguientes en el plano x,u . En Figura 6.2 tiene uno la captura de animación para tiempo $t_{2644} \approx 1.1$ (con redondeo en la máquina) y en Figura 6.3 para tiempo $t_{4491} \approx 1.8$ (de nuevo con redondeo en la máquina). Empleando la solución en las regiones

```

N: -t**2 - x**2 + 2*x
S: -t**2 - x**2 + 2*x
O: -t**2 - x**2 + 2*x
W: -t**2 - x**2 + 2*x
    
```

en la función implementada obtiene uno la comparación de solución exacta (línea azul) con solución numérica (puntos rojos).

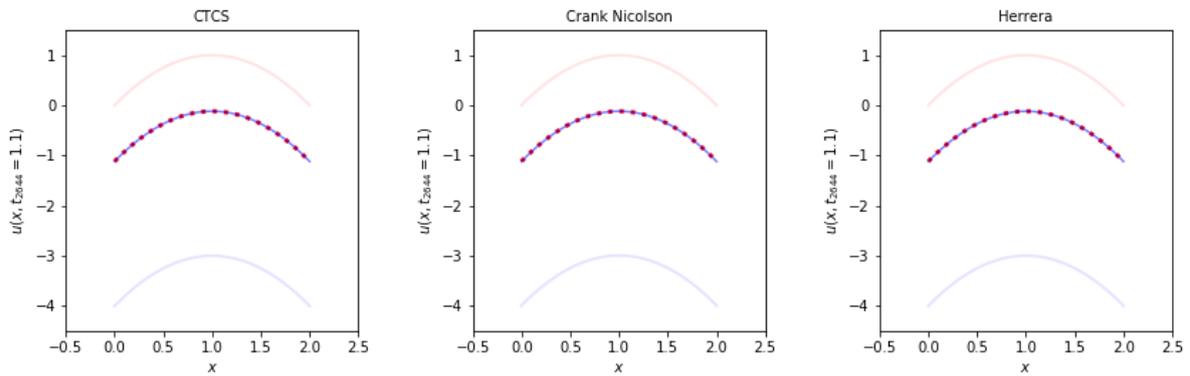


Figura 6.2: Toma de animación en $t_{2644} \approx 1.1$ para los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

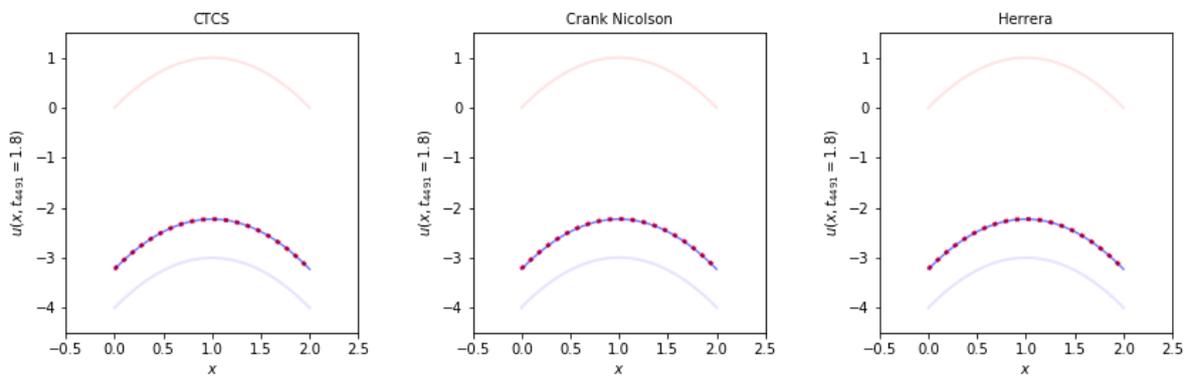


Figura 6.3: Toma de animación en $t_{4491} \approx 1.8$ para esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

6.5.2. Error

Para calcular el error involucrado en cada tiempo t_k toma uno la diferencia de la solución exacta y la numérica sobre la discretización de x y toma uno la norma dos, en otras palabras,

$$\text{error}(t_k) = \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} [\text{exacta}(x_j, t_k) - \text{numérica}(x_j, t_k)]^2}$$

lo cual proporciona para este caso

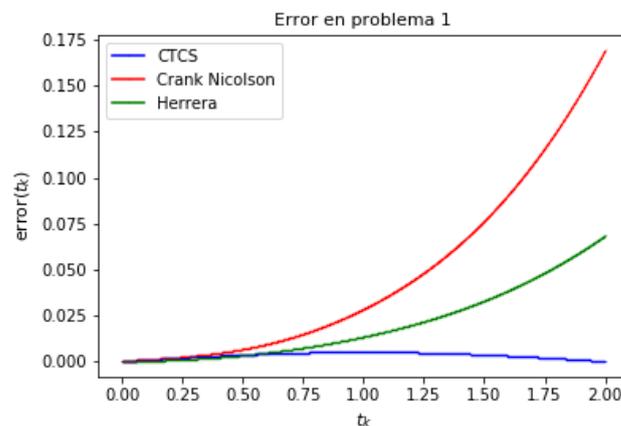


Figura 6.4: Error para esquema CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

6.6. Visualización de resultados: problema 2

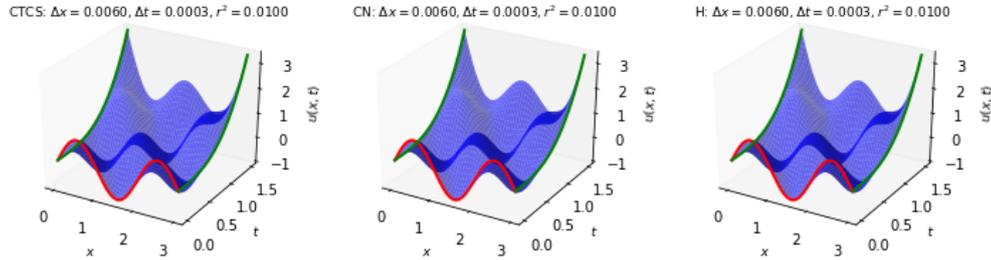


Figura 6.5: Condición inicial $\varphi(x) = \sin(\pi x)$ color rojo, y condición de frontera izquierda $u(0, t) = t^3$ y derecha $u(3, t) = t^3$ color verde.

Para el problema dos

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= 4u_{xx} & 0 < x < 3, \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= \sin(\pi x) & 0 < x < 3 \\
 u_t(x, 0) &= 0 & 0 < x < 3 \\
 u(0, t) &= t^3 & t > 0 \\
 u(3, t) &= t^3 & t > 0
 \end{aligned}$$

tiene uno las gráficas en Figura 6.5 para los esquema CTCS, Crank Nicolson y Herrera respectivamente, con datos de salida

```

X = [0,3], n = 501, dx = 0.006

T = [0,1.5], m = 5001, dt = 0.0003

R = 0.009999999999999998, L/c = 1.5

Shape of uctcs: (5001, 501), ucn: (5001, 501), uha: (5001, 501)

Shape of vha: (5001,501)
    
```

6.6.1. Tomas de animación

Uno captura la pantalla para distintos tiempos en la animación. En Figura 6.6 tiene uno la toma para $t_{2257} \approx 0.7$ (redondeo de la máquina) mientras que en Figura 6.7 tiene uno captura en $t_{4525} \approx 1.4$ (de nuevo por redondeo de la máquina). Empleando la solución en las regiones

```

N: 2*t**3 - 9*t**2/2 + 3*t*x**2/2 - 9*t*x/2 + 27*t/4
- 9*x**2/8 + 27*x/8 - sin(2*pi*t - pi*x)/2 + sin(2*pi*t + pi*x)/2 - 27/8
S: sin(pi*x)*cos(2*pi*t)
W: (2*t - x)**3/8 - sin(pi*(2*t - x))/2 + sin(pi*(2*t + x))/2
O: (2*t + x - 3)**3/8 - sin(pi*(2*t - x))/2 + sin(pi*(2*t + x))/2
    
```

obtiene uno la comparación de la solución exacta (línea azul) con la solución numérica (puntos rojos).

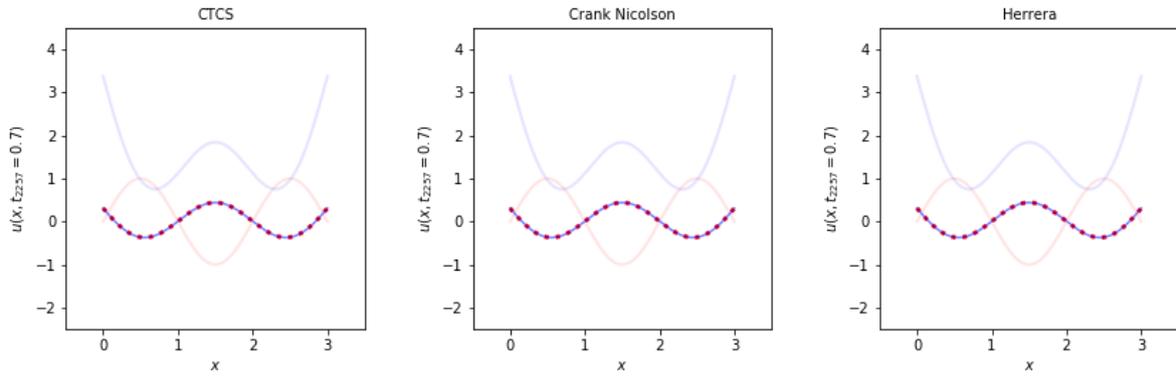


Figura 6.6: Toma de animación en $t_{2257} \approx 0.7$ para los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

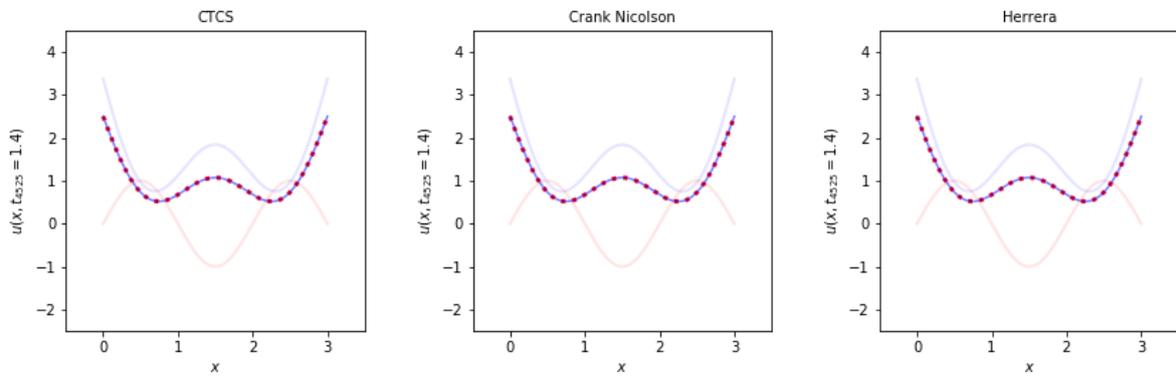


Figura 6.7: Toma de animación en $t_{4525} \approx 1.4$ para los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

6.6.2. Error

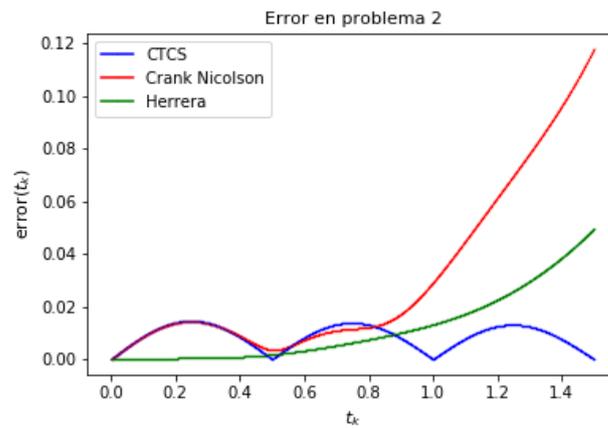


Figura 6.8: Error para los esquema CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

6.7. Visualización de resultados: problema 3

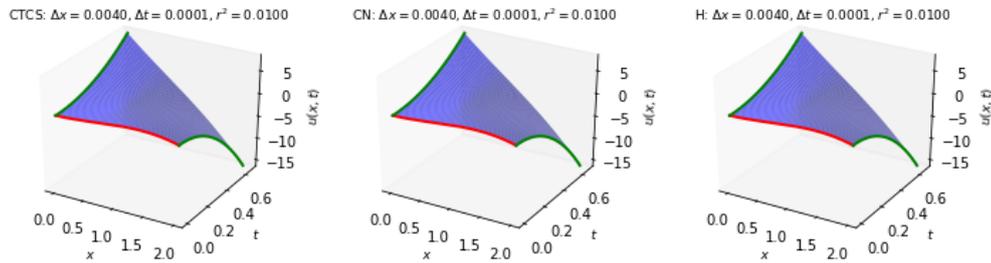


Figura 6.9: Condición inicial $\varphi(x) = x^2(2 - x)$ color rojo, y condición de frontera izquierda $u(0, t) = 18t^2$ y derecha $u(2, t) = -36t^2$ color verde.

En el tercer problema

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= 9u_{xx} & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= x^2(2 - x) & 0 < x < 2 \\
 u_t(x, 0) &= 0 & 0 < x < 2 \\
 u(0, t) &= 18t^2 & t > 0 \\
 u(2, t) &= -36t^2 & t > 0
 \end{aligned}$$

tiene uno las gráficas en Figura 6.9 correspondientes a los datos de salida

```

X = [0,2], n = 501, dx = 0.004

T = [0,0.6666666666666666], m = 5001, dt = 0.00013333333333333333

R = 0.009999999999999995, L/c = 0.6666666666666666

Shape of uctcs: (5001, 501), ucn: (5001, 501), uha: (5001, 501)

Shape of vha: (5001,501)
    
```

6.7.1. Tomas de animación

Para distintos tiempos t_k tiene uno las siguientes capturas de pantalla. En Figura 6.10 observa uno momento $t_{3146} \approx 0.4$ por otro lado puede uno apreciar en Figura 6.11 para $t_{3780} \approx 0.5$ (redondeo de máquina). Empleando

```

N: -27*t**2*x + 18*t**2 - x**3 + 2*x**2
S: -27*t**2*x + 18*t**2 - x**3 + 2*x**2
W: -27*t**2*x + 18*t**2 - x**3 + 2*x**2
O: -27*t**2*x + 18*t**2 - x**3 + 2*x**2
    
```

obtiene uno comparación de la solución exacta (azul) y la solución numérica (puntos rojos.)

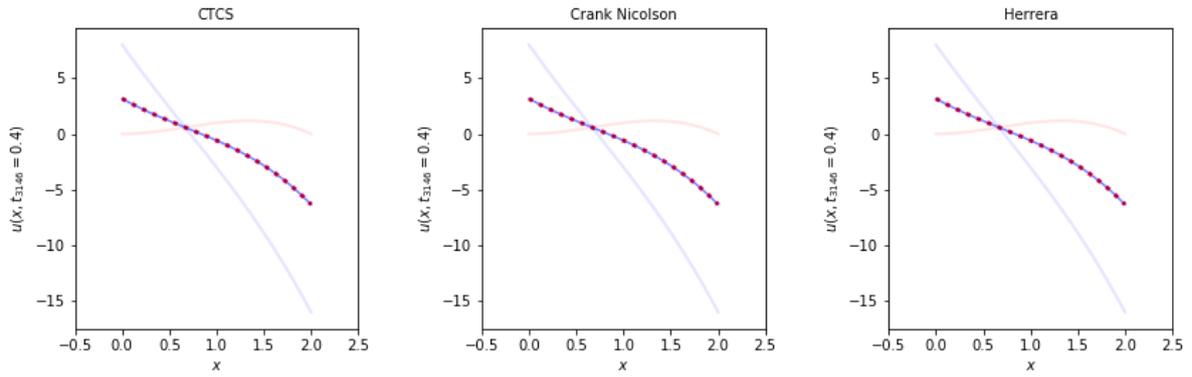


Figura 6.10: Toma de animación en $t_{3146} \approx 0.4$ para los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

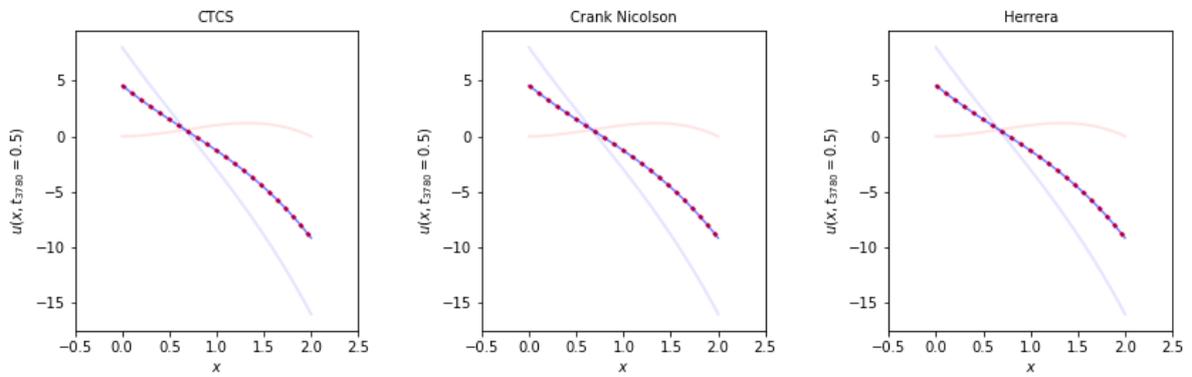


Figura 6.11: Toma de animación en $t_{3780} \approx 0.5$ para los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

6.7.2. Error

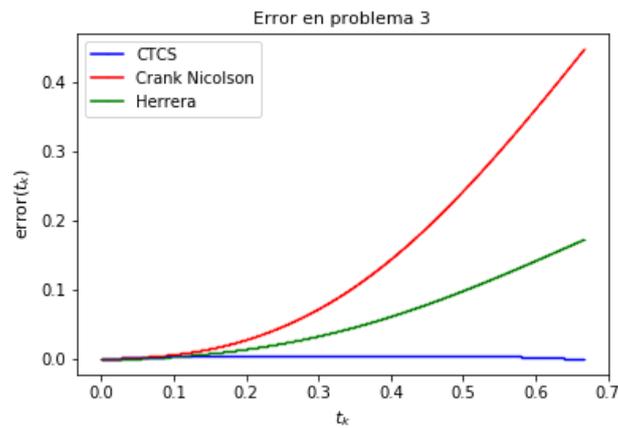


Figura 6.12: Error para los esquema CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

6.8. Visualización de resultados: problema 4

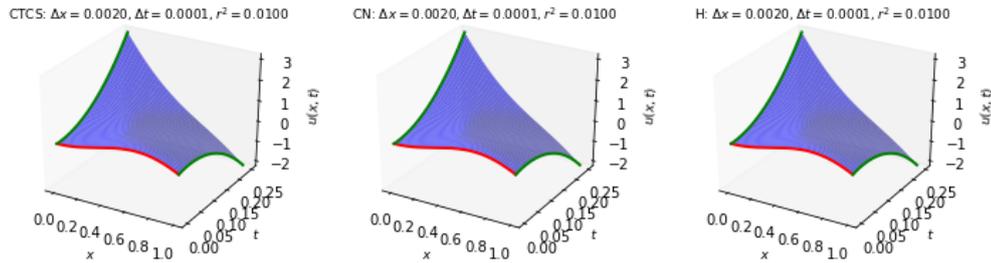


Figura 6.13: Condición inicial $\varphi(x) = x \sin(\pi x)$ color rojo, y condición de frontera izquierda $u(0, t) = 16\pi t^2$ y derecha $u(1, t) = -16\pi t^2 + 4t$ color verde.

Del cuarto problema

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= 16u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= x \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\
 u_t(x, 0) &= 4x & 0 < x < 1 \\
 u(0, t) &= 16\pi t^2 & t > 0 \\
 u(1, t) &= -16\pi t^2 + 4t & t > 0
 \end{aligned}$$

tiene uno las gráficas en Figura 6.13 con los datos de salida

```

X = [0,1], n = 501, dx = 0.002

T = [0,0.25], m = 5001, dt = 5e-05

R = 0.0100000000000000002, L/c = 0.25

Shape of uctcs: (5001, 501), ucn: (5001, 501), uha: (5001, 501)

Shape of vha: (5001,501)
    
```

6.8.1. Tomas de animación

Empleando

```

N: -16*pi*t*x + 4*t*x - 2*t*sin(4*pi*t - pi*x)
- 2*t*sin(4*pi*t + pi*x) + 8*pi*t + x*sin(4*pi*t - pi*x)/2
- x*sin(4*pi*t + pi*x)/2 + 2*pi*x + sin(4*pi*t + pi*x) - pi
S: 4*t*x + (2*t - x/2)*sin(pi*(4*t - x)) + (2*t + x/2)*sin(pi*(4*t + x))
0: 4*t + x + (2*t - x/2)*sin(pi*(4*t - x))
+ (-4*t + x + 1)*(4*t - x + 1)/4 + (-2*t - x/2 + 1)*sin(pi*(4*t + x))
+ (4*t + x - 3)*(4*t + x - 1)/4 - pi*(4*t + x - 1)**2 - 1
W: (-2*t + x/2)*sin(pi*(4*t - x)) + (2*t + x/2)*sin(pi*(4*t + x))
- (4*t - x)**2/4 + pi*(4*t - x)**2 + (4*t + x)**2/4
    
```

obtiene uno la comparación de la solución exacta (línea azul) con la solución numérica (puntos rojos). En Figura 6.14 tiene uno la toma de animación para $t_{2416} \approx 0.1$ (redondeo de máquina) y en Figura 6.15 tiene uno la toma de animación para el tiempo $t_{4320} \approx 0.2$ (redondeo de la máquina).

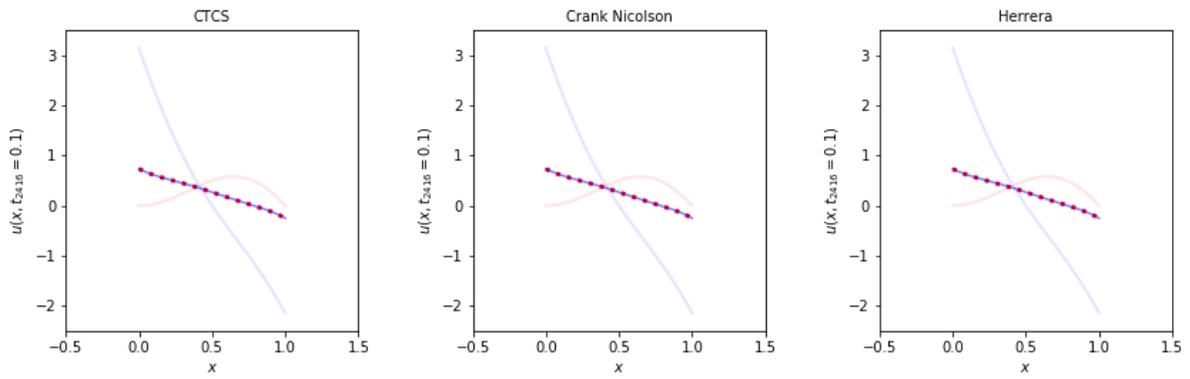


Figura 6.14: Toma de animación en $t_{2416} \approx 0.1$ para los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

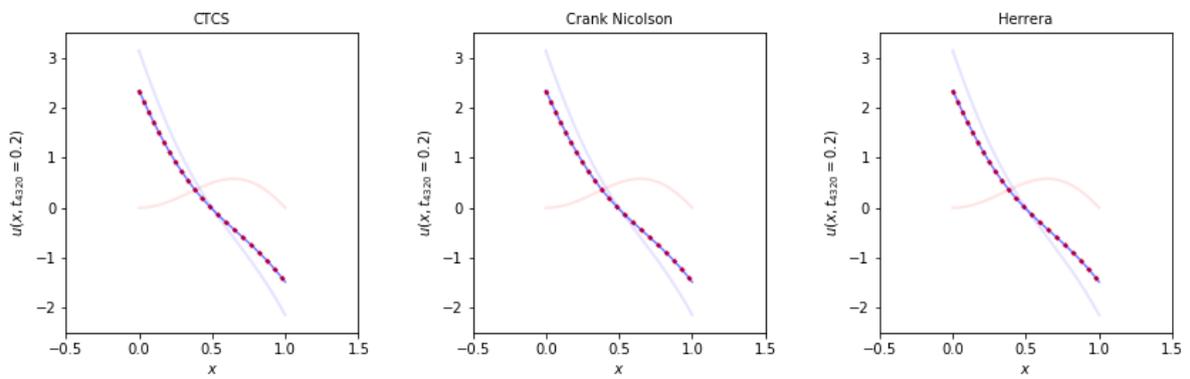


Figura 6.15: Toma de animación en $t_{4320} \approx 0.2$ para esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

6.8.2. Error

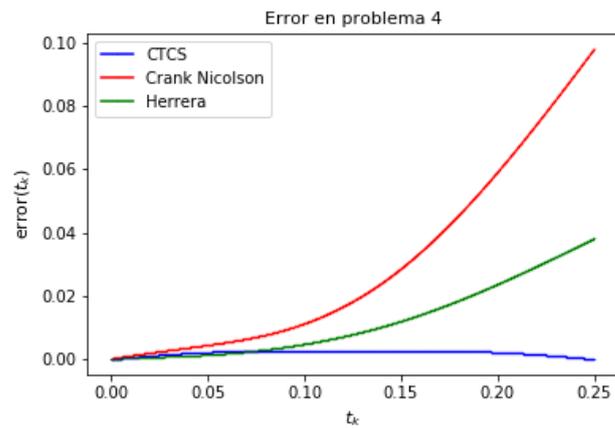


Figura 6.16: Error para los esquema CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

6.9. Visualización de resultados: problema 5

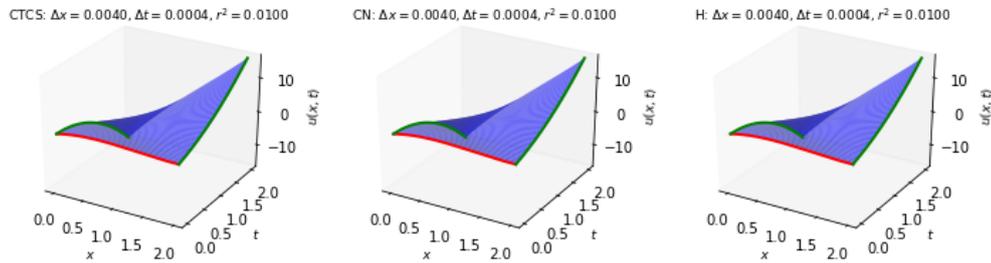


Figura 6.17: Condición inicial $\varphi(x) = x(2 - x)^2$ color rojo, y condición de frontera izquierda $u(0, t) = -4t^2$ y derecha $u(2, t) = 2t^2 + 4t$ color verde.

Para el problema cinco

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= u_{xx} & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= x(2 - x)^2 & 0 < x < 2 \\
 u_t(x, 0) &= x^2 & 0 < x < 2 \\
 u(0, t) &= -4t^2 & t > 0 \\
 u(2, t) &= 2t^2 + 4t & t > 0
 \end{aligned}$$

tiene uno las gráficas en Figura 6.17 para el esquema CTCS, Crank Nicolson y Herrera respectivamente con los datos de salida

```

X = [0,2], n = 501, dx = 0.004

T = [0,2.0], m = 5001, dt = 0.0004

R = 0.0100000000000000002, L/c = 2.0

Shape of uctcs: (5001, 501), ucn: (5001, 501), uha: (5001, 501)

Shape of vha: (5001,501)
    
```

6.9.1. Tomas de animación

Empleando

```

N: -t**3/3 + 3*t**2*x - 2*t**2 - t*x**2 + 4*t*x - 4*t + x**3 - 2*x**2 + 8/3
S: t**3/3 + 3*t**2*x - 4*t**2 + t*x**2 + x**3 - 4*x**2 + 4*x
O: 2*t**2*x - 2*t**2 + 4*t*x - 4*t + 2*x**3/3 - 2*x**2 + 8/3
W: 4*t**2*x - 4*t**2 + 4*x**3/3 - 4*x**2 + 4*x
    
```

obtiene uno la comparación de la solución exacta (línea azul) y la solución numérica (línea roja). En la Figura 6.18 para $t_{2069} \approx 0.8$ tiene uno la captura de pantalla mientras que en la Figura 6.19 tiene uno la toma para $t_{3962} \approx 1.6$.

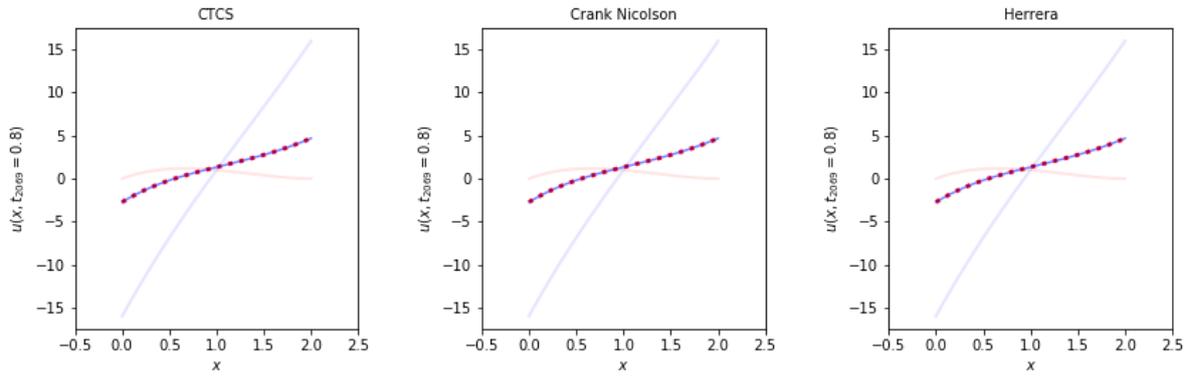


Figura 6.18: Toma de animación en $t_{2069} \approx 0.8$ para los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

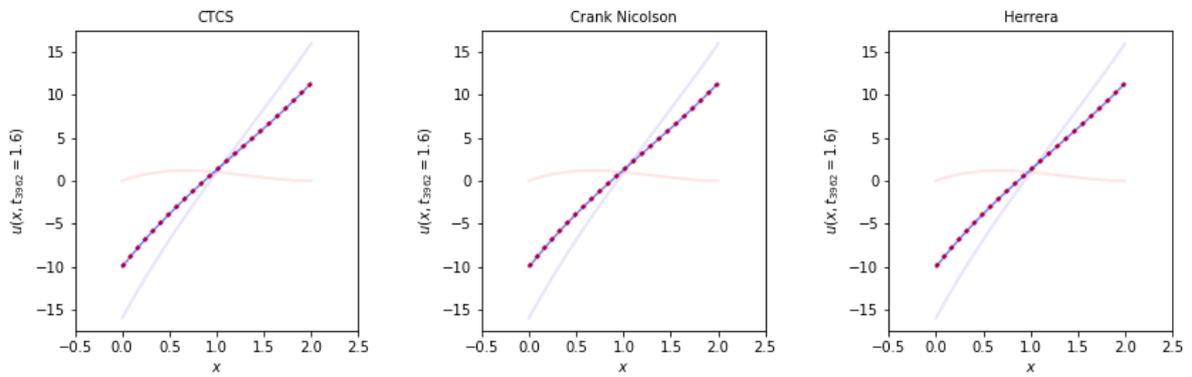


Figura 6.19: Toma de animación en $t_{3962} \approx 1.6$ para los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

6.9.2. Error

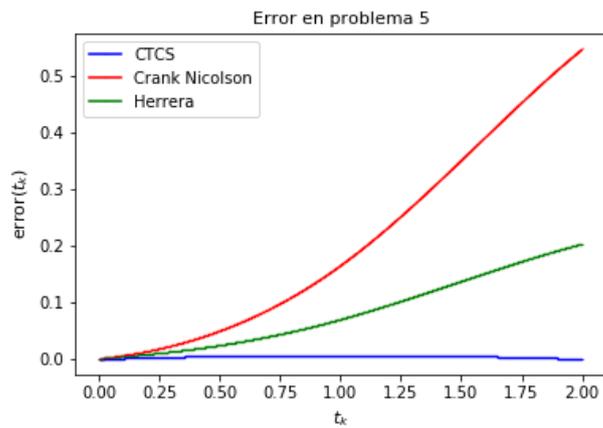


Figura 6.20: Error para los esquema CTCS, Crank Nicolson y Herrera

6.10. Visualización de resultados: problema 6

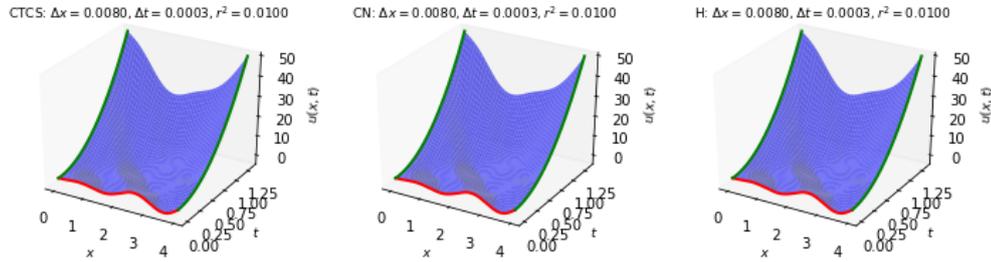


Figura 6.21: Condición inicial $\varphi(x) = x(2 - x)^2$ color rojo, y condición de frontera izquierda $u(0, t) = -4t^2$ y derecha $u(2, t) = 2t^2 + 4t$ color verde.

Para el problema seis

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= 9u_{xx} & 0 < x < 4, \quad t > 0 \\
 u(x, 0) &= x \sin(\pi x) & 0 < x < 4 \\
 u_t(x, 0) &= x(x - 4) & 0 < x < 4 \\
 u(0, t) &= 9\pi t^2 & t > 0 \\
 u(2, t) &= 9\pi t^2 & t > 0
 \end{aligned}$$

tiene uno las gráficas en Figura 6.21 para los esquema CTCS, Crank Nicolson y Herrera respectivamente con datos de salida

```

X = [0,4], n = 501, dx = 0.008

T = [0,1.3333333333333333], m = 5001, dt = 0.00026666666666666666

R = 0.009999999999999995, L/c = 1.3333333333333333

Shape of uctcs: (5001, 501), ucn: (5001, 501), uha: (5001, 501)

Shape of vha: (5001,501)
    
```

6.10.1. Tomas de animación

Empleando

```

N: -3*t**3 + 12*t**2 + 18*pi*t**2 - t*x**2 + 4*t*x
- 3*t*sin(pi*(3*t - x))/2 - 3*t*sin(pi*(3*t + x))/2 - 24*pi*t - 16*t
+ 4*x**2/3 + 2*pi*x**2 + x*sin(pi*(3*t - x))/2 - x*sin(pi*(3*t + x))/2
- 8*pi*x - 16*x/3 + 4*sin(pi*(3*t + x)) + 64/9 + 16*pi
S: 3*t**3 + t*x**2 - 4*t*x + 3*t*sin(3*pi*t)*cos(pi*x) + x*sin(pi*x)*cos(3*pi*t)
O: -3*t**2*x + 12*t**2 + 9*pi*t**2 + 4*t*x
+ 6*pi*t*x - 3*t*sin(pi*x)*cos(3*pi*t) - 24*pi*t - 16*t - x**3/9
+ 4*x**2/3 + pi*x**2 - x*sin(3*pi*t)*cos(pi*x) - 8*pi*x - 16*x/3
+ 4*sin(pi*(3*t + x)) + 64/9 + 16*pi
W: 3*t**2*x + 9*pi*t**2 - 6*pi*t*x - 4*t*x + 3*t*sin(pi*x)*cos(3*pi*t)
+ x**3/9 + pi*x**2 + x*sin(3*pi*t)*cos(pi*x)
    
```

obtiene uno la comparación de la solución exacta (línea azul) y la solución numérica (línea roja). En la Figura 6.22 tiene uno la captura de pantalla para $t_{3173} \approx 0.8$ mientras que en la Figura 6.23 tiene uno para $t_{4728} \approx 1.3$.

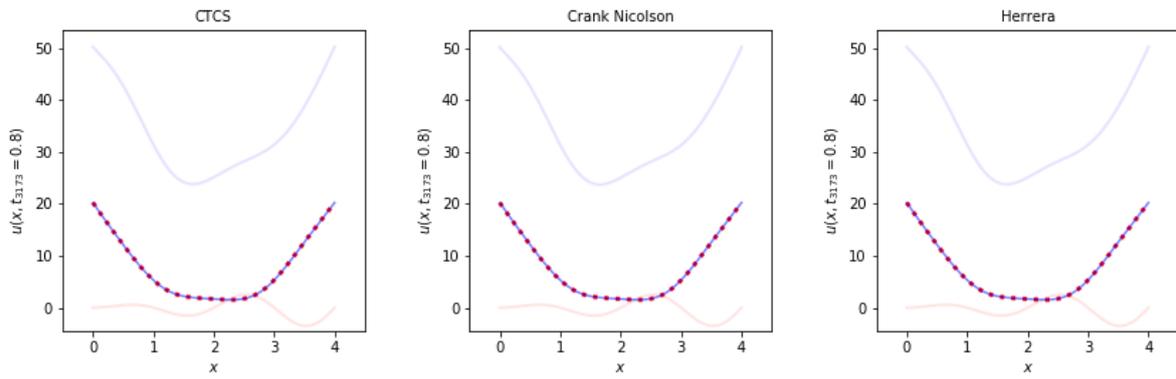


Figura 6.22: Toma de animación en $t_{3173} \approx 0.8$ para los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

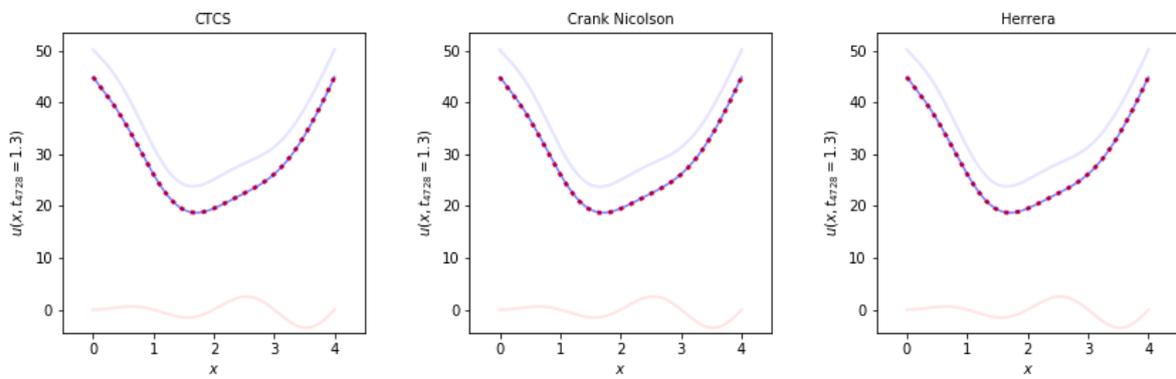


Figura 6.23: Toma de animación en $t_{4728} \approx 1.3$ para los esquemas CTCS, Crank Nicolson y Herrera.

6.10.2. Error

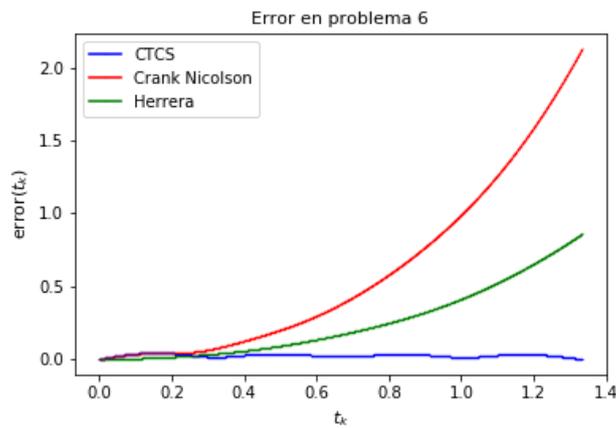


Figura 6.24: Error para esquema CTCS, Crank Nicolson y Herrera

6.11. Sobre el error y tiempo calculado

6.11.1. Error

Considerando el hecho, de que el esquema numérico propuesto por Herrera es un esquema compuesto por un esquema implícito por parte de la posición y un esquema explícito por parte de la velocidad, es natural pensar que su comportamiento debe contener ambos rasgos. En las gráficas de error de los seis problemas puede uno notar que el error propagado por el algoritmo propuesto yace en efecto entre ambas propagaciones, lo cual proporciona un buen criterio de comparación.

6.11.2. Tiempo calculado

A continuación incluye una tabla con información respecto a el tiempo empleado por la máquina por problema para calcular la solución numérica mediante los métodos CTCS, Crank Nicolson y propuesto por Herrera en ese orden de manera consecutiva, tiempo gráficos proporciona el tiempo requerido para generar superficies solución, de igual forma consecutivamente y finalmente tiempo animación el tiempo requerido al llamar la animación de manera análoga a las formas anteriores.

Problema #	Tiempo cómputo [s]	Tiempo gráficos [s]	Tiempo animación [s]
1	106.198	12.481	2.204
2	113.490	11.200	2.868
3	104.861	13.969	2.557
4	111.457	12.388	3.843
5	137.529	13.835	2.909
6	124.627	14.104	4.552

6.12. Código visualizaciones, animaciones y error

6.12.1. Visualización

Uno presenta el código únicamente para el primer problema, en el cual puede uno cambiar los datos de entrada para cualquier otro que cumpla las condiciones de compatibilidad.

```
# surfaces
%matplotlib inline
fig, ax = plt.subplots(ncols=3,rows=1,figsize=(12,3))

# parameters
fz = 9
linw = 2
alf = 0.6
```

```

# [0] CTCS
ax[0].set_axis_off()
ax[0] = fig.add_subplot(1,3,1,projection='3d')
ax[0].set_title(r'CTCS: $ \Delta x = %0.4f, \Delta t = %0.4f,
r^{2} = %0.4f $' (dx,dt,R),fontsize=fz)
ax[0].set_xlabel(r'$x$',fontsize=fz)
ax[0].set_ylabel(r'$t$',fontsize=fz)
ax[0].set_zlabel(r'$u\left(x,t\right)$',fontsize=fz)
ax[0].view_init(elev=30,azim=-60)
ax[0].grid(False)
# surface
X,T = np.meshgrid(x,t)
ax[0].plot_surface(X,T,uctcs,color='b',alpha=alf)
# initial position
ax[0].plot(x,t[0]*np.ones(len(x)),uctcs[0,:],color='r',ls='-',lw=linw)
# left boundary
ax[0].plot(x[0]*np.ones(len(t)),t,uctcs[:,0],color='g',ls='-',lw=linw)
# right boundary
ax[0].plot(x[-1]*np.ones(len(t)),t,uctcs[:,-1],color='g',ls='-',lw=linw)

```

```

# [1] Crank Nicolson
ax[1].set_axis_off()
ax[1] = fig.add_subplot(1,3,2,projection='3d')
ax[1].set_title(r'CN: $ \Delta x = %0.4f, \Delta t = %0.4f,
r^{2} = %0.4f $' (dx,dt,R),fontsize=fz)
ax[1].set_xlabel(r'$x$',fontsize=fz)
ax[1].set_ylabel(r'$t$',fontsize=fz)
ax[1].set_zlabel(r'$u\left(x,t\right)$',fontsize=fz)
ax[1].view_init(elev=30,azim=-60)
ax[1].grid(False)
# surface
X,T = np.meshgrid(x,t)
ax[1].plot_surface(X,T,ucn,color='b',alpha=alf)
# initial position
ax[1].plot(x,t[0]*np.ones(len(x)),ucn[0,:],color='r',ls='-',lw=linw)
# left boundary
ax[1].plot(x[0]*np.ones(len(t)),t,ucn[:,0],color='g',ls='-',lw=linw)
# right boundary
ax[1].plot(x[-1]*np.ones(len(t)),t,ucn[:,-1],color='g',ls='-',lw=linw)

```

```

# [2] Herrera
ax[2].set_axis_off()
ax[2] = fig.add_subplot(1,3,3,projection='3d')
ax[2].set_title(r'H: $ \Delta x = %0.4f, \Delta t = %0.4f,
r^{2} = %0.4f $'%(dx,dt,R),fontsize=fz)
ax[2].set_xlabel(r'$x$',fontsize=fz)
ax[2].set_ylabel(r'$t$',fontsize=fz)
ax[2].set_zlabel(r'$u\left(x,t\right)$',fontsize=fz)
ax[2].view_init(elev=30,azim=-60)
ax[2].grid(False)
# surface
X,T = np.meshgrid(x,t)
ax[2].plot_surface(X,T,uha,color='b',alpha=alf)
# initial position
ax[2].plot(x,t[0]*np.ones(len(x)),uha[0,:],color='r',ls='-',lw=linw)
# left boundary
ax[2].plot(x[0]*np.ones(len(t)),t,uha[:,0],color='g',ls='-',lw=linw)
# right boundary
ax[2].plot(x[-1]*np.ones(len(t)),t,uha[:,-1],color='g',ls='-',lw=linw)

plt.savefig('ctcsnhp13d.png')

# obtain axes
ymin,ymax = ax[1].get_zlim3d()

plt.tight_layout(pad=0.5, w_pad=0.2, h_pad=0.2)
plt.show()

```

6.12.2. Animaciones

En las animaciones utiliza uno generadores para mejorar el rendimiento del programa. Análogamente al código en las visualizaciones presenta uno aquí el código únicamente para el primer problema, el cual puede cambiar uno para cualquier otro que cumpla condiciones de compatibilidad.

```

# x vs u and x vs u animation
%matplotlib notebook

# figure
fig, ax = plt.subplots(ncols=3,nrows=1,figsize=(12,4))

# parameters
fz = 10
linw = 2
alf = 0.6

```

```

# [0] CTCS
ax[0].set_axis_off()
ax[0] = fig.add_subplot(1,3,1)
ax[0].set_xlim([-0.5,L+0.5])
ax[0].set_ylim([ymin-0.5,ymax+0.5])
ax[0].grid('off')
ax[0].set_xlabel(r'$x$',fontsize=fz)
# ax[0].set_ylabel(r'$u\left(x,t_{0}\right)$',fontsize=fz)
ax[0].set_title(r'CTCS',fontsize=fz)
# initial position
ax[0].plot(x,uctcs[0,:],color='r',lw='2',alpha=0.1)
# last computation
ax[0].plot(x,uctcs[-1,:],color='b',lw='2',alpha=0.1)

```

```

# [1] Crank Nicolson
ax[1].set_axis_off()
ax[1] = fig.add_subplot(1,3,2)
ax[1].set_xlim([-0.5,L+0.5])
ax[1].set_ylim([ymin-0.5,ymax+0.5])
ax[1].grid('off')
ax[1].set_xlabel(r'$x$', fontsize=fz)
# ax[1].set_ylabel(r'$\u\left(x,t_{0}\right)$', fontsize=fz)
ax[1].set_title(r'Crank Nicolson', fontsize=fz)
# initial position
ax[1].plot(x,ucn[0,:], color='r', lw='2', alpha=0.1)
# last computation
ax[1].plot(x,ucn[-1,:], color='b', lw='2', alpha=0.1)

```

```

# [2] Herrera
ax[2].set_axis_off()
ax[2] = fig.add_subplot(1,3,3)
ax[2].set_xlim([-0.5,L+0.5])
ax[2].set_ylim([ymin-0.5,ymax+0.5])
ax[2].grid('off')
ax[2].set_xlabel(r'$x$', fontsize=fz)
# ax[2].set_ylabel(r'$\u\left(x,t_{0}\right)$', fontsize=fz)
ax[2].set_title(r'Herrera', fontsize=fz)
# initial position
ax[2].plot(x,uha[0,:], color='r', lw='2', alpha=0.1)
# last computation
ax[2].plot(x,uha[-1,:], color='b', lw='2', alpha=0.1)

```

```

# solution in regions
def fun(x,t,k,c,L):
    u = np.zeros(len(x))
    # -----
    # oben links: x-c*t[k] <= 0
    # unten links: x-c*t[k] >= 0
    # oben rechts: x+c*t[k] >= L
    # unten rechts: x+c*t[k] <= L
    # -----
    # N: ol & or
    # S: ul & ur
    # O: or & ul
    # W: ol & ur
    # -----
    # N
    con1 = (x-c*t[k] <= 0) & (x+c*t[k] >= L)
    u[con1] = -1.0*t[k]**2 - 1.0*x[con1]**2 + 2.0*x[con1]
    # S
    con2 = (x-c*t[k] >= 0) & (x+c*t[k] <= L)
    u[con2] = -1.0*t[k]**2 - 1.0*x[con2]**2 + 2.0*x[con2]
    # O
    con3 = (x+c*t[k] >= L) & (x-c*t[k] >= 0)
    u[con3] = -1.0*t[k]**2 - 1.0*x[con3]**2 + 2.0*x[con3]
    # W
    con4 = (x-c*t[k] <= 0) & (x+c*t[k] <= L)
    u[con4] = -1.0*t[k]**2 - 1.0*x[con4]**2 + 2.0*x[con4]
    return u

```

```
# exact solution
UU = [fun(np.asarray(x),np.asarray(t),k,c0,L) for k in range(m)]

# exact solution lines
linedctcs, = ax[0].plot([],[],ls='-',c='b',alpha=0.5)
linedcn, = ax[1].plot([],[],ls='-',c='b',alpha=0.5)
linedh, = ax[2].plot([],[],ls='-',c='b',alpha=0.5)

# numeric solution lines
linectcs, = ax[0].plot([],[],ls=':',c='r',lw=3)
linecn, = ax[1].plot([],[],ls=':',c='r',lw=3)
lineh, = ax[2].plot([],[],ls=':',c='r',lw=3)
```

```
# initial function
def init():
    # [0] CTCS
    linectcs.set_data([],[])
    linedctcs.set_data([],[])
    ax[0].set_ylabel(r'$u\left(x,t_{0}\right)$',fontsize=fz)
    # [1] Crank Nicolson
    linecn.set_data([],[])
    linedcn.set_data([],[])
    ax[1].set_ylabel(r'$u\left(x,t_{0}\right)$',fontsize=fz)
    # [2] Herrera
    lineh.set_data([],[])
    linedh.set_data([],[])
    ax[2].set_ylabel(r'$u\left(x,t_{0}\right)$',fontsize=fz)
    return
```

```
# my generator
def mygen(step=0):
    while step < m:
        step += 1
        yield x, uctcs[step,:], ucn[step,:], uha[step:], UU[step], step
```

```
# function that runs generator
def run(mygen):
    # [0] CTCS
    linectcs.set_data(mygen[0],mygen[1])
    linedctcs.set_data(mygen[0],mygen[4])
    ax[0].set_ylabel(r'$ u(x,t_{%s}) = %0.1f )$'%(mygen[5],t[mygen[5]]),fontsize=fz)
    # [1] Crank Nicolson
    linecn.set_data(mygen[0],mygen[2])
    linedcn.set_data(mygen[0],mygen[4])
    ax[1].set_ylabel(r'$ u(x,t_{%s}) = %0.1f)$'%(mygen[5],t[mygen[5]]),fontsize=fz)
    # [2] Herrera
    lineh.set_data(mygen[0],mygen[3])
    linedh.set_data(mygen[0],mygen[4])
    ax[2].set_ylabel(r'$ u(x,t_{%s}) = %0.1f)$'%(mygen[5],t[mygen[5]]),fontsize=fz)
    return
```

```
# display animation
myanimation = ani.FuncAnimation(fig,run,mygen,init_func=init,interval=1,repeat=True,blit=False)

plt.tight_layout(pad=0.5, w_pad=0.2, h_pad=0.2)
plt.show()
```

6.12.3. Error

```

%matplotlib inline
fig, ax = plt.subplots()

# parameters
fz = 11
linw = 2
alf = 0.6

# error function
def fferror(i):
    dctcse = UU[i]-uctcs[i,:]
    dcne = UU[i]-ucn[i,:]
    dhae = UU[i]-uha[i,:]
    return np.linalg.norm(dctcse), np.linalg.norm(dcne), np.linalg.norm(dhae)

# figure
ax.set_axis_off()
ax = fig.add_subplot(1,1,1)
ax.grid('off')
ax.set_xlabel(r'$t_{k}$',fontsize=fz)
ax.set_ylabel(r'error$(t_{k})$',fontsize=fz)
ax.set_title(r'Error en problema 6',fontsize=fz)

# for i = 0
ax.plot(t[0],fferror(0)[0],marker='o',color='blue',ms=0.1,label='CTCS')
ax.plot(t[0],fferror(0)[1],marker='o',color='red',ms=0.1,label='Crank Nicolson')
ax.plot(t[0],fferror(0)[2],marker='o',color='green',ms=0.1,label='Herrera')

# for k = 1,..,-1
for i in range(1,len(t)):
    ax.plot(t[i],fferror(i)[0],marker='o',color='blue',ms=0.1)
    ax.plot(t[i],fferror(i)[1],marker='o',color='red',ms=0.1)
    ax.plot(t[i],fferror(i)[2],marker='o',color='green',ms=0.1)

ax.legend()
plt.savefig('ctcscnhp1error.png')
plt.show()

```

Bibliografía

- [1] Why use python? [<https://www.fullstackpython.com/why-use-python.html>]
- [2] Why is python growing so quickly? [<https://stackoverflow.blog/2017/09/14/python-growing-quickly/>]
- [3] jupyter notebook [<http://jupyter.org/>]
- [4] matplotlib [<https://matplotlib.org/>]
- [5] mpl_toolkits [https://matplotlib.org/1.5.3/mpl_toolkits/index.html]
- [6] matplotlib.animation [https://matplotlib.org/api/animation_api.html]
- [7] linalg.solve [<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/tutorial/linalg.html>]
- [8] linalg.norm [<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.linalg.norm.html>]
- [9] sympy [<http://docs.sympy.org/latest/index.html>]
- [10] Langtangen, Hans Peter, Finite difference methods for wave motion, Center for Biomedical Computing, Simula Research Laboratory & Department of Informatics, University of Oslo, 2016, 5-10.
- [11] O’Neil, Peter V., Beginning Partial Differential Equations, 2008, 149.

Capítulo 7

Conclusiones y perspectivas

7.1. Conclusiones

Tras la implementación y la comparación de los esquemas CTCS, Crank Nicolson y el propuesto por Herrera concluye uno tres resultados importantes

- un esquema numérico compuesto por un método implícito junto con un método explícito proporciona un método condicionado, en otras palabras,

$$\boxed{\text{incondicionalmente estable} + \text{condicionalmente estable} \implies \text{condicionalmente estable}}$$

- el esquema propuesto por Herrera permite una ligera flexibilidad en el número de condición respecto al esquema CTCS
- el esquema propuesto por Herrera trabaja con la posición $u(x, t)$ junto con la velocidad $v(x, t)$ proporcionando resultados independientes para cada una, a comparación de los esquemas CTCS y Crank Nicolson.

Precisando el **primer punto**, retomando el esquema propuesto por Herrera

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}r^2u_{i-1}^{k+1} + (1 + \frac{1}{3}r^2)u_i^{k+1} - \frac{1}{6}r^2u_{i+1}^{k+1} &= \frac{1}{3}r^2u_{i-1}^k + (1 - \frac{2}{3}r^2)u_i^k + \frac{1}{3}r^2u_{i+1}^k + \Delta tv_i^k \\ v_i^{k+1} &= \frac{3}{\Delta t}u_i^{k+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t}r^2u_{i-1}^k + \frac{1}{\Delta t}(r^2 - 3)u_i^k - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t}r^2u_{i+1}^k - 2v_i^k \end{aligned}$$

tiene una recursión formada por un esquema implícito

$$-\frac{1}{6}r^2u_{i-1}^{k+1} + (1 + \frac{1}{3}r^2)u_i^{k+1} - \frac{1}{6}r^2u_{i+1}^{k+1} = \frac{1}{3}r^2u_{i-1}^k + (1 - \frac{2}{3}r^2)u_i^k + \frac{1}{3}r^2u_{i+1}^k + \Delta tv_i^k$$

mismo que no tiene restricción en cuanto a r y un esquema explícito

$$v_i^{k+1} = \frac{3}{\Delta t}u_i^{k+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t}r^2u_{i-1}^k + \frac{1}{\Delta t}(r^2 - 3)u_i^k - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta t}r^2u_{i+1}^k - 2v_i^k$$

cuyo lado derecho asemeja el esquema CTCS, conduciendo a restringir r independientemente del primer esquema. En cuanto al **segundo punto** retomando el esquema CTCS

$$u_i^{k+1} = r^2u_{i-1}^k + 2(1 - r^2)u_i^k + r^2u_{i+1}^k - u_i^{k-1}$$

tiene una las condiciones

$$r_{\text{CTCS}} \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad \text{y} \quad r_{\text{Herrera}} \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x} < \sqrt{3}$$

de esta forma

$$\boxed{r_{\text{CTCS}}^2 < r_{\text{Herrera}}^2}$$

lo cual permite maniobrar con mayor libertad distintos valores para Δt , Δx y c en caso de requerirlo. Finalmente, respecto al **tercer punto**, el esquema Herrera tiene una ventaja sobre el esquema Crank Nicolson y CTCS. En éstos

la velocidad inicial $u_t(x, 0) = \varphi(x)$ sólo es considerada como un dato inicial obteniendo la posición $u(x, t)$ mediante iteraciones, una vez terminados los cálculos numéricos no es posible obtener en los datos de salida el valor aproximado de la velocidad $v(x, t)$ ni en el esquema Crank Nicolson ni en el CTCS, mientras que con el método propuesto por Herrera obtiene una información de la velocidad en caso de requerirla para el mismo dominio espacial y temporal especificados anteriormente.

7.2. Perspectivas

Uno de los fines de esta tesis es servir de prototipo para plantear trabajo futuro, permitiendo extender el empleo, la utilidad y mejora del algoritmo propuesto. Con esto en mente, propone uno como primer enfoque:

- **Generalización** a más dimensiones. Desde luego, un primer punto de partida es obtener un algoritmo para la ecuación de onda lineal en dos y tres dimensiones donde pueda uno comparar su efectividad, ventajas y desventajas en caso de haberlas y posteriormente con la misma motivación inicial puede uno agregar términos no lineales, velocidad dependiente de la posición, del tiempo, de ambas o bien en forma no lineal.
- **Implementaciones** con métodos generales. Uno puede considerar el desarrollo de diferencias finitas generalizadas para problemas más sofisticadas o bien siguiendo este mismo esquema con el método de volumen finito.
- **Aplicaciones** Otro punto importante es el área de aplicación. Recordando la mayor tolerancia del número CFL en el esquema propuesto a comparación de otros esquemas y considerando la velocidad como dato de salida calculado puede uno considerar resolver problemas donde los datos puedan ser variados.
- **Exportación** a otros lenguajes de programación. Esto es básico y necesario para la distribución, supervivencia y adaptación del algoritmo en todos los puntos anteriormente citados, pues permite un mayor alcance y disponibilidad del mismo en una amplia cantidad de programas de cómputo en los que puede ser incorporado.