



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**UN PROBLEMA DE DERIVADA OBLICUA PARA LA
ECUACIÓN DE LAPLACE**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ISRAEL COLCHADO FLORES



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA DEL CARMEN JORGE Y JORGE
CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. 2018**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Colchado

Flores

Israel

13132409

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

308318845

2. Datos del tutor

Dra.

María del Carmen

Jorge

y Jorge

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Jorge

Fujioka

Rojas

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Carlos Arturo

Vargas

Guadarrama

5. Datos del sinodal 3

Dr.

José Julio Emilio

Herrera

Velázquez

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

María Lourdes

Velasco

Arregui

7. Datos de Tesis

Un problema de derivada oblicua
para la ecuación de Laplace

76 p

2018

*Dedicado a mis padres, mi familia,
así como a las doctoras María del Carmen y Laura*

Agradecimientos

Esta tesis es la culminación de un sueño iniciado hace poco más de cinco años, cuando decidí estudiar la licenciatura en Matemáticas, producto de días llenos de arduo esfuerzo y sacrificio en el que tres mujeres han influido a lo largo de todos estos años: María Guadalupe Flores Galicia, María del Carmen Jorge y Jorge y Laura Vargas Parada. Sin su ayuda este trabajo no sería posible.

Primeramente quisiera agradecer a mi madre, María Guadalupe Flores Galicia, la persona que más admiro en todo el mundo. Ella ha sido mi guía y mentora en todo momento, además de ser el motor que me motivó a llegar tan lejos, siendo algunas de las razones por las cuales le quedaré eternamente agradecido. También quisiera dar gracias a mi padre Mario Horacio Colchado Cazadero y a mis hermanos Alejandro y Fabián, quienes me han apoyado siempre en los proyectos que he decidido emprender y han estado conmigo tanto en mis triunfos como en mis fracasos. Igualmente deseo agradecer a mis abuelas y abuelos, así como al resto de mis tíos, primos y sobrinos tanto paternos como maternos. Aunque algunos de ustedes ya no se encuentren con nosotros, quisiera expresar mi gratitud por su amor y cariño que me han profesado, así como su ayuda incondicional que he recibido de su parte.

También dedico esta tesis a María del Carmen Jorge y Jorge, mi maestra, tutora y quien me motivó a terminar la licenciatura. Le agradezco infinitamente su paciencia y apoyo incondicional para desarrollar esta tesis, sin su ayuda este trabajo no existiría. Ella es una persona a quien admiro enormemente, pues además de ser una brillante matemática también es una gran mujer. Igualmente agradezco la ayuda y orientación brindada por parte de Ana Pérez Arteaga y de Ramiro Chávez Tovar del IIMAS, a él también doy gracias por las imágenes que diseñó específicamente para este trabajo. También quisiera agradecer a todos los amigos que hice durante mi estancia en la UNAM (de quienes omitiré nombres por si de alguno llegara a olvidar), tanto dentro como fuera del salón de clases, pues ellos me enseñaron otras formas de pensar distintas a las mías.

Finalmente agradezco a Laura del Carmen Vargas Parada, la última mujer a quien dedico esta tesis. Ella me permitió adentrarme al fascinante mundo del periodismo de ciencia, en donde espero que este trabajo recoja un poco de sus enseñanzas. Mi más profunda admiración a su gran calidad humana. Para concluir también doy gracias a todas las chicas y chicos de la Unidad de Comunicación y Diseño del Centro de Ciencias de la Complejidad (C3), así como a sus investigadores, pues de todos ellos he aprendido mucho.

Índice general

1. El cálculo del campo geomagnético en \mathbb{R}^2	5
1.1. El campo geomagnético	5
1.2. Historia del estudio del geomagnetismo	8
1.3. El problema no lineal asociado	10
1.4. El problema en \mathbb{R}^2	12
1.5. El problema interior	15
1.6. Un problema aplicado: las franjas magnéticas del fondo marino.	19
2. El caso exterior en \mathbb{R}^3	29
2.1. Multiplicidad de soluciones	30
2.2. La unicidad de las soluciones en \mathbb{R}^3	35
2.3. La solución para el problema del dipolo	36
Conclusiones	45
Anexos	47
Anexo I	48
La solución del problema de Laplace en el exterior de la bola con condiciones de frontera tipo Dirichlet	48

La solución del problema de Laplace en el exterior de la bola con condiciones de frontera tipo Neumann	51
Anexo II	53
Desigualdad de los coeficientes de los armónicos esféricos	53
Desigualdad utilizando propiedades de la función Γ	56
Desigualdad para probar la convergencia de la derivada parcial con respecto de θ	58
Convergencia de las derivadas parciales de segundo orden	59
Anexo III	67
Bibliografía	69

Índice de figuras

1.1. Ilustración del campo magnético terrestre.	6
1.2. Mapas de la intensidad total del campo geomagnético elaborados por Gauss (izquierda) y por científicos utilizando el modelo IGRF en el año 2010 (derecha). . .	10
1.3. Representación visual de cómo se abordará el problema del rayado magnético del fondo marino.	20

Capítulo 1

El cálculo del campo geomagnético en \mathbb{R}^2

1.1. El campo geomagnético

La historia del planeta Tierra no podría explicarse sin la aparición del campo geomagnético. Desde el origen de la vida hasta los grandes descubrimientos geográficos no existirían sin este fenómeno. Dada su importancia, los científicos y gobiernos se han volcado en la investigación sobre sus orígenes y consecuencias. A continuación se mencionarán algunas de ellas y la gran contribución que Carl Friedrich Gauss realizó en su estudio.

La Tierra puede considerarse como una gran esfera con un potente imán en su interior. Este imán produce un campo magnético a su alrededor cuya intensidad varía con el tiempo. El campo se origina por un dipolo magnético cuyo eje se encuentra inclinado a 11 grados del eje de rotación terrestre. ¿Cómo se origina ese dipolo magnético? Actualmente la Teoría del Dinamo es la explicación más aceptada sobre el origen del campo magnético de la Tierra y de algunos cuerpos celestes, como el Sol y otras estrellas.

La Teoría del Dinamo afirma que la rotación terrestre y la convección de material líquido en la parte exterior del núcleo inducen un campo magnético. La rotación del hierro líquido y la presencia de un campo magnético débil generan una corriente eléctrica. Esta corriente induce un campo magnético que al interactuar con el fluido en movimiento generará un campo magnético más fuerte, véase la Figura 1.1.

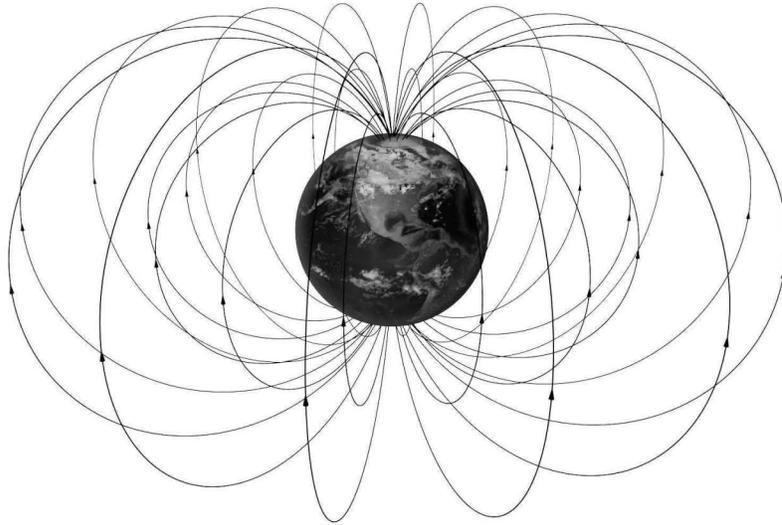


Figura 1.1: Ilustración del campo magnético terrestre.

Aunque el origen del campo geomagnético es muy interesante, algunos fenómenos debidos a este magnetismo son igual de curiosos. Algunos de ellos son: el polo errante, la inversión magnética y las franjas magnéticas en el suelo marino.

Cuando un material magnetizable se calienta por encima de cierta temperatura (temperatura de Curie) pierde sus propiedades magnéticas. Sin embargo, al enfriarse, vuelve a adquirir esas propiedades pero apuntando en la dirección del campo geomagnético. Debido a ello fue posible saber que la posición del polo magnético ha cambiado con el paso del tiempo. Al “movimiento” del polo se le conoce como polo errante.

Realmente el polo no se mueve. Si se supone que el polo magnético coincide con el eje de rotación terrestre (aunque en la realidad no coinciden, para propósitos prácticos se puede hacer esta afirmación), el sostener que el polo magnético se ha movido sería equivalente a afirmar que el eje terrestre también lo ha hecho, algo que no es posible ya que se violaría la ley de la conservación del momento angular. Entonces, el polo parece moverse debido a que la geografía de la Tierra es la que ha cambiado con el tiempo. El polo errante es una evidencia que apoyó la hipótesis de la deriva continental.

Cuando observamos una brújula, automáticamente decimos que la dirección en que

apunta la aguja es hacia el Norte. Pero esto no siempre ha sido así. Este extraño fenómeno, conocido como inversión magnética, ha ocurrido de manera intermitente en la historia de nuestro planeta. Las evidencias pueden hallarse en rocas permanentemente magnetizadas, pues muestran que la dirección del campo magnético era opuesta a la actual. Las inversiones magnéticas datan al menos desde hace 83 millones de años.

La duración de cierta polaridad (normal o invertida) puede variar desde cientos de miles hasta millones de años. Este fenómeno podría deberse a la autoexcitación del dinamo en el interior de la Tierra, ya que esta excitación puede producir ambas polaridades, aunque aún no hay consenso entre los científicos.

También hay una correlación entre las extinciones masivas de especies y las inversiones del campo magnético. Una explicación es que el campo magnético se debilita cuando hay un cambio en la polarización, haciendo a la Tierra más expuesta a los letales rayos cósmicos. La inversión magnética además ha dado lugar a otro tipo de fenómenos como las franjas magnéticas en el fondo oceánico, fenómeno que será analizado matemáticamente en este trabajo.

A mediados del siglo pasado el geofísico Victor Vacquier descubrió algunas variaciones magnéticas extrañas en el fondo marino. Utilizando instrumentos magnéticos llamados magnetómetros, que fueron utilizados por las aeronaves durante la Segunda Guerra Mundial, el científico pudo medir el campo magnético terrestre y las alteraciones magnéticas debidas a las rocas magnetizadas en el fondo del mar, conocidas como anomalías magnéticas. Estas rocas podían mostrar una magnetización normal (anomalías positivas) o invertida (anomalías negativas).

Lo que los científicos descubrieron fueron patrones en la distribución de las anomalías. Las rocas con cierto tipo de anomalía formaban grandes franjas con longitudes de cientos de kilómetros. Estas franjas mostraban una simetría casi perfecta con respecto a la cresta de una superficie dorsal.

Este fenómeno surge durante la creación del suelo marino, ya que al formarse grietas en las dorsales oceánicas brota lava. Cuando la lava se enfría la roca queda permanentemente magnetizada, con un campo magnético normal o invertido, presentándose las anomalías positivas o negativas que hoy en día se pueden observar. Este fenómeno apoya la teoría de la expansión del suelo oceánico.

Aunque muchos de estos fenómenos han sido descubiertos y explicados recientemente [1], los avances alcanzados se deben a las aportaciones que realizaron los científicos de épocas anteriores. Sin embargo un nombre sobresale de entre todos ellos: Carl Friedrich Gauss. Las aportaciones de este brillante matemático marcaron un partea-

guas en el estudio del campo magnético. Antes de hablar sobre este gran científico hagamos una pequeña síntesis histórica.

1.2. Historia del estudio del geomagnetismo

La historia del geomagnetismo se remonta hasta la Antigua Grecia con el descubrimiento del mineral magnetita, una piedra naturalmente magnetizada. También los chinos mencionaron la existencia de estas piedras en la antigüedad, pero fue hasta el siglo doce después de Cristo cuando ellos descubrieron sus propiedades direccionales y comenzaron a utilizar brújulas en la navegación.

A inicios del siglo quince se descubrió la declinación del compás del polo norte, es decir el ángulo descrito entre el polo norte geográfico y el norte magnético local (la dirección descrita por la aguja de la brújula). Décadas más tarde se descubrió que si se mantenía una aguja de manera vertical y perpendicular a la superficie terrestre, ésta se movería de forma distinta dependiendo del lugar en que se encuentre. Por ejemplo, en el polo norte magnético la aguja apuntará verticalmente y en el ecuador magnético lo hará horizontalmente. Este fenómeno se conoce como la inclinación del campo.

En el año 1600 William Gilbert dedujo que la Tierra se comportaba como un imán orientado. Durante los dos siglos posteriores el imperialismo europeo llevaría a numerosos exploradores, como Edmund Halley o Alexander von Humboldt, a medir la dirección y la intensidad del campo magnético. Fue así como se descubrieron las variaciones diurnas del campo o la presencia de alteraciones irregulares a las que Humboldt llamó “tormentas magnéticas”.

Fue en este ambiente de gran interés por el geomagnetismo donde Gauss desarrolló sus estudios durante la primera mitad del siglo diecinueve. A Gauss se le atribuyen tres grandes logros en el estudio del geomagnetismo: la medición absoluta del campo, su análisis en términos de armónicos esféricos y la organización (junto con su equipamiento) de observatorios magnéticos alrededor del mundo.

Mediante un experimento adicional a los empleados en aquella época, Gauss pudo conocer la componente horizontal del campo magnético, algo nunca logrado hasta entonces. Con este nuevo procedimiento Gauss empleó el momento magnético de una aguja magnética suspendida y obtener la componente horizontal. Este nuevo procedimiento para determinar el campo magnético fue empleado hasta mediados del siglo pasado.

Gauss organizó una red de observatorios motivado por von Humboldt, debido a la necesidad de contar con mediciones sistemáticas del campo magnético. Debido a la expansión del Imperio Británico la red de observatorios pudo extenderse alrededor del mundo en algunas de sus colonias. Gracias a este trabajo de cooperación internacional se pudo tener un esquema más completo y preciso del campo geomagnético.

Aunque varios científicos utilizaron los armónicos esféricos para encontrar la función que describiera el campo geomagnético, como es el caso del matemático francés Adrien-Marie Legendre, fue Gauss quien obtuvo mejores resultados debido a la interpretación que dio de estas funciones. Además, la precisión en sus resultados solamente puede explicarse debido a que utilizó la información más precisa disponible de su tiempo.

Gauss supuso que el campo geomagnético se originaba en el interior de la Tierra. Entonces al suponer que la Tierra es una bola de radio a , Gauss decidió utilizar coordenadas esféricas para encontrar el campo magnético en el exterior de la bola. Es decir, sean (r, θ, λ) las coordenadas esféricas, siendo r el radio, θ la co-latitud ($0 \leq \theta < \pi$) y λ la longitud ($0 \leq \lambda < 2\pi$). Si $V(r, \theta, \lambda)$ es el potencial escalar magnético:

$$\Delta V = 0 \quad \text{para } r > a,$$

entonces:

$$V(r, \theta, \lambda) = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} [g_n^m \cos m \lambda + h_n^m \sin m \lambda] P_n^m(\cos \theta)$$

Si se mide la intensidad del campo en la superficie terrestre, entonces se conoce $|V|$, por tanto el problema consiste en hallar los coeficientes g_n^m y h_n^m . Gauss utilizó el método de mínimos cuadrados, que él inventó, para encontrar 24 coeficientes desconocidos resolviendo 124 ecuaciones, es decir, calculó los coeficientes hasta g_4^4 , h_4^4 ignorando los h_n^0 (ya que $\sin 0 = 0$) y haciendo $g_0^0 = 0$, pues es el coeficiente del monopolo magnético que aún no ha sido observado en la naturaleza.

Los resultados mostraron un predominio del término dipolar correspondiente al coeficiente g_1^0 pues Gauss encontró que su valor era $g_1^0 = -32350$, mientras que el valor de los otros coeficiente decrecía en magnitud considerablemente, como por ejemplo $g_1^1 = -3110$ o $h_1^1 = 6250$. Además, los cálculos tuvieron una gran precisión con respecto a los actuales [2], pues los coeficientes calculados en 2010 son $g_1^0 = -29496,5$, $g_1^1 = -1585,9$ y $h_1^1 = 4945,1$ los cuales conservan el mismo orden de

magnitud. Compárese el mapa de la intensidad total del campo elaborado por Gauss con los más recientes en la Figura 1.2. Esto impactó notablemente a la comunidad científica, ya que esta teoría innovó el estudio del campo magnético terrestre. Para mayor detalle acerca de estas contribuciones puede consultarse [3].

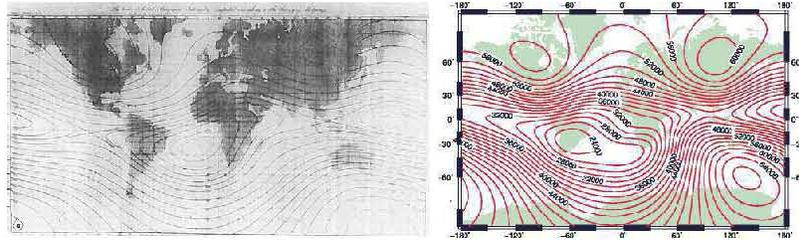


Figura 1.2: Mapas de la intensidad total del campo geomagnético elaborados por Gauss (izquierda) y por científicos utilizando el modelo IGRF en el año 2010 (derecha).

Actualmente se sigue utilizando métodos similares a los empleados por Gauss para calcular los coeficientes de los armónicos esféricos de la función V , véase [2] y [4] como ejemplos. En este último artículo se actualizan y añaden los coeficientes de los armónicos esféricos hasta orden 13, donde es interesante destacar que a pesar de la variación que han tenido los coeficientes en los últimos 100 años aún continúan dominando los términos del dipolo. Además, este artículo muestra la colaboración científica internacional en el que se utilizaron datos de 49 países como Australia, Argelia, China, o México, en donde la UNAM proveyó los datos para este último caso. Esto refleja la internacionalización con la que se aborda el problema que Gauss comenzó a resolver hace casi 200 años.

A continuación se describirá el problema objeto de esta tesis.

1.3. El problema no lineal asociado

Los problemas clásicos de la ecuación de Laplace con valores en la frontera consisten en encontrar una función armónica en cierto dominio, con condiciones de frontera tipo: 1) Dirichlet, 2) Neumann ó 3) Robin. En términos matemáticos, se quiere encontrar una función escalar $u(\mathbf{x})$ para \mathbf{x} en cierto dominio Ω , que satisfaga:

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } \Omega,$$

tal que en la frontera $\partial\Omega$ se satisfaga una de las condiciones:

1. Tipo Dirichlet, $u = f$,
2. Tipo Neumann, $\nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial n} = f$ donde \mathbf{n} es el vector normal externo a $\partial\Omega$,
3. Tipo Robin, $u + h\frac{\partial u}{\partial n} = f$,

donde h es una constante real y f es una función real dada definida en $\partial\Omega$ que satisface ciertas condiciones de regularidad.

Estos problemas han sido ampliamente estudiados para diferentes geometrías en varias dimensiones. Sin embargo, si la condición de frontera no es de los tipos 1), 2) ó 3), ahí hay mucho que estudiar. Una gama de esos problemas son los llamados de condiciones *oblicuas* de frontera donde la condición está dada sobre la derivada direccional de u en una dirección que no es la del vector normal \mathbf{n} . Es decir:

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = f, \quad \text{en } \partial\Omega,$$

donde η es un vector diferente de \mathbf{n} .

En particular, en este trabajo nos concentraremos en uno de estos problemas no típicos de la ecuación de Laplace que surge del problema físico que fue originalmente planteado por Gauss alrededor de 1830 y que sigue vigente. Este problema consiste de reconstruir el campo magnético externo de la Tierra de la medición de la intensidad de dicho campo sobre la superficie terrestre.

Determinar la intensidad del campo magnético en la superficie terrestre es viable sobre grandes extensiones y es más fácil que medir su dirección. El problema se plantea de manera muy sencilla, si \mathbf{B} es el campo magnético exterior de la Tierra, entonces existe $u(\mathbf{x})$ función real definida en $\Omega =$ exterior de la Tierra, tal que $\mathbf{B} = \nabla u$, y satisface:

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad |\nabla u| = f, \quad \text{en } \partial\Omega. \quad (1.1)$$

No solo este problema se sale de los casos clásicos de la ecuación de Laplace sino que además la condición de frontera es no lineal. La no-linealidad hace el estudio de este problema particularmente complejo.

Este problema permaneció abierto hasta que en 1967 el geofísico estadounidense George E. Backus encontró algunas peculiaridades del mismo en los casos 2-dimensional y n -dimensional con $n \geq 3$, véanse los artículos [5] y [6]. Lamentablemente en el caso 3-dimensional la solución que Backus encontró no era única. La unicidad fue encontrada en [7] al añadir una condición extra en la frontera.

El objetivo de esta tesis es recopilar las soluciones que los distintos científicos han encontrado, desde la multiplicidad de soluciones que Backus encontró hasta la unicidad en el caso 3-dimensional. Para ello se desarrollará la argumentación que los investigadores emplearon en cada uno de sus artículos.

En la primera parte de la tesis se abordará el caso 2-dimensional en el interior de un círculo y del semiplano, este último representando el problema de las bandas magnéticas en el fondo marino. La segunda parte se enfocará en el problema para el exterior de la bola, donde se mostrará un caso donde hay multiplicidad de soluciones y posteriormente se enunciará la condición que hace posible su unicidad.

1.4. El problema en \mathbb{R}^2

Antes de plantear el problema a resolver se requiere de la siguiente definición:

Definición. 1. *Un campo vectorial \mathbf{b} definido en un subconjunto abierto Ω del espacio euclideo n -dimensional \mathbb{R}^n es llamado un **campo vectorial armónico en Ω** si en cualquier subconjunto simplemente conexo de Ω existe una función escalar armónica b cuyo gradiente es igual a \mathbf{b} .*

Dicho en otras palabras si \mathbf{b} es un campo vectorial armónico en Ω con b la función escalar armónica en $E \subseteq \Omega$, E simplemente conexo, entonces b satisface las siguientes propiedades:

1. $\Delta b(\mathbf{x}) = 0$, \mathbf{x} en E ,
2. $\nabla b(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, \mathbf{x} en E .

En el caso de la ecuación (1.1) se busca una solución del problema de Laplace en un subconjunto de \mathbb{R}^2 , donde se conoce la norma del gradiente de esta función en la frontera. Es decir, si $b(x, y)$ es la solución definida en un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, debe cumplir:

$$\Delta b(x, y) = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = 0. \quad \text{con } (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (1.2)$$

con condiciones de frontera

$$\| \mathbf{b} \| = | \nabla b(x, y) | = f(x, y) \quad \text{cuando } (x, y) \in \partial\Omega. \quad (1.3)$$

Si el conjunto Ω no está acotado se debe añadir una condición de decaimiento en el infinito.

La manera más natural de abordar este problema es pasándose al plano complejo para utilizar los poderosos resultados de la variable compleja. Para ello, se verá a continuación la relación entre un campo armónico y una función analítica.

Se define el siguiente campo vectorial $\mathbf{b}(x, y)$ en sus componentes cartesianas como:

$$\mathbf{b}(x, y) = \nabla b(x, y) = b_x(x, y) \hat{x} + b_y(x, y) \hat{y} \quad (1.4)$$

donde b_x y b_y son las derivadas parciales de b respecto a las coordenadas x, y respectivamente y los vectores \hat{x}, \hat{y} son sus vectores unitarios correspondientes.

Puesto que $b(x, y)$ es solución de (1.2) y (1.3), entonces es una función escalar armónica del campo vectorial armónico $\mathbf{b}(x, y)$ en Ω cuya norma debe ser igual a $f(x, y)$ en $\partial\Omega$.

Existe una equivalencia entre encontrar una función escalar armónica y encontrar una función analítica de una variable compleja. Para probarlo se observa lo siguiente: dado que las derivadas parciales de orden uno de $b(x, y)$ deben ser continuas en Ω , al reescribir (1.1) obtenemos:

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} = -\frac{\partial b_y}{\partial y}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 b}{\partial y \partial x} = \frac{\partial b_x}{\partial y}. \quad (1.6)$$

Si se define $z \in \mathbb{C}$ como $z = x + iy$, entonces la función $b(x, y)$ como función de z equivalente de una variable compleja (abusando de la notación) es la siguiente:

$$b(z) = b_x(x, y) - i b_y(x, y) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (1.7)$$

Con esta definición $b(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en Ω , pues usando (1.5) y (1.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_x b_x = -\partial_y b_y &\Rightarrow u_x = v_y, \\ \partial_x b_y = \partial_y b_x &\Rightarrow u_y = -v_x, \end{aligned}$$

lo que implica que $b(z)$ es analítica en Ω .

Además, la intensidad de $b(z)$ satisface:

$$\| \mathbf{b} \| = \sqrt{(b_x)^2 + (b_y)^2} = | b(z) |.$$

Dada esta propiedad, si $b(z)$ es analítica y distinta de cero en Ω , se toma una rama de la función compleja $\log(z)$, donde la función compuesta $\log(b(z))$ sea analítica. Por definición

$$\log(b(z)) = \ln | b(z) | + i \operatorname{arg}(b(z)),$$

y como $\log(b(z))$ es analítica en la rama elegida, entonces esto implica que sus partes real e imaginaria son armónicas. Puesto que se conoce el valor de $| b(z) |$ en la frontera, se conoce la parte real de $\log(b(z))$ en la frontera. Así, encontrar la parte real de la función compuesta se ha convertido en hallar una solución al problema de la ecuación de Laplace con condiciones de frontera tipo Dirichlet. Es decir, si $w(x, y) = \log| b(x, y) |$, entonces w satisface:

$$\Delta w = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad w = \log(f(x, y)) \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Resta determinar la componente imaginaria de $\log(b(z))$. Pero como las componentes real e imaginaria de la función compuesta deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esto permite determinar la componente imaginaria excepto por alguna constante. De este modo es posible conocer las componentes de la función compleja $b(z)$ al conocer sus partes real e imaginaria utilizando la condición de frontera (1.3).

Dada la relación entre funciones escalares armónicas con las de una variable compleja se ha hallado una solución para el problema en \mathbb{R}^2 . Resta analizar su unicidad. Sin embargo, si se carece de mayor información es posible encontrar una infinidad de soluciones en \mathbb{R}^2 como en el siguiente ejemplo.

Sea $b(z)$ una función analítica en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante. Si se define la función $b_\alpha(z) = e^{i\alpha} b(z)$, entonces $b_\alpha(z)$ es analítica en Ω y $| b | = | b_\alpha |$ en $\bar{\Omega}$ (la cerradura de Ω). Y como la elección de α fue arbitraria, se tiene una infinidad de soluciones.

La nueva función $b_\alpha(z)$ puede interpretarse como una rotación del campo vectorial

armónico. Más aún, si \mathbf{b} es un campo vectorial armónico en Ω , su rotación es otro campo vectorial armónico con la misma intensidad que \mathbf{b} en $\overline{\Omega}$. Esto quiere decir que cada campo vectorial armónico 2-dimensional pertenece a una familia uniparamétrica de campos vectoriales armónicos. A continuación se analizarán dos casos diferentes del problema bidimensional.

1.5. El problema interior

En este caso se debe encontrar la solución al problema (1.2) con condiciones de frontera (1.3) cuando el dominio es el interior del círculo de radio a , donde a es una constante real. En la sección anterior se mostró la equivalencia de encontrar esta función escalar armónica con la de encontrar una función de una variable compleja que sea analítica y de la forma (1.7), por lo tanto se buscará esta solución en el plano complejo.

Dado que el teorema del mapeo de Riemann [8] establece que cada región conexa E en el plano complejo (excepto el mismo plano) es conformalmente equivalente al disco unitario, sin pérdida de generalidad se puede tomar $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ como el dominio de la función analítica que se pretende encontrar. A continuación se presentará la no unicidad de su solución siguiendo el argumento expuesto previamente.

Sea $z_0 \in \Omega$, se define

$$h(z_0, z) = \frac{z - z_0}{z\overline{z_0} - 1},$$

donde $\overline{z_0}$ es el complejo conjugado de z_0 .

Se afirma que la función $h(z_0, z)$ es analítica en $\overline{\Omega}$, es decir en $|z| \leq 1$. Si la función $z\overline{z_0} - 1 = 0$, entonces h no estaría definida. En otras palabras si $z = z_0^{-1}$, como $z_0 \in \Omega$, entonces $|z_0^{-1}| > 1$, luego $z_0^{-1} \notin \overline{\Omega}$ y de aquí $h(z_0, z)$ es analítica en $\overline{\Omega}$.

De hecho si $|z| = 1$, entonces $z\overline{z} = 1$ y h estaría definida,

$$h(z_0, z) = \frac{1}{z} \frac{z - z_0}{\overline{z_0} - \overline{z}}.$$

Como $|z - z_0| = |\overline{z_0} - \overline{z}|$, entonces $|h(z_0, z)| = 1$, para $z \in \partial\Omega$.

Para b definida en (1.7) se tiene que el producto $h(z_0, z)b(z)$ es analítica en Ω y tiene el mismo módulo que $b(z)$ en $\partial\Omega$. En general si z_1, \dots, z_n , pertenecen a Ω y σ es una constante real, entonces las dos funciones analíticas $b(z)$ y

$$\tilde{b}(z) = e^{i\sigma} b(z) \prod_{j=1}^n h(z_j, z). \quad (1.8)$$

tienen el mismo módulo en $|z| = 1$. Obsérvese que $h(z_j, z) = 0$ únicamente cuando $z = z_j$, en donde algunos z_j 's pueden repetirse, así que \tilde{b} tiene ceros repetidos en $|z| < 1$.

Esto implica que si $b(z)$ es solución de la ecuación de Laplace con condiciones de frontera (1.3) también lo es $\tilde{b}(z)$ para cualesquiera σ y n fijos. Si los ceros de la función y σ se desconocen hay una infinidad de soluciones del problema (1.2) con las condiciones de frontera ya mencionadas. Sin embargo de conocerse los ceros y σ se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.5.1. *Sea Ω un subconjunto abierto, acotado y simplemente conexo del plano cuya cerradura es simplemente conexa y tiene a Ω como su interior. Sea m una función continua, real y positiva. Sea α cualquier número real. Sean z_1, \dots, z_n , cualesquiera puntos en Ω (pueden repetirse), y sea z_0 cualquier punto en Ω diferente de z_1, \dots, z_n . Entonces existe precisamente una función $\tilde{b}(z)$ con las siguientes propiedades:*

1. $\tilde{b}(z)$ es analítica en Ω .
2. $|\tilde{b}(z)|$ es continua en $\bar{\Omega}$.
3. $|\tilde{b}(z)| = m(z)$ en $\partial\Omega$.
4. $\tilde{b}(z)$ tiene ceros dentro de Ω únicamente en z_1, \dots, z_n , algunos de estos podrían repetirse si la multiplicidad es mayor que 1.
5. $\arg(\tilde{b}(z_0)) = -\alpha$.

Demostración.

Nuevamente por el teorema del mapeo de Riemann es suficiente probar la existencia cuando Ω es el disco unitario $|z| < 1$. Entonces dada la ecuación (1.8), si $b(z)$ existe y cumple las cinco propiedades del teorema para $n = 0$ y $\alpha = 0$, entonces $\tilde{b}(z)$ las cumplirá para n y α arbitrarios, siempre y cuando $\sigma = -\alpha - \kappa$, definiendo a κ como

$$\kappa = \arg \left(\prod_{j=1}^n h(z_j, z_0) \right).$$

Al suponer que $b(z)$ existe, la función compuesta $\log(b(z))$ es analítica en Ω escogiendo una rama dentro de Ω de modo que sus partes real e imaginaria son armónicas. En ese caso, su parte real es igual a $\ln|m(z)|$ en $\partial\Omega$. Es decir, si $Re[\log(b(z))] = u(r, \theta)$, con (r, θ) las coordenadas polares, tales que $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$, entonces u deberá satisfacer

$$\begin{aligned} \Delta u(r, \theta) &= 0, & \text{para } (r, \theta) \in \Omega, \\ u(1, \theta) &= \ln|m(z)| = \ln|m(\theta)|, & \text{para } 0 \leq \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

La solución $u(r, \theta)$ de este problema de Laplace con condiciones de frontera tipo Dirichlet [9] es bien conocida,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\xi) + r^2} \ln|m(\xi)| d\xi.$$

Se define la parte imaginaria $Im(\ln b(z)) = v(r, \theta)$, haciendo que cumpla las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares, esto es

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Como $Im[\log(b(z))] = Im[\ln|b(z)| + i \arg(b(z))] = \arg(b(z))$ y se busca que se satisfaga la propiedad 5 con $\alpha = 0$, esto conlleva a imponer la condición $v(z_0) = 0$.

Dado que es posible encontrar las funciones $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$, afirmamos que la función $b(z) = \exp\{u(r, \theta) + i v(r, \theta)\}$ cumple las propiedades uno a la cuatro.

En efecto, dado que u y v son funciones armónicas conjugadas en Ω , las funciones $u(r, \theta)$, y $v(r, \theta)$ son analíticas en la cerradura. Entonces la función $b(z)$ es analítica en Ω , pues es la suma y composición de funciones analíticas.

Como las funciones $u(z)$ y $\exp(z)$ son continuas en $\bar{\Omega}$, su composición $\exp\{u(z)\} = |b(z)|$ es continua en $\bar{\Omega}$, implicando que la propiedad 2 se cumple. La propiedad 3 se cumple puesto que en la frontera de Ω la función $u(z) = \ln m(z)$, entonces, $b(z) = \exp\{\ln m(z)\} = m(z)$ en $\partial\Omega$.

Además, como la función $\exp(z) \neq 0$, la función $b(z) \neq 0$ en Ω . Por tanto se cumple la propiedad 4; nótese que para $n = 0$ la función $b(z)$ no debe tener ceros en Ω . Por otro lado v debe cumplir $v(z_0) = 0$, esto implica que el $\arg(b(z_0)) = 0$ y por ende cumple la propiedad 5. Entonces la función $b(z)$ existe y cumple las propiedades del teorema.

Debido a que la función $b(z)$ existe, por lo mencionado al inicio de esta demostración, la función $\tilde{b}(z)$ existe y cumple las propiedades uno a cinco para cualesquiera números reales n y α . Resta probar la unicidad de la solución.

Supóngase que $\tilde{b}_1(z)$ y $\tilde{b}_2(z)$ son dos soluciones analíticas que satisfacen las propiedades del teorema para las mismas $m(z), \alpha, n, z_0, z_1, \dots, z_n$. Entonces $\beta(z) = \frac{\tilde{b}_1(z)}{\tilde{b}_2(z)}$ es analítica y distinta de cero en Ω . De igual manera $|\beta(z)|$ es continua en $\bar{\Omega}$ y como $|b_1| = |b_2| = m(z)$ en $\partial\Omega$, entonces $|\beta(z)| = 1$ en $\partial\Omega$. Además, debido a que $\arg(b_1(z_0)) = \arg(b_2(z_0)) = -\alpha$, entonces $\arg(\beta(z_0)) = 0$.

Por definición $\beta(z) \neq 0$ en Ω y dado que la función logaritmo es analítica en una rama contenida en el mismo dominio, entonces $\log(\beta(z))$ es analítica en Ω y su parte real, $u_\beta(z) = \ln|\beta(z)|$, es armónica en $\bar{\Omega}$. Como por hipótesis las normas de las funciones b_1 y b_2 son iguales en la frontera, se tiene que $\ln|\beta(z)| = 0$ en $\partial\Omega$. Pero en la frontera la función vale cero y debido a que es solución del problema de Laplace con condiciones de frontera tipo Dirichlet, la cual es única, esto implica que la función $u_\beta(z) = \ln|\beta(z)| = 0$ en Ω .

Ya que $u_\beta(z) = 0$ en Ω , la armónica conjugada $v_\beta(z) = \text{Im}(\beta(z))$ debe ser una constante en este dominio. Pero en z_0 la función $v_\beta(z_0) = 0$, entonces $v_\beta(z) = 0$ en Ω . Por tanto $\log(\beta(z)) = 0$ en Ω , lo que a su vez implica que $\beta(z) = 1$ en Ω . Luego $\tilde{b}_1(z) = \tilde{b}_2(z)$ en Ω , probando la unicidad de la solución $\tilde{b}(z)$ para los ceros y el valor de α dados.

Parafraseando el teorema anterior tenemos el siguiente resultado:

Si se quiere construir un campo vectorial armónico \mathbf{b} en una región V de manera unívoca, basta tomar un número finito de puntos $z_1 \dots, z_n$ en V en donde se anule el campo \mathbf{b} , un punto z_0 en V distinto a los anteriores en donde se conozca la dirección del campo y una función continua y positiva $m(z)$ definida en la frontera de V que satisfaga

$$|\mathbf{b}(z)| = m(z) \quad \text{en } \partial V.$$

A continuación presentaremos una interesante aplicación para el caso bidimensional.

1.6. Un problema aplicado: las franjas magnéticas del fondo marino.

Fue hasta la década de los años cincuenta cuando se contó con la tecnología necesaria para medir la intensidad del campo geomagnético en el fondo marino. Los científicos reportaron anomalías al registrar estas mediciones en algunas regiones, formando patrones parecidos a las rayas de una cebra en el fondo del mar. A este fenómeno se le conoce como el franjeado magnético o *magnetic striping* en inglés.

Como ya se había mencionado previamente, este fenómeno se origina cuando el magma del manto terrestre brota de alguna grieta en el fondo oceánico y posteriormente se enfría, quedando permanentemente magnetizado con la intensidad y dirección del campo geomagnético. El brote continuo de lava, desde hace millones de años, ha ocasionado que se formen estos patrones de cebra.

Backus logró modelar este fenómeno, particularmente la situación descrita por Mason en [10] que se describe a continuación. En una región cercana a la costa Oeste de los Estados Unidos de América, Mason y otros colaboradores tomaron algunas mediciones de la intensidad magnética del suelo marino. Ellos encontraron anomalías en franjas que tenían una longitud de hasta 300 millas (483 km). Además, el efecto de las rocas magnetizadas desaparecía conforme se incrementa la altitud desde el fondo oceánico, por lo que las mediciones a partir de determinada altura reflejan únicamente el efecto del campo geomagnético generado por el núcleo.

Es posible describir matemáticamente este fenómeno. Como las mediciones de las franjas magnéticas se obtienen al recorrer su anchura, debido a que muchas veces las franjas se encuentran en extensas regiones, se buscan teoremas de existencia y unicidad donde la anchura de las franjas no esté confinada a una zona acotada. Esto implica que el eje donde se toman las mediciones debe ser infinito, en este caso lo denominamos como el eje “ x ”. El eje perpendicular a “ x ” lo denominamos “ ν ”, el cual es paralelo a las franjas. Finalmente el eje “ y ” es perpendicular a los ejes ya mencionados y tiene su origen en el fondo del océano y se prolonga más allá de la superficie del mar. Para mayor claridad véase la Figura 1.3, en donde \hat{x} , $\hat{\nu}$ y \hat{y} son los vectores unitarios de sus respectivos ejes.

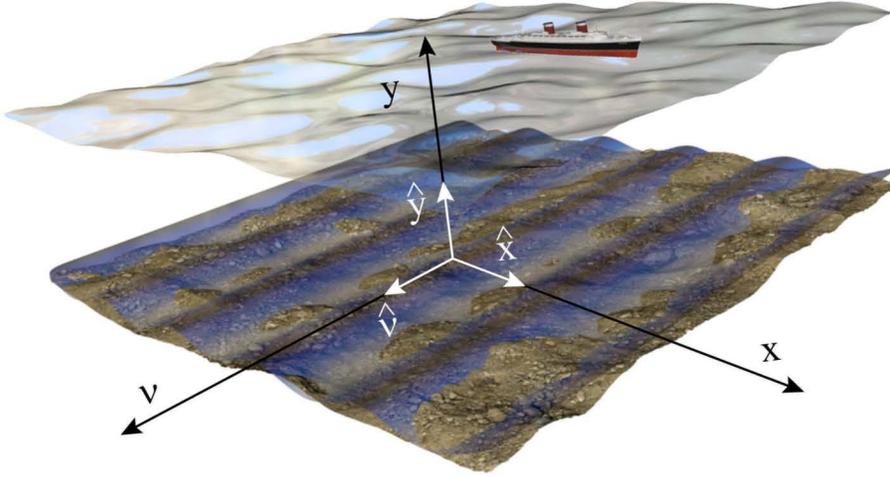


Figura 1.3: Representación visual de cómo se abordará el problema del rayado magnético del fondo marino.

En este caso se buscan campos $\bar{\mathbf{b}}(x, y)$ de la forma

$$\bar{\mathbf{b}}(x, y) = b_x(x, y) \hat{x} + b_y(x, y) \hat{y} + B_\nu \hat{\nu}$$

Con la definición de los vectores unitarios perpendiculares \hat{x} , \hat{y} y $\hat{\nu}$ y dado que las mediciones son tomadas en una línea lo suficientemente pequeña (lo que nos permite ignorar el efecto de la curvatura terrestre), se define el campo geomagnético principal como el vector constante

$$\bar{\mathbf{B}} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_\nu \hat{\nu}.$$

Debido a que el efecto de las rocas magnetizadas desaparece conforme aumenta la altitud, matemáticamente esto es equivalente a imponer que cuando $y \rightarrow \infty$

$$b_x(x, y) \rightarrow B_x \quad \text{y} \quad b_y(x, y) \rightarrow B_y.$$

Si se obtiene el valor de $|\bar{\mathbf{b}}|^2$ y el de B_ν , es posible conocer el valor de la norma $|b_x(x, y) \hat{x} + b_y(x, y) \hat{y}|^2$ como $|\bar{\mathbf{b}}|^2 - B_\nu^2$. Entonces, este problema puede trasladarse al caso 2-dimensional definiendo los siguientes vectores

$$\mathbf{b}(x, y) = b_x(x, y) \hat{x} + b_y(x, y) \hat{y}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}. \quad (1.10)$$

Las ecuaciones (1.9) y (1.10) en \mathbb{R}^2 tienen su equivalente con la función de una variable compleja $b(z) = b_x - ib_y$ y el número complejo $B = B_x - iB_y$ respectivamente. Sea Ω la región del semiplano superior y suponemos que $b(z)$ es analítica y acotada en Ω , es decir existe $M > 0$ tal que $|b(z)| < M$, para todo z en Ω .

También supondremos que se conoce $|b(z)|$ en $\partial\Omega$ y que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} b(x + iy) = B.$$

para cualquier x fijo.

Bajo otras hipótesis adicionales se mostrará que la solución del problema de Laplace no es única. Tenemos la siguiente proposición.

Proposición. 1.6.1. *Sea $b(z)$ una solución al problema de Laplace en el plano Ω , que satisface las propiedades de ser acotada y tener límite con x fijo, y sean z_1, \dots, z_n cualesquiera puntos en Ω , si*

$$\tilde{b}(z) = b(z) \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j}. \quad (1.11)$$

Entonces $|\tilde{b}(z)| = |b(z)|$ en ∂V , $\tilde{b}(z)$ es analítica y acotada en Ω y

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{b}(x + iy) = B.$$

Demostración.

Si $z \in \partial\Omega$ como la parte imaginaria de z es $y = 0$, entonces $z \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

$$|z - \bar{z}_j| = |\bar{z} - \bar{z}_j| = |\overline{z - z_j}| = |z - z_j|,$$

luego

$$|\tilde{b}(z)| = |b(z)| \left| \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right| = |b(z)| \prod_{j=1}^n \frac{|z - z_j|}{|z - \bar{z}_j|} = |b(z)|.$$

Para que $z - \bar{z}_j = 0$ se debe cumplir que $z = \bar{z}_j$. Pero por hipótesis $z_j \in \Omega$, lo cual implica $\bar{z}_j \notin \Omega$. Como z debe ser un elemento de Ω , entonces $z - \bar{z}_j \neq 0$ en Ω para $j = 1, 2, \dots, n$. Esto implica que para cada j , la función $\frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j}$ es analítica en Ω . Por ende $\tilde{b}(z)$ es analítica en Ω .

Afirmamos que $\tilde{b}(z)$ es acotada en Ω . En efecto, como $b(z)$ es acotada por hipótesis, existe $M > 0$ tal que $|b(z)| < M$. Supóngase que $z = a + ib$ y $z_j = \alpha_j + i\beta_j$, con $a, b, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ y $b, \beta_j > 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Entonces, para cada j :

$$\begin{aligned} |z - z_j|^2 &= |z|^2 + |z_j|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_j), \\ |z - \bar{z}_j|^2 &= |z|^2 + |z_j|^2 - 2\operatorname{Re}(zz_j). \end{aligned}$$

Pero $\operatorname{Re}(z\bar{z}_j) = a\alpha_j + b\beta_j$ y $\operatorname{Re}(zz_j) = a\alpha_j - b\beta_j$. Dado que $b, \beta_j > 0$, entonces $\operatorname{Re}(z\bar{z}_j) > \operatorname{Re}(zz_j)$ para cada $j = 1, 2, \dots, n$. Por tanto se cumple que:

$$|z - z_j|^2 < |z - \bar{z}_j|^2 \quad \Longrightarrow \quad \left| \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right| < 1.$$

Esto implica que si $z \in \Omega$, $|\tilde{b}(z)| < M$. Por tanto $\tilde{b}(z)$ es acotada en Ω .

Finalmente, como por hipótesis

$$\lim_{y \rightarrow \infty} b(x + iy) = B,$$

para cualquier x , resta probar que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} = 1.$$

Al fijar x , cada término del producto tiene en el numerador y el denominador el mismo término iy , entonces el límite de cada cociente es 1, haciendo que el límite del producto sea 1. Por tanto, la solución $\tilde{b}(z)$ satisface

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{b}(x + iy) = B.$$

Pero como la elección de los ceros es arbitraria en Ω , entonces existe una infinidad de soluciones. Sin embargo, si se añaden más condiciones es posible llegar al siguiente teorema de unicidad.

Teorema 1.6.1. *Supóngase que $b_1(z)$ y $b_2(z)$ son funciones analíticas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$ tales que $|b_1(z)| = |b_2(z)|$ en $\partial\Omega$, es decir cuando $y = 0$. Supóngase que $b_2 \neq 0$ en $\overline{\Omega}$ y que existen constantes m, M positivas tales que $|b_1(z)| \geq m$ y $|b_2(z)| \leq M$ en $\overline{\Omega}$. Entonces existe una constante real α tal que $b_2(z) = e^{i\alpha}b_1(z)$ en $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Sean $b_1(z)$ y $b_2(z)$ dos funciones analíticas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$ que cumplen las hipótesis del teorema. Afirmamos que la siguiente función

$$F(z) = i \log \left(\frac{b_2(z)}{b_1(z)} \right) = -\arg \left(\frac{b_2(z)}{b_1(z)} \right) + i \ln \left| \frac{b_2(z)}{b_1(z)} \right|, \quad \text{con } \arg \left(\frac{b_2(z)}{b_1(z)} \right) \in [0, 2\pi)$$

es analítica en Ω . Esto es debido a que $b_1(z)$ y $b_2(z)$ son analíticas en Ω y $b_1(z), b_2(z)$ son diferentes de cero en $\overline{\Omega}$; por tanto, la composición $i \log \left(\frac{b_2(z)}{b_1(z)} \right)$ es analítica en el mismo conjunto.

Además

$$\text{Im}(F(z)) = \ln \left| \frac{b_2(z)}{b_1(z)} \right| \leq \ln \frac{M}{m}. \quad (1.12)$$

Dado que en la frontera $|b_1(z)| = |b_2(z)|$, entonces $\text{Im}(F(z)) = 0$ en $\partial\Omega$. Así que por el principio de reflexión de Schwartz de variable compleja $F(z)$ se puede extender a una función analítica en todo el plano complejo, es decir F es una función entera de z .

La generalización de Jania del Teorema de Picard [11] establece lo siguiente: si $z_0 = \infty$ es una singularidad esencial de F y $W = \{z \in \mathbb{C} \mid \theta_1 < \arg(z) < \theta_2\}$ es una cuña arbitraria, entonces hay a lo más un número complejo ζ que no es un valor de $F(z)$ para una infinidad de z 's en W .

Supóngase que z_0 es una singularidad esencial de F , si $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$, se tiene que $W = \Omega$. Como W es el conjunto de números complejos cuyo componente imaginario es positivo, hay una infinidad de números complejos cuya parte imaginaria es mayor que $\ln \frac{M}{m}$. Dado que en Ω se cumple la desigualdad (1.12), esto implica que hay más de un número complejo ζ , perteneciente a la cuña W , que no pueden representarse como $F(z) = \zeta$. Por tanto, usando el teorema anterior, $z_0 = \infty$ no puede ser una singularidad esencial de F .

Note que $|F(z)| < \sqrt{(2\pi)^2 + \left(\ln \frac{M}{m}\right)^2}$. Dado que F es una función entera y acotada en el plano complejo, por el Teorema de Liouville [8] se tiene que $F(z) = c$ con $c \in \mathbb{C}$ constante. Pero como $\text{Im}(F(z)) = 0$ en $\partial\Omega$, entonces $F = -\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, es decir

$$-\alpha = i \log \left(\frac{b_2(z)}{b_1(z)} \right) \implies b_2(z) = e^{i\alpha} b_1(z).$$

Por tanto se cumple el Teorema 1.6.1. La unicidad es falsa si no se pide que $|b_1(z)| \geq m > 0$ en $\bar{\Omega}$. Como contraejemplo puede tomarse $b_2(z) = 1, b_1(z) = e^{iz}$. Notemos que b_1 no cumple con esta desigualdad, pues $|b_1(z)| = |e^{ix-y}| = e^{-y} \leq 1$ para $y \geq 0$, o sea en $\bar{\Omega}$. También se cumple que b_1, b_2 son distintas de cero en $\bar{\Omega}$ y $|b_1(z)| = 1 = |b_2(z)|$ en $\partial\Omega$. Sin embargo, no existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$1 = e^{i\alpha} e^{iz}, \quad \forall z \in \bar{\Omega},$$

ya que $e^{iz+i\alpha} = e^{i(x+\alpha)-y} = 1$ sí y sólo si $x = n\pi - \alpha, y = 0$ y todos estos puntos están en $\partial\Omega$.

Resta probar la existencia de la función que estableceremos en el siguiente

Teorema 1.6.2. *Sea $\hat{u}(x)$ una función real y continua en \mathbb{R} . Suponga que existen constantes reales M y $\langle u \rangle$ tales que:*

$$|\hat{u}(x)| \leq M.$$

$$\langle u \rangle = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Entonces existe una función $b(z)$ analítica en Ω con estas propiedades:

1. $|b|$ es continua en $\bar{\Omega}$.
2. $|b(x)| = e^{\hat{u}(x)}$ para todo x real.
3. $e^{-M} \leq |b(z)| \leq e^M$ en Ω .
4. Para todo x fijo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |b(x + iy)| = \exp \langle u \rangle.$$

Demostración.

Para el semiplano $0 < y < \infty$

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{u}(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

es la solución de la ecuación de Laplace en Ω , con condiciones de frontera tipo Dirichlet $u(x, 0) = \widehat{u}(x)$ para todo x en \mathbb{R} .

Se define $v(x, y)$ en Ω como la función armónica conjugada de $u(x, y)$, que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y tal que $v(0, 0) = 0$. De esta forma aseguramos la unicidad de $v(x, y)$. Además si $|\widehat{u}(x)| \leq M$, entonces:

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &= \frac{y}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{u}(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \right| \leq \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y(1 + (\frac{x-\xi}{y})^2)} d\xi \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \eta^2} d\eta = M \end{aligned}$$

Dado que existen $u(x, y)$, $v(x, y)$, que por construcción son únicas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en Ω , la función $f(z) = u(z) + iv(z)$ es una función analítica en Ω . Al definir $b(z) = \exp\{f(z)\}$ se tiene

$$b(z) = \exp\{f(z)\} = e^{\{u(x,y)+iv(x,y)\}} = e^{u(x,y)} e^{iv(x,y)}.$$

Entonces $b(z)$ satisface:

1. $|b(z)| = e^{u(x,y)}$ es continua en $\overline{\Omega}$.
2. $|b(x)| = |b(x + i0)| = e^{u(x,0)} = e^{\widehat{u}(x)}$ para todo x real.
3. Por la desigualdad anterior se sabe que la función $Re(f(z)) = u(x, y)$ está acotada por M . Dado que la función exponencial real es monótona creciente se preservan las desigualdades. Por tanto $e^{-M} \leq |b(z)| \leq e^M$ en Ω .

A fin de que se cumpla la propiedad 4, hay que probar que para todo x fijo,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = \langle u \rangle.$$

Defínase la función

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Note que esta función cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(t + \frac{x}{y} \right) \tilde{u}(x + yt) \right] = \widehat{u}(x + yt),$$

ya que

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}(x + yt) = \frac{y}{x + yt} [\hat{u}(x + yt) - \tilde{u}(x + yt)]$$

Además

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \hat{u}(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{u}(\xi)}{y (1 + (\frac{x-\xi}{y})^2)} d\xi.$$

Haciendo el cambio de variables $t = \frac{\xi-x}{y}$, $d\xi = y dt$, e integrando por partes se obtiene:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{u}(x + yt)}{1 + t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{d}{dt} [(t + \frac{x}{y}) \tilde{u}(x + yt)]}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(t + \frac{x}{y}) \tilde{u}(x + yt)}{1 + t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (t + \frac{x}{y}) \tilde{u}(x + yt) \frac{t}{(1 + t^2)^2} dt. \end{aligned}$$

Pero usando la hipótesis

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tilde{u}(x + yt) = \langle u \rangle \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{(t + \frac{x}{y}) \tilde{u}(x + yt)}{1 + t^2} = 0.$$

Por tanto

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (t + \frac{x}{y}) \tilde{u}(x + yt) \frac{t}{(1 + t^2)^2} dt.$$

Fijando x y t , se define

$$f_y = \frac{t}{(1 + t^2)^2} (t + \frac{x}{y}) \tilde{u}(x + yt).$$

Entonces

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f_y = \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} \langle u \rangle.$$

De nuevo, como por hipótesis $|\hat{u}(x)| \leq M$, entonces

$$|\tilde{u}(x)| \leq \frac{1}{x} ||x| M = M, \quad \Longrightarrow \quad |f_y| \leq \left(\frac{t^2}{(1 + t^2)^2} + \frac{|t|}{(1 + t^2)^2} |x| \right) M = g(t),$$

siempre y cuando $y \geq 1$.

Integrando por partes $g(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt &= M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt + |x| \left(\int_{-\infty}^0 \frac{-t}{(1+t^2)^2} dt + \int_0^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt \right) \right\} \\ &= M \left(\frac{\pi}{2} + |x| \right) < \infty. \end{aligned}$$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} \left(t + \frac{x}{y}\right) \tilde{u}(x+yt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \langle u \rangle \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \langle u \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto $b(z)$ existe, es analítica en Ω y cumple las propiedades 1, 2, 3 y 4 del teorema. Lo anterior implica que existe la solución al problema de Laplace, que converge a un vector cuando la coordenada x se fija y la coordenada y tiende al infinito.

Los teorema y la proposición descritas en esta sección dan solución al problema de las franjas magnéticas, ya que pueden parafrasearse de la siguiente forma:

Para encontrar el campo vectorial armónico \mathbf{b} en el semiplano, dado que se conoce su magnitud en la frontera (el fondo marino) y cuya norma converge a la del campo geomagnético principal \mathbf{B} , es necesario que exista la función \hat{u} y las constantes reales M y $\langle u \rangle$ como en el Teorema 1.6.2. Además, es posible incluir ceros a esta solución (Proposición 1.6.1) y si existe otra solución cuya norma esté acotada inferiormente por alguna constante positiva, entonces esta nueva solución es solamente una rotación de la primera

Aunque los resultados expuestos en este primer capítulo son interesantes, no solucionan el problema tridimensional que intentó resolver Gauss. En la siguiente sección se mostrarán los resultados que encontró Backus acerca de la no unicidad de las soluciones, pero que al añadir una condición extra es posible obtenerla.

Capítulo 2

El caso exterior en \mathbb{R}^3

Para facilitar el estudio del problema del campo geomagnético externo, primero hay que definir la región de estudio; en este caso se supondrá que la Tierra es una bola de radio a , cuya frontera es la esfera S . Así, el problema externo consiste de encontrar el campo magnético que actúa en el exterior ($r > a$) de la superficie S , si únicamente se conoce el valor de su intensidad en la frontera ($r = a$). Matemáticamente el problema puede plantearse de la siguiente forma.

Sean (x, y, z) las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 y (r, θ, φ) sus coordenadas esféricas tales que $x + iy = r \sin \theta e^{i\varphi}$ y $z = r \cos \theta$. Sea V un subconjunto abierto, acotado y simplemente conexo 3-dimensional (en este caso la bola de radio a) y $\partial V = S$ su frontera con vector normal externo \mathbf{n} .

Se busca encontrar las soluciones u de la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^3 - V$, el exterior de V , esto es:

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, \quad \text{en } r > a \quad (2.1)$$

que decaiga a cero cuando el radio r tiende a ∞ , tal que la norma de su gradiente en la superficie terrestre sea una función dada real y positiva g , es decir:

$$|\nabla u(a, \theta, \varphi)| = g, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2.2)$$

En la primera parte de esta sección se probará la no unicidad de la solución utilizando los resultados de George Backus en [6], mientras que en la segunda parte se darán las condiciones necesarias encontradas por M. C. Jorge y R. Magnanini en [7] para

lograr la unicidad.

2.1. Multiplicidad de soluciones

Como ya se mencionó al inicio de este capítulo, el problema consiste en encontrar la solución $u(r, \theta, \varphi)$ que satisfaga (2.1), con condiciones de frontera (2.2) y que decaiga a cero en el infinito. Aunque Backus no establece las condiciones para obtener la existencia, propone el siguiente ejemplo para mostrar la no unicidad de la solución. Sean u y v dos soluciones del problema externo, entonces en la frontera $r = a$ satisfacen:

$$|\nabla u(a, \theta, \varphi)| = |\nabla v(a, \theta, \varphi)|,$$

o de forma equivalente

$$\nabla u \cdot \nabla u - \nabla v \cdot \nabla v = 0. \quad \text{ó} \quad (\nabla u + \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) = 0, \quad r = a.$$

Definimos las funciones ψ y ϕ como $\psi = u - v$ y $\phi = u + v$. Entonces ψ y ϕ deben satisfacer (2.1) y por lo mencionado anteriormente, la condición (2.2) es equivalente a la expresión

$$\nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0, \quad \text{en } r = a. \quad (2.3)$$

A continuación se tomará un caso muy particular, en donde se supondrá que $\phi = \cos \theta (a/r)^2 = \mu (a/r)^2$, que es el potencial dipolar magnético que converge a cero cuando r tiende a infinito. Es intuitivo tomar el dipolo magnético debido a que el campo geomagnético es predominantemente dipolar.

De la definición del gradiente en coordenadas polares, la condición en la frontera (2.3) es igual a:

$$\partial_r \phi \partial_r \psi + \frac{1}{a^2} \partial_\theta \phi \partial_\theta \psi = 0. \quad \text{para } r = a, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

la dependencia en φ desaparece pues la función ϕ no depende de esta variable.

Ya que $\partial_\theta = -\sin \theta \partial_\mu$, con $\mu = \cos \theta$, la condición en la frontera queda establecida como:

$$(1 - \mu^2) \partial_\mu \psi - 2\mu a \partial_r \psi = 0, \quad \text{para } r = a, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2.4)$$

Resumiendo, se quiere encontrar una función ψ que satisfaga:

$$\Delta \psi = 0, \quad \text{para } r > a, \quad (1 - \mu^2) \partial_\mu \psi - 2\mu a \partial_r \psi = 0, \quad \text{para } r = a.$$

Por el Anexo I, se sabe que si la función $\psi(r, \theta, \varphi)$ satisface la ecuación de Laplace en el exterior de la bola, ésta se puede escribir de la siguiente forma:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l^m \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad r > a, \quad (2.5)$$

donde $Y_l^m(\theta, \varphi) = C_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ son los armónicos esféricos, ψ_l^m los coeficientes de los armónicos esféricos, $P_l^m(\cos \theta)$ son las funciones asociadas de Legendre y C_l^m son las constantes de normalización tales que para n y m :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_l^m|^2 \sin \theta d\varphi d\theta = 1.$$

Además, ψ_l^m es real sí y sólo si para todo l y m :

$$\psi_l^{-m} = (-1)^m \overline{\psi_l^m}, \quad (2.6)$$

donde $\overline{\psi_l^m}$ es el conjugado del número complejo ψ_l^m .

Se supondrá que ψ satisface (2.6) cuando $r = a$. El teorema de la adición para armónicos esféricos, encontrado en [12], establece que si ω y ω' son vectores unitarios, entonces:

$$4\pi \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\omega) \overline{Y_l^m(\omega')} = (2l+1) P_l(\omega \cdot \omega'),$$

donde P_l es el l -ésimo polinomio de Legendre. Si $\omega = \omega'$ se obtiene que

$$\sum_{m=-l}^l |Y_l^m(\omega)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}, \quad \text{ya que } P_l(1) = 1, \quad \forall l \geq 0.$$

Por tanto, para cualquier θ y φ :

$$|Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 \leq \frac{2l+1}{4\pi}. \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.4) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l^m [(1 - \mu^2) \partial_{\mu} Y_l^m + 2(l+1) \mu Y_l^m] = 0 \quad (2.8)$$

Definimos g_l^m como:

$$g_l^m = \left[\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)} \right]^{1/2}, \quad |m| \leq l. \quad (2.9)$$

Además, por [14] se conocen las siguientes identidades:

$$\mu Y_l^m = g_l^m Y_{l-1}^m + g_{l+1}^m Y_{l+1}^m. \quad (2.10)$$

$$(1 - \mu^2) \partial_{\mu} Y_l^m = (l+1) g_l^m Y_{l-1}^m - l g_{l+1}^m Y_{l+1}^m. \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.10) y (2.11) en (2.8) se obtiene

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l^m [3(l+1) g_l^m Y_{l-1}^m + (l+2) g_{l+1}^m Y_{l+1}^m] = 0.$$

Si se define $\psi_{|m|-1}^m = 0$, es posible reescribir esta última igualdad como

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} Y_l^m [3(l+2) g_{l+1}^m \psi_{l+1}^m + (l+1) g_l^m \psi_{l-1}^m] = 0. \quad (2.12)$$

Debido a que los armónicos esféricos son un conjunto ortogonal, entonces se deduce que

$$3(l+2) g_{l+1}^m \psi_{l+1}^m + (l+1) g_l^m \psi_{l-1}^m = 0. \quad (2.13)$$

Como se definió $\psi_{|m|-1}^m = 0$, por (2.13) se tiene que $\psi_{|m|+1}^m = 0$. Es posible generalizar este resultado y obtener $\psi_{|m|-1+2n}^m = 0$ para cualquier número entero positivo n .

Además, debido a la identidad (2.13), si se conoce $\psi_{|m|}^m$, es posible determinar $\psi_{|m|+2n}^m$ para todo entero positivo n y todo m número entero.

Estas relaciones de recurrencia permitirán establecer la convergencia de la serie (2.5). Si $l \geq 1$, de las expresiones (2.9) y (2.13) se obtiene la siguiente desigualdad

$$|\psi_{l+1}^m| \leq \frac{(l+1) g_l^m}{3 (l+2) g_{l+1}^m} |\psi_{l-1}^m|$$

Desarrollando el término izquierdo de la desigualdad (véase el Anexo II), se tiene que:

$$|\psi_{l+1}^m| \leq \frac{|\psi_{l-1}^m|}{3}$$

De esta expresión para $l \geq |m|$ de la forma $l = 2n + |m|$, se obtiene

$$|\psi_l^m| \leq \frac{1}{3^{\frac{l-|m|}{2}}} |\psi_m^m|$$

En caso de que l sea de la forma $l = |m| + 2n + 1$, $\psi_l^m = 0$ debido a que $\psi_{|m|-1}^m = 0$

De estos resultados, el término $\alpha_l^m = \psi_l^m \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} Y_l^m(\theta, \varphi)$ queda acotado por

$$|\alpha_l^m| \leq |\psi_{|m|}^m| \left(\frac{a}{r}\right)^{|m|+1} \left(\frac{a}{\sqrt{3}r}\right)^{l-|m|} \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Dado que $\psi_{|m|+2n}^m$ puede determinarse en términos de $\psi_{|m|}^m$, la serie

$$f_m = \sum_{l=|m|}^{\infty} \psi_l^m \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} Y_l^m$$

utilizando (2.14) queda acotada por:

$$|f_m| \leq \sum_{l=|m|}^{\infty} |\alpha_l^m| \leq \sum_{l=0}^{\infty} |\alpha_l^m| = 3^{|m|/2} |\psi_{|m|}^m| \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r\sqrt{3}}\right)^{l+1} \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}.$$

La serie del lado derecho de la desigualdad converge utilizando el criterio de la razón, con un radio de convergencia $r > a/\sqrt{3}$. Utilizando el criterio de Weierstrass, la serie f_m converge absoluta y uniformemente con el mismo radio de convergencia.

Notemos que (2.5) puede expresarse como

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m.$$

Si se supone que existen constantes reales C y β , con $|\beta| < 1/\sqrt{3}$, tales que

$$|\psi_{|m|}^m| \leq C\beta^{|m|}$$

entonces por el criterio de Weierstrass, la serie $\psi(r, \theta, \varphi)$ converge absoluta y uniformemente en un radio de convergencia mayor que $a\beta$.

Si además se supone que ψ_l^m cumple (2.6) para $l = |m|$, debido a la relación de recurrencia (2.13) las ψ_l^m son números reales para $l > |m|$. La única condición física que se debe imponer es que el monopolo magnético ψ_0^0 sea cero, por lo que ψ_l^0 son cero para todo l . En el Anexo II se probará la convergencia de las derivadas de esta solución. De hecho, esta convergencia se da con el mismo radio de la convergencia.

Los resultados anteriores pueden resumirse en el siguiente

Teorema 2.1.1. *Sea $d = \frac{a^2 \cos \theta}{r^2}$ el potencial dipolar magnético definido en la región exterior de la bola de radio a . Entonces el problema*

$$\Delta \psi = 0, \quad \text{si } r > a, \quad \nabla d \cdot \nabla \psi = 0, \quad \text{si } r = a,$$

tiene una infinidad de soluciones ψ .

Como consecuencia de este teorema se tiene el siguiente

Corolario 2.1.1. *Existe un espacio de dimensión infinita de pares de funciones u y v , tales que ambas funciones son armónicas en el exterior de la bola de radio a , decaen a cero en infinito, ninguna tiene el término del monopolo y además satisfacen $|\nabla u| = |\nabla v|$ en $r = a$.*

Hay que hacer notar que el teorema y corolario anterior no implican que el problema de Backus tenga una infinidad de soluciones, más bien prueba que hay una infinidad de funciones ψ_ν que satisfacen el Teorema 2.1.1. Esto se debe a que por cada ν fija se pueden definir las funciones

$$u_\nu = \frac{d + \psi_\nu}{2}, \quad v_\nu = \frac{d - \psi_\nu}{2},$$

tal que

$$\Delta u_\nu = 0, \quad r > a; \quad |\nabla u_\nu|^2 = |\nabla v_\nu|^2 = f_\nu, \quad r = a,$$

donde cada f_ν varía dependiendo del valor de la ν , y esta función es igual a

$$f_\nu = \frac{1}{4} (\nabla d \cdot \nabla d + \nabla \psi_\nu \cdot \nabla \psi_\nu),$$

Entonces, para resolver el problema de Backus cuya condición de frontera se satisfaga para una f en particular, es necesario escoger los coeficientes ψ_l^m de la serie ψ que cumplan en la frontera

$$\begin{aligned} \nabla \psi \cdot \nabla \psi &= 4f - \nabla d \cdot \nabla d \\ &= 4f - \frac{1}{a^2} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Encontrar estos coeficientes se deja como un problema abierto en esta tesis. La idea es desarrollar el lado derecho de la igualdad anterior como una serie de armónicos esféricos y, de este modo, encontrar las condiciones que deben satisfacer los coeficientes ψ_l^m al desarrollar la norma cuadrada del gradiente de la serie ψ .

¿Es posible encontrar la unicidad a este problema? ¿Qué condiciones adicionales a las que Backus impuso se necesitarían para resolverlo? En la siguiente sección se presentarán los resultados expuestos en [7] para obtener la unicidad de las soluciones.

2.2. La unicidad de las soluciones en \mathbb{R}^3

En la sección anterior se mostró la no unicidad de las soluciones del problema exterior de Backus, a pesar de conocerse la norma de su gradiente en la frontera. Es necesario añadir más condiciones para lograr la unicidad de la solución. En el artículo [7], dos científicos las han encontrado y han establecido el siguiente teorema. En este caso, si V es la bola unitaria en \mathbb{R}^3 , el dominio en donde las soluciones deben ser únicas será $\Omega = \mathbb{R}^3 - V$.

Teorema (Unicidad del problema de Backus). Sean $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tales que:

1. $\Delta u = \Delta v = 0$ en Ω ;

2. $\nabla u \cdot \nabla u = \nabla v \cdot \nabla v$ en $\partial\Omega$;
3. u, v se vuelven cero en infinito;
4. $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in M = \left\{ \mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (u + v)(\mathbf{x}) = 0 \right\}$
con \mathbf{n} su vector normal

entonces $u = v$ en Ω

Demostración

Nuevamente se definen las funciones $\phi = u + v$ y $\psi = u - v$. Entonces las hipótesis 1, 2 y 3 son las mismas que en el problema planteado por Backus. La hipótesis 4 puede reescribirse como

$$\psi = 0 \quad \text{en } M = \left\{ \mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0 \right\}$$

Dado que Ω es abierto, se elige $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ tal que $\psi(\mathbf{x}_0) = \max_{\Omega} \psi(\mathbf{x})$ y $\mathbf{v} = \nabla \phi(\mathbf{x}_0)$. Si $\mathbf{x}_0 \in M$, por la definición de M se tiene que $\psi(\mathbf{x}_0) = 0$. Como $\psi(\mathbf{x}_0)$ es máximo, esto implica que $\psi = 0$ en $\partial\Omega$ y dado que ψ es una función armónica, entonces $\psi = 0$ en $\bar{\Omega}$. Es decir, $u = v$ en $\bar{\Omega}$.

Si $\mathbf{x}_0 \notin M$, por la definición de M se obtiene que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nabla \phi(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = (\partial \phi / \partial \mathbf{n})(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Usando el principio del máximo de Hopf [véase el Anexo III], $(\partial \psi / \partial \mathbf{v})(\mathbf{x}_0) \neq 0$ a menos que $\psi \equiv \psi(\mathbf{x}_0)$ en $\bar{\Omega}$. Pero como $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, esto implica que $(\partial \psi / \partial \mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \nabla \psi(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \nabla \psi(\mathbf{x}_0) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}_0) = 0$, lo cual sería una contradicción. Por tanto $\psi \equiv \psi(\mathbf{x}_0)$ en $\bar{\Omega}$. Pero dada la condición al infinito, que impone a la función ψ volverse cero cuando r tiende a infinito, entonces $\psi \equiv 0$ en $\bar{\Omega}$.

Se acaba de probar que $u = v$ en $\bar{\Omega}$ y por tanto se obtiene la unicidad de la solución. A continuación se aplicará esta idea al problema planteado por Backus para el dipolo magnético.

2.3. La solución para el problema del dipolo

Nuevamente se tomará la función $\phi = \cos \theta / r^2$, que satisface la ecuación (2.1) en el exterior de la bola. Al aplicarse el teorema previo para obtener la unicidad de las solución se debe cumplir que $\psi = 0$ en el conjunto $M = \left\{ \mathbf{x} \in \partial\Omega \mid \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0 \right\}$, en este caso cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ (el ecuador de la esfera).

A continuación se calculará explícitamente la solución ψ al problema del dipolo magnético. La condición adicional que debe satisfacer en el ecuador es:

$$\psi\left(1, \frac{\pi}{2}, \varphi\right) = k(\varphi) \quad \text{para } k \text{ suficientemente regular.} \quad (2.15)$$

O en el caso de conocer su derivada normal

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \psi\left(1, \frac{\pi}{2}, \varphi\right) = f(\varphi) \quad \text{para } f \text{ suficientemente regular.} \quad (2.16)$$

A continuación se probará la unicidad dada la condición (2.15). Repetimos lo que hizo Backus. Escribimos

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l^m Y_l^m(\theta, \varphi) \left(\frac{1}{r}\right)^{l+1}.$$

Haciendo el mismo cambio de variable $\mu = \cos \theta$, la condición en la frontera es la misma que en (2.4). Al sustituir esta solución en la condición de frontera se obtiene una expresión similar a (2.8), esto es

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l^m \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \mu} + 2(l+1) \mu Y_l^m \right] = 0.$$

Nuevamente definiendo $\psi_{|m|_{l-1}}^m = 0$, g_l^m como en (2.9) y utilizando las relaciones de recurrencia de las $Y_l^m(\theta, \varphi)$, (2.10) y (2.11), se obtiene la expresión

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l^m \left[3(l+1) g_l^m Y_{l-1}^m + (l+2) g_{l+1}^m Y_{l+1}^m \right] = 0.$$

Como las $Y_l^m(\theta, \varphi)$ son ortogonales en S , se obtiene una fórmula de recurrencia para las ψ_l^m . De la expresión anterior se obtiene que

$$\psi_{l+1}^m = -\frac{(l+1) g_l^m}{3(l+2) g_{l+1}^m} \psi_{l-1}^m.$$

Ya que se busca dar solución al problema geomagnético, el término $\psi_0^0 = 0$ debido a que nunca se han observado monopolos magnéticos en la naturaleza. Dado

que $\psi_{|m|-1}^m = 0$ implica que $\psi_{|m|+2k+1}^m = 0$ para todo $k, m \geq 0$. Para el resto de los coeficientes diferentes de cero, la relación de recurrencia queda expresada como $\psi_{|m|+2k}^m = \alpha_k^m \psi_{|m|}^m$ donde

$$\alpha_k^m = \left(-\frac{1}{3}\right)^k \prod_{i=1}^k \frac{2i + |m|}{2i + 1 + |m|} \left[\frac{(2i-1)(2i+2|m|-1)(4i+2|m|+1)}{4i(i+|m|)(2|m|+4i-3)} \right]^{1/2}.$$

Entonces la solución (2.5) puede expresarse como

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{|m| \geq 0} \sum_{k \geq 0} \psi_{|m|+2k}^m Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi) r^{-(|m|+2k+1)}.$$

Cuyo valor en la frontera debido a la condición adicional (2.15) es

$$\psi(1, \pi/2, \varphi) = \sum_{|m| \geq 0} \sum_{k \geq 0} \psi_{|m|+2k}^m C_{|m|+2k}^m P_{|m|+2k}^m(0) e^{im\varphi} = k(\varphi).$$

donde

$$C_{|m|+2k}^m = \left[\frac{2|m|+4k+1}{2\pi} \frac{(|m|+2k-m)!}{(|m|+2k+m)!} \right]^{1/2},$$

$$P_{|m|+2k}^m(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^k 2^m}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m+k+1/2)}{\Gamma(k+1)} & m > 0 \\ \frac{(-1)^k 2^m}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k-m+1)} & m < 0 \end{cases}$$

Para mostrar la convergencia de la serie se define

$$k(\varphi) = \sum_{|m| \geq 0} \psi_{|m|}^m \gamma_m e^{im\varphi}, \quad \gamma_m = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^m C_{|m|+2k}^m P_{|m|+2k}^m(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{m,k},$$

y se probarán las siguientes afirmaciones:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^m C_{|m|+2k}^m P_{|m|+2k}^m(0) = \gamma_m < \infty, \forall m \in \mathbb{Z}$.
2. $\gamma_m \neq 0, \forall m \in \mathbb{Z}$.
3. $\psi(r, \theta, \varphi)$ definido como en (2.5) converge en $\bar{\Omega}$.
4. $\psi \in C^1(\partial\Omega) \cup C^2(\Omega)$.

Prueba de 1. Por la definición de las α 's se sabe que $\alpha_k^{-m} = \alpha_k^m$. Este resultado junto con

$$C_n^{-m} P_n^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m C_n^m P_n^m(\cos \theta)$$

nos lleva a:

$$\gamma_{-m} = (-1)^m \gamma_m.$$

Por tanto es suficiente demostrar la convergencia para $m > 0$.

Se utilizará la prueba de la razón para convergencia. Tomando el límite al infinito del cociente de los términos de la serie γ_m se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{m,k+1}}{\gamma_{m,k}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{2k+2+|m|}{2k+3+|m|} \frac{m+k+1/2}{k+1} \\ & * \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{2|m|+4k+5}{2|m|+4k+1} \frac{(|m|+2k-m+1)(|m|+2k-m+2)}{(|m|+2k+m+1)(|m|+2k+m+2)} \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{3} < 1 \end{aligned}$$

Entonces la serie γ_m converge por la prueba del cociente para todo m .

Prueba de 2. Por definición, los términos de la serie α_k^m , $C_{|m|+2k}^m$ y $P_{|m|+2k}^m(0)$ son números positivos, entonces la serie para γ_m es mayor que cero para todo m positivo. Si m es un entero negativo y dado que $\gamma_m = (-1)^m \gamma_{-m}$, por lo anterior se tiene que $\gamma_m = (-1)^m \gamma_{-m} \neq 0$. Por tanto, $\gamma_m \neq 0$ para todo número entero m diferente de cero.

Prueba de 3. Sea \widehat{k}_m el m -ésimo coeficiente de Fourier de la función $k(\varphi)$. Por la definición de γ_m y $\psi_{|m|}^m$ se obtiene la siguiente expresión

$$\widehat{k}_m = \gamma_m \psi_{|m|}^m,$$

y dado que $\gamma_m \neq 0$, entonces

$$\psi_{|m|}^m = \frac{\widehat{k}_m}{\gamma_m}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.17) en la serie γ_m obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{|m| \geq 0} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^m \psi_{|m|}^m Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi) r^{-(|m|+2k+1)} \\
&= \sum_{|m| \geq 0} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^m \frac{\widehat{k}_m}{\gamma_m} Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi) r^{-(|m|+2k+1)},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{|m| \geq 0} \frac{\widehat{k}_m}{\gamma_m} r^{-(|m|+1)} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^m Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi) r^{-2k}. \quad (2.18)$$

Tomando la norma de la serie se obtiene

$$|\psi(r, \theta, \varphi)| \leq \sum_{|m| \geq 0} \frac{|\widehat{k}_m|}{|\gamma_m|} r^{-(|m|+1)} \sum_{k \geq 0} |\alpha_k^m| |Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi)| r^{-2k}$$

Para probar la convergencia de esta serie se utilizará la prueba M de Weierstrass. Entonces, la idea es encontrar una serie convergente que sea una cota superior de la serie $\psi(r, \theta, \varphi)$. Para lograrlo se utilizarán las siguientes desigualdades.

Por [13] se sabe que

$$|Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi)| \leq \sqrt{\frac{2|m|+4k+1}{4\pi}} \quad \text{para todo } 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Como $\psi_{|m|+2k}^m = \alpha_k^m \psi_{|m|}^m$, se sabe que (Véase Anexo II)

$$|\alpha_k^m| \leq \frac{1}{3^k}.$$

Utilizando las desigualdades anteriores para acotar la norma de $\psi(r, \theta, \varphi)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
|\psi(r, \theta, \varphi)| &\leq \sum_{|m| \geq 0} \frac{|\widehat{k}_m|}{\gamma_{|m|}} r^{-(|m|+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} \left(\frac{2|m| + 4k + 1}{4\pi} \right)^{1/2} r^{-2k} \\
&\leq \sum_{|m| \geq 0} \frac{|\widehat{k}_m|}{\gamma_{|m|}} \frac{\sqrt{|m|}}{\sqrt{2\pi}} r^{-(|m|+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(3r^2)^k} \left(\frac{4k + 1}{2|m|} + 1 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{|m| \geq 0} \frac{|\widehat{k}_m|}{\gamma_{|m|}} \frac{\sqrt{|m|}}{\sqrt{2\pi}} r^{-(|m|+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(3r^2)^k} \left(2k + \frac{3}{2} \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{|m| \geq 0} \frac{|\widehat{k}_m|}{\gamma_{|m|}} \frac{\sqrt{|m|}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} \left(2k + \frac{3}{2} \right)^{1/2} \quad \text{para } r \geq 1
\end{aligned}$$

Aplicando el criterio de la razón a la serie cuando k tiende a infinito

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2k + 7/2} (1/3)^{k+1}}{\sqrt{2k + 3/2} (1/3)^k} = \frac{1}{3} < 1,$$

luego la serie con subíndice k converge en la esfera unitaria y su exterior. Supongamos que

$$\sigma_1 = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} \left(2k + \frac{3}{2} \right)^{1/2},$$

así que la función ψ quedará acotada por

$$|\psi(r, \theta, \varphi)| \leq \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|m| \geq 0} \frac{|\widehat{k}_m| \sqrt{|m|}}{\gamma_{|m|}}. \quad (2.19)$$

Recordando la definición de γ_m ,

$$\gamma_m = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^m C_{|m|+2k}^m P_{|m|+2k}^m(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{m,k}.$$

Como cada $\gamma_{m,k}$ es positivo para todo m mayor que cero, se tiene que $\gamma_m \geq \gamma_{m,1}$, donde

$$\gamma_{m,1} = \frac{2^{m-1}}{3\pi} \frac{(m+2)(2m+5)}{(m+3)\sqrt{m+1}} \frac{\Gamma(m+3/2)}{[\Gamma(2(m+3/2))]^{1/2}}, \quad \forall m > 0.$$

Utilizando diversas propiedades de la función Γ (Véase Anexo II) obtenemos que

$$\gamma_{m,1} \geq C m^{1/4} \quad \text{donde} \quad C = \frac{\sqrt{5}}{48 \pi^{3/4} e^{1/24}}.$$

Por tanto, para cada $m > 0$

$$\gamma_m \geq \gamma_{m,1} \geq C m^{1/4}$$

esta cota inferior permite acotar a la serie $\gamma_{|m|}$, lo que implica

$$\begin{aligned} |\psi(r, \theta, \varphi)| &\leq \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi} C} \sum_{|m| \geq 0} \left| \widehat{k}_m \right| \sqrt{|m|} |m|^{-1/4} \\ &\leq \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi} C} \sum_{|m| \geq 0} \left| \widehat{k}_m \right| |m|^{1/4}. \end{aligned}$$

Al tomar a la función $k(\varphi)$ de clase $C^1[0, 2\pi)$, la serie converge.

Prueba de 4. Nuevamente se toma la serie ψ como en (2.18), esto es

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{k}_m}{\gamma_m} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^m Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi) \left(\frac{1}{r}\right)^{|m|+2k+1}.$$

Se quiere probar que sus derivadas y segundas derivadas convergen en el exterior de la bola.

Al derivar con respecto a r término a término de la serie se tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{k}_m}{\gamma_m} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^m Y_{|m|+2k}^m (|m| + 2k + 1) r^{-(|m|+2k+2)} \\ &= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{k}_m |m|}{\gamma_m} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^m Y_{|m|+2k}^m \left(1 + \frac{2k+1}{|m|}\right) r^{-(|m|+2k+2)}. \end{aligned}$$

Entonces al tomar su norma queda acotada por

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial r} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|m| \geq 0} \frac{\left| \widehat{k}_m \right|}{\gamma_{|m|}} |m|^{3/2} \sum_{k \geq 0} (k+1) (2k+3/2)^{1/2} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$\leq \frac{2\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|m| \geq 0} \frac{|\widehat{k}_m| |m|^{3/2}}{\gamma_{|m|}} \leq C_2 \sum_{|m| \geq 0} |\widehat{k}_m| |m|^{5/4}$$

Nuevamente para que la serie converja se debe imponer que $k(\varphi)$ debe ser de clase $C^2[0, 2\pi)$.

Esa misma condición de la función $k(\varphi)$ se debe satisfacer para que la derivada con respecto a φ de (2.5) converja, pues su derivada

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{k}_m}{\gamma_m} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^m i m Y_{|m|+2k}^m r^{-(|m|+2k+2)},$$

al tomar su norma se tiene

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right| \leq \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{k}_m| |m|^{3/2}}{\gamma_{|m|}} \leq C_3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\widehat{k}_m| |m|^{5/4}$$

donde esta cota de la serie converge.

Para ver la convergencia de la derivada con respecto a θ se utilizarán los siguientes resultados

$$C_{|m|+2k}^m = [(|m|+2k+m)(|m|+2k-m+1)]^{-1/2} C_{|m|+2k}^{m-1},$$

$$\frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{2} P_n^{m+1}(\cos \theta) - \frac{1}{2} (n-m+1)(n+m) P_n^{m-1}(\cos \theta),$$

entonces la derivada parcial con respecto a θ queda acotada (Véase el anexo II) por

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{|m|+2k}^m(\cos \theta) \right| \leq \left(\frac{2|m|+4k+1}{4\pi} \right)^{1/2} * \\ [(|m|+2k+m+1)(|m|+2k-m+1)]^{1/2} \\ \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} |m| (1+2k) \sqrt{1+k};$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right| &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{k}_m| |m|}{\pi \gamma_{|m|}} \sum_{k=0}^{\infty} (1+2k) \sqrt{1+k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &\leq C_4 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\widehat{k}_m| |m|^{3/4}, \end{aligned}$$

Nuevamente si se pide que $k(\varphi)$ sea de clase $C^1[0, 2\pi)$ la serie converge.

Resta probar la convergencia de las segundas derivadas parciales [Véase el Anexo II]. Como la función ψ y sus derivadas de primer y segundo orden deben ser convergentes, se debe imponer a la función $k(\varphi)$ que sea de clase $C^3[0, 2\pi)$.

Resumiendo, se ha mostrado explícitamente la solución ψ al problema del dipolo magnético al añadir una condición de frontera adicional, en este caso (2.15). Anteriormente se mencionó que también es posible encontrar la solución explícita al mismo problema con una condición adicional en su derivada normal (2.16). En el mismo anexo se probará que esta condición también resuelve el problema del dipolo.

A manera de conclusión de este capítulo podemos mencionar que:

El problema geomagnético externo, o problema de Backus, consiste en hallar una función armónica en el exterior de la Tierra dado que se conoce su intensidad en la superficie terrestre. Si se aproxima a la Tierra como una bola el problema tiene al menos dos soluciones, una de las cuales se obtiene al perturbar alrededor del dipolo.

Para que el problema tenga solución única, se debe de imponer una condición adicional en el conjunto de la superficie de la bola donde la derivada normal se vuelve cero. Esta condición tiene que ser una función que sea al menos de clase $C^3[0, \pi)$

Conclusiones

En esta tesis se mostraron algunos resultados obtenidos por Geroge E. Backus, R. Magnanini y M. C. Jorge, al estudiar el problema de hallar el potencial escalar magnético en diversas superficies de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , cuando solamente se conoce la magnitud de su gradiente en la frontera.

Por ello es que este trabajo se dividió en dos partes. En el primer capítulo se demostraron las proposiciones y teoremas obtenidos por Backus para el caso 2-dimensional, mientras que en el segundo se detallaron el contraejemplo propuesto por Backus a la unicidad de las soluciones en el exterior de la bola (caso 3-dimensional). Por último se presentaron las condiciones que permiten la unicidad en un teorema propuesto por Jorge y Magnanini.

En el caso 2-dimensional se analizó la existencia y unicidad de las soluciones en dos dominios: en el interior de la circunferencia y en el semiplano. Cuando el dominio es un subconjunto abierto, acotado y simplemente conexo (en este caso se reduce al interior del círculo unitario), entonces la solución existe y es única. Cabe destacar que se modificó ligeramente este teorema, pues la quinta propiedad no se cumple bajo los supuestos que estableció Backus.

Por su parte, en el caso del semiplano se deben imponer condiciones adicionales, como la existencia de una función real acotada y que cumpla cierto límite en infinito, para lograr la existencia de las soluciones (más no su unicidad). Sin embargo, si una de estas soluciones está acotada inferiormente por una constante positiva, entonces ésta es una rotación de las otras soluciones.

La no-unicidad de las soluciones en el exterior de la bola encontrado por Backus se basa fundamentalmente en una perturbación de la solución alrededor del dipolo magnético; se toma la suma y la resta de una solución general en armónicos esféricos con el dipolo para posteriormente calcular los coeficientes explícitamente. Después, se presentó y demostró el teorema donde se establece la hipótesis adicional que permite la unicidad de las soluciones. Finalmente, se empleó este teorema para establecer esta

condición adicional. En este caso la solución (o su derivada normal) debe ser de clase C^3 (o de clase C^2) en el ecuador de la esfera.

Personalmente considero que los avances logrados por estos científicos han ayudado al estudio del campo geomagnético; la importancia de este campo para los seres humanos es evidente y por ello su medición se ha estado actualizando desde los tiempos de Gauss. Es interesante destacar que para comprender gran parte de las demostraciones de estos resultados se requiere de conocimientos matemáticos básicos para un estudiante universitario de ciencia. El campo geomagnético ofrece una oportunidad muy valiosa para la colaboración científica inter y multidisciplinaria.

Anexos

Anexo I

La solución del problema de Laplace en el exterior de la bola con condiciones de frontera tipo Dirichlet

Para esta sección se procederá como en [15]. Sean (r, θ, φ) las coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 , con $r > 0$, $0 \leq \theta < \pi$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$. El problema consiste en encontrar una función $u(r, \theta, \varphi)$ que satisfaga

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.20)$$

para cualquier $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 - V$, donde V es la bola de radio a . En pocas palabras, la ecuación (2.20) se debe satisfacer en el exterior de la bola V . Además, debe ser regular en infinito y satisfacer la condición en la frontera

$$u(a, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi). \quad (2.21)$$

Para solucionar este problema se procederá por separación de variables. Suponemos que la solución es de la forma

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

sustituyendo esta función en (2.20) y dividiendo este resultado por $\Theta(\theta) \Phi(\varphi)$, suponiendo que son distintas de cero, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} r^2 R'' + 2R - n(n+1)R &= 0, & 0 < r < a, \\ \frac{\Theta''}{\Theta} + \cot(\theta) \frac{\Theta'}{\Theta} + \csc^2(\theta) \frac{\Phi''}{\Phi} &= -\mu, \end{aligned}$$

donde μ es una constante de separación.

Note que la primera expresión se trata de la ecuación de Euler en R . Para la segunda expresión nuevamente se procede por separación de variables, obteniendo las

siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \Phi'' + m^2 \Phi &= 0, & m &= 0, 1, 2, \dots \\ \Theta'' + \cot(\theta) \Theta' + (\mu - m^2 \csc^2(\theta)) \Theta &= 0 & m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Si $\mu = n(n+1)$, entonces se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} r^2 R'' + 2R - n(n+1)R &= 0, & 0 < r < a, & & n &= 0, 1, \dots \\ \Phi'' + m^2 \Phi &= 0, & m &= 0, 1, \dots \\ \Theta'' + \cot(\theta) \Theta' + (n(n+1) - m^2 \csc^2(\theta)) \Theta &= 0, & m &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

al hacer el cambio $s = \cos \theta$, la última ecuación del sistema queda expresada como

$$(1-s^2) \frac{d\Theta}{ds^2} - 2s \frac{d\Theta}{ds} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-s^2} \right) \Theta = 0, \quad -1 < s < 1$$

Se sabe que la solución de la ecuación de Euler en R son las siguientes $R(r) = r^n$ y $R(r) = r^{-(n+1)}$. Dado que se pide que la solución sea regular en infinito entonces la solución es $R(r) = r^{-(n+1)}$. La solución de la segunda ecuación del sistema es $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$.

Por último, las soluciones de la nueva ecuación del sistema son conocidas como las funciones asociadas de Legendre $P_n^m(\cos \theta)$, donde $|m| \leq n$. Entonces la función u queda determinada por n y m de la siguiente forma

$$u_n^m(r, \theta, \varphi) = r^{-(n+1)} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (2.22)$$

donde definimos P_n^m para m 's negativos como

$$P_n^m = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P_n^{-m}.$$

Además, es posible normalizar el producto $P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ al definir los armónicos esféricos de superficie $Y_n^m(\theta, \varphi)$ como

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

para $n \geq 0$ y $|m| \leq n$.

Se sabe que los armónicos esféricos forman un conjunto ortonormal completo. De hecho, si $f(\theta, \varphi)$ es 2π periódica es posible expresar esta función como

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m Y_n^m(\theta, \varphi)$$

donde los coeficientes A_n^m quedan determinados por

$$A_n^m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \bar{Y}_n^m(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

con $\bar{Y}_n^m(\theta, \varphi)$ el complejo conjugado de $Y_n^m(\theta, \varphi)$.

Añadiendo la solución en r en (2.22), se obtiene

$$\hat{u}_n^m(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_{n,m}(\theta, \varphi),$$

que es el conjunto de soluciones de la ecuación de Laplace en $r > a$. Entonces al superponer estos términos en una serie y dado que $u(a, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$, entonces la solución al problema exterior de Laplace con condiciones de frontera tipo Dirichlet es

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} A_n^m Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (2.23)$$

donde

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m Y_n^m(\theta, \varphi)$$

En la siguiente sección se mostrará la solución al problema de Laplace con condiciones de frontera tipo Neumann.

La solución del problema de Laplace en el exterior de la bola con condiciones de frontera tipo Neumann

Nuevamente sean (r, θ, φ) las coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 definidas como en la sección anterior. Si V es la bola de radio a , el problema consiste en encontrar la solución u que satisfaga (2.20) en el exterior de V , esto es $W = \mathbb{R}^3 - V$. También debe ser regular en infinito pero la diferencia es que debe satisfacer la condición de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -u_r(a, \theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) \quad (2.24)$$

Dado que (2.23) satisface la ecuación de Laplace en el exterior de la bola, entonces la función

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} B_n^m Y_n^m(\theta, \varphi),$$

satisface (2.20), donde B_n^m son constantes. Si u satisface la condición de frontera (2.24) entonces debe cumplir que

$$-u_r(a, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n+1) B_n^m Y_n^m(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi).$$

Si $g(\theta, \varphi)$ es 2π -periódica se puede expresar como

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \widehat{B}_n^m Y_n^m(\theta, \varphi),$$

donde

$$\widehat{B}_n^m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\theta, \varphi) \bar{Y}_n^m(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

con $Y_n^m(\theta, \varphi)$ normalizados.

Entonces se tiene la siguiente relación

$$B_n^m = \frac{1}{n+1} \widehat{B}_n^m,$$

y por tanto se tiene la siguiente expresión

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \widehat{B}_n^m Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (2.25)$$

Esta es la solución al problema exterior de Laplace con condiciones de frontera tipo Neumann.

Anexo II

Desigualdad de los coeficientes de los armónicos esféricos

En la primera sección del Capítulo 2 se dedujo una relación de recurrencia (2.13) para los coeficientes de los armónicos esféricos. Esta relación es

$$3(l+2)g_{l+1}^m\psi_{l+1}^m + (l+1)g_l^m\psi_{l-1}^m = 0, \quad \text{para } l \geq 1, |l| \leq m.$$

Utilizando esta expresión se afirmó que

$$|\psi_{l+1}^m| \leq \frac{|\psi_{l-1}^m|}{3}, \quad \text{para } l \geq 1, |m| \leq l.$$

De esta expresión se deduce que para $|l| = m$ el coeficiente $\psi_{l+1}^m = 0$, pues el lado derecho de la desigualdad se vuelve cero por definición. De hecho, debido a esta relación de recurrencia se deduce que si $l = m + 2k$ entonces $\psi_{l+1}^m = 0$. Por ende, en la segunda sección de este capítulo se generalizó la expresión (2.13) de la siguiente forma

$$\psi_{|m|+2k}^m = \alpha_k^m \psi_{|m|}^m, \quad \text{para } k \geq 1,$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_k^m &= \left(-\frac{1}{3}\right)^k \prod_{i=1}^k \frac{2i + |m|}{2i + 1 + |m|} \frac{g_{|m|+2i-1}^m}{g_{|m|+2i}^m} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^k \prod_{i=1}^k \frac{2i + |m|}{2i + 1 + |m|} \left[\frac{(2i-1)(2i+2|m|-1)(4i+2|m|+1)}{4i(i+|m|)(2|m|+4i-3)} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

y posteriormente se afirmó que

$$|\alpha_k^m| \leq \frac{1}{3^k}.$$

Note que probando la primera desigualdad se deduce la segunda con respecto a α_k^m . De la expresión (2.13) se obtiene la siguiente igualdad

$$\psi_{l+1}^m = -\frac{(l+1)g_l^m}{3(l+2)g_{l+1}^m} \psi_{l-1}^m, \quad \text{para } l \geq 1, |l| \leq m.$$

Tomando la norma se tiene que para $|m| \leq l$

$$|\psi_{l+1}^m| \leq \frac{(l+1) g_l^m}{3(l+2) g_{l+1}^m} |\psi_{l-1}^m|,$$

y desarrollando el cociente de la desigualdad de la derecha se obtiene

$$\gamma_{l,m} = \frac{(l+1) g_l^m}{3(l+2) g_{l+1}^m} = \frac{(l+1)}{3(l+2)} \left[\frac{(l+m)(l-m)(2l+3)}{(l+m+1)(l+1-m)(2l-1)} \right]^{1/2}.$$

Entonces, bastará probar que $\gamma_{l,m} \leq 1$.

Note que $\gamma_{l,m} = \gamma_{l,-m}$, por lo que la desigualdad se demostrará para m 's positivos. Primero se demostrará que $\gamma_{l,m} \leq \gamma_{l,m-1}$, para $m \geq 1$.

Para $m \geq 1$ se tienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2l(m-1), \\ 1 &\leq 2m(l+1), \end{aligned}$$

por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2l(m-1) + 2m(l+1) - 1 = 4lm - 2(l-m) - 1 \\ &\leq (l+m)^2 - (l-m)^2 - 2(l-m) - 1. \end{aligned}$$

Sumando $(l+m)^2(l-m)^2 + 2(l+m)^2(l-m)$ en ambos lados de la desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned} (l+m)^2(l-m)^2 + 2(l+m)^2(l-m) &\leq (l+m)^2 - (l-m)^2 - 2(l-m) - 1 \\ &\quad + (l+m)^2(l-m)^2 + 2(l+m)^2(l-m). \end{aligned}$$

Factorizando en ambos lados de la desigualdad se llega a la siguiente expresión

$$(l+m)^2(l-m)(l-m+2) \leq (l+m-1)(l-m+1)^2(l+m+1)$$

dado que los términos $l+m+1$, $l-m+1$, $l+m$, y $l-m+2$ son no negativos

$$\frac{(l+m)(l-m)}{(l+m+1)(l-m+1)} \leq \frac{(l+m-1)(l-m+1)}{(l+m)(l-m+2)}$$

multiplicando ambos lados de la desigualdad por $(l+1)/3(l+2)$ y por $\sqrt{2l+3}/\sqrt{2l-1}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{l+1}{3(l+2)} \frac{(l+m)(l-m)}{(l+m+1)(l-m+1)} \left(\frac{2l+3}{2l-1}\right)^{1/2} &\leq \\ &\leq \frac{l+1}{3(l+2)} \frac{(l+m-1)(l-m+1)}{(l+m)(l-m+2)} \left(\frac{2l+3}{2l-1}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

pero por definición estas expresiones son

$$\gamma_{l,m} \leq \gamma_{l,m-1},$$

que es lo que se quería demostrar.

Dado que las $\gamma_{l,m}$'s están acotadas superiormente por $\gamma_{l,0}$, entonces bastará con probar que $\gamma_{l,0} \leq 1$. Dado que las l 's son números enteros positivos, definimos la función $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(l) = \gamma_{l,0} = \frac{l+1}{l+2} \left[\frac{l^2(2l+3)}{(l+1)^2(2l-1)} \right]^{1/2} = \left[\frac{l^2(2l+3)}{(l+2)^2(2l-1)} \right]^{1/2}.$$

Al tomar su derivada se obtiene

$$f'(l) = -\frac{1}{2} \frac{(6l^2+6l)(l+2)^2(2l-1) - l^2(2l+3)(l+2)(6l+2)}{[(l+2)^2(2l-1)]^{1/2} [(l+2)^2(2l-1)]^{3/2}}.$$

Igualamos la derivada a cero para buscar los mínimos o máximos de la función, lo que implica que

$$(6l^2+6l)(l+2)^2(2l-1) - l^2(2l+3)(l+2)(6l+2) = 8l^2 - 12 = 0,$$

lo cual es posible si $l = l_0$, donde

$$l_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{o} \quad l_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}},$$

pero dado que las l 's deben ser positivas entonces $l_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Notemos que al tomar la segunda derivada de f y al evaluarla en l_0 da como resultado $f''(l_0) \approx 0,74 > 0$. Por lo que se deduce que l_0 es un mínimo local. Además, para valores de $l > l_0$ se obtiene que $f'(l) > 0$, por lo cual concluimos que la función se vuelve monótona creciente para valores superiores a l_0 .

Para finalizar, al tomar el límite de la función $f(l)$ cuando l tiende al infinito da como resultado

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(l) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\frac{l^2 (2l + 3)}{(l + 2)^2 (2l - 1)} \right]^{1/2} = 1$$

Dado que la función es monótona creciente, véase la gráfica, entonces para cualquier $l \geq l_0 > 1$

$$f(l) = \gamma_{l,0} \leq 1,$$

y dado que $\gamma_{l,m} \leq \gamma_{l,0}$ entonces obtenemos la desigualdad deseada

$$\gamma_{l,m} \leq 1$$

Desigualdad utilizando propiedades de la función Γ

Para probar que la solución única del problema de Laplace converge, en la Sección 2.2 del Capítulo 2 se afirmó que se satisface la siguiente desigualdad

$$\gamma_{m,1} \geq C m^{1/4} \quad \text{donde} \quad C = \frac{\sqrt{5}}{24 \pi^{3/4} e^{1/24}}.$$

Recordando y para evitar confusiones con la definición de $\gamma_{m,1}$ en este anexo, se definió a la función $\gamma_{m,1}$ para todo $m > 0$ de la siguiente forma

$$\gamma_{m,1} = \frac{2^{m-1}}{3\pi} \frac{(m+2)(2m+5)}{(m+3)\sqrt{m+1}} \frac{\Gamma(m+3/2)}{[\Gamma[2(m+3/2)]]^{1/2}}.$$

Se sabe que [16]

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma(x+1/2),$$

luego

$$\Gamma(2m+3/2) = \frac{2^{2(m+1)}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(m+3/2) \Gamma(m+2),$$

sustituyendo en $\gamma_{m,1}$ se tiene

$$\begin{aligned}\gamma_{m,1} &= \frac{2^{m-1}}{3\pi} \frac{(m+2)(2m+5)}{(m+3)\sqrt{m+1}} \Gamma(m+3/2) \frac{\pi^{1/4}}{2^{m+1} [\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+2)]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{12\pi^{3/4}} \frac{(m+2)(2m+5)}{(m+3)\sqrt{m+1}} \left[\frac{\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(m+2)} \right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Tambi3n se sabe que para $x \geq 1$

$$x^{x-1/2} e^{-x} \sqrt{2\pi} \leq \Gamma(x) \leq x^{x-1/2} e^{-x} \sqrt{2\pi} e^{1/12}$$

entonces

$$\frac{\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(m+2)} \geq \frac{(m+3/2)^{m+1} e^{-m-3/2} \sqrt{2\pi}}{(m+2)^{m+3/2} e^{-m-2} \sqrt{2\pi} e^{1/12}}$$

\implies

$$\begin{aligned}\left[\frac{\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(m+2)} \right]^{1/2} &\geq \left[\frac{(m+3/2)^{m+1}}{(m+2)^{m+3/2}} e^{5/12} \right]^{1/2} \\ &\geq \frac{(m+3/2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+2)^{\frac{2m+3}{4}}} e^{5/24}.\end{aligned}$$

Por lo que $\gamma_{m,1}$ queda acotada inferiormente por

$$\begin{aligned}\gamma_{m,1} &\geq \frac{e^{5/24}}{12\pi^{3/4}} \frac{(m+2)(2m+5)}{(m+3)\sqrt{m+1}} \frac{(m+3/2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+2)^{\frac{2m+3}{4}}} \\ &\geq \frac{e^{5/24}}{12\pi^{3/4}} \frac{(2m+5)(m+3/2)^{1/2} (m+2)^{1/4}}{(m+3)(m+1)^{1/2}} \left[\frac{(m+3/2)^m}{(m+2)^m} \right]^{1/2} \\ &\geq \frac{e^{5/24}}{12\pi^{3/4}} m^{1/4} \frac{(2+5/m)(1+3/2m)^{1/2} (1+2/m)^{1/4}}{(1+3/m)(1+1/m)^{1/2}} \left[\frac{\left(1+\frac{3/2}{m}\right)^m}{(1+2/m)^m} \right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Se sabe que la sucesi3n $(1+2/m)^m$ est3 acotada superiormente por su l3mite, en este caso e^2 . Por otra parte, como la sucesi3n $(1+2/m)^m$ es mon3tona creciente se obtienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}(1+2/m)^m &\leq e^2 \\ \left(1+\frac{3/2}{m}\right)^m &\geq \left(1+\frac{3/2}{1}\right)^1 = 5/2\end{aligned}$$

debido a que las sucesiones $(2 + \frac{5}{m})$, $(1 + \frac{3}{2m})$ y $(1 + \frac{2}{m})$ son decrecientes podemos obtener la siguiente cota

$$\begin{aligned}\gamma_{m,1} &\geq \frac{e^{5/24}}{12 \pi^{3/4}} m^{1/4} \frac{(2 + 5/m) (1 + 3/2m)^{1/2} (1 + 2/m)^{1/4}}{(1 + 3/m) (1 + 1/m)^{1/2}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \frac{1}{e} \\ &\geq \frac{\sqrt{5}}{12 \sqrt{2} \pi^{3/4} e^{19/25}} m^{1/4} \frac{(2) (1)^{1/2} (1)^{1/4}}{(1 + 3) (1 + 1)^{1/2}} = \frac{\sqrt{5}}{48 \pi^{3/4} e^{19/24}} m^{1/4}.\end{aligned}$$

Por tanto se obtiene la desigualdad deseada, esto es

$$\gamma_{m,1} \geq C m^{1/4} \quad \text{con} \quad C = \frac{\sqrt{5}}{24 \pi^{3/4} e^{1/24}}.$$

Desigualdad para probar la convergencia de la derivada parcial con respecto de θ

Para demostrar la convergencia de la derivada con respecto de θ de la solución se afirmó lo siguiente

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{|m|+2k}^m(\cos \theta) \right| \leq \left(\frac{2|m|+4k+1}{4\pi} \right)^{1/2} * [(|m|+2k+m+1) (|m|+2k-m+1)]^{1/2}.$$

Para probar esta aseveración se utilizarán las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}C_{|m|+2k}^m &= [(|m|+2k+m) (|m|+2k-m+1)]^{-1/2} C_{|m|+2k}^{m-1}, \\ \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) &= \frac{1}{2} P_n^{m+1}(\cos \theta) - \frac{1}{2} (n-m+1) (n+m) P_n^{m-1}(\cos \theta).\end{aligned}$$

Tomando la derivada parcial con respecto de θ de los armónicos esféricos se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi) &= C_{|m|+2k}^m e^{im\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{|m|+2k}^m(\cos \theta) \\ &= C_{|m|+2k}^m e^{im\varphi} \frac{1}{2} \left[P_{|m|+2k}^{m+1}(\cos \theta) - (n-m+1) (n+m) P_{|m|+2k}^{m-1}(\cos \theta) \right].\end{aligned}$$

Utilizando la relación de recurrencia de los coeficientes C_n^m se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi) &= \frac{e^{im\varphi}}{2} (|m|+2k+m+1)^{1/2} (|m|+2k-m)^{1/2} C_{|m|+2k}^{m+1} P_{|m|+2k}^{m+1} \\ &\quad - \frac{e^{im\varphi}}{2} (|m|+2k+m)^{1/2} (|m|+2k-m+1)^{1/2} C_{|m|+2k}^{m-1} P_{|m|+2k}^{m-1}. \end{aligned}$$

Tomando su norma y acotando se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{|m|+2k}^m \right| &\leq \frac{1}{2} \left| (|m|+2k+m+1)^{1/2} (|m|+2k-m)^{1/2} \right| \sqrt{\frac{2|m|+4k+1}{4\pi}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| (|m|+2k+m)^{1/2} (|m|+2k-m+1)^{1/2} \right| \sqrt{\frac{2|m|+4k+1}{4\pi}} \\ &\leq \left| (|m|+2k+m+1)^{1/2} (|m|+2k-m+1)^{1/2} \right| \sqrt{\frac{2|m|+4k+1}{4\pi}}, \end{aligned}$$

por tanto se satisface la desigualdad deseada.

Convergencia de las derivadas parciales de segundo orden

En la Sección 2.2 se afirmó que la función $\psi(r, \theta, \varphi)$ era solución al problema de Laplace, por lo que se debe asegurar la convergencia de las segundas derivadas parciales. Recordando, la solución ψ se puede expresar como

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{|m|>0} \frac{\hat{k}_m}{\gamma_m} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^m Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi) \left(\frac{1}{r}\right)^{|m|+2k+1}.$$

En esa misma sección se demostró que sus primeras derivadas parciales convergen, entonces tomando la derivada con respecto a r se tiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \sum_{|m|>0} \frac{\hat{k}_m}{\gamma_m} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^m (|m|+2k+1) (|m|+2k+2) Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi) \left(\frac{1}{r}\right)^{|m|+2k+3}.$$

Usando las mismas cotas

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right| &\leq \sum_{|m|>0} \frac{|\widehat{k}_m|}{\gamma_{|m|}} \frac{|m|^2}{r^{|m|+3}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} \frac{1}{r^{2k}} \left(1 + \frac{2k+1}{|m|}\right) \left(1 + \frac{2k+2}{|m|}\right) * \\
&\hspace{25em} * \sqrt{\frac{2|m|+4k+1}{4\pi}} \\
&\leq \sum_{|m|>0} \frac{|\widehat{k}_m|}{\gamma_{|m|}} \frac{|m|^{5/2}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} (2k+2)(2k+3) \sqrt{1 + \frac{4k+1}{2|m|}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{|m|>0} \frac{|\widehat{k}_m|}{\gamma_{|m|}} |m|^{5/2} \sum_{k \geq 0} (2k+2)(2k+3)(2k+3/2)^{1/2} \frac{1}{3^k}.
\end{aligned}$$

Por el criterio de la razón se sabe que

$$\sum_{k \geq 0} (2k+2)(2k+3)(2k+3/2)^{1/2} \frac{1}{3^k} = \alpha < \infty,$$

y por lo tanto

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{4\pi}} C_1 \sum_{|m|>0} |\widehat{k}_m| |m|^{9/4}.$$

Dado que la última serie converge, entonces por el criterio de Weierstrass la segunda derivada parcial con respecto a r converge.

Tomando la segunda derivada parcial con respecto a φ se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \sum_{|m|>0} \frac{\widehat{k}_m}{\gamma_m} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^m (im)^2 Y_{|m|+2k}^m(\theta, \varphi) \left(\frac{1}{r}\right)^{|m|+2k+1}$$

\implies

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right| &\leq \sum_{|m|>0} \frac{\widehat{k}_m}{\gamma_m} \frac{|m|^2}{r^{|m|+1}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} \sqrt{\frac{2|m|+4k+1}{4\pi}} \frac{1}{r^{2k}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{|m|>0} \frac{|\widehat{k}_m| |m|^{5/2}}{\gamma_{|m|}} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} \sqrt{2k+3/2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \alpha_2 \sum_{|m|>0} |\widehat{k}_m| |m|^{9/4} < \infty
\end{aligned}$$

Por tanto, la segunda derivada parcial de ψ con respecto de φ converge si esta función es de clase $C^3[0, \pi)$.

Para tomar la segunda derivada con respecto de θ notemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Y_n^m = C_n^m e^{im\varphi} \frac{d^2}{d\theta^2} P(\cos \theta).$$

Además, se sabe que la derivada con respecto de θ de las funciones asociadas de Legendre satisfacen la siguiente propiedad

$$\frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{2} P_n^{m+1}(\cos \theta) - \frac{1}{2} (n-m+1)(n+m) P_n^{m-1}(\cos \theta).$$

\implies

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\theta} P_n^{m+1}(\cos \theta) - (n-m+1)(n+m) \frac{d}{d\theta} P_n^{m-1}(\cos \theta) \right],$$

y usando nuevamente la misma propiedad

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\theta^2} P_n^m &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} P_n^{m+2} - \frac{1}{2} (n-m)(n+m+1) P_n^m \right] - \\
&\quad \frac{1}{2} (n-m+1)(n+m) \left[\frac{1}{2} P_n^m - \frac{1}{2} (n-m+2)(n+m-1) P_n^{m-2} \right] \\
&= \frac{1}{4} P_n^{m+2} - \frac{1}{4} [(n-m)(n+m+1) + (n-m+1)(n+m)] P_n^m \\
&\quad + \frac{1}{4} (n-m+1)(n-m+2)(n+m-1)(n+m) P_n^{m-2}.
\end{aligned}$$

De donde se deduce la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} P_n^m(\cos \theta) &= \frac{1}{4} P_n^{m+2}(\cos \theta) - \frac{1}{2} (n^2 - m^2 + n) P_n^m(\cos \theta) \\ &\quad + \frac{1}{4} (n - m + 1) (n - m + 2) (n + m - 1) (n + m) P_n^{m-2}(\cos \theta) \end{aligned}$$

Se sabe que

$$|C_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{mi\varphi}| = |C_n^m P_n^m(\cos \theta)| \leq \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}},$$

luego

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2}{d\theta^2} Y_n^m \right| &= \left| C_n^m \frac{d^2}{d\theta^2} P_n^m(\cos \theta) \right| \\ &= \left| \frac{1}{4} \frac{C_n^m}{C_n^{m+2}} C_n^{m+2} P_n^{m+2} - \frac{1}{2} C_n^m (n^2 + m^2 + n) P_n^m \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{4} (n - m + 1) (n - m + 2) (n + m - 1) (n + m) \frac{C_n^m}{C_n^{m-2}} C_n^{m-2} P_n^{m-2} \right| \\ &\leq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \left[\frac{C_n^m}{C_n^{m+2}} + 2 (n^2 + m^2 + n) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} (n - m + 1) (n - m + 2) (n + m - 1) (n + m) \frac{C_n^m}{C_n^{m-2}}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{C_n^m}{C_n^{m+2}} &= \left[\frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \left[\frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m+2)!}{(n-m-2)!} \right]^{1/2} \\ &= [(n-m-1)(n-m)(n+m+1)(n+m+2)]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{C_n^m}{C_n^{m-2}} &= \left[\frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} \left[\frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m-2)!}{(n-m+2)!} \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{[(n-m+1)(n-m+2)(n+m-1)(n+m)]^{1/2}} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} & (n - m + 1) (n - m + 2) (n + m - 1) (n + m) \frac{C_n^m}{C_n^{m-2}} = \\ & = [(n - m + 1) (n - m + 2) (n + m - 1) (n + m)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas igualdades se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2}{d\theta^2} Y_n^m \right| & \leq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} [(n - m - 1) (n - m) (n + m + 1) (n + m + 2)]^{1/2} \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} [(n - m) (n + m + 1) + (n - m + 1) (n + m)] \\ & + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} [(n - m + 1) (n - m + 2) (n + m - 1) (n + m)]^{1/2} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2}{d\theta^2} Y_n^m \right| & \leq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \sqrt{(n - m) (n + m + 1)*} \\ & \left[\sqrt{(n - m) (n + m + 1)} + \sqrt{(n - m + 1) (n + m + 2)} \right] \\ & + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \sqrt{(n - m + 1) (n + m)*} \\ & \left[\sqrt{(n - m + 1) (n + m)} + \sqrt{(n - m + 2) (n + m - 1)} \right] \end{aligned}$$

.

Tomando $n = |m| + 2k$, entonces la segunda derivada parcial queda acotada por

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|m|^{3/2}}{4\sqrt{4\pi}} \sqrt{2 + \frac{4k+1}{|m|}} \sqrt{\left(1 + \frac{2k-m}{|m|}\right) \left(1 + \frac{2k+m+1}{|m|}\right)^*} \\
&\quad \left[\sqrt{\left(1 + \frac{2k-m}{|m|}\right) \left(1 + \frac{2k+m+1}{|m|}\right)} + \sqrt{\left(1 + \frac{2k-m-1}{|m|}\right) \left(1 + \frac{2k+m+2}{|m|}\right)} \right] \\
&+ \frac{|m|^{3/2}}{4\sqrt{4\pi}} \sqrt{2 + \frac{4k+1}{|m|}} \sqrt{\left(1 + \frac{2k-m+1}{|m|}\right) \left(1 + \frac{2k+m}{|m|}\right)^*} \\
&\quad \left[\sqrt{\left(1 + \frac{2k-m+1}{|m|}\right) \left(1 + \frac{2k+m}{|m|}\right)} + \sqrt{\left(1 + \frac{2k-m+2}{|m|}\right) \left(1 + \frac{2k+m-1}{|m|}\right)} \right], \\
&= \frac{|m|^{3/2}}{4\sqrt{4\pi}} \sqrt{2 + \frac{4k+1}{|m|}} \sqrt{\frac{2k}{|m|} \left(2 + \frac{2k+1}{|m|}\right)^*} \\
&\quad \left[\sqrt{\frac{2k}{|m|} \left(2 + \frac{2k+1}{|m|}\right)} + \sqrt{\left(2 + \frac{2k+2}{|m|}\right) \left(\frac{2k-1}{|m|}\right)} \right] \\
&+ \frac{|m|^{3/2}}{4\sqrt{4\pi}} \sqrt{2 + \frac{4k+1}{|m|}} \sqrt{\left(2 + \frac{2k}{|m|}\right) \left(\frac{2k+1}{|m|}\right)^*} \\
&\quad \left[\sqrt{\left(2 + \frac{2k}{|m|}\right) \left(\frac{2k+1}{|m|}\right)} + \sqrt{\left(2 + \frac{2k-1}{|m|}\right) \left(\frac{2k+2}{|m|}\right)} \right],
\end{aligned}$$

como $k \geq 0$ y $|m| \geq 1$, finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d^2}{d\theta^2} Y_{|m|+2k}^m \right| &\leq C |m|^{3/2} (4k+3)^{1/2} [2k(2k+3)]^{1/2} * \\
&\quad \left([2k(2k+3)]^{1/2} + [(2k+4)(2k-1)]^{1/2} \right) \\
&+ C |m|^{3/2} (4k+3)^{1/2} [(2k+2)(2k+1)]^{1/2} * \\
&\quad \left([(2k+2)(2k+1)]^{1/2} + [(2k+1)(2k+2)]^{1/2} \right) \\
&= C |m|^{3/2} \hat{h}(k).
\end{aligned}$$

Utilizando esta cota tenemos

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi(r, \theta, \varphi) \right| \leq C \sum_{|m|>0} \frac{|\widehat{k}_m|}{\gamma_{|m|}} |m|^{3/2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} \widehat{h}(k),$$

y por el criterio de la razón se sabe que

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} \widehat{h}(k) < \infty$$

y nuevamente es posible acotar la derivada parcial por

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi(r, \theta, \varphi) \right| \leq \widehat{C} \sum_{|m|>0} |\widehat{k}_m| |m|^{5/4}$$

pero dado que la función $k(\varphi)$ es de clase C^3 , entonces la serie converge.

En este anexo hemos demostrado que las derivadas de segundo orden de la solución $\psi(r, \theta, \varphi)$ al problema de Laplace convergen. De este modo, podemos concluir que la solución es única al establecer la condición adicional en el ecuador de la esfera.

Por lo tanto si la función ψ es la solución que satisface

$$\begin{aligned} \nabla \psi \cdot \nabla \phi &= 0 & \text{en } S, & \text{ esto es cuando } r = 1, \\ \psi\left(1, \frac{\pi}{2}, \varphi\right) &= k(\varphi) & \text{para } k & \text{ de clase } C^3[0, \pi) \end{aligned}$$

con $\phi = \cos(\theta)/r^2$ el dipolo magnético, entonces esta función y sus derivadas están acotadas por

$$\begin{aligned}
|\psi(r, \theta, \varphi)| &\leq C_1 \sum_{|m|>0} \left| \widehat{k}_m \right| |m|^{1/4} \\
\left| \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, \theta, \varphi) \right| &\leq C_2 \sum_{|m|>0} \left| \widehat{k}_m \right| |m|^{5/4} \\
\left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(r, \theta, \varphi) \right| &\leq C_3 \sum_{|m|>0} \left| \widehat{k}_m \right| |m|^{5/4} \\
\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \psi(r, \theta, \varphi) \right| &\leq C_4 \sum_{|m|>0} \left| \widehat{k}_m \right| |m|^{3/4} \\
\left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, \theta, \varphi) \right| &\leq C_5 \sum_{|m|>0} \left| \widehat{k}_m \right| |m|^{9/4} \\
\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi(r, \theta, \varphi) \right| &\leq C_6 \sum_{|m|>0} \left| \widehat{k}_m \right| |m|^{9/4} \\
\left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi(r, \theta, \varphi) \right| &\leq C_7 \sum_{|m|>0} \left| \widehat{k}_m \right| |m|^{5/4}
\end{aligned}$$

donde cada C_i es una constante y \widehat{k}_m es el m -ésimo coeficiente de Fourier de la función $k(\varphi)$. Estas cotas convergen siempre y cuando $k(\phi)$ sea una función de clase $C^3[0, \pi)$ y por el criterio de Weierstrass la solución y sus derivadas parciales también lo hacen.

Este mismo procedimiento se puede utilizar si la condición adicional es de tipo Neumann, bastará con imponer que la función sea de clase $C^2[0, \pi)$

Anexo III

En la Sección 2.2 se utilizó el Principio del Máximo de Hopf para demostrar el teorema de la unicidad del problema de Backus. A continuación se mencionará lo que establece este principio, encontrado en [17].

Teorema (Principio del Máximo de Hopf). *Sean u una función que satisface:*

$$L[u] = \sum_{i,j}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

en un dominio D en el que L es uniformemente elíptica. Suponemos que $u \leq M$ en D y que $u = M$ en un punto P en la frontera. Asumimos que este punto P se encuentra en la frontera de una bola K_1 en D . Si u es continua en $D \cup P$ y una derivada direccional externa $\partial u / \partial v$ existe en P , entonces

$$\frac{\partial u}{\partial v} > 0 \quad \text{en } P$$

a menos que $u \equiv M$.

Bibliografía

- [1] Press, F. & Siever, R. (1986). *Earth* (4th edn).
- [2] Finlay, C. C., Maus, S., Beggan, C. D., Bondar, T. N., Chambodut A., Chernova T. A., Chulliat A., Golovkov V. P., Hamilton B., Hamoudi M., Holme R., Hulot G., Kuang W., Langlais B., Lesur V., Lowes F. J., Lühr H. Macmillan S., Manda M., McLean S., Manoj C., Menvielle M., Michaelis I., Olsen N., Rauberg J., Rother M., Sabaka T. J., Tngborn A., Tøffner-Clausen L., Thébaud E., Thomson A. W. P. Wardinski I., Wei Z., & Zvereva T. I. (2010). International geomagnetic reference field: the eleventh generation. *Geophysical Journal International*, 183(3), 1216-1230.
- [3] Garland, G.D. (1979). The contributions of Carl Friedrich Gauss to geomagnetism. *Historia Mathematica*, 6(1), 5-29.
- [4] Maus, S., Rother, M., Hemant, K., Stolle, C., Lühr, H., Kuvshinov, A., & Olsen, N. (2006). Earth's lithospheric magnetic field determined to spherical harmonic degree 90 from CHAMP satellite measurements. *Geophysical Journal International*, 164(2), 319-330.
- [5] Backus, G. E. (1968). Application of a non-linear boundary-value problem for Laplace's equation to gravity and geomagnetic intensity surveys. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 21(2), 195-221.
- [6] Backus, G. E. (1970). Non-uniqueness of the external geomagnetic field determined by surface intensity measurements. *Journal of Geophysical Research*, 75(31), 6339-6341.
- [7] Jorge, M. D., & Magnanini, R. (1993). Explicit Calculation of the Solution to Backus' Problem with a Condition for Uniqueness. *Journal of mathematical analysis and applications*, 173(2), 515-522.

- [8] Rudin, W. (1966). Real and Complex Analysis McGraw-Hill Book Company. *New York, NY.*
- [9] Minzoni, A. (2004). Apuntes de ecuaciones en derivadas parciales, vol. 5 of Serie FENOMECC. *IIMAS-FENOMECC, Universidad Nacional Autónoma de México.*
- [10] Mason, R. G. (1958). A Magnetic Survey off the West Coast of the United States between Latitudes 32° and 36° N, Longitudes 121° and 128° W. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 1(4), 320-329.
- [11] Bieberbach, L. Lehrbuch der Funktionentheorie, vol. II, Leipzig, 1931. *Zentralblatt MATH*, 37.
- [12] Morse, P. M. & Feshbach H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*, Part I, Mc. Graw Hill, New York.
- [13] Szegő, G. (1967). Orthogonal polynomials, volume 33 of *Amer. In Math. Soc. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.*
- [14] Eyring, H., Walter J., & Kimball G.E. (1944). *Quantum Chemistry*, John Wiley, New York.
- [15] Asmar, N. H. (2016). *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems.* Courier Dover Publications.
- [16] Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (1980). *Tables of integrals, series and products.*
- [17] Protter, M. H., & Weinberger, H. F. (2012). *Maximum principles in differential equations.* Springer Science & Business Media.