



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**MEDIDAS DE COMPLEJIDAD DE CURVAS EN
SUPERFICIES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

MACARENA COVADONGA ROBLES ARENAS



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. MAX NEUMANN COTO**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

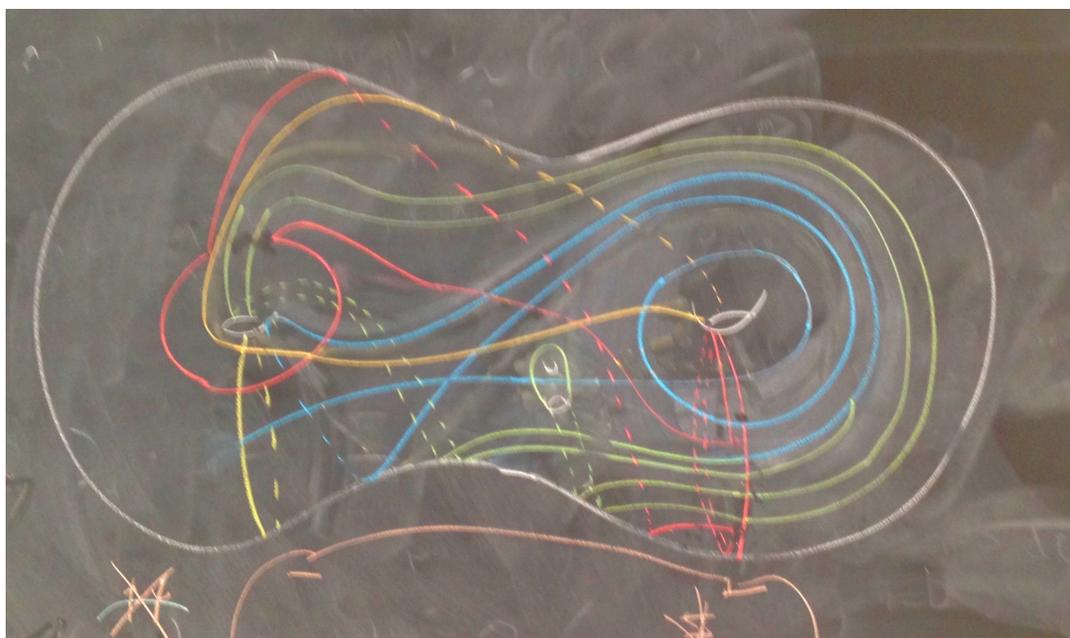
Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Robles
Arenas
Macarena Covadonga
55 55 72 22 86
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
415030522
2. Datos del tutor
Dr.
Max
Neumann
Coto
3. Datos del sinodal 1
Dr.
Mario
Eudave
Muñoz
4. Datos del sinodal 2
Dr.
Noé
Bárceñas
Torres
5. Datos del sinodal 3
Dra.
Rita
Jiménez
Rolland
6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Andrés
Ahumada
Gómez
7. Datos del trabajo escrito
Medidas de complejidad de curvas en superficies
33 p.
2018

Medidas de complejidad de curvas en superficies

Macarena Covadonga Robles Arenas



Sentimiento sin acción es la ruina del alma.

-Edward Abbey

A las personas más importantes de mi vida:

Covadonga, Isabel, José Carlos, Rosario y Delfino.

Agradecimientos

He sido enormemente afortunada. He tenido el privilegio de pertenecer y de decirme estudiante de la Universidad Nacional Autónoma de México, la Máxima Casa de Estudios, y de su Facultad de Ciencias, y de decirme becaria del Instituto de Matemáticas. Quiero agradecer, primero que nada, por este privilegio. Agradezco en particular al Instituto de Matemáticas de la UNAM por todas las oportunidades que me brindó como institución, y a su comunidad, por su calidez, por su bondad y por su ejemplo de excelencia, constancia y trabajo duro.

Agradezco a Max Neumann Coto, quien ha sido mi asesor y mi mentor durante los últimos tres años. Él me ha dado de manera generosa y paciente su tiempo, sus conocimientos, su comprensión y su cariño, por eso le estaré eternamente agradecida.

Agradezco a Isaac Ortigoza Suárez, porque gracias a él llegué aquí a estudiar Matemáticas: él me las presentó y él me las compartió, dándome las llaves de un mundo que me ha hecho increíblemente feliz.

Agradezco a Rita Jiménez Rolland, Noé Bárcenas Torres, y Mario Eudave Muñoz por acceder a revisar esta tesis, por participar y brindarme su ayuda y sus consejos en este proceso y por haberse involucrado en mi trabajo y en mi formación académica desde el principio. Las oportunidades que me dieron significaron mucho para mi y me permitieron crecer muchísimo.

A Andrés Ahumada Gómez, mi amigo y hermanito mayor matemático, también por acceder a ser mi sinodal, por pedirme todos los detalles y ayudarme a arreglar el engorroso archivo de LaTeX, y por toda su ayuda en mis cursos de licenciatura, especialmente en geometría y topología diferencial.

Agradezco especialmente a mis amigos: Claudia, Andrés, Julián, Josep, Juan Diego, Ricardo, Ángel y Miguel Ángel. Por las incontables horas discutiendo Matemáticas, resolviendo problemas, divagando... por los cafés y las tardes lentas. Por su honestidad y por siempre lanzarse a lo que fuera. Ustedes han sido, y deseo que sigan siendo, una parte esencial de todo esto.

Agradezco a Mónica Clapp: por darme alguien a quien intentar parecerme, a Carlos Prieto: por darme mi primer trabajo, y a Paco Struck: por tolerar todas las emergencias burocráticas. A Oscar Palmas, Hugo Rincón, Ana Rechtman, Valente Santiago, Toño Gómez, Jorge García Malo. Para mi ha sido un honor haber podido aprender tanto de todos ustedes.

A Ernesto Rosales, Eugenia O'Reilly, Martha Takane, Omar Antolín, Pepe Seade y Pablo Suárez. A Ioan Marcut. Por su ayuda en diversos momentos.

A los algebristas del Aula 1 del Nuevo Edificio del IMATE: Víctor, David, Alejandro, y René, por tantas veces que me apoyaron con mis tareas. A los ayudantes de la facultad

AGRADECIMIENTOS

que hicieron los cursos que tomé cien veces mejores y más claros: Ernesto, Omar, Natalie, Lalo y Ricardo (otra vez).

Más que a nadie, agradezco a mi familia materna, por *todo*: A mi Madre: por formarme en todos los sentidos, por los sacrificios que hizo por mi y por mi hermano, por ser mi Faro. A mi Abi: por el hogar que nos dio, y por convertirlo en el lugar más luminoso y cálido del Universo. A mi tía Rosario: por su apoyo y protección, por siempre hacerme sentir segura y cuidada. A mi hermano: por todo lo que compartimos, por sus constantes plegarias. A Delfino: por su compañía, por su ayuda en todos los sentidos, por su inmensa generosidad. A todos, por su amor, y por predicar con el ejemplo siempre.

Gracias Dios por todas estas bendiciones, por todas estas personas.

Índice general

Agradecimientos	
Introducción	1
Capítulo 1. Definiciones y prerrequisitos	3
Capítulo 2. Longitud de palabras	9
Capítulo 3. Grado mínimo de cubiertas	15
Capítulo 4. Corolarios y últimos comentarios	23
Bibliografía	27

Introducción

Sea Σ una superficie y sea α la clase de homotopía libre de una curva en Σ . Queremos comprender el comportamiento de α comparándola con otras curvas y en relación a propiedades geométricas, topológicas, algebraicas y combinatorias que podamos medir en la superficie.

Una de las maneras más inmediatas de hacer esto es contar el número de auto-intersecciones de α , y más en específico, el número mínimo de auto-intersecciones de curvas en la clase de homotopía de α , a este número lo llamaremos $i(\alpha)$.

Otra manera, útil para comprender a la curva como un objeto algebraico y como un objeto geométrico de manera simultánea, es considerar $l(\alpha)$, la longitud mínima de las palabras que representan a α en alguna presentación del grupo fundamental. De manera similar surgen $n(\alpha)$, el número mínimo de regiones fundamentales de Σ cortadas por α , y $m(\alpha)$, el mínimo número de cruces entre α y todas las curvas esenciales en Σ .

Otra más, quizá menos obvia pero igual de relevante en el contexto de la topología algebraica, es sugerida por el siguiente resultado de Peter Scott([10]): Si Σ es una superficie y α una curva con intersecciones mínimas en Σ , entonces existe un cubriente de grado finito donde α se levanta como una curva encajada. Definimos $d(\alpha)$ como el grado mínimo de una cubierta a la que una curva se levanta como un encaje cerrado.

Ninguna de estas ‘medidas’ revela mucha información si se considera de manera aislada: en cualquier superficie de género $g > 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existen curvas cuyo mínimo número de intersecciones es n , y lo mismo se puede decir para las otras funciones que mencionamos. Solamente cuando se estudian en conjunto es que estas medidas empiezan a ofrecer profundidad. Esto nos lleva a intentar cuantificar el resultado de Scott, es decir, acotar $d(\alpha)$ en términos de algunos de los otros invariantes. Varios autores han contribuido resultados relevantes

En [7], Priyam Patel obtuvo una cota para $d(\alpha)$ en términos de la longitud de una geodésica hiperbólica en la clase de homotopía de α , y en [1] ese resultado fue utilizado por Tarik Aougab, Jonah Gaster, Priyam Patel y Jenya Sapir para demostrar que $d(\alpha)$ está acotado por arriba en función de la topología de la superficie y el número mínimo de intersecciones de α . En [9], Igor Rivin preguntó si es posible acotar el grado mínimo en términos solamente del número mínimo de intersecciones, el resultado principal de la tesis, que se demuestra en el capítulo 3, es el siguiente:

TEOREMA 5. Si α es una curva o un arco en una superficie orientable Σ , entonces

1. $d(\alpha) \leq i(\alpha) + 1$, si Σ es plana.
2. $d(\alpha) < 5(i(\alpha) + 1)$, en otro caso.

En el curso de probar este resultado es necesario relacionar las medidas que mencionamos anteriormente ($l(\alpha)$, $m(\alpha)$ y $n(\alpha)$) para obtener la información deseada.

En particular, mostramos en el capítulo 2 (Teorema 1) que el número mínimo de regiones fundamentales cortadas por α es menor que el número mínimo de auto-intersecciones más 1, este resultado es el que nos permite acotar $d(\alpha)$ en función de $i(\alpha)$ de manera efectiva, pues en realidad lo que logramos es acotar a $d(\alpha)$ por $n(\alpha)$. En este capítulo también mostramos (Teorema 3) que la longitud mínima de la palabra que representa a α se puede acotar en términos de el número mínimo de auto-intersecciones y de la característica de Euler de la superficie.

En el último capítulo (Corolario 8) reorganizamos algunos de los resultados y también probamos (Proposición 1) que el número mínimo de cruces entre α y todas las curvas esenciales de Σ está acotado por arriba en función de la raíz del número mínimo de intersecciones de α .

Finalmente, exponemos de manera breve algunas preguntas abiertas que surgen naturalmente de este trabajo y que consideramos interesantes.

Los resultados que aquí se presentan aparecen originalmente en el artículo *Measuring complexity of curves in surfaces*, escrito por su servidora en colaboración con y bajo la dirección del Dr. Max Neumann Coto. Al momento de escribir estos párrafos, el artículo se encuentra en revisión para su publicación, se puede consultar en la página del arXiv con el identificador 1712.06671v1.

Capítulo 1

Definiciones y prerequisites

Suponemos que el lector posee conocimientos básicos de topología general y topología algebraica (conexidad, compacidad, homotopías, grupo fundamental y espacios cubrientes) y algunos conocimientos no tan básicos de teoría de grupos (el grupo libre, presentaciones de grupos y subgrupos conmutadores). Para un tratamiento más detallado de estos temas referimos al lector a [8] y a [5].

Sobre curvas y superficies:

Una *superficie* (topológica) Σ es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y tal que en todo punto tiene una vecindad homeomorfa a una vecindad de \mathbb{R}^2 , o sea, es una 2-variedad topológica. En este trabajo todas las superficies estudiadas serán conexas y compactas. Una curva es una función continua $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$ y un arco es una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$, en ambos casos, usaremos los términos *curva* y *arco* para referirnos tanto a la función como a su imagen en la superficie; reservaremos el término de *lazo* para referirnos a curvas basadas en un punto, es decir, curvas cuyos extremos coinciden en un punto escogido b y el término *camino* para referirnos a un arco cuando queremos ser específicos sobre sus extremos. Decimos que una curva (o un arco) está inmersa en la superficie si el mapeo α falla en ser inyectivo en a lo más un número finito de puntos y que está encajada si α es inyectivo. Suponemos que todas las curvas están en posición general, es decir, que α sólo tiene auto-intersecciones dobles y transversales (las curvas no se ‘tocan’ para separarse inmediatamente). Decimos que una curva α *separa* a una superficie si $\Sigma - \alpha$ no es conexo. Un teorema muy importante en topología es el siguiente:

TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN. Sea α una curva simple en \mathbb{R}^2 . Entonces $\mathbb{R}^2 - \alpha$ tiene exactamente dos componentes conexas y α es frontera de ambos.

A pesar de que suene bastante intuitivo, las demostraciones para el caso general, aunque hay varias, suelen ser todas bastante técnicas: requieren entender, por ejemplo, homología o el grupoide fundamental. La dificultad yace en el hecho de que una curva cerrada simple en realidad puede ser bastante complicada. Referimos al lector a [3]. Utilizaremos este resultado, sin enunciarlo de manera explícita, numerosas veces en esta tesis.

Usaremos, como es común en la literatura, el término de *homotopía* para referirnos específicamente a homotopías relativas a los extremos de la curva y el término de *homotopía libre* para referirnos a homotopías en general. Nótese que cualesquiera dos arcos son libremente homotópicos, así que cuando hablemos de arcos pediremos que los

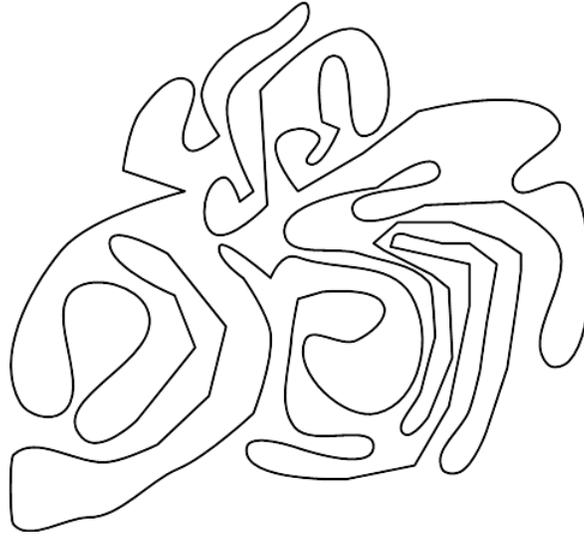


FIGURA 1. Si la curva es complicada, el teorema de la curva de Jordan no es obvio.

extremos, $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$, pertenezcan a los componentes de frontera del espacio (y por lo tanto sólo tendrá sentido discutir arcos si nuestro espacio, que es una superficie, no es cerrada), y estudiaremos para estos homotopías relativas a los componentes de frontera. Esto es, permitiremos que los extremos del arco varíen libremente sobre el componente de la frontera al que pertenecen.

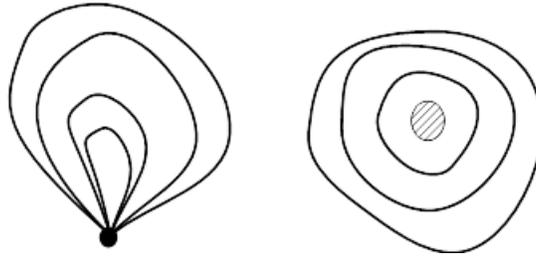


FIGURA 2. Ejemplos de curvas homotópicas y de curvas libremente homotópicas.

Usaremos el término de *cabriente* para referirnos tanto a aplicaciones cubrientes $p : Y \rightarrow X$ como al espacio Y que *cubre* a X .

Otro resultado que usamos sin hacer mención explícita es el

LEMA DE LEVANTAMIENTO DE CAMINOS. Sea $p : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente tal que $p(y_0) = x_0$, entonces todo camino $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ que comienza en x_0 tiene un levantamiento único a un camino $\tilde{\alpha}$ en Y que comienza en y_0 .

Este resultado se puede extender a

LEMA DE LEVANTAMIENTO DE HOMOTOPÍAS. Sean $f_0, f_1 : Y \rightarrow X$ mapeos continuos. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un mapeo cubriente de X . Supóngase que f_0 es homotópico a f_1

y que $\tilde{f}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$ es un levantamiento de f_0 . Entonces existe un único levantamiento $\tilde{H} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{H}(y, 0) = \tilde{f}_0(y)$ para todo $y \in Y$.

Ambos resultados se encuentran expuestos con detalle en [3] y en [8].

Es un resultado clásico de topología algebraica que $\pi_1(X, x)$ es isomorfo a $\pi_1(X, y)$ para todo $x, y \in X$, siempre que el espacio topológico X en cuestión es conexo por trayectorias. Esto nos permite, para fines prácticos, estudiar los elementos de $\pi_1(\Sigma)$ sin hacer mención explícita del punto base, y en muchos casos usando curvas que sólo son libremente homotópicas. De hecho tenemos el siguiente

LEMA. Las clases de homotopía libre de curvas en X (un espacio topológico conexo por trayectorias) están en correspondencia biunívoca con las clases de conjugación de $\pi_1(X)$.

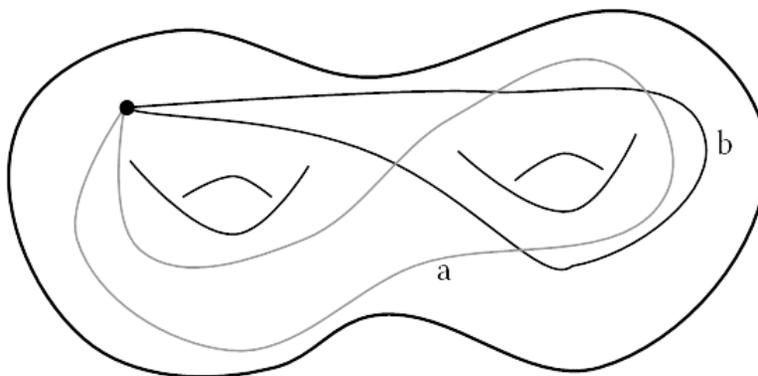


FIGURA 3. a y b son libremente homotópicas pero no homotópicas

Decimos que una curva (o arco) en una superficie tiene intersección mínima cuando tiene el mínimo número de intersecciones posibles en la superficie en su clase de homotopía. Como los grupos fundamentales de todas las superficies distintas al plano proyectivo son libres de torsión, las preimágenes de curvas esenciales en la cubierta universal son líneas topológicas. El siguiente resultado clásico ([4]) da una caracterización de las curvas con intersección mínima que resulta extremadamente útil:

TEOREMA. Sea Σ una superficie distinta de \mathbb{RP}^2 y sea α una curva en Σ , entonces α tiene intersecciones mínimas si y sólo si su preimagen en la cubierta universal está formada por líneas encajadas que se intersectan en un solo punto.

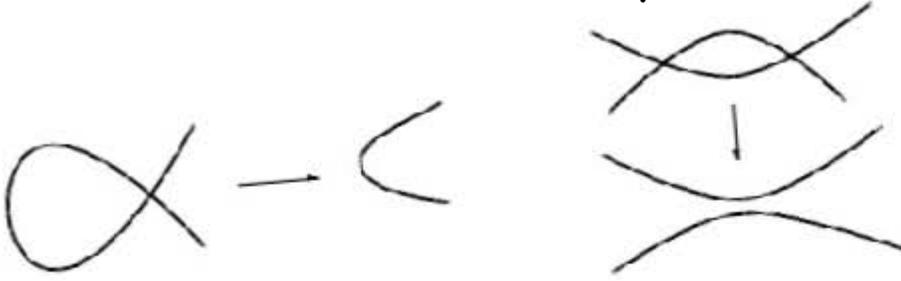


FIGURA 4. Reduciendo intersecciones por homotopías.

Sobre polígonos fundamentales:

Un *polígono fundamental* para una superficie compacta Σ es un disco topológico que se obtiene de cortar a Σ por una gráfica G (en ocasiones usaremos la notación $\Sigma|_G$ para referirnos a superficies cortada de este modo). G bordea un disco, y este se levanta a $\tilde{\Sigma}$ a un polígono P (una *región fundamental*) y los trasladados de P bajo la acción de $\pi_1(\Sigma)$ (que vienen de *transformaciones cubrientes*) teselan a la cubierta.

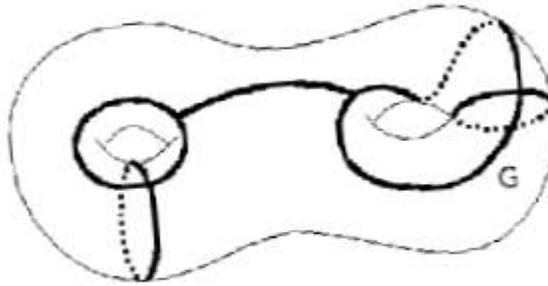


FIGURA 5. Una gráfica que corta a la superficie en un disco.

Los polígonos fundamentales, en esencia, guardan toda la información sobre la superficie: Σ se puede recuperar de P identificando sus lados por pares, y $\pi_1(\Sigma)$ (o más bien el grupo de transformaciones cubrientes al que este es isomorfo) está generado por las transformaciones que llevan a P a los polígonos adyacentes, de los cuales hay uno por cada lado de P identificado en Σ , y como es posible calcular el grupo de la superficie partiendo de P usando el teorema de Seifert-van Kampen, esto da una presentación que tiene un generador (y su inverso) por cada par de lados identificados de P , y una relación por cada ciclo formado por identificaciones de las aristas alrededor de cada vértice de P . Así, distintos polígonos fundamentales inducen distintas presentaciones de $\pi_1(\Sigma)$.

Demostraciones completas de estas afirmaciones, así como varios ejemplos, se pueden encontrar en [12], [11] y [2].

En este tipo de presentaciones los generadores del grupo fundamental tienen como representantes a lazos simples en Σ que se cruzan sólo en el punto base, y las relaciones corresponden a discos en Σ que rodean a los vértices de la gráfica por donde se cortó a Σ para obtener P .

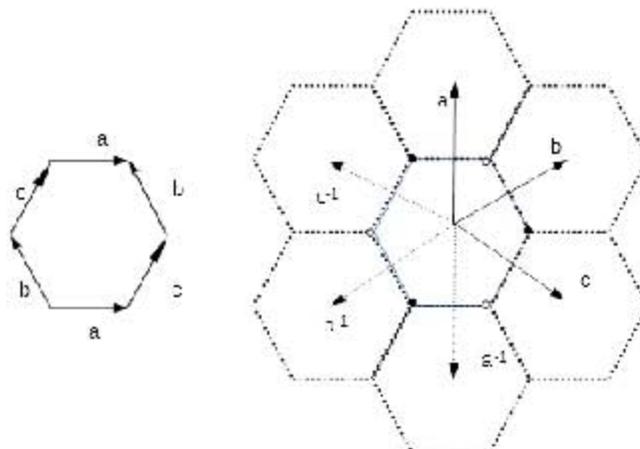


FIGURA 6. $\pi_1(\Sigma) = \langle a, b, c \mid acb^{-1}, ba^{-1}c^{-1} \rangle$

En particular, si Σ es una superficie cerrada de género n , entonces existe un polígono fundamental para Σ que tiene $4n$ lados, de donde se deduce la presentación usual de $\pi_1(\Sigma)$ con $2n$ generadores $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ y una única relación $(\prod [a_j, b_j] = 1)$.

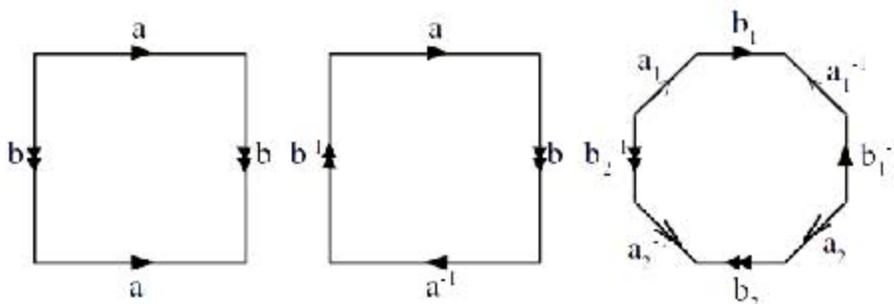


FIGURA 7. Ejemplos de presentaciones usuales para un toro, un plano proyectivo y un dos-toro.

En estas presentaciones del grupo de la superficie, a cada clase de homotopía de curvas le corresponde una palabra $w = a_1 a_2 \dots a_m$, donde cada a_j es un generador del grupo (representado por un lazo simple que cruza a un arista de la gráfica en un punto). Para obtener la palabra correspondiente a una curva basta con recorrerla y observar qué aristas va cruzando y en qué orden lo hace.

Sobre propiedades 'residuales' de los grupos y su significado topológico:

Un grupo G es *residualmente finito* si para todo elemento no trivial g de G existe un subgrupo H de G de índice finito en G que no contiene a g . Un grupo G es *S -residualmente finito* si para todo elemento g en $G - S$ existe un subgrupo H de G de índice finito en G que contiene a S pero no a g . Un grupo G es *localmente extendido residualmente finito* (o *LERF*) si G es S -residualmente finito para todo subgrupo finitamente generado S de G .

En el artículo mencionado en la introducción ([10]) se demuestra que

TEOREMA (P. SCOTT, 1978). Los subgrupos de grupos fundamentales de superficies son LERF.

En particular, si Σ es una superficie y $c \in \pi_1(\Sigma)$ es un lazo, el subgrupo generado por c es LERF (*).

Podemos hacer un diccionario de las definiciones algebraicas y su interpretación geométrica:

- Los subgrupos del grupo fundamental de una superficie se traducen a espacios cubrientes.
- Los subgrupos de índice finito se traducen a cubrientes de grado finito.
- RF se traduce a que exista un cubriente de grado finito en dónde c no se cierra.
- (*) se traduce a que existe un cubriente de grado finito donde c se levanta como un encaje.

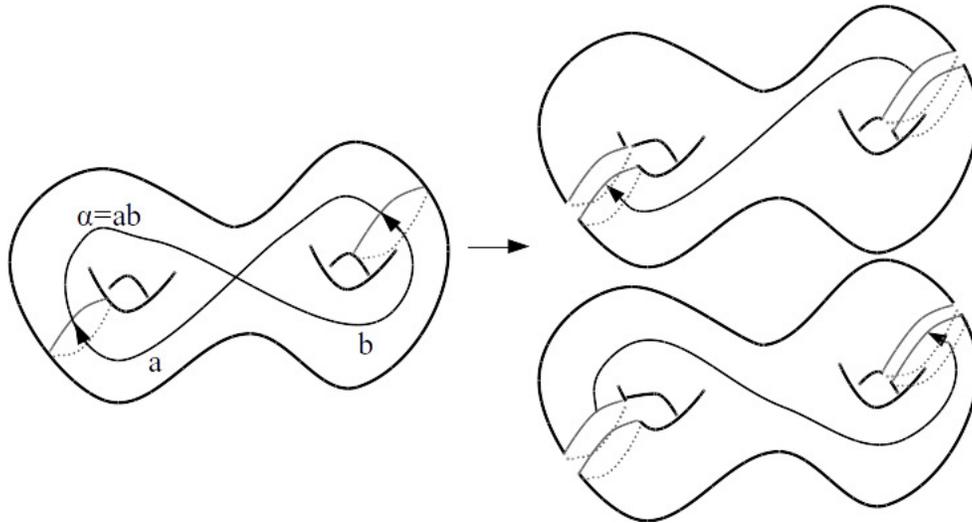


FIGURA 8. El lazo $\alpha = ab$ se levanta a un encaje en una cubierta de grado 2, formada al pegar dos copias del 2-toro cortado por las curvas grises (existe un subgrupo de índice 2 que contiene a ab pero no a a o a b).

Capítulo 2

Longitud de palabras

En este capítulo introduciremos la noción de *descascarado* de una gráfica y probaremos dos de los resultados principales del trabajo, relacionando, por medio del descascarado, el número mínimo de intersecciones con las dos nociones de longitud de palabras que definimos a continuación.

Si Σ es una superficie y la cortamos para obtener un disco por medio de una colección de curvas encajadas que se tocan en un solo punto (en el caso de que Σ sea cerrada) o por una colección de arcos propiamente encajados (en el caso de que Σ tenga frontera no vacía) obtenemos una presentación ‘estándar’ de $\pi_1(\Sigma)$. La longitud mínima de una palabra que representa a α en una de estas presentaciones y se denota por $l(\alpha)$.

Si cortamos a Σ por una gráfica para obtener un disco, obtenemos una presentación para $\pi_1(\Sigma)$ con más generadores y relaciones, y entonces el número mínimo de regiones fundamentales cortadas por α coincide con la longitud mínima de una palabra en la clase de conjugación de α tomando el mínimo sobre todas estas presentaciones. Definimos $n(\alpha)$ como el número mínimo de regiones fundamentales de Σ cortadas por α , para todas las posibles regiones fundamentales de Σ .

Finalmente, recordemos que $i(\alpha)$ es el número mínimo de auto-intersecciones de curvas en la clase de homotopía de α .

TEOREMA 1. Si α es (la clase de homotopía libre de) una curva o un arco en una superficie compacta Σ , entonces $n(\alpha) \leq i(\alpha) + 1$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que mostrar que si α es una curva con s auto-intersecciones, entonces existe una gráfica G que corta a Σ en un disco e interseca a α a lo más $s+1$ veces. Supongamos primero que α llena a Σ , o sea, que las regiones complementarias son discos y anillos paralelos a las fronteras. Sea G' la gráfica dual de α en Σ , así, G' tiene un vértice p_i por cada región complementaria R_i y una arista entre p_i y p_j para cada arco de α en que R_i toca a R_j . Luego, G' interseca a α una vez en cada arista. Si Σ tiene frontera no vacía, colocamos los vértices de G' correspondientes a regiones adyacentes a la frontera en $\partial\Sigma$. Como α llena a Σ , $G' \cup \alpha$ corta a Σ en pequeños cuadriláteros que tienen una esquina en p_i , una esquina en un punto de intersección de α y dos esquinas en los puntos medios de aristas de G' , entonces G' corta a Σ en cuadriláteros C_1, C_2, \dots, C_s (cada uno formado por los cuatro pequeños cuadriláteros que rodean un punto de intersección de Σ). Podemos pegar C_1, C_2, \dots, C_s por $s-1$ de sus lados (que son aristas de G') para obtener un único disco poligonal P que es un dominio fundamental para Σ . Como P tiene $s-1$ aristas de G' en su interior, la frontera de P tiene $2(s+1)$ lados (dos por cada arista que queda de G'). Sea G la imagen de ∂P en Σ . Entonces G corta a Σ en un disco y G cruza a α a lo más $s+1$ veces.

Si α no llena Σ , sea G' la gráfica dual para α en Σ que tiene un vértice por cada región complementaria, y una arista por cada arco de α en que dos regiones son adyacentes. Si una región R_k no es un disco o un anillo paralelo a las fronteras, escogemos curvas $a_{k,i}$ en R_k paralelas a las componentes de ∂R_k , sea S_k la subsuperficie de R_k que tiene por frontera a estas curvas. Obsérvese que existen arcos $b_{k,j}$ en S_k que intersectan a G' sólo en p_k y que por lo tanto $G' \cup b_{k,i}$ corta a S_k en discos. Ahora, α llena a $\Sigma' = \Sigma - \cup S_i$, y por el argumento anterior hay una subgráfica de G' en Σ' que corta a $\Sigma - \cup S_i$ en un disco poligonal P' y que cruza a α a lo más $s + 1$ veces. Por lo tanto $G = G' \cup a_{k,i}$ corta a Σ en discos y G cruza a α a lo más $s + 1$ veces. \square

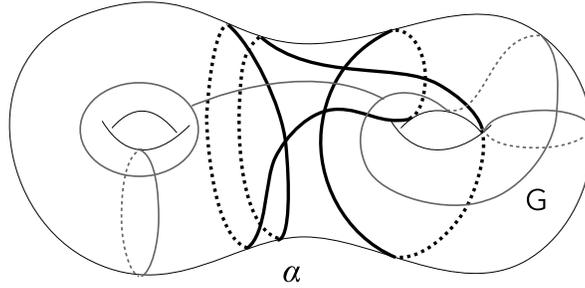


FIGURA 9. Una gráfica G que llena y que intersecta a la curva α mínimamente.

Ejemplo. Si α es una curva en Σ y $\Sigma - \alpha$ es conexo, entonces $n(\alpha) = l(\alpha) = i(\alpha) + 1$. Para mostrar que $n(\alpha) \geq i(\alpha) + 1$, obsérvese que una gráfica G en Σ que corta a Σ en un disco debe cruzar toda arista del complemento de un árbol generado de la imagen de α . Para probar que $n(\alpha) = l(\alpha)$ obsérvese que como $\Sigma - \alpha$ es conexo, cualquier gráfica en Σ se puede deformar para que tenga un solo vértice sin cambiar sus intersecciones con α .

Sea Σ una superficie y G una gráfica en Σ , escribimos $|\Sigma - G|$ para denotar el número de componentes conexas del complemento de G en Σ .

Si G es una gráfica en una superficie Σ y x es un punto en $\Sigma - G$, definimos el *descascarado* de G desde x como la gráfica $\varphi_x G$ que se obtiene de G borrando las aristas que se pueden alcanzar desde x (digamos, trazando un arco de x a la arista) sin cruzar a G , y borrando los vértices de G a los que ya no llega ninguna arista. Nótese que si $\Sigma - G$ es conexa entonces $\varphi_x G = \emptyset$ (es fácil ver que el converso no se cumple). Más generalmente, como cada vez que se aplica φ_x el número de componentes del complemento disminuye, entonces $\varphi_x^{|\Sigma - G|} G = \emptyset$ para todo $x \in \Sigma - G$ y, además, existe un x para el cual $\varphi_x^{\lceil |\Sigma - G|/2 \rceil} G = \emptyset$.

Si α es una curva inmersa en Σ , sean $p_M(\alpha)$ y $p_m(\alpha)$ el máximo y el mínimo número de veces que es necesario aplicar φ_x para borrar toda la curva α , variando x sobre las regiones de $\Sigma - \alpha$. Es fácil ver que $p_M(\alpha) \leq 2p_m(\alpha)$. También se puede probar que $p_M(\alpha)$ y que $p_m(\alpha)$ son iguales para todas las curvas con intersecciones mínimas en

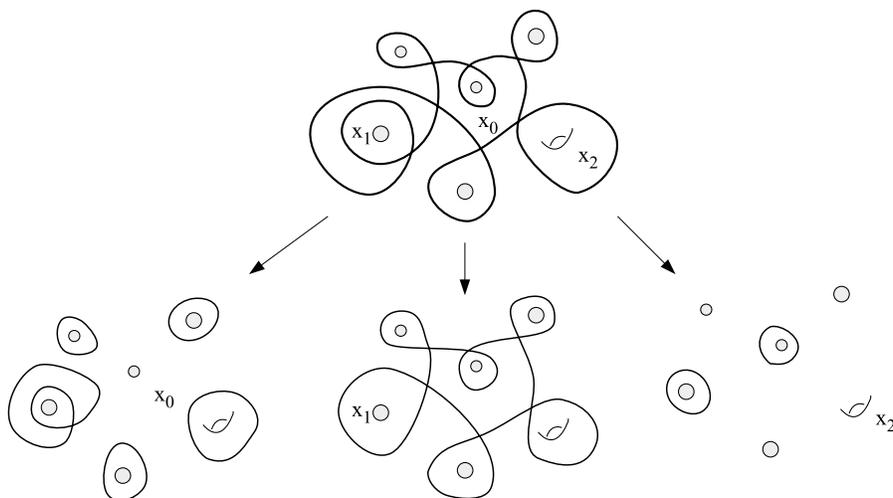


FIGURA 10. Descascarando una curva desde tres puntos distintos.

una clase de homotopía fija de Σ : existe una homotopía entre ellas que no incrementa el número de auto-intersecciones ([4]), por lo que la homotopía es regular y consiste de una series de movimientos triangulares en la imagen de α , y estos movimientos no afectan la longitud total de los descascarados.

LEMA 2. Si α es una curva o un arco inmerso en Σ con auto-intersecciones mínimas, entonces $p_M(\alpha) \leq n(\alpha)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea G una gráfica en Σ que cruza a α exactamente n veces y corta a Σ en un disco poligonal P , de tal manera que α interseca a P en n arcos a_1, a_2, \dots, a_n . Dado que α tiene intersecciones mínimas, estos arcos están encajados y se intersectan entre sí a lo más una vez, así que cada par de puntos en P puede conectarse por un camino que cruza a cada a_i a lo más una vez. Por lo tanto, si $A = \cup a_i$ en P , entonces para cada punto x en $P - A$ se cumple que $\varphi_x^n(A) = \emptyset$, y esto implica que $\varphi_x^n(\alpha) = \emptyset$. \square

TEOREMA 3. Si α es una curva o un arco en una superficie compacta orientable Σ , entonces:

1. $l(\alpha) \leq 2n(\alpha) - 2$, si Σ es plana y α no es simple.
2. $l(\alpha) \leq 2p_m(\alpha)(2 - \chi(\Sigma))$, si Σ es cerrada.
3. $l(\alpha) \leq 2p_M(\alpha)(1 - \chi(\Sigma))$, si Σ tiene frontera.

DEMOSTRACIÓN. 1. Tomemos una gráfica en Σ que corte a la superficie en un disco y cruce a α en $n(\alpha)$ puntos. Como Σ es plana, la gráfica está formada por uno o más árboles T_1, T_2, \dots, T_k . La frontera de una vecindad regular de $\cup T_i$ es una colección de arcos a_1, a_2, \dots propiamente encajados que conectan las curvas de la frontera de Σ y que cortan a Σ en discos, así que quitar cualquier a_i de cada T_i deja una subcolección de arcos que corta a Σ en un disco y que cruza a α a lo más $2n$ veces. Si algún a_i cruza a α dos veces, podemos quitarlo para obtener $l(\alpha) \leq 2n(\alpha) - 2$. Lo mismo vale si α cruza a al menos dos T_i 's, pues podemos quitar un a_i que cruce a α de cada componente. Nos

queda el caso de que sólo un T_i cruce a α y cada a_i cruce a α a lo más una vez. Sean e_1, e_2, \dots, e_n las aristas de T_i que cruzan a α , y sean $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_{n+1}}$ los sub-árboles que se obtienen de T_i al quitar las aristas e_1, \dots, e_n . Para cada T_{i_j} sea $N(T_{i_j})$ una vecindad regular de T_{i_j} contenida en $N(T_i)$. Tomemos la colección formada por los arcos de $\partial N(T_j)$ para $j \neq i$, los arcos de $\partial N(T_{i_j})$ para todos los T_{i_j} 's, y para cada e_i , un arco a_i de $\partial N(T)$ que contenga a e_i . Como esta colección de arcos propiamente encajados corta a Σ en discos e intersecta a α a lo más n veces, en este caso obtenemos que $l(\alpha) \leq n(\alpha)$.

2. Sea $x \in \Sigma - \alpha$ tal que $\varphi_x^{n(\alpha)} \alpha = \emptyset$. α corta a Σ en una colección finita de regiones compactas $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$ con las siguientes propiedades:

- R_0 contiene a x .
- R_1, \dots, R_{i_1} son adyacentes (por arcos) a R_0
- $R_{i_1+1}, \dots, R_{i_2}$ son adyacentes a R_1, \dots, R_{i_1} .
- $R_{i_2+1}, \dots, R_{i_{j+1}}$ son adyacentes a $R_{i_{j-1}+1}, \dots, R_{i_j}$.

Cada región R_i es un disco o se puede cortar para obtener un disco poligonal P_i (cortando por arcos cuyos extremos están en las auto-intersecciones de α). Podemos pegar los P_i 's para obtener un solo disco poligonal P de la manera siguiente: Partiendo de P_0 , para cada k con $i_j < k \leq i_{j+1}$ elegimos un arco a_k de $P_k \cap P_{k'}$ para algún $k' \leq i_j$ e identificamos P_k con $P_{k'}$ por a_k . P es una región fundamental para Σ y el cubriente universal $\tilde{\Sigma}$ está teselado por las preimágenes P_i de P .

Por construcción, para cada lado l_i de P hay un camino c_i en P partiendo de x al punto medio de l_i , y que cruza a α a lo más $p_m(\alpha)$ veces. Podemos asumir que los caminos c_1, \dots, c_n son simples y se intersectan solamente en x , porque si c_i y c_j se intersectan en algún otro punto y , siempre podemos intercambiar los subcaminos de x a y que los componen para obtener caminos con menos intersecciones.

Como $\cup c_i$ corta a P en cuadriláteros, la preimagen de $\cup c_i$ corta la cubierta universal $\tilde{\Sigma}$ en discos Δ_k formados por cuadriláteros que rodean a un vértice de un disco P_i . Así, las transformaciones de cubierta envían Δ_j 's a Δ_j 's; y sólo la identidad fija a Δ_j . Entonces existe una colección finita de Δ_i 's adyacentes cuya unión forma una región fundamental F , cuyos vértices se identifican con x en Σ , por lo que F tiene $2(2 - \chi(\Sigma))$ lados.

$l(\alpha)$ es un medio del número de intersecciones de ∂F con las preimágenes de α . Cada lado de F es la unión de dos c_i 's, así que intersecta a las preimágenes de α a lo más $2p_m(\alpha)$ veces, y F tiene $2(2 - \chi(\Sigma))$ lados, así que $l(\alpha) \leq 2p_m(\alpha)(2 - \chi(\Sigma))$.

3. La demostración para superficies con frontera es similar al caso anterior, excepto que empezamos con un punto x en una vecindad de la frontera de Σ , para que al final arrastremos todos los a_i 's a arcos disjuntos que terminen en $\partial \Sigma$. Sólo podemos garantizar que $\varphi_x^{p_M(\alpha)} \alpha = \emptyset$, por lo tanto la cota que obtenemos en este caso es $l(\alpha) \leq 2p_M(\alpha)(1 - \chi(\Sigma))$. \square

Ejemplos. Las cotas en el Teorema 3 son óptimas: Para la parte 1, tomamos una curva α que rodee las fronteras de Σ en 'zig-zag' como en la figura 11. Para la parte 2, consideremos las potencias de una curva simple que separa a una superficie de género $2g$ como una suma conexa de dos superficies de género g (ver la figura 12). Para la parte 3, consideremos una superficie Σ de género g con una sola componente de frontera, y sea α la potencia n -ésima de un lazo homotópico a $\partial\Sigma$. Si cortamos a Σ por arcos propiamente encajados para obtener un disco, cada arco intersecta a la frontera en dos puntos, por lo que debe de cruzar α al menos $2n$ veces y por lo tanto $l(\alpha) = 2n \cdot 2g = (i(\alpha) + 1)(1 - \chi(\Sigma))$.

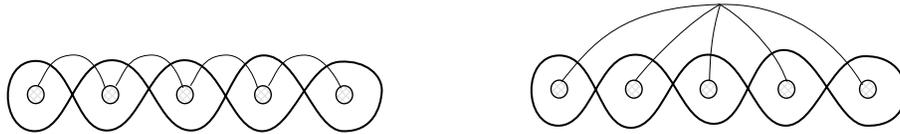


FIGURA 11. Una curva plana α con $l(\alpha) = 2n(\alpha) - 2$

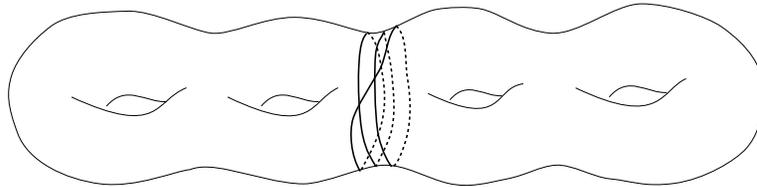


FIGURA 12. Una curva α con $n(\alpha) = i(\alpha) + 1$ y $l(\alpha) = (i(\alpha) + 1)(2 - \chi(\Sigma))$

Grado mínimo de cubiertas

Enunciaremos y demostraremos a continuación el resultado principal, acotando el grado mínimo de una cubierta de una superficie a la que una curva se levanta como un encaje en función del número mínimo de intersecciones de la curva, dando respuesta a la pregunta de Igor Rivin mencionada en la introducción. Casi todo el capítulo se compone de la prueba del Teorema 5, que aunque se basa en la idea sencilla del Lema 4, resulta mucho más delicada, pues $n(\alpha)$ es más difícil de manejar que $l(\alpha)$. Armaremos las cubiertas 'por pedazos', partiendo a la curva de manera conveniente y levantando los sub-arcos resultantes, será necesario asegurarse de que todas las 'cubiertas' que obtuvimos de los pedazos se puedan pegar sin problemas a una cubierta de la superficie.

Recordemos que se define $d(\alpha)$ como el grado mínimo de una cubierta de Σ a la que α se levanta como una curva encajada cerrada. Para estimar este grado, partimos del siguiente lema de [10].

LEMA 4. Si α es una curva inmersa en una superficie con frontera Σ' , entonces $d(\alpha) \leq l(\alpha)$. Si α es un arco inmerso en Σ' , entonces $d(\alpha) \leq l(\alpha) + 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ una colección de arcos propiamente encajados y ajenos tales que cortan a Σ' en un disco poligonal D . Si fijamos una orientación para μ_j 's, esta induce signos a los cruces con α , sea entonces $\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_t}$ la sucesión de cruces (con signos) con α . Entonces $\mu_{i_j} \neq -\mu_{i_{j+1}}$, o habría una isotopía de α que elimina esos dos cruces.

Los cruces con los μ_{i_j} 's separan a α en una colección de arcos $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ encajados en D . Moviéndose por α , identificamos copias D_1, D_2, \dots de D , subiendo a una nueva copia cada vez que α intersecta a algún μ_j (identificando un arco μ'_j en ∂D_i con un arco μ''_j en ∂D_{i+1}). Hacemos esto módulo $l(\alpha)$ si α es una curva. Por último, identificamos los arcos restantes μ'_k y μ''_k en las fronteras de todos los D_i 's de forma arbitraria resulta en una cubierta de Σ en donde α se levanta sin auto-intersecciones. \square

OBSERVACIÓN. No siempre es necesario subir a un nuevo D_i cada vez que α cruza un arco μ_i . Si α tiene un subarco simple que cruza los arcos de corte en una subsucesión $\mu_{i_s}, \dots, \mu_{i_t}$, donde $\mu_{i_{s+1}}, \dots, \mu_{i_{t-1}}$ difieren de μ_{i_s} y μ_{i_t} , y $\mu_{i_s} \neq \mu_{i_t}$ o $\mu_{i_s} = \mu_{i_t}$ y α los cruza en la misma dirección, entonces es posible permanecer en el mismo D_i en los μ_{i_j} 's intermedios y subir solamente en μ_{i_s} y μ_{i_t} .

Ejemplo. Sea P un $4n$ -gono y sean a_1, a_2, \dots, a_n n arcos en P tales que cada a_i une lados opuestos pares. Identificando los lados pares de P en pares obtenemos una

superficie con frontera Σ , podemos elegir los emparejamientos de tal forma que los a_i 's se unan en una sola curva cerrada α . P es una región fundamental para Σ , así que toda cubierta (de Σ) se obtiene pegando copias de P . Como todos los a_i 's se intersectan entre si, es necesario levantar cada a_i a una copia diferente de P para quitar todas las auto-intersecciones, por lo tanto $d(\alpha) \geq n \geq l(\alpha)$.

TEOREMA 5. Si α es una curva o un arco en una superficie orientable Σ , entonces:

1. $d(\alpha) \leq n(\alpha)$, si Σ es plana.
2. $d(\alpha) < 5n(\alpha)$, en otro caso.

DEMOSTRACIÓN. Si Σ es plana, entonces la gráfica en Σ que corta a la superficie en un disco y cruza a α en $n(\alpha)$ puntos es una colección de árboles T_1, T_2, \dots que conectan las curvas de la frontera de Σ . Necesitaremos el siguiente

LEMA 6. Cada árbol es la unión de caminos ajenos por aristas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ y $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ de tal forma que λ_i conecta vértices de grado 1 y cada μ_k conecta algún λ_i a otro λ_j o a algún vértice de grado 1.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 6. Basta con mostrar que en cada árbol T existen caminos $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ que empiezan y terminan en los vértices de grado 1 y que contienen a todos los vértices de grado mayor que 2. Procederemos por inducción sobre el número de vértices de T , de paso, mostraremos también que se puede elegir un vértice de grado 1 de manera arbitraria para que pertenezca o no a los caminos antes mencionados. Para $v \leq 3$ el resultado es inmediato. Supongamos ahora que el resultado se cumple para todos los árboles con menos de v vértices, y sea T un árbol con v vértices. Cortamos T por un vértice p de grado $g > 1$ para obtener sub-árboles T_1, \dots, T_g de tal manera que p tiene grado 1 en cada T_i . Como cada T_i tiene menos vértices que T , podemos aplicar la hipótesis de inducción para escoger caminos en T_1, T_2 y en T_3, \dots, T_g de tal forma que p pertenezca a los caminos en T_1, T_2 pero no a los caminos en el resto de los sub-árboles. Entonces, como los T_i 's son sub-árboles de T , podemos obtener caminos disjuntos en T con las propiedades deseadas identificando caminos (en los sub-árboles) que contengan a p .

Con esto terminamos de demostrar el Lema 6. □

Cada árbol T_k se puede ver como la unión de caminos λ_i que unen vértices de grado 1 y caminos μ_j que unen unos λ_i 's con otros λ_i 's o con vértices de grado 1. Sea Σ' la superficie obtenida al cortar a Σ por los λ_i 's y sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ los arcos de α en Σ' . Por el Lema 4, para cada α_k hay una cubierta Σ_k de Σ' a la cual α_k se levanta como un arco encajado $\tilde{\alpha}_k$ y el grado de la cubierta es el número de veces que α_k cruza a $\cup \mu_i$ más 1. Si pegamos las superficies Σ_k apareando los arcos en sus fronteras que cubren a las dos copias de cada λ_i en Σ' siempre obtenemos una cubierta de Σ . Para obtener una cubierta donde α se levante como una curva cerrada simple basta con pegar el arco de $\partial \Sigma_k$ en donde $\tilde{\alpha}_k$ termina con el arco de $\partial \Sigma_k$ en donde $\tilde{\alpha}_{k+1}$ comienza para cada k , y luego pegar los arcos que faltan con arcos correspondientes de cualquier manera

posible. El grado de esta cubierta es la cantidad de veces que α cruza a los μ_i 's más la cantidad de α_k 's, que es la cantidad de veces que α cruza a los λ_i 's.

Supongamos ahora que Σ es cerrada. Sea G una gráfica en Σ que corta a la superficie en un disco y que intersecta a α $n(\alpha)$ veces. Sea $N(G)$ una vecindad regular de G , así, $N(G)$ es homeomorfa a $\Sigma - D^2$. Sea G' una subgráfica maximal de G , cuyos componentes conexos tienen vecindades planas y no tienen vértices de grado 1 o aristas separantes. Entonces un arco en $N(G')$ que cruza a G' una vez conecta diferentes componentes de $\partial N(G')$. $G - G'$ no tiene ciclos, pues la vecindad de un ciclo sería plana y podríamos extender G' . Por lo tanto, $G - G'$ sólo está compuesta por árboles y cada camino en $G - G'$ conecta diferentes componentes de $\partial N(G')$, ya que si no podríamos añadir el camino a G' para obtener una subgráfica más grande que G' con una vecindad plana.

Borremos una curva de la frontera de cada componente de $N(G)$ y conectemos al resto por arcos 'cortos' que crucen a $N(G)$, se puede ver que $N(G)$ se retrae por deformación a la unión de las curvas restantes y de los arcos cortos, a los que llamaremos $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ y ν_1, ν_2, \dots respectivamente. Sea Σ' la superficie que se obtiene al cortar a Σ por los λ_i 's.

Las componentes de $G - G'$ en Σ' son árboles, cuyas vecindades regulares tienen por frontera a arcos en Σ' . Si eliminamos un arco de la frontera de cada componente de $N(G - G')$ en Σ' , y llamamos a los arcos que nos quedan μ_1, μ_2, \dots entonces la unión de los λ_i 's, ν_j 's y los μ_k 's corta a Σ en un disco.

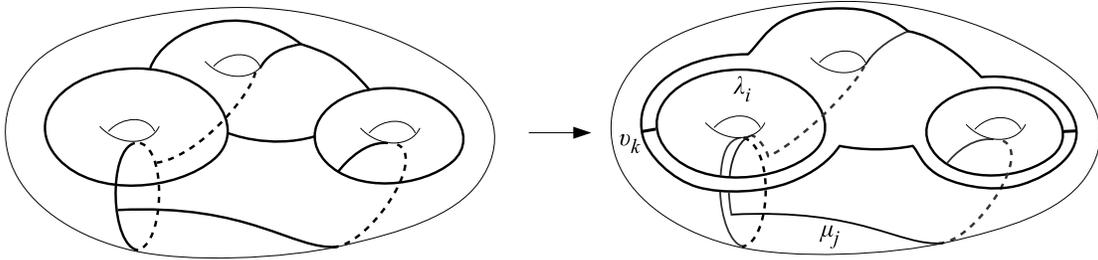


FIGURA 13. De la gráfica G a una jerarquía.

Por lo tanto tenemos que:

1. Los ν_j 's y los μ_k 's cortan a Σ' en un disco.
2. Cada μ_j y cada ν_k conecta diferentes componentes de la frontera de Σ' , y
3. α cruza a los λ_j 's y a los μ_k 's menos de $2n(\alpha)$ veces y no cruza ningún ν_i .

Si α no cruza a ninguno de los λ_i 's entonces α es una curva cerrada en Σ' y podemos encontrar una cubierta $\bar{\Sigma}'$ de Σ' en donde α se levante como una curva encajada como en el Lema 4. Si para cada λ_j , las dos curvas λ'_j y λ''_j en $\partial\Sigma'$ tienen el mismo número de preimágenes de cada grado en $\bar{\Sigma}'$, entonces podemos aparearlas para obtener una cubierta de Σ en donde α se levante como un encaje. No podemos esperar que esto siempre ocurra, pero en caso contrario basta tomar un automorfismo ϕ de Σ' que intercambie cada λ'_j con λ''_j y 'duplicamos' la cubierta $p : \bar{\Sigma}' \rightarrow \Sigma'$ tomando una copia

$\bar{\Sigma}_i''$ de $\bar{\Sigma}_i'$ y considerando la cubierta $\phi \circ p : \Sigma_i'' \rightarrow \Sigma'$. Ahora, $\bar{\Sigma}' \cup \bar{\Sigma}_i''$ tienen el mismo número de preimágenes de cada grado para cada λ_j' y λ_j'' así que podemos pegarlas por sus fronteras para obtener una cubierta de Σ en donde α se levante como una curva cerrada encajada. El grado de esta cubierta es a lo más $2|\alpha \cap \bigcup \mu_j| = 4|\alpha_i \cap G| = 4n(\alpha)$.

Si α cruza a algunos de los λ_i 's entonces estos separan α en una colección de arcos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ in Σ' . Por el Lema 4, para cada α_1 hay una cubierta Σ_i' de Σ' en donde α_i se levanta como un arco encajado $\tilde{\alpha}_i$, y el grado de la cubierta es a lo más el número de veces que α_i cruza a $\bigcup \mu_j$, más 1. Queremos pegar los Σ_i 's para obtener una cubierta de Σ en donde α se levante como un encaje. Para esto requerimos que las cubiertas cumplan una condición adicional:

(*) α_i une dos curvas distintas en $\partial\Sigma_i$, y estas se proyectan con grado 1 a $\partial\Sigma'$.

LEMA 7. Si un arco α_i en Σ' no se puede deformar por una homotopía a $\partial\Sigma'$, entonces existe una cubierta Σ_i de Σ' , de grado a lo más $|\alpha_i \cap \bigcup \mu_j| + 2$, en donde α_i se levanta como un encaje y satisface la condición (*) enunciada anteriormente.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 7. Sean c y c' las curvas de la frontera de Σ' en que α_i comienza y termina (el caso de que $c = c'$ es posible).

Caso 1. $l(\alpha_i) = 0$. Entonces α está en el disco $\Sigma'|_{\bigcup \mu_j}$ así que α_i es un arco simple. Si $c \neq c'$ entonces α_i satisface la condición (*) y podemos tomar $\Sigma_i = \Sigma'$.

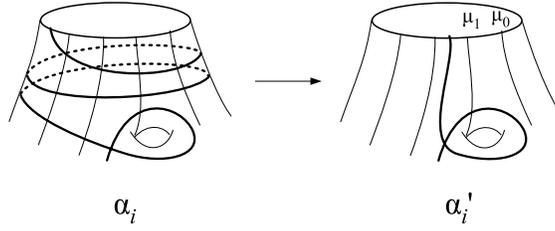
Si $c = c'$ y α_i no separa a Σ' entonces hay una curva cerrada γ que cruza a α_i una vez, así que pegar dos copias de $\Sigma'|_\gamma$ nos da una cubierta doble de Σ' en donde α_i se levanta como un encaje que satisface (*). Si $c = c'$ y α_i separa a Σ' , entonces cada componente de $\Sigma'|_{\alpha_i}$ tiene al menos dos curvas en su frontera (en caso contrario tendría género positivo y al menos dos arcos μ_j 's la cruzarían, estos arcos no pueden tener ambos extremos en c , así que tienen que cruzar a α_i). Por lo tanto debe existir un arco γ que cruce a α_i en sólo un punto y que conecte componentes diferentes de c de la frontera de Σ' , así que identificando dos copias de $\Sigma'|_\gamma$ obtenemos una cubierta doble de Σ' en donde α_i se levanta como un encaje que satisface (*).

Ahora supongamos que $l(\alpha_i) \geq 1$. Sea $\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_l}$ la sucesión de cruces de α con los μ_j 's.

Aplicar de manera directa la construcción en el Lema 4 puede no funcionar, porque es posible que al inicio α_i se 'enrolle' alrededor de c , como en la figura 14. Si la secuencia $\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots$ inicia como la secuencia completa de cruces de c con los μ_j 's, entonces subir o quedarse a la misma altura en los μ_{i_j} 's que cruzan a α_i no permitiría que la curva se proyectara a c inyectivamente.

Para evitar esto, comenzamos por desenrollar los dos extremos de α_i por medio de una secuencia de movidas triangulares que reduzcan las intersecciones de α_i con los μ_j 's hasta que no haya más movidas posibles.

Obsérvese que si hay una cubierta de Σ' donde el arco modificado α'_i se levante como un encaje $\tilde{\alpha}'_i$ que cumpla la condición (*), entonces α'_i se puede isotopar a α_i y $\tilde{\alpha}'_i$ será isotópico (por movidas triangulares) a $\tilde{\alpha}_i$. Por lo que $\tilde{\alpha}_i$ satisface la condición (*) y $\tilde{\alpha}_i$ es

FIGURA 14. Desenrollando el principio del arco α_i .

un encaje (pues si una movida triangular creara una intersección entonces los extremos de los dos arcos involucrados en la movida estarían en la misma curva de la frontera).

Ahora construimos una cubierta siguiendo la parametrización de α_i y subiendo en cada μ_{i_j} que cruza a α_i . Tenemos que mostrar que los arcos μ_i sobrantes pueden identificarse para que las curvas de la frontera donde el levantamiento de α_i comienza y termina sean diferentes y se proyecten a c y a c' con grado 1.

Subir cada vez que α_i cruza un arco μ_{i_j} se traduce como identificar $\mu_{i_j,j}^+$ con $\mu_{i_j,j+1}^-$ si μ_{i_j} tiene signo positivo, e identificar a $\mu_{i_j,j}^-$ con $\mu_{i_j,j+1}^+$ si μ_{i_j} tiene signo negativo. Todos los otros arcos $\mu_{j,k}^\pm$ están libres de identificaciones (por el momento).

Si μ_{i_1} no interseca a c , entonces los arcos $\mu_{j,1}^\pm$ están libres para todos los μ_j 's que intersecan a c , así que podemos identificar a $\mu_{j,1}^-$ con $\mu_{j,1}^+$ para obtener una curva \tilde{c} que cubra a c una sola vez.

Si μ_{i_1} interseca a c , la dirección en que α_i cruza a μ_{i_1} determina una dirección para c . Etiquetemos a los μ_j 's que intersecan a c cíclicamente en esa dirección como $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$, donde $\mu_1 = \mu_{i_1}$, y escojamos la orientación de estos μ_j 's para que las intersecciones en esta dirección sean positivas. Observemos que el punto inicial p de α_i no se encuentra en el intervalo de c entre μ_0 y μ_1 , pues si no existiría un movimiento triangular que quitaría la intersección de α_i con μ_1 .

Así que $\mu_{1,1}^+$ se identifica con $\mu_{1,2}^-$ y todos los otros $\mu_{j,1}^\pm$ están libres. Si $\mu_{i_2} \notin \{\mu_1, -\mu_0\}$ entonces $\mu_{1,2}^+$ y $\mu_{0,2}^-$ están libres, así que podemos identificar a $\mu_{1,1}^-$ con $\mu_{1,2}^+$ ya a $\mu_{0,1}^+$ con $\mu_{0,2}^-$.

Si $\mu_{i_k} \notin \{\mu_1, -\mu_0\}$ pero $\mu_{i_j} \in \{\mu_1, -\mu_0\}$ para $j < k$ entonces $\mu_{1,k}^+$ y $\mu_{0,k}^-$ están libres (pues si no $\mu_{i_{k-1}} \in \{-\mu_1, \mu_0\}$ o $\mu_{i_k} \in \{\mu_1, -\mu_0\}$), y entonces podríamos identificar a $\mu_{1,1}^-$ con $\mu_{1,k}^+$ y a $\mu_{0,1}^+$ con $\mu_{0,k}^-$ (ver figura 15a).

Si $\mu_{i_j} \in \{\mu_1, -\mu_0\}$ para todo j , entonces $\mu_{1,l+1}^+$ y $\mu_{0,l+1}^-$ están libres, así que podemos identificar a $\mu_{1,1}^-$ con $\mu_{1,l+1}^+$ y a $\mu_{0,1}^+$ con $\mu_{0,l+1}^-$ (ver figura 15b).

En todos los casos anteriores, identificar los arcos restantes $\mu_{j,1}^-$ con $\mu_{j,1}^+$ hace que la curva \tilde{c} que contiene el punto inicial del levantamiento $\tilde{\alpha}$ cubra a c una vez.

Ahora es necesario asegurarse de que la curva \tilde{c}' que contiene al punto final de $\tilde{\alpha}$ cubra a c' una vez, y de que $\tilde{c} \neq \tilde{c}'$. Esto puede requerir añadir otro nivel a la cubierta (aumentar su grado en 1).

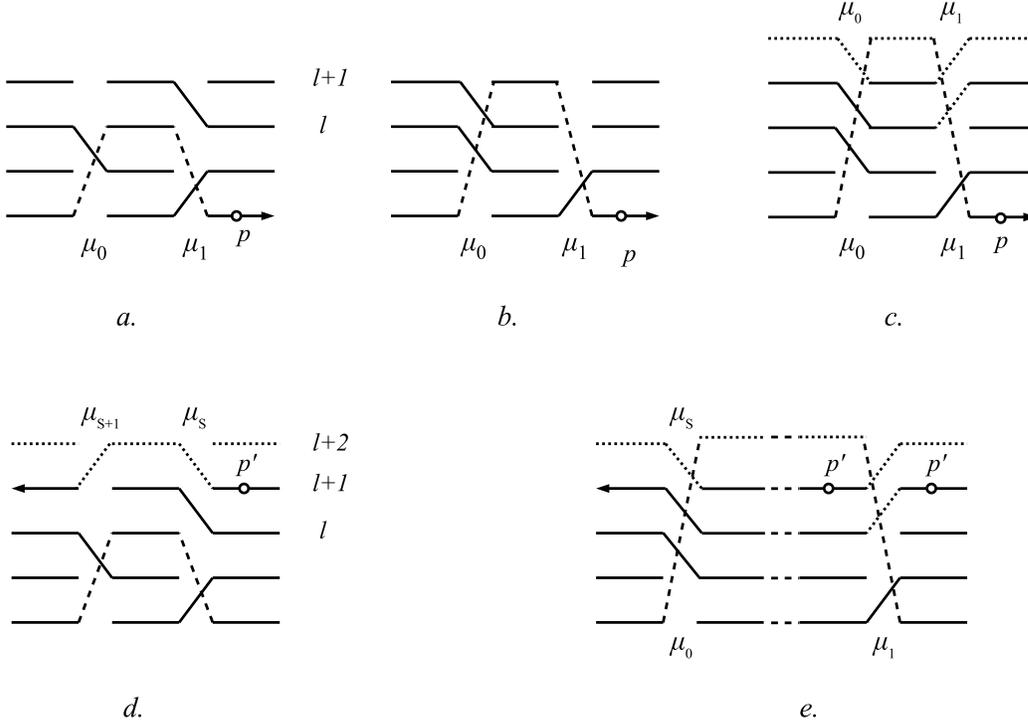


FIGURA 15. Identificaciones en las curvas de la frontera sobre c y c' .

Caso 1. Si μ_{i_l} no interseca a c' , entonces todos los arcos $\mu_{j,l+1}^\pm$ están libres para todos los μ_j que intersecan a c' , así que podemos identificar a $\mu_{j,l+1}^-$ con $\mu_{j,l+1}^+$ para obtener una curva \tilde{c}' que cubra a c' una vez. $\tilde{c}' \neq \tilde{c}$ ya que \tilde{c}' está en el nivel $(l+1)$ -ésimo.

Si μ_{i_l} interseca a c' , la dirección en que α cruza a μ_{i_l} determina una dirección para c' . Como antes, etiquetamos los μ_j 's que intersecan a c' cíclicamente en esa dirección, terminando en el punto final p' de α , como \dots, μ_r, μ_{r+1} , así ocurre que $\mu_{i_l} = \mu_r$, y las orientaciones de los μ_j 's positivas en esta dirección. Obsérvese que p' no está en el intervalo de c' entre μ_r y μ_{r+1} .

Caso 2. Si $\mu_{i_j} \notin \{\mu_1, -\mu_0\}$ para algún $j \leq l$, entonces el único arco ya identificado en el nivel $l+1$ es $\mu_{r,l+1}^-$. Podemos tomar una copia extra Σ_{l+2} e identificar el arco $\mu_{r,l+1}^+$ con el arco $\mu_{r,l+2}^-$ y el arco $\mu_{r+1,l+1}^-$ con el arco $\mu_{r+1,l+2}^+$. (Ver la figura 15c.)

Caso 3. Si $\mu_{i_j} \in \{\mu_1, -\mu_0\}$ para todo $j \leq l$, y en particular $\mu_r = \mu_1$ o $\mu_r = -\mu_0$, entonces las identificaciones de $\mu_{1,l+1}^-$ con $\mu_{1,l+1}^+$ y de $\mu_{0,l+1}^+$ con $\mu_{0,l+1}^-$ tienen que reemplazarse por $\mu_{1,l+1}^-$ con $\mu_{1,l+2}^+$ y $\mu_{0,l+1}^+$ con $\mu_{0,l+2}^-$. El único arco identificado en el nivel $l+1$ es $\mu_{r,l+1}^-$. Ahora tenemos dos subcasos:

3a. Si el arco μ_1 o el arco μ_0 no intersecan a c' , podemos identificar a $\mu_{r,l+1}^+$ con $\mu_{r,l+2}^-$ y a $\mu_{r+1,l+1}^-$ con $\mu_{r+1,l+2}^+$. Identificando todos los demás arcos $\mu_{j,l+1}^+$ con los $\mu_{j,l+1}^-$

resulta en una curva que cubre a c' una sola vez y que contiene a los extremos de $\tilde{\alpha}$ (ver la figura 15d).

3b. Si ambos arcos μ_0 y μ_1 intersectan a c' , los únicos otros arcos identificados en los niveles l y $l+1$ son $\mu_{1,l}^+$ con $\mu_{1,l+1}^-$ o $\mu_{0,l}^-$ con $\mu_{0,l+1}^+$, y $\mu_{1,l}^-$ (con $\mu_{1,l-1}^+$) o $\mu_{0,l}^+$ (con $\mu_{0,l-1}^-$). Así que podemos identificar a $\mu_{1,l+1}^+$ con $\mu_{1,l+2}^-$ y a $\mu_{0,l+1}^-$ con $\mu_{0,l+2}^+$, a $\mu_{1,l}^+$ con $\mu_{1,l+1}^-$, y a $\mu_{0,l}^-$ con $\mu_{0,l+1}^+$. Obsérvese que, como Σ' es orientable, y los signos de las intersecciones de μ_1 y μ_0 con c coinciden, entonces los signos de las intersecciones de μ_1 y μ_0 con c' también deben coincidir, así que los pegados son como en la figura 15e. Identificando todos los demás arcos $\mu_{j,l+1}^+$ con $\mu_{j,l+1}^-$'s y los $\mu_{j,l+2}^+$ con $\mu_{j,l+2}^-$'s hace que las dos curvas de la frontera sobre c' donde $\tilde{\alpha}$ puede terminar (las curvas que contienen a los arcos sobre c' en el nivel $l+1$, excepto el arco entre μ_r y μ_{r+1}) cubran a c' una vez.

Así concluye la demostración del Lema 7. \square

Si algún α_i es homotópico a un arco en la frontera de Σ' , entonces no hay cubiertas de Σ' en donde α_i se levante y además comience y termine en distintas curvas de la frontera, así que es necesario modificar nuestra construcción.

Consideremos un subarco maximal α' de α formado por un número impar de α_i 's, digamos $\alpha_s \alpha_{s+1} \dots \alpha_t$, homotópico (fijando sus extremos) a un arco de algún λ_r . Entonces α' es simple o está formado por un lazo homotópico a λ_r^n y dos arcos que lo conectan a λ_r . El lazo debe cruzar a la unión de los λ_i 's y los μ_j 's al menos n veces, pues se puede cortar en n curvas libremente homotópicas a λ_r , y cada una cruza a las otras al menos una vez.

Mediante una homotopía, podemos mover α' por λ_r y unirlo con α_{s-1} y α_{t+1} en un sólo arco $\alpha_{s-1} \alpha'' \alpha_{t+1}$ en Σ' , donde α'' , la imagen de α' , es paralela a una curva de la frontera. La homotopía reduce el número de intersecciones de α con los λ_i 's por al menos 2, pero puede aumentar el número de intersecciones con los μ_j 's en más que eso. Obsérvese que $\alpha_{s-1} \alpha'' \alpha_{t+1}$ no es homotópico a un arco en $\partial \Sigma'$.

La sucesión de cruces de α'' con los μ_j 's es igual a la sucesión de cruces de λ_r con los μ_j 's repetida n veces, más un segmento inicial de esa misma sucesión. En la sucesión de cruces de $\alpha_{s-1} \alpha'' \alpha_{t+1}$ con los μ_j 's los últimos cruces de α_{s-1} pueden cancelarse con los primeros cruces de α' , y los primeros cruces de α_{t+1} pueden cancelarse con los últimos cruces de α'' , pero después de eso, lo que queda de la sucesión de cruces de α'' sigue siendo monótono. Por la observación que sigue al Lema 4, no es necesario subir en todos los cruces de α'' con los μ_j 's para construir la cubierta para $\alpha_{i-1} \alpha'' \alpha_{j+1}$: basta con subir en el primer μ_j y cada vez que α'' vuelve a cruzar a ese μ_j , y no subir en ninguno de los otros μ_j 's hasta alcanzar el último μ_j que cruce a α'' . Así que para levantar α'' basta con subir $n+2$ veces. Por lo tanto la cubierta de Σ' en donde $\alpha_{i-1} \alpha'' \alpha_{j+1}$ se levanta como un encaje tiene grado a lo más $|\alpha_{s-1} \alpha_s \dots \alpha_t \alpha_{t+1} \cap \cup \mu_j| + 3$, y este número no es mayor que la suma de las cotas individuales para cada $\alpha_{s-1}, \alpha_s, \dots, \alpha_{t+1}$.

Ahora, identificamos las cubiertas Σ'_i correspondientes a los arcos α_i por las curvas de la frontera en que los levantamientos de los arcos comienzan y terminan, de esta forma α se levanta a una curva encajada cerrada. El resto de las curvas de la frontera de los Σ'_i aún tienen que aparearse con otras curvas para obtener una cubierta de Σ . Como mencionamos antes, esto se puede hacer siempre que para cada λ_j , las dos curvas

λ_j' y λ_j'' en $\partial\Sigma'$ tengan el mismo número de preimágenes de cada grado en $\sqcup\Sigma_i'$. Si esto no ocurre, duplicamos los Σ_i' 's con distinto número de preimágenes (como hicimos en el caso en que α no cruzaba a los λ_i' 's) para garantizar que el apareamiento se puede realizar.

Para estimar el grado de la cubierta, observemos que los arcos $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ en Σ' cuya unión es α son de dos tipos: arcos α_i 's 'largos' que corresponden a los arcos de α cortados por la subgráfica G' , y arcos α_i 's 'cortos', que ocurren donde α cruza por $N(G')$. Los α_i 's largos contienen a todos los puntos de intersección de α con los μ_j 's, y los α_i 's cortos son simples y conectan curvas distintas en la frontera de Σ' .

Las cubiertas Σ_i para los arcos α_i cortos son triviales y no hay necesidad de duplicarlas, pero las cubiertas Σ_i para los arcos α_i largos tienen grado $|\alpha_i \cap \bigcup \mu_j| + 2$ y puede ser necesario duplicarlas, así que si S es el conjunto de índices que corresponde a los α_i cortos y L es el conjunto de índices que corresponde a los α_i largos, entonces $|S| < |\alpha \cap G'|$ y $|L| = |\alpha \cap G'|$ y el grado total de la cubierta es a lo más

$$\sum_{i \in S} 1 + 2 \sum_{i \in L} |\alpha_i \cap \bigcup \mu_j| + 2 < |\alpha \cap G'| + 2(2|\alpha \cap (G - G')| + 2|\alpha \cap G'|) \leq 5|\alpha \cap G| = 5n(\alpha). \quad \square$$

Corolarios y últimos comentarios

En esta última parte, combinamos los resultados principales de los otros tres capítulos para dar cotas para $n(\alpha)$, $l(\alpha)$ y $d(\alpha)$ en función de $i(\alpha)$. Después, estudiamos la medida de complejidad que nos falta, $m(\alpha)$: la proposición que la relaciona con $i(\alpha)$ se encuentra en este capítulo porque no tenemos resultados que la relacionen directamente con el resto de las funciones que analizamos en las páginas anteriores, pero aún así guarda cierto atractivo. Por último, discutimos algunos de los problemas que surgieron naturalmente durante nuestra investigación y que consideramos que vale la pena explorar.

COROLARIO 8. Sea α una curva en una superficie Σ , entonces:

1. $(1 + \sqrt{8i(\alpha) + 1})/2 \leq n(\alpha) \leq i(\alpha) + 1$
2. $d(\alpha) < 5(i(\alpha) + 1)$, si Σ es orientable.
3. $l(\alpha) \leq (i(\alpha) + 1)(2 - \chi(\Sigma))$, si Σ es cerrada.

DEMOSTRACIÓN. La primera parte del corolario se sigue del Lema 1 y del hecho de que α cruza a alguna región fundamental D de Σ por $n(\alpha)$ arcos, estos arcos se pueden deformar por una homotopía (rel ∂) para que estén encajados y se crucen entre sí a lo más una vez, por lo que α es homotópico a una curva que tiene a lo más $n(\alpha)(n(\alpha) - 1)/2$ intersecciones. La segunda parte es el Teorema 5 y la tercera se sigue del Teorema 3 y del Lema 2. \square

Como existen curvas con cualquier número de intersecciones que se levantan a encajes en cubiertas de grado 2, $i(\alpha)$ no está acotado por ninguna función que dependa solamente de $d(\alpha)$.

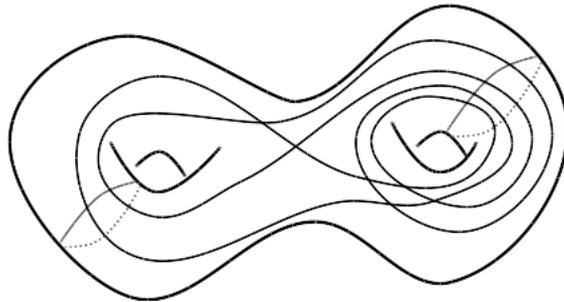


FIGURA 16. Una curva que se levanta a una cubierta de grado 2.

Si α es una clase de homotopía libre de curvas en Σ , sea $m(\alpha)$ el número mínimo de veces que una curva esencial en Σ intersecta a α . Es fácil ver que este mínimo corresponde a las intersecciones de α con alguna curva simple en Σ , y que $m(\alpha) \leq 2p_m(\alpha)$.

PROPOSICIÓN 1. Si α es una curva en una superficie Σ , entonces $m(\alpha) \leq 2\sqrt{i(\alpha)}+1$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que α corta a Σ en una colección de discos, pues de otro modo $m(\alpha) = 0$. Sea c una curva esencial en Σ que intersecta a α exactamente $m = m(\alpha)$ veces.

La cubierta universal $\tilde{\Sigma}$ está teselada por discos cuyos lados son líneas que se proyecta a α . Sea \tilde{c} una de las líneas que se proyectan a c , y sea R un disco cortado por \tilde{c} . Definimos la distancia entre dos regiones en $\tilde{\Sigma}$ como el mínimo número de veces que es necesario cruzar a las preimágenes de α para ir de una región a otra, y consideremos las regiones a distancia t de R (para $t < m/2$ estas son las regiones que se combinan con R después de descascarar t veces α). Como cualquier curva esencial en Σ cruza a α al menos m veces, se sigue que las regiones a distancia $\frac{m-1}{2}$ o menos de R se proyectan a diferentes regiones en Σ .

Los regiones a distancia t de R se tocan solamente en vértices, y para cada $t > 1$, la unión de las regiones a distancia t y $t - 1$ es un anillo. La línea \tilde{c} cruza dos regiones R' y R'' a distancia t de R . R' y R'' se conectan por una 'cadena' de regiones que rodean a R y están, alternadamente, a distancia t y $t - 1$ de R . Si $2t + 1 \leq m$, cada una de estas cadenas debe estar formada por al menos $2t + 1$ regiones (si no fuera así, podríamos reemplazar un arco de c por otro arco que cruzara menos regiones). Como las dos cadenas sólo tienen en común las regiones R' y R'' , juntas están formadas por al menos $4t$ regiones distintas, y como alternan entre estar a distancia t y estar a distancia $t - 1$ de R , al menos $2t$ regiones están exactamente a distancia t .

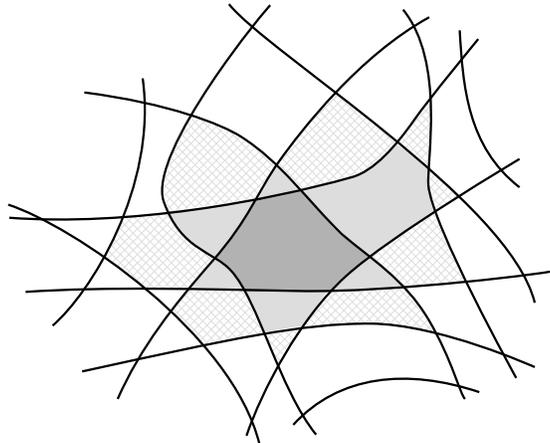


FIGURA 17. Regiones a distancia 1 y 2 de R .

La función $r(t)$ que cuenta el número de regiones a distancia a lo más t de R satisface $r(t) - r(t-1) \geq 2t$ y también $r(1) \geq 3$ por lo que $r(t) \geq t^2 + 2$. Si m es impar, entonces tomando $t = \frac{m-1}{2}$ tenemos que $i(\alpha) + 2 \geq |\Sigma - \alpha| \geq r(t) \geq t^2 + 2$ por lo que $i(\alpha) \geq (m-1)^2/4$ y $2\sqrt{i(\alpha)} + 1 \geq m$.

Si m es par, entonces las regiones R' y R'' a distancia $t = m/2$ de R se proyectan a la misma región de Σ , por lo que no podemos argumentar como lo hicimos arriba. En este caso, afirmamos que existen al menos t regiones a distancia t que se proyectan a regiones diferentes en Σ . Esto se sigue de que R' y R'' se pueden conectar por una cadena de regiones que rodean a R y alternan entre estar a distancia t y $t-1$ de R . Una cadena con s regiones da una curva en Σ que cruza s veces α , si dos regiones en la cadena (que tendría que estar a distancia t) se proyectan a la misma región en Σ , podemos esquivar las regiones entre estas para obtener una curva en Σ que cruce a α menos veces, y que pase alternadamente por las regiones a distancia t y $t-1$. La cantidad de regiones que dicha curva cruza en Σ debe ser al menos $n = 2t$, por lo que al menos t regiones se encuentran a distancia t de R . Tomando $t = \frac{m}{2}$ obtenemos que $i(\alpha) + 2 \geq |\Sigma - \alpha| \geq r(t-1) + t \geq t^2 - t + 3$, o sea, que $i(\alpha) \geq m^2/4 - m/2 + 1 > (m-1)^2/4$ y $2\sqrt{i(\alpha)} + 1 > m$. \square

Sobre lo que queda por hacer:

Todavía restan algunas preguntas abiertas.

Pregunta 1: ¿Hay una buena cota para el grado mínimo de una cubierta de Σ donde un levantamiento de α no se cierre (en términos de $i(\alpha)$, por ejemplo)? (Esto se relaciona con que el grupo de la superficie sea residualmente finito.)

Si $g(\alpha)$ es el grado mínimo de una cubierta donde α se levanta como un arco encajado (no cerrado),

Pregunta 2: ¿cuál es la relación entre $d(\alpha)$ y $g(\alpha)$? ¿Será que $d(\alpha) \leq g(\alpha)$? No tenemos ni siquiera ejemplos donde $d(\alpha)$ sea mayor que $2n(\alpha)$

Varias de las cotas dadas en estas páginas son óptimas, pero los ejemplos sugieren que la cota para $d(\alpha)$ en función de $n(\alpha)$ se puede mejorar.

Pregunta 3: ¿Es cierto que $d(\alpha) \leq 2n(\alpha)$?

Parece natural preguntarse si estas medidas de complejidad se comportan monótonamente, es decir, si una curva α (con auto-intersecciones mínimas) es cortada y pegada por algunas de sus auto-intersecciones para obtener una curva α' entonces claramente $n(\alpha') \leq n(\alpha)$ y $l(\alpha) \leq l(\alpha')$. Uno esperaría que se cumplan las desigualdades estrictas, pero el ejemplo en la figura 18 muestra que esto no siempre es cierto.

Pregunta 4: Incluso en el caso particular de que α' sea un sublazo de α , ¿se cumple que $d(\alpha') \leq d(\alpha)$?

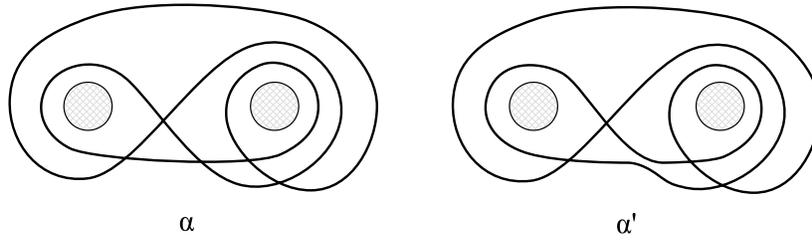


FIGURA 18. $n(\alpha) = 4 = n(\alpha')$.

Bibliografía

- [1] Aougab, T., Gaster, J., Patel, P., Sapir, J., Building hyperbolic metrics suited to closed curves and applications to lifting simply, *Math. Res. Lett.*, Volume 24, Number 3, 593–617, 2017.
- [2] Armstrong, M. A., *Basic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1983.
- [3] Brown, R., *Topology and Groupoids*, 2006.
- [4] Hass, J. y Scott P., Shortening curves on surfaces, *Topology*, 33 (1), 1994, 25-43.
- [5] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2009.
- [6] Hempel, J. Residual Finiteness of Surface Groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 32 (1), 1972.
- [7] Patel, P. On a Theorem of Peter Scott, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(8):2891-2906, 2014.
- [8] Prieto de Castro, C., *Topología Básica*, Fondo de Cultura Económica.
- [9] Rivin, I. Geodesics with one self-intersection, and other stories, *Advances in Mathematics* 231, 2012, 2391-2412.
- [10] Scott, P. Subgroups of surface groups are almost geometric, *J. London Math Soc.* (2) 17, 1978, 555-565.
- [11] Seifert, H. y Threlfall, W., *Seifert and Threlfall: A Textbook of Topology*, Academic Press, 1980.
- [12] Stillwell, J., *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, Universitext, 1992.