



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NÚCLEO POR TRAYECTORIAS
DIRIGIDAS MONOCROMÁTICAS EN
TORNEOS, CUASITORNEOS Y
CUASICUASITORNEOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

OFELIA CEPEDA CAMARGO

TUTOR:

Mat. Laura Pastrana Ramírez

Ciudad Universitaria, CDMX, 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno.

Cepeda
Camargo
Ofelia
0445581497893
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
309064813

2. Datos del Tutor.

Mat.
Pastrana
Ramírez
Laura

3. Datos del sinodal 1.

Dra.
Galeana
Sánchez
Hortensia

4. Datos del sinodal 2.

Dra.
Guevara
Aguirre
Mucuy-Kak del Carmen

5. Datos del sinodal 3.

Mat.
Pastrana
Ramírez
Laura

6. Datos del sinodal 4.

M. en C.
Córtes
Flores
Patricia

7. Datos del sinodal 5.

Mat.
Hunedy
López
Gasde Augusto

8. Datos de la tesis.

Núcleo por trayectorias dirigidas
monocromáticas en torneos,
cuasitorneos y cuasicuasitorneos
101 p.
2018

Agradecimientos

A Laura Pastrana por su paciencia y ayuda brindada al realizar este trabajo.

A mis sinodales por haber enriquecido este trabajo con sus críticas y sugerencias.

A mis profesores de la Facultad de Ciencias por todo el conocimiento que compartieron conmigo, en especial a Laura Pastrana por hacer que me enamorara de la Teoría de Gráficas y a Rúbén Hurtado por darme la oportunidad de trabajar con él en el Taller de Matemáticas en lo que escribí este trabajo.

A mis amigos de la carrera por todas las horas en que discutimos las tareas en las cuales aprendí mucho, y también por las horas de distracción. En especial a Gerardo por apoyarme siempre y no dejar que me rindiera.

Índice general

Introducción	3
1. Preliminares	7
1.1. Conceptos básicos	7
1.1.1. Gráficas	7
1.1.2. Digráficas	8
1.2. Núcleos	11
1.2.1. Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas	14
2. Torneos y cuasitorneos m-coloreados	19
2.1. Introducción	19
2.2. Torneos m -coloreados	19
2.3. Cuasitorneos m -coloreados	31
3. Cuasicuasitorneos m-coloreados	53
3.1. Cuasicuasitorneo 3-coloreado sin C_3^3	53
3.2. Cuasicuasitorneo m -coloreado sin C_3^3 ni T_3^3	54
3.3. Vecindades a lo más bicolor en cuasicuasitorneos	55
3.3.1. Cuasicuasitorneos sin C_3^3 ni T_3^3	56
3.3.2. Cuasicuasitorneo con C_3^3	58
3.3.3. Cuasicuasitorneo con T_3^3	58
3.3.4. Cuasicuasitorneo con C_3^3 y T_3^3	59
3.4. NTDM en cuasicuasitorneos	60
Conclusiones	101
Bibliografía	102

Introducción

Una digráfica D consta de un conjunto finito no vacío de objetos, llamados vértices, y de un conjunto de pares ordenados de distintos elementos de los vértices de D , a estos elementos se les llama flechas o arcos de D . Un subconjunto importante de los vértices de D es el núcleo, por sus múltiples aplicaciones en teoría de juegos, en dominación y en teoría de decisiones. Un núcleo N de una digráfica D es un subconjunto del conjunto de los vértices de D tal que cumple las siguientes condiciones:

- No existen flechas entre los elementos de N ,
- Para cualquier vértice x fuera de N , existe al menos un vértice y en N tal que (x, y) está en el conjunto de las flechas de D .

El concepto de núcleo fue introducido por Von-Neumann y Morgenstern en [10] a partir de un problema dado en la teoría de juegos.

De este concepto surge la idea de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, la cual consiste en tomar una digráfica D m -coloreada por flechas y tomar un subconjunto de los vértices de dicha digráfica, llamemos N a dicho subconjunto, el cual debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Decimos que N es un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas si para cualquier par de vértices en N no existe una trayectoria dirigida monocromática entre ellos.
- Decimos que N es un conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas si para cualquier vértice x fuera de N existe un vértice y en N tal que existe una xy -trayectoria dirigida monocromática en D .

Se empezó a estudiar la existencia de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en los torneos, donde surgieron varias preguntas sobre cuándo este tipo de digráficas poseen un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Sands, Sauer y Woodrow demostraron en [9] que toda digráfica 2-coloreada tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, así en particular se tiene que todo torneo 2-coloreado tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y proponen el siguiente problema:

Si T es un torneo 3-coloreado que no tiene C_3 . ¿ T debe de tener núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?

Shen Minggang demostró en [5] que si un torneo está m -coloreado y no tiene a C_3 ni a T_3 , entonces tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. También demostró que este resultado es lo mejor posible para $m \geq 5$.

Para $m = 3$ la pregunta hecha por Sands, Sauer y Woodrow sigue abierta.

Para el caso $m = 4$ Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas dieron en [4] un contraejemplo, es decir, encontraron una digráfica 4-coloreada que cumple con no contener a C_3 pero que no tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

También demuestran para $m = 3$ en [7] que un torneo, el cual no tenga a C_3 y en cada vértice el número de colores que incidan en él sea a lo más dos, entonces el torneo tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. También demuestran que si a un torneo m -coloreado, con $m \geq 4$, se le pide la condición que a todo vértice le inciden a lo más dos colores, entonces éste tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Al encontrar algunas condiciones para estas digráficas era natural que alguien se hiciera la pregunta ¿qué pasaría si a un torneo se le borra una flecha?, esta pregunta la hacen Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy al final del capítulo 3 en [7], a esta digráfica le llaman cuasitorneo. Hortensia Galeana Sánchez demuestra en [2] que si en un cuasitorneo todo ciclo de longitud a lo más cuatro es cuasimonocromático, entonces tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. También Hortensia Galeana junto con José de Jesús García Ruvalcaba demuestran en [3] que si un cuasitorneo m -coloreado no tiene a C_3 ni a T_3 , entonces éste tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Laura Pastrana Ramírez y María del Rocío Sánchez López se dan cuenta en [6] que si a un cuasitorneo m -coloreado, con $m \geq 4$ y $p \geq 4$ se pide la condición que en todo vértice incidan a lo más dos colores, entonces éste no contiene a T_3 ni a C_3 . Con esto demuestran que todo cuasitorneo, donde el número de colores que inciden en sus vértices es a lo más dos, tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. De igual manera Hortensia Galeana Sánchez y José de Jesús García Ruvalcaba dan otras condiciones en [3] para que un cuasitorneo tenga un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

De igual manera Laura Pastrana Ramírez y María del Rocío Sánchez López, al final del capítulo 3 de [6] se preguntan ¿qué pasaría si a un torneo se le borran n flechas, con $n \geq 2$?

En esta tesis trabajaremos sobre esta pregunta para $n = 2$ (a un torneo al cual se le borran dos flechas se le llama cuasicuasitorneo), es decir, buscaremos condiciones con las cuales podemos asegurar que un **cuasicuasitorneo** tenga un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, además presentaremos algunos de los resultados antes mencionados.

En el capítulo 1 daremos las definiciones básicas que se usarán a lo largo de este trabajo, también se proporcionarán algunos resultados previos que serán de utilidad para los capítulos siguientes.

En el capítulo 2 estudiaremos algunos de los resultados antes mencionados sobre torneos y cuasitorneos para saber cuándo podemos asegurar que éstos tienen núcleo

por trayectorias dirigidas monocromáticas, respectivamente.

En el capítulo 3 veremos algunas condiciones para poder asegurar que un cuasicuasitorneo tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas utilizando un resultado que afirma que una digráfica m -coloreada tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si y sólo si la cerradura de esta digráfica tiene núcleo.

Veremos que si la pregunta hecha por Sands, Sauer y Woodrow para cuasicuasitorneos se cumple, es decir, *si D es un cuasicuasitorneo 3-coloreado que no tiene C_3 , entonces ¿ D debe tener núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?*

También veremos si el resultado dado por Shen Minggang se cumple para cuasicuasitorneos, es decir, *si D es un cuasicuasitorneo m -coloreado tal que no contiene a T_3 ni a C_3 , ¿entonces D tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?*

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos las definiciones y algunos resultados básicos de la teoría de gráficas. Estos conceptos nos serán de utilidad para el resto de la tesis.

1.1. Conceptos básicos

1.1.1. Gráficas

Una **gráfica** $G = (V(G), A(G))$ es una pareja ordenada, donde $V(G)$ es un conjunto finito de objetos, no vacío y $A(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de elementos de $V(G)$. Los elementos de $V(G)$ reciben el nombre de vértices y los de $A(G)$ el de aristas.

$\{u, v\} \subseteq V(G)$, decimos que u es **adyacente** a v y que $a = (u, v) \in A(G)$ **incide** en u y en v , y u y v son **extremos** de la arista a .

El **grado** de u en $V(G)$, denotado por $\delta(u)$, es el número de vértices adyacentes a u .

Un **camino** $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ en G es una sucesión de vértices tal que u_i es adyacente a u_{i+1} para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. La **longitud** del camino C es n , y se denota como $\ell(C) = n$. Un **camino cerrado** es un camino donde el vértice inicial y el final son iguales.

Un **paseo** P en G es un camino que no repite aristas y una **trayectoria** T es un camino que no repite vértices.

Un **ciclo** es un camino cerrado con longitud mayor o igual a 3, tal que únicamente se repite el vértice inicial y final.

Sea $u \in V(G)$, denotamos por $N(u)$ a los **vecinos** de u , es decir, $N(u) = \{v \in V(G) : u \text{ adyacente a } v\}$.

Sea $S \subseteq V(G)$, denotamos por $N(S)$ a los **vecinos** de S , es decir, $N(S) = \{u \in V(G) : u \text{ adyacente a } s, s \in S\}$.

Decimos que $S \subseteq V(G)$ es un **conjunto independiente** si u no es adyacente a v , para todo $\{u, v\} \subseteq S$. Decimos que S es un **conjunto dominante** si para todo

$u \in V(G) \setminus S$ existe $v \in S$ tal que v es adyacente a u (ver figura 1.1). Un vértice domina a todos sus vecinos y a él mismo.

En la figura 1.1 se muestra un ejemplo de como se representa una gráfica G , donde $V(G) = \{a, b, v, u, w\}$ y $A(G) = \{(a, v), (a, w), (b, u), (b, w), (v, w), (v, u), (u, w)\}$, en la cual se utilizan puntos para representar a los vértices y segmentos de recta para caracterizar a las aristas.

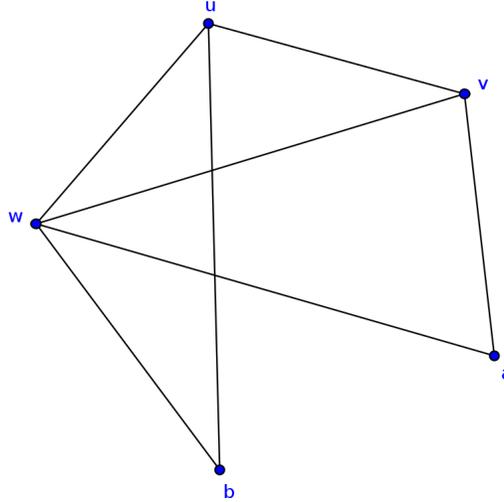


Figura 1.1: $S = \{a, b\}$ es un conjunto dominante e independiente. Por otro lado $\delta(w) = 4$.

1.1.2. Digráficas

Una **digráfica** $D = (V(D), F(D))$ es una pareja ordenada donde $V(D)$ es un conjunto finito de objetos, no vacío y $A(D)$ es un conjunto de parejas ordenadas de elementos distintos de $V(D)$. Los elementos de $V(D)$ reciben el nombre de vértices y los de $A(D)$ el de flechas o arcos.

Una **multidigráfica** es una digráfica la cual contiene flechas múltiples, es decir, pueden existir más de una flecha uniendo dos vértices.

D es una **digráfica transitiva** si para cada terna de vértices distintos u, v, w , de los cuales se tiene que $(u, v) \in F(D)$ y $(v, w) \in F(D)$, también se tiene que $(u, w) \in F(D)$.

Diremos que dos vértices u y v de D son **adyacentes** si existe una flecha entre ellos.

Se dice que $(x, y) \in F(D)$ es una **flecha simétrica** si (y, x) también está en las flechas de D . $(x, y) \in F(D)$ es una **flecha asimétrica** si $(y, x) \notin F(D)$.

Sea $A \subseteq V(D)$ distinto del vacío, una Ax -flecha es tal que $(a, x) \in F(D)$, con $a \in A$ y $x \in V(D)$. Una xA -flecha es tal que $(x, a) \in F(D)$, donde $a \in A$ y $x \in V(D)$. Una AB -flecha es una flecha $(a, b) \in F(D)$ tal que $a \in A$ y $b \in B$, con $A \subseteq V(D)$ y

$B \subseteq V(D)$.

Sea $v \in V(D)$, denotamos por $N^-(v)$ a los **vecinos interiores** de v donde $N^-(v) = \{u \in V(D) : (u, v) \in F(D)\}$ y a los **vecinos exteriores** como $N^+(v) = \{u \in V(D) : (v, u) \in F(D)\}$.

El **grado** de un vértice v , denotado por $\delta(v)$, en D esta dado por

$$\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$$

donde $\delta^+(v) = |N^+(v)|$ es el **exgrado** de v y $\delta^-(v) = |N^-(v)|$ es el **ingrado** de v (ver figura 1.2).

A un vértice de ingrado cero le llamaremos **fuentes** mientras que a un vértice de exgrado cero le llamaremos **pozo** (ver figura 1.2).

A una digráfica la representamos con puntos, los cuales juegan el papel de los vértices, y con flechas, las cuales representan las adyacencias, en la figura 1.2 podemos ver la representación de una digráfica D , donde $V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ y $A(D) = \{(u_1, u_3), (u_2, u_3), (u_2, u_5), (u_4, u_1), (u_5, u_3), (u_5, u_4), (u_6, u_1), (u_6, u_2), (u_6, u_4)\}$.

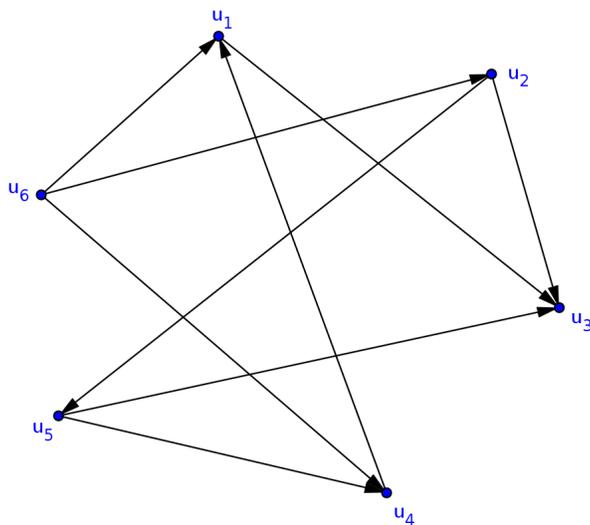


Figura 1.2: $\delta^+(u_4) = 1$, $\delta^-(u_4) = 2$, u_3 es pozo y u_6 es fuente.

Existen varios tipos de digráficas, a continuación mencionaremos algunas:

Dadas dos digráficas D y D_1 , se dice que D_1 es una **subdigráfica** de D si $V(D_1) \subseteq V(D)$ y $F(D_1) \subseteq F(D)$. Se denota por $D_1 \subseteq D$.

Sea D una digráfica, una digráfica D_1 es una **subdigráfica inducida** de D si $D_1 \subseteq D$ y $F(D_1)$ es máximo por contención, para $S \subseteq V(D)$ la **subdigráfica inducida por S** , denotada por $D[S]$, es la subdigráfica inducida de D que tiene $V(D[S]) = S$.

Una digráfica D_1 es una **subdigráfica generadora** de D si $D_1 \subseteq D$ y además $V(D_1) = V(D)$.

La **parte simétrica** de una digráfica D , denotada por $Sim(D)$, es una subdigráfica generadora de D , tal que sus flechas son las flechas simétricas de D .

La **parte asimétrica** de una digráfica D , denotada por $Asim(D)$, es una subdigráfica generadora de D , tal que sus flechas son las flechas asimétricas de D .

Una digráfica D es **completa** si $(u, v) \in F(D)$ y $(v, u) \in F(D)$ para todo u y v en $V(D)$, ver figura 1.3 a, es decir, $Sim(D) = D$ para todo $\{u, v\} \subseteq V(D)$.

Una digráfica D es **semicompleta** si $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$ para todo u y v en $V(D)$, ver figura 1.3 b.

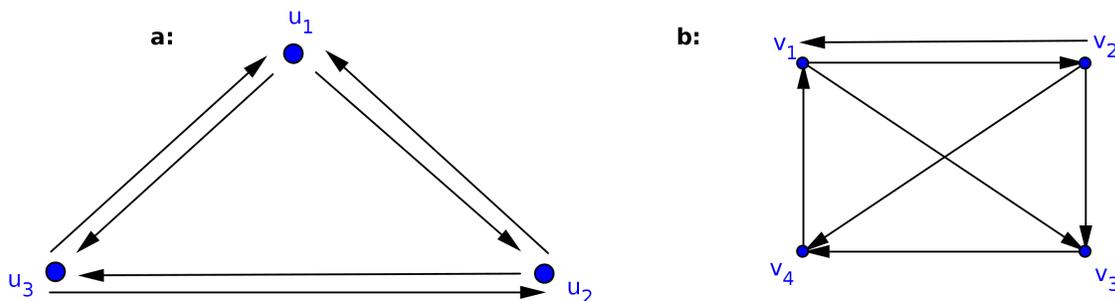


Figura 1.3: a) Digráfica completa, b) Digráfica semicompleta.

Un **torneo** T es una digráfica semicompleta tal que si $(u, v) \in F(T)$, entonces $(v, u) \notin F(T)$, ver figura 1.4 T .

Un **cuasitorneo** es una digráfica que resulta de la supresión de una flecha (x, y) de algún torneo T , ver figura 1.4 $T - (v_4, v_3)$.

Un **cuasicuasitorneo** es una digráfica que resulta de la supresión de una flecha (u, v) de algún cuasitorneo D , ver figura 1.4 $T - \{(v_4, v_1), (v_3, v_1)\}$.

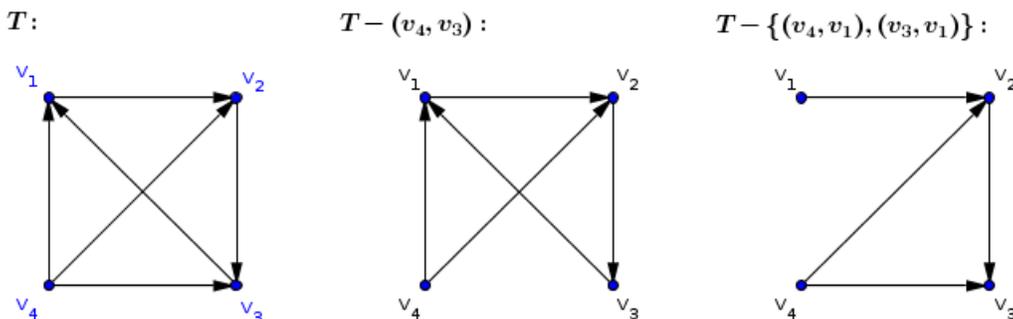


Figura 1.4: Torneo, cuasitorneo y cuasicuasitorneo.

Un **camino dirigido** $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ en D es una sucesión de vértices tal que

$(v_i, v_{i+1}) \in F(D)$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Además decimos que C es un camino dirigido de **longitud** n , y lo denotamos por $\ell(C) = n$.

Un **paseo dirigido** es un camino dirigido que no repite flechas y una **trayectoria dirigida** es un camino dirigido que no repite vértices.

Llamaremos **camino cerrado dirigido** a un camino dirigido que comienza y termina en el mismo vértice. Un **ciclo dirigido** es un camino cerrado dirigido, de longitud mayor o igual a 2, que no repite vértices salvo el primero y el último.

Un **ciclo asimétrico** es un ciclo dirigido tal que no tiene flechas simétricas.

La **distancia** entre dos vértices u y v , denotada como $d(u, v)$, es:

$$d(u, v) = \min\{\ell(T) : T \text{ es una } uv\text{-trayectoria dirigida}\}.$$

Notemos que no necesariamente se tiene que $d(u, v) = d(v, u)$.

1.2. Núcleos

Sea D una digráfica, decimos que S es un **conjunto independiente** si u no es adyacente a v para todo par de vértices u y v en $S \subseteq V(D)$.

Decimos que $S \subseteq V(D)$ es un **conjunto absorbente** si para todo $u \in V(D) \setminus S$ existe $v \in S$ tal que $(u, v) \in F(D)$.

Sea $N \subseteq V(D)$ decimos que N es **núcleo** de D si:

- N es independiente y
- N es absorbente.

Decimos que $S \subseteq V(D)$ es un **seminúcleo** de D si:

- S es independiente y
- Si existe una Sx -flecha, entonces existe una xS -flecha (semiabsorbente).

Un conjunto $Q \subseteq V(D)$ es **cuasinúcleo** si:

- Q es independiente y
- para todo $u \in V(D) \setminus Q$ existe $q \in Q$ tal que $d(u, q) \leq 2$ (cuasiabsorbente).

Decimos que D es **núcleo perfecta** si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

En la siguiente figura se muestra una digráfica D que tiene núcleo y cuasinúcleo. $N = \{u_3, u_4\}$ es núcleo de D pues $\{(u_3, u_4), (u_4, u_3)\} \not\subseteq F(D)$, es decir, N es un conjunto independiente, y $\{(u_1, u_3), (u_2, u_3), (u_5, u_4), (u_6, u_4)\} \subseteq F(D)$, es decir, N es un conjunto absorbente. Por lo tanto N es un núcleo de D .

$Q = \{u_3\}$ es un cuasinúcleo de D pues es un conjunto independiente y como $\{(u_1, u_3), (u_2, u_3), (u_5, u_3)\} \subseteq F(D)$ y $(u_4, u_1, u_3), (u_6, u_2, u_3)$ son trayectorias de longitud dos de u_4 y u_6 a u_3 , entonces tenemos que Q es cuasiabsorbente. Por lo tanto Q es cuasinúcleo.

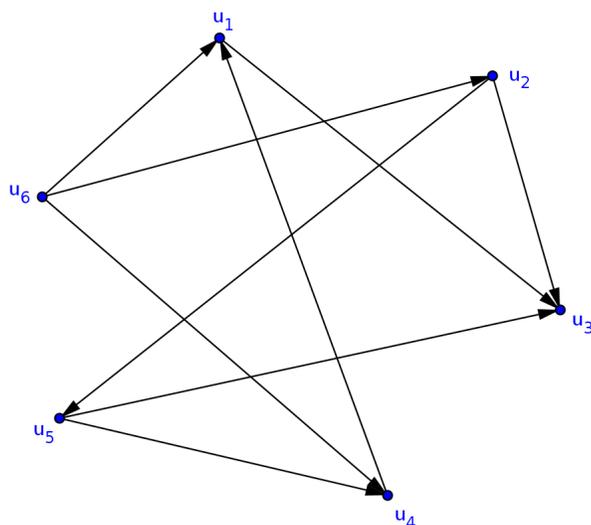


Figura 1.5: $N = \{u_3, u_4\}$ es núcleo, $Q = \{u_3\}$ es cuasinúcleo.

Hay que notar que no todas las digráficas tienen núcleo. En la figura 1.6 se muestra una digráfica sin núcleo.

Veamos porque no tiene núcleo:

Como todos los vértices son adyacentes, si D tuviera núcleo este constaría de un sólo vértice. Además como todos los vértices tienen el mismo exgrado e ingrado, podemos tomar cualquier vértice, consideremos a u como elemento de nuestro núcleo N . u absorbe a w pero no absorbe a v . Por lo tanto el ciclo dirigido de longitud 3 no tiene núcleo, esta es la única digráfica de orden 3 que no tiene núcleo.

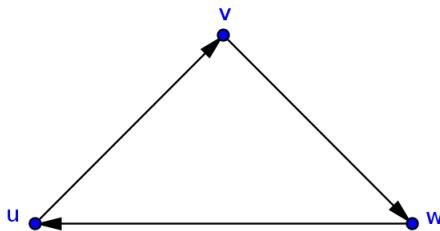


Figura 1.6: Ciclo de longitud 3.

La siguiente digráfica de orden 3 si tiene núcleo. $N = \{a_3\}$ es núcleo pues absorbe a a_1 y a_2 , y es independiente.

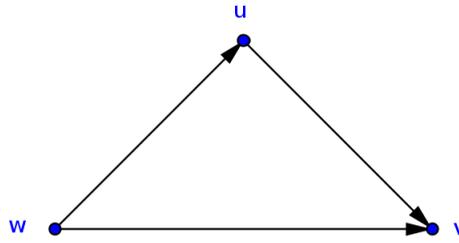


Figura 1.7: Digráfica transitiva de orden 3.

La digráfica mostrada en la figura 1.6 es el ciclo de orden 3 y la digráfica mostrada en la figura 1.7 es la digráfica transitiva de orden 3 .

A continuación veremos un resultado que relaciona a núcleos con seminúcleos.

Teorema 1. (Victor Neumann) *Si para toda subdigráfica H inducida de D , H tiene seminúcleo distinto del vacío, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Haremos la demostración por contradicción. Supongamos que D no tiene núcleo. Por hipótesis tenemos que D tiene un seminúcleo distinto del vacío. Así, tomemos S un seminúcleo, distinto del vacío, máximo por contención de D . Definamos $Q = \{x \in V(D) : \text{no existe una } xS - \text{flecha}\}$, como D no tiene núcleo sabemos que Q es distinto del vacío. Consideremos D' la digráfica inducida por Q . Por hipótesis sabemos que D' tiene un seminúcleo S' distinto del vacío.

Afirmación. $S \cup S'$ es un seminúcleo en D . Para esto mostraremos que $S \cup S'$ es independiente y es semiabsorbente.

1. $S \cup S'$ es independiente. Sabemos que S y S' son independientes. No existe ninguna $S'S - \text{flecha}$, ya que $S' \subseteq Q$ y por construcción de D' . Dado que S es seminúcleo de D y $S' \subseteq Q$ tenemos que no existe ninguna $SS' - \text{flecha}$, pues si existiera una tendríamos que también existe una $S'S - \text{flecha}$. Por lo tanto $S \cup S'$ es independiente.

2. $S \cup S'$ es semiabsorbente. Supongamos que existe un $x \in V(D)$ tal que existe una $(S \cup S')x - \text{flecha}$, digamos (y, x) donde $y \in S \cup S'$. Si $x \in V(D')$, entonces y está en S' , pues como S es seminúcleo de D esto implicaría que debería existir una $xS - \text{flecha}$, lo cual no puede pasar por definición de D' , así tenemos que existe un z en S' tal que $(x, z) \in F(D') \subseteq F(D)$. Si $x \notin V(D')$ entonces existe una z en S tal que $(x, z) \in F(D)$. Por lo tanto $S \cup S'$ es semiabsorbente.

Así tenemos que $S \cup S'$ es un seminúcleo de D , lo cual es una contradicción pues S era máximo. Por lo tanto D tiene núcleo. \square

A continuación veremos algunas condiciones, con relación a ciclos dirigidos, que debe cumplir una digráfica para poder asegurar que ésta tiene núcleo.

Teorema 2. *Si D es una digráfica tal que cada ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Haremos nuestra demostración por contradicción. Supongamos que D no tiene núcleo, así por la contrapositiva del teorema 1 tenemos que existe H una subdigráfica inducida de D que no tiene un seminúcleo distinto del vacío. Sea $u \in V(H)$, sabemos que $\{u\}$ no es un seminúcleo de H , entonces existe $u_1 \in V(H)$ tal que $(u, u_1) \in F(H)$ y $(u_1, u) \notin F(H)$. Como $\{u_1\}$ no es seminúcleo, entonces existe un $u_2 \in V(H)$, con $u_2 \neq u$, tal que $(u_1, u_2) \in F(H)$ y $(u_2, u_1) \notin F(H)$. Seguimos con esta construcción de u'_i s, y como H es finita tenemos que existen los primeros j, k tales que $u_j = u_k$, entonces $\zeta = (u_j, u_{j+1}, \dots, u_k = u_j)$ es un ciclo dirigido sin flechas simétricas en H , pero este también está en D , lo que contradice nuestra hipótesis de teorema. Por lo tanto D tiene núcleo. \square

1.2.1. Núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas

Una digráfica D es m -*coloreada por flechas*, por simplificación m -coloreada, si sus flechas están coloreadas con m colores.

Denotaremos con \mathbf{C}_3^3 a los ciclos de longitud tres y con \mathbf{T}_3^3 a los torneos transitivos de orden tres, coloreados con 3 colores.

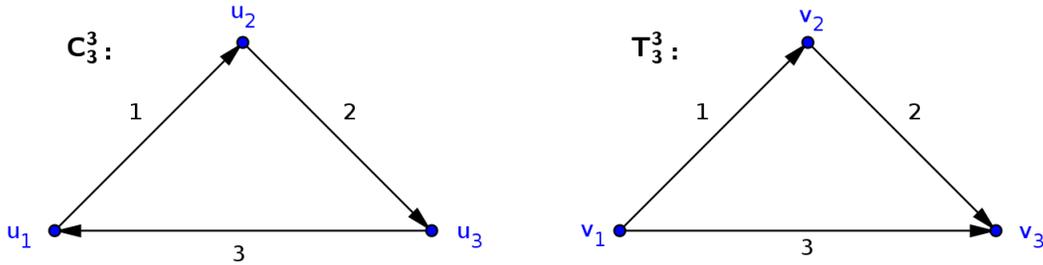


Figura 1.8: \mathbf{C}_3^3 y \mathbf{T}_3^3 .

Decimos que una **trayectoria dirigida es monocromática (tdm)** si sus flechas tienen asignado el mismo color. De igual manera un ciclo y un camino dirigidos son monocromáticos si todas sus flechas tienen asignados el mismo color.

Un ciclo es **cuasimonocromático** si tiene a los más una flecha de un color distinto a las demás.

Teorema 3. Sea D una digráfica m -coloreada. Todo uv -camino dirigido monocromático en D contiene una uv -tdm.

Demostración. Sean D una digráfica m -coloreada y $\beta = (u = x_0, x_1, \dots, v = x_n)$ un uv -camino dirigido monocromático en D . Haremos la demostración por inducción sobre n , $\ell(\beta) = n$.

Base inductiva. $\ell(\beta) = 1$.

Entonces (x_0, x_1) también es una uv -tdm.

Hipótesis de inducción.

Supongamos que todo uv -camino dirigido monocromático de longitud menor que n contiene una uv -tdm.

Paso inductivo.

Sea $\beta = (u = x_0, x_1, \dots, v = x_n)$ un uv -camino dirigido monocromático de longitud n .

Caso 1. β es una uv -tdm.

Caso 2. Existen $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $x_i = x_j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, tomemos $\beta' = (u = x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$ el cual es un uv -camino dirigido monocromático de longitud menor que n . Así, por hipótesis de inducción tenemos que β' contiene una uv -tdm, digamos T . Como $T \subseteq \beta' \subseteq \beta$ tenemos que β contiene una uv -tdm.

Por lo tanto, todo uv -camino dirigido monocromático en D contiene una uv -tdm. \square

Sea D una digráfica m -coloreada, decimos que $N \subseteq V(D)$ es un **núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas (NTDM)** si:

- para todo $\{x, y\} \subseteq N$ no existe una xy -tdm, es decir, es independiente por tdm y
- para todo $x \in V(D) \setminus N$ existe algún $y \in N$ tal que existe una xy -tdm, es decir, es absorbente por tdm.

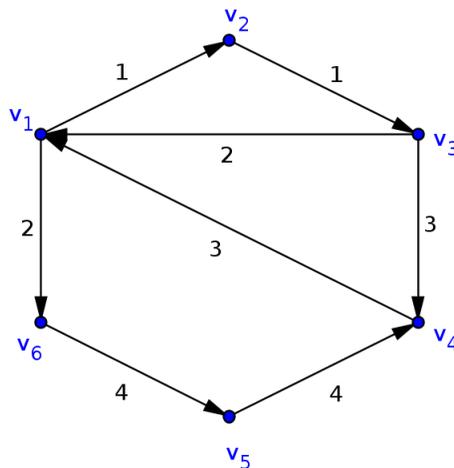


Figura 1.9: $N = \{v_2, v_4\}$ es un NTDM de D .

En la figura 1.9 tenemos una digráfica D con un NTDM. $N = \{v_2, v_4\}$ es núcleo por tdm de D . Veamos que N es independiente por tdm, observemos que a v_2 sólo le salen flechas de color 1 y a v_4 sólo le entran flechas de color 3 y 4, por lo tanto no hay tdm de

v_2 a v_4 , también observemos que a v_4 sólo le salen flechas de color 3 y a v_2 sólo le entran flechas de color 1, es decir, no hay tdm de v_4 a v_2 . Por lo tanto N es independiente por tdm.

Ahora veamos que N es absorbente por tdm, podemos notar que $\{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_4)\} \subseteq F(D)$ y (v_6, v_5, v_4) es una v_6v_4 -tdm, así tenemos que N absorbe por tdm a todo $w \in V(D) - N$.

Por lo tanto N es un NTDM de D .

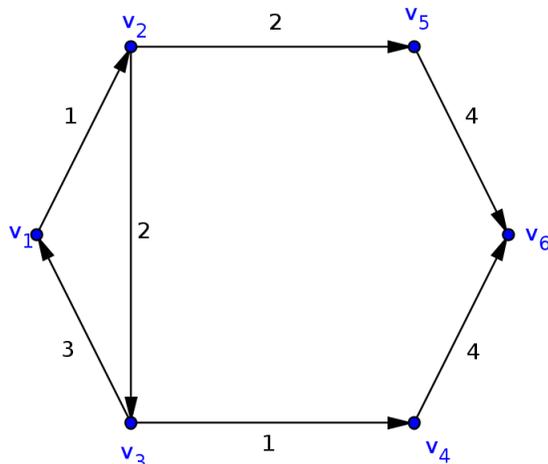


Figura 1.10: D no tiene NTDM.

En la figura 1.10 tenemos una digráfica D sin NTDM, veamos el porque no tiene NTDM. Supongamos que sí, observemos que el vértice v_6 es un pozo, por lo tanto debe de estar contenido en el núcleo. Como v_6 está entonces los vértices v_5 y v_4 no pueden estar; notemos que los vértices v_1 , v_2 y v_3 no son absorbidos por el vértice v_6 por trayectorias dirigidas monocromáticas. Observemos que los vértices v_1 , v_2 y v_3 están en un ciclo de longitud tres 3-coloreado, el cual es el torneo de menor orden que no tiene NTDM, pues si tomamos el vértice v_1 este absorbe al vértice v_3 pero a v_2 no lo absorbe nadie y no lo podemos poner en el núcleo pues (v_1, v_2) esta en las flechas de la digráfica. Por lo tanto la digráfica de la figura 1.10 no tiene NTDM.

Si D es una digráfica m -coloreada entonces la **cerradura** de D , denotada por $C(D)$, es una multidigráfica tal que:

- $V(C(D)) = V(D)$ y
- $F(C(D)) = \{(u, v) \text{ de color } i : \text{si existe una } uv\text{-tdm de color } i \text{ contenida en } D\}$.

Es inmediato, por la definición de la cerradura, que toda vu -tdm, donde $u \in N^+(v)$, se preserva en $C(D)$, dicho de otro modo, toda $(v, u) \in F(D)$ de color i se preserva en $C(D)$.

En la figura 1.11 se muestra un ejemplo de la cerradura de una digráfica D .

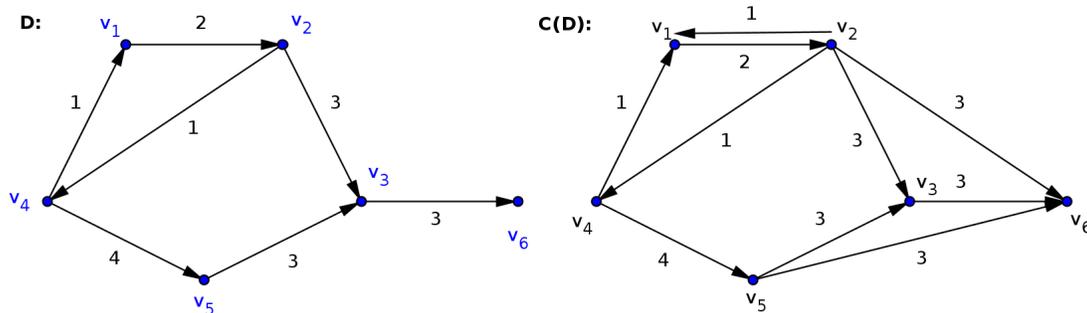


Figura 1.11: Cerradura de D .

Observación 1. i) Si D es una digráfica m -coloreada y en $C(D)$ hay una uv -tdm, entonces en D existe un uv -camino dirigido monocromático, lo que implica por el teorema 3 que en D existe una uv -tdm.

ii) Si D es una digráfica m -coloreada y $\gamma = (u_1, u_2, \dots, u_r = u_1)$ es un ciclo dirigido monocromático en D , entonces en $C(D)$ γ es un ciclo simétrico, es decir, todas sus flechas son simétricas, ésto se debe a que para cada $\{u_i, u_{i+1}\} \subseteq V(\gamma)$ se tiene una $u_{i+1}u_i$ -tdm. También observemos que si γ en D tiene sólo una flecha de distinto color, digamos (u_1, u_2) , entonces tenemos que $(u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_1)$ es una u_2u_1 -tdm, de lo cual se obtiene que $(u_2, u_1) \in F(C(D))$, es decir, γ tiene una flecha simétrica en $C(D)$.

Con la definición de cerradura se pueden relacionar los conceptos de núcleo y núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, lo cual nos servirá para demostrar que una digráfica m -coloreada tiene NTDM.

Teorema 4. *Sea D una digráfica m -coloreada. D tiene NTDM si y sólo si $C(D)$ tiene núcleo. De hecho, N es NTDM de D si y sólo si N es núcleo de $C(D)$.*

Demostración. \Rightarrow Sea N un NTDM de D . Sabemos que $V(D) = V(C(D))$. Por demostrar que N es núcleo en $C(D)$.

1. Por demostrar que N es un conjunto absorbente en $C(D)$. Sea $x \in V(C(D)) \setminus N = V(D) \setminus N$, como N es un NTDM en D entonces existe $y \in N$ tal que existe una xy -tdm. Por lo tanto en $C(D)$ existe la flecha (x, y) , por definición de $C(D)$. Por lo tanto N es absorbente.

2. Por demostrar que N es un conjunto independiente en $C(D)$. Sea $\{x, y\} \subseteq N$, como N es un NTDM en D entonces no existe una xy -tdm ni una yx -tdm en D . Por lo tanto $(x, y) \notin F(C(D))$ y $(y, x) \notin F(C(D))$. Por lo tanto N es independiente. Por lo tanto N es núcleo en $C(D)$.

\Leftarrow Sea N un núcleo en $C(D)$. Por demostrar que N es un NTDM en D .

1. Por demostrar que N es un conjunto absorbente por tdm en D . Sea $x \in V(D) \setminus N = V(C(D)) \setminus N$, como N es un núcleo en $C(D)$ entonces existe $y \in N$ tal que $(x, y) \in F(C(D))$ lo cual implica (por definición de $C(D)$) que existe una xy -tdm en D . Por lo tanto N es absorbente por tdm.

2. Por demostrar que N es un conjunto independiente por tdm en D . Sea $\{x, y\} \subseteq N$, como N es un núcleo en $C(D)$ entonces $(x, y) \notin F(C(D))$ y $(y, x) \notin F(C(D))$ lo cual implica que en D no existe una xy -tdm ni una yx -tdm. Por lo tanto N es independiente.

Por lo tanto N es un NTDM en D . \square

Lema 1. *Si D es una digráfica m -coloreada, $C(D)$ su cerradura, $S \subseteq V(C(D)) = V(D)$ y $B \subseteq V(C(D)[S])$, entonces $C(D)[S][B] = C(D)[B]$, es decir, la digráfica inducida por B en la digráfica inducida por S en $C(D)$ es igual a la digráfica inducida por B en $C(D)$.*

Demostración. Como $V(C(D)[S][B]) = V(C(D)[B])$, entonces sólo basta probar que $F(C(D)[S][B]) = F(C(D)[B])$. Lo demostraremos por doble contención.

i) $F(C(D)[S][B]) \subseteq F(C(D)[B])$. Sea $a \in F(C(D)[S][B])$. Por definición de subdigráfica inducida tenemos que si $a \in F(C(D)[S][B])$, entonces $a \in F(C(D)[S])$, así como $C(D)[S]$ es una subdigráfica inducida de $C(D)$ se tiene que $a \in F(C(D))$. Como $B \subseteq V(C(D)[S]) = S \subseteq V(C(D))$, entonces $B \subseteq V(C(D))$. Entonces $C(D)[B]$ es una subdigráfica inducida de $C(D)$, y como los vértices de a están en B , se tiene que $a \in F(C(D)[B])$.

ii) $F(C(D)[B]) \subseteq F(C(D)[S][B])$. Sea $a \in F(C(D)[B])$. Por definición de subdigráfica inducida tenemos que si $a \in F(C(D)[B])$, entonces $a \in F(C(D))$, y como $B \subseteq S$, entonces $a \in F(C(D)[S])$. Así se tiene que $C(D)[S][B]$ es una subdigráfica inducida de $C(D)[S]$. Por lo tanto, $a \in F(C(D)[S][B])$.

Por lo tanto, $F(C(D)[S][B]) = F(C(D)[B])$. Con todo lo anterior hemos demostrado que $C(D)[S][B] = C(D)[B]$. \square

Capítulo 2

Torneos y cuasitorneos m -coloreados

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos a los torneos, cuasitorneos m -coloreados y algunas condiciones que se deben cumplir para que éstos tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

2.2. Torneos m -coloreados

Sands, Sauer y Woodrow demostraron en [9] que toda digráfica 2-coloreada tiene NTDM y en particular probaron que todo torneo 2-coloreado tiene NTDM. Ahí también proponen la siguiente pregunta:

Si T es un torneo 3-coloreado que no tiene C_3^3 . ¿ T debe tener núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas?

Shen Minggang en [5] retoma el trabajo hecho por Sands, Sauer y Woodrow y demuestra lo siguiente:

Si T es un torneo m -coloreado tal que no contiene a T_3^3 ni C_3^3 , entonces T tiene un NTDM.

A continuación demostraremos el resultado encontrado por Shen Minggang, pero no lo demostraremos como lo hizo en [5], si no que utilizaremos los teoremas 2 y 4.

Teorema 5. [5] *Sea T un torneo m -coloreado tal que no contiene a T_3^3 ni a C_3 , entonces T tiene un NTDM.*

Demostración. Sea T un torneo con las hipótesis del teorema. Para demostrar que T tiene un NTDM usaremos el resultado del teorema 4, es decir, mostraremos que $C(T)$ tiene núcleo. Para esto mostraremos que todo ciclo dirigido de $C(T)$ tiene al menos una flecha simétrica.

Heremos la demostración por contradicción, es decir, supongamos que en $C(T)$ existe al menos un ciclo dirigido asimétrico. Sea $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_n = u_0)$ un ciclo dirigido asimétrico de longitud mínima en $C(T)$. Probaremos algunas afirmaciones.

Afirmación 1. $\gamma \subseteq T$.

Como γ es un ciclo dirigido asimétrico en $C(T)$ tenemos que para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ existe una $u_i u_{i+1}$ -tdm en T y no existe una $u_{i+1} u_i$ -tdm en T . Como T es un torneo, sabemos que debe existir una flecha entre u_i y u_{i+1} , pero por la anterior sabemos que en particular $(u_{i+1}, u_i) \notin F(T)$ para toda $i \in \{0, \dots, n\}$, así tenemos que $(u_i, u_{i+1}) \in F(T)$ para toda $i \in \{0, \dots, n\}$. Por lo tanto $\gamma \subseteq T$.

Afirmación 2. Si u_i y u_j son vértices no consecutivos en γ , se tiene que $(u_i, u_j) \in F(C(T))$ y $(u_j, u_i) \in F(C(T))$.

Dado que T es un torneo, tenemos que $(u_i, u_j) \in F(T)$ o $(u_j, u_i) \in F(T)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $(u_i, u_j) \in F(T)$ donde $i < j$. Por construcción de la cerradura de T tenemos que $(u_i, u_j) \in F(C(T))$. Supongamos que $(u_j, u_i) \notin F(C(T))$, así tenemos que $(u_i, u_j, u_{j+1}, \dots, u_i)$ es un ciclo asimétrico en la cerradura de T con menor longitud que la de γ , lo cual contradice la elección de γ . Por lo tanto $(u_j, u_i) \in F(C(T))$.

Afirmación 3. γ no es un ciclo dirigido monocromático.

Supongamos por contradicción que γ es monocromático. Así tenemos que $(u_1, u_2, \dots, u_n, u_0)$ es una $u_1 u_0$ -tdm lo cual implica que $(u_1, u_0) \in F(C(T))$ lo que contradice que γ es un ciclo asimétrico en $C(T)$. Por lo tanto γ no es monocromático.

Como γ no es un ciclo monocromático implica que existe al menos un cambio de color.

Supongamos sin pérdida de generalidad que (u_i, u_{i+1}) es de color 1 y (u_{i+1}, u_{i+2}) es de color 2.

Afirmación 4. $(u_{i+2}, u_i) \notin F(T)$.

Supongamos lo contrario, es decir, que $(u_{i+2}, u_i) \in F(T)$. Así tenemos que $(u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_i)$ es un ciclo de longitud 3. Por hipótesis se tiene que es a lo más 2-coloreado, por lo tanto (u_{i+2}, u_i) es de color 1 o de color 2.

Si (u_{i+2}, u_i) es de color 1 tenemos que (u_{i+2}, u_i, u_{i+1}) es una $u_{i+2} u_{i+1}$ -tdm y por lo tanto $(u_{i+2}, u_{i+1}) \in F(C(T))$, lo que es una contradicción, pues γ es asimétrico.

Si (u_{i+2}, u_i) es de color 2, entonces (u_{i+1}, u_{i+2}, u_i) es una $u_{i+1} u_i$ -tdm y por lo tanto $(u_{i+1}, u_i) \in F(C(T))$, lo que contradice que γ es asimétrico.

Así tenemos que $(u_{i+2}, u_i) \notin F(T)$. Por lo tanto $(u_i, u_{i+2}) \in F(T)$, pues T es un torneo.

Afirmación 5. Existe una $u_{i+2} u_i$ -tdm en T de longitud al menos 2.

De la afirmación (4) tenemos que $(u_i, u_{i+2}) \in F(T)$ por lo tanto existe al menos otro vértice en γ distinto de $\{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}\}$. De la afirmación (2) tenemos que $(u_{i+2}, u_i) \in F(C(T))$, es decir, existe una $u_{i+2} u_i$ -tdm en T , y como $(u_{i+2}, u_i) \notin F(T)$ la longitud es mayor o igual a 2.

Sea $\rho = (u_{i+2} = v_1, v_2, \dots, v_m = u_i)$ una $u_{i+2} u_i$ -tdm de longitud $m \geq 2$.

Afirmación 6. ρ no es de color 1.

Supongamos lo contrario, es decir, ρ es de color 1, entonces $(u_{i+2} = v_1, v_2, \dots, u_i = v_m, u_{i+1})$ es una $u_{i+2} u_{i+1}$ -tdm en T y por lo tanto $(u_{i+2}, u_{i+1}) \in F(C(T))$, lo que contradice al hecho de que γ es asimétrico.

Afirmación 7. ρ no es de color 2.

Supongamos lo contrario, es decir, ρ es de color 2, entonces $(u_{i+1}, u_{i+2} = v_1, v_2, \dots, v_m = u_i)$ es una $u_{i+1}u_i$ -tdm en T y por lo tanto $(u_{i+1}, u_i) \in F(C(T))$, contradiciendo al hecho de que γ es asimétrico.

Así, de las afirmaciones (6) y (7) tenemos que ρ es de un color distinto al 1 y al 2, digamos que es de color 3.

Afirmación 8. Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, donde $\ell(\rho) = m$, la flecha entre u_{i+1} y v_j no es de color 3.

Demostremos esto por contradicción, entonces existe una $l \in \{1, \dots, m\}$ tal que la flecha entre u_{i+1} y v_l es de color 3. De ésto tenemos 2 casos:

1. Si $(u_{i+1}, v_l) \in F(T)$, entonces $(u_{i+1}, v_l, v_{l+1}, \dots, u_i)$ es una $u_{i+1}u_i$ -tdm en T y por lo tanto $(u_{i+1}, u_i) \in F(C(T))$, lo que es una contradicción, pues γ es asimétrico.

2. Si $(v_l, u_{i+1}) \in F(T)$, entonces $(u_{i+2} = v_1, v_2, \dots, v_l, u_{i+1})$ es una $u_{i+2}u_{i+1}$ -tdm en T y por lo tanto $(u_{i+2}, u_{i+1}) \in F(C(T))$, lo cual contradice al hecho de que γ es asimétrico.

Afirmación 9. La flecha entre u_{i+1} y v_l es de color 2 para toda $1 < l < m$.

Esta afirmación se probará por inducción sobre l .

Base inductiva: $l = 2$. Tomando la subdigráfica de T inducida por $\{u_{i+1}, v_1, v_2\}$ obtenemos un torneo de orden 3, el cual por hipótesis está 2-coloreado. Por lo tanto la flecha entre u_{i+1} y v_2 debe ser de color 2 o 3. Por la afirmación (8) sabemos que no es de color 3, por lo tanto debe ser de color 2.

Hipótesis de inducción: Para toda $i < l$ la flecha entre u_{i+1} y v_i es de color 2.

Mostraremos que la flecha entre u_{i+1} y v_l también es de color 2. Tomemos la subdigráfica de T inducida por $\{u_{i+1}, v_{l-1}, v_l\}$, con esta obtenemos un torneo de orden 3, el cual por hipótesis está 2-coloreado. Por hipótesis de inducción sabemos que la flecha entre u_{i+1} y v_{l-1} es de color 2 y por la afirmación anterior tenemos que la flecha entre u_{i+1} y v_l no puede ser de color 3, y sabemos que la flecha entre v_{l-1} y v_l es de color 3. Por lo tanto la flecha entre u_{i+1} y v_l tiene que ser de color 2.

De esta afirmación se sigue que la subdigráfica de T inducida por $\{u_{i+1}, v_{m-1}, v_m\}$ es un torneo de orden tres 3-coloreado, lo cual contradice a las hipótesis del teorema. Por lo tanto todo ciclo dirigido en la cerradura de T tiene al menos una flecha simétrica, lo cual implica por el teorema 2 que $C(T)$ tiene un NTDM. Por lo tanto, por el teorema 4 T tiene un NTDM. \square

Para continuar definiremos lo siguiente:

Sea T un torneo m -coloreado y $v \in V(T)$, denotamos por $\zeta(v)$ al **conjunto de colores asignados** a las flechas que inciden en el vértice v , como $\zeta^-(v)$ al conjunto de colores asignados a la vecindad interior de v , y por $\zeta^+(v)$ al conjunto de colores asignados a la vecindad exterior de v .

Shen Minggang también muestra que para $m \geq 5$ no necesariamente se cumple que un torneo tiene un NTDM, si sólo se le pide al torneo no contener a C_3^3 pero sí a T_3^3 , dando un ejemplo (ver figura 2.1) de un torneo 5-coloreado de orden 5 que no contiene a C_3^3 pero que no tiene NTDM.

Veamos porque el torneo T de la figura 2.1 no tiene un NTDM N . Como T es un torneo, entonces sí tuviese un NTDM, éste constaría de sólo un vértice. Veamos porque

no tiene NTDM:

Si $u_1 \in N$, entonces $u_i \notin N$ pues u_1 adyacente u_i , para $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Notemos que u_1 no absorbe a u_5 , pues $(u_1, u_5) \in F(T)$ y no existe en T una u_5u_1 -tdm, pues $\zeta^+(u_5) \cap \zeta^-(u_1) = \{2, 4\} \cap \{1, 5\} = \emptyset$. Por lo tanto $u_1 \notin N$.

Como $u_1 \notin N$, entonces $u_3 \in N$, pues (u_1, u_4, u_3) es una tdm, $u_4 \in N$ o $u_5 \in N$. Pero u_3 no absorbe a u_2 por tdm, pues $(u_3, u_2) \in F(T)$ y no existe una u_3u_4 -tdm, ya que $\zeta^+(u_2) \cap \zeta^-(u_3) = \{2, 5\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$. Por lo tanto $u_3 \notin N$.

u_4 no absorbe a u_3 por tdm, pues $(u_3, u_4) \in F(T)$ y no existe una u_3u_4 -tdm, ya que $\zeta^+(u_3) \cap \zeta^-(u_4) = \{1, 4\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$. Por lo tanto $u_4 \notin N$.

$u_5 \notin N$ pues no absorbe a u_4 pues $(u_5, u_4) \in F(T)$ y no existe una u_4u_5 -tdm, ya que $\zeta^+(u_4) \cap \zeta^-(u_5) = \{3, 5\} \cap \{1, 2\} = \emptyset$.

De esto tenemos que no hay forma de absorber a u_1 , por lo tanto T no tiene NTDM.

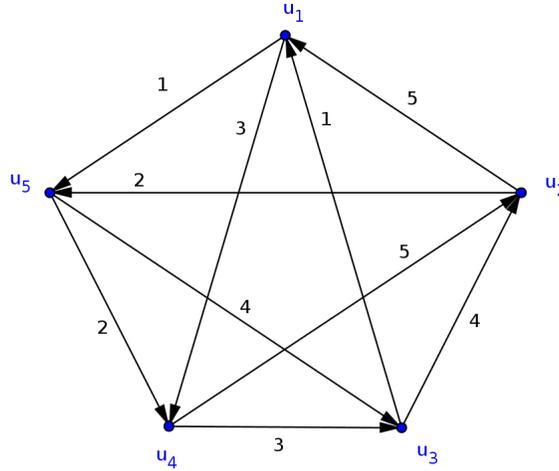


Figura 2.1: T torneo 5 coloreado que no tiene NTDM.

También probó en [5] que no es posible solo omitir la condición de que T no contenga a T_3^3 dando un torneo 4-coloreado, el cual no contiene a T_3^3 pero si a C_3^3 y que no tiene NTDM. Para la pregunta hecha por Sands, Sauer y Woodrow deja abierto el caso cuando $m = 3$ y $m = 4$.

Para el caso $m = 3$ la pregunta sigue abierta y para $m = 4$ Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy dan un contraejemplo (ver figura 2.2) en [4].

Veamos porque el torneo T de la figura 2.2 no tiene un NTDM N . Si T tuviese un NTDM, éste constaría de un sólo vértice, pues T es torneo. Analicemos porque T no tiene NTDM:

Si $u_1 \in N$, entonces $u_i \notin N$, para $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, pues u_1 adyacente u_i . Podemos observar que $\zeta^+(u_2) \cap \zeta^-(u_1) = \{2, 4\} \cap \{1, 3\} = \emptyset$, por lo que no existe una u_2u_1 -tdm, es decir, u_1 no absorbe a u_2 por tdm. Por lo tanto $u_1 \notin N$.

Como $u_1 \notin N$, entonces $u_2 \in N$, $u_3 \in N$ o $u_4 \in N$, pues (u_1, u_3, u_4) es una u_1u_4 -tdm, o $u_5 \in N$. Pero:

$u_2 \notin N$, pues $\zeta^+(u_3) \cap \zeta^-(u_2) = \{1, 4\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$, es decir, u_2 no absorbe a u_3 por tdm.

$u_3 \notin N$, pues no absorbe por tdm a u_5 . Como $\zeta^+(u_5) \cap \zeta^-(u_3) = \{3, 4\} \cap \{2, 4\} = \{4\}$, observemos que la única flecha que sale de u_5 de color 4 es (u_5, u_6) y de u_6 solo salen los colores 1 y 2, por lo tanto no existe una u_5u_3 -tdm.

$u_4 \notin N$, pues no absorbe por tdm a u_6 . Como $\zeta^+(u_6) \cap \zeta^-(u_4) = \{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$, entonces no existe una u_6u_4 -tdm.

$u_5 \notin N$, pues no absorbe por tdm a u_4 . Como $\zeta^+(u_4) \cap \zeta^-(u_5) = \{2, 3\} \cap \{1, 4\} = \{4\}$, entonces no existe una u_4u_5 -tdm.

Por lo tanto T no tiene NTDM.

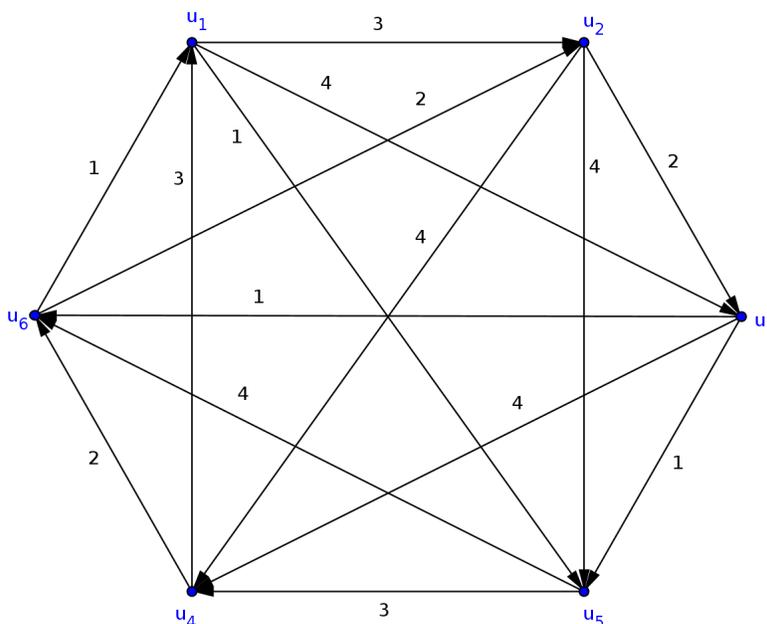


Figura 2.2: T torneo 4-coloreado que no tiene NTDM, H. Galeana y R. Rojas.

En [7] Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy demuestran el caso $m = 3$ para ciertas coloraciones. La condición que le añaden al problema de Sands, Sauer y Woodrow es la siguiente:

Para cada vértice v en T el número de colores que aparecen en las flechas que inciden en v es a lo más 2.

Con esta condición demuestran que T tiene NTDM.

En la figura 2.2 observamos que $\zeta(u_4) = \{2, 3, 4\}$.

Dado un torneo T m -coloreado, decimos que un vértice v de T tiene **vecindad a lo más bicolor** si $|\zeta(v)| \leq 2$.

A continuación enunciaremos y demostraremos el resultado mencionado anteriormente:

Teorema 6. [7] Sea T un torneo 3-coloreado sin C_3^3 tal que cada vértice de T tiene vecindad a lo más bicolor, entonces $C(T)$ tiene núcleo y por lo tanto T tiene un NTDM.

Demostración. Sea T un torneo tal que cumple con las condiciones del teorema. Supongamos que T esta coloreado con los colores 1, 2 y 3. Para empezar probaremos algunas afirmaciones.

Denotaremos con $\zeta_T(v)$ al conjunto de colores asignados a las flechas que inciden en v en T . Y con $\zeta_{C(T)}(v)$ al conjunto de colores asignados a las flechas que inciden en v en $C(T)$.

Afirmación 1. Todo vértice v de $C(T)$ tiene a lo más vecindad bicolor.

Sea $v \in V(C(T))$. Tenemos los siguientes casos:

- Si en el vértice v sólo inciden flechas de color a en T , con $a \in \{1, 2, 3\}$, entonces todas las tdm que pasan por v deben ser de color a y por definición de cerradura tendríamos que todas las flechas que inciden en v son de color a en $C(T)$.

- Si en el vértice v inciden flechas de color a y b en T , con $a \in \{1, 2, 3\}$ y $b \in \{1, 2, 3\}$, entonces todas las tdm que pasan por v deben ser de color a o b , así por definición de cerradura tendríamos que todas las flechas que inciden en v son de color a o b en $C(T)$.

Por lo tanto, se tiene que $|\zeta_{C(T)}(v)| \leq 2$ para todo v en $V(C(T))$.

Afirmación 2. $\zeta_T(v) = \zeta_{C(T)}(v)$ para todo v en $C(T)$.

Sea $v \in V(C(T)) = V(T)$. Por definición de cerradura tenemos que $N_T^-(v) \subseteq N_{C(T)}^-(v)$ y $N_T^+(v) \subseteq N_{C(T)}^+(v)$. Ahora, supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe $a \in \zeta_{C(T)}(v)$ tal que $a \notin \zeta_T(v)$, para alguna $a \in \{1, 2, 3\}$. Como $a \in \zeta_{C(T)}(v)$, entonces existe $w \in C(T)$ tal que la flecha entre w y v tiene color a en $C(T)$, por definición de cerradura tenemos que en T existe una tdm entre w y v de color a , por lo que se tiene que en T incide una flecha de color a en v , pero ésto no puede suceder pues supusimos que $a \notin \zeta_T(v)$. Por lo tanto $\zeta_T(v) = \zeta_{C(T)}(v)$ para todo v en $C(T)$.

Demostradas estas afirmaciones, procederemos a demostrar que todo ciclo dirigido en $C(T)$ tiene al menos una flecha simétrica.

Sea γ un ciclo dirigido en $C(T)$. De esto tenemos dos casos:

Caso 1. γ no es un ciclo dirigido en T .

Sabemos que existe $(u, v) \in F(\gamma)$ tal que $(u, v) \in F(C(T))$ y $(u, v) \notin F(T)$, así, dado que T es torneo, tenemos que $(v, u) \in F(T)$, de lo que se obtiene que $(v, u) \in F(C(T))$. Por lo tanto tenemos que $(v, u) \in F(C(T))$ y $(u, v) \in F(C(T))$, lo que implica que γ tiene al menos una flecha simétrica en $C(T)$.

Caso 2. γ es un ciclo dirigido en T .

Demostraremos este caso por inducción sobre la longitud de γ .

Antes de empezar es necesario introducir la siguiente notación, la cual utilizaremos a lo largo de la prueba.

- $u \xrightarrow{a} v$ si $(u, v) \in F(T)$ y es de color a .
- $u \rightarrow^a v$ si en $C(T)$ existe alguna flecha de u a v con color a .
- $u \not\rightarrow^a v$ si en $C(T)$ no hay flechas de u a v de color a .
- $u \Rightarrow^a v$ si $u \rightarrow^a v$ y en $C(T)$ todas las flechas de u a v son de color a .

Base inductiva. $\ell(\gamma) = 3$. Los únicos ciclos de longitud 3 que cumplen con las hipótesis del teorema son $\gamma_1 = (u_0, u_1, u_2, u_0)$ donde las flechas (u_0, u_1) , (u_2, u_0) son de color a y la flecha (u_1, u_2) es de color b , y $\gamma_2 = (v_0, v_1, v_2, v_0)$ donde las flechas (v_0, v_1) , (v_1, v_2) y (v_2, v_0) son de color a , ver figura 2.3.

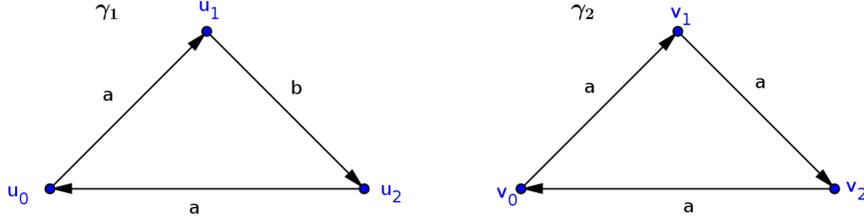


Figura 2.3: γ_1 y γ_2 .

Así en γ_1 tenemos que (u_2, u_0, u_1) es una u_2u_1 -tdm de color a en T por lo tanto tenemos que $(u_2, u_1) \in F(C(T))$, así tenemos una flecha simétrica en γ_1 en $C(T)$. γ_2 es un ciclo dirigido monocromático, por lo tanto en $C(T)$ todas sus flechas son simétricas.

Hipótesis de inducción. Supongamos que γ' es un ciclo dirigido tal que $\ell(\gamma') < n + 1$, entonces γ' contiene al menos una flecha simétrica en $C(T)$.

Paso inductivo.

Sea $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ un ciclo dirigido de longitud $n + 1$ y supongamos que en $C(T)$, γ no tiene flechas simétricas.

De esto tenemos las siguientes afirmaciones:

1. γ está al menos 2-coloreado.

Sabemos, por la observación 1 de la sección 1.2.1, que todo ciclo dirigido monocromático en T es un ciclo dirigido simétrico en $C(T)$, por lo tanto γ no puede ser monocromático.

2. Para cualquier par de vértices no consecutivos u y v de γ , (u, v) es una flecha simétrica en $C(T)$.

Sean u y v dos vértices no consecutivos de γ , entonces $u = u_i$ y $v = u_j$ para algún $\{i, j\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ con $i \neq j$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$. Entonces tenemos los siguientes casos:

- $(u, v) \in F(T)$.

Si tomamos a $\gamma' = (v = u_j, \gamma, u_i = u) \cup (u, v)$, tenemos que γ' es un ciclo dirigido en T de longitud menor que $n + 1$, así tenemos por hipótesis de inducción que γ' tiene al menos una flecha simétrica en $C(T)$ y como en γ no hay flechas simétricas esto implica que (u, v) es una flecha simétrica en $C(T)$.

- $(v, u) \in F(T)$.

Si tomamos a $\gamma' = (u = u_i, \gamma, u_j = v) \cup (v, u)$, tenemos que γ' es un ciclo dirigido en T de longitud menor que $n + 1$, así por hipótesis de inducción tenemos que γ' debe

tener al menos una flecha simétrica y como en γ no hay ninguna flecha simétrica en $C(T)$ tenemos que $(v, u) \in C(T)$ es una flecha simétrica en $C(T)$.

3. Si para algún $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $u_{i-1} \rightarrow^a u_i$ y $u_i \rightarrow^b u_{i+1}$ con $a \neq b$, entonces $u_{i+1} \Rightarrow^c u_{i-1}$ y $u_{i-1} \Rightarrow^c u_{i+1}$ con $c \neq a$ y $c \neq b$, las sumas tomadas módulo $n + 1$.

Sea $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que cumpla las hipótesis de la afirmación. Por (2) tenemos que (u_{i-1}, u_{i+1}) es una flecha simétrica en $C(T)$.

- $(u_{i+1}, u_{i-1}) \in F(C(T))$ tiene color a .

Como $(u_{i-1}, u_i) \in F(C(T))$ tiene color a , entonces tenemos que (u_{i+1}, u_{i-1}, u_i) es una $u_{i+1}u_i$ -tdm de color a , lo que implica que $(u_{i+1}, u_i) \in F(C(T))$ tiene color a , por lo tanto (u_i, u_{i+1}) es una flecha simétrica de γ en $C(T)$, lo cual no puede suceder.

- $(u_{i+1}, u_{i-1}) \in F(C(T))$ tiene color b .

Como $(u_i, u_{i+1}) \in F(C(T))$ tiene color b , entonces tenemos que (u_i, u_{i+1}, u_{i-1}) es una u_iu_{i-1} -tdm de color b , así tenemos que $(u_i, u_{i-1}) \in F(C(T))$ es de color b , esto implica que (u_{i-1}, u_i) es una flecha simétrica de γ en $C(T)$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto $u_{i+1} \Rightarrow^c u_{i-1}$ con $c \neq a$ y $c \neq b$. Así se tiene que $\zeta(u_{i-1}) = \{a, c\}$ y $\zeta(u_{i+1}) = \{b, c\}$.

Como $\zeta(u_{i+1}) = \{b, c\}$, entonces la flecha (u_{i-1}, u_{i+1}) tiene color b ó c , ya que tenemos que para todo $v \in V(T)$ su vecindad es a lo más bicolor. Si (u_{i-1}, u_{i+1}) tiene color b , entonces $\zeta(u_{i-1}) = \{a, b, c\}$ lo cual no puede suceder pues $|\zeta(u_{i-1})| \leq 2$, $a \neq c$ y $b \neq c$. Así tenemos que (u_{i-1}, u_{i+1}) tiene color c . Por lo tanto $u_{i-1} \Rightarrow^c u_{i+1}$.

Por (1) tenemos que en T existen dos flechas consecutivas en γ con diferente color. Así tenemos las siguientes observaciones:

i) Por lo anterior supongamos sin pérdida de generalidad que $u_n \rightarrow^1 u_0$ y $u_0 \rightarrow^2 u_1$.

ii) $u_n \Rightarrow^3 u_1$ y $u_1 \Rightarrow^3 u_n$.

Como $\{(u_n, u_0), (u_0, u_1)\} \subseteq F(T)$, tenemos que $\{(u_n, u_0), (u_0, u_1)\} \subseteq F(C(T))$, por (3) tenemos que para $i = n + 1$, $b = 1$ y $a = 2$ se cumple que $u_n \Rightarrow^3 u_1$ y $u_1 \Rightarrow^3 u_n$.

Así tenemos por (ii) lo siguiente:

iii) $\zeta(u_n) = \{1, 3\}$

iv) $\zeta(u_0) = \{1, 2\}$

v) $\zeta(u_1) = \{3, 2\}$

Como $\zeta(u_1) = \{3, 2\}$, entonces $u_1 \rightarrow^2 u_2$ ó $u_1 \rightarrow^3 u_2$, pues nuestros vértices tienen vecindades a lo más bicolores.

Caso a. $u_1 \rightarrow^3 u_2$.

Sea $j_0 = \min\{j = 2, 3, \dots, n : u_j \rightarrow^3 u_{j+1} \text{ con la suma tomada módulo } n + 1\}$. Como $\zeta(u_0) = \{1, 2\}$, entonces $u_n \rightarrow^3 u_0$, por lo que j_0 existe. Ahora para este caso tenemos las siguientes afirmaciones.

1.a) $u_i \rightarrow^3 u_{i+1}$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, j_0 - 1\}$ y $u_{j_0} \rightarrow^3 u_{j_0+1}$. Esto se debe a la elección de j_0 .

2.a) $u_i \rightarrow^3 u_j$ para cada $1 \leq i < j \leq j_0$. Por (1.a) tenemos que $(u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j)$ es una tdm de color 3, por lo que $(u_i, u_j) \in F(C(T))$ tiene color 3.

3.a) $j_0 \leq n - 2$. Supongamos por contradicción que $n - 2 < j_0$, es decir, $n - 1 \leq j_0$. Por (2.a) tenemos que $u_1 \rightarrow^3 u_{n-1}$ y por (ii) tenemos que $u_n \Rightarrow^3 u_1$, entonces (u_n, u_1, u_{n-1}) es una u_nu_{n-1} -tdm de color 3 y por lo tanto tenemos que $(u_n, u_{n-1}) \in F(C(T))$ de color

3. Así tenemos que (u_{n-1}, u_n) es una flecha simétrica de γ en $C(T)$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto $j_0 \leq n - 2$.

4.a) $u_{j_0+1} \Rightarrow^1 u_n$. Por (iii) tenemos que $\zeta(u_n) = \{1, 3\}$, entonces $u_{j_0+1} \rightarrow^1 u_n$ o $u_{j_0+1} \rightarrow^3 u_n$. Si $u_{j_0+1} \rightarrow^3 u_n$, entonces por (ii) tenemos que (u_n, u_1) tiene color 3 en $C(T)$ y por (2.a) tenemos que (u_1, u_{j_0}) tiene color 3. Por lo tanto $(u_{j_0+1}, u_n, u_1, u_{j_0})$ es una $u_{j_0+1}u_{j_0}$ -tdm de color 3, por lo tanto $(u_{j_0+1}, u_{j_0}) \in F(C(T))$ es de color 3 y es una flecha simétrica de γ en $C(T)$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto $u_{j_0+1} \Rightarrow^1 u_n$.

5.a) $u_0 \Rightarrow^2 u_{j_0}$. Por (iv) tenemos que $\zeta(u_0) = \{1, 2\}$, entonces $u_0 \rightarrow^1 u_{j_0}$ o $u_0 \rightarrow^2 u_{j_0}$. Así, si $u_0 \rightarrow^1 u_{j_0}$, entonces por (4.a) tenemos que $(u_{j_0+1}, u_n) \in F(C(T))$ tiene color 1 y por (i) tenemos que $(u_n, u_0) \in F(T)$ tiene color 1, por lo que tenemos que $(u_{j_0+1}, u_n, u_0, u_{j_0})$ es una $u_{j_0+1}u_{j_0}$ -tdm de color 1, por lo que se tiene que $(u_{j_0+1}, u_{j_0}) \in F(C(T))$ es de color 1. Por lo tanto (u_{j_0+1}, u_{j_0}) es una flecha simétrica de γ en $C(T)$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto $u_0 \Rightarrow^2 u_{j_0}$.

6.a) $u_0 \Rightarrow^1 u_2$. Por (i) tenemos que $(u_0, u_1) \in F(T)$ tiene color 2 y por la suposición inicial de este caso tenemos que $(u_1, u_2) \in F(T)$ tiene color 3. Por lo tanto, para $i = 1$, $a = 2$ y $b = 3$ tenemos que por (5) $u_0 \Rightarrow^1 u_2$.

7.a) $j_0 \geq 3$. Por (1.a) tenemos que $(u_{j_0-1}, u_{j_0}) \in F(C(T))$ tiene color 3 y por (5.a) tenemos que la flecha $(u_0, u_{j_0}) \in F(C(T))$ es de color 2, por lo que se tiene que $\zeta(u_{j_0}) = \{2, 3\}$. Por (6.a) tenemos que $1 \in \zeta(u_2)$, por lo tanto $u_{j_0} \neq u_2$ y así se tiene que $j_0 \geq 3$.

8.a) $\zeta(u_{j_0+1}) = \{1, 2\}$. Sabemos, por (7.a), que $\zeta(u_{j_0}) = \{2, 3\}$ y por (1.a) tenemos que la flecha $(u_{j_0}, u_{j_0+1}) \in F(C(T))$ no tiene color 3, entonces $u_{j_0} \Rightarrow^2 u_{j_0+1}$ y por (4.a) tenemos que $1 \in \zeta(u_{j_0+1})$, por lo que se tiene que $\zeta(u_{j_0+1}) = \{1, 2\}$.

9.a) $u_2 \Rightarrow^1 u_{j_0+1}$. Por (6.a) tenemos que $(u_0, u_2) \in F(C(T))$ tiene color 1 y por la suposición inicial tenemos que $(u_1, u_2) \in F(T)$ tiene el color 3, entonces $\zeta(u_2) = \{1, 3\}$, y por (8.a) tenemos que $\zeta(u_{j_0+1}) = \{1, 2\}$, por lo que $u_2 \Rightarrow^1 u_{j_0+1}$, ya que $\zeta(u_{j_0+1}) \cap \zeta(u_2) = \{1\}$ y la vecindad de cada vértice es a lo más bicolor.

Tenemos que $(u_0, u_2) \in F(C(T))$ tiene color 1 por (6.a), por (9.a) la flecha (u_2, u_{j_0+1}) en $C(T)$ tiene color 1 y por último $(u_{j_0+1}, u_n) \in F(C(T))$ tiene color 1 por (4.a), con lo cual obtenemos $(u_0, u_2, u_{j_0+1}, u_n)$ una tdm de color 1, así tenemos que (u_n, u_0) es una flecha simétrica de γ en $C(T)$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto, $u_1 \rightarrow^3 u_2$ no puede suceder.

Caso b. $u_1 \rightarrow^2 u_2$.

Sea $j_0 = \min\{j = 2, 3, \dots, n - 1 : u_j \rightarrow^2 u_{j+1}\}$. Por (iii) tenemos que $\zeta(u_n) = \{1, 3\}$, por lo que $u_{n-1} \rightarrow^2 u_n$ y por lo tanto j_0 existe. Ahora consideremos las siguientes afirmaciones:

1.b) $u_i \rightarrow^2 u_j$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$ y $u_{j_0} \rightarrow^2 u_{j_0+1}$. Esto se da por la elección de j_0 .

2.b) $u_i \rightarrow^2 u_j$ para cada $1 \leq i < j \leq j_0$.

Por (1.b) tenemos que $(u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j)$ es una tdm de color 2, de lo cual tenemos que $(u_i, u_j) \in F(C(T))$ es de color 2.

Por (v) tenemos que $\zeta(u_1) = \{2, 3\}$, entonces consideremos los siguientes subcasos.

Subcaso b.1. $j_0 \geq 3$. Para este subcaso tenemos las siguientes afirmaciones.

1.b.1. $\zeta(u_i) = \{1, 2\}$ para $i \in \{j_0 - 1, j_0\}$. Sea $i \in \{j_0 - 1, j_0\}$. Por (iv) tenemos que $\zeta(u_0) = \{1, 2\}$, entonces $u_i \rightarrow^1 u_0$ o $u_i \rightarrow^2 u_0$.

Si $u_i \rightarrow^2 u_0$, entonces por (2.b) tenemos que $(u_1, u_i) \in F(C(T))$ tiene color 2, por lo que (u_1, u_i, u_0) es una tdm de color 2, Por lo tanto (u_1, u_0) es de color 2 en $C(T)$, así tenemos que (u_0, u_1) es una flecha simétrica en $C(T)$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto $u_i \Rightarrow^1 u_0$, por lo que $1 \in \zeta(u_i)$ y por (1.b) tenemos que $(u_{i-1}, u_i) \in F(C(T))$ tiene color 2, lo que implica que $\zeta(u_i) = \{1, 2\}$.

2.b.1. $u_{j_0} \Rightarrow^1 u_{j_0+1}$. Por (1.b.1) sabemos que $\zeta(u_{j_0}) = \{1, 2\}$ y por (1.b) tenemos que $u_{j_0} \nrightarrow^2 u_{j_0+1}$, entonces $u_{j_0} \Rightarrow^1 u_{j_0+1}$.

3.b.1 $u_{j_0-1} \Rightarrow^3 u_{j_0+1}$. Por (1.b) tenemos que $u_{j_0-1} \rightarrow^2 u_{j_0}$ y por (2.b.1) $u_{j_0} \Rightarrow^1 u_{j_0+1}$. Por lo tanto, para $i = j_0$, $a = 2$ y $b = 1$ tenemos que por (5) $u_{j_0-1} \Rightarrow^3 u_{j_0+1}$.

Así, por (3.b.1) se tiene que $3 \in \zeta(u_{j_0-1})$, pero por (1.b.1) teníamos que $\zeta(u_{j_0-1}) \in \{1, 2\}$.

Por lo tanto, $j_0 \geq 3$.

Subcaso b.2. $j_0 = 2$. Para este subcaso tenemos las siguientes afirmaciones.

1.b.2. $u_2 \nrightarrow^1 u_3$, $u_1 \Rightarrow^3 u_3$, $u_3 \Rightarrow^3 u_1$ y $\zeta(u_3) = \{1, 3\}$. Como $j = 2$, tenemos que $u_2 \nrightarrow^2 u_3$, por (1.b).

Sea $a \in \{1, 3\}$ tal que $u_2 \nrightarrow^a u_3$. Por la suposición del caso b tenemos que $u_1 \nrightarrow^2 u_2$, luego para $i = 2$ se tiene por (5) que $u_1 \Rightarrow^c u_3$ y $u_3 \Rightarrow^c u_1$ con $c \neq a$ y $c \neq 2$, por (v) tenemos que $\zeta(u_1) = \{2, 3\}$, lo que implica que $c \in \{2, 3\}$ y como $c \neq 2$, entonces $c = 3$.

Ahora, como $u_2 \nrightarrow^2 u_3$, entonces $a \in \{1, 3\}$. Si $a = 3$, entonces (u_2, u_3, u_1) es una tdm de color 3 y por lo tanto tenemos que (u_1, u_2) es una flecha simétrica de γ en $C(T)$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto, $a = 1$.

Así tenemos que $u_2 \nrightarrow^1 u_3$, $u_1 \Rightarrow^3 u_3$, $u_3 \Rightarrow^3 u_1$ y $\zeta(u_3) = \{1, 3\}$.

2.b.2. $n \geq 4$.

Supongamos que $n = 3$. Por (1.b.2) tenemos que $u_1 \Rightarrow^3 u_3$ y $u_3 \Rightarrow^3 u_1$ y como T es torneo tenemos que $(u_1, u_3) \in F(T)$ o $(u_3, u_1) \in F(T)$.

- Si $(u_1, u_3) \in F(T)$, entonces por (i) tenemos que $(u_3, u_0) \in F(T)$ tiene color 1 y $(u_0, u_1) \in F(T)$ tiene color 2, lo que implica que (u_1, u_3, u_0, u_1) es un C_3^3 en T , lo cual no puede pasar por la hipótesis del teorema.

- Si $(u_3, u_1) \in F(T)$, entonces por la suposición inicial del caso b tenemos que $(u_1, u_2) \in F(T)$ tiene color 2, y por (1.b.2) tenemos que $(u_2, u_3) \in F(T)$ tiene color 1, lo que implica que (u_1, u_2, u_3, u_1) es un C_3^3 en T , lo cual no puede pasar por las hipótesis del teorema.

Por lo tanto tenemos que $n \geq 4$. Ahora por (1.b.2) tenemos que $\zeta(u_3) = \{1, 3\}$, de lo cual se tiene que $u_3 \rightarrow^1 u_4$ o $u_3 \rightarrow^3 u_4$.

- Si $u_3 \rightarrow^3 u_4$, entonces por la suposición del caso b tenemos que la flecha $(u_1, u_2) \in F(T)$ tiene color 2 y por (1.b.2) tenemos que $(u_2, u_3) \in F(T)$ tiene color 1, así tenemos tres flechas consecutivas de γ con distinto color, por lo que la prueba se reduce al caso a. Por lo tanto, podemos suponer que:

3.b.2. $u_3 \rightarrow^1 u_4$.

4.b.2. $u_n \Rightarrow^1 u_2$. Por la suposición del caso b tenemos que $(u_1, u_2) \in F(T)$ tiene color 2 y por (1.b.2) la flecha $(u_2, u_3) \in F(T)$ tiene color 1, por lo que se tiene que $\zeta(u_2) = \{1, 2\}$, por (iii) tenemos que $\zeta(u_n) = \{1, 3\}$, lo que implica que $u_n \Rightarrow^1 u_2$, pues $\zeta(u_2) \cap \zeta(u_n) = \{1\}$ y sabemos que todo vértice tiene vecindad a lo más bicolor.

5.b.2. $n \geq 5$. Si $n = 4$, entonces por (3.b.2) tenemos que la flecha $(u_3, u_4) \in F(T)$ tiene color 1 y por (4.b.2) tenemos que $(u_4, u_2) \in F(T)$ tiene color 1, por lo que se tiene que (u_3, u_4, u_2) es una tdm de color 1, así tenemos que (u_2, u_3) es una flecha simétrica de γ en $C(T)$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto, $n \geq 5$.

6.b.2. $u_4 \Rightarrow^3 u_n$. Por (iii) tenemos que $\zeta(u_n) = \{1, 3\}$, por lo que $u_4 \rightarrow^1 u_n$ o $u_4 \rightarrow^3 u_n$. Si $u_4 \rightarrow^1 u_n$, entonces por (3.b.2) tenemos que la flecha $(u_3, u_4) \in F(T)$ tiene color 1, por lo que tenemos que (u_3, u_4, u_n, u_2) es una tdm de color 1, así tenemos que $(u_3, u_2) \in F(C(T))$ es de color 1, y además tenemos que (u_2, u_3) es una flecha simétrica de γ en $C(T)$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto tenemos que $u_4 \Rightarrow^3 u_n$.

Finalmente, por (6.b.2) tenemos que $(u_4, u_n) \in F(C(T))$ tiene color 3, por (ii) se tiene que $(u_n, u_1) \in F(C(T))$ tiene color 3 y por (1.b.2) tenemos que $(u_1, u_3) \in F(C(T))$ tiene color 3, por lo que tenemos que (u_4, u_n, u_1, u_3) es una tdm de color 3, lo que implica que $(u_4, u_3) \in F(C(T))$ es de color 3. Por lo tanto tenemos que (u_3, u_4) es una flecha simétrica de γ en $C(T)$, lo cual no puede suceder.

Así concluimos que $j_0 < 2$ o $j_0 > 2$. Por lo tanto no puede pasar que $u_1 \rightarrow^2 u_2$. Por lo anterior, tenemos que γ tiene al menos una flecha simétrica en $C(T)$.

Por lo tanto, tenemos que todo ciclo dirigido de $C(T)$ tiene al menos una flecha simétrica, lo que implica, por el teorema 2 que $C(T)$ tiene un núcleo, así por el teorema 4 tenemos que T tiene un NTDM. \square

Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy en [7] se dieron cuenta, que si a un torneo T m -coloreado con $m \geq 4$ le piden la condición de que todo vértice de T tenga a lo más vecindad bicolor, entonces T no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 , y por consiguiente T tiene NTDM. De ésto tenemos el siguiente lema.

Lema 2. *Si T es un torneo m -coloreado con $m \geq 4$, tal que cada v en $V(T)$ tiene a lo más vecindad bicolor, entonces T no contiene T_3^3 ni C_3^3 . Además bajo esta hipótesis tenemos que existe un color que pertenece a todas las vecindades.*

Demostración. Sea T un torneo m -coloreado que cumple con las hipótesis del lema. Primero hagamos la siguiente observación:

Observación: Para cualquier par de vértices u y v de T tenemos que, como T es un torneo, existe una flecha entre u y v , así tenemos que el color de esta flecha pertenece tanto a $\zeta(v)$ como a $\zeta(u)$, es decir, $\zeta(u) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$.

Ahora supongamos por contradicción que para $\{u, v, w\} \subseteq V(T)$ se tiene que $D[\{u, v, w\}]$ es T_3 o C_3 . Supongamos sin pérdida de generalidad que la flecha entre u y v es de color 1, la flecha entre v y w de color 2 y la flecha entre w y u de color 3. De esto tenemos que $\zeta(u) = \{1, 3\}$, $\zeta(v) = \{1, 2\}$ y $\zeta(w) = \{2, 3\}$. Como $m \geq 4$, entonces existe $x \in V(T)$ tal que $4 \in \zeta(x)$, por la observación tenemos que $\zeta(x) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$ y

$\zeta(x) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$, por lo que concluimos que $1 \in \zeta(x)$, por lo tanto $\zeta(x) = \{1, 4\}$, de ésto tenemos que $\zeta(x) \cap \zeta(w) = \emptyset$, lo cual no puede suceder por la observación anterior.

Por lo tanto, tenemos que T no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 .

Ahora probaremos que existe un color que pertenece a todas las vecindades, para ésto consideremos 2 vértices u y v en $V(T)$ tales que $\zeta(v) \neq \zeta(u)$. Por la observación tenemos que $\zeta(v) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$, supongamos sin pérdida de generalidad que $\zeta(u) = \{1, 2\}$ y $\zeta(v) = \{1, 3\}$.

Así mostraremos que $1 \in \zeta(z)$ para cada z en $V(T)$.

Supongamos por contradicción que existe un $w \in V(T)$ tal que $1 \notin \zeta(w)$. Así, como $\zeta(w) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(w) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, tenemos que $\zeta(w) = \{2, 3\}$. Como $m \geq 4$, sabemos que existe un $x \in V(T)$ tal que $4 \in \zeta(x)$ y por la observación tenemos que $\zeta(x) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(x) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, entonces tenemos que $\zeta(x) = \{1, 4\}$, lo que implica que $\zeta(x) \cap \zeta(w) = \emptyset$, lo cual no puede pasar por la observación.

Por lo tanto, tenemos que el color 1 pertenece a toda vecindad. \square

Por los resultados anteriores tenemos el siguiente teorema:

Teorema 7. *Si T es un torneo m -coloreado con $m \geq 4$, tal que para todo v en $V(T)$ se tiene que $|\zeta(v)| \leq 2$, entonces T tiene NTDM.*

Demostración. Sea T un torneo tal que cumple con las hipótesis del teorema. Como T cumple con las hipótesis del lema 2, entonces T no contiene ni a T_3^3 ni a C_3^3 , así por el teorema 5 podemos concluir que T tiene NTDM. \square

Notemos que al teorema 6 no le podemos quitar la hipótesis de que T no contenga a C_3^3 , ya que T no necesariamente tiene NTDM, como ejemplo podemos tomar a C_3^3 el cual tiene vecindades bicolors y ya vimos que no tiene NTDM.

También observemos que si eliminamos la hipótesis de las vecindades a lo más bicolors tenemos el problema propuesto por Sands, Sauer y Woodrow en [9].

Si al teorema 7 le cambiamos a T la hipótesis de las vecindades a lo más bicolors, por vecindades a lo más tricolors, puede pasar que T no tenga NTDM, por ejemplo consideremos el torneo T de la figura 2.2 el cual tiene a lo más vecindades tricolors, y ya vimos que no tiene NTDM.

Por lo tanto, el resultado dado por el teorema 7 es lo mejor posible.

Notemos que el teorema 6 es independiente del teorema 5. Veamos esto:

Existen torneos 3-coloreados que satisfacen las hipótesis del teorema 6, pero no las del teorema 5. Por ejemplo si tomamos a T_3^3 , claramente satisface las hipótesis del teorema 6 pero no las del teorema 5.

También veamos que el teorema 5 es independiente del teorema 6, por ejemplo tomemos el torneo T transitivo de orden cuatro 3-coloreado como se muestra en la figura 2.4. Podemos observar que las vecindades son a lo más tricolors y T no contiene a C_3^3 y ningún torneo transitivo de orden 3 es T_3^3 . Así, T satisface las hipótesis del teorema 5 pero no las del teorema 6.

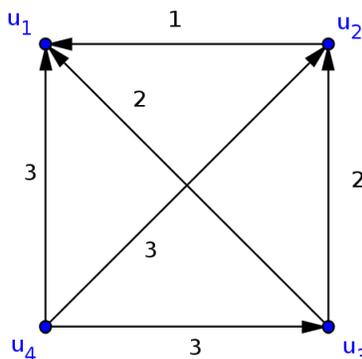


Figura 2.4: Torneo T 3-coloreado con vecindades a lo más tricolor.

En [1] Hortensia Galeana Sánchez demostró que en todo torneo T m -coloreado donde todo ciclo de longitud a lo más 4 es cuasimonocromático, se tiene que $C(T)$ es núcleo perfecta. El teorema es el siguiente:

Teorema 8. [1] *Sea T un torneo m -coloreado. Si cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es monocromático, entonces $C(T)$ es núcleo perfecta, y en particular, T tiene un NTDM.*

2.3. Cuasitorneos m -coloreados

En la sección anterior vimos algunas condiciones para que los torneos tengan NTDM, Hortensia Galeana Sánchez y José de Jesús García en [3] se dieron cuenta que si a un cuasitorneo D se le pide la condición de que no contenga T_3^3 ni C_3^3 , entonces D tiene NTDM, más aún, $C(D)$ es núcleo perfecta, el cual es el resultado equivalente al obtenido por Shen Minggang para torneos m -coloreados.

En [8] Laura Pastrana Ramírez y María del Rocío Sánchez López se hacen las siguientes preguntas:

Si a un torneo m -coloreado le quitamos una flecha, ¿la nueva digráfica m -coloreada tendrá NTDM bajo las condiciones dadas para un torneo?, ¿será cierta la pregunta de Sands, Sauer y Woodrow ([9]) aplicada a un cuasitorneo?, ¿todos los cuasitorneos tienen NTDM?

De las cuales no todas tiene una respuesta afirmativa.

Para demostrar el resultado dado por Hortensia Galeana Sánchez y José de Jesús García, es necesario mencionar los siguientes resultado previos.

El siguiente resultado fue dado por Hortensia Galeana Sánchez en [2].

Teorema 9. [2] *Sea D un cuasitorneo m -coloreado. Si para cada subdigráfica inducida H , donde H es un torneo, de D se cumple que H tiene NTDM, entonces se tiene por lo menos una de las siguientes afirmaciones:*

1. D tiene NTDM.
2. Existe un ciclo dirigido $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$, donde x y y son los dos únicos vértices no adyacentes en D .

Demostración. Supongamos que D no tiene NTDM, entonces probaremos 2. Recordemos que los únicos vértices no adyacentes son x y y .

Primero definamos un orden en $V(D)$ como sigue:

Por hipótesis tenemos que $D - \{x\}$ tiene un vértice, digamos w_0 , tal que $\{w_0\}$ es NTDM de $D - \{x\}$. Si existiera una xw_0 -tdm en D , entonces $\{w_0\}$ sería NTDM de D , por lo tanto no existe ninguna xw_0 -tdm en D . Si $\{x, w_0\}$ es independiente por tdm en D tenemos que $w_0 = y$ y $\{x, w_0\}$ es NTDM de D , contradiciendo nuestra suposición. Así tenemos que $\{x, w_0\}$ no puede ser independiente por tdm, es decir, debe existir una w_0x -tdm, por lo que $(w_0, x) \in \text{Asim}(C(D))$.

Como $D - \{x, w_0\}$ es una subdigráfica semicompleta de D tenemos que existe un vértice, digamos w_1 , tal que $\{w_1\}$ es NTDM de $D - \{x, w_0\}$. Tenemos que existe una w_1w_0 -tdm pues $\{w_0\}$ es NTDM de $D - \{x\}$. Continuando por este camino podemos dar un orden a los vértices de $D - \{x\}$ de tal manera que $\{w_k\}$ es NTDM de $D - \{x, w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$. A esto lo llamamos un w -orden de $D - \{x\}$ y un vértice precede a otro si aparece antes en el w -orden, es decir, w_{k-1} precede a w_k .

Si $\{x\}$ absorbe a todo elemento de $D - \{x\}$ por tdm, entonces $\{x\}$ es un NTDM de D , lo cual no puede pasar. Así tenemos que existe un vértice en $D - \{x, w_0\}$ que no es absorbido por x . Elegimos el menor natural k , en el w -orden, tal que para w_k no existe ninguna w_kx -tdm en D . Notemos que por nuestra elección de k todo vértice w predecesor de w_k es absorbido por x , es decir, para cada i con $0 \leq i < k$ se tiene una w_ix -tdm en D . Si $\{x, w_k\}$ es un conjunto independiente por tdm en D , entonces $\{x, w_k\}$ es NTDM de D , pues x absorbe a los w -predecesores de w_k y w_k absorbe a los vértices restantes. De esto tenemos que $(x, w_k) \in \text{Asim}(C(D))$. Hacemos $w_k = u_0$. Debe existir un vértice en el w -orden el cual no es absorbido por u_0 , de lo contrario $\{u_0\}$ sería NTDM de D , y este vértice debe w -preceder a u_0 en el w -orden, ya que $\{w_k\}$ es NTDM de $D - \{x, w_0, \dots, w_{k-1}\}$. Elegimos el menor ℓ tal que cumple con la propiedad anterior, es decir, no existe una $w_\ell u_0$ -tdm en D y sea $w_\ell = u_1$. Notemos que por definición del w -orden se sigue que hay una $u_0 u_1$ -tdm por lo que $(u_0 u_1) \in \text{Asim}(C(D))$.

Podemos continuar de manera similar para definir $u_2, u_3, \dots, \text{etcétera}$. Llamamos a esto el u -orden y notemos que no necesariamente incluye todos los vértices de $D - \{x\}$. Debe existir un primer vértice en el u -orden tal que no absorbe a x , pues w_i no absorbe a x , para $0 \leq i \leq k$. Sea m el menor número natural tal que no existe alguna xu_m -tdm en D . Así tenemos el ciclo dirigido asimétrico $\gamma = (x, u_0, u_1, \dots, u_m, x) \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

Por construcción tenemos lo siguiente:

1. x absorbe a cada vértice de γ excepto a u_0 ,
2. u_i absorbe cada vértice en γ excepto u_{i+1} , con $0 \leq i \leq m$ y
3. u_m absorbe a cada vértice de γ excepto a x .

Por construcción $x \in V(\gamma)$. Finalmente probaremos que $y \in V(\gamma)$. Si $y \notin V(\gamma)$, entonces la subdigráfica de D inducida por $V(\gamma)$, es decir, $D[V(\gamma)]$, es una subdigráfica

inducida propia semicompleta de D y por hipótesis esto implica que existe un vértice $z \in V(\gamma)$ tal que $\{z\}$ es NTDM de $D[V(\gamma)]$, lo que implica que $\{z\}$ es un conjunto absorbente por tdm de $D[V(\gamma)]$, con lo que llegamos a una contradicción, pues por (1), (2) y (3) sabemos que no hay un vértice en γ tal que este absorba a cada vértice en γ . Así tenemos que $y \in V(\gamma)$. Por lo tanto $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$. \square

El siguiente resultado fue dado por Hortensia Galeana Sánchez y José de Jesús García en [3].

Teorema 10. [3] *Sea D un cuasitorneo m -coloreado. Si D no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 , entonces $C(D)$ no contiene ningún ciclo dirigido asimétrico γ tal que:*

1. $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$, con x y y los únicos vértices no adyacentes de D , y
2. entre cualquier par de vértices no consecutivos de γ existen flechas simétricas.

Así, con estos 2 teoremas podemos demostrar el resultado obtenido por Hortensia Galeana Sánchez y José de Jesús García en [3].

Teorema 11. [3] *Sea D un cuasitorneo m -coloreado. Si D no contiene a C_3^3 ni T_3^3 , entonces $C(D)$ tiene núcleo.*

Demostración. Sea D un cuasitorneo m -coloreado sin C_3^3 ni T_3^3 . Como D no contiene a C_3^3 ni a T_3^3 , entonces en particular toda subdigráfica completa H de D no tiene C_3^3 ni T_3^3 , por lo que se tiene, por el teorema 5, que H tiene NTDM y por consiguiente $C(H)$ tiene núcleo, así tenemos que se cumple 1 o 2 del teorema 9, pero como D no contiene C_3^3 ni T_3^3 tenemos por el teorema 10 que $C(D)$ no contiene un ciclo $\gamma \subseteq Asim(D)$ en el cual $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$, donde x y y son los únicos dos vértices no adyacentes en D , por lo tanto concluimos, por el teorema 9, que $C(D)$ tiene núcleo. \square

Hacen notar, en [3], que al teorema 11 no se le puede pedir menos, es decir, no basta con que D no tenga C_3^3 o que D no contenga T_3^3 y dan dos cuasitorneos D_1 y D_2 , respectivamente, (figura 2.5 y figura 2.6) para mostrar esto.

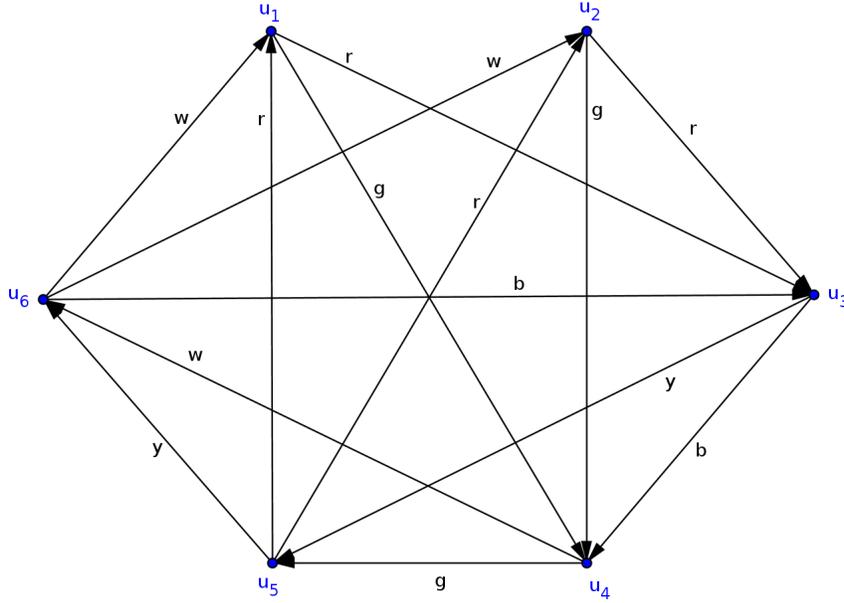


Figura 2.5: D_1 cuasitorneo 5-coloreado sin C_3 .

Primero notemos, en D_1 , que los únicos ciclos dirigidos de longitud 3 son los siguientes: (u_6, u_1, u_4, u_6) , (u_5, u_1, u_4, u_5) , (u_5, u_1, u_3, u_5) , (u_6, u_2, u_4, u_6) , (u_5, u_2, u_4, u_5) , (u_2, u_3, u_5, u_2) , (u_6, u_3, u_5, u_6) y (u_6, u_3, u_4, u_6) , los cuales no son C_3^3 . También notemos que nuestros dos únicos vértices no adyacentes u_1 y u_2 forman un conjunto independiente por tdm. Ahora veamos que D_1 no tiene NTDM.

Supongamos que D_1 tiene un NTDM N :

Si $u_1 \in N$, como u_1 adyacente u_i , entonces $u_i \notin N$ para $i \in \{3, 4, 5, 6\}$. Pero u_1 no absorbe a u_3 por tdm, pues $N^+(u_3) = \{y, b\}$ y $N^-(u_1) = \{w, r\}$, entonces u_1 no es NTDM de D_1 . Como $\{u_1, u_2\}$ es un conjunto independiente por tdm entonces $\{u_1, u_2\}$ podrían estar contenidos en N , pero u_2 no absorbe a u_3 por tdm, pues $N^+(u_3) = \{y, b\}$ y $N^-(u_2) = \{w, r\}$. Por lo tanto $u_1 \notin N$, $u_2 \notin N$ y $\{u_1, u_2\} \not\subseteq N$.

Como $u_1 \notin N$, entonces $u_3 \in N$ o $u_4 \in N$. Pero $u_3 \notin N$, pues u_3 no absorbe a u_4 por tdm, ya que $\zeta^+(u_4) \cap \zeta^-(u_3) = \{g, w\} \cap \{r, b\} = \emptyset$.

Entonces $u_4 \in N$, pues absorbe a u_1 y a u_3 por tdm. Pero u_4 no absorbe a u_5 por tdm, pues $\zeta^+(u_5) \cap \zeta^-(u_4) = \{r, y\} \cap \{b, g\} = \emptyset$.

Entonces $u_5 \in N$, pues absorbe a u_1, u_3 y u_4 por tdm. Pero $u_5 \notin N$, pues no absorbe a u_6 por tdm, pues $\zeta^+(u_6) \cap \zeta^-(u_5) = \{b, w\} \cap \{g, y\} = \emptyset$.

$u_6 \notin N$ pues no absorbe a u_1 por tdm, pues $\zeta^+(u_1) \cap \zeta^-(u_6) = \{r, g\} \cap \{y, w\} = \emptyset$.

De esto tenemos que no es posible absorber a u_1 .

Por lo tanto D_1 no tiene NTDM, por lo que $C(D)$ no tiene núcleo.

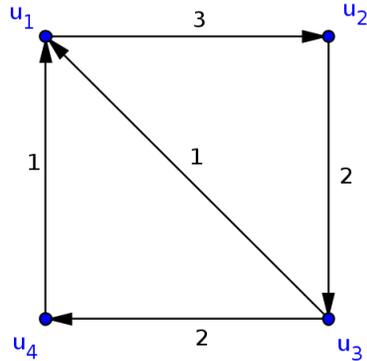


Figura 2.6: D_2 cuasitorneo 3-coloreado sin T_3 .

Veamos que D_2 no tiene NTDM.

Si $u_1 \in N$, entonces $u_i \notin N$ pues u_1 adyacente a u_i , para $i \in \{2, 3, 4\}$. Pero u_1 no absorbe a u_2 por tdm, pues $\zeta^+(u_2) \cap \zeta^-(u_1) = \{2\} \cap \{1\} = \emptyset$.

Podemos observar que ni u_3 ni u_4 absorben a u_1 , pues $\zeta^+(u_1) \cap \zeta^-(u_3) = \{3\} \cap \{2\} = \emptyset$ y $\zeta^+(u_1) \cap \zeta^-(u_4) = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset$.

Así tenemos que no hay forma de absorber a u_1 .

Por lo tanto D_2 no tiene NTDM y por consiguiente $C(D_2)$ no tiene núcleo.

Con respecto a la pregunta de Sands, Sauer y Woodrow aplicada a un cuasitorneo m -coloreado Laura Pastrana Ramírez y María Rocío Sánchez López en [8] dan un cuasitorneo 3-coloreado (figura 2.7) sin C_3^3 y que no tiene NTDM.

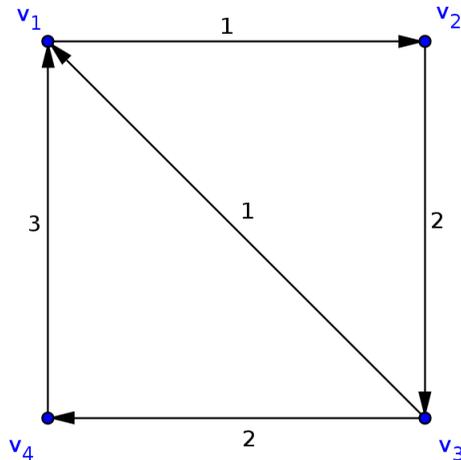


Figura 2.7: Cuasitorneo D 3-coloreado sin C_3 .

Veamos porque no tiene NTDM. Notemos que nuestro NTDM solo puede constar de un vértice de D , pues $\{v_2, v_4\}$ no es independiente por tdm, ya que (v_2, v_3, v_4) es una v_2v_4 -tdm de color 2.

Si $v_1 \in N$, entonces $v_i \notin N$, pues v_1 adyacente v_i , para $i = 2, 3, 4$. Pero v_1 no absorbe a v_2 por tdm, pues $\zeta^+(v_2) \cap \zeta^-(v_1) = \{2\} \cap \{3, 1\} = \emptyset$.

Podemos observar que ni v_3 ni v_4 absorben a v_1 , pues $\zeta^+(v_1) \cap \zeta^-(v_3) = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset$ y $\zeta^+(v_1) \cap \zeta^-(v_4) = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset$.

De esto tenemos que no hay forma de absorber a v_1 .

Por lo tanto D no tiene NTDM.

En [2] Hortensia Galeana Sánchez demuestra con ayuda del teorema 9 lo siguiente:

Teorema 12. [2] *Sea D un cuasitorneo m -coloreado. Si cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es cuasimonocromático, entonces D tiene un NTDM.*

Demostración. Para demostrar este teorema procederemos por inducción sobre $n = |V(D)|$.

Como cualquier digráfica con uno o dos vértices tiene NTDM, tenemos que para $n = 1$ y $n = 2$ la proposición es inmediata.

Supongamos que cada cuasitorneo D' m -coloreado con $|V(D')| < n$ y donde todo ciclo dirigido de longitud a lo más cuatro es cuasimonocromático tiene un NTDM.

Sea D un cuasitorneo que cumple con las hipótesis del teorema con $|V(D)| = n$.

Vamos a proceder por contradicción para probar que D tiene un NTDM. Supongamos que D no tiene un NTDM. Notemos que toda subdigráfica inducida propia de D , que sea un torneo, todo ciclo de longitud a lo más cuatro es cuasimonocromático, así tenemos por el teorema 8 que toda subdigráfica propia inducida de D tiene un NTDM y así por el teorema 9 tenemos que, como D no tiene un NTDM, existe un ciclo dirigido $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$, donde x y y son los únicos vértices no adyacentes de D .

Probaremos varias propiedades de γ .

1. γ no es monocromático.

Por lo observación 1 tenemos que todo ciclo dirigido monocromático tiene flechas simétricas y esto no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

2. Si $\{z_i, z_j\} \subseteq V(\gamma)$ tal que $j \notin \{i-1, i+1\}$, entonces $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(C(D))$.

Veamos que (x, u_i) es una flecha simétrica en $C(D)$ para toda $0 \leq i \leq n-1$. Como los vértices u_1, u_2, \dots, u_n están antes que u_0 en el w -orden, entonces estos son absorbidos por $\{x\}$ en $C(D)$, es decir, $(u_i, x) \in F(C(D))$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y además como u_n es el primer vértice tal que $(x, u_n) \in F(C(D))$, entonces (x, u_i) pertenece a las flechas de $C(D)$ para toda $0 \leq i \leq n-1$. Por lo tanto (x, u_i) es una flecha simétrica en $C(D)$ para toda $0 \leq i \leq n-1$.

Ahora veamos que (u_j, u_i) es una flecha simétrica en $C(D)$. Sean u_i y u_j dos vértices no consecutivos de γ , supongamos que $i < j$. Como u_j está antes que u_i en el w -orden, entonces $(u_i, u_j) \in F(C(D))$, luego u_i y u_j no son consecutivos por lo que $i+1 < j$, por lo tanto tenemos que u_j está antes que u_{i+1} en el w -orden y por la elección de u_{i+1}

concluimos que $(u_j, u_i) \in F(C(D))$. Por lo tanto, (u_j, u_i) es una flecha simétrica en $C(D)$.

3. Los únicos cambios de color de γ se dan en x y en y .

Supongamos por contradicción que $z_1 \in V(\gamma) \setminus \{x, y\}$ donde $c(z_0, z_1) = \text{rojo}$ y $c(z_1, z_2) = \text{azul}$. De esto tenemos lo siguiente:

3.1. $(z_2, z_0) \notin F(D)$.

Supongamos por contradicción que $(z_2, z_0) \in F(D)$, entonces $\vec{\gamma}_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0)$ es un ciclo dirigido de longitud tres contenido en D . Por hipótesis tenemos que $c(z_2, z_0) = \text{rojo}$ o $c(z_2, z_0) = \text{azul}$. Si $c(z_2, z_0) = \text{rojo}$, entonces (z_2, z_0, z_1) es una $z_2 z_1$ -tdm, así tenemos que $(z_2, z_1) \in F(C(D))$ lo que contradice que $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$. Si $c(z_2, z_0) = \text{azul}$, entonces (z_1, z_2, z_0) es una $z_1 z_0$ -tdm, así tenemos que $(z_1, z_0) \in F(C(D))$ lo que contradice que $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$. Por lo tanto $(z_2, z_0) \notin F(D)$.

Tenemos que $(z_2, z_0) \notin F(D)$, pero por (2) tenemos que $(z_2, z_0) \in F(C(D))$, es decir, existe una $z_2 z_0$ -tdm en D . Sea $\alpha = (z_2 = 0, 1, \dots, p = z_0)$ dicha trayectoria, ver figura 2.8, donde $p \geq 2$.

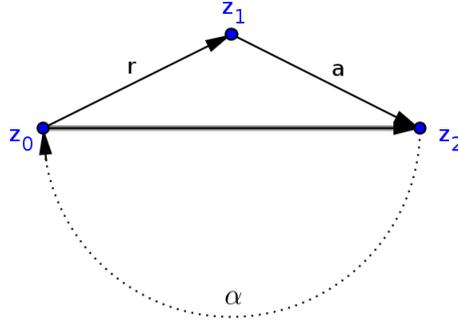


Figura 2.8: Cambio de color de γ .

3.2. α no es de color azul.

Si α es de color azul, entonces tenemos que (z_1, z_2, α, z_0) es una $z_1 z_0$ -tdm en D , por lo que $(z_1, z_0) \in F(C(D))$, lo cual no puede pasar pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

3.3. α no es de color rojo.

Si α es de color rojo, entonces tenemos que (z_2, α, z_0, z_1) es una $z_2 z_1$ -tdm en D , por lo que $(z_2, z_1) \in F(C(D))$, lo cual no puede pasar pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

De (3.2) y (3.3) tenemos que α es de un color distinto al *rojo* y *azul*, digamos *negro*.

3.4. Para cada $i \geq 0$ tal que $2i < p$ se tiene que $(z_1, 2i) \in F(D)$.

Procederemos por contradicción.

Supongamos que existe $i \geq 0$ tal que $2i < p$ y $(z_1, 2i) \notin F(D)$. Sea $2i_0 = \min\{2i \mid (z_1, 2i) \notin F(D), 0 \leq 2i < p\}$, donde $2i_0 - 2 \geq 0$. Por la hipótesis $z_1 \notin \{x, y\}$ y por la definición de D tenemos que $(z_1, 2i_0 - 2) \in F(D)$, $(z_1, 2i_0) \notin F(D)$ y $(2i_0, z_1) \in F(D)$.

Sea $\vec{\gamma}_4 = (z_1, 2i_0 - 2, 2i_0 - 1, 2i_0, z_1)$, el cual es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en D , ver figura 2.9, en el cual las flechas $(2i_0 - 2, 2i_0 - 1)$ y $(2i_0 - 1, 2i_0)$ son

de color negro, por hipótesis del teorema tenemos que $\vec{\gamma}_4$ es cuasimonocromático por lo que una de las flechas $(z_1, 2i_0 - 2)$ o $(2i_0, z_1)$ es de color negro.

Si $c(z_1, 2i_0 - 2) = \text{negro}$, entonces $(z_1, 2i_0 - 2, \alpha, z_0)$ es una $z_1 z_0$ -tdm, por lo tanto tenemos que $(z_1, z_0) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$. Si $c(2i_0, z_1) = \text{negro}$, entonces $(z_2 = 0, \alpha, 2i_0, z_1)$ es una $z_2 z_1$ -tdm, ver figura 2.9, por lo tanto tenemos que $(z_2, z_1) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

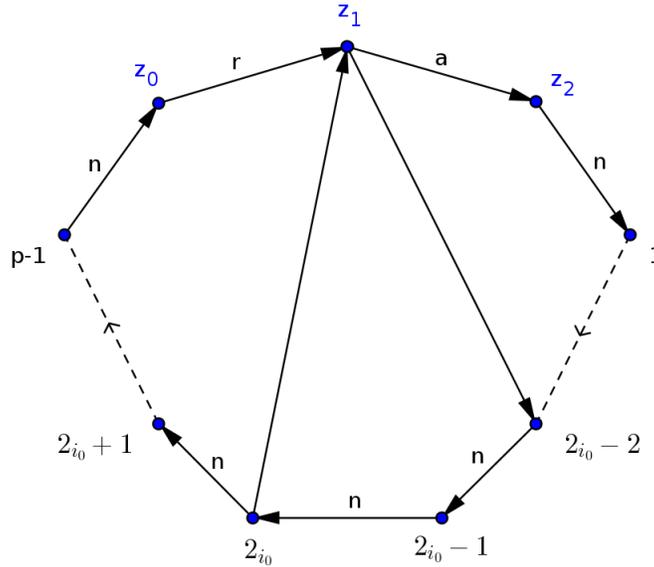


Figura 2.9: Ciclo de longitud 4 en D .

Con esto continuamos con la demostración de la propiedad (3) de γ , analizando los casos cuando p es par e impar.

Caso a: p es par. Como p es par tenemos que $p - 2$ también es par, y como $p \geq 2$, entonces $p - 2 \geq 0$. Por la proposición (3.4) tenemos que $(z_1, p - 2) \in F(D)$, entonces $\vec{\gamma}_4 = (z_1, p - 2, p - 1, p = z_0, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en D con las flechas $(p - 2, p - 1)$ y $(p - 1, p)$ de color negro, como $c(p = z_0, z_1) = \text{rojo}$ y $\vec{\gamma}_4$ debe ser cuasimonocromático, se tiene que $c(z_1, p - 2) = \text{negro}$. De esto se tiene que $(z_1, p - 2, p - 1, p = z_0)$ es una $z_1 z_0$ -tdm, ver figura 2.10, por lo cual se tiene que $(z_1, z_0) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

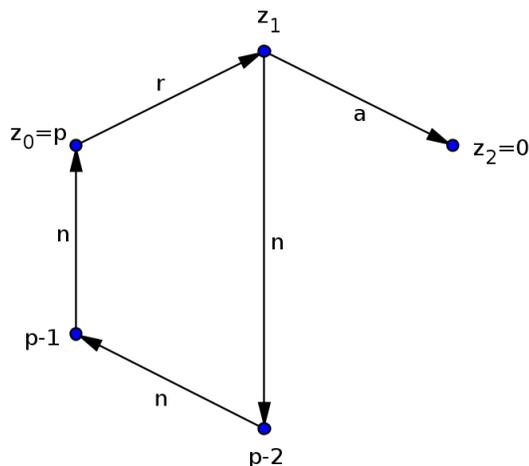


Figura 2.10: Caso a.

Caso b: p es impar. Primero mostraremos algunas proposiciones:

3.5. Si p es impar, entonces para cada $i \geq 0$, tal que $1 \leq 2i + 1 \leq p$, se tiene que $(2i + 1, z_1) \in F(D)$.

Asumamos por contradicción que existe $i \geq 0$ tal que $(2i + 1, z_1) \notin F(D)$ y sea $2i_0 + 1 = \max\{2i + 1 \mid (2i + 1, z_1) \notin F(D), 1 \leq 2i + 1 \leq p\}$. Como $p = z_0$ y $(z_0, z_1) \in F(D)$ se tiene que $2i_0 + 1 < p$.

Como $z_1 \neq x$ y $z_1 \neq y$, y por la definición de D tenemos que z_1 es adyacente a todos los vértices de $D - \{z_1\}$. Así tenemos que $\{(2i_0 + 3, z_1), (z_1, 2i_0 + 1)\} \subseteq F(D)$. De esto se tiene que $\vec{\gamma}_4 = (z_1, 2i_0 + 1, 2i_0 + 2, 2i_0 + 3, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D por lo que se tiene que $\vec{\gamma}_4$ es cuasimonocromático, en el cual $c(2i_0 + 1, 2i_0 + 2) = \text{negro}$ y $c(2i_0 + 2, 2i_0 + 3) = \text{negro}$. De esto se tiene que $c(z_1, 2i_0 + 1) = \text{negro}$ o $c(2i_0 + 3, z_1) = \text{negro}$.

Si $c(z_1, 2i_0 + 1) = \text{negro}$, entonces $(z_1, 2i_0 + 1, \alpha, p = z_0)$ es una $z_1 z_0$ -tdm, por lo que $(z_1, z_0) \in F(C(D))$, lo cual no puede pasar pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$. Si $c(2i_0 + 3, z_1) = \text{negro}$, entonces $(z_2 = 0, \alpha, 2i_0 + 3, z_1)$ es una $z_2 z_1$ -tdm, ver figura 2.11, por lo que $(z_2, z_1) \in F(C(D))$, lo cual no puede pasar pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

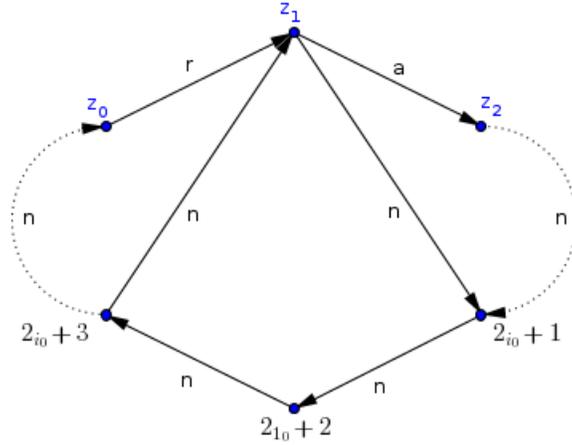


Figura 2.11: Caso b.3.5.

3.6. Si p es impar, entonces $(1, z_1) \in F(D)$ es azul.

De la proposición (3.5) tenemos que $(1, z_1) \in F(D)$. Como $\vec{\gamma}_3 = (z_1, z_2 = 0, 1, z_1)$ es un ciclo de longitud tres en D tenemos que es cuasimonocromático, dado que $c(z_1, z_2) = azul$ y $c(z_2, 1) = negro$, se tiene que $c(1, z_1) = azul$ o $c(1, z_1) = negro$. Si $c(1, z_1) = negro$, entonces $(z_2 = 0, 1, z_1)$ es una $z_2 z_1$ -tdm, por lo que $(z_2, z_1) \in F(C(D))$, ver figura 2.12, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq Asim(C(D))$. Por lo tanto $c(1, z_1) = azul$.

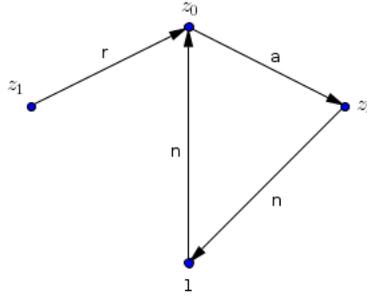


Figura 2.12: Caso b.3.6.

3.7. Si p es impar, entonces $(z_1, p-1) \in F(D)$ es roja.

Como p es impar, entonces $p-1$ es par y por la proposición (3.4) tenemos que $(p-1, z_1) \in F(D)$. De ésto se tiene que $\vec{\gamma}_3 = (z_1, p-1, p = z_0, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud tres en D , por lo cual $\vec{\gamma}_3$ tiene que ser cuasimonocromático. Ya que $c(z_0, z_1) = rojo$ y $c(p-1, p) = negro$, se tiene que $c(z_1, p-1) = rojo$ o $c(z_1, p-1) = negro$. Si $c(z_1, p-1) = negro$, entonces $(z_1, p-1, p = z_0)$ es una $z_1 z_0$ -tdm, ver figura 2.13, por lo que $(z_1, z_0) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq Asim(C(D))$. Por lo tanto $c(z_1, p-1) = rojo$.

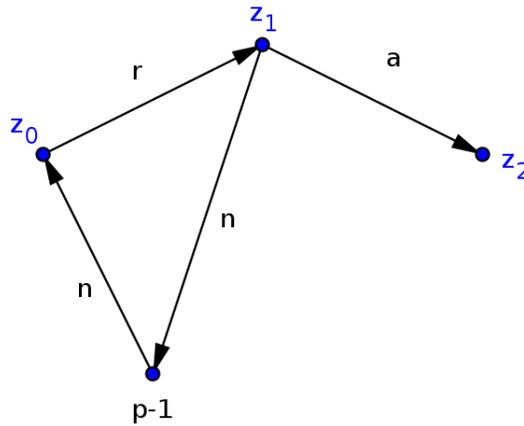


Figura 2.13: Caso b.3.7.

3.8. $\{(1, p), (p, 1)\} \cap F(D) = \emptyset$.

Si $(1, p) \in F(D)$, entonces tenemos que $\vec{\gamma}_4 = (1, p = z_0, z_1, z_2 = 0, 1)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D donde $c(p = z_0, z_1) = \text{rojo}$, $c(z_1, z_2 = 0) = \text{azul}$ y $c(1, p) = \text{negro}$, es decir, $\vec{\gamma}_4$ no es cuasimonocromático, ver figura 2.14 **a**, lo cual no puede suceder.

Si $(p, 1) \in F(D)$, entonces tenemos que $\vec{\gamma}_4 = (p = z_0, 1, z_1, p - 1, p)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D donde $c(1, z_1) = \text{azul}$ (por la proposición (3.6)), $c(z_1, p - 1) = \text{rojo}$ (por la proposición (3.7)) y $c(1, p) = \text{negro}$, es decir, $\vec{\gamma}_4$ no es cuasimonocromático, ver figura 2.14 **b**, lo cual contradice la hipótesis del teorema.

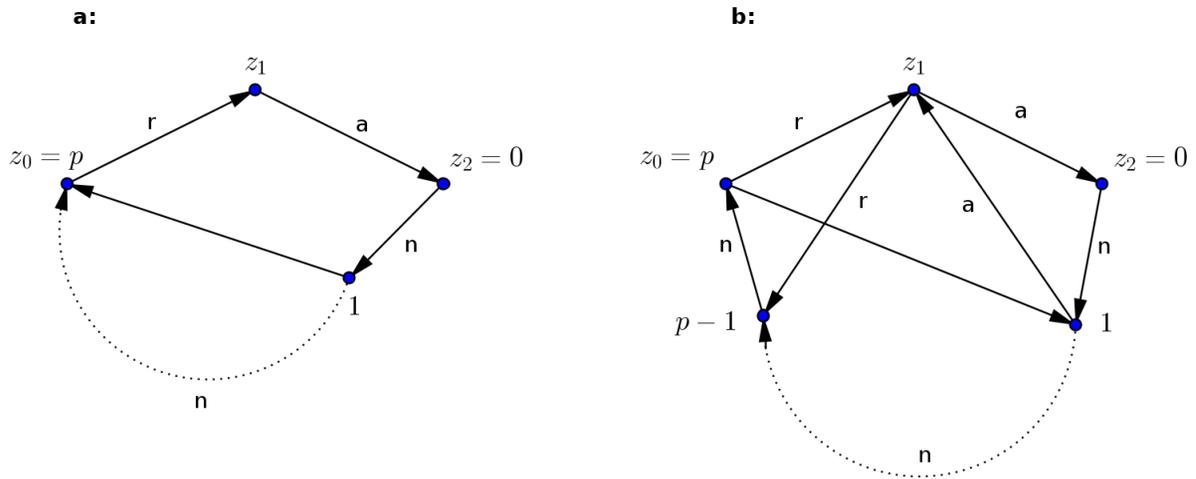


Figura 2.14: Caso b.3.8.

3.9. $\{(0, p - 1), (p - 1, 0)\} \cap F(D) = \emptyset$.

Si $(0, p-1) \in F(D)$, entonces $\vec{\gamma}_4 = (0, p-1, p, z_1, 0 = z_2)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D donde $c(p-1, p = z_0) = \text{negro}$, $c(p, z_1) = \text{rojo}$ y $c(z_1, 0 = z_2) = \text{azul}$, es decir, $\vec{\gamma}_4$ no es cuasimonocromático, ver figura 2.15 **b**, lo que contradice la hipótesis del teorema.

Si $(p-1, 0) \in F(D)$, entonces $\vec{\gamma}_4 = (p-1, 0, 1, z_1, p-1)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D donde $c(0 = z_2, 1) = \text{negro}$, $c(1, z_1) = \text{azul}$ y $c(z_1, p-1) = \text{rojo}$, es decir, $\vec{\gamma}_4$ no es cuasimonocromático, ver figura 2.15 **b**, lo que contradice la hipótesis del teorema.

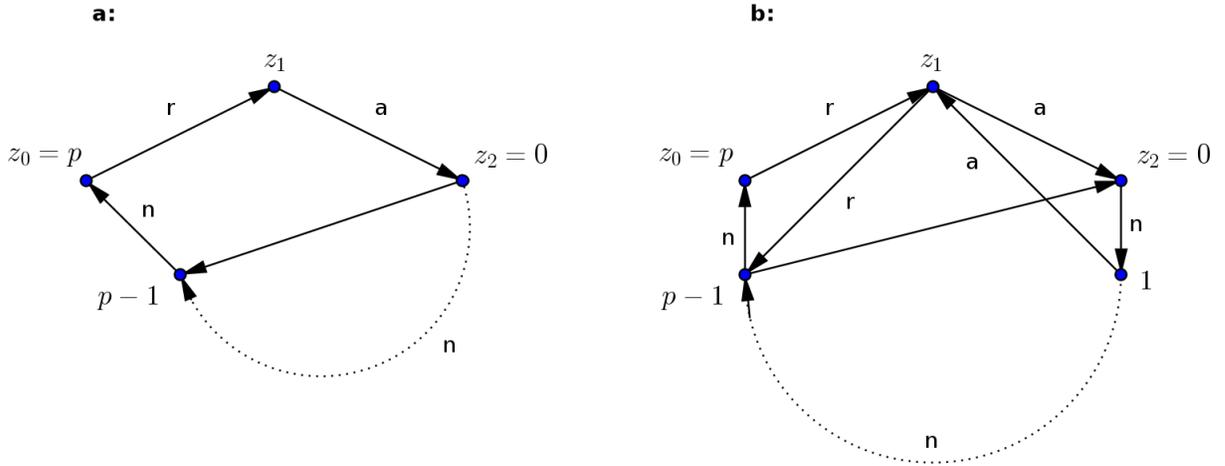


Figura 2.15: Caso b.3.9.

Así, por la proposición (3.8) y la definición de D tenemos que $\{1, p\} = \{x, y\}$, y de la proposición (3.9) y la definición de D tenemos que $\{0, p-1\} = \{x, y\}$. Entonces $\{1, p\} = \{0, p-1\}$, lo que es imposible pues $p \geq 2$. Así, hemos probado la proposición (3), es decir, los únicos cambios de color en γ están en x y en y .

Supongamos que (x, γ, y) es de color azul y que (y, γ, x) es de color rojo.

4. $\gamma \subseteq D$.

Como $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ y D se obtiene de borrar una flecha a un torneo T , es suficiente probar que x y y no son consecutivos en γ .

Supongamos por contradicción que x y y son vértices consecutivos en γ , así supongamos sin pérdida de generalidad que $x = 1$ y $y = 2$ donde $\gamma = (1, 2, \dots, q, 1)$. De la proposición (3) tenemos que $(2, 3, \dots, q, 1)$ es una 21-tdm contenida en D , por lo cual se tiene que $(2, 1) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

5. $\ell(\gamma) \geq 5$, donde $\gamma = (1, 2, \dots, q, 1)$.

Supongamos por contradicción que $\ell(\gamma) \leq 4$, entonces γ es cuasimonocromático, asumamos que $(2, 3, 4, 1)$ es una 21-tdm por lo que tenemos que $(2, 1) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

Para continuar denotaremos lo siguiente: $\ell(\gamma) = q$, $\ell(x, \gamma, y) = p$, $\gamma = (x = q, 1, \dots, p-1, p = y, \dots, q-1, q)$ y asumiremos sin pérdida de generalidad que $\ell(x, \gamma, y) \leq \ell(y, \gamma, x)$.

6. $(q-i, i) \in F(D)$ para cada i , donde $1 \leq i \leq p-1$.

Procederemos por inducción sobre i .

6.1. Para $i = 1$, $(q-1, 1) \in F(D)$.

Supongamos por contradicción que $(q-1, 1) \notin F(D)$. Como $\{q-1, 1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, pues $\gamma \subseteq D$ y $p \geq 2$, la definición de D implica que $(1, q-1) \in F(D)$. Así tenemos $(1, q-1, q, 1)$ un ciclo dirigido de longitud tres contenido en D , por lo que tiene que ser cuasimonocromático. Tenemos que $c(1, q-1) = azul$ o $c(1, q-1) = rojo$. Si $c(1, q-1) = azul$, entonces $(q, 1, q-1)$ es una $qq-1$ -tdm, lo cual implica que $(q, q-1) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder. Si $c(1, q-1) = rojo$, entonces $(1, q-1, q)$ es una $1q$ -tdm, lo cual implica que $(1, q) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto $(q-1, 1) \in F(D)$.

6.2. Supongamos que $(q-i, i) \in F(D)$.

6.3. Probaremos que $(q-(i+1), i+1) \in F(D)$ cuando $1 \leq i+1 \leq p-1$.

Supongamos por contradicción que $(q-(i+1), i+1) \notin F(D)$ con $1 \leq i+1 \leq p-1$. Como $1 \leq i+1 \leq p-1$ y $\ell(x, \gamma, y) \leq \ell(y, \gamma, x)$ tenemos que $\{q-(i+1), i+1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$. Por definición de D tenemos que $(i+1, q-(i+1)) \in F(D)$ y por hipótesis de inducción tenemos que $(q-i, i) \in F(D)$, entonces $\vec{\gamma}_4 = (i+1, q-(i+1), q-i, i, i+1)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D , ver figura 2.16, por lo que se tiene que es cuasimonocromático. Como $c(q-(i+1), i+1) = rojo$ y $c(i, i+1) = azul$ tenemos que $c(i+1, q-(i+1)) = rojo$ y $c(q-i, i) = rojo$ o $c(i+1, q-(i+1)) = azul$ y $c(q-i, i) = azul$. Si $c(i+1, q-(i+1)) = rojo$ y $c(q-i, i) = rojo$, entonces $(i+1, q-(i+1), q-i, i)$ es una $i+1i$ -tdm, por lo que $(i+1, i) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq Asim(C(D))$. Si $c(i+1, q-(i+1)) = azul$ y $c(q-i, i) = azul$, entonces $(q-i, i, i+1, q-(i+1))$ es una $q-iq-(i+1)$ -tdm, por que $(q-i, q-(i+1)) \in F(C(D))$, lo cual no puede pasar pues $\gamma \subseteq Asim(C(D))$.

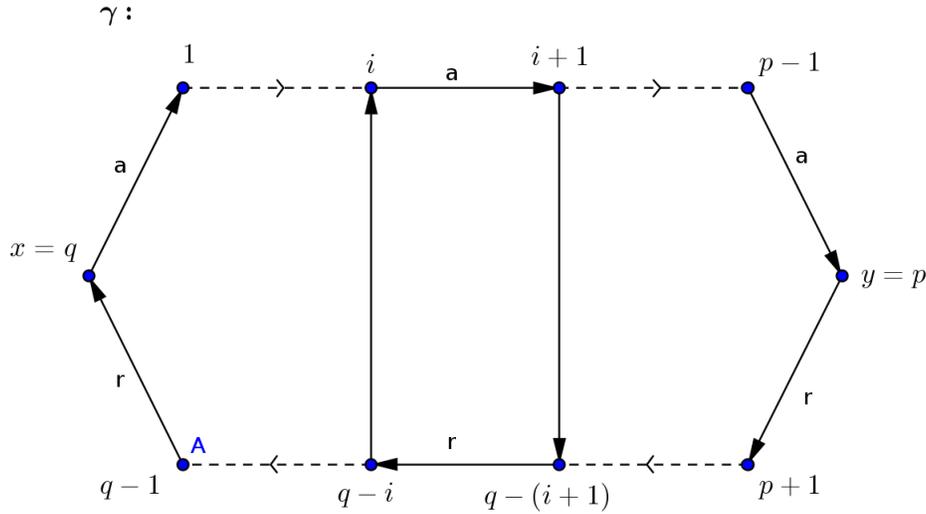


Figura 2.16:

7. $(p-i, p+i) \in F(D)$ para cada i , $1 \leq i \leq p-1$.

Procederemos por inducción sobre i .

7.1. Para $i=1$, probaremos que $(p-1, p+1) \in F(D)$.

Supongamos por contradicción que $(p-1, p+1) \notin F(D)$. Como $\{p-1, p+1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, pues x y y no son vértices consecutivos en γ , y por la definición de D tenemos que $(p+1, p-1) \in F(D)$. Así tenemos que $\vec{\gamma}_3 = (p-1, p, p+1, p-1)$ es un ciclo dirigido de longitud tres en D , por lo que $\vec{\gamma}_3$ es cuasimonocromático. Como $c(p, p+1) = \text{rojo}$ y $c(p-1, p) = \text{azul}$, tenemos que $c(p+1, p-1) = \text{rojo}$ o $c(p+1, p-1) = \text{azul}$. Si $c(p+1, p-1) = \text{rojo}$, entonces $(p, p+1, p-1)$ es una $pp-1$ -tdm, por lo que tenemos que $(p, p-1) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$. Si $c(p+1, p-1) = \text{azul}$, entonces $(p+1, p-1, p)$ es una $p+1p$ -tdm, por lo que tenemos que $(p+1, p) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

7.2. Supongamos que $(p-i, p+i) \in F(D)$ para i , $1 \leq i \leq p-1$.

7.3. Probaremos que $(p-(i+1), p+(i+1)) \in F(D)$, cuando $1 \leq i+1 \leq p-1$.

Supongamos por contradicción que $(p-(i+1), p+(i+1)) \notin F(D)$, $1 \leq i+1 \leq p-1$. Como $\{p-(i+1), p+(i+1)\} \cap \{x, y\} = \emptyset$ se sigue de la definición de D que $(p+(i+1), p-(i+1)) \in F(D)$. Así tenemos que $\vec{\gamma}_4 = (p+(i+1), p-(i+1), p-i, p+i, p+(i+1))$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D , ver figura 2.17, por lo que tiene que ser cuasimonocromático. Como $c(p-(i+1), p-i) = \text{azul}$ y $c(p+i, p-(i+1)) = \text{rojo}$, entonces $c(p-i, p+i) = \text{rojo}$ y $c(p+(i+1), p-(i+1)) = \text{rojo}$ o $c(p-i, p+i) = \text{azul}$ y $c(p+(i+1), p-(i+1)) = \text{azul}$. Si $c(p-i, p+i) = \text{azul}$ y $c(p+(i+1), p-(i+1)) = \text{azul}$, entonces $(p+(i+1), p-(i+1), p-i, p+i)$ es una $p+(i+1)p+i$ -tdm, por lo cual se tiene que $(p+(i+1), p+i) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$. Si $c(p-i, p+i) = \text{rojo}$ y $c(p+(i+1), p-(i+1)) = \text{rojo}$, entonces

$(p - i, p + i, p + (i + 1), p - (i + 1))$ es una $p - ip - (i + 1)$ -tdm, por lo cual se tiene que $(p - i, p - (i + 1)) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

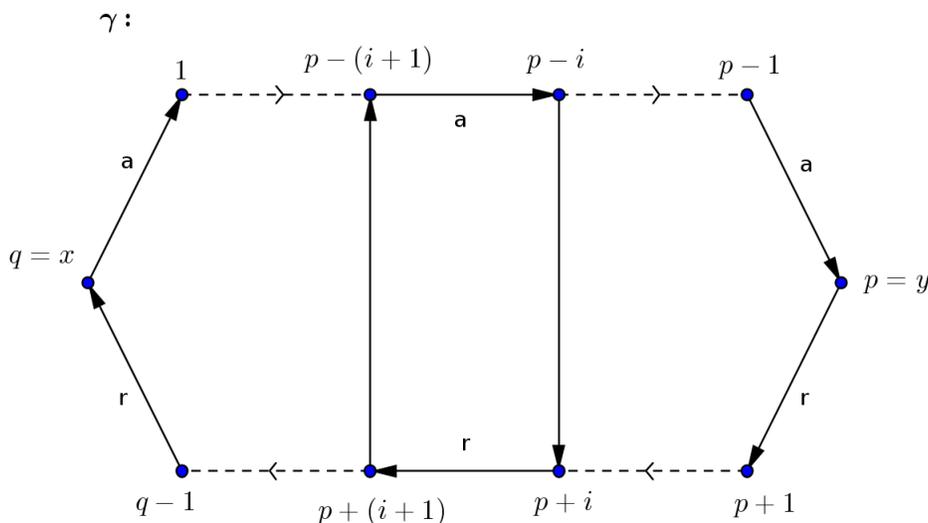


Figura 2.17:

8. $(p - 1, p + 2) \in F(D)$.

Supongamos por contradicción que $(p - 1, p + 2) \notin F(D)$. De (5) tenemos que $\{p - 1, p + 2\} \cap \{x, y\} = \emptyset$ y la definición de D implica que $(p + 2, p - 1) \in F(D)$. Así tenemos que $\vec{\gamma}_4 = (p + 2, p - 1, p, p + 1, p + 2)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D , por lo que $\vec{\gamma}_4$ debe ser cuasimonocromático. Como $c(p, p + 1) = \text{rojo}$, $c(p + 1, p + 2) = \text{rojo}$ y $c(p - 1, p) = \text{azul}$, entonces $c(p + 2, p - 1) = \text{rojo}$, con lo que tenemos que $(p, p + 1, p + 2, p - 1)$ es una $pp - 1$ -tdm, lo que implica que $(p, p - 1) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

9. $(p - i - 1, p + i) \in F(D)$ para cada i , donde $1 \leq i \leq p - 2$.

Procederemos por inducción sobre i .

9.1. Para $i = 1$ tenemos que $(p - 2, p - 1) \in F(D)$. Supongamos por contradicción que $(p - 2, p + 1) \notin F(D)$, por la proposición (5) y la suposición de que $\ell(x, \gamma, y) \leq \ell(y, \gamma, x)$, tenemos que $\{p - 2, p + 1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$. De la definición de D se sigue que $(p + 1, p - 2) \in F(D)$ y así $\vec{\gamma}_4 = (p + 1, p - 2, p - 1, p, p + 1)$ es un ciclo de longitud cuatro en D , por lo cual tiene que ser cuasimonocromático. Como $c(p - 2, p - 1) = \text{azul}$, $c(p - 1, p) = \text{azul}$ y $c(p, p + 1) = \text{rojo}$, tenemos que $c(p + 1, p - 2) = \text{azul}$. De esto se sigue que $(p + 1, p - 2, p - 1, p)$ es una $p + 1p$ -tdm, por lo cual $(p + 1, p) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

9.2. Supongamos que $(p - i - 1, p + i) \in F(D)$.

9.3. Probaremos que $(p - (i + 1) - 1, p + (i + 1)) \in F(D)$, cuando $1 \leq i + 1 \leq p - 1$.

Supongamos por contradicción que $(p - (i + 1) - 1, p + (i + 1)) \notin F(D)$. Por la proposición (5) y el hecho de que $1 \leq i + 1 \leq p - 1$, tenemos que $\{p - (i + 1) - 1, p + (i + 1)\} \cap \{x, y\} = \emptyset$.

$1)\} \cap \{x, y\} = \emptyset$. Así, por la definición de D tenemos que $(p+(i+1), p-(i+1)-1) \in F(D)$ y por hipótesis de inducción tenemos que $(p-i-1, p+i) \in F(D)$. De esto se tiene que $\vec{\gamma}_4 = (p+(i+1), p-(i+1)-1, p-(i+1), p+i, p+(i+1))$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D , ver figura 2.18, por lo que tiene que ser cuasimonocromático. Como $c(p+i, p+(i+1)) = \text{rojo}$ y $c(p-(i+1)-1, p-(i+1)) = \text{azul}$ se tiene que $c(p-(i+1), p+i) = \text{rojo}$ y $c(p+(i+1), p-(i+1)-1) = \text{rojo}$ o $c(p-(i+1), p+i) = \text{azul}$ y $c(p+(i+1), p-(i+1)-1) = \text{azul}$. Si $c(p-(i+1), p+i) = \text{rojo}$ y $c(p+(i+1), p-(i+1)-1) = \text{rojo}$, entonces $(p-i-1, p+1, p+(i+1), p-(i+1)-1)$ es una $p-(i+1)p-(i+1)-1$ -tdm, por lo que $(p-(i+1), p-(i+1)-1) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$. Si $c(p-(i+1), p+i) = \text{azul}$ y $c(p+(i+1), p-(i+1)-1) = \text{azul}$, entonces $(p+(i+1), p-(i+1)-1, p-i-1, p+i)$ es una $p+(i+1)p+i$ -tdm, por lo que $(p+(i+1), p+i) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

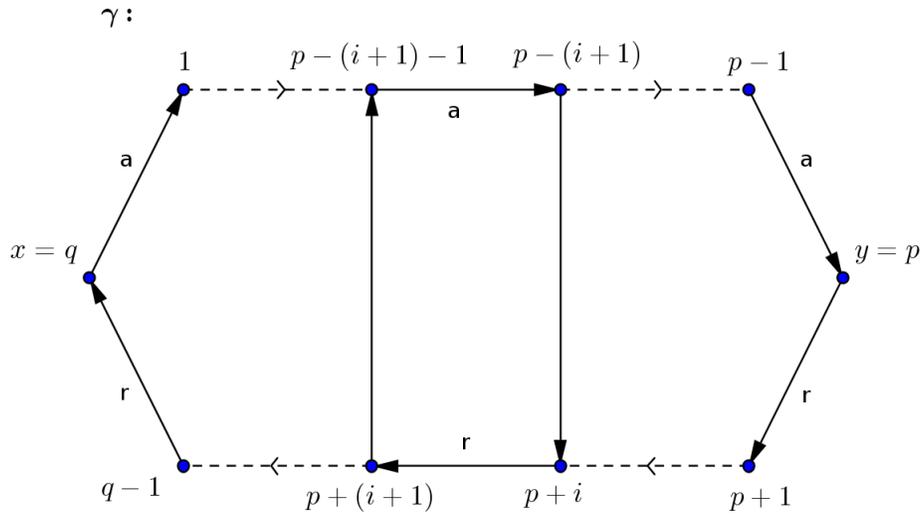


Figura 2.18:

Como $p = \ell(x, \gamma, y) \leq \ell(y, \gamma, x)$, entonces $\ell(x, \gamma, y) \leq \frac{q}{2}$.

Si $p = \frac{q}{2}$, entonces al aplicar (6) para $i = \frac{q}{2} - 1 = p - 1$ tenemos que $(\frac{q}{2} + 1, \frac{q}{2} - 1) \in F(D)$, es decir, $(p+1, p-1) \in F(D)$ lo que contradice la proposición (7), $(p-i, p+i) \in F(D)$, para $i = 1$.

Si $p = \frac{q-1}{2}$, entonces, $2p = q - 1 \Rightarrow 2p + 2 = q - 1 + 2 \Rightarrow p + 2 = q - p + 1 \Rightarrow p + 2 = q - (p - 1)$ y la proposición (6) implica que $(p+2, p-1) \in F(D)$, tomando $i = p - 1$, lo que contradice la proposición (8), $(p-1, p+1) \in F(D)$.

Por lo tanto $p < \frac{q-1}{2}$.

10. Para cada i , con $1 \leq i \leq p-1$, existe $j(i) \in (y, \gamma, x)$ tal que $(p-i, j(i)) \in F(D)$ es de color rojo y $p+i \leq j(i) \leq q - (p-i)$.

Procederemos por inducción sobre i .

10.1. Para $i = 1$.

Sea $j(1) = \min\{K, p+2 < K \leq q \mid (K, p-1) \in F(D)\} - 2$, $j(1)$ está bien definida pues, $(q - (p-1), p-1) \in F(D)$, esto se sigue de (6) tomando $i = p-1$, y $q - (p-1) > p+2$, esto se sigue del supuesto $p < \frac{q-1}{2}$. Claramente $p+2 < \min\{K, p+2 < K \leq q \mid (K, p-1) \in F(D)\} \leq q - (p-1)$.

Así, $p+1-1 = p < j(1) \leq q - (p-1)$ y $p+1 \leq j(1) \leq q - (p-1)$.

Como $(p-1, p+1) \in F(D)$, esto por la proposición (7) tomando $i = 1$, y $(p-1, p+2) \in F(D)$, por la proposición (8), se tiene de la definición de $j(1)$ que $\{(p-1, j(1)), (p-1, j(1)+1), (j(1)+2, p-1)\} \subseteq F(D)$.

Así tenemos que $\vec{\gamma}_4 = (j(1)+2, p-1, j(1), j(1)+1, j(1)+2)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D , donde $c(j(1), j(1)+1) = rojo$ y $c(j(1)+1, j(1)+2) = rojo$, por la hipótesis del teorema tenemos que $c(j(1)+2, p-1) = rojo$ o $c(p-1, j(1)) = rojo$. Si $c(j(1)+2, p-1) = rojo$, entonces $(p, p+1, \dots, j(1), j(1)+2, p-1)$ es una $pp-1$ -tdm, ver figura 2.19, por lo que $(p, p-1) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq Asim(C(D))$. Por lo tanto $c(p-1, j(1)) = rojo$.

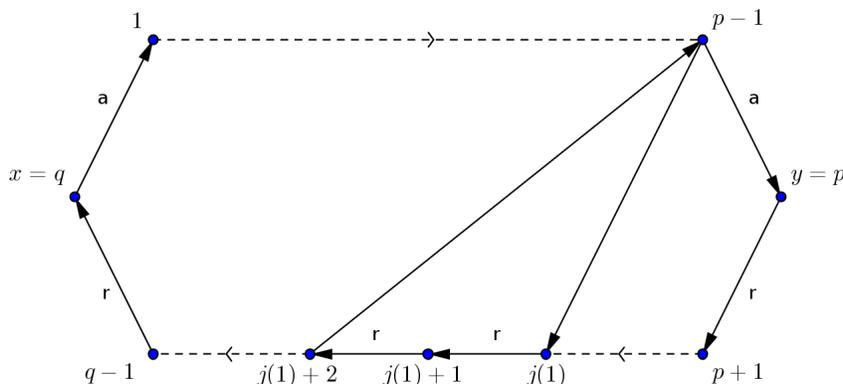


Figura 2.19:

10.2. Sea i , donde $1 \leq i \leq p-1$ y supongamos que existe $j(i)$ en (y, γ, x) tal que $(p-i, j(i)) \in F(D)$ es roja y $p+i \leq j(i) \leq q - (p-i)$.

10.3. Asumiendo que $1 \leq i+1 \leq p-1$, mostraremos la existencia de $j(i+1)$, el cual cumpla las propiedades deseadas.

Sea $j(i+1) = \min\{K \text{ en } (y, \gamma, x) \mid p+(i+1)+1 < K \text{ y } (K, p-(i+1)) \in F(D)\} - 2$.

Se sigue de (6) que $(q - (p - (i+1)), p - (i+1)) \in F(D)$, como $1 \leq i+1 \leq p-1$ tenemos que $1 \leq p - (i+1) \leq p-1$, y nuestra suposición $p < \frac{q-1}{2}$ implica que $p+(i+1) < q - (p - (i+1))$. De ahí, $j(i+1)$ está bien definida y $p+(i+1) \leq j(i+1) \leq q - (p - (i+1))$.

Dado que $(p - (i+1), p + (i+1)) \in F(D)$, esto se sigue de la proposición (6) y del hecho de que $1 \leq i+1 \leq p-1$, y $(p - (i+1), p + (i+1) - 1) \in F(D)$, esto se sigue de la proposición (9) y del hecho $1 \leq i+1 \leq p-1$. La definición de $j(i+1)$ y la hipótesis de inducción implican que $\{(p - (i+1), j(i+2)), (j(i+1) + 2, p - (i+1))\} \subseteq F(D)$.

De esto tenemos que $\vec{\gamma}_4 = (p - (i + 1), j(i + 1), j(i + 1) + 1, j(i + 1) + 2, p - (i + 1))$ es un ciclo dirigido de longitud 4 en D . Para continuar con la demostración de (10) necesitamos las siguientes afirmaciones:

i) Sea z en $(x, \gamma, y) - \{x, y\}$ tal que $z + 1$ en $(x, \gamma, y) - \{x, y\}$. Si i en (y, γ, x) , $(i, z) \in F(D)$ y $i - 1 \neq y$, entonces $(i - 1, z + 1) \in F(D)$.

Supongamos por contradicción que $(i - 1, z + 1) \notin F(D)$. Como $\{i - 1, z + 1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$ se tiene de la definición de D que $(z + 1, i - 1) \in F(D)$. Así, $\vec{\gamma}_4 = (z + 1, i - 1, i, z, z + 1)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro en D , ver figura 2.20, donde $c(i - 1, i) = \text{rojo}$ y $c(z, z + 1) = \text{azul}$, como $\vec{\gamma}_4$ debe ser cuasimonocromático, entonces $c(z + 1, i - 1) = \text{rojo}$ y $c(i, z) = \text{rojo}$ o $c(z + 1, i - 1) = \text{azul}$ y $c(i, z) = \text{azul}$. Si $c(z + 1, i - 1) = \text{azul}$ y $c(i, z) = \text{azul}$, entonces $(i, z, z + 1, i - 1)$ es una $ii-1$ -tdm, por lo que $(i, i - 1) \in F(C(D))$, lo cual no puede pasar pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$. Si $c(z + 1, i - 1) = \text{rojo}$ y $c(i, z) = \text{rojo}$, entonces $(z + 1, i - 1, i, z)$ es una $z + 1z$ -tdm, por lo que $(z + 1, z) \in F(C(D))$, lo cual no puede pasar pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

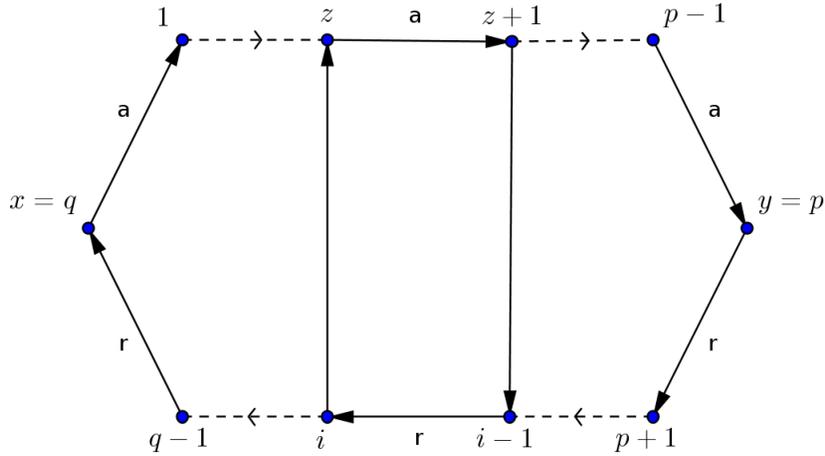
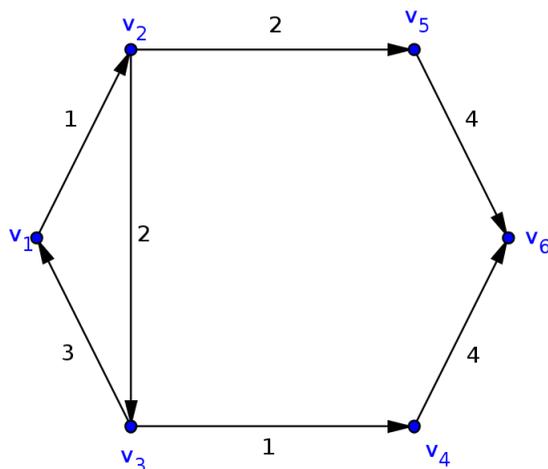


Figura 2.20:

ii) Si K está en (y, γ, x) , donde $K > p + (i + 1) + 1$, $i \geq 1$ y $(K, p - (i + 1)) \in F(D)$, entonces $K - 1$ está en (y, γ, x) , donde $K - 1 > p + (i + 1)$ y $(K - 1, p - i) \in F(D)$. Lo anterior es consecuencia directa de i).

iii) $j(i) \leq j(i + 1) - 1$.

Figura 2.21: D no tiene NTDM.

Sea $K_0 = \min\{K \text{ en } (y, \gamma, x) \mid K > p + (i - 1) + 1 \text{ y } (K, p - (i + 1)) \in F(D)\}$, de ii) se sigue que $K_0 - 1$ en (y, γ, x) , $K_0 - 1 > p + i$ y $(K_0 - 1, p - i) \in F(D)$. De ésto se tiene que $K_0 - 1 \geq \min\{K \text{ en } (y, \gamma, x) \mid K > p + (i + 1) \text{ y } (K, p - i) \in F(D)\}$, y así $K - 1 - 2 \geq j(i)$, es decir, $j(i + 1) - 1 \geq j(i)$.

Volvamos a fijarnos en $\vec{\gamma}_4 = (p - (i + 1), j(i + 1), j(i + 1) + 1, j(i + 1) + 2, p - (i + 1))$.

Las flechas $(j(i + 1), j(i + 1) + 1)$ y $(j(i + 1) + 1, j(i + 1) + 2)$ son de color rojo, por hipótesis del teorema tenemos que $\vec{\gamma}_4$ debe ser cuasimonocromático, lo que implica que $c(p - (i + 1), j(i + 1)) = \text{rojo}$ o $c(j(i + 1) + 2, p - (i + 1)) = \text{rojo}$.

Si $c(j(i + 1) + 2, p - (i + 1)) = \text{rojo}$, entonces:

$(p - i, j(i), j(i) + 1, \dots, j(i + 1), j(i + 1) + 1, j(i + 1) + 2, p - (i + 1))$ es una $(p - i)(p - (i + 1))$ -tdm, lo que implica que $(p - i, p - (i + 1)) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder pues $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

Por lo tanto $c(p - (i + 1), j(i + 1)) = \text{rojo}$.

Para finalizar la demostración de este teorema apliquemos (10) a $i = p - 1$. Para $i = p - 1$ la proposición (10) afirma que existe $j(p - 1)$ en (y, γ, x) tal que $(p - (p - 1), j(p - 1)) \in F(D)$ y es de color rojo. Así tenemos que $(1, j(p - 1)) \in F(D)$ es de color rojo. Así, $(1, j(p - 1), j(p - 1) + 1, j(p - 1) + 2, \dots, x)$ es una $1x$ -tdm, por lo que $(1, x = q) \in F(D)$, lo cual contradice el hecho de que $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$.

Así tenemos en cada caso una contradicción, por lo tanto nuestra suposición es falsa, es decir, D tiene un NTDM. \square

Hortensia Galeana Sánchez y Rocío Rojas Monroy al final del capítulo 3 de [7] se hacen la siguiente pregunta y la dejan abierta:

Sea D un cuasitorneo m -coloreado, si D no contiene C_3^3 y todo vértice tiene vecindad a lo más bicolor, entonces ¿ D tiene NTDM?

Para $m = 3$ se tiene el contraejemplo de la figura 2.7 y para $m \geq 4$ Laura Pastrana Ramírez y María del Rocío Sánchez López demuestran que si D es un cuasitorneo, el cual no contiene a C_3^3 ni a T_3^3 y todo vértice de D tiene a lo más vecindad bicolor, entonces D tiene NTDM, más aún, demuestran que $C(D)$ es núcleo perfecta.

Teorema 13. *Sea D un cuasitorneo m -coloreado. Si D no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 , entonces $C(D)$ es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea D un cuasitorneo m -coloreado sin T_3^3 ni C_3^3 . Sean x y y los únicos dos vértices no adyacentes de D . Así, consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $\{x, y\}$ es un conjunto independiente en $C(D)$.

Sea $S \subseteq V(D) = V(C(D))$ un subconjunto no vacío de vértices. Por demostrar que $C(D)[S]$ tiene núcleo.

Como $D[S]$ es un torneo o le falta la flecha (x, y) , entonces, como $D[S]$ no tiene C_3^3 ni T_3^3 , por los teoremas 5 y 11 tenemos que $C(D[S])$ tiene núcleo.

Sea B un núcleo de $C(D[S])$. Demostraremos que B es un núcleo de $C(D)[S]$.

Veamos que B es un conjunto absorbente en $C(D)[S]$. Como B es núcleo de $C(D[S])$, entonces B es NTDM en $D[S]$.

Sea $v \in V(C(D)[S]) \setminus B$. Demostraremos que existe la vB -flecha en $C(D)[S]$.

Como $V(C(D)[S]) = V(D[S]) = V(C(D[S]))$ y B es núcleo por tdm de $D[S]$, entonces existe una vB -tdm en $D[S]$, entonces existe una vB -tdm en $D[S]$, y por definición de $D[S]$ tenemos que esta tdm también esta en D , por lo que en $C(D)$ existe la vB -flecha. De esto se tiene que existe la vB -flecha en $C(D)[S]$. Por lo tanto B es un conjunto absorbente en $C(D)[S]$.

Podemos afirmar que B consta sólo de 1 o 2 vértices, ya que no hay más conjuntos independientes en $C(D)[S]$ con más de tres vértices. Así consideremos los siguientes subcasos.

SUBCASO 1.1. B tiene un vértice.

Dado que B consta de un sólo vértice, entonces B es independiente, y ya vimos que B es un conjunto absorbente en $C(D)[S]$, por lo tanto concluimos que B es núcleo en $C(D)[S]$.

SUBCASO 1.2. B tiene dos vértices.

Como x y y son los únicos vértices no adyacente en D , entonces para todo $\{u, v\} \subseteq V(D)$ con $\{u, v\} \neq \{x, y\}$ se tiene que u es adyacente a v en D . Dado que B es NTDM de $D[S]$ y $\{x, y\}$ es un conjunto independiente en $C(D)$, entonces se tiene que $B = \{x, y\}$.

Finalmente tenemos que B es un conjunto independiente en $C(D)[S]$, ya que por el lema 1 tenemos que $C(D)[S][B] = C(D)[B]$ y B es conjunto independiente en $C(D)$.

Por lo tanto, B es núcleo en $C(D)[S]$.

Caso 2. $\{x, y\}$ no es un conjunto independiente en $C(D)$.

Para este caso supondremos que $C(D)$ no es núcleo perfecta, es decir, $C(D)$ no tiene núcleo, así tenemos que $C(D)$ tiene al menos un ciclo dirigido asimétrico, esto por la

contrapositiva del teorema 2. Como $\{x, y\}$ no es un conjunto independiente, eso implica que x es adyacente a y , por lo que tenemos que $C(D)$ es una digráfica completa.

Sea $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$ un ciclo dirigido asimétrico de longitud mínima en $C(D)$.

Afirmación 1. Si u y v son dos vértices no consecutivos de γ entonces la flecha $(u, v) \in C(D)$ es simétrica.

Supongamos lo contrario, es decir, que existe v_i y v_j , con $i < j$, en γ dos vértices no consecutivos tal que la flecha entre ellos no es simétrica. Si $(v_i, v_j) \in F(C(D))$, entonces tenemos que (v_i, v_j, γ, v_i) es un ciclo asimétrico en $C(D)$ de longitud menor que γ , lo cual no puede suceder. Si $(v_j, v_i) \in F(C(D))$, entonces tenemos que (v_j, v_i, γ, v_j) es un ciclo asimétrico en $C(D)$ de longitud menor que γ , lo cual no puede suceder. Por lo tanto, para todo par de vértices u y v de γ se tiene que $(u, v) \in F(C(D))$ es simétrica.

Afirmación 2. $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$.

Supongamos lo contrario, así tenemos que $D[V(\gamma)]$ es un torneo sin C_3^3 ni T_3^3 , y por el teorema 5 se tiene que $D[V(\gamma)]$ tiene NTDM y por lo tanto $C(D[V(\gamma)])$ tiene núcleo, y por el caso (1) tendríamos que este núcleo también lo es de $C(D)[V(\gamma)]$, lo que implica que γ tiene una flecha simétrica, lo cual no puede suceder.

Así, se ha demostrado que $C(D)$ contiene un ciclo dirigido asimétrico γ tal que entre cualquier par de vértices no consecutivos del ciclo existen flechas simétricas y $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$, lo cual contradice el teorema 10.

Por lo tanto, D es núcleo perfecta. \square

También demuestran que si D es un cuasitorneo con $m \geq 4$ y $p \geq 4$ tal que $|\zeta(v)| \leq 2$ para cada v en los vértices de D , entonces D no contiene T_3^3 ni C_3^3 . Con esto demuestran que la cerradura de D es núcleo perfecta.

Lema 3. *Si D es un cuasitorneo m -coloreado con $m \geq 4$ y $p \geq 4$, tal que para cada v en $V(D)$ $|\zeta(v)| \leq 2$, entonces D no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 .*

Demostración. Sea D un cuasitorneo m -coloreado con las hipótesis del lema. Sean x y y los dos únicos vértices no adyacentes en D .

Observación 1. Para cualquier par de vértices adyacentes u y v de D , se cumple que $\zeta(u) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$; esto es, porque existe una flecha entre estos dos vértices, de la cual su color debe pertenecer tanto a $\zeta(v)$ como a $\zeta(u)$.

Demostremos el lema por contradicción, es decir, supondemos que existe $\{u, v, w\} \in V(D)$ tal que $D[\{u, v, w\}]$ es T_3 o C_3 . Supongamos que la flecha entre u y v es de color 1, la flecha entre v y w es de color 2 y la flecha entre w y u es de color 3. Por la hipótesis se concluye que:

$$\zeta(u) = \{1, 3\}, \zeta(v) = \{1, 2\} \text{ y } \zeta(w) = \{2, 3\}.$$

Sea $z \in V(D)$ tal que $4 \in \zeta(z)$, 4 existe pues $m \geq 4$.

Caso 1. $z \notin \{x, y\}$.

Por la observación se tiene que $\zeta(w) \cap \zeta(z) \neq \emptyset$ y $\zeta(z) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$, por lo que se concluye que $\zeta(z) = \{3, 4\}$. Por lo tanto, $\zeta(v) \cap \zeta(z) = \emptyset$, lo cual no puede pasar por la observación 1.

Caso 2. $z \in \{x, y\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $z = x$.

Subcaso 2.a. $y \notin \{u, v, w\}$.

Que $y \notin \{u, v, w\}$ implica que $z = x$ es adyacente a los vértices u, v, w . Por la observación tenemos que $\zeta(x) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(x) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, por lo que $\zeta(x) = \{1, 4\}$. Por lo tanto $\zeta(x) \cap \zeta(w) = \emptyset$, lo que no puede suceder por la observación 1.

Subcaso 2.b. $y \in \{u, v, w\}$.

Sea $h \in V(D)$ tal que la flecha entre h y z tiene color 4. Como $4 \in \zeta(h)$, entonces $h \neq w$, $h \neq u$ y $h \neq v$.

Si $v = y$.

Como $\zeta(h) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(h) \cap \zeta(w) \neq \emptyset$, entonces tenemos que $3 \in \zeta(h)$. Por lo tanto $\zeta(h) = \{3, 4\}$, de lo cual tenemos que $\zeta(h) \cap \zeta(v) = \emptyset$, lo que no puede pasar por la observación 1.

Si $u = y$.

Por la observación tenemos que $\zeta(h) \cap \zeta(w) \neq \emptyset$ y $\zeta(h) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, por lo que se concluye que $2 \in \zeta(h)$. Así tenemos que $\zeta(h) = \{2, 4\}$, de lo que se obtiene que $\zeta(h) \cap \zeta(u) = \emptyset$, que cual no puede suceder por la observación 1.

Si $w = y$.

Como $\zeta(h) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$ y $\zeta(h) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, entonces tenemos que $\zeta(h) = \{1, 4\}$, por lo que tendríamos que $\zeta(h) \cap \zeta(w) = \emptyset$, lo cual no puede suceder por la observación 1.

Por lo tanto D no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 . \square

Teorema 14. *Si D es un cuasitorneo m -coloreado, con $m \geq 4$ y $p \geq 4$, tal que para toda $v \in V(D)$ $|\zeta(v)| \leq 2$, entonces $C(D)$ es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea D un cuasitorneo con las hipótesis del teorema, como D cumple con las hipótesis del lema 3, entonces D no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 . Por lo tanto, por el teorema 13 tenemos que $C(D)$ es núcleo perfecta. \square

Laura Pastrana Ramírez y María del Rocío Sánchez López al final de [8] hacen la siguiente pregunta y la dejan abierta:

Si a un torneo m -coloreado le quitamos n flechas, con $n \geq 2$, ¿La nueva digráfica m -coloreada tendrá NTDM bajo las mismas condiciones vistas para torneos m -coloreados?.

En el siguiente capítulo trabajaremos el caso para $n = 2$.

Capítulo 3

Cuasicuasitorneos m -coloreados

En el capítulo anterior vimos algunas condiciones que deben cumplir los cuasitorneos para que tengan NTDM. En este capítulo responderemos a una de las preguntas hechas por Laura Pastrana Ramírez y María del Rocío Sánchez López en [8], mencionada al final del capítulo anterior, la cual es:

Si a un torneo m -coloreado le quitamos n flechas, con $n \geq 2$, ¿La nueva digráfica m -coloreada tendrá NTDM bajo las mismas condiciones vistas para torneos m -coloreados?

En este capítulo veremos condiciones para el caso $n = 2$.

También podríamos preguntarnos, ¿será cierta la pregunta hecha por Sands, Sauer y Woodrow para cuasicuasitorneos?, es decir, si D es un cuasicuasitorneo 3-coloreado que no contiene a C_3^3 ¿ D tiene un NTDM?, ¿será cierto el resultado dado por Shen Minggang aplicado a cuasicuasitorneos?, es decir, si T es un torneo m -coloreado tal que no contiene a C_3^3 ni a T_3^3 , entonces ¿ T tiene NTDM?, ¿los cuasicuasitorneos tendrán NTDM bajo las condiciones vistas en el capítulo anterior?, entre otras.

Mostraremos que no todas las respuestas a estas preguntas son afirmativas.

3.1. Cuasicuasitorneo 3-coloreado sin C_3^3

Para la pregunta hecha por Sands, Sauer y Woodrow:

Si D es un cuasicuasitorneo 3-coloreado que no contiene a C_3^3 , entonces ¿ D tiene un NTDM?, tenemos que la respuesta es negativa pues encontramos un cuasicuasitorneo D 3-coloreado sin C_3^3 que no tiene un NTDM (ver figura 3.1). Veamos que D no tiene un NTDM.

Primero notemos que el único ciclo de longitud 3 en D es $\gamma = (v_1, v_3, v_4, v_1)$ y está 2-coloreado.

Ahora supongamos que D tiene un NTDM N :

Si $v_1 \in N$, como v_1 adyacente v_i , entonces $v_i \notin N$ para $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, pero v_1 no absorbe a v_2 por una tdm, pues $N^+(v_2) = \{v_3\}$ donde $\zeta^+(v_2) = \{1\}$ y $\zeta^+(v_3) = \{2\}$, así tenemos que $v_1 \notin N$.

Como $v_1 \notin N$, entonces $v_2 \in N$ o $v_3 \in N$ pues $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\} \subseteq F(D)$ y no existen tdm de v_1 a v_i con $i \in \{4, 5\}$.

Si $v_2 \in N$ esto implica que $v_i \notin N$, pues v_2 adyacente v_i , para $i \in \{1, 3, 5\}$. Podemos observar que v_2 no absorbe a v_3 bajo una tdm, pues $\zeta^+(v_3) \cap \zeta^-(v_2) = \{2\} \cap \{3\} = \emptyset$, entonces v_4 debería estar en N , pero (v_4, v_5, v_2) es una v_4v_2 -tdm. Por lo tanto $v_2 \notin N$ y $\{v_2, v_4\} \subsetneq N$.

Si $v_3 \in N$, entonces $v_i \notin N$ pues v_3 adyacente v_i , para $i \in \{1, 2, 4\}$. Observemos que v_3 no absorbe a v_4 por alguna tdm, pues $\zeta^+(v_4) \cap \zeta^-(v_3) = \{2, 3\} \cap \{1\} = \emptyset$, entonces v_5 debería estar en N , pero (v_5, v_1, v_3) es una v_5v_3 -tdm. Por lo tanto $v_3 \notin N$ y $\{v_3, v_5\} \subsetneq N$.

Por lo tanto D no tiene un NTDM, pues v_1 no puede ser absorbido por un conjunto independiente por tdm.

Por lo tanto el cuasicuasitorneo 3-coloreado sin C_3^3 de la figura 3.1 no tiene NTDM.

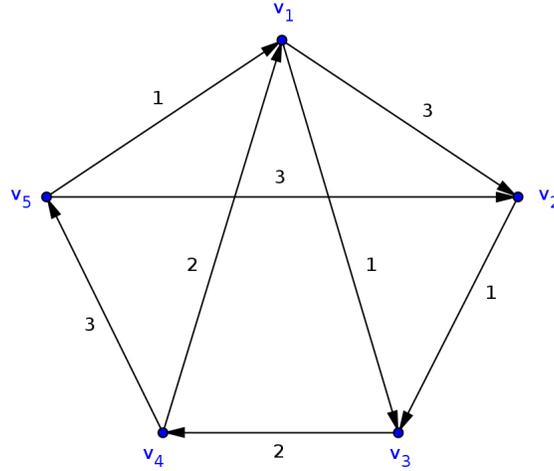


Figura 3.1: Cuasicuasitorneo D 3-coloreado sin C_3 .

3.2. Cuasicuasitorneo m -coloreado sin C_3^3 ni T_3^3

Para el teorema (5) dado por Shen Minggang aplicado en cuasicuasitorneos, también tenemos que es falso. En la figura 3.2 se muestra un cuasicuasitorneo D sin C_3^3 ni T_3^3 que no tiene NTDM.

Observemos que el único ciclo de longitud tres contenido en D es $\gamma = (v_1, v_4, v_5, v_1)$ y está 2-coloreado, los torneos transitivos de longitud tres contenidos en D son $D[\{v_5, v_1, v_2\}]$, $D[\{v_1, v_3, v_4\}]$ y $D[\{v_1, v_2, v_3\}]$, lo cuales están 2-coloreados.

Veamos que D no tiene NTDM. Supongamos que si:

Si $v_1 \in N$, entonces $v_i \notin N$ pues v_1 adyacente v_i , para $i = 2, 3, 4, 5$. Pero v_1 no absorbe a v_2 bajo una tdm, pues $\zeta^+(v_2) \cap \zeta^-(v_1) = \{3\} \cap \{1\} = \emptyset$. Por lo tanto $v_1 \notin N$ y $v_i \in N$, para alguna $i = 2, 3, 4$.

Si $v_2 \in N$, entonces $v_i \notin N$ pues v_i adyacente v_2 , para $i = 1, 3, 5$. Podemos observar que v_2 no absorbe a v_3 bajo una tdm, pues $\zeta^+(v_3) \cap \zeta^-(v_2) = \{4\} \cap \{1, 2\} = \emptyset$, entonces v_4 debería estar en N , pero (v_4, v_5, v_2) es una v_4v_3 -tdm. Por lo tanto $v_2 \notin N$ y $\{v_2, v_4\} \subsetneq N$.

Si $v_3 \in N$, entonces $v_i \notin N$ pues v_i adyacente v_3 , para $i = 1, 2, 4$. Podemos observar que v_3 no absorbe a v_4 bajo una tdm, pues $\zeta^+(v_4) \cap \zeta^-(v_3) = \{2\} \cap \{1, 3\} = \emptyset$, entonces v_5 debería estar en N , pero (v_5, v_1, v_3) es una v_5v_3 -tdm. Por lo tanto $v_3 \notin N$ y $\{v_3, v_5\} \subsetneq N$. Observemos que v_5 no absorbe a v_1 pues $\zeta^+(v_1) \cap \zeta^-(v_5) = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset$, por lo tanto no hay una tdm de v_1 a v_5 .

Si $v_4 \in N$, entonces $v_i \notin N$ pues v_i adyacente v_4 , para $i = 1, 3, 5$. Podemos observar que v_4 no absorbe a v_2 bajo una tdm, pues $\zeta^+(v_2) \cap \zeta^-(v_4) = \{3\} \cap \{1, 4\} = \emptyset$ y ya vimos que v_2 tampoco está en N . Por lo tanto $v_4 \notin N$.

Así, no hay forma de absorber a v_1 .

Por lo tanto D no tiene NTDM.

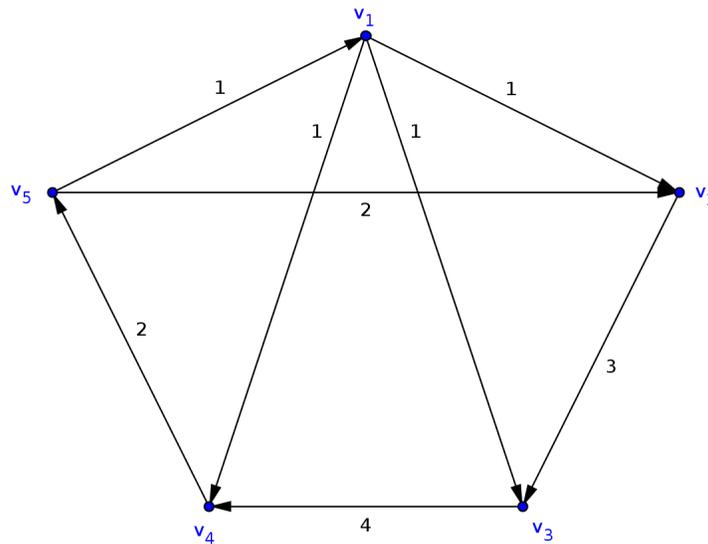


Figura 3.2: Casicasitorneo D sin C_3 ni T_3 .

3.3. Vecindades a lo más bicolor en cuasicuasitorneos

Con el ejemplo anterior tenemos que no todo cuasicuasitorneo sin C_3^3 ni T_3^3 tiene NTDM, en [8] Laura Pastrana Ramírez y María del Rocío Sánchez López vieron que si a un cuasitorneo D le piden la condición de que todo vértice de D tenga a lo más vecindad bicolor, entonces D no contiene a C_3^3 ni a T_3^3 . Así, ellas demuestran que si se tiene un cuasitorneo tal que para todo $v \in V(T) \mid \zeta(v) \leq 2$ y no contiene a C_3^3 ni T_3^3 , entonces T tiene un NTDM, teorema 14. De esto podemos preguntar ¿si a un cuasicuasitorneo se le piden las condiciones anteriores, tendremos resultados similares?

3.3.1. Cuasicuasitorneos sin C_3^3 ni T_3^3

Si a un cuasicuasitorneo se le pide que todos sus vértices tengan vecindades bicolor esto no implica que no contenga a C_3^3 o a T_3^3 .

En la figura 3.3 mostramos un cuasicuasitorneo D en el cual todos sus vértices tienen vecindad a lo más bicolor y contiene a $C_3^3 = (u_1, u_4, u_3, u_1)$.

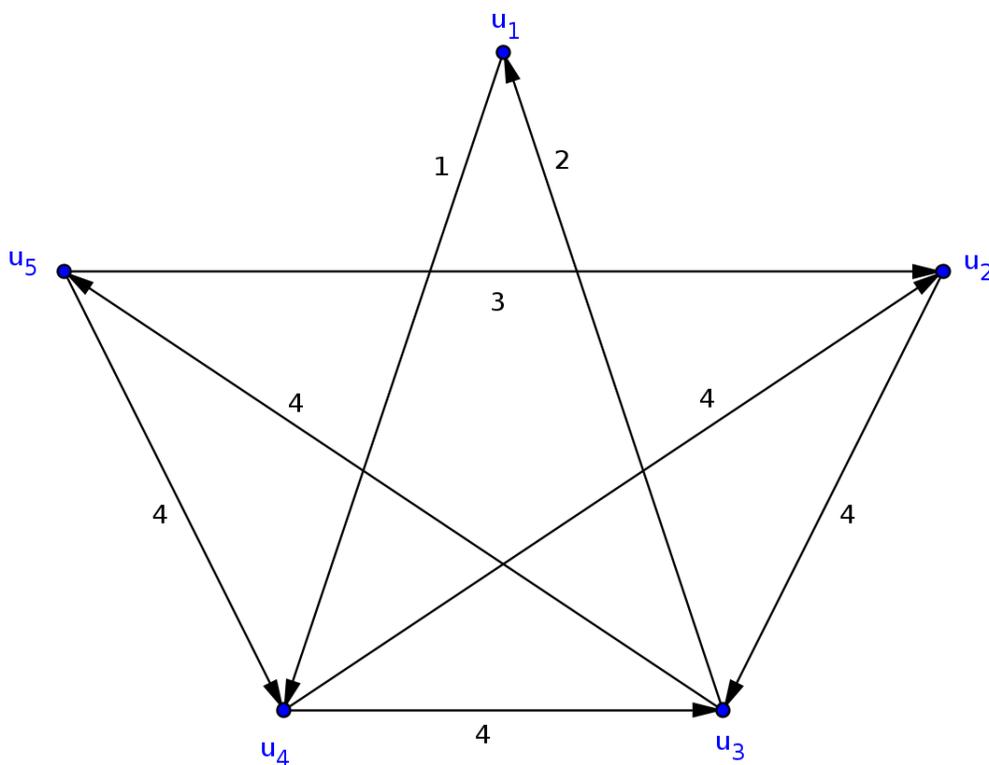


Figura 3.3: Cuasicuasitorneo D con vecindad a lo más bicolor y C_3 .

En la figura 3.4 tenemos un cuasicuasitorneo D en el cual todos sus vértices tienen vecindad a lo más bicolor y contiene a $T_3^3 = D[\{u_2, u_3, u_5\}]$ y $T_3^3 = D[\{u_1, u_2, u_4\}]$.

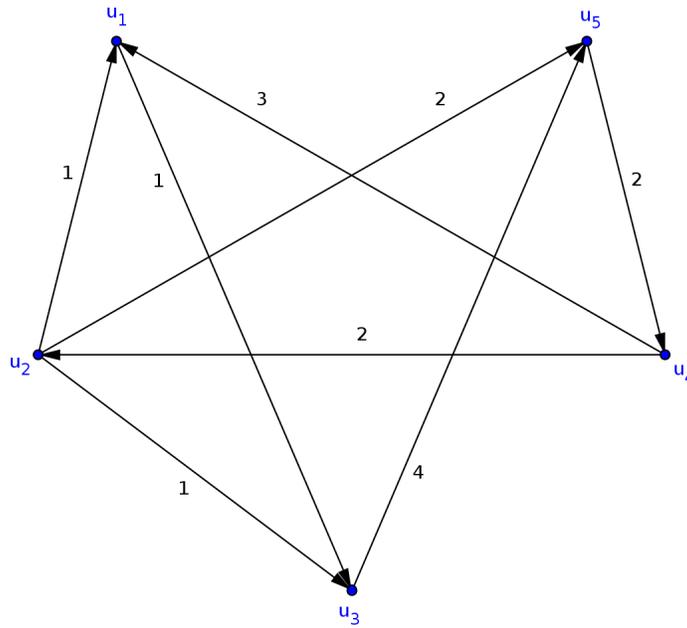


Figura 3.4: Cuasicuasitorneo D con vecindad a lo más bicolor y T_3 .

En la figura 3.5 tenemos un cuasicuasitorneo D en el cual todos sus vértices tienen vecindad a lo más bicolor y contiene a $C_3^3 = (u_1, u_3, u_5, u_1)$ y a $T_3^3 = D[\{u_1, u_4, u_5\}]$.

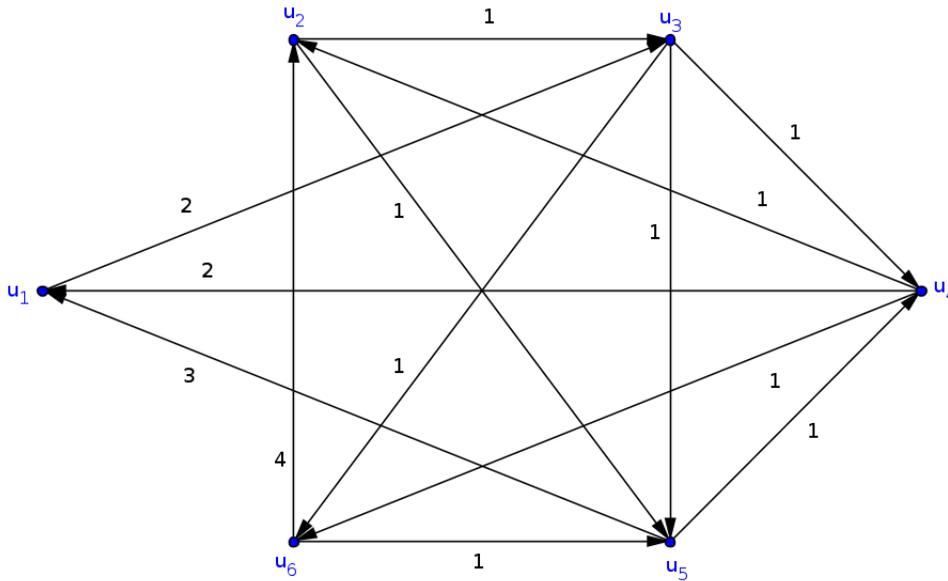


Figura 3.5: Cuasicuasitorneo D con vecindad a lo más bicolor, C_3 y T_3 .

3.3.2. Cuasicuasitorneo con C_3^3

También nos podemos preguntar si el hecho de que un cuasicuasitorneo contenga a C_3^3 y sus vértices tengan vecindad bicolor este tiene o no un NTDM.

En la figura 3.3 tenemos un cuasicuasitorneo D con vecindad a lo más bicolor, el cual contiene a $C_3^3 = (u_1, u_4, u_3, u_1)$ y tiene NTDM. $N = \{u_4\}$ es un NTDM.

En la figura 3.6 tenemos un cuasicuasitorneo D con $C_3^3 = (u_1, u_2, u_5, u_1)$ y vecindad a lo más bicolor que no tiene NTDM. Supongamos que si:

Si $u_1 \in N$, entonces $u_i \notin N$ pues u_1 adyacente u_i , para $i = 2, 5$. Podemos observar que u_1 no absorbe a u_2 bajo una tdm, pues $\zeta^+(u_2) \cap \zeta^-(u_1) = \{3\} \cap \{1\} = \emptyset$. Tenemos que u_3 o u_4 pueden estar en N pues u_1 no adyacente a u_3 y u_1 no adyacente u_4 , tampoco hay tdm de u_1 a u_3 , dado que $\zeta^+(u_1) \cap \zeta^-(u_3) = \{2\} \cap \{4\} = \emptyset$ ni de u_1 a u_4 , pues $N^-(u_4) = \emptyset$. Tampoco hay alguna tdm de u_3 a u_1 ni de u_4 a u_1 , ya que $\zeta^+(u_3) \cap \zeta^-(u_1) = \{3\} \cap \{1\} = \emptyset$ y $\zeta^+(u_4) \cap \zeta^-(u_1) = \{3, 4\} \cap \{1\} = \emptyset$. Pero tenemos que ni u_3 ni u_4 absorben a u_2 bajo ninguna tdm, pues $\zeta^+(u_2) \cap \zeta^-(u_3) = \{3\} \cap \{4\} = \emptyset$ y $N^-(u_4) = \emptyset$. Así tenemos que $u_1 \notin N$, $u_3 \notin N$, $u_4 \notin N$, $\{u_1, u_3\} \subsetneq N$ y $\{u_1, u_4\} \subsetneq N$.

Como $u_1 \notin N$, entonces $u_2 \in N$, así $u_i \notin N$ para $i = 1, 3, 4, 5$ pues u_2 adyacente u_i . Podemos observar que u_2 no absorbe a u_5 bajo una tdm, pues $\zeta^+(u_5) \cap \zeta^-(u_2) = \{1\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$. Por lo tanto $u_2 \notin N$. u_5 no absorbe a u_1 bajo una tdm, pues $\zeta^+(u_1) \cap \zeta^-(u_5) = \{2\} \cap \{3\} = \emptyset$.

Por lo tanto D no tiene NTDM.

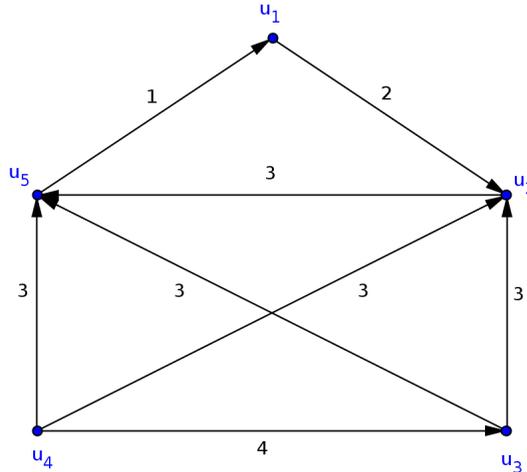


Figura 3.6: Cuasicuasitorneo con vecindad bicolor y C_3 .

3.3.3. Cuasicuasitorneo con T_3^3

Nos podemos preguntar si el hecho de que un cuasicuasitorneo contenga a T_3^3 y sus vértices tengan vecindad bicolor este tenga o no un NTDM.

En la figura 3.4 tenemos un cuasicuasitorneo D , el cual contiene a $T_3^3 = D[\{u_2, u_3, u_5\}]$ y a $T_3^3 = D[\{u_1, u_2, u_4\}]$ y tiene NTDM. $N = \{u_1, u_5\}$ es un NTDM.

En la figura 3.7 tenemos un cuasicuasitorneo D con $T_3^3 = D[\{u_1, u_2, u_5\}]$ y vecindad a lo más bicolor que no tiene NTDM. Supongamos que si:

Si $u_1 \in N$, entonces $u_i \notin N$ para $i = 2, 3, 5$ pues u_1 adyacente u_2 , u_1 adyacente u_5 y (u_3, u_2, u_1) es una u_3u_1 -tdm. Podemos observar que u_1 no absorbe a u_5 bajo una tdm pues $\zeta^+(u_5) \cap \zeta^-(u_1) = \{3\} \cap \{2\} = \emptyset$, si u_4 también está en N tenemos que este tampoco absorbe a u_5 pues $N^-(u_4) = \emptyset$. Como (u_3, u_2, u_1) es una u_3u_1 -tdm tenemos que $\{u_1, u_3\} \subsetneq N$. Por lo tanto $u_1 \notin N$, $\{u_1, u_3\} \subsetneq N$ y $\{u_1, u_4\} \subsetneq N$.

Como $u_1 \notin N$, entonces $u_5 \in N$ esto implica que $u_i \notin N$ para $i = 1, 2, 3, 4$ pues u_5 adyacente u_i . Podemos observar que u_5 no absorbe a u_3 por tdm, pues $\zeta^+(u_3) \cap \zeta^-(u_5) = \{2\} \cap \{1, 3\} = \emptyset$. Por lo tanto $u_5 \notin N$.

Así tenemos que nadie absorbe a u_1 y $u_1 \notin N$.

Por lo tanto D no tiene NTDM.

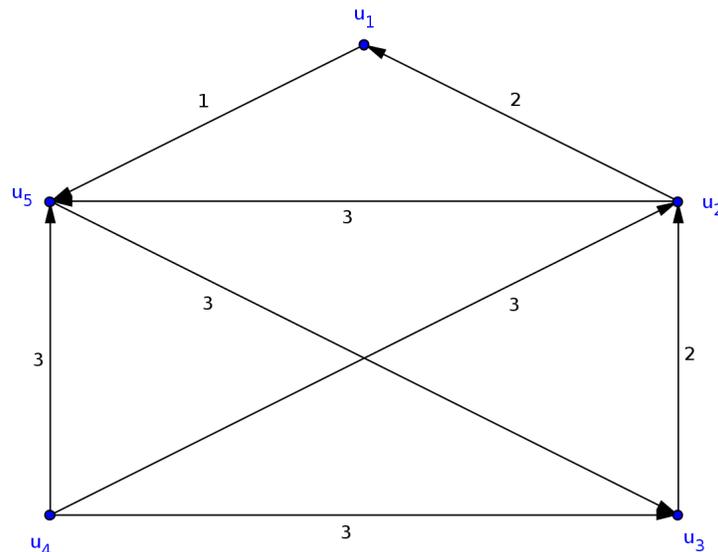


Figura 3.7: Casicasitorneo con vecindad bicolor y T_3 .

3.3.4. Cuasicuasitorneo con C_3^3 y T_3^3

También nos podemos preguntar si el hecho de que un cuasicuasitorneo contenga a C_3^3 y T_3^3 , y sus vértices tengan vecindad bicolor este tenga o no un NTDM.

En la figura 3.5 tenemos un cuasicuasitorneo D con vecindad bicolor, el cual contiene a $C_3^3 = (u_1, u_3, u_5, u_1)$ y $T_3^3 = D[\{u_1, u_4, u_5\}]$ y tiene NTDM. $N = \{u_1, u_2\}$ es un NTDM.

En la figura 3.8 tenemos un cuasicuasitorneo D que contiene a $C_3^3 = (u_2, u_3, u_4, u_2)$ y $T_3^3 = D[\{u_1, u_4, u_5\}]$ y tiene vecindad a los más bicolor sin NTDM.

Supongamos que D tiene NTDM:

Si $u_1 \in N$, entonces $u_i \notin N$, ya que u_1 adyacente u_i , para $i = 2, 4, 5$. Observemos que u_1 no absorbe a u_2 bajo una tdm, pues $\zeta^+(u_2) \cap \zeta^-(u_1) = \{4\} \cap \{1\} = \emptyset$, entonces tenemos que $u_3 \in N$, pero observemos que u_3 no absorbe a u_4 bajo una tdm, pues $\zeta^+(u_4) \cap \zeta^-(u_3) = \{2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$. Tenemos que u_1 tampoco absorbe a u_4 bajo una tdm, pues $\zeta^+(u_4) \cap \zeta^-(u_1) = \{2\} \cap \{1\} = \emptyset$. Por lo tanto $u_1 \notin N$, $u_3 \notin N$ y $\{u_1, u_3\} \subsetneq N$. Entonces $u_2 \in N$ o $u_4 \in N$.

Si $u_2 \in N$, entonces $u_i \notin N$ pues u_2 adyacente u_i , para $i = 1, 3, 4$. Observemos que u_2 no absorbe a u_5 bajo una tdm, pues $\zeta^+(u_5) \cap \zeta^-(u_2) = \{1, 3\} \cap \{2\} = \emptyset$, entonces $u_5 \in N$, pero tenemos que u_5 no absorbe a u_3 bajo una tdm, pues $N^-(u_5) = \emptyset$, y también podemos observar que u_2 no absorbe a u_3 bajo una tdm, pues $\zeta^+(u_3) \cap \zeta^-(u_2) = \{3\} \cap \{2\} = \emptyset$. Por lo tanto tenemos que $u_2 \notin N$, $u_5 \notin N$ y $\{u_2, u_5\} \subsetneq N$.

Si $u_4 \in N$, entonces $u_i \notin N$ pues u_4 adyacente u_i , para $i = 1, 2, 3, 5$. Observemos que u_4 no absorbe a u_2 bajo una tdm, pues $\zeta^+(u_2) \cap \zeta^-(u_4) = \{4\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$. Por lo tanto $u_4 \notin N$.

Así tenemos que no hay forma de absorber a u_1 .

Por lo tanto D no tiene NTDM.

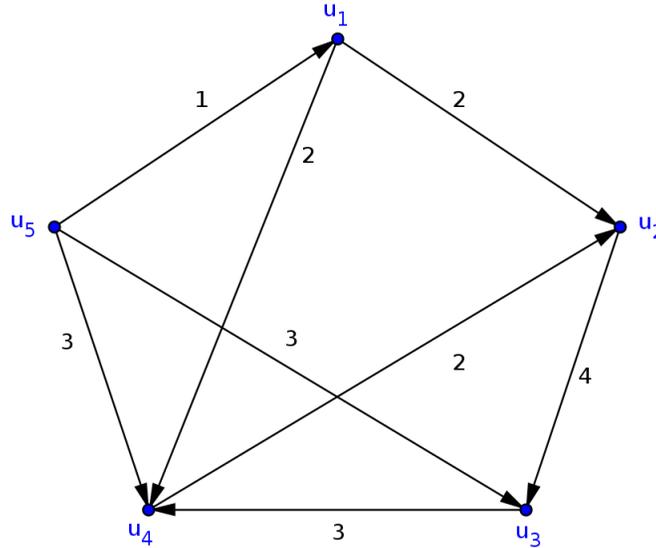


Figura 3.8: Cuasicuasitorneo D con C_3 y T_3 .

3.4. NTDM en cuasicuasitorneos

Con lo anterior hemos visto que no todo cuasicuasitorneo con vecindad a lo más bicolor tiene un NTDM.

Entonces nos podemos preguntar, ¿cuándo un cuasicuasitorneo tiene NTDM?, en

esta sección veremos que condiciones le podemos pedir a un cuasicuasitorneo para poder asegurar un NTDM en éste.

Retomamos la pregunta hecha por Shen Minggang y la aplicamos a cuasicuasitorneos, es decir, tratamos de demostrar que si un cuasicuasitorneo D no contiene a C_3^3 ni a T_3^3 , entonces D tiene un NTDM, por lo visto en la sección (3.2) tenemos que no basta perderle esta condición, le agregamos la condición de que todo vértice tenga vecindad a lo más bicolor, pero vimos en la sección (3.3) que esto tampoco es suficiente.

Por lo que decidimos usar las técnicas vistas en el capítulo 2, primero veremos bajo que condiciones en $C(D)$ cada ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, lo cual implica que $C(D)$ tiene núcleo (Teorema 2). Por el teorema 4 veremos que D tiene un NTDM.

Observamos que las condiciones para que todo ciclo dirigido de $C(D)$ tenga una flecha simétrica son las siguientes: que D no contenga a C_3^3 ni a T_3^3 , todo vértice tenga vecindad a lo más bicolor, que D no tenga como subdigráficas inducidas a:

- \vec{C}_4 2-coloreado como en la figura 3.9 a y b,
- \vec{C}_4 3-coloreado como en la figura 3.9 e,
- los cuasitorneos coloreados como en la figura 3.9 c y d,

y tal que todo ciclo dirigido contenido en $C(D)$ con longitud mayor o igual a 5 tenga al menos 3 cambios de color.

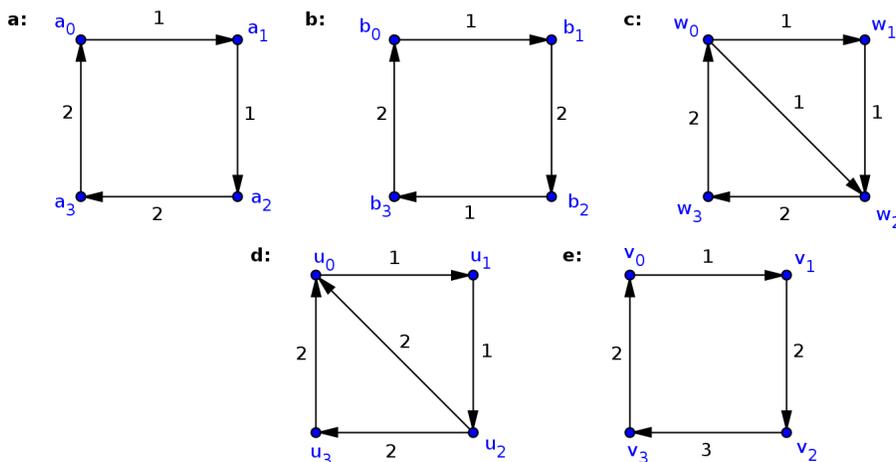


Figura 3.9: Digráficas no permitidas.

Observación 2. Para cualquier par de vértices adyacentes u y v de un casicuasitorneo D , se cumple que $\zeta(v) \cap \zeta(u) \neq \emptyset$; esto es, porque existe una flecha entre estos dos vértices, entonces el color de está flecha pertenece tanto a $\zeta(v)$ como a $\zeta(u)$.

Nota. Denotaremos por \mathbb{T}_3 para referirnos a C_3^3 o T_3^3 .

Antes de comenzar con el teorema veamos que significa lo de los 3 cambios de color.

Observación 3. Diremos que un ciclo tiene un cambio de color si existe un vértice del ciclo tal que sus dos flechas que inciden son de colores distintos. Así decimos que en un ciclo hay al menos tres cambios de color si hay tres vértices en los cuales sus dos flechas incidentes son de distintos colores. De esto hay tres formas de acomodar tres cambios de color.

Para ejemplificar observemos la figura 3.10.

En la figura 3.10 **a** tenemos el ciclo $\gamma_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x_1)$, donde tenemos tres cambios de color de forma disjunta. Estos cambios de color se dan en los vértices x_2, x_{i+1} y x_{j+1} , donde $i \neq 1, j \neq 1, j \neq i, d \neq g$ y $h \neq k$.

En la figura 3.10 **b** tenemos el ciclo $\gamma_2 = (u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, u_m = u_1)$, donde tenemos dos cambios de color continuos y uno disjunto. Estos cambios de color se dan en los vértices u_2, u_3 y u_{j+1} , donde $j \neq 3$ y $h \neq g$.

En la figura 3.10 **c** tenemos el ciclo $\gamma_3 = (v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, v_r = v_1)$, donde tenemos tres cambios de color continuos. Estos cambios de color se dan en los vértices v_2, v_3 y v_4 .

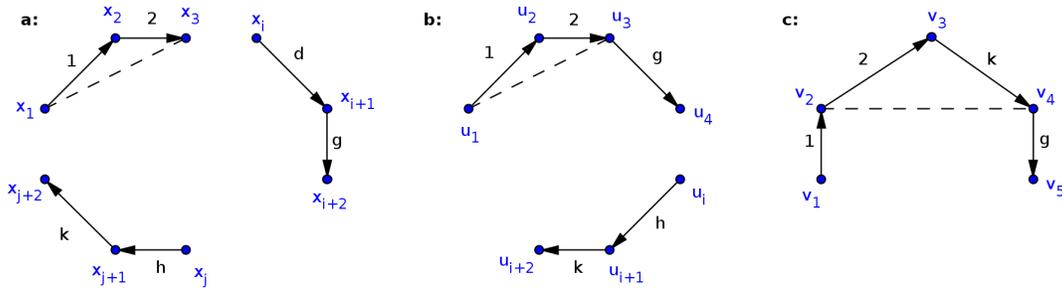


Figura 3.10: Tres cambios de color.

Teorema 15. Si D es un cuasicuasitorneo m -coloreado con $m \geq 4, p \geq 5$ y que cumple lo siguiente:

1. $|\zeta(v)| \leq 2$ para todo v en los vértices de D ,
2. no contiene como subdigráfica a T_3^3 ni a C_3^3 ,
3. no contiene como subdigráfica inducidas a las digráficas de la figura 3.9, y
4. todo ciclo dirigido γ en $C(D)$ de longitud mayor o igual a 5 tiene al menos 3 cambios de color,

entonces en $C(D)$ todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica.

Demostración. Sea D un cuasicuasitorneo que cumple con las hipótesis del teorema. Demostraremos este teorema por contradicción. Tomemos la cerradura de D y supongamos que existe al menos un ciclo dirigido en $C(D)$ tal que no tiene flechas simétricas. Sea $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ un ciclo dirigido asimétrico de longitud mínima en $C(D)$.

Primero demostraremos si $\gamma \subseteq D$ o $\gamma \not\subseteq D$, entonces tenemos un cambio de color en D y la flecha entre el vértice inicial y el vértice final de la trayectoria formada por este cambio de color está en D .

Después veremos que este hecho nos lleva a una contradicción.

Así tenemos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1. $\ell(\gamma) \geq 5$.

De esta afirmación tenemos dos casos, cuando $\gamma \subseteq D$ y cuando $\gamma \not\subseteq D$.

Caso I. $\gamma \subseteq D$.

Para este caso tenemos las siguientes afirmaciones:

Si $\ell(\gamma) = 3$, entonces como $\gamma \subseteq D$ y por hipótesis D no contiene ni T_3^3 ni C_3^3 , tenemos que γ está a lo más 2-coloreado. Por lo que γ tiene al menos una flecha simétrica, lo cual no puede pasar. Por lo tanto $\ell(\gamma) > 3$.

Denotaremos al color de una flecha por $c(v_i, v_j) = k$, donde k es el color asignado a dicha flecha.

Si $\ell(\gamma) = 4$, entonces denotemos a γ como $\gamma = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$, así tenemos lo siguiente:

Caso A. Si γ está 1-coloreado, entonces tenemos que γ tiene flechas simétricas, lo cual no puede suceder.

Caso B. Si γ está 2-coloreado, entonces los posibles casos se muestran en la figura 3.11.

Si γ está coloreado como en la figura 3.11 **a** tenemos una flecha simétrica, lo cual no puede suceder. Para los casos **b** y **c** analicemos si la subdigráfica inducida por el conjunto $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ es un torneo, un cuasitorneo o un cuasicuasitorneo.

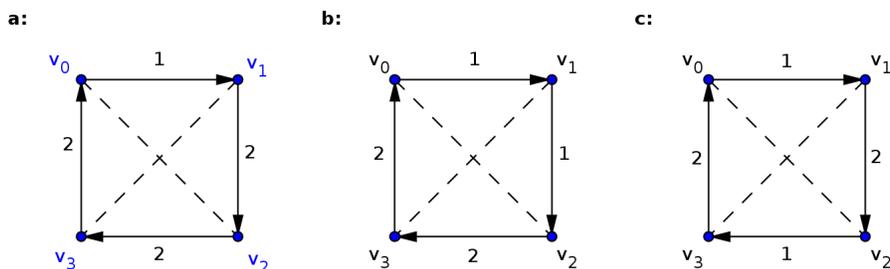


Figura 3.11:

Caso B.1. $D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$ es un torneo.

Fijémonos en la flecha que está entre los vértices v_1 y v_3 , llamémosla q .

Subcaso B.1.1. γ está coloreado como en la figura 3.11 **b**. Como D no contiene a \mathbb{T}_3 , entonces $c(q) = 1$ o $c(q) = 2$.

Si $c(q) = 1$, entonces si $(v_1, v_3) \in F(D)$ tenemos que $(v_3, v_0) \in F(C(D))$ es una flecha simétrica en γ , lo cual no puede suceder pues γ es asimétrico. Si $(v_3, v_1) \in F(D)$, entonces $(v_2, v_3) \in F(C(D))$ es una flecha simétrica en γ , lo cual no puede suceder pues γ es asimétrico.

Si $c(q) = 2$, entonces si $(v_1, v_3) \in F(D)$ tenemos que $(v_0, v_1) \in F(C(D))$ es una flecha simétrica en γ , lo cual no puede suceder pues γ es asimétrico. Si $(v_3, v_1) \in F(D)$, entonces $(v_1, v_2) \in F(C(D))$ es una flecha simétrica en γ , lo cual no puede suceder pues γ es asimétrico.

Subcaso B.1.2. γ está coloreado como en la figura 3.11 c. Como D no contiene a \mathbb{T}_3 , entonces $c(q) = 1$ o $c(q) = 2$.

Si $c(q) = 1$, entonces si $(v_1, v_3) \in F(D)$ tenemos que $(v_0, v_3) \in F(C(D))$ es una flecha simétrica en γ , lo cual no puede suceder pues γ es asimétrico. Si $(v_3, v_1) \in F(D)$, entonces $(v_1, v_2) \in F(C(D))$ es una flecha simétrica en γ , lo cual no puede suceder pues γ es asimétrico.

Si $c(q) = 2$, entonces si $(v_1, v_3) \in F(D)$ tenemos que $(v_0, v_1) \in F(C(D))$ es una flecha simétrica en γ , lo cual no puede suceder pues γ es asimétrico. Si $(v_3, v_1) \in F(D)$, entonces $(v_2, v_3) \in F(C(D))$ es una flecha simétrica en γ , lo cual no puede suceder pues γ es asimétrico.

Por lo tanto este caso no es posible.

Caso B.2. $D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$ es un cuasitorneo, es decir, sólo una flecha entre los vértices no consecutivos de γ está en D .

Si la flecha que está en D es la flecha entre los vértices v_1 y v_3 , entonces tenemos el mismo análisis que en el caso (B.1).

Veamos que sucede si la flecha que está en D es la flecha entre los vértices v_0 y v_2 .

Subcaso B.2.1. γ está coloreado como en la figura 3.11 b. Tenemos que $c(v_0, v_2) \neq 1$ y $c(v_2, v_0) \neq 2$, por la hipótesis (3) del teorema. Entonces:

Si $c(v_0, v_2) = 2$, tenemos que $(v_0, v_3) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder. Si $(v_2, v_0) = 1$, tenemos que $(v_2, v_1) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Subcaso B.2.2. γ está coloreado como en la figura 3.11 c. Tenemos lo siguiente:

Llamemos s a la flecha entre v_0 y v_2 . Como $\zeta(v_0) = \zeta(v_2)$ tenemos que $c(s) = 1$ o $c(s) = 2$.

Si $c(s) = 1$ y $(v_0, v_2) \in F(D)$ tenemos que $(v_0, v_3) \in F(C(D))$, lo cual no puede pasar. Si $(v_2, v_0) \in F(D)$ tenemos que $(v_2, v_1) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder, pues γ es asimétrico.

Si $c(s) = 2$ y $(v_0, v_2) \in F(D)$ tenemos que $(v_3, v_2) \in F(C(D))$, lo cual no puede pasar. Si $(v_2, v_0) \in F(D)$ tenemos que $(v_1, v_0) \in F(C(D))$, lo cual no puede suceder, pues γ es asimétrico.

Por lo tanto esto no puede pasar.

Estos son los únicos casos pues por hipótesis D no tiene como subdigráfica inducida a \vec{C}_4 2-coloreado como en la figura 3.9 a y b.

Por lo tanto γ no está 2-coloreado.

Caso C. Si γ está 3-coloreado, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 3$ y $c(v_3, v_0) = i$ con $i = 1, 2, 3$. Como D es un cuasicuasitorneo tenemos los siguientes casos.

Caso C.1. $D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$ es un torneo (ver figura 3.12).

Fijémonos en la flecha que está entre los vértices v_0 y v_2 , llamémosla w .

Subcaso C.1.1. $i = 1$ (ver figura 3.12 (1.1)). Como nuestros vértices tienen vecindad bicolor y $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$ entonces el color de $c(w) \neq 1$, pues de lo contrario tendríamos que $\zeta(v_2) = \{1, 2, 3\}$. Si $c(w) = 3$, entonces tenemos que $D[\{v_0, v_2, v_1\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo cual no puede ser. Si $c(w) = 2$, tenemos que $D[\{v_0, v_2, v_3\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo cual no puede pasar.

Subcaso C.1.2. $i = 2$ (ver figura 3.12 (1.2)). Como $\zeta(v_0) \cap \zeta(v_2) = \{2\}$ y $\zeta(v_0) = \{1, 2\}$, $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$, tenemos que $c(w) = 2$. Si $(v_0, v_2) \in F(D)$, entonces (v_3, v_0, v_2) sería una v_3v_2 -tdm lo que implicaría que $(v_3, v_2) \in F(C(D))$, lo que no puede pasar pues γ es asimétrico. Si $(v_2, v_0) \in F(D)$, entonces (v_1, v_2, v_0) sería una v_1v_0 -tdm lo que implicaría que $(v_1, v_0) \in F(C(D))$, lo que no puede pasar pues γ es asimétrico.

Subcaso C.1.3. $i = 3$ (ver figura 3.12 (1.3)). Como $\zeta(v_0) \cap \zeta(v_2) = \{3\}$, esto implica que $c(w) = 3$. Así tenemos que $D[\{v_0, v_1, v_2\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo cual no puede suceder.

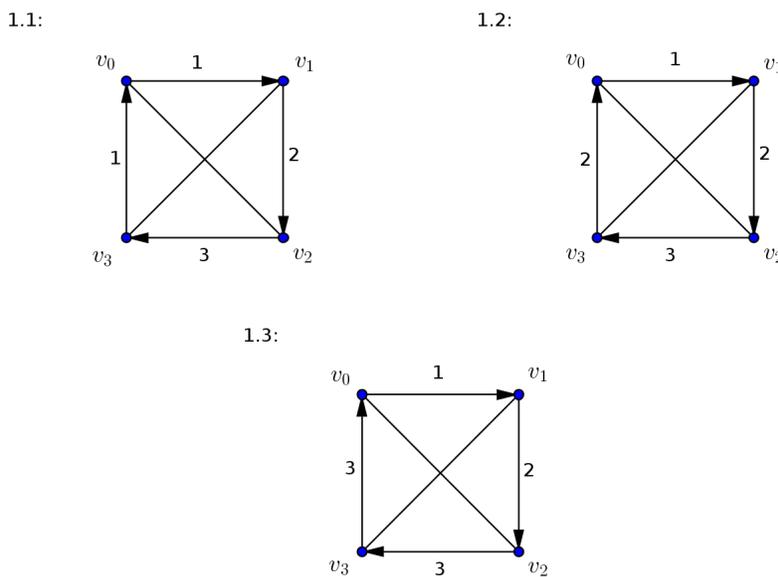


Figura 3.12: Subcasos del caso C.1.

Caso C.2. $D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$ es un cuasitorneo, es decir, sólo una flecha entre los vértices no consecutivos de γ está en D (ver figura 3.13).

Si la flecha que está en D es la flecha entre los vértices v_0 y v_2 , tenemos el mismo análisis que en el caso (1). Si la flecha que está en D es la flecha entre los vértices v_1 y v_3 , llamémosla q , tenemos lo siguiente:

Subcaso C.2.1. $i = 1$, ver figura 3.13 (2.1). Como $\zeta(v_1) \cap \zeta(v_3) = \{1\}$, entonces $c(q) = 1$.

De esto tenemos que $D[\{v_1, v_2, v_3\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo que no puede pasar.

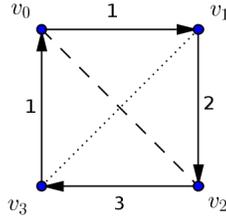
Subcaso C.2.2. $i = 2$, ver figura 3.13 (2.2). Como $\zeta(v_1) \cap \zeta(v_3) = \{2\}$, entonces $c(q) = 2$.

Si $(v_1, v_3) \in F(D)$, entonces (v_1, v_3, v_0) es una v_1v_0 -tdm lo cual implica que $(v_1, v_0) \in F(C(D))$ es simétrica, lo cual no puede pasar. Si $(v_3, v_1) \in F(D)$, entonces (v_3, v_1, v_2) es una v_3v_2 -tdm de lo cual se tendría que $(v_3, v_2) \in F(C(D))$, lo que no puede pasar.

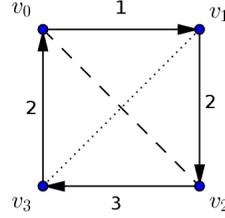
Subcaso C.2.3. $i = 3$, ver figura 3.13 (2.3).

Como $\zeta(v_1) = \{1, 2\}$, entonces $c(q) \neq 3$. Así tenemos que $c(q) = 1$ o $c(q) = 2$. Si $c(q) = 1$, se tiene que $D[\{v_1, v_2, v_3\}] \cong \mathbb{T}_3$, lo cual no puede suceder. Si $c(q) = 2$, se tiene que $D[\{v_0, v_1, v_3\}] \cong \mathbb{T}_3$, lo cual no puede suceder.

2.1:



2.2:



2.3:

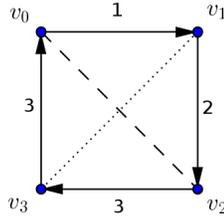


Figura 3.13: Subcasos del caso C.2.

Caso C.3. $D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$, es decir, las flechas entre los vértices no consecutivos de γ no están en D (ver la figura 3.14).

Como γ está 3-coloreado, donde $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 3$ y $c(v_3, v_0) = i$ con $i = 1, 2, 3$. Pero tenemos que $i \neq 2$ pues no puede estar 3-coloreado como en la figura 3.9 e, entonces los únicos casos posibles son que $i = 1$ o $i = 3$.

Si $i = 1$ (ver figura 3.14 a), tenemos que $(v_3, v_1) \in F(C(D))$, donde (v_1, v_2, v_3, v_1) es un ciclo de longitud tres en $C(D)$. Como γ es mínimo asimétrico, (v_3, v_1) debe ser una flecha simétrica en $C(D)$, así tenemos que debe existir una v_1v_3 -tdm de longitud al menos dos en D , llamémosla ρ . Notemos que si el $c(\rho) = 2$ o $c(\rho) = 3$, entonces no se cumple la condición de vecindad bicolor en los vértices v_3 o v_1 , respectivamente. Si

$c(\rho) = 1$, entonces $(v_1, v_0) \in F(C(D))$, es decir, γ tendría una flecha simétrica, lo cual no puede pasar.

Si $i = 3$ (ver figura 3.14 b), tenemos que $(v_2, v_0) \in F(C(D))$, donde (v_0, v_1, v_2, v_0) es un ciclo de longitud tres en $C(D)$. Como γ es mínimo asimétrico, (v_2, v_0) debe ser una flecha simétrica en $C(D)$, así tenemos que debe existir una v_0v_2 -tdm de longitud al menos dos en D , llamémosla ρ . Notemos que si el $c(\rho) = 1$ o $c(\rho) = 2$, entonces no se cumple la condición de vecindad bicolor en los vértices v_2 o v_0 , respectivamente. Si $c(\rho) = 3$, entonces $(v_0, v_3) \in F(C(D))$, es decir, γ tendría una flecha simétrica, lo cual no puede pasar.

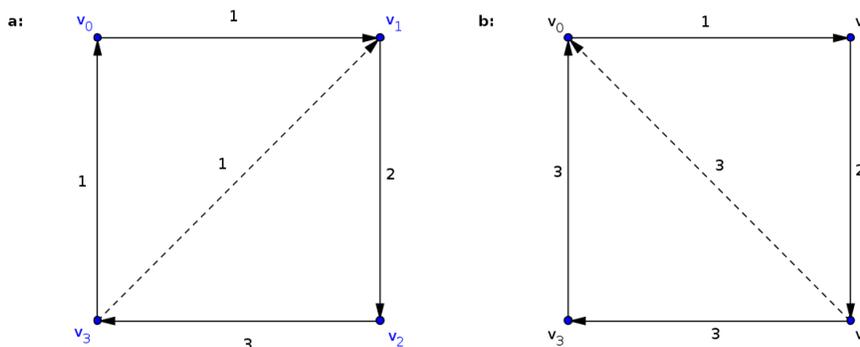


Figura 3.14: γ 3-coloreado.

Como los casos A, B y C no son posibles, entonces γ no puede estar 3-coloreado.

Caso D. Si γ esta 4-coloreado, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 3$ y $c(v_3, v_0) = 4$. De esto tenemos tres opciones, que la subdigráfica inducida por los vértices de γ sea un torneo, un cuasitorneo o un cuasicuasitorneo en D .

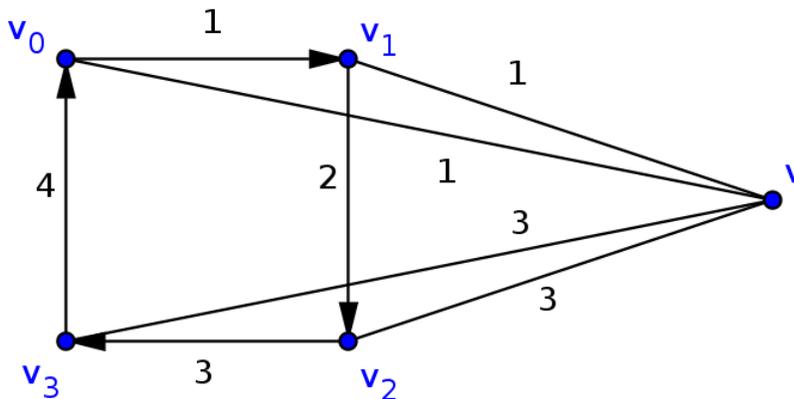


Figura 3.15:

Subcaso D.1. $D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$ es un torneo.

Como $D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$ es un torneo tenemos que la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D , por la observación 2 tenemos que $\zeta(v_0) \cap \zeta(v_2) \neq \emptyset$, pero $\zeta(v_0) \cap \zeta(v_2) = \{1, 4\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Subcaso D.2. $D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$ es un cuasitorneo.

Como $D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$ es un cuasicuasitorneo tenemos que la flecha entre los vértices v_0 y v_2 o entre v_1 y v_3 está en D .

Si tenemos la flecha entre los vértices v_0 y v_2 es el mismo caso que en el subcaso (D.1).

Si tenemos la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D , por la observación 2 tenemos que $\zeta(v_1) \cap \zeta(v_3) \neq \emptyset$, pero $\zeta(v_1) \cap \zeta(v_3) = \{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Subcaso D.3. $D[\{v_0, v_1, v_2, v_3\}]$ es un cuasicuasitorneo.

Sabemos por hipótesis del teorema que existe al menos otro vértice v , el cual es adyacente a todos los vértices de γ (ver figura 3.15). Por la observación 2 sabemos que $\zeta(v_i) \cap \zeta(v) \neq \emptyset$, $i = 0, 1, 2, 3$, y como γ está 4-coloreado, entonces $\zeta(v) \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Sabemos que $\zeta(v_0) = \{1, 4\}$, así tenemos lo siguiente:

Si la flecha entre v_0 y v es de color 4, entonces la flecha entre v_1 y v no puede ser de color 2, pues de lo contrario se forma un \mathbb{T}_3 , por lo tanto es de color 1. Así tenemos que $\zeta(v) = \{1, 4\}$ y $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$, esto implica que $\zeta(v_2) \cap \zeta(v) = \emptyset$, lo cual no puede pasar por la observación 2.

Si la flecha entre v_0 y v es de color 1, entonces la flecha entre v_1 y v puede ser de color 1 ó 2. Si es de color 2, $\zeta(v) = \{1, 2\}$, pero $\zeta(v_3) = \{3, 4\}$, entonces $\zeta(v_3) \cap \zeta(v) = \emptyset$, lo cual no puede suceder. Si es de color 1, entonces la flecha entre v_2 y v es de color 2, por lo tanto $\zeta(v) = \{1, 2\}$, y por el caso anterior tenemos que esto no puede pasar.

Así tenemos que el caso D no es posible, por lo tanto γ no puede estar 4-coloreado.

Como todos los casos posibles A, B, C y D nos llevan a una contradicción tenemos que $\ell(\gamma) \geq 5$.

Caso II: $\gamma \not\subseteq D$.

En este caso, como D es un cuasicuasitorneo, tenemos que una o dos flechas sobre γ no están contenidas en las flechas de D . Así tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Una flecha de γ no está en D .

Si $\ell(\gamma) = 3$, entonces denotemos $\gamma = (v_0, v_1, v_2, v_0)$.

Sabemos que γ puede estar m -coloreado con $1 \leq m \leq 3$. De esto tenemos lo siguiente:

Si γ está 1-coloreado tenemos que $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_2, v_0) = 1$ y $c(v_1, v_2) = 1$, de esto tenemos que (v_0, v_1, v_2) es una v_0v_2 -tdm en $C(D)$ por lo que debe existir una v_0v_2 -tdm en D , lo cual implica que $(v_0, v_2) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar.

Si γ está 2-coloreado, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_2, v_0) = 1$ y $c(v_1, v_2) = 2$. De esto tenemos que (v_2, v_0, v_1) es una v_2v_1 -tdm en $C(D)$ por lo que debe existir una v_2v_1 -tdm en D , por lo que tenemos que $(v_2, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar.

Si γ está 3-coloreado, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$ y $c(v_2, v_0) = 3$, ver figura 3.16. Como una flecha de γ no está en D , entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $(v_0, v_1) \notin F(D)$, esto implica, por construcción de la cerradura, que existe $\rho = (b_0 = v_0, b_1, \dots, b_r = v_1)$ una v_0v_1 -tdm de color 1 en D de longitud al menos dos. Notemos que $V(\rho) \cap V(\gamma) = \{v_0, v_1\}$ pues de lo contrario (v_2, v_0) y (v_1, v_2) serían flechas simétricas en $C(D)$, lo cual no puede pasar.

Como D es un cuasicuasitorneo y la flecha $(v_0, v_1) \notin F(D)$ tenemos dos posibilidades: alguna flecha entre b_i y v_2 no está en D o todas las flechas entre b_i y v_2 están en D .

AFIRMACIÓN A. b_i es adyacente a v_2 , para toda $i = 1, 2, \dots, r - 1$, en D , ver figura 3.16.

Lo demostraremos por inducción sobre i .

Base de inducción. $i = 1$, es decir, mostraremos que la flecha entre v_2 y b_1 está en D .

Supongamos por contradicción, que la flecha entre v_2 y b_1 no está en D , esto implica que la flecha entre los vértices v_2 y b_2 si está en D , llamémosla q . Como $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$, entonces $c(q) = 2$ o $c(q) = 3$.

- Si $c(q) = 2$, entonces notemos lo siguiente, el color de la flecha entre los vértices v_0 y b_2 es de color 1, pues $\zeta(v_0) \cap \zeta(b_2) = \{1\}$. Así tenemos que $D[\{v_0, b_2, v_2\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo cual no puede pasar.

- Si $c(q) = 3$, entonces notemos lo siguiente, el color de la flecha entre los vértices b_2 y v_1 es de color 1, pues $\zeta(v_1) \cap \zeta(b_2) = \{1\}$. Así tenemos que $D[\{v_1, b_2, v_2\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo cual no puede pasar.

Por lo tanto la flecha entre v_2 y b_1 está en D .

Hipótesis de inducción. Supongamos que para toda $1 \leq i < r - 1$ la flecha entre v_2 y b_i está en D .

Paso inductivo. Demostraremos que la flecha entre v_2 y b_{r-1} está en D .

Supongamos por contradicción, que la flecha entre v_2 y b_{r-1} no está en D , esto implica que la flecha entre los vértices v_2 y b_{r-2} está en D , llamémosla p . Como $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$, entonces $c(p) = 2$ o $c(p) = 3$.

- Si $c(p) = 2$, entonces notemos lo siguiente, el color de la flecha entre los vértices v_0 y b_{r-2} es de color 1, pues $\zeta(v_0) \cap \zeta(b_{r-2}) = \{1\}$. Así tenemos que $D[\{v_0, b_{r-2}, v_2\}] \cong \mathbb{T}_3$, lo cual no puede pasar.

- Si $c(p) = 3$, entonces notemos lo siguiente, el color de la flecha entre los vértices v_1 y b_{r-2} es de color 1, pues $\zeta(v_1) \cap \zeta(b_{r-2}) = \{1\}$. Así tenemos que $D[\{v_1, b_{r-2}, v_2\}] \cong \mathbb{T}_3$, lo cual no puede pasar.

Por lo tanto b_i es adyacente a v_2 , para toda $i = 1, 2, \dots, r - 1$, en D .

Por la afirmación (A) tenemos que las flechas entre v_2 y b_i , $i = 1, 2, \dots, r - 1$, están en D .

Como $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$ esto implica que el color de las flechas entre v_2 y b_i , con $i = 1, 2, \dots, r - 1$, es 2 o 3.

Fijémonos en la flecha entre v_2 y b_1 . Si el color de esta flecha es de color 2, entonces $D[\{v_0, b_1, v_2\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo que no puede suceder.

Si el color de esta flecha es de color 3, entonces esto implica que todas las flechas entre v_2 y b_i , $i = 1, 2, \dots, r - 1$, son de color 3, pues en caso contrario existe un $j \in \{1, 2, \dots, r - 1\}$ mínima tal que la flecha entre v_2 y b_j es de color 2, pero así tendríamos que $D[\{v_2, b_{j-1}, b_j\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo cual no puede suceder. Así tenemos que la flecha entre v_2 y b_{r-1} es de color 3 lo que implica que $D[\{v_2, b_{r-1}, v_1\}] \cong \mathbb{T}_3$, lo cual no es posible.

Por lo tanto $\ell(\gamma) \geq 4$.

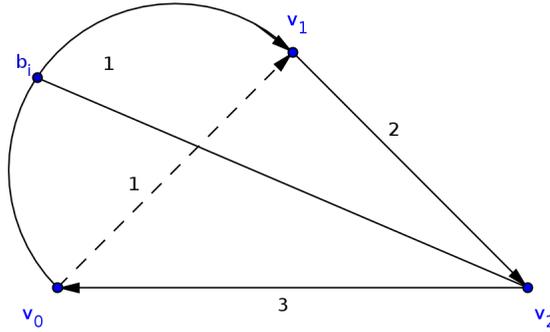


Figura 3.16: $\ell(\gamma) = 3$.

Si $\ell(\gamma) = 4$, entonces denotemos $\gamma = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$.

Supongamos que $(v_i, v_{i+1}) \notin F(D)$ para alguna $i = 0, 1, 2, 3$ (módulo 3), esto implica por construcción de la cerradura de D que existe una $v_i v_{i+1}$ -tdm en D , digamos $\rho = (b_0 = v_i, b_1, \dots, b_r = v_{i+1})$ de longitud al menos dos.

Observación I.i. $V(\gamma) \cap V(\rho) = \{v_i, v_{i+1}\}$.

Supongamos que no, de esto tenemos dos casos:

- $v_{i-1} \in V(\gamma) \cap V(\rho)$, por lo que tenemos que existe una $v_i v_{i-1}$ -tdm, lo cual implica que $(v_i, v_{i-1}) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

- $v_{i+2} \in V(\gamma) \cap V(\rho)$, así tenemos que (v_{i+2}, ρ, v_{i+1}) es una $v_{i+2} v_{i+1}$ -tdm, por lo que $(v_{i+2}, v_{i+1}) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto $V(\gamma) \cap V(\rho) = \{v_i, v_{i+1}\}$.

Como D es un cuasicuasitorneo, entonces tenemos que al menos una flecha entre los vértices no consecutivos de γ está en D .

Sabemos que γ puede estar m -coloreado con $1 \leq m \leq 4$. Así tenemos los siguientes cuatro casos:

Caso A. γ está 1-coloreado. Entonces $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 1$, $c(v_2, v_3) = 1$, $c(v_3, v_0) = 1$. Así tenemos que (v_0, v_1, v_2, v_3) es una $v_0 v_3$ -tdm en $C(D)$ por lo que debe existir una $v_0 v_3$ -tdm en D , así tenemos que $(v_0, v_3) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Caso B. γ está 2-coloreado. Tenemos tres posibles casos, los cuales se muestran en la figura 3.17.

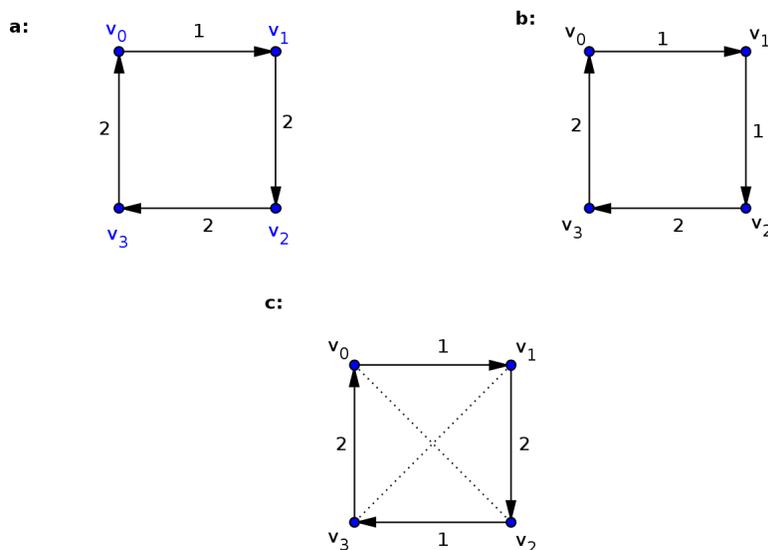


Figura 3.17: γ 2-coloreado, $\ell(\gamma) = 4$.

Subcaso B.1. Si γ está 2-coloreado como en la figura 3.17 **a**, es decir, $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 2$, $c(v_3, v_0) = 2$, entonces (v_1, v_2, v_3, v_0) es una v_1v_0 -tdm en $C(D)$, por lo que en D también existe una v_1v_0 -tdm, por lo tanto $(v_1, v_0) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar.

Subcaso B.2. Si γ está 2-coloreado como en la figura 3.17 **b**, es decir, $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 1$, $c(v_2, v_3) = 2$, $c(v_3, v_0) = 2$, entonces como $\gamma \subsetneq D$, sabemos que alguna $(v_i, v_{i+1}) \notin F(D)$ (módulo 3) para alguna $i = 0, 1, 2, 3$, así tenemos que existe una $v_i v_{i+1}$ -tdm en D , digamos ρ , de longitud al menos dos. Como $V(\gamma) \cap V(\rho) = \{v_i, v_{i+1}\}$ (observación I.i) tenemos que $(v_{i-1}, v_i) \cup (v_i, \rho, v_{i+1}) \cup (v_{i+1}, \gamma, v_{i-1})$ es un ciclo de longitud al menos cinco en $C(D)$ que tiene dos cambios de color, lo que contradice la hipótesis (4) del teorema, por lo tanto este caso no puede pasar.

Subcaso B.3. Si γ está 2-coloreado como en la figura 3.17 **c**, es decir, $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 1$, $c(v_3, v_0) = 2$, entonces:

Si la flecha entre v_0 y v_2 está en D , entonces tenemos que tiene color 1 o 2, de esto tenemos lo siguiente:

Si $(v_0, v_2) \in F(D)$ y tiene color 1, entonces (v_0, v_2, v_3) es una v_0v_3 -tdm en $C(D)$, por lo que en D existe una v_0v_3 -tdm, así se tiene que $(v_3, v_0) \in \text{Sim}(C(D))$ y esto no puede suceder. Si es de color 2, entonces (v_3, v_0, v_2) es una v_3v_2 -tdm en $C(D)$ por lo que en D también existe una v_3v_2 -tdm, así se tiene que $(v_3, v_2) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Si $(v_2, v_0) \in F(D)$ y tiene color 1, entonces (v_2, v_0, v_1) es una v_2v_1 -tdm en $C(D)$, por lo que en D también existe una v_2v_1 -tdm, así tenemos que $(v_2, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$ y esto no puede suceder. Si es de color 2, entonces (v_1, v_2, v_0) es una v_1v_0 -tdm en $C(D)$, por lo que en D también existe una v_1v_0 -tdm, así se tiene que $(v_1, v_0) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Si la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D , entonces se demuestra de manera análoga al caso cuando la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D (caso anterior), lo cual no puede pasar.

Por lo tanto γ no está 2-coloreado.

Caso C. Si γ está 3-coloreado, entonces hay dos maneras posibles de colorearlo, como se muestra en la figura 3.18.

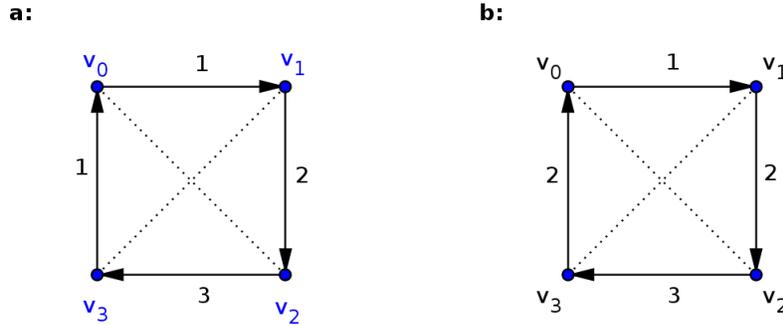


Figura 3.18: $\ell(\gamma) = 4$, 3-coloreado.

Subcaso C.1. Si γ está coloreado como en la figura 3.18 **a**, es decir, $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 3$, $c(v_3, v_0) = 1$ tenemos lo siguiente:

C.1.1. Si la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D , entonces esta tiene que estar coloreada de color 2 o 3, pues si fuera 1 no se cumpliría con la condición de vecindad bicolor en v_2 .

Si $(v_0, v_2) \in F(D)$, entonces tenemos lo siguiente:

- Si es de color 2, entonces tenemos que (v_0, v_2, v_3, v_0) es un C_3 en $C(D)$. Si $\{(v_2, v_3), (v_3, v_0)\} \subseteq F(D)$, entonces $D[\{v_0, v_2, v_3\}] \cong C_3$ en D , lo cual no puede suceder. Si $(v_2, v_3) \notin F(D)$ o $(v_3, v_0) \notin F(D)$, entonces existe una v_2v_3 -tdm en D o una v_3v_0 -tdm en D . Supongamos que $(v_2, v_3) \notin F(D)$ (para cuando $(v_3, v_0) \notin F(D)$ tenemos un caso análogo), entonces (v_0, v_2, v_3, v_0) es un ciclo de longitud menor que la $\ell(\gamma)$ en $C(D)$, por lo tanto debe existir una v_2v_0 -tdm en D , llamémosla α , pues las flechas de γ no son simétricas. Notemos que $c(\alpha) \neq 1$, pues en caso contrario no se cumpliría con la condición de vecindad bicolor en v_2 , $c(\alpha) \neq 2$, de lo contrario tendríamos que $(v_1, v_2) \cup (v_2, \alpha, v_0)$ es una v_1v_0 -tdm lo que implica que $(v_0, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no

puede suceder, y $c(\alpha) \neq 3$, de lo contrario no se cumpliría con la condición de vecindad bicolor en v_0 .

- Si es de color 3, tenemos que (v_0, v_2, v_3) es una v_0v_3 -tdm en $C(D)$, por lo que en D también debe existir una v_0v_3 -tdm, así tenemos que $(v_0, v_3) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar.

Si $(v_2, v_0) \in F(D)$, entonces tenemos lo siguiente:

- Si es de color 2, tenemos que (v_1, v_2, v_0) es una v_1v_0 -tdm en $C(D)$, por lo que en D también debe existir una v_1v_0 -tdm, así tenemos que $(v_0, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar.

- Si es de color 3, tenemos que (v_0, v_1, v_2, v_0) es un C_3^3 en $C(D)$. Si $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2)\} \subseteq F(D)$, entonces $D[\{v_0, v_1, v_2\}] \cong C_3^3$ en D , lo cual no puede suceder. Si $(v_0, v_1) \notin F(D)$ o $(v_1, v_2) \notin F(D)$, entonces existe una v_0v_1 -tdm en D o una v_1v_2 -tdm en D . Supongamos que $(v_1, v_2) \notin F(D)$ (para cuando $(v_0, v_1) \notin F(D)$ tenemos un caso análogo), entonces (v_0, v_1, v_2, v_0) es un ciclo con menor longitud que la $\ell(\gamma)$, por lo tanto debe existir una v_0v_2 -tdm en D , llamémosla α , pues las flechas de γ no son simétricas. Notemos que $c(\alpha) \neq 1$, pues en caso contrario v_2 no cumpliría con la condición de vecindad bicolor, $c(\alpha) \neq 2$, de lo contrario v_0 no cumpliría con la condición de vecindad bicolor, y $c(\alpha) \neq 3$, de lo contrario $(v_0, \alpha, v_2) \cup (v_2, v_3)$ sería una v_0v_3 -tdm lo que implica que $(v_0, v_3) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

C.1.2. Si la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D , entonces debe ser de color 1, por la observación 2.

- Si $(v_3, v_1) \in F(D)$, tenemos que (v_1, v_2, v_3, v_1) es un C_3^3 en $C(D)$. Si $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\} \subseteq F(D)$ entonces $D[\{v_1, v_2, v_3\}] \cong C_3^3$ en D , lo cual no puede pasar. Si $(v_1, v_2) \notin F(D)$ o $(v_2, v_3) \notin F(D)$, entonces existe una v_1v_2 -tdm en D o una v_2v_3 -tdm en D . Supongamos que $(v_1, v_2) \notin F(D)$ (para cuando $(v_2, v_3) \notin F(D)$ tenemos un caso análogo), entonces (v_1, v_2, v_3, v_1) es ciclo de longitud menor que la $\ell(\gamma)$ en $C(D)$, por lo tanto existe una v_1v_3 -tdm en D , llamémosla α , pues las flechas de γ no son simétricas. Notemos que $c(\alpha) \neq 1$, pues en caso contrario $(v_0, v_1) \cup (v_1, \alpha, v_3)$ sería una v_0v_3 -tdm, lo que implica que $(v_0, v_3) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder, $c(\alpha) \neq 2$, pues de lo contrario v_3 no tendría vecindad bicolor, y $c(\alpha) \neq 3$, pues en caso contrario v_1 no tendría vecindad bicolor.

- Si $(v_1, v_3) \in F(D)$, entonces (v_0, v_1, v_3) es una v_0v_3 -tdm en $C(D)$, lo cual implica que también existe una v_0v_3 -tdm en D , por lo tanto $(v_0, v_3) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder

Por lo tanto este caso no es posible.

Subcaso C.2. Si γ está 3-coloreado como en la figura 3.18 **b**, es decir, $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 3$, $c(v_3, v_0) = 2$, entonces tenemos lo siguiente:

C.2.1. Si la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D , entonces esta debe ser de color 2, por la observación 2.

Si $(v_0, v_2) \in F(D)$, entonces tenemos que (v_3, v_0, v_2) es una v_3v_2 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_3v_2 -tdm, entonces $(v_2, v_3) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder. Si $(v_2, v_0) \in F(D)$, tenemos que (v_1, v_2, v_0) es una v_1v_0 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_1v_0 -tdm, entonces $(v_0, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$,

lo cual no puede suceder.

C.2.2. Si la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D , entonces por la observación 2, debe ser de color 2.

Si $(v_1, v_3) \in F(D)$, tenemos que (v_1, v_3, v_0) es una v_1v_0 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una $v_1v_0 - tdm$, entonces $(v_0, v_1) \in Sim(C(D))$, lo cual no puede suceder. Si $(v_3, v_1) \in F(D)$, tenemos que (v_3, v_1, v_2) es una v_3v_2 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una $v_3v_2 - tdm$, entonces $(v_2, v_3) \in Sim(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto, γ no está 3-coloreado.

Caso D. Si γ está 4-coloreado, entonces sólo puede ser como en la figura 3.19, es decir, $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 3$, $c(v_3, v_0) = 4$, entonces tenemos lo siguiente:

Caso D.1. Si la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D , entonces como la $\zeta(v_0) = \{1, 4\}$ y la $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$, se tiene que $\zeta(v_0) \cap \zeta(v_2) = \emptyset$, lo que no puede pasar por la observación 2.

Caso D.2. Si la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D , entonces como la $\zeta(v_1) = \{1, 2\}$ y la $\zeta(v_3) = \{4, 3\}$, se tiene que $\zeta(v_1) \cap \zeta(v_3) = \emptyset$, lo que no puede pasar por la observación 2.

Así tenemos que γ no está 4-coloreado.

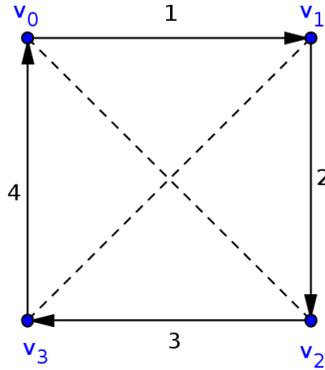


Figura 3.19: $\ell(\gamma) = 4$, $\gamma \not\subseteq T$ 4-coloreado.

Caso 2. Dos flechas de γ no están en D .

Si $\ell(\gamma) = 3$, entonces denotemos $\gamma = (v_0, v_1, v_2, v_0)$.

Tenemos que γ puede estar m -coloreado, con $1 \leq m \leq 3$. De esto tenemos lo siguiente:

Si γ está 1-coloreado, entonces $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 1$, $c(v_2, v_0) = 1$. De esto tenemos que (v_2, v_0, v_1) es una v_2v_1 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también debe existir una v_2v_1 -tdm, entonces $(v_2, v_1) \in Sim(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Si γ está 2-coloreado, entonces $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_0) = 1$. De esto tenemos que (v_2, v_0, v_1) es una v_2v_1 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también debe existir una v_2v_1 , entonces $(v_2, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Si γ está 3-coloreado, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$ y $c(v_2, v_0) = 3$.

Supongamos sin pérdida de generalidad las flechas que no están en D son (v_0, v_1) y (v_2, v_0) , como estas flechas no están en D esto implica, por la construcción de la cerradura de D , que existen $\rho_1 = (u_0 = v_0, u_1, \dots, u_r = v_1)$ una v_0v_1 -tdm de color 1 en D , de longitud al menos dos, y $\rho_2 = (w_0 = v_2, w_1, \dots, w_s = v_0)$ una v_2v_0 -tdm de color 3 en D , de longitud al menos dos. Notemos que $V(\rho_1) \cap V(\gamma) = \{v_0, v_1\}$ en D , pues de lo contrario $\{(v_2, v_0), (v_1, v_2)\} \subseteq \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar, y $V(\rho_2) \cap V(\gamma) = \{v_2, v_0\}$ en D , pues de lo contrario $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2)\} \subseteq \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar.

Fijémonos en las flechas entre v_2 y los u_i , $i = 1, \dots, r-1$ (ver figura 3.20), observemos que estas flechas no pueden ser de color 1, pues v_2 no tendría vecindad bicolor. Como $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$ esto implica que el color de la flecha entre v_2 y u_i , $i = 1, \dots, r-1$, es 2 o 3.

AFIRMACIÓN A. El color de las flechas entre v_2 y u_i , $i = 1, \dots, r-1$, es 2.

Supongamos por contradicción que existe un $j \in \{1, \dots, r-1\}$ mínimo tal que el color de la flecha entre u_j y v_2 es 3, entonces la flecha entre los vértices v_2 y v_{j-1} es de color 2 y como $\zeta(u_j) \cap \zeta(u_{j-1}) = \{1, 3\} \cap \{2, 3\} = \{1\}$, tenemos que $D[u_{j-1}, u_j, v_2] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo cual no puede pasar, este j existe, pues si $j = r-1$ entonces $D[u_{r-1}, v_1, v_2] \cong \mathbb{T}_3$. Por lo tanto el color de las flechas entre v_2 y u_i , $i = 1, \dots, r-1$, son de color 2.

AFIRMACIÓN B. El color de la flecha entre w_{s-1} y u_1 es 1.

Notemos que el color de estas flechas no puede ser 3, pues por la afirmación (A) tenemos que $\zeta(u_i) = \{1, 2\}$. Supongamos por contradicción que es de color 2, así tendríamos que $D[\{u_1, v_0, w_{s-1}\}] \cong \mathbb{T}_3$, por lo tanto la flecha entre u_1 y w_{s-1} es de color 1.

Sabemos que $\zeta(w_{s-1}) = \{3, 1\}$ y $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$, así tenemos, por la observación 2, que el color de la flecha entre w_{s-1} y v_2 es 3. Así tenemos que $D[\{w_{s-1}, v_2, u_1\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo cual no puede pasar.

Por lo tanto $\ell(\gamma) > 3$.

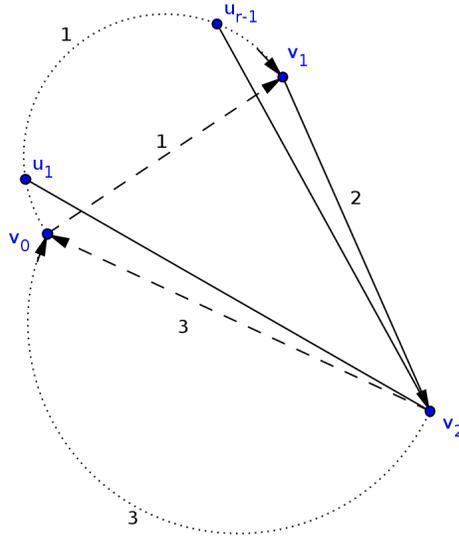


Figura 3.20: Caso II, γ 3 coloreado.

Si $\ell(\gamma) = 4$, entonces denotemos $\gamma = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$. Notemos que γ puede estar m -coloreado, con $1 \leq m \leq 4$.

Caso A. Si γ está 1-coloreado, entonces $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 1$, $c(v_2, v_3) = 1$, $c(v_3, v_0) = 1$, así tenemos que (v_0, v_1, v_2, v_3) es una v_0v_3 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_0v_3 -tdm, entonces $(v_0, v_3) \in Sim(C(D))$, lo cual no puede pasar.

Caso B. Si γ está 2-coloreado, entonces tenemos lo siguiente:

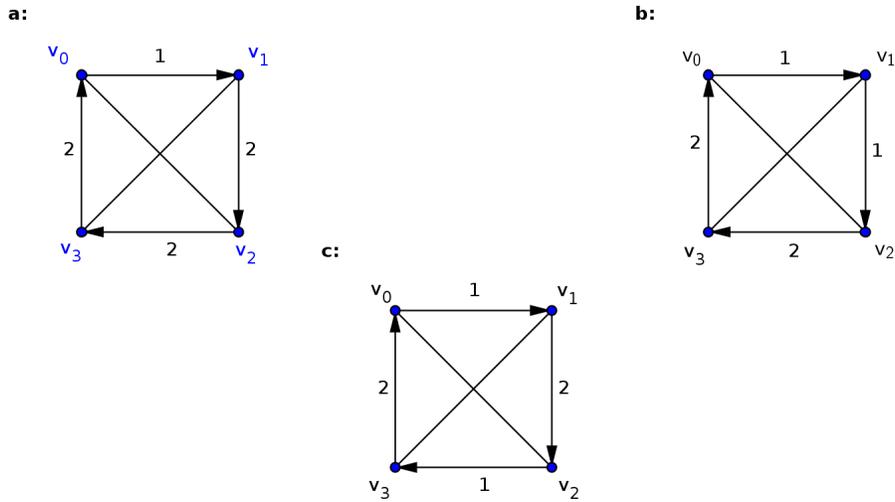


Figura 3.21: γ 2-coloreado.

Caso B.1. Si γ está 2-coloreado como en la figura 3.21 **a**, entonces $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 2$, $c(v_3, v_0) = 2$, así tenemos que (v_1, v_2, v_3, v_0) es una v_1v_0 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también debe existir una v_1v_0 -tdm, entonces $(v_1, v_0) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Nota. Como D es un cuasicuasitorneo y estamos en el caso en el que dos flechas de γ no están en D , entonces las flechas entre los vértices no consecutivos de γ están en D .

Caso B.2. Si γ está 2-coloreado como en la figura 3.21 **b**, entonces $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 1$, $c(v_2, v_3) = 2$, $c(v_3, v_0) = 2$.

Sabemos que dos flechas de γ no están en D , digamos (v_i, v_{i+1}) y (v_j, v_{j+1}) (módulo 3), para alguna $i = 0, 1, 2, 3$ y para alguna $j = 0, 1, 2, 3$, $i < j$, por construcción de la cerradura tenemos que existe una v_iv_{i+1} -tdm en D y una v_jv_{j+1} -tdm en D , llamémoslas ρ_1 y ρ_2 , respectivamente, ambas de longitud al menos dos. De esto tenemos la siguiente observación:

Observación II.i. Si $(v_i, v_{i+1}) \notin F(D)$, entonces la v_iv_{i+1} -tdm solo interseca a γ en v_i y v_{i+1} .

Supongamos que no, de esto tenemos lo siguiente:

- $v_{i-1} \in V(\gamma) \cap V(\rho_1)$, por lo que tenemos que existe una v_iv_{i-1} -tdm, lo cual implica que $(v_i, v_{i-1}) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

- $v_{i+2} \in V(\gamma) \cap V(\rho_2)$, así tenemos que (v_{i+2}, v_{i+1}) es una $v_{i+2}v_{i+1}$ -tdm, por lo que $(v_{i+2}, v_{i+1}) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto $V(\gamma) \cap V(\rho_1) = \{v_i, v_{i+1}\}$.

Ahora fijémonos en la flecha entre los vértices v_1 y v_3 , llamémosla q . Donde q puede ser de color 1, 2 o 3, pues ninguno de estos colores afecta la vecindad bicolor de v_1 y v_3 .

Si $c(q) = 1$ y $(v_3, v_1) \in F(D)$, entonces (v_3, v_1, v_2) es una v_3v_2 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_3v_2 -tdm, así tenemos que $(v_3, v_2) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder. Si $(v_1, v_3) \in F(D)$, entonces (v_0, v_1, v_3) es una v_0v_3 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_0v_3 -tdm, así tenemos que $(v_0, v_3) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Si $c(q) = 2$ y $(v_3, v_1) \in F(D)$, entonces (v_2, v_3, v_1) es una v_2v_1 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_2v_1 -tdm, así tenemos que $(v_2, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder. Si $(v_1, v_3) \in F(D)$, entonces (v_1, v_3, v_0) es una v_1v_0 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_1v_0 -tdm, así tenemos que $(v_1, v_0) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Si $c(q) = 3$, entonces tenemos lo siguiente:

Si $\{(v_0, v_1), (v_3, v_0)\} \subseteq F(D)$, entonces $D[\{v_0, v_1, v_3\}] \cong \mathbb{T}_3$, lo cual no puede pasar.

Si $(v_0, v_1) \notin F(D)$ y $(v_3, v_0) \notin F(D)$, entonces $D[\{v_1, v_2, v_3\}] \cong \mathbb{T}_3$, lo cual no puede pasar.

Si $(v_0, v_1) \notin F(D)$ o $(v_3, v_0) \notin F(D)$, tenemos que existe una v_0v_1 -tdm en D y una v_3v_0 -tdm en D . Supongamos sin pérdida de generalidad que $(v_0, v_1) \notin F(D)$, entonces denotemos por $\rho_1 = (w_0 = v_0, w_1, \dots, w_r = v_1)$ a la v_0v_1 -tdm.

Fijémonos en las flechas entre v_3 y los vértices de ρ_1 , notemos que estas flechas son de color 2 o 3 ya que $\zeta(v_3) = \{2, 3\}$.

Afirmamos que el color de las flechas entre v_3 y w_i , con $i = 0, 1, \dots, r - 1$, son de color 2. En caso contrario existiría una $j \in \{0, 1, \dots, r - 1\}$ mínima tal que es de color 3, así tenemos que $D[w_{j-1}, w_j, v_3] \cong \mathbb{T}_3$, lo cual no puede suceder.

De esto tenemos que $D[\{v_3, w_{r-1}, v_1\}] \cong \mathbb{T}_3$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto este caso no puede suceder.

Caso B.3. Si γ está 2-coloreado como en la figura 3.21 **c**, es decir, $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 1$, $c(v_3, v_0) = 2$.

Fijémonos en la flecha entre los vértices v_0 y v_2 y llamémosla q , como $\zeta(v_0) = \{1, 2\} = \zeta(v_2)$, entonces el color de q es 1 o 2.

Si $c(q) = 1$ y $(v_0, v_2) \in F(D)$, entonces tenemos que (v_0, v_2, v_3) es una v_0v_3 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_0v_3 -tdm, así se tiene que $(v_3, v_0) \in \text{Sim}(C(D))$, pero esto no puede suceder. Si $(v_2, v_0) \in F(D)$, entonces tenemos que (v_2, v_0, v_1) es una v_2v_1 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_2v_1 -tdm, así se tiene que $(v_1, v_2) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Si $c(q) = 2$ y $(v_0, v_2) \in F(D)$, entonces tenemos que (v_3, v_0, v_2) es una v_3v_2 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_3v_2 -tdm, así se tiene que $(v_2, v_3) \in \text{Sim}(C(D))$, pero esto no puede suceder. Si $(v_2, v_0) \in F(D)$, entonces tenemos que (v_1, v_2, v_0) es una v_1v_0 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también existe una v_1v_0 -tdm, así se tiene que $(v_0, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto γ no está 2-coloreado.

Caso C. Si γ está 3-coloreado, tenemos dos posibilidades, como se muestra en la figura 3.22.

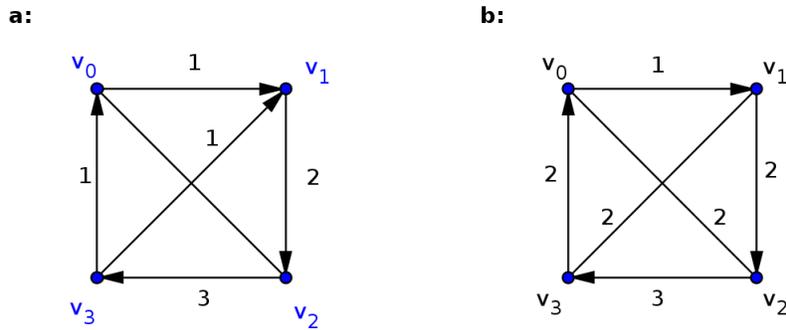


Figura 3.22:

Caso C.1. Si γ está coloreado como en la figura 3.22 **a**, es decir, $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 3$, $c(v_3, v_0) = 1$.

Fijémonos en la flecha entre los vértices v_1 y v_3 , llamémosla q . Como $\zeta(v_1) = \{1, 2\}$ y $\zeta(v_3) = \{1, 3\}$, tenemos, por la observación 2, que $c(q) = 1$ de esto obtenemos que $(v_3, v_1) \in F(D)$, pues de lo contrario (v_0, v_1, v_3) sería una v_0v_3 -tdm en $C(D)$, lo que

implicaría que en D también existe una v_0v_3 -tdm por lo que $(v_3, v_0) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar.

Así tenemos que (v_1, v_2, v_3, v_1) es un C_3^3 en $C(D)$.

Si $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\} \subseteq F(D)$, entonces $D[\{v_1, v_2, v_3\}] \cong C_3$ en D , lo cual no puede suceder. Si $(v_1, v_2) \notin F(D)$ o $(v_2, v_3) \notin F(D)$, entonces $\alpha = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ es un ciclo de longitud menor que la $\ell(\gamma)$ en $C(D)$ por lo que $(v_3, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$, así tenemos que debe existir una v_1v_3 -tdm en D , llamémosla ρ . Notemos que $c(\rho) \neq 1$, de lo contrario se tendría que $(v_3, v_0) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder, $c(\rho) \neq 2$, de lo contrario v_3 no tendría vecindad bicolor, y $c(\rho) \neq 3$, de otro modo v_1 no tendría vecindad bicolor.

Por lo tanto este caso no puede suceder.

Caso C.2. Si γ está coloreado como en la figura 3.22 **b**, es decir, $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 3$, $c(v_3, v_0) = 2$.

Fijémonos en la flecha entre los vértices v_0 y v_2 , llamémosla q . Como $\zeta(v_0) = \{1, 2\}$ y $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$, entonces, por la observación 2, tenemos que $c(q) = 2$. Si $(v_0, v_2) \in F(D)$, entonces (v_3, v_0, v_2) es una v_3v_2 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también debe existir una v_3v_2 -tdm, por lo que $(v_2, v_3) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder. Si $(v_2, v_0) \in F(D)$, entonces (v_1, v_2, v_0) es una v_1v_0 -tdm en $C(D)$, lo que implica que en D también debe existir una v_1v_0 -tdm, por lo que $(v_0, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede suceder.

Por lo tanto γ no está 3-coloreado.

Caso D. Si γ está 4-coloreado, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $c(v_0, v_1) = 1$, $c(v_1, v_2) = 2$, $c(v_2, v_3) = 3$ y $c(v_3, v_0) = 4$. Sabemos que las flechas entre los vértices no adyacentes de γ están en D , así fijémonos en la flecha entre los vértices v_0 y v_2 . Tenemos que $\zeta(v_0) = \{1, 4\}$ y $\zeta(v_2) = \{2, 3\}$, así tenemos que $\zeta(v_0) \cap \zeta(v_2) = \emptyset$, lo cual no puede pasar por la observación 2.

Por lo tanto γ no está 4-coloreado.

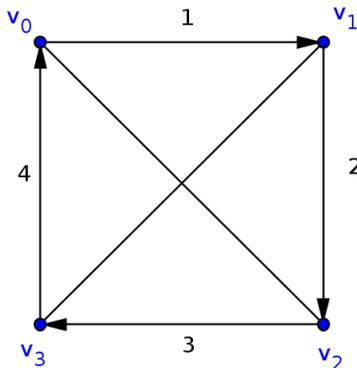


Figura 3.23:

Como todos los casos posibles A, B, C y D nos llevan a una contradicción tenemos

que $\ell(\gamma) \geq 5$.

Por lo tanto del caso I y II tenemos que $\ell(\gamma) \geq 5$.

Como $\ell(\gamma) \geq 5$ tenemos por la condición (4) del teorema que existen en γ al menos tres cambios de color, supongamos sin pérdida de generalidad que estos cambios se dan de la siguiente forma:

1. $c(v_0, v_1) = 1$ y $c(v_1, v_2) = 2$,
2. $c(v_i, v_{i+1}) = d$ y $c(v_{i+1}, v_{i+2}) = g$ con $i \neq 0$ y $d \neq g$ donde $\{d, g\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$,
3. $c(v_j, v_{j+1}) = h$ y $c(v_{j+1}, v_{j+2}) = k$ con $j \neq 0$ y $j \neq i$ y $h \neq k$ donde $\{h, k\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$.

De ésto tenemos tres casos (ver figura 3.24),

- a) $i \neq 1$ y $j \neq i + 1$ o
- b) $i = 1$ y $j = i + 1$ o
- c) $i = 1$ y $j \neq i + 1$.

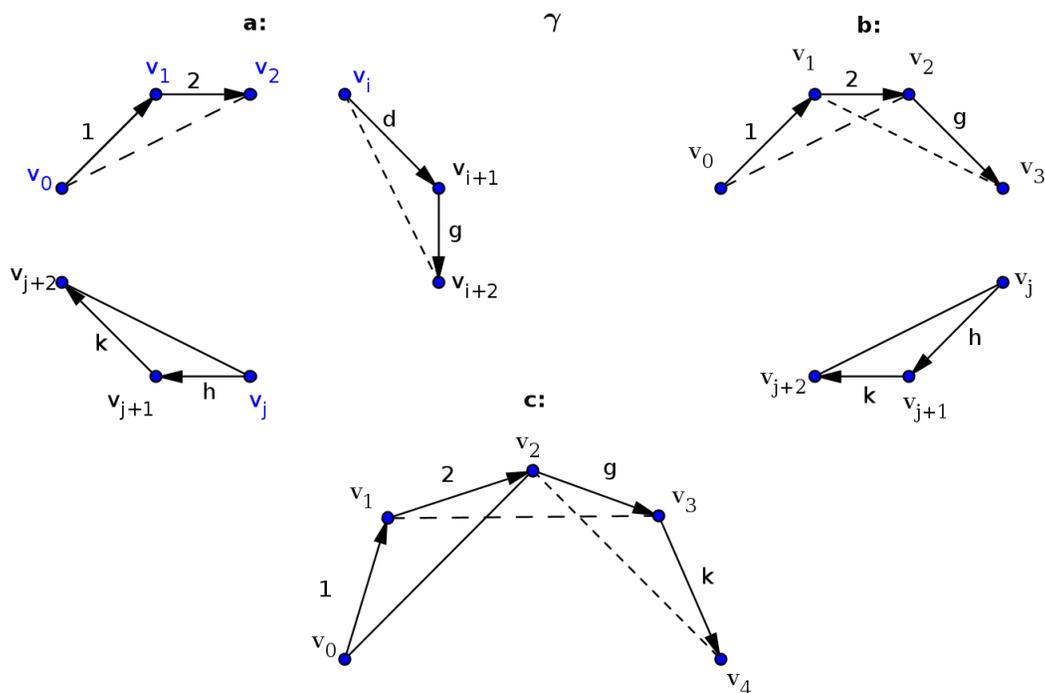
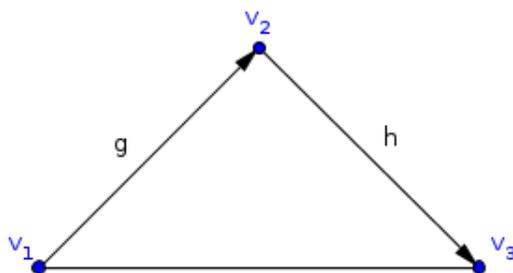


Figura 3.24: Posibles distribuciones de los cambios de colores.

Nota: Denotaremos por Δ a la estructura mostrada en la figura 3.25, donde (v_1, v_2, v_3) es una trayectoria donde se da un cambio de color tal que todas sus flechas están en D .

Figura 3.25: Δ

Afirmación 2. Existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

De esto tenemos dos casos, cuando $\gamma \subseteq D$ y cuando $\gamma \subsetneq D$.

Caso 2.I. $\gamma \subseteq D$.

Como $\gamma \subseteq D$ y D es un cuasicuasitorneo, tenemos la posibilidad de que no haya dos flechas entre vértices no consecutivos de γ .

Nuestro peor caso sería que faltarán las flechas entre el vértice inicial y el vértice final de la trayectoria formada por un cambio de color en D . De esto tenemos lo siguiente:

Si v_0 no es adyacente a v_2 y v_i no es adyacente a v_{i+2} , entonces v_j es adyacente a v_{j+2} en D .

Si v_i no es adyacente a v_{i+2} y v_j no es adyacente a v_{j+2} aún tenemos que v_0 es adyacente a v_2 en D .

Si v_0 no es adyacente a v_2 y v_j no es adyacente a v_{j+2} , entonces v_i es adyacente a v_{i+2} en D .

Por lo tanto existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso 2.II. $\gamma \subsetneq D$.

Como $\gamma \subsetneq D$ y D es un cuasicuasitorneo, tenemos los siguientes casos:

Caso A. Una flecha de γ no está en D .

Dada la coloración antes mencionada tenemos tres posibles opciones:

Subcaso A.1. Los tres cambios de color se dan de tal manera que $i \neq 0$, $i \neq 1$, $j \neq i + 1$, $j \neq i + 2$ y $j + 1 \neq 0$, ver figura 3.26 a.

Si $(v_0, v_1) \notin F(D)$ o $(v_1, v_2) \notin F(D)$, entonces como D es un cuasicuasitorneo la flecha entre los vértices v_i y v_{i+2} o v_j y v_{j+2} está en D . Si la flecha entre los vértices v_i y v_{i+2} no está en D , entonces la flecha entre los vértices v_j y v_{j+2} está en D y viceversa.

Para los casos cuando $(v_i, v_{i+1}) \notin F(D)$ o $(v_{i+1}, v_{i+2}) \notin F(D)$ y cuando $(v_j, v_{j+1}) \notin F(D)$ o $(v_{j+1}, v_{j+2}) \notin F(D)$ se sigue un razonamiento análogo al caso anterior.

Así tenemos que existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

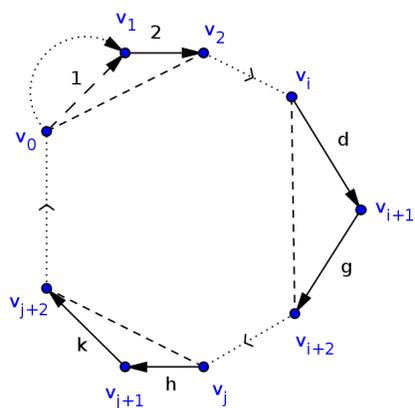


Figura 3.26:

Subcaso A.2. Dos cambios de color son consecutivos, es decir, se dan de la forma $i = 1$ y $j \neq i + 1$, ver figura 3.27.

Nuestros posibles casos son:

Caso i: $(v_0, v_1) \notin F(D)$,

Caso ii: $(v_1, v_2) \notin F(D)$,

Caso iii: $(v_2, v_3) \notin F(D)$,

Caso iv: $(v_j, v_{j+1}) \notin F(D)$ y

Caso v: $(v_{j+1}, v_{j+2}) \notin F(D)$.

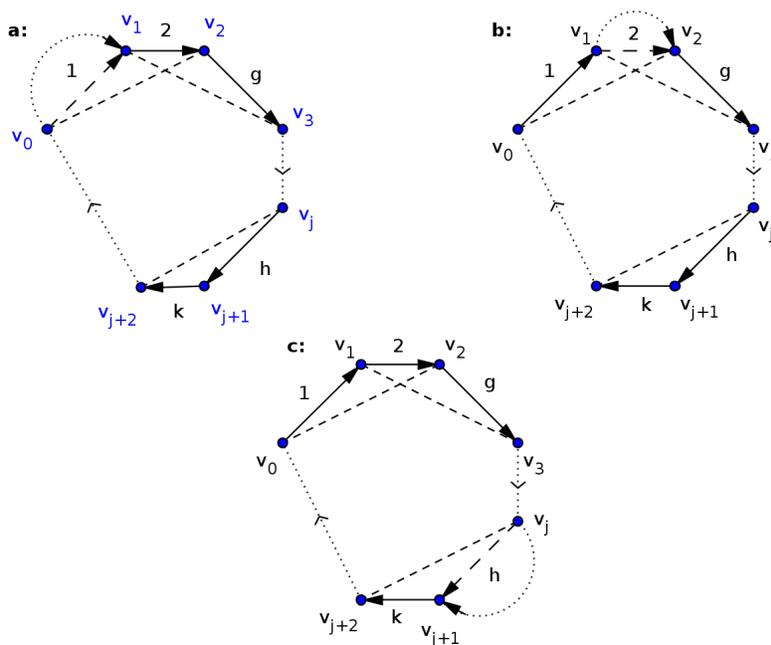


Figura 3.27:

Caso i. La flecha que no está en D es (v_0, v_1) , ver figura 3.27 **a**, entonces como D es un cuasicuasitorneo tenemos dos opciones, que $D[V(\gamma)]$ sea un cuasitorneo o sea un cuasicuasitorneo.

Si $D[V(\gamma)]$ es un cuasitorneo, entonces tenemos que todas las flechas entre los vértices no consecutivos de γ están en D y por lo tanto en $C(D)$, así tenemos que las flechas entre los vértices v_1, v_3 y los vértices v_j, v_{j+2} están en D , es decir, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Si $D[V(\gamma)]$ es un cuasicuasitorneo, entonces tenemos que una flecha entre los vértices no consecutivos de γ no está en D . Si la flecha entre los vértices v_0, v_2 o la flecha entre los vértices v_1, v_3 no están en D , entonces la flecha entre los vértices v_j, v_{j+2} está en D , es decir, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D . Si la flecha entre los vértices v_j, v_{j+2} no está en D , entonces tenemos que la flecha entre los vértices v_1, v_3 están en D , es decir, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso ii. La flecha que no está en D es (v_1, v_2) , ver figura 3.27 **b**, tenemos los siguientes casos:

- La flecha entre los vértices v_j y v_{j+2} está en D , con esto podemos asegurar que existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

- La flecha entre los vértices v_j y v_{j+2} no está en D . Como hay un cambio de color en la trayectoria (v_1, v_2, v_3) tenemos que $g \neq 2$.

Observemos que si $g \neq h$ tenemos que en la trayectoria $(v_2, v_3, \dots, v_j, v_{j+1})$ hay otro cambio de color y la flecha entre el vértice inicial y el vértice final de la trayectoria formada por este cambio de color debe estar en D , entonces existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están en D . De igual manera tenemos que si $k \neq 1$, entonces en la trayectoria $(v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_0, v_1)$ hay otro cambio de color y la flecha entre el vértice inicial y el vértice final de la trayectoria formada por este cambio de color debe estar en D , entonces existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están en D .

Nuestro peor caso sería si la trayectoria $(v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_0, v_1)$ es monocromática de color 1, es decir, $k = 1$ y la trayectoria $(v_2, v_3, \dots, v_j, v_{j+1})$ es monocromática de color g , por lo que $g \neq 1$ y $g = h$. Pues aquí no podemos asegurar un cambio de color. De esto tenemos la siguiente observación:

OBSERVACIÓN A. Si la trayectoria $(v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_0, v_1)$ es monocromática de color 1, es decir, $k = 1$ y la trayectoria $(v_2, v_3, \dots, v_j, v_{j+1})$ es monocromática de color g , entonces este caso no es posible.

Demostremos esta observación. Sabemos que las flechas entre los vértices v_0, v_2 y v_1, v_3 están en D , pues D es un cuasicuasitorneo y ya tenemos que las flechas (v_1, v_2) y la flecha entre los vértices v_j y v_{j+2} no están en D . Como la trayectoria $(v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_0, v_1)$ es monocromática de color 1, es decir, $k = 1$ y la trayectoria $(v_2, v_3, \dots, v_j, v_{j+1})$ es monocromática de color g , tenemos que $g \neq 1$ y $g = h$. Fijémonos en la flecha entre los vértices v_0 y v_2 , llamémosla q , como $\zeta(v_2) = \{2, g\}$ se tiene que $c(q) = 2$ o $c(q) = g$.

Si $c(q) = 2$, entonces tenemos lo siguiente:

Si $(v_2, v_0) \in F(D)$, entonces (v_1, v_2, v_0) es una v_1v_0 -tdm en $C(D)$, lo que implica que

en D también existe una v_1v_0 -tdm, así se tiene que $(v_0, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar.

Si $(v_0, v_2) \in F(D)$, entonces tenemos que (v_0, v_2, \dots, v_0) es un ciclo dirigido de longitud menor que la $\ell(\gamma)$, esto implica que (v_0, v_2, \dots, v_0) debe ser un ciclo dirigido con al menos un flecha simétrica. Como γ es asimétrico, entonces $(v_0, v_2) \in \text{Sim}(C(D))$, es decir, existe una v_2v_0 -tdm en D , llamémosla ρ . $c(\rho) \neq 1$, de lo contrario v_2 no tendría vecindad bicolor, pues $\zeta(v_2) = \{2, g\}$ y $g \neq 1$. $c(\rho) \neq 2$, pues como $(v_1, v_2) \cup (v_2, \rho, v_0)$ es un v_1v_0 -camino dirigido monocromático en $C(D)$, entonces en D también debe existir un v_1v_0 -camino monocromático, el cual contiene una v_1v_0 -tdm, por lo que $(v_0, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar. Por último $c(\rho) \neq g$, de lo contrario v_0 no tendría vecindad bicolor, pues $\zeta(v_0) = \{1, 2\}$ y $g \notin \{1, 2\}$. Por tanto esto no puede pasar.

Si $c(q) = g$, entonces tenemos lo siguiente:

Si $(v_2, v_0) \in F(D)$, entonces denotemos a la trayectoria entre v_1 y v_2 por $\alpha = (b_0 = v_1, b_1, \dots, b_s = v_2)$, la cual es de color 2. Recordemos que $g \notin \{1, 2\}$.

Observemos que la flecha entre los vértices v_0 y b_i , $i = 0, 1, \dots, s - 1$, es de color 1.

Supongamos por contradicción que existe un k mínimo tal que la flecha entre v_0 y b_k , llamémosla p , no es de color 1. $c(p) \neq 2$, pues de lo contrario no se cumpliría con la condición de vecindad bicolor en v_0 , entonces $c(p) = g$. Como k es mínima tenemos que la flecha entre v_0 y b_{k-1} es de color 1, como $c(v_0, b_0) = 1$, es decir, $k > 1$ tenemos que b_{k-1} existe. Así tenemos que $D[\{v_0, v_{k-1}, v_k\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo cual no puede pasar.

Por lo tanto la flecha entre los vértices v_0 y b_i , $i = 0, 1, \dots, s - 1$, es de color 1. De esto tenemos que $D[\{v_0, b_{s-1}, v_2\}] \cong \mathbb{T}_3$, en D , lo cual no puede suceder.

Si $(v_0, v_2) \in F(D)$, entonces fijémonos en las flechas entre v_0 y los vértices de la trayectoria monocromática entre v_1 y v_2 , pues $(v_1, v_2) \notin F(D)$, llamémosla $\alpha = (b_0 = v_1, b_1, \dots, b_r = v_2)$.

Observemos que la flecha entre los vértices v_0 y b_i , $i = 0, 1, \dots, s - 1$, es de color 1.

Supongamos por contradicción que existe un k mínimo tal que la flecha entre v_0 y b_k , llamémosla q , no es de color 1. $c(q) \neq 2$, pues de lo contrario no se cumpliría con la condición de vecindad bicolor en v_0 , entonces $c(q) = g$. Como k es mínima tenemos que la flecha entre v_0 y b_{k-1} es de color 1, como $c(v_0, b_0) = 1$, es decir, $k > 1$ tenemos que b_{k-1} existe. Así tenemos que $D[\{v_0, v_{k-1}, v_k\}] \cong \mathbb{T}_3$ en D , lo cual no puede pasar.

Por lo tanto la flecha entre los vértices v_0 y b_i , $i = 0, 1, \dots, s - 1$, es de color 1. De esto tenemos que $D[\{v_0, b_{s-1}, v_2\}] \cong \mathbb{T}_3$, en D , lo cual no puede suceder.

Por lo tanto, este caso no se puede dar.

Caso iii. Si la flecha que no está en D es (v_2, v_3) , entonces se sigue un razonamiento similar al caso (i).

Caso iv. La flecha que no está en D es (v_j, v_{j+1}) , ver figura 3.27 **c**, entonces como D es un cuasicuasitorneo tenemos dos opciones, que $D[V(\gamma)]$ sea un cuasitorneo o sea un cuasicuasitorneo.

Si $D[V(\gamma)]$ es un cuasitorneo, entonces tenemos que todas las flechas entre los vértices no consecutivos de γ están en D y por lo tanto en $C(D)$, así tenemos que las flechas entre los vértices v_0, v_2 y los vértices v_1, v_3 están en D , es decir, existe al menos

un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Si $D[V(\gamma)]$ es un cuasicuasitorneo, entonces tenemos que una flecha entre los vértices no consecutivos de γ no está en D . Si la flecha entre los vértices v_0 y v_2 no está en D , entonces flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D , es decir, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D . Si la flecha entre los vértices v_1 y v_3 no está en D , entonces tenemos que la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D , es decir, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso v. Si la flecha que no está en D es (v_{j+1}, v_{j+2}) , entonces tenemos un razonamiento similar al caso anterior.

Así podemos asegurar que existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Subcaso A.3. Los tres cambios de color son consecutivos, es decir, se dan de la forma $i = 1$ y $j = i + 1$, ver figura 3.28.

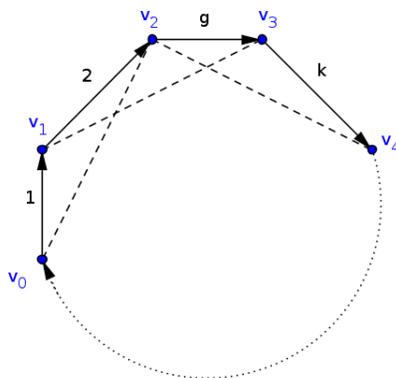


Figura 3.28:

Si $D[V(\gamma)]$ es un cuasitorneo, entonces tenemos lo siguiente:

i) Si $(v_0, v_1) \notin F(D)$ o $(v_3, v_4) \notin F(D)$, entonces tenemos que la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D , es decir, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

ii) Si $(v_1, v_2) \notin F(D)$, entonces tenemos que la flecha entre los vértices v_2 y v_4 está en D , es decir, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

iii) Si $(v_2, v_3) \notin F(D)$, entonces tenemos que la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D , es decir, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Por lo tanto, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Si $D[V(\gamma)]$ es un cuasicuasitorneo, entonces tenemos lo siguiente:

i) Si la flecha de γ que no está en D es (v_0, v_1) , entonces tenemos las siguientes posibilidades:

- La flecha entre los vértices v_0 y v_2 no está en D , pero tenemos que la flecha entre los vértices v_2 y v_4 está en D .

- La flecha entre los vértices v_1 y v_3 no está en D , pero tenemos que la flecha entre los vértices v_2 y v_4 está en D .

- La flecha entre los vértices v_2 y v_4 no está en D , pero tenemos que la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D .

Por lo tanto, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

ii) Si la flecha de γ que no está en D es (v_1, v_2) , entonces tenemos las siguientes posibilidades:

- La flecha entre los vértices v_0 y v_2 no está en D , pero tenemos que la flecha entre los vértices v_2 y v_4 está en D .

- La flecha entre los vértices v_1 y v_3 no está en D , pero tenemos que la flecha entre los vértices v_2 y v_4 está en D .

- La flecha entre los vértices v_2 y v_4 no está en D , para este caso tenemos lo siguiente:

a) Si la trayectoria $\beta = (v_3, v_4, \dots, v_0, v_1)$ no es monocromática, entonces hay un cambio de color en β y la flecha entre el vértice inicial y el vértice final de este cambio de color está en D , es decir, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

b) Si la trayectoria $\beta = (v_3, v_4, \dots, v_0, v_1)$ es monocromática, entonces tenemos que $k = 1$ y $g \notin \{1, 2\}$. También sabemos que la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D , fijémonos en esta flecha y llamémosla q . A la trayectoria entre los vértices v_1 y v_2 llamémosla α . Así tenemos que $\zeta(v_2) = \{2, g\}$, entonces $c(q) = 2$ o $c(q) = g$. Podemos notar que tenemos el mismo caso que en la *observación (A)* del subcaso ($\mathcal{A}.2$ (ii)), y ya sabemos que este caso no puede pasar.

Por lo tanto, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

iii) Si $(v_2, v_3) \notin F(D)$, entonces tenemos las siguientes posibilidades:

- La flecha entre los vértices v_1 y v_3 no está en D , pero tenemos que la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D .

- La flecha entre los vértices v_0 y v_2 no está en D , pero tenemos que la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D .

- La flecha entre los vértices v_2 y v_4 no está en D , para este caso tenemos lo siguiente:

a) Si la trayectoria $\beta = (v_3, v_4, \dots, v_0, v_1)$ no es monocromática, entonces hay un cambio de color en β y la flecha entre el vértice inicial y el vértice final de este cambio de color está en D , es decir, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

b) Si la trayectoria $\beta = (v_3, v_4, \dots, v_0, v_1)$ es monocromática, entonces tenemos que $k = 1$ y $g \notin \{1, 2\}$. También sabemos que la flecha entre los vértices v_2 y v_4 está en D , fijémonos en esta flecha y llamémosla q . Y a la trayectoria entre los vértices v_2 y v_3 llamémosla α . Así tenemos que $\zeta(v_2) = \{2, g\}$, entonces $c(q) = 2$ o $c(q) = g$. Podemos

notar que tenemos el mismo caso que en la *observación (A)*, y ya sabemos que este caso no puede pasar.

iv) Si $(v_3, v_4) \notin F(D)$, entonces tenemos las siguientes posibilidades:

- La flecha entre los vértices v_0 y v_2 no está en D , pero tenemos que la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D .

- La flecha entre los vértices v_1 y v_3 no está en D , pero tenemos que la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D .

- La flecha entre los vértices v_2 y v_4 no está en D , pero tenemos que la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D .

Por lo tanto, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Por lo tanto si tenemos los 3 cambios de color de γ consecutivos siempre podemos asegurar que existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso \mathfrak{B} . Dos flechas de γ no están en D .

Dada la coloración antes mencionada tenemos tres posibles opciones:

Subcaso $\mathfrak{B}.1$. Los tres cambios de color se dan de tal manera que $i \neq 0, 1, j \neq i + 1, i + 2$ y $j + 1 \neq 0$, ver figura 3.29.

Podemos observar en la figura 3.29 que en este caso tenemos tres Δ en $C(D)$ y tenemos que sólo dos flechas de γ no están en D , así tenemos que al menos un Δ de $C(D)$ tiene todas sus flechas en D .

Por lo tanto, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

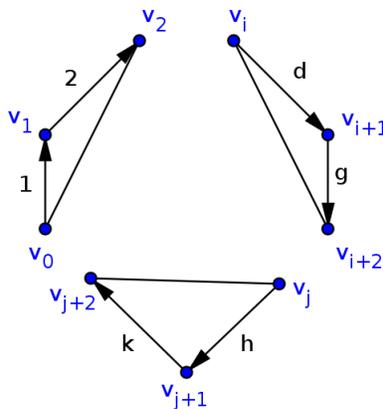


Figura 3.29:

Subcaso $\mathfrak{B}.2$. Dos cambios de color son consecutivos, es decir, se dan de la forma $i = 1$ y $j \neq i + 1$, ver figura 3.30.

De esto tenemos los siguientes casos:

- Caso i:* $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2)\} \not\subseteq F(D)$,
Caso ii: $\{(v_0, v_1), (v_2, v_3)\} \not\subseteq F(D)$,
Caso iii: $\{(v_0, v_1), (v_j, v_{j+1})\} \not\subseteq F(D)$,
Caso iv: $\{(v_0, v_1), (v_{j+1}, v_{j+2})\} \not\subseteq F(D)$,
Caso v: $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\} \not\subseteq F(D)$,
Caso vi: $\{(v_1, v_2), (v_j, v_{j+1})\} \not\subseteq F(D)$,
Caso vii: $\{(v_1, v_2), (v_{j+1}, v_{j+2})\} \not\subseteq F(D)$,
Caso viii: $\{(v_2, v_3), (v_j, v_{j+1})\} \not\subseteq F(D)$,
Caso ix: $\{(v_2, v_3), (v_{j+1}, v_{j+2})\} \not\subseteq F(D)$,
Caso x: $\{(v_j, v_{j+1}), (v_{j+1}, v_{j+2})\} \not\subseteq F(D)$.

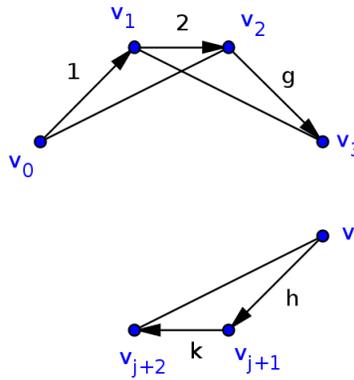


Figura 3.30:

Caso i. Si $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2)\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_j y v_{j+2} está en D y por lo tanto, existe al menos un \triangle en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso ii. Si $\{(v_0, v_1), (v_2, v_3)\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_j y v_{j+2} está en D y por lo tanto, existe al menos un \triangle en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso iii. Si $\{(v_0, v_1), (v_j, v_{j+1})\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D y por lo tanto, existe al menos un \triangle en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso iv. Si $\{(v_0, v_1), (v_{j+1}, v_{j+2})\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D y por lo tanto, existe al menos un \triangle en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso v. Si $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_j y v_{j+2} está en D y por lo tanto, existe al menos un \triangle en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso vi. Si $\{(v_1, v_2), (v_j, v_{j+1})\} \not\subseteq F(D)$, entonces tenemos los siguientes casos:

- Si las trayectorias $(v_2, v_3, \dots, v_j, v_{j+1})$ o $(v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_0, v_1)$ no son monocromáticas, entonces entre los vértices de éstas hay otro cambio de color, y todas las flechas

entre los vértices no consecutivos de estas trayectorias están en D , por lo tanto existe al menos un \triangle en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

- Si las trayectorias $(v_2, v_3, \dots, v_j, v_{j+1})$ y $(v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_0, v_1)$ son monocromáticas, entonces tenemos que $g = h$, $k = 1$ y $h \notin \{1, 2\}$. En este caso no tenemos ni una flecha entre el vértice inicial y el vértice final de la trayectoria formada por un cambio de color en D . Podemos observar que tenemos el mismo caso que en la *observación (A)* del subcaso (A.2 (ii)), así tenemos que este caso no puede suceder.

Caso vii. Si $\{(v_1, v_2), (v_{j+1}, v_{j+2})\} \not\subseteq F(D)$, entonces tenemos el mismo análisis que en el caso (vi).

Caso viii. Si $\{(v_2, v_3), (v_j, v_{j+1})\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D y por lo tanto, existe al menos un \triangle en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso ix. Si $\{(v_2, v_3), (v_{j+1}, v_{j+2})\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D y por lo tanto, existe al menos un \triangle en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso x: Si $\{(v_j, v_{j+1}), (v_{j+1}, v_{j+2})\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D y por lo tanto, existe al menos un \triangle en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Por lo tanto si hay dos cambios de color consecutivos podemos asegurar que existe al menos un \triangle en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Subcaso B.3. Tres cambios de color son consecutivos, es decir, se dan de la forma $i = 1$ y $j = i + 1$, ver figura 3.31.

De esto tenemos los siguientes casos:

Caso i: $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2)\} \not\subseteq F(D)$,

Caso ii: $\{(v_0, v_1), (v_2, v_3)\} \not\subseteq F(D)$,

Caso iii: $\{(v_0, v_1), (v_3, v_4)\} \not\subseteq F(D)$,

Caso iv: $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\} \not\subseteq F(D)$,

Caso v: $\{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\} \not\subseteq F(D)$ y

Caso vi: $\{(v_2, v_3), (v_3, v_4)\} \not\subseteq F(D)$.

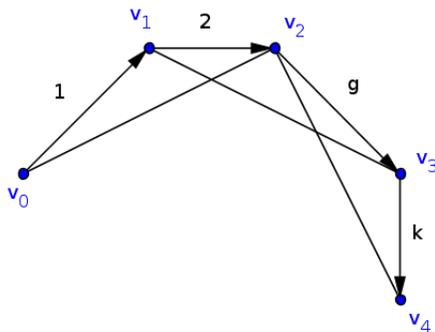


Figura 3.31:

Caso i. Si $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2)\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_2 y v_4 está en D y por lo tanto, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso ii. Si $\{(v_0, v_1), (v_2, v_3)\} \not\subseteq F(D)$, entonces tenemos lo siguiente:

- Si $(v_3, v_4) \cup (v_4, \gamma, v_0) \cup (v_0, v_1)$ no es una trayectoria dirigida monocromática, entonces tenemos otro cambio de color y por lo tanto existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

- Si $(v_3, v_4) \cup (v_4, \gamma, v_0) \cup (v_0, v_1)$ es una v_3v_1 -tdm de color 1. De esto tenemos que $k = 1$, $g \notin \{1, 2\}$, como D es un cuasicuasitorneo sabemos que la flecha entre v_2 y v_4 está en las flechas de D , la cual puede ser de color 2 o g . Si nos fijamos en las flechas entre v_4 y los vértices de la v_2v_3 -tdm vemos que todas deben ser de color 1, podemos observar que haciendo un análisis análogo al de la *observación (A)* del subcaso (A.2 (ii)) tenemos que este caso no se puede dar.

Caso iii. Si $\{(v_0, v_1), (v_3, v_4)\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_1 y v_3 está en D y por lo tanto, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Caso iv. Si $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\} \not\subseteq F(D)$, entonces tenemos lo siguiente:

- Si la trayectoria $(v_3, v_4, \dots, v_0, v_1)$ no es monocromática, entonces tenemos que hay otro cambio de color en D y por lo tanto, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

- Si la trayectoria $(v_3, v_4, \dots, v_0, v_1)$ es monocromática, es decir, $k = 1$ y $g \notin \{1, 2\}$, entonces tenemos lo siguiente:

Fijémonos en la flecha entre los vértices v_0 y v_2 , llamémosla q , notemos que $c(q) = 2$ o $c(q) = g$ pues $\zeta(v_2) = \{2, g\}$.

Podemos observar que tenemos el mismo caso que en la *observación (A)* del subcaso (A.2 (ii)), así tenemos que esto no puede suceder.

Caso v. Si $\{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\} \not\subseteq F(D)$, entonces tenemos el mismo análisis que en el caso (iv).

Caso vi. Si $\{(v_2, v_3), (v_3, v_4)\} \not\subseteq F(D)$, entonces la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en D y por lo tanto, existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Por lo tanto si hay tres cambios de color consecutivos podemos asegurar que existe al menos un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D si $\gamma \subsetneq D$.

Así, del caso \mathcal{A} y \mathfrak{B} podemos asegurar un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Por lo tanto del caso (2.I) y del caso (2.II) tenemos que existe un Δ en $C(D)$ tal que todas sus flechas están contenidas en D .

Supongamos sin pérdida de generalidad que la flecha entre los vértices v_0 y v_2 está en las flechas de D .

Afirmación 3. $(v_2, v_0) \notin F(D)$.

Supongamos por contradicción que $(v_2, v_0) \in F(D)$. Por hipótesis sabemos que D no contiene a \mathbb{T}_3 , entonces $c(v_2, v_0) = 1$ o $c(v_2, v_0) = 2$.

Si $c(v_2, v_0) = 1$, entonces (v_2, v_0, v_1) es una v_2v_1 -tdm, por lo que $(v_2, v_1) \in \text{Sim}(C(D))$ lo que es una contradicción.

Si $c(v_2, v_0) = 2$, tenemos que (v_1, v_2, v_0) es una v_1v_0 -tdm, entonces $(v_1, v_0) \in \text{Sim}(C(D))$, lo cual no puede pasar. Por lo tanto $(v_2, v_0) \notin F(D)$.

De esta afirmación se tiene que $(v_0, v_2) \in F(D)$.

Afirmación 4. Existe una v_2v_0 -tdm de longitud al menos 2.

De la afirmación (1) tenemos que $(v_2, v_0) \notin F(D)$. Si $(v_0, v_2) \in F(C(D))$ no es simétrica, entonces $(v_0, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_0)$ es un ciclo dirigido asimétrico de longitud menor que la de γ , lo cual no puede suceder pues tomamos a γ como el ciclo dirigido asimétrico de longitud mínima. Por lo tanto $(v_2, v_0) \in F(C(D))$, es decir, existe una v_2v_0 -tdm de longitud al menos dos en D , llamémosla ρ .

Afirmación 5. ρ no es de color 1.

Supongamos lo contrario, es decir, ρ es de color 1. Así tenemos que $(v_2, \rho, v_0) \cup (v_0, v_1)$ es una v_2v_1 -tdm, de lo cual tenemos que $(v_2, v_1) \in F(C(D))$ contradiciendo el hecho de que γ es un ciclo asimétrico. Por lo tanto ρ no es de color 1.

Afirmación 6. ρ no es de color 2.

Supongamos lo contrario, es decir, ρ es de color 2. Entonces $(v_1, v_2) \cup (v_2, \rho, v_0)$ es una v_1v_0 -tdm, así se tiene que $(v_1, v_0) \in F(C(D))$, lo que contradice que γ es un ciclo asimétrico. Por lo tanto ρ no es de color 2.

Así de las afirmaciones (5) y (6) tenemos que el color de ρ tiene que ser de un color distinto a 1 y 2, digamos 3.

Si $c(v_0, v_2) = 2$, por la conclusión anterior y el hecho de que $c(v_0, v_1) = 1$, tenemos que $\zeta(v_0) = \{1, 2, 3\}$, lo cual no puede pasar.

Si $c(v_0, v_2) = 1$, por la conclusión anterior y el hecho de que $c(v_1, v_2) = 2$, tenemos que $\zeta(v_2) = \{1, 2, 3\}$, lo cual no puede pasar.

Como D no tiene a T_3^3 , entonces éstos son los únicos casos posibles.

Por lo tanto cada ciclo en $C(D)$ tiene al menos una flecha simétrica. \square

Veamos el porque le pedimos a nuestro cuasicuasitorneo las condiciones dadas en el teorema.

Observación 4. Si en un cuasicuasitorneo D sus vértices no tienen a lo más vecindad bicolor, no contiene C_3^3 ni a T_3^3 , no contiene como subdigráficas inducidas a las dadas en la figura 3.9, donde todo ciclo $\gamma \subseteq C(D)$ de longitud al menos 5 tenga al menos 3 cambios de color, entonces no podemos asegurar que todo ciclo en $C(D)$ tiene al menos una flecha simétrica. En la figura 3.32 tenemos un cuasicuasitorneo que cumple todo lo anterior y el ciclo $\gamma = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1) \subseteq C(D)$ no tiene flechas simétricas.

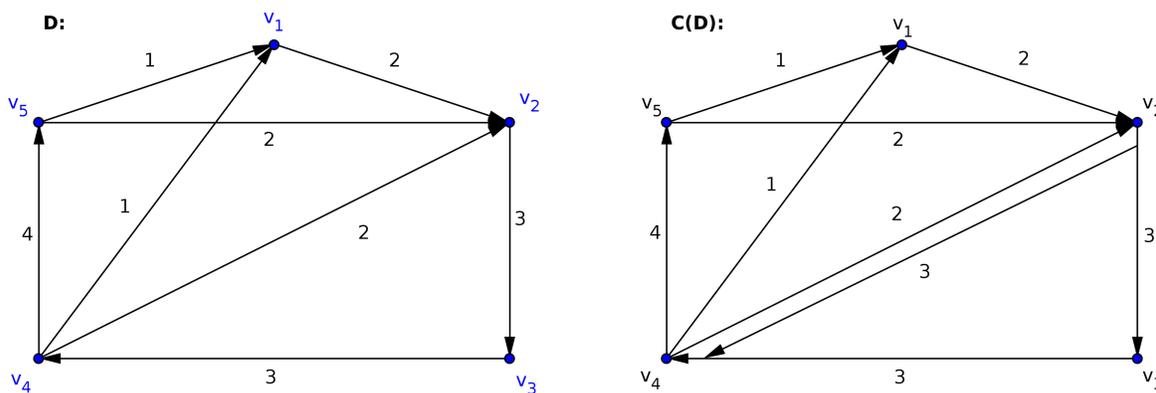


Figura 3.32: D no cumple la condición 1 del teorema 15.

Observación 5. Si un cuasicuasitorneo D con vecindad a lo más bicolor contiene a T_3^3 y a C_3^3 , no contiene como subdigráficas inducidas a las dadas en la figura 3.9, donde todo ciclo $\gamma \subseteq C(D)$ de longitud al menos 5 tenga al menos 3 cambios de color, entonces no podemos asegurar que en $C(D)$ todo ciclo tenga al menos una flecha simétrica. En la figura 3.32 tenemos un cuasicuasitorneo con vecindad bicolor que contiene a $C_3^3 = (v_2, v_3, v_4, v_2)$ y $T_3^3 = D[\{v_0, v_1, v_2\}]$ que cumple todo lo anterior y el ciclo $\gamma = (v_0, v_2, v_3, v_4, v_0) \subseteq C(D)$ no tiene flechas simétricas.

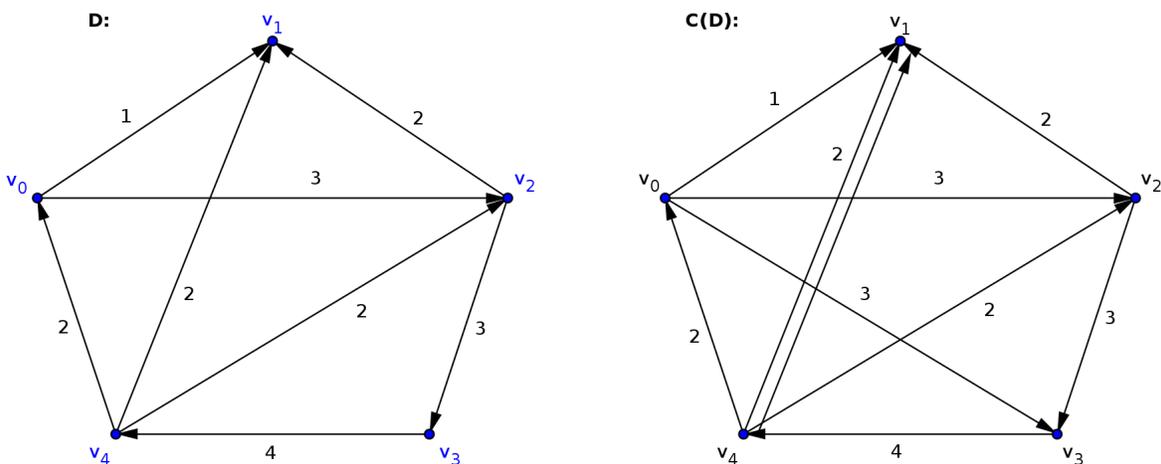


Figura 3.33: D no cumple la condición 2 del teorema 15.

Observación 6. Si un cuasicuasitorneo D con vecindad a lo más bicolor, que no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 , contiene como subdigráfica inducida al ciclo α de la figura 3.34 (condición 3 del teorema 15, figura 3.9 a), pero no contiene como subdigráficas inducidas a las digráficas dadas en la figura 3.9 b, c, d y e, donde todo ciclo $\gamma \subseteq C(D)$ de longitud al menos 5 tenga al menos 3 cambios de color, entonces no podemos asegurar que en

$C(D)$ todo ciclo tenga al menos una flecha simétrica. En la figura 3.34 tenemos un cuasicuasitorneo D que cumple con todo lo anterior y $\gamma = (v_0, v_2, v_3, v_4, v_0)$ es isomorfo al ciclo α de la figura 3.34. Como las flechas entre los vértices de γ y $\{v_1, v_5, v_6, v_7\}$ son de la forma (v_i, v_j) con $i = 0, 2, 3, 4$ y $j = 1, 5, 6, 7$ y no hay trayectorias dirigidas monocromáticas entre el vértice final y el vértice inicial de las flechas de γ , podemos observar que en $C(D)$ $\gamma = (v_0, v_2, v_3, v_4, v_0)$ se conserva, es decir, no tiene flechas simétricas.

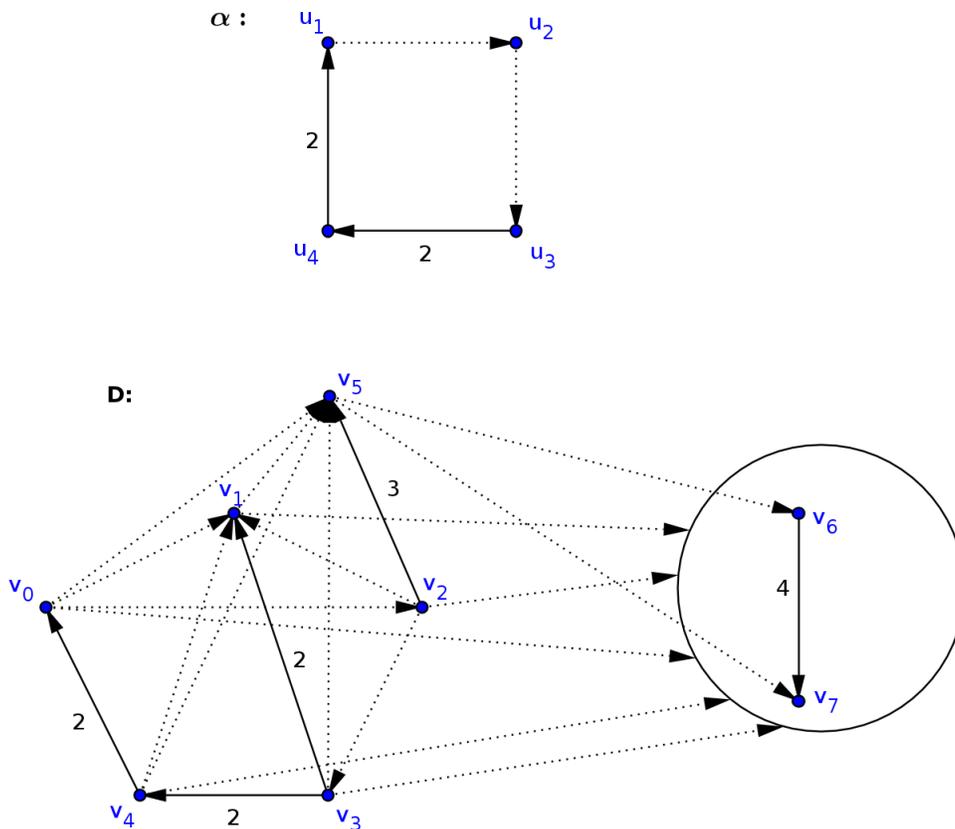


Figura 3.34: D no cumple la condición 3 del teorema 15. Las flechas de la forma $\cdots \blacktriangleright$ son de color 1.

Observación 7. Si un cuasicuasitorneo D con vecindad a lo más bicolor, que no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 , contiene como subdigráfica inducida al ciclo α de la figura 3.35 (condición 3 del teorema 15, figura 3.9 b), pero no contiene como subdigráficas inducidas a las digráficas dadas en la figura 3.9 a, c, d y e, donde todo ciclo $\gamma \subseteq C(D)$ de longitud al menos 5 tenga al menos 3 cambios de color, entonces no podemos asegurar que en $C(D)$ todo ciclo tenga al menos una flecha simétrica. En la figura 3.35 tenemos un cuasicuasitorneo D que cumple con todo lo anterior y $\gamma = (v_0, v_2, v_3, v_4, v_0)$ es isomorfo a α de la figura 3.35. Como no hay trayectorias dirigidas monocromáticas entre el vértice inicial y el final de las flechas de γ y las flechas entre los vértices de γ y $\{v_1, v_5, v_6, v_7\}$

son de la forma (v_i, v_j) con $i = 0, 2, 3, 4$ y $j = 1, 5, 6, 7$, podemos observar que en $C(D)$ $\gamma = (v_0, v_2, v_3, v_4, v_0)$ no tiene flechas simétricas.

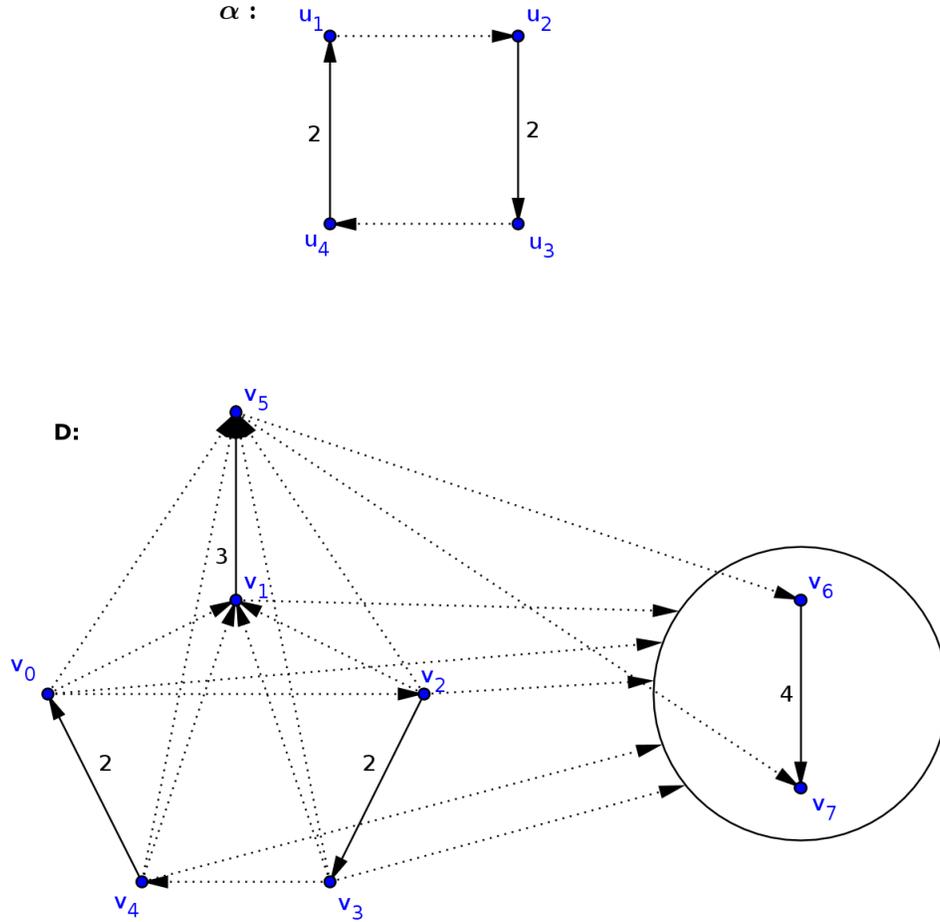


Figura 3.35: D no cumple la condición 3 del teorema 15. Las flechas de la forma $\cdots \blacktriangleright$ son de color 1.

Observación 8. Si un cuasicuasitorneo D con vecindad a lo más bicolor, que no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 , contiene como subdigráfica inducida la digráfica D' dada en la figura 3.36 (condición 3 del teorema 15, figura 3.9 c), pero no contiene como subdigráficas inducidas a las digráficas dadas en la figura 3.9 a, b, d y e, donde todo ciclo $\gamma \subseteq C(D)$ de longitud al menos 5 tenga al menos 3 cambios de color, entonces no podemos asegurar que en $C(D)$ todo ciclo tenga al menos una flecha simétrica. En la figura 3.36 tenemos un cuasicuasitorneo D que cumple con todo lo anterior y $D[\{v_0, v_2, v_3, v_4\}]$ es isomorfo a D' de la figura 3.36. Como no hay trayectorias dirigidas monocromáticas entre el vértice final y el vértice inicial de las flechas del ciclo $\gamma = (v_0, v_2, v_3, v_4, v_0)$ y las flechas entre los vértices de γ y $\{v_1, v_5, v_6\}$ son de la forma (v_i, v_j) con $i = 0, 2, 3, 4$ y $j = 1, 5, 6, 7$, podemos observar que en $C(D)$ $\gamma = (v_0, v_2, v_3, v_4, v_0)$ no tiene flechas simétricas.

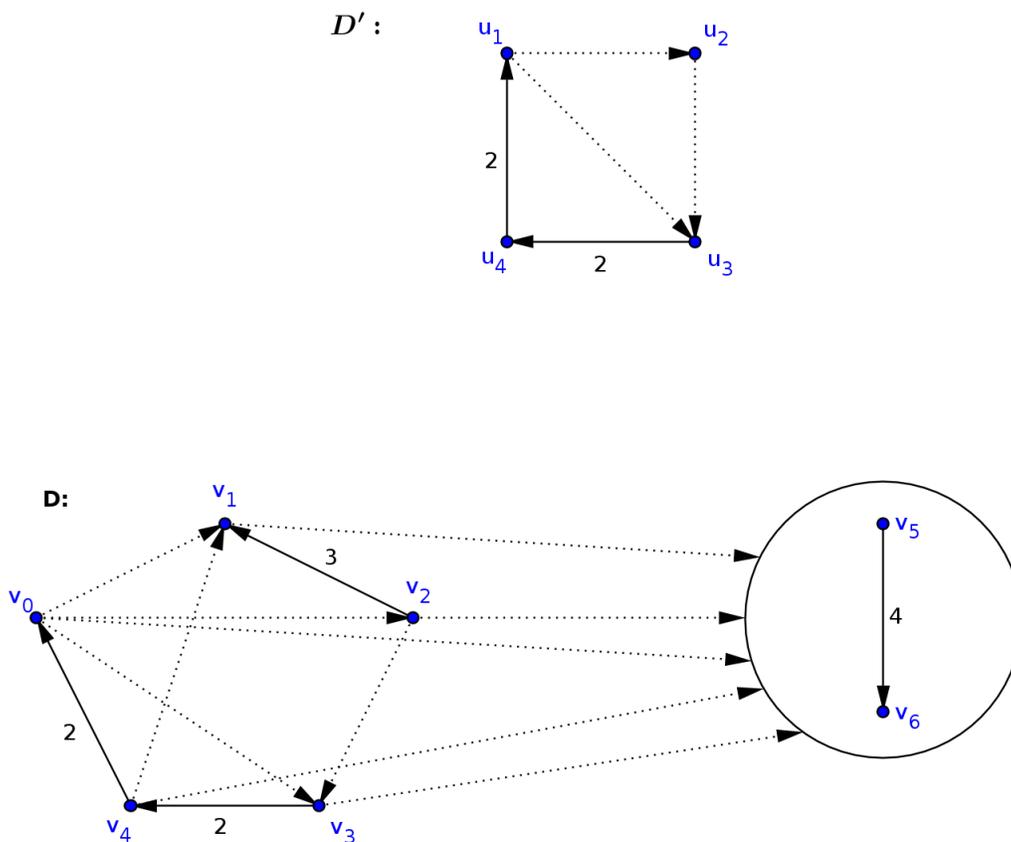


Figura 3.36: D no cumple con la condición 3 del teorema 15. Las flechas de la forma $\cdots \blacktriangleright$ son de color 1.

Observación 9. Si un cuasicuasitorneo D con vecindad a lo más bicolor, que no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 , contiene como subdigráfica inducida la digráfica D' dada en la figura 3.36 (condición 3 del teorema 15, figura 3.9 **d**), pero no contiene como subdigráficas inducidas a las digráficas dadas en la figura 3.9 **a**, **b**, **c** y **e**, donde todo ciclo $\gamma \subseteq C(D)$ de longitud al menos 5 tenga al menos 3 cambios de color, entonces no podemos asegurar que en $C(D)$ todo ciclo tenga al menos una flecha simétrica. En la figura 3.37 tenemos un cuasicuasitorneo D que cumple con todo lo anterior y $D[\{v_0, v_2, v_3, v_4\}]$ es isomorfo a la digráfica D' de la figura 3.37. Como no hay trayectorias dirigidas monocromáticas entre el vértice final y el vértice inicial de las flechas del ciclo $\gamma = (v_0, v_2, v_3, v_4, v_0)$ y las flechas entre los vértices de γ y $\{v_1, v_5, v_6\}$ son de la forma (v_i, v_j) con $i = 0, 2, 3, 4$ y $j = 1, 5, 6$, podemos observar que en $C(D)$ $\gamma = (v_0, v_2, v_3, v_4, v_0)$ no tiene flechas simétricas.

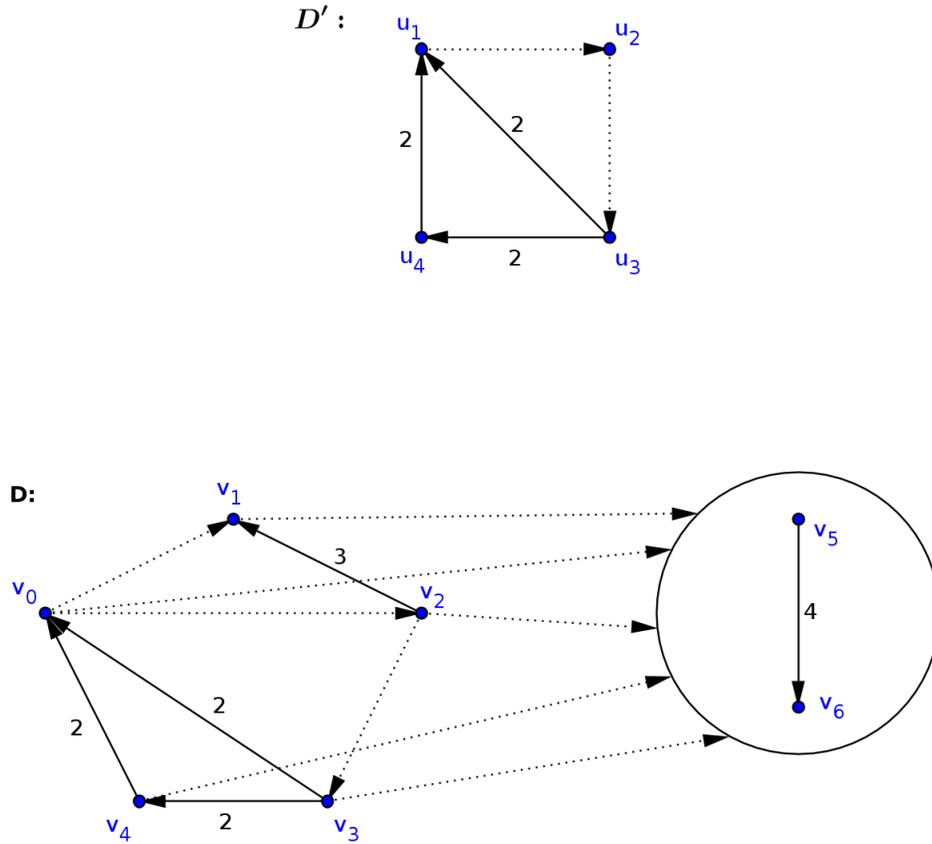


Figura 3.37: D no cumple con la condición 3 del teorema 15. Las flechas de la forma $\cdots \blacktriangleright$ son de color 1.

Observación 10. Si un cuasicuasitorneo D con vecindad a lo más bicolor, que no contiene a T_3^3 ni a C_3^3 , contiene como subdigráfica inducida al ciclo α de la figura 3.36 (condición 3 del teorema 15, figura 3.9 **d**), pero no contiene como subdigráficas inducidas a las digráficas dadas en la figura 3.9 **a**, **b**, **c** y **e**, donde todo ciclo $\gamma \subseteq C(D)$ de longitud al menos 5 tenga al menos 3 cambios de color, entonces no podemos asegurar que en $C(D)$ todo ciclo tenga al menos una flecha simétrica. En la figura 3.38 tenemos un cuasicuasitorneo D que cumple con todo lo anterior y $\gamma = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ es isomorfo al ciclo α de la figura 3.36. Como no hay trayectorias dirigidas monocromáticas entre el vértice final y el vértice inicial de las flechas del ciclo $\gamma = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ y las flechas entre los vértices de γ y $\{v, u\}$ son de la forma (v_i, k) con $i = 0, 1, 2, 3$ y $k = u, v$, podemos observar que en $C(D)$ $\gamma = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ no tiene flechas simétricas.

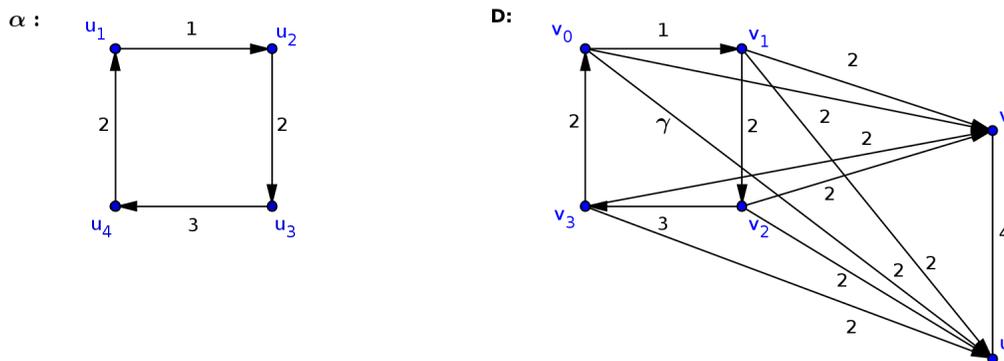


Figura 3.38: $\gamma = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_0)$ 3-coloreado.

Observación 11. Si en un cuasicuasitorneo D se tiene que $C(D)$ tiene contenido un ciclo dirigido γ con sólo dos cambios de color y cumpla con las hipótesis 1, 2 y 3 del teorema 15, no podemos asegurar que todos los ciclos en $C(D)$ tengan al menos una flecha simétrica. Como podemos observar en la figura 3.39 tenemos un cuasicuasitorneo donde no hay flechas entre los vértices v_1 y v_2 , y entre los vértices v_4 y v_5 , al construir la cerradura de D tenemos que $\{(v_1, v_2), (v_4, v_5)\} \subseteq F(C(D))$, las cuales forman el ciclo $\gamma = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1)$ en $C(D)$, el cual sólo tiene 2 cambios de color en $C(D)$ y no tiene flechas simétricas. Las flechas entre los vértices de γ y $\{v_8, \dots, v_{13}\}$ son de la forma (v_i, v_j) donde $i = 1, 2, \dots, 7$ y $j = 8, 9, \dots, 13$. Así se tiene que $\gamma \subseteq C(D)$ no tiene ninguna flecha simétrica.

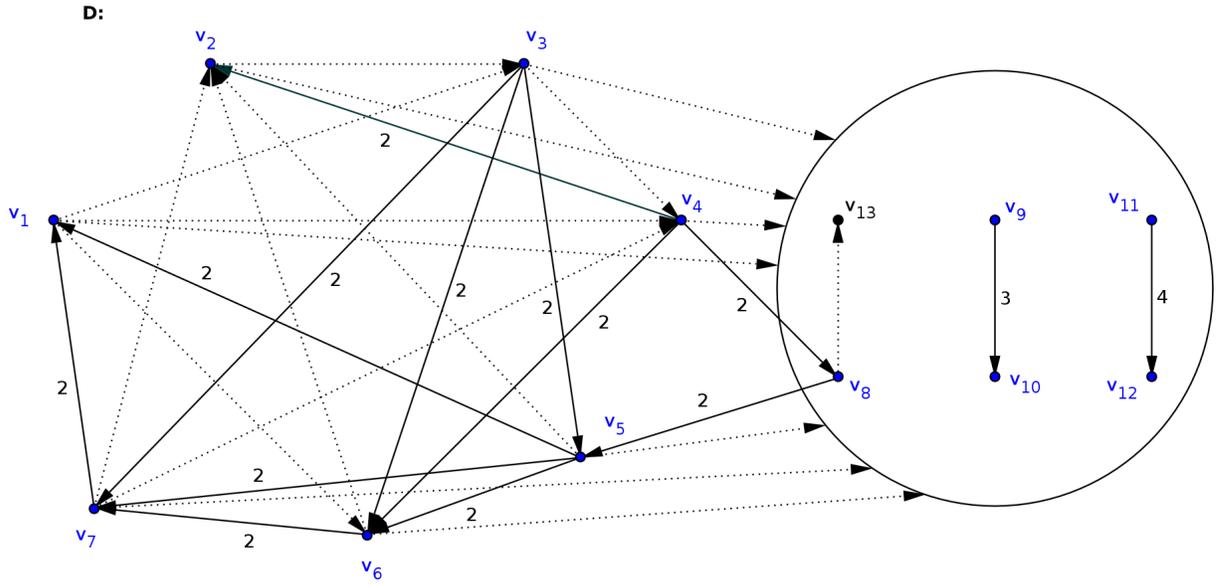


Figura 3.39: $\gamma = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_1)$. Las flechas de la forma $\cdots \blacktriangleright$ son de color 1.

Teorema 16. *Si D es un cuasicuasitorneo m -coloreado con $m \geq 4$, $p \geq 4$, $|\zeta(v)| \leq 2$ para todo v en los vértices de D , sin T_3^3 ni C_3^3 , y tal que todo ciclo dirigido γ en $C(D)$ de longitud mayor o igual a 5 tenga al menos 3 cambios de color, entonces D tiene un NTDM.*

Demostración. Notemos que las hipótesis de este teorema cumple con las hipótesis del teorema 15, por lo tanto sabemos que todo ciclo dirigido en $C(D)$ tiene al menos una flecha simétrica, así por el teorema 2 tenemos que $C(D)$ tiene núcleo y por el teorema 4 podemos concluir que D tiene un NTDM. \square

En base a los teoremas 9 y 12 vistos en el capítulo 2 demostrados por Hortensia Galeana Sánchez en [2] nos hacemos la pregunta:

Si a un cuasicuasitorneo D m -coloreado le pedimos la condición de que toda subdigráfica propia inducida tenga un NTDM, entonces ¿ D cumple alguna de las siguientes condiciones?:

- a. D tiene un NTDM,
- b. Existe un ciclo $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ tal que $\{w, x, y\} \subseteq V(\gamma)$ o $\{v, w, x, y\} \subseteq V(\gamma)$, donde v y w, x y y son los vértices en D que no son adyacentes, donde $x = w$ o $x \neq w$.

Al tratar de demostrar este resultado para cuasicuasitorneos surgió un problema pues en el teorema 9 dado por Hortensia Galeana Sánchez pide subdigráficas inducidas propias tal que éstas sean torneos, pero en nuestro caso pueden ser torneos y cuasitorneos, por lo que se generan muchos casos, queda abierto utilizar este resultado para demostrar bajo estas condiciones que un cuasicuasitorneo tiene NTDM o dar un contraejemplo.

Conclusiones

Este trabajo estuvo enfocado principalmente a encontrar condiciones para asegurar la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en cuasicuasitorneos. Para la pregunta hecha por Sands, Sauer y Woodrow en [9] y el resultado dado por Shen Minggang en [5], aplicados a los cuasicuasitorneos, encontramos ejemplos los cuales nos dan una respuesta negativa.

Para demostrar cuando un cuasicuasitorneo tiene NTDM nos basamos en el resultado que dice, si en la cerradura de una digráfica todo ciclo γ tiene una flecha simétrica, entonces dicha digráfica tiene núcleo, teorema 2. Como D es un cuasicuasitorneo, es decir, resulta de quitarle dos flechas a un torneo, al tomar la cerradura no podemos asegurar que todas las flechas de D estén en γ , lo cual nos generó muchos casos. Además tuvimos que pedirle cuatro condiciones a nuestro cuasicuasitorneo para asegurar la existencia de una flecha simétrica en los ciclos de la cerradura.

Hortensia Galeana demuestra en [2] que si en un cuasitorneo D todo ciclo dirigido de longitud a lo más cuatro es cuasimonocromático, entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Al tratar de mostrar lo análogo a cuasicuasitorneos del teorema 9, no pudimos seguir avanzando pues no pudimos asegurar que se cumplieran con todas las hipótesis. Por lo tanto queda abierto encontrar una demostración o contraejemplo para el caso de cuasicuasitorneos bajo la hipótesis de que todo ciclo dirigido de longitud a lo más cuatro es cuasimonocromático.

Para terminar, agregamos las siguientes preguntas para investigaciones futuras:

1. El teorema 15 nos asegura la existencia de flechas simétricas en los ciclos de la cerradura bajo ciertas condiciones. Encontramos ejemplos de cuasicuasitorneos que no cumplieran algunas de las condiciones, pero éstos tenían núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, de esto podemos preguntarnos ¿cuáles condiciones del teorema 15 se le podrán quitar para asegurar la existencia de un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en un cuasicuasitorneo?

2. ¿Qué condición será necesaria agregar para probar el análogo a cuasicuasitorneo del teorema: *Sea D un cuasitorneo m -coloreado. Si cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es cuasimonocromático, entonces D tiene un NTDM*, dado por Hortensia Galeana Sánchez?

3. ¿Qué sucede si a un torneo se le borran 3 flechas o más?

Bibliografía

- [1] Galeana Sánchez, Hortensia. On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments. *Discrete Mathematics*, 156(1-3):103–112, 1996.
- [2] Galeana Sánchez, Hortensia. Kernels in edge-colored digraphs. *Discrete Mathematics*, 184(1-3):87–99, 1998.
- [3] Galeana Sánchez, Hortensia and García Ruvalcaba, José de Jesús. Kernels in the closure of coloured digraphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 20(2):243–254, 2000.
- [4] Galeana Sánchez, Hortensia and Rojas Monroy, Rocío. A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments. *Discrete mathematics*, 282(1):275–276, 2004.
- [5] Minggang, Shen. On monochromatic paths in m-coloured tournaments. *Journal of Combinatorial Theory, series B*, 45(1):108–111, 1988.
- [6] Pastrana Ramírez, Laura and Sánchez-López, María del Rocío. Kernels by monochromatic directed paths in 3-colored tournaments and quasi-tournaments. *Int. J. contemp. Math. sciences*, 5:1689–1704, 2010.
- [7] Rojas Monroy, María del Rocío. *Resultados recientes en teoría de núcleos*. Tesis doctoral UNAM, 1988.
- [8] Sánchez López, María del Rocío. *Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos y casi-torneos m-coloreados*. Tesis UNAM, 2006.
- [9] Sands, Bill, Sauer, Norbert, and Woodrow, R. On monochromatic paths in edge-coloured digraphs. *Journal of Combinatorial Theory, series B*, 33(3):271–275, 1982.
- [10] Von Neumann, John and Morgenstern, Oskar. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 1944.